ORIGEN MUSICAL DE LAS PROPORCIONES:
UN ESTUDIO HISTÓRICO-FILOLÓGICO A FAVOR DEL CONOCIMIENTO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS

JESSICA TATIANA FUENTES CAUCALÍ
FRANKY YAMIT SANDOVAL MENDOZA

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
BOGOTÁ, D.C.
2017

ORIGEN MUSICAL DE LAS PROPORCIONES:
UN ESTUDIO HISTÓRICO-FILOLÓGICO A FAVOR DEL CONOCIMIENTO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS

JESSICA TATIANA FUENTES CAUCALÍ
CÓDIGO 2011240025
CC. 1032462477

FRANKY YAMIT SANDOVAL MENDOZA
CÓDIGO 2011240065
CC. 1010178652

Trabajo de Grado realizado como requisito parcial para optar al título de Licenciado en Matemáticas

Director:
Edgar Alberto Guacaneme Suárez
Doctor en Educación – Énfasis en Educación Matemática

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
BOGOTÁ, D.C.
2017

A mi madre por todo su amor y apoyo incondicional.

A mi padre quien inspiró mis gusto por las matemáticas.

A los profesores que me enseñaron a amar la docencia

y las matemáticas.

A Edgar Alberto Guacaneme por ser un ejemplo a seguir.

A mi compañero de trabajo de grado por constribuir enormemente

en mi carrera profesional.

***

A los profesores que me enseñaron amar las matemáticas.

A la señora que me enseño amar la historia.

A los que no están y a los que permanecen:

A Edwin

A Evila

Agradecimientos

Nuestros profundos y más sinceros agradecimientos a la Universidad Pedagógica Nacional, nuestra casa durante estos años de travesía. Al Departamento de Matemáticas representado por sus profesores, quienes con suma paciencia y cuidado velaron por nuestros procesos de formación, nos dieron ejemplo de integralidad, compromiso, profesionalismo y amor por el ejercicio de la docencia. Especialmente, queremos resaltar al profesor Edgar Guacaneme, quien no solo es un excelente profesional, también es una increíble persona de quién nos llevamos algunos de los recuerdos más gratos y los aprendizajes más grandes de nuestro paso por el pregrado. Infinitas gracias por orientaros en el viaje maravilloso que fue elaborar este trabajo, por compartir con nosotros su conocimiento y ayudarnos a descubrir el nuestro, por tantas y tan valiosas reflexiones que se quedarán para siempre en nuestra mente y que seguro las llevaremos a nuestras aulas y, por supuesto, gracias por su dedicación como formador de profesores de matemáticas.

Por supuesto, no podemos dejar de lado a nuestros familiares y amigos, nuestro sostén y apoyo, nuestra inspiración y fuerza en los momentos más difíciles. Sin su compañía incondicional esto no sería posible.

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de grado
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Titulo del documento	Origen musical de las proporciones: Un estudio histórico-filológico a favor del conocimiento del profesor de matemáticas
Autor(es)	Fuentes Caucalí, Jessica Tatiana; Sandoval Mendoza, Franky Yamit
Director	Guacaneme Suárez, Edgar Alberto
Publicación	Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional, 2017. 59 p.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional
Palabras Claves	RAZÓN; PROPORCIÓN; TEORÍA MUSICAL; HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS; CONOCIMIENTO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS.

2. Descripción

Este documento presenta el trabajo de grado en marco de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional. Constituye el estudio del origen de la Teoría de las Proporciones griegas desde las posturas de Szabó. Él argumenta que se dio en el trabajo de los pitagóricos con respecto a la música; para ello hace un análisis filológico fuerte frente a algunos términos musicales que se transformaron a conceptos matemáticos.
Otro asunto de estudio fue las implicaciones que tiene la Historia de las Matemáticas en el Conocimiento del Profesor de Matemáticas, en donde se reconoció la importancia e influencia que tuvo para los autores del trabajo de grado.

3. Fuentes

Calderón, D. (2013). *La regla de Bradwardine: Un momento en la historia de la proporcionalidad* (Tesis de pregrado). Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia.

Fernández, S. (1988). La proporción y la historia de las matemáticas. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *18*, 45-50.

Freudenthal, H. (1986). Ratio and proportionality. En *Didactical phenomenology of mathematical structures* (Vol. 1). Springer Science & Business Media.

González, P. (2004). La historia de las matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza. *Suma*, 45, 17-28.

Grattan-Guinness, I. (1996). Numbers, magnitudes, ratios, and proportions. En Euclid's Elements: How did he handle them?. *Historia mathematica*, 23(4), 355-375.

Guacaneme, E. (2016). *Potencial formativo de la historia de la teoría euclidiana de la proporción en la constitución del conocimiento del profesor de Matemáticas* (Tesis doctoral). Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Pérez, A. (director). (2000). Universo matemático: Pitágoras, mucho más que un teorema [documental]. España: Televisión Española

Puertas, M. (1994). *Euclides. Elementos Libros V-IX* (Vol. II). Madrid: Gredos.

Szabó, Á. (1978). The pre-euclidean theory of proportions. En *The beginnings of Greek mathematics* (pp. 99-184). México D.F.: D. Reidel Publishing Company.

4. Contenidos

El trabajo de grado cuenta con tres capítulos organizados de la siguiente forma:
En el Capítulo 1 se tratan las generalidades del trabajo de grado: Justificación, asunto de estudio, objetivos, aspectos metodológicos.
En el Capítulo 2, en la primera parte se aborda en esencia la lectura exhaustiva del documento de Szabó (1978) en el del cual hace un análisis histórico-filológico del origen de la Teoría de las Proporciones griegas. En la segunda parte, trata de los pormenores y asuntos tratados para entender la postura de Szabó, para ello se proponen cinco categorías, que se consideran enmarcan todas las discusiones planteadas en torno al tema.
Para el capítulo 3, habiendo estudiado históricamente un caso puntual, se analiza el por qué este estudio transformo los conocimientos como docentes de matemática; tomando de referencia dos categorías propuestas por Guacaneme (2016): las visiones y los artefactos

5. Metodología

Dentro de la metodología hubo tres etapas principalmente,:
En la primera se hizo una interpretación del texto guía, reconociendo los elementos principales e ideas, que luego fueron condensadas en un resumen. En la segunda etapa (que en algunos momentos fueron en paralelo a la anterior) se trataron algunos autores para ampliar y entender las temáticas e ideas tratados por Szabó. Por último, en tanto se estudió un tema particular, también se estudió y reflexionó sobre lo que se aprendió gracias a la Historia de las Matemáticas, siendo un proceso descriptivo, analítico e introspectivo frente a influencia que tuvo esta frente al conocimiento adquirido

6. Conclusiones

Los procesos inmersos en la interpretación de un documento histórico generan por sí mismos transformaciones en el conocimiento y, de forma colateral, discusiones valiosas para el docente de matemáticas.
El estudio del origen de la Teoría de las Proporciones griegas dio un espacio para reconocer desde un tema específico el valor de la HM y la diversidad de temas que da espacio para abordar.
Se reconoció la HM como fuente no solo de artefactos, sino como proveedora de conocimientos matemáticos que pueden transformar las acciones en el aula.

Elaborado por:	Fuentes Caucalí, Jessica Tatiana; Sandoval Mendoza, Franky Yamit
Revisado por:	Guacaneme Suárez, Edgar Alberto

Fecha de elaboración del Resumen:	23	07	2017

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
Educadora de educadores

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

ACTA DE EVALUACIÓN DE TRABAJO DE GRADO

Presentados y **aprobados** el documento escrito y la sustentación del Trabajo de Grado, en el tipo Monografía, titulado: "***Origen musical de las proporciones: Un estudio histórico filológico a favor del conocimiento del profesor de matemáticas.***", elaborado por los estudiantes:

Jessica Tatiana Fuentes Caucalí - código 2011240025 -cédula 1032462477
Franky Yamit Sandoval Mendoza- código 2011140065 -cédula 1010178652

Como requisito parcial para optar al título de **Licenciado en Matemáticas**, el jurado evaluador asigna 45 puntos al mismo.

Sugerencia de Distinción: Ninguna X Meritoria ___ Laureada ___

En constancia se firma a los 25 días del mes de agosto de 2017.

Director del Trabajo: Profesor: Edgar A Guacaneme S
EDGAR ALBERTO GUACANEME SUAREZ

Jurado: Profesor:
RODOLFO VERGEL CAUSADO

Tabla de Contenido

Lista de Figuras

Lista de Tablas

Lista de Anexos

Introducción

En este documento se explicará el origen, visto desde la historia, de la Teoría de las Proporciones tomando como base las ideas planteadas por Árpád Szabó. Se estudiará la segunda parte de su libro (Szabó, 1978) titulada "*The pre-euclidean theory of proportions*" la cual se fundamenta en el estudio lingüístico de términos propios de la teoría, analizando con minucia palabras como "*diastema*", "*horoi*", "*logos*" y "*analogia*", entre otros; para argumentar que el origen de esta teoría se dio a través del trabajo relacionado con la Teoría Musical por parte de los pitagóricos.

A partir de este análisis se plantea tres capítulos, que dan forma a este documento y los cuales se proceden a explicar:

En el primero, se tratan las generalidades del presente escrito. La justificación, objetivos y metodología usada al estudiar el tema de este trabajo de grado.

En el segundo, trata sobre el estudio realizado. En una primera parte se hace un resumen analítico del texto de Szabó. La segunda trata de los temas paralelos y recursos que se estudiaron para llegar a entender el texto mencionado.

En el tercer capítulo se hace una interpretación acerca de cómo la historia de las matemáticas trasciende en el conocimiento del docente de matemáticas en formación y en ejercicio, a través del análisis de una sección de la tesis doctoral de Guacaneme (2016).

Por último, se anexa una traducción no oficial del escrito de Szabó (1978).

De esta forma se busca generar interés y que sea una referencia para los docentes en formación tanto en el estudio de la historia de las matemáticas, como en el de la teoría de las proporciones.

1. Generalidades

En este capítulo se describirán los aspectos generales que aborda el documento y hacen parte del formato para la entrega de trabajos de grado escritos para la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional.

1.1. Justificación

La motivación principal para el desarrollo de esta monografía son las experiencias vividas en al menos dos cursos de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional ("Enseñanza y aprendizaje del Álgebra y la Aritmética" y "Geometrías no euclidianas"), donde se desarrollaron algunas de las temáticas desde un enfoque histórico, logrando con ello generar gran interés en la Historia de las Matemáticas, para nosotros como estudiantes.

Estas experiencias nos llevan a considerar, basados en la idea de González (2004) que el estudio del desarrollo de un concepto matemático sirve como motivación para los estudiantes y como recurso didáctico para los docentes en su enseñanza. Desde esta postura, surge entonces la necesidad de responder pragmática y efectivamente a un par de inquietudes, a saber: ¿por qué la historia sirve para la formación docente? y ¿para qué sirve cómo docente saber la historia de un concepto matemático? Preguntas fundamentales a la hora de abordar este escrito.

En un primer momento se quiso centrar la investigación en el concepto de antanairesis (un método pre-euclidiano para determinar la razón entre magnitudes o números), específicamente en su origen. En esta dirección el profesor Guacaneme reconoce en el trabajo de Szabó (1978), una opción de respuesta que parece exponer que para los pitagóricos la antanairesis surgió como una aplicación a la antigua teoría musical, asunto que podría contribuir a la historia de la proporcionalidad en sus orígenes científicos. Pero, al hacer una revisión detallada del texto se pudo reconocer que no trataba sobre el origen de la antanairesis, sino del origen mismo de la teoría de las proporciones y cómo lo abordaron, a través de la teoría musical, en su primigenia los pitagóricos. El texto generó gran impacto por lo cual se decidió continuar con el estudio de este; además, dada la complejidad de los textos históricos y este en especial por su análisis lingüístico-matemático, se dispuso un momento exclusivo para hacer un análisis exhaustivo de él.

De esta manera interesa abordar el estudio de tal documento y de otros que versan sobre las teorías pre-euclidianas de la razón y proporción. Así, deberemos lograr conocimiento suficiente para responder al menos dos interrogantes generales: ¿cómo entendían la teoría de las proporciones los pitagóricos? y ¿cuál es la relación entre la antigua teoría musical y teoría de las proporciones?

1.2. Asunto de estudio

Teniendo en cuenta la justificación planteada, se identifican dos asuntos de estudio. El primero, trata un caso particular de estudio de un objeto matemático desde su historia; para nuestro caso: el origen de la Teoría de las Proporciones griegas y su relación con la teoría musical. En segundo lugar, sobre cómo la Historia de las Matemáticas influye en el Conocimiento del Docente de Matemáticas.

1.3. Objetivos

A continuación, se describen los objetivos planteados para este estudio.

1.3.1. Objetivo General

Identificar los elementos fundamentales del origen de la teoría de las proporciones en las teorías pre-euclidianas, centrados en la teoría musical pitagórica y reconocer la importancia del análisis de la historia de las matemáticas dentro de la formación docente.

1.3.2. Objetivos Específicos

- Reconocer la postura de diferentes autores con respecto a la teoría de las proporciones y su origen, además de disponer de un texto, en nuestro idioma, sobre el tema que sirva de apoyo y soporte a la investigación, así como a posibles futuras investigaciones.
- Identificar en un tema puntual, en la teoría de las proporciones, qué elementos inmersos en la historia de las matemáticas pueden influir en el desarrollo del conocimiento del docente de matemáticas.
- Promover el estudio de la historia de las matemáticas y del desarrollo histórico de conceptos matemáticos, revelando la importancia en el proceso de construcción de la actividad y conocimiento docente.

1.4. Aspectos metodológicos

Las tareas propuestas para construir este documento se pueden organizar en tres momentos, es de resaltar que muchas veces se llevaron en paralelo.

En el primer momento, se hizo una traducción no oficial del documento de Szabó (1978). Para el segundo, se hizo la interpretación detallada del documento mencionado, haciendo en paralelo investigaciones acerca de diversos temas a los cuales aludía y era necesario para interpretarlo. En el tercer momento, se estudió cómo la Historia de las Matemáticas (HM) de un tema específico influenció nuestro Conocimiento de Profesores de Matemáticas (CPM), haciendo un contraste entre las respuestas que dio Guacaneme (2016) frente al para qué sirve la HM.

2. Estudio de las posturas de Szabó

En este segundo capítulo, en un primer momento, se sintetizan las ideas que plantea Szabó (1978) en el texto utilizado como guía, haciendo el resumen analítico de la Parte 2: “*The pre-euclidean theory of proportions”*. En el segundo momento, se categorizan en cinco grupos los temas que se discutieron o abordaron en el marco del estudio de las ideas de Szabó.

2.1. Resumen analítico

En esta sección del escrito se resume la Parte 2 “*The pre-euclidean theory of proportions*” del libro titulado “*The beginnins of greek mathematics*” escrito por el autor húngaro Árpád Szabó donde principalmente argumenta la relación que tuvo la teoría musical para el desarrollo temprano de la teoría de las proporciones. El documento de Szabó está dividido en 23 apartados de corta extensión, donde para cada uno de ellos se presentará un resumen.

En el **Apartado 1** discute el concepto de la inconmensurabilidad en la antigüedad, tomando del texto clásico *Elementos* de Euclides la Definición 5 del Libro V (Definición V.5). Por medio de un análisis a esta definición concluye que esta debió ser creada pensando en magnitudes inconmensurables. Esta definición, que se le atribuye a Eudoxo, pudo ser concebida en un momento donde no importaba si las magnitudes que se estaban comparando eran de este tipo o no. Siguiendo la idea mencionada, surge la pregunta del por qué la definición fue usada antes; la respuesta se puede dar analizando la Definición 21 del Libro VII (Definición VII.21) la cual versa sobre la razón entre números, dejando a un lado las magnitudes.

Dado que en la Definición VII.21 se usa para números y mientras que la Definición V.5 necesariamente se usó con magnitudes, se concluye que la segunda tuvo un origen posterior. Si, además, se toma la Proposición VI.13 donde se construye la media proporcional, solo se podría demostrar teniendo la Definición V.5, pero se tienen pruebas de que la media proporcional fue usada mucho antes que el mismo Eudoxo viviera. Ahora la cuestión es cómo pudo ser probada; históricamente se plantean tres ideas para ello: En la primera, se acepta una prueba intuitiva de la validez de la construcción; en la segunda, se prueba a través de la Definición V.5 bajo la idea de que esta es mucho más antigua de lo que se ha creído; por último, cabe la posibilidad de que hubiese existido una definición pre-eudoxiana que la justificara.

Aristóteles aporta la llamada definición "*antifairetica*" o "*antanairetica*": "Si su antifairesis es la misma las magnitudes están en la misma razón". Esta se supone debió superar varias dificultades con respecto a la inconmensurabilidad, pero él no tuvo intención alguna de aportar a la demostración.

Ahora la principal pregunta es si los griegos estaban pensando en la inconmensurabilidad o únicamente pensaban en aplicar esta definición a números. Estos cuestionamientos mencionados muestran que la inconmensurabilidad ha influenciado el desarrollo de la teoría de las proporciones, pero su génesis ha sido de menor interés. El texto pretende dilucidar el origen histórico de la teoría pre-euclidiana de las proporciones mediante un estudio filológico de algunos términos, que revelen una conexión con la teoría de la música.

En el **Apartado 2** retoma la primera parte del libro donde aborda principalmente el análisis filológico del término "*dynamei symmetros*", de este concluye que el estudio de la historia de un término muestra el origen de algunos conceptos matemáticos, pero no pasa lo mismo para la teoría de las proporciones, puesto que esta no era una invención griega y señalar la idea de su origen es difícil, puesto que se remonta al inicio mismo del pensamiento humano. En general las investigaciones se preocupan por abordar el origen de la teoría de las proporciones que presenta Euclides, pero para realizar esto se requiere abordar el origen mismo de esta visión enfocado en un análisis pre-euclidiano. Este análisis se puede construir mediante el estudio de términos como "*logos*" (razón), "*analogía*" (guardar la misma razón), "*análogos*" (en la misma razón) y "*horos*" (término de una proporción).

Sostiene que el estudio de esta teoría de las proporciones pre-euclidiana se debe comenzar desde el estudio del término “*horos”*, puesto que es usado reiterativamente en *Elementos* como “definición” pero también con el significado de “punto final”. Una investigación sobre esto debe responder algunos cuestionamientos: qué significa que una proporción tenga puntos finales o que tenga cuatro de estos y qué en cambio una razón tenga tan solo dos. Estas preguntas cobran sentido cuando se relaciona con la Teoría Musical Pitagórica, puesto que la razón entre dos números era llamada *diastema* y tenía dos significados, el primero, como intervalo musical, que expresa la razón entre dos números de un intervalo; la segunda, como segmento de línea. Si se interpreta en el segundo caso, cobra sentido el análisis de la palabra “*horos”* si se encuentra conexión entre razones y segmentos.

En los siguientes capítulos busca dos objetivos, mostrar cómo los intervalos musicales se expresan como razones entre números, y la equivalencia entre *logos* y *diastema,* uno en la geometría y el otro en la música.

En el **Apartado 3** tiene como objetivo hablar sobre *diastema* y *opoi* pues estos términos ofrecen información sobre la teoría pre-euclidiana de las proporciones como se mencionó en el anterior capítulo. Para empezar, resalta algunos hechos importantes de la teoría musical: el *diastema* como consonancia y *diastema* como intervalo.

Primero, como consonancia *diastema* significaba intervalo, es decir la **distancia entre dos tonos**. Los teóricos de la música estaban interesados principalmente en los llamados intervalos concordantes o consonancias, de las cuales se resaltan tres: la octava, la cuarta y la quinta, ya que los nombres griegos de estas palabras arrojan información sobre el origen de diastema como se nombra a continuación: La octava se llama *διαπασῶν* (el acorde pasa por todas las ocho cuerdas), la cuarta *διατεσσάρων* (el acorde pasa por cuatro cuerdas) y la quinta *διάπεντε* (el acorde que pasa a través de cinco cuerdas). Lo anterior indica que las cuerdas estaban numeradas consecutivamente pero no fue así, pues originalmente cada una de ellas tenía su propio nombre. La cuerda superior fue llamada *ὑπάτη* (la más larga y la más alta) produjo el tono más bajo, la cuerda inferior *νήτη* (la más corta y la más baja) produjo el tono más alto. Las cuerdas restantes yacían entre las dos más externas; de estas, vale la pena mencionar la *μέση* y la *παραμέση*. A las consonancias principales se les llamaba también por otros nombres, las cuales tenían otro significado: la cuarta se llamaba $\sigma\upsilon\lambda\lambda\alpha\beta\acute{\alpha}$ (mantener unida la primera y última cuerda de un tetracordio), la quinta fue llamada $\delta\iota o\xi\varepsilon\tilde{\iota}\alpha$ (dos tetracordios se juntaron y la nota que cada uno produjo se describen generalmente la nota aguda ὀ$\xi\varepsilon\tilde{\iota}\alpha$) y la octava se llamó ἁ$\varrho\mu o\nu\acute{\iota}\alpha$ (unión de dos tetracordios, es decir las dos cuerdas externas de dos tetracordios unidos sonaron para producir una octava). Además, observaron que la extensión de una octava es una cuarta y una quinta.

Ahora en el *diastema* como intervalo, se plantea que fue en la práctica musical que las cuerdas recibieron primero nombres y más tarde le fueron asignados números; también las consonancias fueron descritas por las cuerdas que los produjeron. Aunque destaca que la palabra diastema significa el "intervalo por sí mismo" (es decir, no el concorde –*symphonia*– de dos sonidos, sino su distancia del uno al otro), se deriva de la teoría musical, no de la práctica. Las consonancias recibieron sus nombres de acuerdo a los instrumentos donde fueron tocadas, es evidente que ocurrió una transferencia metafórica de nombres en este caso, por ello el término *diastema* (intervalo) se entiende como metáfora. Szabó cita a Burkert para ver cómo este término se interpreta, el cual afirma que la representación de *diastema* se puede dar en términos de líneas rectas, pero con varias interpretaciones dice que no es válido hablar de una representación de este tipo, pues señala que el intervalo musical (*diastema*) era una línea recta real y concreta que era mensurable en longitud, "la concepción (de intervalos) como líneas rectas" y "la teoría de las proporciones musicales" no se puede contrastar una con otra, porque la palabra "*diastema"* (intervalo) significa tanto "línea recta" como "razón numérica de un intervalo musical". Algunos autores explicaron el *diastema* como metáfora; el primero fue Aristóxeno, quien se vio obligado a reinterpretar el significado de *diastema* de una manera metafórica, tanto porque quería dejar a un lado la enseñanza de los pitagóricos y porque él atribuye diferencias en el tono a si la cuerda era más o menos tensa, tuvo que cambiar en este sentido, ya que no quería admitir que las razones numéricas tenían nada que ver con consonancias. Los pitagóricos siempre asociaban dos números a un *diastema* musical.

Todo esto con el fin de interpretar qué "intervalo" y "razón numérica" son conceptos equivalentes en la terminología de la teoría musical de Pitágoras.

En el **Apartado 4** describe cómo Pitágoras usó el canon (regleta) que dividió en 12 partes, y cómo experimento con este bajo tres perspectivas. En la primera, se centraba en la cuerda que se dejaba vibrar; en la segunda, analizaba el trozo de cuerda que no vibraba; por último, se centraba en la tabla con puente que se enumeraba. Se plantea el ejemplo de la quinta donde se toca la cuerda en su totalidad y luego en el traste 8 ($12:8$); estos se llamaron los puntos finales del intervalo (12 y 8). Así los pitagóricos armaban el *diastema* como una razón numérica y conocían la relación entre el punto final. A la parte que no vibra se le asoció la palabra que significaba "línea recta" en el lenguaje matemático: *diastema*; además, este término también significó intervalo musical. Así como los puntos finales *horoi* (los cuales eran números) también se utilizaron para señalar la "relación entre dos puntos". Hay ideas que el canon no pudo ser un instrumento hecho en la época pitagórica, pero esto se desmiente cuando Platón habla, en diversas citas, de intervalos como $1\frac{1}{3}$ y $1\frac{1}{2}$ (números relacionados con la cuarta y quinta).

En el **Apartado 5** se refiere principalmente a la historia temprana de la teoría de las proporciones, en los capítulos anteriores el tema de la música se toca incidentalmente, incluso se ha resaltado que el estudio de las palabras $\delta\iota\acute{\alpha}\sigma\tau\eta\mu\alpha$ y ὅϱοι dirigen la investigación a la teoría de las proporciones. Ahora con las discusiones dadas se puede decir que hay dos aspectos en la pregunta de cómo los pitagóricos llegaron a expresar intervalos por medio de razones numéricas: Por un lado, obteniendo las razones de las consonancias y, por otro, con la medida de tonos. Pero en la opinión del autor esto solo podría ser respondido estudiando la literatura clásica y clásica tardía que se ocupa de esta cuestión.

Históricamente la teoría musical griega se basó en experiencias y experimentos con instrumentos de cuerda, teniendo en cuenta esto es evidente que los números proporcionales eran razones entre longitudes, además que los conceptos diastema y horoi no pudieron haber existido sin experimentos musicales con el canon. Todo esto lleva a pensar que relacionar las razones con consonancias estaba en un segundo plano para los pitagóricos, Pitágoras había relacionado los sonidos de unas cuerdas tensas por el peso de unos martillos y encontró la octava, quinta y cuarta. Investigaciones actuales afirman que esto no pudo haber sido cierto ya que, por ejemplo, la octava con este peso suspendido se hubiese encontrado a razón de $1{:}\sqrt{2}$ y no de $1{:}2$. Investigando a Aristóxeno (opositor de Pitágoras) se piensa que solo quería que los lectores de Pitágoras creyeran que por medio de la tensión de la cuerda se podría mostrar las razones atribuidas a consonancias (lo que fue un invento). Puede que los pitagóricos sí hayan atribuido razones a las consonancias, pues una cuerda podría representar un número, Szabó concluye que los antiguos teóricos fueron inconsistentes al relacionar números grandes con las notas más grandes (las graves).

El **Apartado 6** aborda que el concepto de *diastema* no solo pudo significar "el intervalo entre dos tonos" sino también las dos secciones de cuerda que producen el sonido (la que vibra y el segmento que no). Estas dos líneas representan las longitudes de cuerda que eran expresadas como números, entonces, en sí representaban los números. Los *horoi* fueron visualmente el número 12 y el número donde se pulsaba al hacer sonar la cuerda por segunda vez. Estos eran los números que caracterizaban el intervalo y de forma similar se usó en geometría. Al no tener un símbolo para el cero se hizo más fácil caracterizarlo con una sola letra, así el *diastema* se representó por dos líneas. El número se asignó a la línea y esta línea fue nombrada con una sola letra; cosa que utilizó Euclides en sus teorías.

En el **Apartado 7**, señala que en el transcurso de la investigación *diastema* ha tenido dos etapas en su desarrollo. En la primera etapa se reconoce *diastema* (intervalo musical) como la longitud de cuerda en el monocorde que no vibra teniendo dos puntos finales (*horoi*) leídos como dos números en el canon y en la segunda según el *Sectio Canonis* son las dos secciones de cuerda que produjeron notas, que también era la razón entre los dos números que expresan las dos secciones de cuerda. Históricamente se asume que el canon debió ser dividido en doce partes, pero se puede suponer que el canon debió ser dividido en cuatro, tres y dos partes para hallar las tres consonancias principales. El autor argumenta porqué el canon fue dividido primero en las tres consonancias diferentes y luego divido en doce, hace un estudio exhaustivo de la palabra *diastema* y el nombre que le daban los pitagóricos a las tres principales consonancias. Numerar el canon conllevó a innovaciones: Primero, el *diastema* que hace referencia a la sección de cuerda que no vibra es el intervalo musical entre dos sonidos sucesivos; segundo, lo puntos finales *opoi* fueron introducidos después de numerar el canon y, tercero, al numerar el canon ya no tenía sentido hablar de la quinta y la cuarta como $1\frac{1}{2}$ y $1\frac{1}{3}$ fracciones, sino se manejaban los puntos finales como números enteros y la razón entre ellos describía el tipo de consonancia.

El **Apartado 8**, trata sobre la búsqueda del total de la cuerda teniendo el segmento de cuerda que genera la cuarta o la quinta este segmento se tomó como la unidad y se encontró que para a la cuarta sería $\frac{1}{3}$ y para la quinta $\frac{1}{2}$. Para hallar estas fracciones se hizo por ensayo y error, una vez tenían longitud de la cuerda que producía alguna de estas dos consonancias se hacían restas sucesivas con el pedazo de cuerda que no vibraba hallando que para la cuarta era tres veces y para la quinta dos veces. Se desconoce el origen del llamado Algoritmo de Euclides, pero se sugiere que este se dio en la Teoría Musical Pitagórica al querer hallar las razones mencionadas entre longitudes de cuerda en el monocorde.

En el **Apartado 9** se habla sobre las ventajas de haber numerado el canon, se discute el porqué es dividido en doce partes, encontrando una razón evidente: al dividir el monocorde en dos para hallar la octava, en cuatro para hallar la cuarta y en tres para hallar la quinta, se halló el mínimo común múltiplo de 2, 3 y 4 que es 12 con el fin de facilitar la ubicación de cada consonancia. Además de esto se aprecia la importancia de las consonancias. Según fuentes antiguas la quinta es considerada como superior a la cuarta, ya que siempre se aborda primero la nota con mayor longitud de cuerda, por este mismo argumento la octava sería superior a todas, seguiría la quinta y finalmente la cuarta.

En el **Apartado 10** se cuestiona el por qué ocurrió que el cociente entre razones en la teoría de proporciones se la llamó diferencia. En el caso de la cuarta $(12{:}9)$ y la quinta $(12{:}8)$ para la división de las diastemas el objetivo fue encontrar qué tan pequeño era cada una con respecto a la otra, como estaba delimitado por los números del canon, el resultado fue 9 y 8. De esto se puede decir que el cociente entre esas fracciones lo vieron como la diferencia entre la línea más larga con respecto a la corta. Así mismo se puede ver la multiplicación de razones como la suma de segmentos de cuerda, aunque se debe tener en cuenta que esta adición se hace después de aplicar una de las dos consonancias y luego aplicar la otra. Se deduce la multiplicación como una suma (después de la composición de consonancias) y la división como una resta, proviene trabajo directo con el canon.

En el **Apartado 11**, se hace un recuento sobre lo que se ha estudiado de la palabra *diastema*; se concluye que *diastema* y *logos* significan la razón entre dos números, uno en la teoría musical y el otro en geometría, respectivamente. Ahora se intentará encontrar el origen de la palabra *logos* ya que no se sabe si se originó en la música o en la geometría, para ello primero se abordará la palabra *analogia* que hasta el momento ha significado proporción, a través de su origen se espera encontrar el mismo de la palabra *logos*.

En el **Apartado 12**, se aborda el significado del término matemático "*logos"* que fue "razón entre dos números", por otro lado, el término *analogia* se tradujo al latín como "*proportio"* y fue usado para describir la relación entre un par de razones. Se sabía dos asuntos sobre *analogia*: primero, era una palabra la cual su uso no era de uso cotidiano sino una *palabra sabia* solo utilizada en matemáticas, que posteriormente fue usada en gramática y de allí pasó a ser parte de del lenguaje cotidiano. Segundo, no se sabía el significado exacto y verdadero de la palabra *analogia* como se evidencia en traducciones sobre el término.

El **Apartado 13** se estudia la palabra *analogon* la cual trata de aquellos números o magnitudes que constituyen una proporción. Se hace un estudio sobre los diferentes significados que tiene esta palabra y se concluye que es una proporción, una relación entre dos razones, estas razones las representa *logos* (razón entre dos números y *analogon* relación entre cuatro números).

En el **Apartado 14**, se cuestiona como "*ana"* llegó a significar "la igualdad de", dado que la palabra "*analogon"* expresó "estar en la misma razón" y *logos* significó razón, este análisis es puramente lingüístico. Se tiene que malas traducciones de términos y sus definiciones hacen que no se sepa en qué sentido se plantearon. Por ejemplo, en el uso de la palabra "kata" se usó del mismo modo, como prefijo de para otras palabras, de esto, se reconoce que “*ana*” y “*kata*” a pesar que se usaron del mismo modo, no significaron lo mismo. Su significado cambió y llegó a tener el mismo significado que análogamente. En lo que se refiere al uso del prefijo “*ana*” siempre se relacionan con números, como en *ἀνά δύο* (dos cada vez) o *ἀνά μέρος* (un fragmento a la vez). Esta última llegó a significar “tomado en partes”, así se asocia *analogos* con el significado de “tomado en *logoi*” pues que el prefijo *ana* tuvo un sentido distributivo y *logos* significó “razón entre dos números”.

En el **Apartado 15** se hace un estudio a la composición *ana logos* y cómo de allí se llegó a la palabra *analogon*, el autor concluye que dentro de este análisis no se puede definir con exactitud cuándo hubo este cambio, lo mismo pasa cuando se intenta determinar el cambio entre *analogon y analogia*, es incierto el origen de estos cambios.

En el **Apartado 16**, estudia cómo el significado del término *analogon* en matemáticas cambió. En su origen significó “igual cuando se toman en *logoi*” y pasó a ser “proporcional”, pero el término pasó a estar en desuso. La noción de “estar en la misma razón” se usa en 17 proposiciones del Libro V y en 12 de ellas se usa el término *autologon*, en cambio *analogon* tan solo en 5 proposiciones. Las proposiciones V.19 y VII.11 difieren, en griego, tan solo en estas palabras. En la V.19 se establece para magnitudes mientras que la VII.11 es solo para números. A pesar que es una diferencia sutil en lo lingüístico, desde lo matemático hace que las proposiciones sean completamente diferentes.

En el **Apartado 17** nombra lo que se ha discutido sobre las operaciones en el canon; para los pitagóricos estas operaciones correspondían a cortes sobre el canon, debían saber dónde poner un puente (donde se cortaba la cuerda) para producir una consonancia. Estos cortes eran llamados “medias musicales”, se trabajaron con diferentes medias, pero principalmente hay tres: la media aritmética, geométrica y armónica (o subcontraria).

En particular se puede afirmar que la octava es dividida en forma especial por dos medias, a saber; la media aritmética entre 12 y 6 que es igual a 9, número que divide a la octava en la una cuarta y una quinta debido a que se obtienen las razones $12{:}\,9$ y $9{:}\,6$; en este sentido, como 12 y 6 son números mayores, permiten describir el intervalo más pequeño, la cuarta; por otro lado, como 9 y 6 son números menores, permiten describir la quinta, el cuál es el intervalo más grande. Así mismo, la media armónica entre 2 y 6 es 8, número que divide a la octava en quintas y cuartas debido a que se obtienen las razones $12:8$ y $8:6$, en este caso los números mayores describen el intervalo más grande: la quinta $(12:8)$, y los menores el más pequeño: la cuarta $(8:6)$.

En conclusión, la armónica es la subcontraria de la media aritmética. Tomando como punto de partida las medias anteriormente mencionadas, Szabó menciona un hecho histórico donde muestra que la palabra *logos* significa cualquier tipo de relación entre dos números y la palabra *analogia* como la identidad de cualquier tipo de relación entre dos números.

En el **Apartado 18**, Szabó señala que, aunque se denotaba como *logos* a cualquier tipo de relación entre dos números (por ejemplo, la media aritmética o la armónica), pero terminó por tomar este nombre la relación llamada razón. El autor plantea que el significado de razón se obtuvo por una especialización del segundo significado nombrado antes. Para esto plantea dos argumentos: Uno, al dividir el canon y al operar en él, esta especialización del término ocurrió cuando se quería hacer comparaciones entre segmentos de cuerda. Se introdujo para denotar cualquier par de números que formaban los *horoi* de un *diastema*. Dos, al crearse una ambigüedad en el término *diastema* (línea recta y razón) se usó el término *logos* que paso de ser “relación entre dos números” a razón.

En el **Apartado 19**, nombra que *logos* ha significado “la razón entre dos números”. En este capítulo Szabó muestra cómo esta palabra paso de considerarse “razón” para luego significar “razón entre dos números”. Para ello menciona situaciones en que *logos* cambió de significado, en la cotidianidad equivalió a “una serie de cosas” o “una combinación de varios objetos o números” y por último “la combinación entre dos números”. Para los pitagóricos dar lugar a esta palabra fue de suma importancia para poder ver la racionalidad del universo.

En el **Apartado 20**, enuncia que en un primer momento la teoría de las proporciones se trabajó únicamente en la música, luego pasó a la aritmética y la geometría; esta afirmación tiene sentido al tener su origen lingüístico varios términos allí. La teoría de las proporciones tomó sus conceptos básicos de la teoría musical y la aplicación a estos nuevos campos provocó cambios en los conceptos mismos. Por ejemplo, se tenía una definición para números planos semejantes, donde se relacionaba sus lados, en el caso del 3 y el 12 se pueden formar rectángulos de 3×1 y 6×2, respectivamente, estos resultaban siendo "iguales en logoi" pues $1{:}\,2 = 3{:}\,6$. En sus inicios se debió tener una noción intuitiva de semejanza de rectángulos, pero hasta que se aplicó lo desarrollado en la teoría musical no fue formal. Al relacionar la "semejanza geométrica" con *analogia* (iguales en *logoi*) llevó a que la palabra fuera usada en contextos no matemáticos con el sentido de semejanza. Se conjetura que los conceptos de la teoría musical fueron usados primero en la aritmética, puesto que había la ventaja que en ella los números también eran representados como líneas. Estos conceptos pasaron a la aritmética geométrica, para conducir al descubrimiento de la inconmensurabilidad lineal.

En el **Apartado 21**, se habla más a profundidad sobre la media geométrica pues en el capítulo 2.17 solo se menciona. La media geométrica fue un problema de estudio para los amantes de la música pues era casi imposible encontrar dos longitudes que cumplieran esta propiedad, en verdad se tuvo que hacer tratamiento geométrico para encontrar este tipo de media.

En el **Apartado 22** aborda la postura del autor acerca de cómo se llevó a cabo el descubrimiento de la construcción de la media proporcional. En la Proposición VI.13 se soluciona de manera general, aunque es de creer que había un caso particular que estudiosos conocían antes de Euclides: El problema de duplicar el área de un cuadrado, que es equivalente a encontrar una media proporcional entre un número y su duplo. Lo primero que se puede suponer es que lo reconocieron de forma visual e intuitiva (se muestra en la Figura 1).

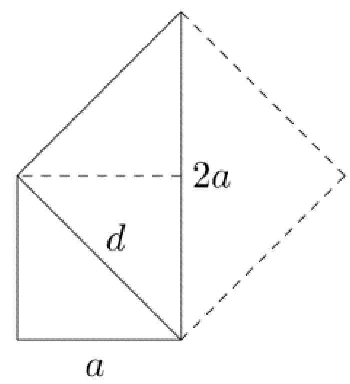


Figura 1. Duplicación del área del cuadrado.

Lo segundo, fue que formaban un *logos* con respecto a los lados y sus diagonales de cada uno de los cuadrados formados, además de ser iguales en *logoi*, es decir $a\colon d = d\colon 2a$. Esta solución solo es válida sí los términos *logos* y *analogia* son aplicables a números y magnitudes es decir en marco de la definición de proporcionalidad de Eudoxo. La forma como abordaron este caso específico ayudó para llegar a la solución de dos segmentos arbitrarios. Se utilizó triángulos rectángulos semejantes y se observó que d cumple dos papeles diferentes: era la diagonal del cuadrado pequeño y un lado del cuadrado grande adyacente al ángulo recto. Utilizando esta información intentaron construir un par de triángulos semejantes. Para el caso de un triángulo isósceles se puede hacer construyendo la perpendicular que pasa por el vértice del ángulo recto como muestra la Figura 2.

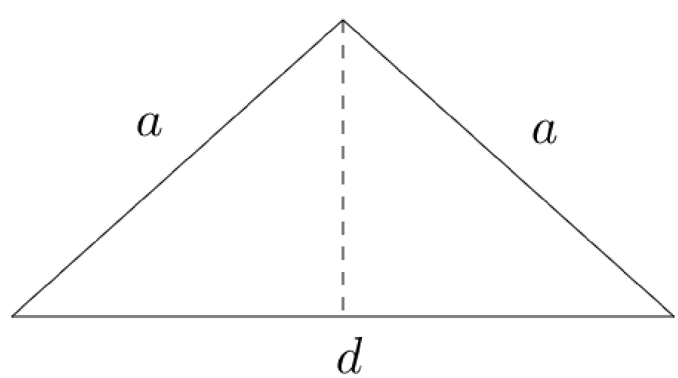


Figura 2. Perpendicular en un triángulo isósceles.

Esta construcción debió haber sido fundamental para reconocer que los triángulos construidos de este modo eran semejantes, así como en los triángulos rectángulos no isósceles, esto se muestra en la Figura 3:

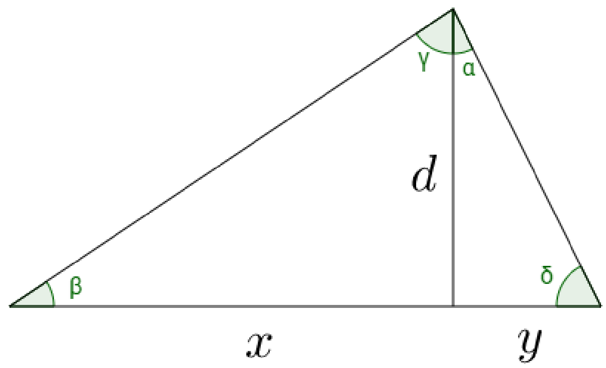


Figura 3. Perpendicular en un triángulo no isósceles

En este caso d también cumple con dos papeles: es el lado más largo de los lados del triángulo pequeño y el más corto de triángulo mediano. Gracias a esto pudieron hallar la media proporcional entre x e y formando el *logoi* ($x: d = d: y$).

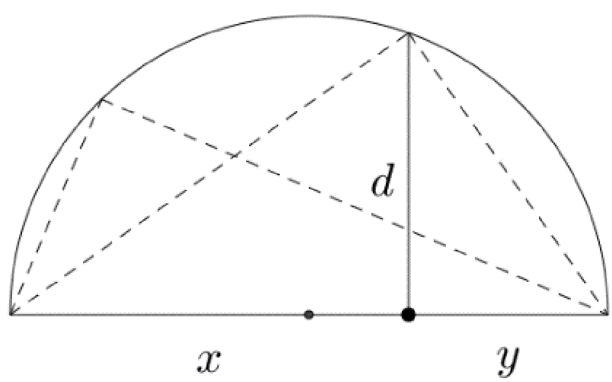


Figura 4. Construcción de la media proporcional.

Ahora, el procedimiento descrito en *Elementos* VI.13 es simplemente la construcción mencionada pero a la inversa: dados dos segmentos arbitrarios x e y encontrar su media proporcional. Primero se debe construir el triángulo rectángulo tomando $x + y$ como su hipotenusa, construyendo una semicircunferencia y con ayuda del teorema de Thales se puede hallar. Luego se construye la perpendicular a la hipotenusa por la intersección de x e y. El segmento resultante entre la perpendicular y la semicircunferencia es d, la cual es la media proporcional entre x e y (como muestra la Figura 4).

Para hacer una prueba rigurosa de lo anterior se necesita una definición de "estar en la misma razón" que se aplique a cantidades generales, pero no se puede saber a ciencia cierta si esta estaba disponible en esa época o fue un desarrollo intuitivo.

En el **Apartado 23**, se menciona que en inicio del documento se encuentra discusiones sobre la inconmensurabilidad lineal y que pudo haber sido descubierta en los intentos de encontrar la media proporcional entre dos números o cantidades; además de ello, los griegos pensaron que la irracionalidad venía de la teoría de las proporciones. El desarrollo inicial de la teoría de las proporciones en la teoría pitagórica musical condujo a la semejanza geométrica y de allí a la inconmensurabilidad lineal. La investigación se dirigió a que las líneas rectas linealmente conmensurables, probablemente hayan existido, pero se probó que no ha sido encontrada una demostración rigurosa y aunque sabían cómo hallar la media proporcional, se necesita más para probar que el lado de un cuadrado y la diagonal son inconmensurables. Se sabe que la inconmensurabilidad en sí no es algo que puede ser conocido con certeza de una manera empírica, el conocimiento de esta solo se puede obtener por un proceso sistemático de reflexión.

Los griegos transformaron la matemática de un cuerpo de conocimiento práctico y empírico en una ciencia teórica y deductiva. La investigación de Szabó dio una luz de cómo fueron las matemáticas pre-griegas, y que los griegos tuvieron su originalidad, por ejemplo, los conceptos que hemos estudiado pues parecen ser creaciones de ellos.

2.2. Pormenores acerca del texto

En este apartado se relacionarán las temáticas tratadas, en paralelo del documento guía, que ayudaron al entendimiento de las ideas de Szabó.

2.2.1. Con respecto a la Historia

En esta parte del presente documento se pretende dar un vistazo a las preguntas que surgieron relacionadas con historia y cómo la trataba el autor este asunto. Al abordar el texto guía se llegaron a varios cuestionamientos, de los cuales uno que resaltó fue la forma del texto; el autor en algunos momentos utiliza la primera persona, muchas veces, para conjeturar sobre el porqué asumía ciertas posturas, al contemplar la historia como una interpretación de hechos o vestigios históricos, es de reconocer que es imposible decir a ciencia cierta cuáles y cómo abordaron las civilizaciones antiguas el conocimiento matemático. Sin embargo, el conocimiento de Szabó[1] con respecto al tema a tratar hace que estas conjeturas sean valiosas, además, al conocer la formación académica del autor se puede identificar por qué le da un trato profundo a la filología y, sin dejar de lado, a las matemáticas. Su postura sobre la filología permite reconocer elementos propios de las matemáticas y, en nuestro caso, de la teoría de las proporciones, siendo una ayuda no superflua para el estudio de la matemática antigua; como él mismo señala "En este caso, por lo tanto, la historia de un término podría decirse que ha dilucidado la génesis de algunos conceptos matemáticos completamente nuevos" (Szabó, 1978, pág. 103).

Otro cuestionamiento que ocurrió fue que al abordar partes del documento se hizo traducción del lenguaje geométrico (lenguaje fundamental en *Elementos*) al lenguaje algebraico, pero se reconoció que estos pueden llegar a generar malas interpretaciones con respecto al sentido original que quería dar Euclides. Por ejemplo, en la Proposición V.5, tenemos que:

> Si una magnitud es el mismo múltiplo de otra que una (magnitud) quitada (a la primera) lo que es de otra quitada (a la segunda), la (magnitud) restante (de la primera) será también el mismo múltiplo de la (magnitud) restante (de la segunda) que la (magnitud) entera de la (magnitud) entera. **(Puertas, 1994, pág. 27)**.

[1] Szabó estudió griego, filosofía latinoamericana, historia antigua, lingüística y arqueología en la Universidad de Budapest. Desde 1958 hasta su muerte hizo parte como investigador del Instituto Matemático de la Academia de Ciencias de Hungría

Libro V. Proposición 5.

Ahora, se interpretará esta definición de forma gráfica y algebraica. En la Figura 5 se muestra la representación gráfica, donde x sería una magnitud cualquiera y mx un múltiplo cualquiera de esta magnitud.

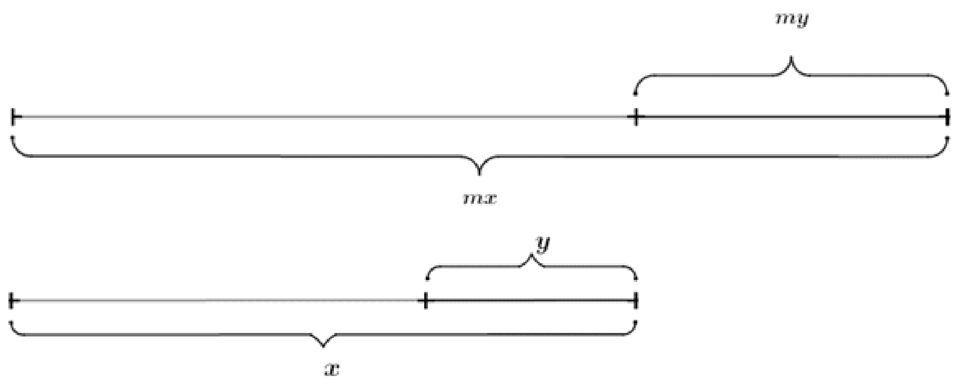


Figura 5. Los múltiplos mx y my de las magnitudes x e y.

Donde se debe cumplir que $x : mx :: y : my :: (mx - my) : (x - y)$. Si se nombran los segmentos de la siguiente manera:

$$mx - my = a$$

$$my = b$$

$$x - y = c$$

$$y = d$$

La representación gráfica se muestra en la Figura 6.

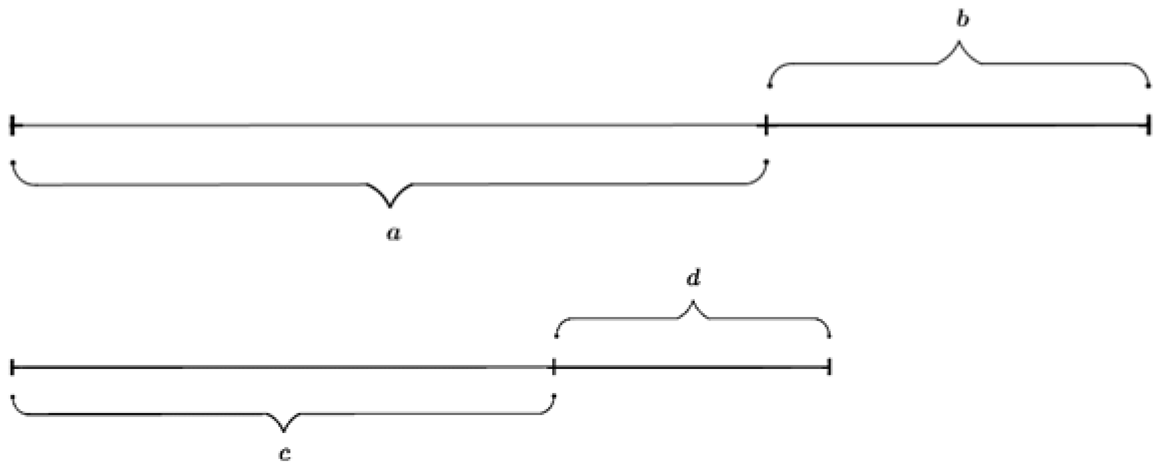


Figura 6. Segmentos a, b, c y d sustituciones respectivas de $mx - my, my, x - y$ e y.

Su representación algebraica es $\frac{a+b}{c+d} = \frac{a}{c}$. Donde se resalta, que desde su interpretación algebraica se podrían malinterpretar, asumiendo, por ejemplo, que $b = d = 0$. Las cuales no tienen ningún sentido en el contexto geométrico.

Otra cuestión que se trabajó, fue que al estudiar el tema relacionado con el canon se pudo reconocer que en la historia de las matemáticas y, sobre todo, cuando se leen diversos tipos de textos como este, no se puede dejar de enfatizar que el origen de algunas teorías matemáticas es físico, eso no quiere decir que todos los objetos matemáticos tengan como origen este tipo de fenómenos. Esta idea es profundamente discutida por Aristóteles y Platón acerca de dónde viene el conocimiento matemático. Platón asume el origen de las matemáticas en una noción de mundo ideal, mientras que Aristóteles asume que ese conocimiento se desarrolla a través de su necesidad de crearlo. Pero, es en la historia donde se encuentran los ejemplos donde se validan o refutan estas posturas filosóficas. Los empiristas pueden reconocer en el estudio del canon la evidencia de que sus teorías son ciertas, es decir que el estudio de las longitudes de cuerdas y el mismo canon hace que se desarrolle, en su génesis, la teoría de las proporciones. Por esto se afirma que la historia es el laboratorio epistemológico de la filosofía, es decir, en la historia se encuentran los elementos que validan o refutan una teoría.

2.2.2. Con respecto a la Cosmovisión Pitagórica

Teniendo en cuenta que el presente trabajo tiene como tema un desarrollo matemático de los pitagóricos, se hace imposible no reconocer su contexto especialmente su cosmovisión relacionada profundamente con las matemáticas.

Es bien sabida la discusión frente a la existencia o no de Pitágoras como personaje histórico dado el misticismo en el que siempre anduvo rodeado el culto pitagórico y, fundamentalmente, los anacronismos de algunos resultados adjudicados a él. Sin embargo, son indiscutibles los resultados de dicho culto como escuela del pensamiento. La idea del número como fuente primordial para explicar el universo no ha caído en desuso a pesar del tiempo; en la actualidad muchos fenómenos dan cuenta a través de las matemáticas mismas. Sí bien sabemos que para explicar el universo se necesitan conocimientos más allá de los números naturales, como idea no se puede negar el interés que genera. Esta cosmovisión, que trascendió a la educación misma, genera mucho más interés cuando se presenta lo que para los pitagóricos era la matemática en sí misma, el llamado *Quadrivium* o los saberes exactos: la aritmética, la música, la geometría y la astronomía. Como muestra la Tabla 1, estos saberes fueron divididos en grupos: Se tenían los saberes que relacionaban los números estos eran la aritmética y la música; de ellos se consideraba que la primera trataba los números en reposo y la otra los números en movimiento. La geometría y la astronomía las relacionan con las magnitudes, que a su vez se asociaban con magnitudes en reposo y en movimiento, respectivamente.

Tabla 1. *Quadrivium* o Saberes exactos

	Números	**Magnitudes**
En reposo	Aritmética	Geometría
En movimiento	Música	Astronomía

Al tratar este trabajo de grado, en su esencia, sobre números y magnitudes, se buscó reconocer el *Quadrivium* en los temas tratados[2]: Fue inmediata la relación que se plantea con la música, dadas las posturas de Szabó; con respecto a la geometría se encontró la asociación al trabajar con el *diastema* y segmentos de cuerda que cumplen una consonancia; la relación con la aritmética viene dada por el trabajo con el canon, una regleta numerada la cual permitió asociar números al *diastema*; la relación con respecto a la astronomía se identificó al observar un vídeo documental El universo matemático (Pérez, 2000), donde reconocen la idea de que las distancia de los planetas del sistema solar están es relación con las escalas musicales, por consiguiente estos se mueven en el espacio produciendo una nota característica, de esto concluye "Pitágoras llegó a afirmar que en la noche de calma, era posible escuchar este canto celestial y Kepler hasta nos dejó las partituras".

2.2.3. Con respecto a la Teoría Musical

Al reconocer Szabó las diferentes influencias que tuvo la teoría musical en la teoría de las proporciones, se hizo necesario ahondar en conceptos musicales para entender sus posturas, que se mencionan a continuación.

Los pitagóricos distinguieron la armonía en las notas musicales, mirando la relación entre la totalidad de la cuerda y segmento de la misma que para ellos eran "agradables" es decir las consonancias, como se ha mencionado principalmente, ellos trataron tres: octava, quinta y cuarta. Aunque coloquialmente se reconocen 7 notas musicales, las que van de Do a Si (las llamadas notas naturales) y dentro de la teoría musical se reconocen 12 notas (notas alteradas), las cuales son:

Do – Do♯ – Re – Re♯ – Mi – Fa – Fa♯ – Sol – Sol♯ – La – La♯ – Si

[2] Estos no fueron observados de manera inmediata, pero se relacionaron en algún momento en el desarrollo del trabajo. Las explicaciones dadas con respecto a esta relación serán trabajadas de manera rigurosa más adelante. Además, se debe aclarar que la relación con la astronomía no fue un tema tratado en este trabajo de grado.

Donde el símbolo numeral (♯) se llama sostenido, que representa la distancia entre una nota y la siguiente llamada semitono, al igual que el bemol (♭), representa un semitono menos. Además, se tiene que dos semitonos representan un tono. Cada par de notas se distancian por un tono, excepto, entre Mi con Fa y Si con Do, que es un semitono. Aunque estas distancias tienen que ver con la frecuencia de onda que emite el instrumento, se asumen ciertas aproximaciones de las comparaciones con respecto al pedazo de cuerda que vibra, para el caso del tono es $\frac{9}{8}$ de la cuerda y para el semitono $\frac{18}{17}$. A simple vista se deduce que si bien, para la teoría musical, dos medios tonos son un tono, aritméticamente no es doble.

Otro asunto estudiado en la teoría musical son las escalas, las cuales tienen estructuras definidas dados un orden de tonos y semitonos. La escala mayor, que es de gran importancia puesto que se toma como referencia para las demás escalas, tiene la estructura TTSTTTS, donde T representa un tono y S un semitono. Comenzando en una nota de referencia y siguiendo esta estructura se genera la escala, por ejemplo, la de Do Mayor se muestra en la Figura 7.

```
I            II           III   IV          V            VI          VII   VIII
Do    Do#    Re    Re#    Mi    Fa    Fa#   Sol   Sol#   La    La#   Si    Do'
 ---------->  ---------->  ---->  ---------->  ---------->  ---------->  ---->
      T            T         S        T            T            T         S
```

Figura 7. Escala de Do Mayor.

A las notas que pertenecen la escala se les suele llamar *grado*, los cuales se denominan según muestra la Tabla 2.

Tabla 2. Grados musicales

Grados	Nombre
I	Tónica
II	Supertónica
III	Mediante

IV	Subdominante
V	Dominante
VI	Superdominante
VII	Sensible
VIII=I	Tónica

En la **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.** también se muestra la nota que orresponde a cada grado en la escala de Do Mayor.

Haciendo un trabajo análogo con otras estructuras se puede configurar la escala menor natural como TSTTSTT, la escala menor armónica como TSTTS(3S)S y la escala menor melódica como TSTTTTS.

Los intervalos son las distancias entre dos notas, se reconocen por el número o por su clasificación. Por número, es la distancia de cuantas notas hay entre estas, como ejemplos, el intervalo entre Do y Mi es una tercera, entre Do y Fa una cuarta, o entre Do y Sol una quinta (nótese que coinciden con el grado). Por clasificación, se deben tener en cuenta los semitonos que se encuentran entre cada nota; si el intervalo corresponde a una nota sin alteración se nombra como mayor, en cambio sí le corresponde una con alteración se nombra como menor. Hay casos especiales como la cuarta, la quinta y la octava, que se llaman justas, y en el caso del intervalo entre la cuarta y la quinta que se nombra cuarta aumentada o quita disminuida, también llamado tritono (Ver Tabla 3).

Tabla 3. Intervalos musicales Escala mayor

Intervalo	Nombre	Distancia (en semitonos)	Ejemplo
	Unísono (Justo)	Una nota y ella misma	Do
2ªm	Segunda menor	1 semitono	$Do \leftrightarrow\ \flat Re$
2ªM	Segunda Mayo	2 semitonos	$Do \leftrightarrow Re$
3ªm	Tercera menor	3 semitonos	$Do \leftrightarrow\ \flat Mi$

3ªM	Tercera Mayor	4 semitonos	$Do \leftrightarrow Mi$
4ªJ	Cuarta Justa	5 semitonos	$Do \leftrightarrow Fa$
4ªaug o 5ªdim	Cuarta aumentada Quinta disminuida (Tritono)	6 semitonos	$Do \leftrightarrow \sharp Fa$ $Do \leftrightarrow \ \flat Sol$
5ªJ	Quinta Justa	7 semitonos	$Do \leftrightarrow Sol$
6ªm	Sexta menor	8 semitonos	$Do \leftrightarrow \ \flat La$
6ªM	Sexta Mayor	9 semitonos	$Do \leftrightarrow La$
7ªm	Séptima menor	10 semitonos	$Do \leftrightarrow \ \flat Si$
7ªM	Séptima Mayor	11 semitonos	$Do \leftrightarrow Si$
8ªJ	Octava (Justa)	12 semitonos	$Do \leftrightarrow Do'$

Al ser cíclica la nominación de las notas, es natural ubicarlas alrededor de una circunferencia, para la teoría musical se llama el Círculo Armónico, en el que se ubican las quintas de las notas comenzando por Do, como muestra la Figura 8. En el cual se reconoció que formaban ciertos polígonos como se muestran en la misma figura. De ello emergieron ciertas preguntas como ¿qué tipos de polígonos se forman dada una escala o el grado de las escalas? y ¿si tenía relación alguna las consonancias con los polígonos que de forman?, pero al no ser el tema de pertinencia del trabajo de grado no se abordaron.

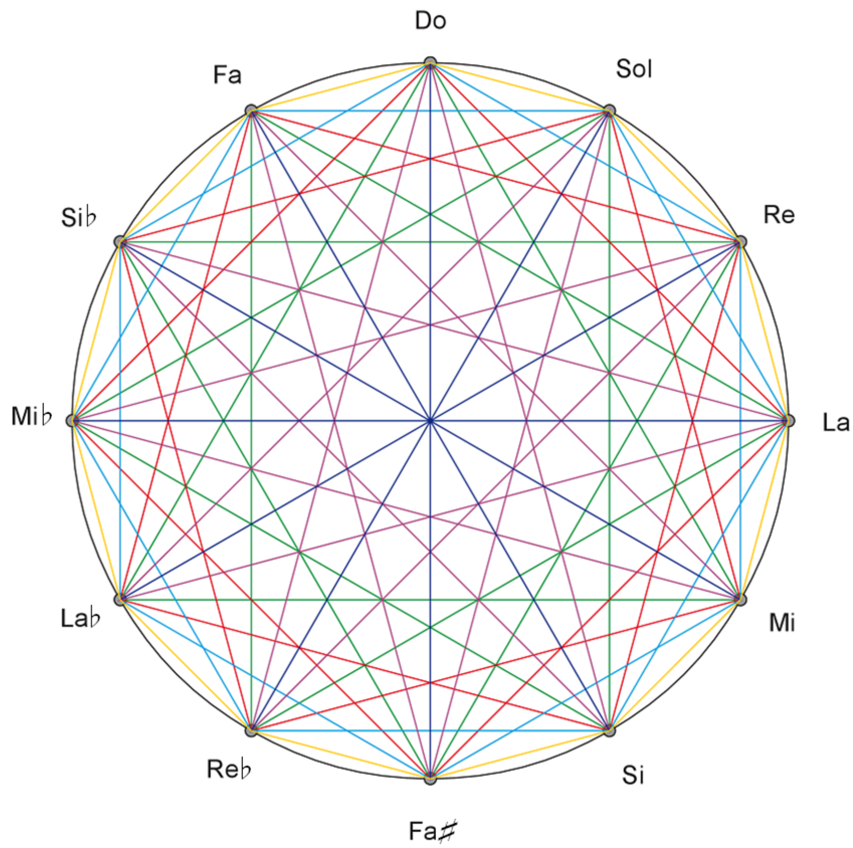


Figura 8. Círculo armónico.

Lo mencionado anteriormente es una descripción de qué tratan los tonos, semitonos y consonancias, ya que con estos intervalos musicales se dio vida a los instrumentos hoy conocidos.

A continuación, para llevar a la práctica la investigación que se ha hecho sobre el origen de la teoría de las proporciones a través del estudio de la teoría musical se toma como instrumento la guitarra, que en su esencia es similar al instrumento de cuerda tratado por los griegos.

En este instrumento se utilizan seis cuerdas ubicadas sobre el canon que para la guitarra es llamado brazo y está dividido en trastes. Estos trastes se dividieron de tal manera que cada corte al ser pulsado en orden, generara un semitono, es decir, si se pulsa un traste el siguiente será un semitono más arriba o más abajo dependiendo del orden.

Como asunto de estudio las consonancias; las cuarta, la quinta y la octava, en las guitarras en general hay unos puntos dibujados que indican estos intervalos como se muestra en la Figura 9, dependiendo en qué orden empiece de la guitarra si va de arriba abajo (segunda flecha) el primer punto señala cuartas y el segundo quintas de la nota que indica la cuerda, por ejemplo, la cuarta de Mi (primera cuerda) es La; esta nota sonará al pulsar en el punto indicado del traste, la quinta de Mi es Si, sonará al pulsar el siguientes punto.

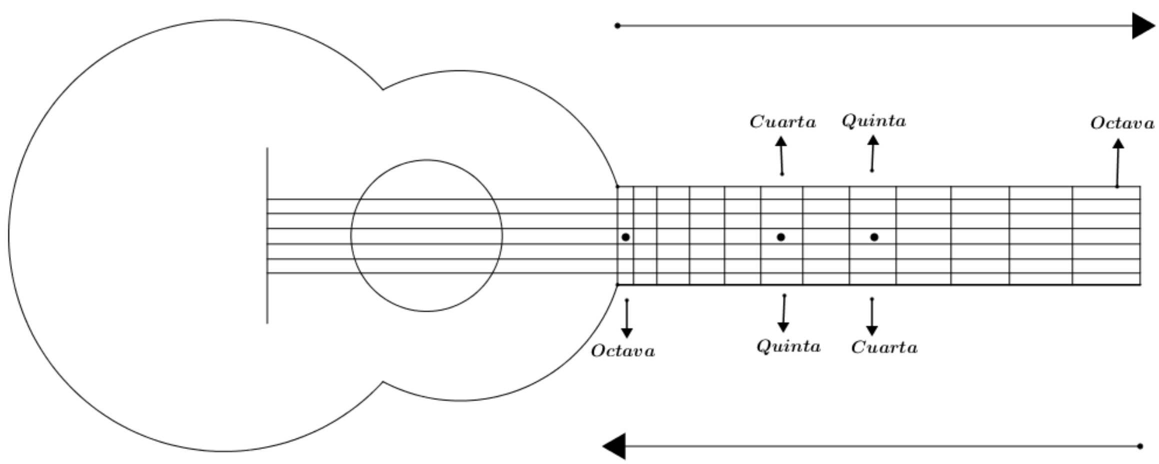


Figura 9. Marcas de los intervalos en una guitarra.

Las flechas en la Figura 9 indican que al mantener pulsada la octava y al pulsar las cuartas y quintas (puntos indicados) se encuentran las notas correspondientes.

2.2.4. Con respecto a la Conmensurabilidad e Inconmensurabilidad

Al tratar con la conmensurabilidad e inconmensurabilidad es imperativo discutir que se entiende por medir. Una noción bastante aceptada, es la que refiere a la comparación de una magnitud, llamada unidad, con respecto a otra. Una interpretación semejante, que al parecer fue usada por los griegos, es que "una magnitud mide a otra, cuando al tomar la primera y repetirla, y al tomar la segunda y repetirla en algún momento coinciden los múltiplos". Esta interpretación se enmarcada en ámbito cuantitativo no numérico, es decir en lo geométrico. Para aclarar esta última noción se explicará con un ejemplo.

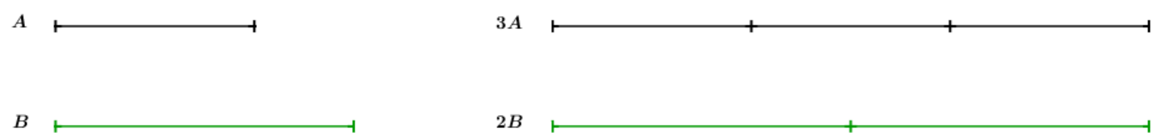


Figura 10. A es conmensurable con B

En este caso al hacer el triplo (repetir tres veces) de la magnitud A y el duplo (repetir dos veces) de la B coinciden, siendo conmensurables. Su representación gráfica se muestra en la Figura 10.

Para el caso de las magnitudes inconmensurables se aplica la misma la misma noción, pero no es posible encontrar un múltiplo donde coincidan. Sí bien la conmensurabilidad es proceso físico, la inconmensurabilidad es de corte racional, al hacer suficientes veces una repetición podría parecer que coinciden los múltiplos, la única forma de mostrar que esto no ocurre es asumiendo un discurso hipotético deductivo para argumentar dicha idea.

La discusión de la inconmensurabilidad expuesta en el documento trabajado de Szabó, se inicia al considerar la Definición V.5 de *Elementos*, por la cual se plantea que solo se pudo abordar en un momento en el que se conocían las magnitudes inconmensurables y, además, se reconocía una teoría que no presentaba problemas ni contradicciones con dichas magnitudes.

En este sentido se asume una postura en la cual se plantea que dicha definición no acepta ni refuta la inconmensurabilidad, es decir, no se le da relevancia al tipo de magnitudes con las cuales se trabaja; por ejemplo, con 5 (que es conmensurable) puedo medir 25, al igual que con $\sqrt{2}$ (que es inconmensurable) puedo medir $4\sqrt{2}$, lo cual se sustenta en el hecho de que esta teoría no está sujeta al concepto de número; es de resaltar que dichas reflexiones se encuentran en el Libro X de *Elementos* en el cual si bien, se abordan este tipo de magnitudes, no se discuten. A continuación, se realiza una interpretación de dicha definición.

Se dice que una primera magnitud guarda la misma razón con una segunda que una tercera con una cuarta, cuando cualesquiera equimúltiplos de la primera y la tercera excedan a la par, sean iguales a la par o resultan inferiores a la par, que cualesquiera equimúltiplos de la segunda y la cuarta, respectivamente y tomados en el orden correspondiente. (Puertas, 1994, p. 11)

Definición V.5

Los equimúltiplos de las magnitudes mencionadas en la Definición V.5 se pueden explicar de la siguiente manera en lenguaje moderno; teniendo la proporción $a{:}b{::}c{:}d$ y dos números n y m equimúltiplos de a, c y b, d respectivamente, entonces:

$$\frac{na}{mb} = \frac{nc}{md}$$

En esta definición se nombra los equimúltiplos de a y c, los cuales pueden ser menores, iguales o mayores en orden correspondiente que cualquiera de los otros dos. Es de considerar que las magnitudes trabajadas, si bien, pueden ser de distinta naturaleza (segmentos, cuadrados, circunferencias, etc.) deben cumplir que las razones sean a la par magnitudes homogéneas, es decir: sí a es un segmento entonces b también, sí c es cuadrado entonces d también. A continuación, se hacen algunos ejemplos de esta definición para mayor comprensión:

Teniendo cuatro segmentos a, b, c y d como magnitudes, donde al segmento a y c se le halla el doble, por otro lado b y d el cuádruple como se muestra en la Figura 11.

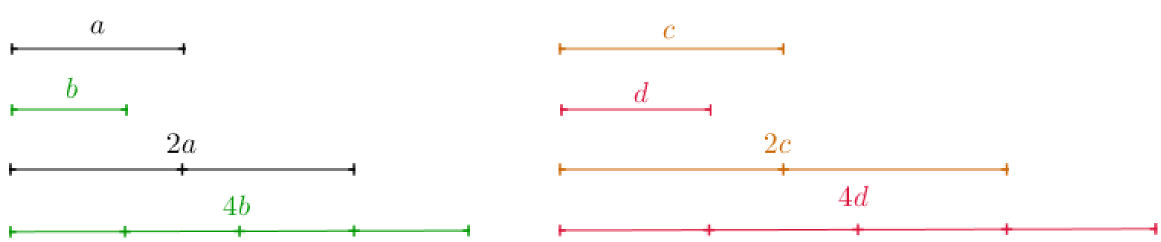


Figura 11. Ejemplo con segmentos de la Definición V.5.

Al hacer estos equimúltiplos y compararlos, tienen como diferencia el segmento más pequeño de los dos que se comparan inicialmente, por lo cual son menores a la par o mayores a la par, porque excede la misma cantidad.

Para comprobar que la definición puede tener algún contraejemplo en cierto caso Guacaneme (2015) utilizó cuatro segmentos y halló para los más pequeños el cuádruple y para los más grandes el doble como se ve en la Figura 12Figura 11, donde encontró que los resultados no coincidían como dice la definición; aunque se aprecia que inicialmente los segmentos no son proporcionales, la definición se llega a cumplir para cualquier otro múltiplo diferente a los que se ilustran en la imagen mencionada.

Figura 12. Contraejemplo para la Definición V.5.

Después de este ejemplo, se desarrolla uno donde se utilizan magnitudes homogéneas. Se toma una razón entre segmentos y otra entre cuadrados, como se muestra en la Figura 13.

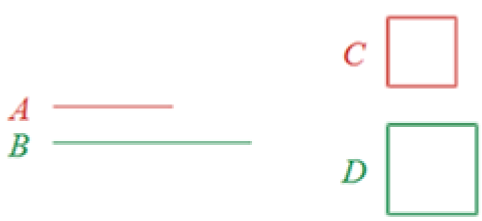


Figura 13. Ejemplo magnitudes homogéneas a la par de la Definición V.5.

Donde se cumple la proporción $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$, cuestión que se procederá a argumentar.

Para el primer par de magnitudes A y B, se usa la adición de los segmentos para hallar sus múltiplos, como se muestra en la Figura 14.

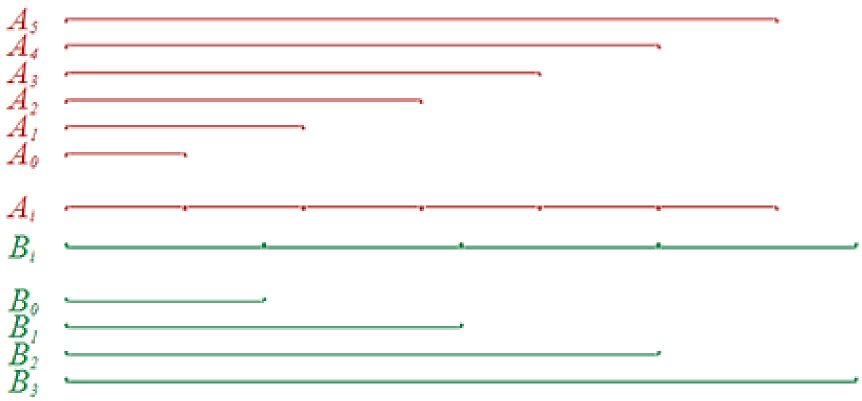


Figura 14. Múltiplos de las magnitudes A y B.

Al ordenar estos múltiplos de menor longitud a mayor, como se observa en la Figura 15, puede ser que algunos múltiplos coincidan, como en A_4 y B_2.

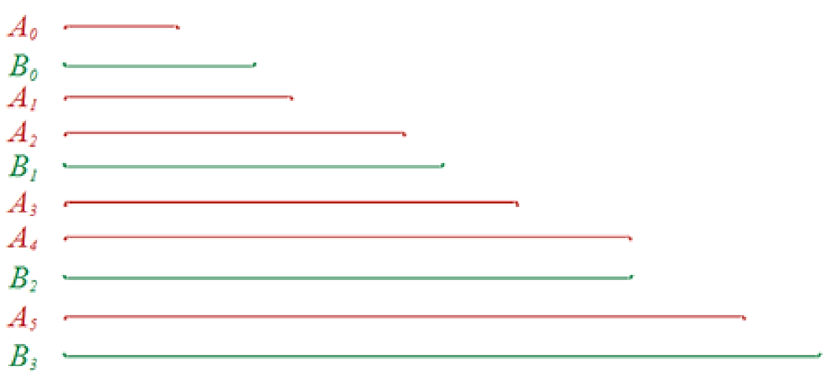


Figura 15. Orden de los múltiplos de A y B.

Este mismo proceso se hace de forma análoga para los múltiplos de los cuadrados D y C como se muestra en la Figura 16 y se ordenan (Ver Figura 17) donde se observa que C_4 y D_2 coinciden.

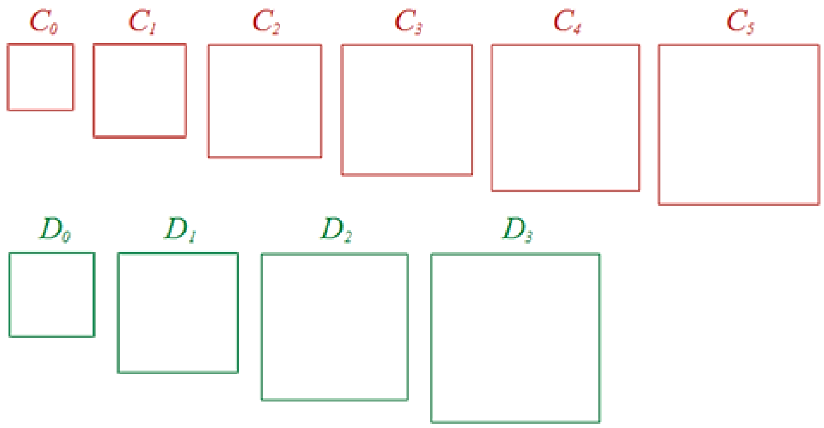


Figura 16. Múltiplos de las magnitudes C y D.

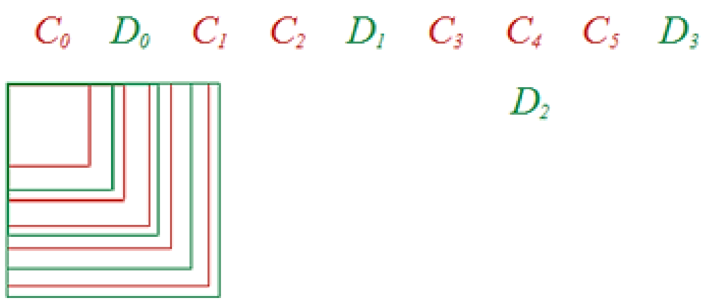


Figura 17. Orden de los Múltiplos de C y D.

Teniendo en cuenta el orden de los múltiplos para cada par de magnitudes, es posible observar que el comportamiento de la razón entre los segmentos es igual a la razón de los cuadrados como se muestra en la Figura 18.

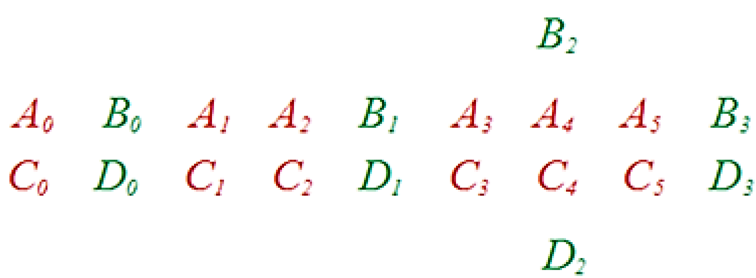


Figura 18. Orden de los múltiplos de las magnitudes.

Con este ejemplo se ilustra como la definición se cumple para otro tipo de magnitudes, pues resulta que los equimúltiplos son mayores, menores o iguales a la par.

Por otro lado, otra definición de importante proporcionalidad empleada en *Elementos* es la propuesta en la Definición VII.21, al tratar esta definición se hizo necesario conocer que entendían por múltiplo, parte y partes (términos usados en la definición). Hacer un análisis minucioso de dicha definición exige el análisis completo del Libro VII; este se escapa de los tiempos y el interés principal del este trabajo de grado, por ello se opta por hacer una interpretación del escrito de Calderón (2013), en el cual hace un estudio detallado del Libro VII. De esta parte de la obra de Euclides el autor señala que:

El Libro VII es fundamentalmente, el trabajo sobre teoría de la proporcionalidad para números, en el desarrollo del texto define la proporcionalidad entre números; esta es la Definición 21. En ella utiliza tres conceptos: múltiplo, parte, y partes. Las cuales Euclides las define previamente, en este mismo libro, en las Definiciones 3 y 4.

> Unos números son proporcionales cuando el primero es el mismo múltiplo o la misma parte o las mismas partes del segundo que el tercero del cuarto. (Puertas, 1994, p. 118)

Definición 21. Libro VII

En donde se concibe "múltiplo" de forma similar a la visión moderna. Donde un número B es múltiplo de A, sí A sumado n veces es igual a B. Por ejemplo, 12 es múltiplo de 3, porque 3 sumado si mismo cuatro veces es 12 (Ver Figura 19).

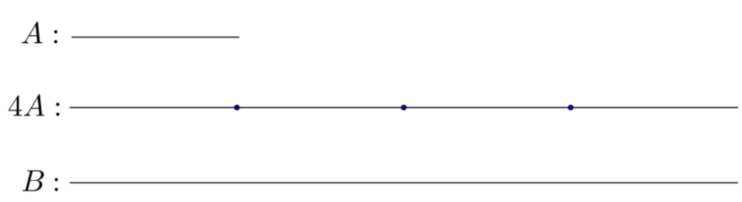


Figura 19. B es múltiplo de A. A es parte de B.

El concepto de “parte” se entiende, acudiendo de nuevo a nociones modernas, como el submúltiplo de un número. Así, tomando el ejemplo anterior: 3 es *parte* de 12, siendo más claro, 3 es la cuarta *parte* de 12 (Ver Figura 19).

Por último, se asocia “partes” a la idea de múltiplo de un submúltiplo, por ejemplo, 9 no es parte de 12, pero una parte (submúltiplo) de 9, en este caso 3, es *parte* de 12. Así, 9 es *partes* de 12 porque se usaron más de una *parte* para formar 9. Gráficamente se muestra en la Figura 20.

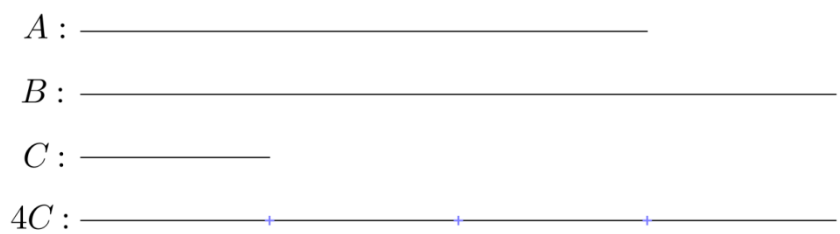


Figura 20. C es parte de A, A es partes de C.

Estas dos definiciones establecen una teoría de las proporciones para las magnitudes y los números, si bien había una definición distinta para estos dos conceptos se evidencia que los pitagóricos reconocían una relación estrecha entre ellos. Estas dos definiciones (Definición V.5 y VII.21) se dieron en momentos históricos distintos, Szabó propone que la Definición VII.21 tuvo que ser cronológicamente primero que la Definición V.5, puesto que, como se mencionó la Definición V.5 se desarrolló en un contexto donde la inconmensurabilidad fue importante, mientras que en la VII.21 al parecer no se había identificado y presupone problemas graves para la teoría. Esta distinción entre las magnitudes y números fue necesaria dada la anomalía que significó la inconmensurabilidad en la teoría de las proporciones. Hubo otra definición intermedia a estas, que Euclides no nombra, la antanairesis; donde a través de restas sucesivas (apoyado en el llamado algoritmo de Euclides) puede comprar magnitudes homogéneas.

Se resalta que a pesar de esta separación en las nociones y definiciones, Euclides usa la misma representación para magnitudes y números: los segmentos. Aunque desde una interpretación moderna, estos no son en sí segmentos sino trazos de magnitudes, por ejemplo, se puede representar como trazo la cantidad de tiempo, de superficie o cualquier otra cantidad que no sea una longitud, y la cantidad del trazo (qué tanta “largo” sea) representaría la cantidad de aquella magnitud.

Euclides en el Libro V, al manejar magnitudes geométricas, no puede retomar la misma definición de proporcionalidad propuesta para números porque se tiene el problema de la inconmensurabilidad, esto lo evitó al trabajar con la definición propuesta por Eudoxo, a pesar de que ésta no soluciona en sí el problema de la inconmensurabilidad en sí misma. Por ejemplo, sí tenemos un cuadrado de lado l, su lado será inconmensurable con respecto a la diagonal d, pero el cuadrado formado por la diagonal d es el doble del cuadrado original, es decir, si bien no son conmensurables en longitud, si lo son en cuadrado (ver Figura 21). Al igual ocurre al hallar la media geométrica (o proporcional) de dos segmentos, sin importar la naturaleza de los segmentos se puede hallar geométricamente un segmento resultante, que puede ser o no conmensurable.

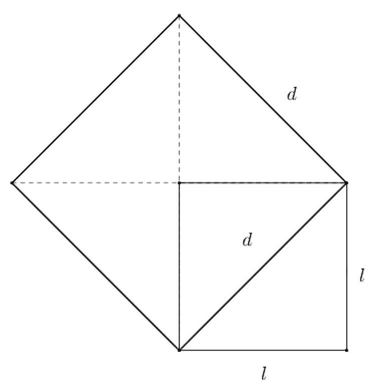


Figura 21. Un cuadrado y el cuadrado de su diagonal.

Grattan-Guinness (1996) establece que en *Elementos* no hay un algebra-geométrica como varios autores señalan. Además, plantea que en *Elementos* se manejan tres tipos de cantidades: números, magnitudes y razones. Las teorías relacionadas con esta última se tratarán en la siguiente sección.

2.2.5. Con respecto a la Teoría de las Proporciones

En la investigación se reconoció que se abordaría el origen de la teoría de las proporciones, está se delimita (Szabó, 1978) a los griegos puesto que se tienen evidencias, de diferentes tipos, que se pueden estudiar a fondo, puesto que es imposible abordar el origen del pensamiento proporcional *per se* porque este es inherente al pensamiento humano, sería buscar el origen del mismo.

Los Libros V y VI constituyen la teoría de las proporciones para magnitudes geométricas de los griegos recopilada por Euclides. En este conjunto de postulados, definiciones y proposiciones, sin lugar a dudas, la joya de la corona es la Definición V.5, la cual se estudió en la sección anterior.

Al estudiar magnitudes (Libro V) o los números (Libro VII) se genera un gran interés en las relaciones entre los objetos mismos, en ellas se puede identificar muchas relaciones como, por ejemplo, las de orden identificando cual es mayor, cual es menor, son iguales; cuando es mayor por diferencia o "cuantas veces es mayor" la cual es una relación de suma importancia: la razón. Relación que luego da espacio para pensar en las proporciones, que son igualdad entre razones.

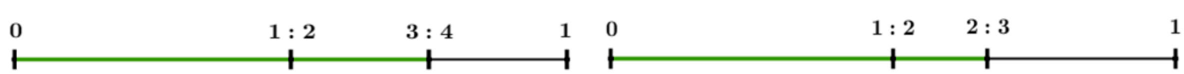
La razón se puede definir de una forma simplista: el cociente entre los números $\frac{a}{b}$, pero no siempre existe el número que expresa esa relación, ahí es cuando se tiene el problema de la inconmensurabilidad. En el caso cuando se puede expresar la relación, se asocian las expresiones "doble", "triple", etc., si bien se han asumido la correspondencia con los números naturales (para los nombrados 2 y 3, respectivamente), estos no son números son relaciones. Para el caso de las razones se deben observar como dos números no como un número.

También se tiene que por lo general las razones son confundidas con las fracciones debido a su representación algebraica, pero no son los mismos. La razón es una función de un par ordenado de números o valores de magnitud (Freudenthal, 1983), hablar de la razón como un cociente, es bajar su estatuto lógico, por eso las razones son confundidas con las fracciones pero al interpretarlas son hablar de conceptos diferentes.

La teoría de las proporciones también fue conocida como la teoría de las mediedades; al respecto Fernández (1998) señala que los pitagóricos escogieron diez relaciones trabajadas dentro de esta teoría, de las cuales profundizaron su estudio en la media aritmética, geométrica y armónica (o subcontraria). Al estudiar esta selección, Szabó argumenta que estas relaciones fueron escogidas porque representaban las proporciones que hay entre las notas de la escala musical que generan un sonido armónico; en este sentido, se plantea que no era estudio matemático y daba relevancia al aspecto estético de la teoría musical.

Las relaciones mencionadas se pueden definir teniendo en cuenta dos valores a y c como sigue: la media aritmética es $\frac{a+c}{2}$; la media geométrica es $\sqrt{a \cdot c}$ y la media armónica $\frac{1}{\bar{X}\left(\frac{1}{a},\frac{1}{c}\right)}$, donde $\bar{X}\left(\frac{1}{a},\frac{1}{c}\right)$ es la media aritmética entre $\frac{1}{a}$ y $\frac{1}{c}$ de esto resulta que la media armónica es $\frac{2 \cdot a \cdot c}{a+c}$.

Con respecto a la relación con la teoría musical, en la Figura 22 se aprecia la correspondencia entre la cuarta y la media aritmética, así como la quinta y la media armónica, en efecto, la cuarta es $3:4$ ya que es la media aritmética entre 1 y $\frac{1}{2}$, para el caso de la quinta es $2:3$ que es la media armónica entre 1 y $\frac{1}{2}$. Esta relación se da entre 1 y $\frac{1}{2}$ ya que en $\frac{1}{2}$ queda la octava de la nota. Es necesario hacer un tratamiento algebraico a las razones para hallar las medias correspondientes.



$3:4$ es la media aritmética de 1 y $\frac{1}{2}$.

Algebraicamente: $\frac{3}{4} = \frac{1+\frac{1}{2}}{2}$

$2:3$ es la media armónica de 1 y $\frac{1}{2}$.

Algebraicamente: $\frac{2}{3} = \frac{2}{\frac{1}{1}+\frac{1}{\frac{1}{2}}}$

Figura 22. Relación entre medias y los intervalos.

Se habla principalmente de la media aritmética y armónica, ya que, el interés de los pitagóricos por escoger estas mediedades era que, de primera mano eran las únicas que producían sonidos armónicos conocidos, aunque Arquitas incluyó la media geométrica como un ser musical, pero Szabó menciona un error al pensar que de ella solo resultaban números enteros en seguida se mostrará un ejemplo donde se muestra el tipo de números que aparecen al hacerla.

En primer lugar, la media geométrica está ubicada entre las dos medias mencionadas y segundo debe dividir este intervalo en subintervalos iguales, es decir que, si se tiene a, b y c como puntos (*opoi*) entonces $a\!:\!b = b\!:\!c$, lo que lleva a un error con los números naturales pues como se muestra en la Figura 23 hay un problema con algunas magnitudes inconmensurables por ejemplo, la diagonal del cuadrado acá mencionada como $\sqrt{2}$.

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{2} \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2}$$

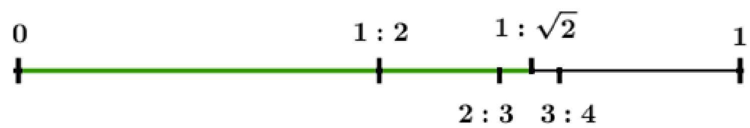


Figura 23. Magnitudes inconmensurables en intervalos musicales.

En consecuencia, Szabó plantea una conjetura que explique porque a pesar de que la media geométrica no podía existir en la música, era considerada un ser musical.

Para comenzar la media geométrica surgió por primera vez en la teoría musical, aunque recibió su nombre hasta que fue interpretada y construida geométricamente, además de ello es conocido que los pitagóricos intentaron dividir intervalos musicales en subintervalos iguales, ellos trataron de encontrar las medias geométricas de los intervalos, pero concluyeron que no era posible aritméticamente. Szabó (1978) nombra una prueba escrita, se trata de la Proposición 3 de la *Sectio Canonis* que establece que “Ningún número media proporcional se puede encontrar entre dos números en una razón *superparticularis*.”. La razón superparticularis se define como $(n+1)\!:\!n$, por ejemplo, la cuarta es una de ellas ya que está dada por la razón $4:3$ o la quinta $3:2$ y hasta la octava $2:1$. Esta proposición establece que no hay una media geométrica entre dos números en razón superparticularis.

Teniendo en cuenta este problema decidieron crear una postura más general, donde se pudiera encontrar entre dos números un tercero que esté a la misma razón con ambos. En otras palabras, querían encontrar la media proporcional entre dos números. En el Libro VII de *Elementos* hay una serie de proposiciones que utilizan la media proporcional este libro es el camino para saber cómo se construye.

3. Historia de las Matemáticas y el Conocimiento del Profesor de Matemáticas

En este capítulo se abordará dos de las preguntas planteadas en la justificación ¿por qué la historia sirve para la formación docente? y ¿para qué sirve cómo docente saber la historia de un concepto matemático?, para lo cual se estudiará las categorías propuestas en una sección de la tesis doctoral de Guacaneme (2016) titulada "Para qué se procura la apropiación del conocimiento histórico de las matemáticas por parte de los profesores (en formación o ejercicio)" y posteriormente analizadas en la sección "Discusión y reflexión a propósito de los para qué". Fundamentalmente se asociará las discusiones de los diferentes temas tratados durante la investigación a las categorías planteadas, con el fin de reconocer de manera consciente las actividades que llegó a plantear este estudio en marco de la Historia de las Matemáticas.

Dentro del para qué la Historia de las Matemáticas en el quehacer docente, plantea dos objetivos, los cuales nombra Dotar al profesor de visiones y Dotar al profesor de artefactos, los cuales tienen unas divisiones complementarias que se procederán explicar con más detalle.

3.1. Análisis de "Dotar al profesor de visiones"

En la tesis doctoral de Guacaneme (2016), se aluden varios autores que plantean que el estudio de la HM proporciona diferentes visiones que complementan las que ya se crean a través de la formación docente y el estudio de las matemáticas. Estas visiones, son sobre la actividad matemática, las matemáticas, el conocimiento matemático y los objetos matemáticos. El trabajo de grado se centra en estas visiones ya que gracias al estudio hecho de los conceptos matemáticos se acogieron en gran media aprendizajes sobre la utilidad de la HM en la formación docente. La importancia de estas se reconoce a continuación.

La visión de la actividad matemática proviene de varios aspectos cotidianos y de la misma enseñanza y aprendizaje de la matemática, y de la formación docente, pero principalmente se centra en la actividad de creación que se obtiene de la deducción de resultados, así como la comunicación de estos. Además de esto se reconoce que en la formación docente o en el estudio de esta ciencia, se ve involucrado el placer, el interés, los retos, la curiosidad intelectual, la estética, etc. Que surgen precisamente de la visión en cuestión.

La HM también genera una visión de las matemáticas, ya que están involucradas cultural y socialmente como ciencia en estrecha y amplia vinculación con otras ciencias, es por eso que a través de ella se pueden generar particularidades que motiven relacionar las matemáticas con otras disciplinas, formen el carácter dinámico y su utilidad, superen prejuicios relacionados con la misma ciencia y se valore la importancia cultural y social que genera.

Al mejorar la visión sobre el conocimiento matemático se está generando una apropiación de la HM, ya que, gestiona en el docente un conocimiento de esta ciencia alterna a la que ya adquiere por medio de su formación pues a través de esta visión también se puede incorporar la evidencia de la evolución, el rigor y la abstracción matemática, así como la visión de aspectos meta-matemáticos.

Y por último la visión de los objetos matemáticos que es principalmente la más importante dentro de este trabajo sin demeritar las anteriores ya que gracias a lo tratado se generaron aspectos importantes. Esta visión proporciona revelaciones de asuntos ocultos con respecto a los objetos e ideas matemáticas que se creen conocer, además de que genera la exploración de carácter evolutivo de los conceptos y procedimientos matemáticos, así como la asimilación de los diferentes significados y sentidos de ellos.

3.1.1. Visión de la actividad matemática

Esta visión dentro del presente trabajo se generó al valorar el acto creador y el aspecto estético que se tuvo cuando se exploraba las distancias y las relaciones que tenían los puntos e intervalos en un canon dentro de la teoría musical relacionados con la teoría de las proporciones. Más precisamente, se menciona un apartado de Gaudencio donde narra como hizo Pitágoras para encontrar los tres intervalos musicales más importantes (cuarta, quinta y octava). En este apartado Pitágoras toma una regla y sobre esta extiende una cuerda y lo divide en doce partes, este instrumento se denomina canon el cuál se trató de forma exhaustiva en el documento estudiado de Szabó.

Para hallar la octava se tomó la mitad de la cuerda es decir seis partes de las doce (12:6) y se determinó que esta generaba dicho tono, para la cuarta se tomaron 9 partes (12:9) y para la quinta se tomaron 8 partes (12:8). Estas fueron determinadas consonancias ya que su melodía producía una belleza musical, en este sentido se aprecia más el sentido estético. Estas tres consonancias están también relacionadas con las medias que hoy en día se conoce como la media aritmética, geométrica y armónica. En el apartado donde se trata la teoría de las proporciones, son mencionadas estas medias y como fueron aplicadas en la música; la cuarta resulta ser la media aritmética entre $1\ y\ \frac{1}{2}$, la quinta es la media armónica entre $1\ y\ \frac{1}{2}$, y la octava se alude a la media geométrica, aunque dentro del estudio hecho no se comprueba ya que con la media geométrica resultan números que no son enteros.

A través de este ejercicio de actividad matemática se evidenció la sensibilidad hacia maneras alternas de hacer y comunicar las matemáticas, pues la idea de la teoría de las proporciones no pudo haber sido justificada con más belleza estética que por medio de la teoría musical en específico el ejercicio mencionado del canon.

3.1.2. Visión de las Matemáticas

Esta visión se generó en el trabajo de grado al ver la amplia relación que tiene la teoría musical con la teoría de las proporciones; valorando su riqueza cultural y social, dentro de la génesis de conceptos que se creían provenir netamente de procesos musicales o en el caso de las matemáticas de procesos geométricos que no tenían relación con otra ciencia. Recordando que los Pitagóricos tenían una cosmovisión relacionada directamente con las matemáticas y la música; el llamado *Quadrivium* o los saberes exactos: la aritmética, la música, la geometría y la astronomía; se pudo ver el vínculo de las matemáticas con otras ciencias.

Con este ejercicio de estudiar la génesis de algunos conceptos musicales y matemáticos, se generó la visión de que las matemáticas no solo sirven para generar pensamiento lógico en alumnos, sino también la capacidad de innovar y hallar las formas de creación hacia otras ciencias.

3.1.3. Visión del conocimiento matemático

Con respecto a la visión del conocimiento matemático se hace evidente en las dos ya mencionadas ya que, esta reúne la apropiación del conocimiento adquirido mediante la HM y en especial el estudio del origen de los conceptos descritos en este trabajo. En este apartado se evidencia la evolución y el rigor matemático.

Al comenzar se habló sobre la Definición V.5 de *Elementos* que contribuyó a pensar que no pudo haber sido creada sin conocer las magnitudes inconmensurables; para tratar de probar esto Szabó acude a la Definición VII.21 que es parecida pero solo aplicada a números; en este momento del trabajo se adquiere conocimientos alternos a los que ya son adquiridos en la formación, debido a que de las magnitudes inconmensurables solo se conocía que no eran medibles entre sí y que también hicieron parte del origen de la teoría de las proporciones; con esta investigación se logró ver la relación que ellas tienen con el mínimo común múltiplo y además con definiciones antiguas de un libro tan importante en la geometría como es el de *Elementos*.

En general con toda la investigación de la teoría de las proporciones y de la teoría musical, se adquirieron conocimientos matemáticos y alternos a esta ciencia que complementaron los saberes de los profesores en formación encargados de este trabajo.

3.1.4. Visión de los objetos matemáticos

Esta visión es la más importante que generó el trabajo de grado ya que este se constituyó principalmente en el estudio de un objeto matemático; la teoría de las proporciones. A través de este estudio se consideraron tratamientos algebraicos, geométricos y filológicos para entender la relación de la teoría musical con la teoría de las proporciones, donde se hizo tratamiento de conceptos, construcciones matemáticas y se estudió el origen de palabras griegas, así como *διάστημα*, Ἀνάλογον, Ἀναλογία, ἀνά y *λόγος*.

Con respecto a estas palabras se revelaron algunos asuntos ocultos, así como *διάστημα* que se consideró la partidaria de información sobre el origen de la teoría de las proporciones. En primera medida, se hizo un análisis histórico dentro de la teoría musical. Esta palabra significa “intervalo” a saber, la distancia entre dos tonos, que más adelante mostró relación con la distancia entre dos números o puntos finales. Considerable investigación para entender la relación entre los puntos, tonos y números, que construyeron parte de la teoría de las proporciones.

La media geométrica, aritmética y armónica también hicieron parte de los objetos estudiados para entender por qué estas consonancias eran llamadas las más importantes y armoniosas dentro de la teoría musical, así como las razones que representaban cada una de ellas; cuarta (4:3), quinta (3:2) y la octava (2:1).

3.2. Análisis de “Dotar al profesor de artefactos”

Dentro los documentos que analiza Guacaneme (2016) para este apartado se reconocen tres posturas que él nombra: Miradas epistemológica y del pensamiento matemático, maneras de enseñar e insumos para el aula y el currículo, y competencias personales y profesionales. Para la primera señala dos divisiones: una centrada en el estudiante y otra en el docente. En la segunda aborda las maneras de enseñar, la HM como fuente de insumos para el aula, y como bases para orientar el currículo. Para la última se enmarca en la posibilidad que ofrece la HM para alternativas de aprendizaje y en el desarrollo del pensamiento interdisciplinar del profesor. Se procede a discutir cada una de estas categorías.

3.2.1. Mirada epistemológica y del pensamiento matemático

En esta categoría se le da a la HM la cualidad de herramienta conceptual, señalando que refiere particularmente a los alumnos como "la aproximación histórica que refiere al estudio de los obstáculos epistemológicos, de los enfoques poco trascendentes o equívocos de algunos matemáticos a objetos matemáticos, de los procesos de aceptación legitima de propiedades y objetos matemáticos" (Guacaneme, 2016, p. 230). En lo concerniente a este ítem se pudo reconocer en el desarrollo del trabajo de grado que, al momento de trabajar con los tres intervalos (cuarta, quinta y octava) que generaban consonancias para los pitagóricos, se observaban tres objetos asociados a estas: el trozo de cuerda que no vibraba, el trozo que vibraba y los puntos finales definidos por estos trozos de la cuerda (los llamados *horoi*). Ilumino una discusión frente a cuándo se asigna un punto a la recta, ¿cuál es la magnitud? Se trataron tres posibles respuestas: el número asignado en el límite superior (como ejemplo, en la Figura 24 sería el 1), el segmento entre los dos números (en el ejemplo, sería $\overline{AB}$) o la diferencia entre los extremos (para el ejemplo, $1 - 0 = 1$).

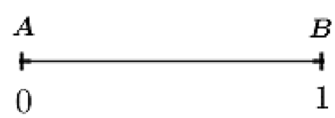


Figura 24. Ejemplo magnitud en la recta numérica.

Es fácil reconocer en la matemática escolar estas tres posturas en algún momento específico del currículo, por ello se da por sentado que las tres nociones son correctas, y su validez está determinada según la fenomenología de su uso.

También se puede observar al tratar con las errores al cambiar entre la interpretación geométrica expuesta en *Elementos* y asumir una interpretación algebraica (como la discutida en el apartado "2.2.1. Con respecto a la Historia"). En quehacer docente, algunas veces, se deja expuesto determinados tipos de ejercicios donde se traduce entre la representación algebraica y la geométrica sin mayor prevención, desconociendo los posibles errores o dificultades que puedan presentar los estudiantes.

Por otro lado, centrándose en los docentes, se reconoce que la HM “permite al profesor identificar creencias sobre el aprendizaje de las Matemáticas y contrastarlas con sus experiencias de aprendizaje, a la vez que pone de relieve –y hasta evalúa– su conocimiento matemático” (Guacaneme, 2016, p. 230). Asociando a este apartado, se reconoce las falencias –y desconocimiento– que se tenían antes del desarrollo de este trabajo de grado frente al pensamiento proporcional; a tal punto que no se diferenciaba conceptos como razón y proporción, se identificaban al igual que en la matemática escolar; como una aplicación de números racionales.

3.2.2. Maneras de enseñar e insumos para el aula y el currículo

En relación a las maneras de enseñar, se insinúa que el conocimiento histórico matemático favorece “las referencias sobre las maneras alternas –a la dogmática empleada en la enseñanza– de construcción de objetos matemáticos, de los papeles de las gentes y comunidades vinculadas en tal construcción y, en consecuencia, de la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas” (Guacaneme, 2016, p. 231). Dentro de la investigación se propuso que, a futuro, se podían desarrollar una serie de actividades enfocadas en la introducción a la teoría de las proporciones tomando como contexto la música, la preparación estos talleres salieron totalmente de los tiempos planeados y no era el objetivo del trabajo de grado.

Con respecto a los insumos para el aula, “que favorezcan el diseño de tareas matemáticas, la explicación y presentación de ideas/temas matemáticos, la motivación para promover el aprendizaje, la comprensión de conceptos y problemas” (Guacaneme, 2016, p. 232). Como se argumentó en el ítem anterior, las ideas frente a un posible material inspirado desde la historia de las matemáticas, pero no se concretó por los tiempos. Aunque se reconocen en la literatura distintos materiales inspirados en ella.

En cuanto a las bases para orientar el currículo la HM ofrece “un marco de referencia que permite comprender algunas cuestiones que determinan –o determinarían– el currículo en Matemáticas en general” (Guacaneme, 2016, p. 232). De este apartado, no se hizo relación profunda, tan solo se tocó de manera incidental, sin mayor relevancia en el trabajo desarrollado.

3.2.3. Competencias personales y profesionales

Algunas de las ideas expresadas para las competencias personales nombran que:

> “el estudio de la HM le ofrece la posibilidad al profesor de vivir experiencias de aprendizaje alternativas a las usuales, que le conducen a un ambiente de aprendizaje e independencia intelectual, al desarrollo del pensamiento crítico, al [auto]reconocimiento de la capacidad de abordar de manera exitosa el estudio de aspectos históricos complejos, y a una [re]contextualización y [re]personalización de los conocimientos” (Guacaneme, 2016, p. 235).

El estudio planteado sobre las teorías de las proporciones no solo ha influenciado en la noción misma de la proporcionalidad, sino que además ha llevado a cuestionar conceptos de diversa índole tanto matemáticos, didácticos o pedagógicos. Influenciado no solo conocimientos comunes del saber de un docente de matemáticas, sino también de cultura general, por ejemplo, la cosmovisión pitagórica que es en sí misma es una fuente de profundo interés matemático, filosófico e intelectual.

En referente a las competencias profesionales la HM

> “favorece la polimatía o el pensamiento interdisciplinar del profesor y enriquece su repertorio de conocimientos, proveyéndolo de un conocimiento de parte de la cultura de la humanidad y beneficiando cada uno de los dominios del “Conocimiento Matemático para la Enseñanza” (Mathematical Knowledge for Teaching) o, en otras palabras, el conocimiento matemático que se emplea en la práctica docente y que trasciende el mero conocimiento de conceptos y procedimientos.” (Guacaneme, 2016, p. 235).

Este es uno de los temas que reconocemos tuvo mayor trascendencia en cuanto al cambio de visión del qué necesita saber un profesor de matemáticas; entender un documento de este tipo implica desarrollar una serie de capacidades no solo en lo matemático sino también de un conocimiento histórico. Además, sorprende ver de qué tipo de hallazgos y análisis se usan como evidencias para el desarrollo de las matemáticas en las culturas antiguas. Así como en Szabó el aspecto lingüístico es fundamental, se toman muchas otras evidencias que pueden pasar desapercibidas que no son de carácter matemático, asunto que de manera análoga se entraña también la escuela, al reconocer en el pensamiento de los estudiantes aspectos metamatemáticos.

Conclusiones

En relación con el objetivo que pretendía conocer la postura de diferentes autores, reconocemos que no se abordó a cabalidad, nos centramos en las ideas expuestas de Szabó (que fue el primero en estudiarse de los documentos previstos, planteados en el anteproyecto) que resultaron complejas, profundas y extensas. Esto llevó a que se tomará la decisión de abordar minuciosamente tan solo este autor; este estudio en sí mismo implicó acudir al discurso de otros textos para comprender las ideas del autor principal, de los cuales resaltamos los documentos de Calderón, Grattan-Guinness y Freudenthal. En general estudiar a Szabó nos permitió reconocer su postura frente al origen de la teoría de las proporciones y su argumentación basada en la relación con la teoría musical. Un asunto físico, relacionado con el sonido, que los pitagóricos trataron desde la música y se trasladó al plano geométrico. Siendo claro ejemplo del nacimiento de una teoría en contextos extramatemáticos, importante hallazgo para identificar que no todos los objetos matemáticos deben desarrollarse en contextos intramatemáticos. Un asunto que no es menor en Szabó es su enfoque histórico filológico a trasvés del cual reconoce transformaciones en la semántica asociada a los términos relacionados con la teoría.

Con respecto a la segunda parte del mismo objetivo, es totalmente abordado. Como resultado de esto se tiene este documento escrito producto del trabajo de grado, es en sí mismo un soporte para la compresión de las ideas planteadas por el autor, dada la complejidad del texto, constituye una forma de comprenderlo. Además de la traducción de la segunda parte del texto de Szabó, de la cual también resaltamos que para abordar un documento histórico matemático es necesario la intervención de diversas cualidades que permiten reconocer e interpretar la importancia del mismo, asunto valioso a la hora de hacer la traducción, pues no puede tomarse como una simple tarea. Sin embargo, la dificultad intrínseca que tienen estos textos y dado el contexto no familiar de las matemáticas que se desarrolla en ellos, hace que muchas veces se hagan interpretaciones anacrónicas donde los conocimientos previos alteran el significado primigenio de las ideas. Consideramos que es muy difícil, siendo pesimista casi imposible, desligar estos conocimientos para poder tratar de observar con los ojos de los antiguos su desarrollo matemático. Esto permite como docentes de matemáticas identificar que enfrentarse a unas ideas ajenas y abordar un lenguaje que no le es propio en su momento, es un asunto complejo desde el punto de vista cognitivo. Gracias a la introspección acerca del conocimiento que se posee y del quehacer docente en marco de este estudio a través de la HM fue posible reconocer asuntos como este.

Con respecto al segundo objetivo, se hizo evidente la transformación profunda sobre el conocimiento que el profesor tiene y logra acerca de los conocimientos de la matemática escolar pues gracias al estudio histórico se ahonda en un objeto especifico. Esto permite tener una gama de posibilidades alternas a los conocimientos que se poseen, potenciando no solo el valor de la historia sino también su conocimiento sobre el objeto, que a futuro puedan generar acciones distintas de trabajo en el aula o al menos distintas a lo que podría plantear un docente que solo tiene una visión escolar sobre el objeto matemático. Por ejemplo, después cursar y aprobar la mayoría de los espacios académicos de la licenciatura es claro que la visión que se tenía sobre la las razones y proporciones era una visión netamente escolar, donde el concepto que se manejaba del objeto era la de una aplicación de los números racionales, siendo evidente las falencias frente a esta teoría. Tan solo al abordar el estudio de este trabajo de grado donde se reconoce la diferencia, asumimos que el estudio dentro de este marco histórico alimento nuestro conocimiento matemático como profesores de matemáticas. Otra discusión de gran valor, fue la generada por reconocer a que se le llama a magnitud; a un punto en la recta numérica, a diferencia entre distintos puntos o al segmento definido entre dos puntos. Cuestionamientos (que se dan en marco del análisis histórico) como este, no solo retan el conocimiento del docente de matemáticas, sino que aportan en el mismo.

Se reconoce que uno de los elementos hay objetos matemáticos que son de origen matemático o al menos que no nacen en un contexto abstracto, además, siendo presentistas, nacen en teorías que al parecer no tienen que ver con las matemáticas mismas. Otro elemento que se resalta es la polisemia de algunos términos, que muestran el significado primigenio de algunos conceptos matemáticos. Como ejemplo, *analogia* una palabra que no tiene relación, en un primer instante, con las matemáticas en su origen tiene nexos con ella, transformándose desde un contexto musical para significar en las matemáticas mismas.

En suma, por medio del estudio de la génesis de conceptos dentro de la teoría musical, así como las palabras y los objetos matemáticos estudiados, se reconoce la historia de las matemáticas como una fuente no solo de material didáctico sino también de capacidades intelectuales que pueden hacer transformar el profesor de matemáticas diversificando su conocimiento. Las discusiones que se dieron en torno a este estudio influyeron para discutir frente a temas de diversa índole, tanto matemáticos, pedagógicos, didácticos como de conocimiento general, reconociendo la influencia griega en el pensamiento occidental hasta nuestra época.

Con respecto al tercer objetivo, se considera que la HM se ve muchas veces como una fuente neta de herramientas, pudimos reconocer que esta puede generar gran variedad de temas que hacen reflexionar al docente de matemáticas, y transforman las dinámicas que se manejan en aula, y no solo esto puesto que con respecto al conocimiento matemático del profesor, la historia también lo transforma cuando se estudia los elementos mismos de las matemáticas; este estudio no solo le permite modificar su manera de pensar matemáticamente sino también su manera de pensar sobre las matemáticas. Así diversificaron las posturas que se tienen frente al objeto de estudio, ya que se reconoció que es una fuente de conocimiento matemático y para el profesor de matemáticas.

Todo lo anterior testimonia que el objetivo general se satisfizo y por esto se considera que el trabajo de grado puede darse por finalizado. Sin embargo, consideramos que quedan pendientes que se pueden hacer una posible continuación o apéndice de este estudio, de esto podemos plantear los siguientes cuestionamientos: Estudiar otros autores que puedan fijar otras interpretaciones y otros rumbos en la argumentación de origen de la teoría de las proporciones, por ejemplo, las que entrañan el origen mismo del pensamiento proporcional. De las posturas de Szabó, quedan preguntas latentes acerca de qué ocurrió posteriormente al origen de la teoría de las proporciones frente a sus avances o retrocesos. También, la posición de la licenciatura sobre los algunos objetos matemáticos escolares y su tratamiento desde el currículo, pues queda la duda sí la noción escolar que se tenía con respecto a la teoría de las proporciones, puede ocurrir frente a otro objeto matemático escolar. Además, abordando la historia como artefactos, se puede discutir si las ideas de Szabó pueden diseñar tareas para el aula y realizarlas.

Bibliografía

Calderón, D. (2013). *La regla de Bradwardine: Un momento en la historia de la proporcionalidad* (Tesis de pregrado). Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia.

Fernández, S. (1988). La proporción y la historia de las matemáticas. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 18*, 45-50.

Freudenthal, H. (1986). Ratio and proportionality. En *Didactical phenomenology of mathematical structures* (Vol. 1). Springer Science & Business Media.

González, P. (2004). La historia de las matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza. *Suma*, 45, 17-28.

Grattan-Guinness, I. (1996). Numbers, magnitudes, ratios, and proportions. En Euclid's Elements: How did he handle them?. *Historia mathematica*, 23(4), 355-375.

Guacaneme, E. (2016). *Potencial formativo de la historia de la teoría euclidiana de la proporción en la constitución del conocimiento del profesor de Matemáticas* (Tesis doctoral). Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Pérez, A. (director). (2000). Universo matemático: Pitágoras, mucho más que un teorema [documental]. España: Televisión Española

Puertas, M. (1994). *Euclides. Elementos Libros V-IX* (Vol. II). Madrid: Gredos.

Szabó, Á. (1978). The pre-euclidean theory of proportions. En *The beginnings of Greek mathematics* (pp. 99-184). México D.F.: D. Reidel Publishing Company.

Anexo

Anexo A. Traducción del texto guía

Traducción del documento Szabó, Á. (1978). The pre-euclidean theory of proportions. En Á. Szabó, The beginnings of Greek mathematics (pp. 99-184). México D.F.: D. Reidel Publishing Company.

Esta traducción se hace con fines netamente académicos y no comerciales en el marco del Trabajo de grado. En tanto que no constituye una traducción autorizada, se sugiere no citar esta traducción sino la fuente original.

Se aclara que las notas que se han agregado al español han sido referenciadas con letras, las otras aparecen en el original.

Los inicios de matemáticas griegas

Parte 2: La teoría pre-Euclidiana de las proporciones

Árpád Szabó

2. LA TEORÍA DE PRE-EUCLIDIANA DE LAS PROPORCIONES

2.1 INTRODUCCIÓN

En la medida en que ha sido aclarado por la investigación previa, la historia temprana de la teoría de las proporciones que se encuentra en Euclides se puede resumir de la siguiente manera:

Euclides comienza su discusión de la teoría en el Libro V de *Elementos*. La definición fundamental de este libro es la *Definición 5*: "Las magnitudes se dice que están en la misma razón (ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ), la primera a la segunda como la tercera a la cuarta, si cualquier de los equimúltiplos de la primera y tercera son iguales, mayores, o menores que cualquier equimúltiplos de la segunda y cuarta tomada en el orden correspondiente."

De esta definición se deduce que la igualdad $a\colon b = c\colon d$ se mantiene, sí y solo sí para cualquier número entero m y n,

$$\begin{gathered} ma > nb \text{ implica } mc > nd \\ ma = nb \text{ implica } mc = nd \\ \text{y} \\ ma < nb \text{ implica } mc < nd \end{gathered}$$

Esta ingeniosa definición, que ha sido a menudo una fuente de asombro[1], es atribuida usualmente a Eudoxo, un joven contemporáneo de Platón. Según un escolio[2], el cual lamentablemente es de un autor desconocido, en conjunto el Libro V es esencialmente la obra de Eudoxo[3]. En todo caso, la definición solo podría haber sido formulada en un momento donde se conocen las magnitudes inconmensurables y se está haciendo un esfuerzo para garantizar que la teoría de las proporciones, que hasta entonces solo se había aplicado a *números*, se podría extender a magnitudes inconmensurables.

Esto sugiere de inmediato la pregunta de por qué la definición fue usada antes del descubrimiento de la inconmensurabilidad, cuando la teoría de las proporciones solo era aplicaba a los números. Esta pregunta puede ser fácilmente respondida por referencia a otra definición de proporcionalidad que era más simple que la mencionada anteriormente y aplicable únicamente a los números, nombrada en *Elementos* Libro VII, *Definición 21*:

---

[1] Ver B. L. van der Waerden, *Science Awakening* (Oxford University Press 1961), pp. 175-6.
[2] Ver Euclides, *Elements* (ed. J. L. Heiberg, Lipsiae 1888-1916), Vol. V, p. 280.
[3] T. L. Heath, *Euclid's Elements*, Vol. 2, p. 112.

"Los números están en la misma razón[4] cuando el primero es el mismo múltiplo, la misma parte, o el mismo número de partes, de la segunda como la tercera es de la cuarta".

Así estas dos definiciones se podrían decir que marcan dos épocas diferentes en el desarrollo histórico de la teoría de las proporciones. La teoría más desarrollada que podría manejar magnitudes inconmensurables, así como números fue posible por la definición de Eudoxo (V.5) esta definición sin duda, debe haber tenido un origen más tardío que la otra (VII.21).

Esta simple cronología de hecho puede parecer una iluminación a primera vista, pero los problemas históricos que plantea y deja sin resolver no se pueden ocultar. Como ejemplo, consideremos la Proposición VI.13 de Euclides: La construcción de una media proporcional entre dos segmentos arbitrarios. Una demostración completa de esta proposición solo puede darse *sobre la definición de Eudoxo de proporcionalidad*. La otra definición falla en este caso, ya que solo se puede aplicar a números, y la longitud de la media proporcional entre dos segmentos cuyas longitudes no se puede escribir como números planos similares (ver Definición VII.22) es en sí misma una *magnitud inconmensurable* [a].

Así hemos conducido a la conjetura de que la construcción de una media proporcional entre dos segmentos arbitrarios solo fue posible después de que Eudoxo había establecido su definición. Esta conjetura, sin embargo, contradice el hecho histórico bien documentado que la construcción geométrica de una media proporcional era familiar para los pitagóricos antes del tiempo de Eudoxo, e incluso había sido conocida por Hipócrates de Quíos[5]. La pregunta es ¿cómo esta construcción podría haber sido probada en ese momento? Cualquier respuesta a esta pregunta debe ser necesariamente una conjetura. En el presente caso, se sugieren las siguientes tres conjeturas:

(1) Originalmente, antes de la época de Hipócrates de Quíos, una demostración completa de la Proposición VI.13 no podría darse. En este tiempo la 'validez intuitiva' de la construcción tuvo que ser suficiente en lugar de la demostración. Aunque la construcción de la media proporcional era, de hecho, más antigua que la prueba, la plausibilidad de esta conjetura se disminuye por el hecho de que el rigor de las demostraciones en las matemáticas griegas del siglo V ya eran muy altas[6]. En

[a] Manifestamos que no estamos de acuerdo pues una magnitud no es por sí misma conmensurable o inconmensurable (N. del T.)

[4]Esta traducción de la expresión ἀνάλογον, ver pp. 148-57ff.

[5] Ver el artículo de van der Waerden en Zur Geschichte der griechischen Mathematik, p. 225, n. 28.

[6] Ibíd. pp. 215-6.

mi opinión, es casi impensable que Hipócrates, por ejemplo, hubiera estado satisfecho con el llamado 'concepto ingenuo de la proporción'.

(2) Otra posibilidad es conjeturar que la Definición V.5 es en realidad mucho más antigua de lo que se ha creído. No hay que olvidar que no hay ninguna fuente antigua la cual actualmente acredite a Eudoxo con esta definición. Solo ha sido atribuida a él por el escolio antes mencionado, el cual afirma que la esencia del quinto libro de Euclides es la obra de Eudoxo.

(3) Finalmente, se podría imaginar que hubo una definición pre-eudoxiana de proporcionalidad la cual Euclides le hizo falta mencionar. Esta definición permite un tratamiento preciso de irracionales como proporciones racionales, e hizo posible una demostración completa de la construcción geométrica de la media proporcional.

En las últimas décadas los estudiosos creían que habían redescubierto tal definición. Aristóteles menciona en alguna parte (*Tópicos* VIII.3, p. 158b 29-35) una definición interesante de guardar la misma razón (la llamada definición *antifairetica* o *antanairetica*) que se desarrolla como sigue: "Sí su antifairesis es la misma las magnitudes están en la misma razón." Una interpretación de esta frase sugiere que Aristóteles está señalando las dificultades que, en ausencia de una definición adecuada, el descubrimiento de la inconmensurabilidad planteó para una demostración matemática. Se supone que la definición antifairesis debe haber ayudado a superar estas dificultades[7].

Presenté hace unos años[8] que esta interpretación del texto de Aristóteles (*Tópicos* VIII.3, p. 158b 29-35) es completamente errónea. Aristóteles, sin duda no estaba hablando de las dificultades de la demostración matemática en esta frase, ni tampoco tiene la intención de atribuir cualquier significado histórico para la definición de antifairesis como la interpretación moderna que se le atribuye.

A pesar de mis objeciones, el hecho es que Aristóteles cita esta definición. La única pregunta es si los mismos griegos *establecieron la definición de esta forma con las magnitudes inconmensurables en mente* (como Becker y, tras él, algunos otros estudiosos

[7] Ver O. Becker, 'Eudoxos-Studien I' en Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, etc. B, 2 (1933), p. 311-33.
[8] Á. Szabó, 'Ein Beleg für die voreudoxische Proportionen-Lehre?' Archiv für Begriffsgeschichte (Bonn) 9 (1964), pp. 151-71.

creían)[9], o si la *aplicaron solo a magnitudes conmensurables* (como Reidemeister conjetura)[10]. Por lo que puedo ver, una decisión entre estas alternativas no se puede tomar con seguridad con base de los argumentos hasta ahora dados. (Por supuesto, espero que la discusión contenida en los capítulos que siguen arroje nueva luz sobre esta cuestión. La única razón para no regresar más tarde al problema histórico que se refiere a las diferentes definiciones de proporcionalidad es que no es el tema central de mis investigaciones).

Así se puede ver que hasta ahora la investigación sobre el desarrollo histórico de la teoría de las proporciones se ha preocupado principalmente de la influencia que el descubrimiento de la inconmensurabilidad tenía sobre el futuro desarrollo de la teoría. Por lo tanto, hubo menos interés en la historia temprana de las proporciones. Solo se hizo referencia al hecho de que los términos que utiliza Euclides para esta teoría revelan una conexión con la teoría de la música[11].

Ahora me gustaría dilucidar el desarrollo de la teoría pre-euclidiana de proporciones, dando una historia de estos términos. Al hacer esto, voy a dibujar en gran medida los resultados de mi última publicación sobre este tema[12].

2.2 UN ESTUDIO DE LA MAYORÍA DE LOS TÉRMINOS IMPORTANTES

Sería un error creer que la historia de los términos que se utilizaron en la teoría matemática de las proporciones sea capaz de arrojar luz sobre los inicios de esta teoría. Tal historia tiene objetivos mucho más limitados en este caso. Para ser claro acerca de lo que se puede esperar de una investigación de este tipo, recordemos el tipo de cosas que hemos sido capaces de aprender acerca de la teoría de los irracionales mediante la investigación de la historia de un término matemático.

Se mostró en la Parte 1 de este libro que los siguientes hechos acerca de un término matemático como *dynamei symmetros* (medibles con respecto al cuadrado construido sobre el mismo) pueden ser establecidos con bastante certeza. (El término se introduce en la Definición X.2 de *Elementos*.) La expresión *dynamis* fue tomada en las matemáticas del

[9] Ver O. Becker, *Das Mathematische Denken der Antike* (Göttingen 1957), p. 103, n. 25.
[10] K. Reidemeister, *Das Exakte Denken der Griechen, Hamburg* 1949, p. 22.
[11] Ver, por ejemplo, el artículo 'Die *αϱχαι* in der griechischen Mathematik', *Archiv für Begriffsgeschichte* (Bonn) 1 (1955), pp. 13-103.
[12] Á. Szabó, 'Die frühgriechische Proportionen-Lehre im Spiegel ihrer Terminologies', *Archive for History of Exact Sciences 2* (1965), pp. 197-270.

lenguaje financiero. Del mismo modo que al convertir una moneda en otra, ‘tienen el mismo valor’ fue expresada por el verbo *dynasthai* o por el sustantivo *dynamis*, por lo que el ‘cuadrado que tiene la misma área que un rectángulo dado’ fue descrito por esas mismas dos palabras en la geometría. Así, la palabra *dynamis* llegó a tener el significado especial de ‘el valor del cuadrado de un rectángulo’ o ‘cuadrado’ en el lenguaje técnico de la geometría. Sin embargo, ya que la transformación de tales rectángulos cuyos lados se expresaron como números a menudo resultó en cuadrados cuyos lados no eran conmensurables en su longitud, se deseó medir esos mismos lados por sus cuadrados y no por las longitudes. Ese es el origen de la expresión *dynamei symmetros*. En este caso, por lo tanto, la historia de un término podría decirse que ha dilucidado la génesis de algunos conceptos matemáticos completamente nuevos, a saber ‘valor de un cuadrado’, ‘conmensurable’ o ‘inconmensurable’ en longitud y en cuadrado.

No son de esperar tales resultados para la teoría de las proporciones, porque el concepto de proporción no era una creación de las matemáticas griegas, del mismo modo que lo fueron nociones tales como conmensurabilidad y el valor de un cuadrado. Por lo que parece, el concepto de proporción jugó un papel importante en las matemáticas pre-griegas. Por ejemplo, se ha observado que en la totalidad de las matemáticas egipcias se puede decir que ha sido dominada por la idea de la proporción[13].

Sería una tarea imposible, en mi opinión, intentar dar una explicación basada en consideraciones terminológicas de cómo la idea de proporción en realidad entró en vigor, sobre todo porque esta idea es claramente muy antigua, cuyos inicios se remontan al pensamiento humano más primitivo.

Así las actuales investigaciones no se preocupan por los inicios de una teoría matemática de las proporciones. Ellas solo pretenden arrojar luz sobre los orígenes de la teoría de las proporciones que se presentan en *Elementos* y que, sin duda, se originó con los griegos. Es mi opinión, con toda probabilidad, este proceso pre-euclidiano se puede reconstruir con precisión mediante la investigación de aquellas expresiones que luego fueron adoptadas de forma permanente en la ciencia griega. Por ello, permítanme empezar por listar los más importantes de esos términos cuyos orígenes son investigados más a fondo a continuación.

[13] P. H. Michel, *De Pythagore á Euclide*, Paris 1950, pp. 365ff.

*

Una forma habitual de Euclides para referirse a 'razón' y 'guardan la misma razón' se ilustra con el siguiente pasaje: *Elementos* VII.11: "Sí un todo (por ejemplo $A = a + b$) es a otro todo (es decir $B = c + d$) como una parte restada de uno es a la parte restada del otro ($A\!:\!B = a\!:\!c$) – ἐὰν ᾖ ὡς ὃλος πρὸς ὃλον, οὗτως ἀφαιρεθεὶς πρὸς ἀφαιρεθέντα, entonces, el resto de la una es también a el[b] resto de la otra como un todo es a el otro ($b\!:\!d = A\!:\!B$) –καὶ ὁ λοιπὸς πρὸς τὸν λοιπὸν ἔσται, ὡς ὅλος πρὸ ὅλον." Como podemos ver, Euclides solo utiliza la preposición 'a' (πρός) para expresar la 'razón' (ὅλος πρὸς ὅλον y λοιπὸς πρὸς λοιπόν), mientras que se utiliza una llamada cláusula adverbial de comparación[14] para 'guardan la misma razón' (ὡς… οὓτως…). Esta es una forma muy común de expresar estas nociones. También se encontró en un fragmento sobre la resonancia arcaica de Arquitas, donde se discute la llamada media geométrica[15].

γεωμετριχὰ δέ, ὅκκα ἔωντι οἷος ὁ πρῶτος (ο ὅρος) ποτὶ τὸν δεύτερον, καὶ ὁ δεύτερος ποτὶ τὸν τρίτον	Una media geométrica está presente, cuando el primer término es a el segundo como el segundo es a el tercero.

La única diferencia gramatical entre estas dos citas es que en el segundo, para guardar la misma razón se expresa mediante una llamada cláusula adjetival de comparación (οἷος… καὶ…).

Esta forma de expresar 'razón' y 'guardar la misma razón' es apenas esclarecedor desde un punto de vista histórico. Lo único que se puede decir es que el uso de la preposición πρός (para describir una razón) bien pudo haber sido una palabra especializada en matemáticas. Probablemente no hay otra forma de explicar cómo Aristóteles fue capaz de cambiar el significado de esta expresión matemática para que se refiriera a su categoría de 'relación' (τὸ πρός τι).

Más interesante es el hecho de la relación de 'proporción' del cuarto término (o 'guardar la misma razón', como se le llama por lo general en este libro), que se expresa por la fórmula $a\!:\!b = c\!:\!d$, se denota por ἀναλογία en la terminología de las matemáticas. Solo Euclides usa este término en la Definición V.8 de *Elementos*: "La menor proporción se compone de tres términos" (Ἀναλογία ἐν τρισὶν ὅροις ἐλαχίστη ἐστίν). Debido a que

---

[b] Se acepta la imperfección gramatical 'a el', en vez de 'al', puesto que se utiliza en el argumento siguiente (N. del T.)

[14] R. Kühner and B. Gerth, *Ausführliche Grammatik der griechischen Sprache*, vol. 2, p. 490; 4th edn., Hanover 1955.

[15] H. Diels and W. Kranz, *Fragmente der Vorsokratiker*, vol. 1, p. 436 (Archytas B2).

esta definición es completamente redundante en lo que se refiere a las proposiciones de Euclides, a menudo esta ha sido considerada como una 'interpolación posterior'[16]. Sin embargo, esta pregunta no nos concierne aquí. La palabra $\dot{\alpha}\nu\alpha\lambda o\gamma \acute{\iota}\alpha$ (en el sentido de 'guardar la misma razón geométrica') es sin duda un viejo término matemático. En una ocasión, Aristóteles explico la fórmula $a{:}\,b = c{:}\,d$ como una 'analogía geométrica' en los siguientes términos: [17] 'el término a es al término b, como es el término c al término d' (ἔσται ἄρα ὡς ὁ $\boldsymbol{\alpha}$ ὅρος πρὸς τὸν $\boldsymbol{\beta}$, οὕτως ὁ $\boldsymbol{\gamma}$ πρὸς τὸν $\boldsymbol{\delta}$). También hay citas de Euclides que muestran que la palabra ἀναλογία es un viejo término matemático. Euclides nunca usa exclusivamente las palabras ὁ αὐτὸς λόγος en el sentido de 'la misma razón' (véase por ejemplo, la Definición V.5); a veces se emplea también la expresión arcaica ἀνάλογον (para 'en la misma razón'), como por ejemplo en la Definición VII.21, que fue citada anteriormente.

Tengo la intención de dedicar algunos capítulos posteriores a una investigación a fondo de las expresiones fundamentales de la teoría de las proporciones (en particular λόγος, ἀνάλογον y ἀναλογία). Sin embargo, hay otra expresión matemática que es la clave para las siguientes discusiones históricas, y me gustaría empezar a concentrarme en ella.

En griego un 'término' en una proporción (guardar la misma razón) se llama ὅρος. Esta palabra aparece solo una vez en *Elementos*, esto es en la Definición V.8: "La menor proporción consta de tres términos" (… ἐν τρισὶν ὅροις). Una vez más, sin embargo, hay una gran cantidad de evidencia que apoya la opinión de que esta palabra (ὅρος en el sentido de '*término* de una proporción') era en realidad un término matemático conocido. A propósito de la definición establece que la menor proporción tiene tres términos, es decir $a{:}\,b = b{:}\,c$. Aristóteles expresa este mismo hecho diciendo que toda proporción tiene al menos cuatro términos. Según él, incluso los menos *análogos* (el llamado ἀναλογία συνεχής) en realidad tiene cuatro términos; es solo que en este caso el término medio (b) se cuenta dos veces. Al explicar esto[18], Aristóteles usa la palabra ὅρος para denotar los términos de una proporción, al igual que Euclides lo hace en la definición mencionada anteriormente. Hay muchos otros ejemplos donde se podría dar este mismo uso a la palabra ὅρος en matemáticas.

[16] T. L. Heath, *Euclid's Elements*, Vol. 2, p. 131.
[17] Nicomachean Ethics, 1131b5.
[18] Ibíd. 1131 a31-b5.

Es mi opinión que una explicación histórica de los orígenes y el desarrollo de la teoría pre-euclidiana de proporciones tiene que comenzar desde la palabra $ὅρος$. Mi razonamiento es el siguiente:

Aunque el término $ὅρος$ es utilizado solo una vez por Euclides para dar significado al '*término* de una proporción', usa esta misma palabra en otras ocasiones en dos sentidos completamente diferentes:

(1) $Ορoι$ se utiliza con mayor frecuencia en *Elementos* para referirse a las definiciones. Este uso, sin duda proviene de la lengua de la filosofía, del que hablaré con más detalle en la Parte 3 de este libro. El uso de $ὅρος$ que significa 'definición' no tiene nada que ver con la teoría de las proporciones.

(2) El otro significado de $ὅρος$ es más importante para nosotros en este sentido. En muchos pasajes Euclides usa la palabra griega $ὅρος$ (masculino) en su sentido cotidiano de la 'frontera' o 'punto final'. Este significado fue claramente asumido en la geometría. Por ejemplo, la Definición I.13 de *Elementos* afirma que $ὅρος\ ἐστίν, ὅ\ τινός\ ἐστι\ πέρας$, que Heiberg lo traduce como "*Terminus* est, quod alicuius rei extremum est"**¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**.

Ahora conjeturo que este último significado de $ὅρος$ (terminó o punto final), también fue tomado en la teoría de las proporciones. Después de todo, todavía hablamos de los *términos* de una proporción. Pero aún no ha sido explicado en qué sentido se dice que una proporción tiene puntos finales.

Tenemos que responder a preguntas tales como por qué los griegos hablaban de *puntos finales* en relación con las proporciones y razones; por qué ellos sostenía que todas las que 'guardan la misma razón' ($ἀναλογία$) tenía cuatro puntos finales y toda 'razón' ($λόγος$) tenía dos; y sí esta nomenclatura es significativa. No creo que esto se pueda lograr teniendo solo en cuenta los dos términos $λόγος$ y $ἀναλογία$, para ellos el nombre $ὅροι$ parece oscuro y sin sentido. Sin embargo, si tenemos en cuenta que, en la teoría matemática de la música desarrollada por los pitagóricos, y también en el *Sectio canonis* que ha llegado hasta nosotros como una obra de Euclides, la 'razón de dos números entre sí' (más tarde recibió el nombre $λόγος$ en la aritmética y la geometría) se llamó $διάστημα$, entonces estamos en el buen camino para responder a estas preguntas.

En la teoría de la música $διάστημα$ tenía dos significados. Por un lado, significa 'intervalo musical' (y también la 'razón entre los números' que expresan este intervalo), y por otro

[C] Traduce "límite es aquello que es extremo de otro" (N. del T.)

lado tenía su significado cotidiano de ‘segmento de línea’ o ‘distancia entre dos puntos’. (Por cierto hay que notar que Euclides utiliza con frecuencia *διάστημα* en este último sentido. En su tercer postulado, por ejemplo, dice: “Se postula que un círculo se puede dibujar con cualquier centro y cualquier segmento de línea.” – *παντὶι διαστήματι*.)

Este último significado de *διάστημα* (‘segmento de línea’ o ‘distancia entre dos puntos’) inmediatamente hace que la elección del nombre *ὅροι* (puntos finales) parece significativo y evidente, porque un segmento de línea, de hecho, tiene dos puntos finales. Si pudiéramos mostrar algún tipo de conexión entre ‘razones’ y ‘segmentos de línea’, entonces estos segmentos o razones realmente tendrían dos puntos finales (*ὅροι*). Esto es exactamente lo que espero hacer en los siguientes capítulos.

Procederé a mostrar que:

(1) Los intervalos musicales se expresaron como ‘razones entre números’, fueron llamados *διάστημα* (la distancia entre dos puntos) en la teoría griega de la música más antigua (Pitagórica). Un diastema realmente tenía dos puntos finales (*ὅροι*) que (como veremos más adelante) eran números asignados.

(2) Por lo que parece, la ‘razón de dos números entre sí’ recibió el nombre *λόγος* algo más tarde. Un *λόγος* también se dice que tiene dos *ὅροι* (puntos finales) porque originalmente (en la teoría de la música) esta palabra significaba algo similar a *diastema*. Como cuestión de hecho, *λόγος* en la geometría pronto llegó a significar lo mismo que *diastema* en la teoría de la música.

2.3 CONSONANCIAS E INTERVALOS

Mi fin principal será ahora dilucidar el término musical *διάστημα*, debido a que la historia de este término científico da una gran cantidad de información sobre toda la teoría pre-euclidiana de las proporciones, así como sobre el origen de la expresión ‘*ὅροι* de una analogía’. Antes de empezar, sin embargo, vale la pena recordar algunos hechos conocidos acerca de la teoría de la música en la antigüedad.

(A) Diastema como consonancia

En la teoría de la música *διάστημα* significaba intervalo. Este hecho se puede confirmar mediante la consulta de cualquier léxico griego. Por el momento, vamos a considerar un intervalo simplemente como la 'distancia entre dos tonos', sin preocuparse por el origen o el verdadero significado de esta palabra.

En la antigüedad, los teóricos de la música estaban interesados principalmente en los llamados *intervalos concordantes* o *consonancias*[19]. En la práctica musical el nombre habitual para los intervalos de este tipo fue *συμφωνία*, porque tenían que ver con el concorde (*συμφωνεῖν*) de dos sonidos. En el presente trabajo solo nos ocuparemos de los tres intervalos concordantes más importantes; se trata de la *octava*, la *cuarta* y la *quinta* los nombres griegos de estos intervalos arrojan algo de luz sobre el origen de la expresión *διάστημα* ya que se utilizó en la teoría de la música, así que los listare a continuación (Mi referencia es el Diccionario de Pape, 1849).

La *octava* se llamaba *διαπασῶν* (en realidad ἡ *διὰ πασῶν χορδῶν συμφωνία*, el acorde pasa por todas las ocho cuerdas). El nombre de la cuarta fue *διατεσσάρων* (en realidad ἡ *διὰ τεσσάρων χορδῶν συμφωνία*, el acorde pasa por cuatro cuerdas) y, correspondientemente a la quinta fue llamado *διάπεντε*, ἡ *διὰ πέντε χορδῶν συμφωνία* (el acorde pasa a través de cinco cuerdas).

Parece, sin embargo, que estos nombres son de origen relativamente tardío. Ellos presuponen que las cuerdas estaban numeradas consecutivamente de una manera que era habitual en la práctica musical y que aún se refleja en nuestros nombres para estos intervalos (*octava* [8], *quinta* [5] y la *cuarta* [4]). Sin embargo, esto no fue así en sus inicios.

Originalmente las cuerdas no estaban numeradas, en lugar cada una tenía su propio nombre. Por ejemplo, la cuerda superior (que era la más larga, y produjo la nota más baja) fue llamada ὑ*πάτη* (la más alta) y la cuerda inferior (que era el más corta y produjo la nota más alta) fue llamada *νήτη*. Las cuerdas restantes yacían entre las dos más externas; de estas, las únicas cuyos nombres tienen que ser mencionadas aquí son la *μέση* y la *παραμέση*[20]. De ahí los intervalos concordantes podrían describirse simplemente por los nombres de las cuerdas que se trate (es decir, aquellas que producen los tonos en cuestión). Así, por ejemplo, la *octava* era conocida como la concordia de la *hypate* y *nete*[21].

---

[19] Ver B. L. van der Waerden, 'Die Harmonielehre der Pythagoreer', *Hermes* 78 (1943), 163-99.
[20] Ver Plato, *The Republic*, Book IV. 443d.
[21] 'Pseudo-Aristoteles, "De Rebus musicis problemata"' *Musici scriptores graeci*, ed. C. Janus (Lipsiae 1895), problemas 23 y 25.

Sabemos de algunos nombres anteriores para estas tres consonancias, que son aún más interesantes. La cuarta que solía llamarse $\sigma\upsilon\lambda\lambda\alpha\beta\acute{\alpha}$; esta palabra significa en realidad 'mantenerse unidos', es decir, 'mantener unida la primera y última cuerda de un tetracordio'. (Estas dos cuerdas se *mantienen unidas* y sonaban al mismo tiempo, o directamente una después de la otra; De esta manera se produjo una *cuarta*) Del mismo modo Nicómaco informa que entre los pitagóricos la *quinta* fue llamado $\delta\iota o\xi\varepsilon\tilde{\iota}\alpha$ (también escrito $\delta\acute{\iota}$ $\acute{o}\xi\varepsilon\iota\tilde{\alpha}\nu$ o $\delta\acute{\iota}$ $\acute{o}\xi\varepsilon\iota\tilde{\omega}\nu$)[22]. Este nombre proviene claramente del hecho de que para producir una *quinta*, dos tetracordios se juntaron y la nota de cada uno produjo se describen generalmente la nota aguda $\acute{o}\xi\varepsilon\tilde{\iota}\alpha$ (es decir alta). Por último, la *octava* se llamó $\grave{\alpha}\varrho\mu o\nu\acute{\iota}\alpha$, 'unión' (es decir, la '*unión de dos tetracordios*')[23], debido a que las dos cuerdas externas de dos tetracordios unidos sonaron para producir una octava.

Estos nombres antiguos de las tres consonancias más importantes son mencionados en un fragmento de Filolao de la que me gustaría citar unas palabras aquí[24]:

> "La extensión de una *octava* es una *cuarta* y una *quinta* ($\acute{\alpha}\varrho\mu o\nu\acute{\iota}\alpha\varsigma$ $\delta\grave{\varepsilon}$ $\mu\acute{\varepsilon}\gamma\varepsilon\vartheta\acute{o}\varsigma$ $\acute{\varepsilon}\sigma\tau\iota$ $\sigma\upsilon\lambda\lambda\alpha\beta\grave{\alpha}$ $\kappa\alpha\grave{\iota}$ $\delta\acute{\iota}$ $\acute{o}\xi\varepsilon\iota\tilde{\alpha}\nu$). … Para la distancia entre la cuerda superior y la del centro es una cuarta ($\breve{\varepsilon}\sigma\tau\iota$ $\gamma\grave{\alpha}\varrho$ $\acute{\alpha}\pi\grave{o}$ $\grave{\upsilon}\pi\acute{\alpha}\tau\alpha\varsigma$ $\acute{\varepsilon}\pi\grave{\iota}$ $\mu\acute{\varepsilon}\sigma\sigma\alpha\nu$ $\sigma\upsilon\lambda\lambda\alpha\beta\acute{\alpha}$) y la distancia entre la del medio y la más inferior es una *quinta* ($\acute{\alpha}\pi\grave{o}$ $\delta\grave{\varepsilon}$ $\mu\acute{\varepsilon}\sigma\sigma\alpha\varsigma$ $\acute{\varepsilon}\pi\grave{\iota}$ $\nu\varepsilon\acute{\alpha}\tau\alpha\nu$ $\delta\acute{\iota}$ $\acute{o}\xi\varepsilon\iota\tilde{\alpha}\nu$)…".

(B) *Diastema* como intervalo

En mi opinión, uno solo tiene que examinar los diversos nombres y descripciones de las cuerdas y las consonancias que se han enumerado hasta ahora, para ver que sin duda todos ellos se derivan directamente de la práctica musical. En última instancia, fue en la *práctica musical* que las cuerdas recibieron primero nombres y más tarde le fueron asignados números; también las consonancias fueron descritas por las cuerdas que los produjeron.

De este hecho hay que destacar desde el principio, porque el otro término, el que más nos interesa en este contexto, la palabra *diastema* significa el *intervalo* por sí mismo (es decir, no el concorde –*symphonia*– de dos sonidos, sino su distancia del uno al otro), se deriva de la teoría musical, no de la práctica. Esta cuestión se abordará más adelante.

---

[22] Véase el texto correspondiente a $\delta\iota o\xi\varepsilon\tilde{\iota}\alpha$ en el Diccionario de Pape (1849), también Porphyrios *Kommentar zur Harmonielehre des Ptolemaios*, ed. Düring (Göteborg 1932), p. 96. 21.

[23] Véase el artículo de H. Koller en el *Musseum Helveticum* 16 (1959), pp 238–48; también B. L. van der Waerden, ibid. 17 (1960), 111ff.

[24] Diels y Kranz, *Fragmente der Vorsokratiker*, vol. 1, 44 B6.10ff.

El otro hecho acerca de los términos técnicos se discutió anteriormente y que me gustaría destacar es que todos ellos son completamente *concretos*. Las consonancias recibieron sus nombres de las cuerdas de un instrumento musical que las ha producido. Es evidente que no hay alguna duda que la llamada transferencia metafórica de nombres ocurrió en estos casos. Este último hecho hay que subrayar, porque la literatura moderna sobre el tema está llena de afirmaciones que llevan a creer que el término musical *diastema* (intervalo) se entiende como una especie de metáfora. Para ver cómo este término se interpreta hoy en día, permítanme citar la siguiente frase del libro de Burkert[25]: "Para nosotros, la representación en términos de líneas rectas se sugiere en particular mediante la notación musical y el teclado del piano, sin embargo, también era conocida por los griegos, como lo indica el término 'intervalo' $\delta\iota\acute{\alpha}\sigma\tau\eta\mu\alpha$."

Quien escribió esta frase era claramente consciente del hecho de que para los griegos el intervalo musical (*diastema*) era algo tan real y concreto como $\sigma\upsilon\lambda\lambda\alpha\beta\acute{\alpha}$, al 'sostener juntas las dos cuerdas más externas del tetracordio' (es decir, la cuarta). Es engañoso hablar de una "*representación* en términos de líneas rectas". Una vez que se señala que el intervalo musical (*diastema*) era una línea recta real y concreta que era mensurable en longitud. Es aún más engañosa de leer en el mismo autor[26] que "La concepción (de intervalos) como líneas rectas se vincula con el nombre de Aristóxeno, la teoría de las proporciones musicales se asocia con los pitagóricos…".

Debo confesar que no he logrado descubrir ningún tipo de significado razonable en esta afirmación. "La concepción (de intervalos) como líneas rectas" y "la teoría de las proporciones musicales" no se puede contrastar una con otra, porque la palabra *diastema* (intervalo) significa tanto 'línea recta' como 'razón numérica de un intervalo musical'. Además, es imposible que este hecho se haya escapado a la atención de cualquiera que haya leído con la atención suficiente, incluso una sola frase de la *Sectio Canonis* (en el griego original).

Vale la pena recordar aquí que la falsa (metafórica) interpretación del significado de *diastema* (intervalo musical) no era desconocida en la antigüedad. Permítanme indicar aquí algunas de estas falsas interpretaciones, se encuentra en escritores clásicos tardíos.

Cleonides escribe que "Un intervalo (*diastema*) es el que está contenido ($\tau\grave{o}\ \pi\varepsilon\varrho\iota\varepsilon\chi\acute{o}\mu\varepsilon\nu o\nu$) por una nota baja y otra alta"[27]. Literalmente casi la misma explicación

[25] W. Burkert, *Weisheit und Wissenschaft*, p. 348.
[26] Ibíd., p. 349.
[27] *Musici scriptores graeci*, ed. C. Janus (Lipsiae 1895), p. 179.11.

puede encontrarse en Gaudencio[28]. Nicómaco describe una *diastema* musical como "camino" que conduce de una nota baja a una alta, o viceversa (*ὀδὸν ποιὰν ἀπὸ βαρύτητος εἰς ὀξύτητα ἢ ἀνάπαλιν*)[29]. Tales "explicaciones", por supuesto, solo fueron posibles porque se sabía exactamente lo que la palabra *διάστημα* significaba en el uso común, es decir "la distancia entre dos puntos" o "línea recta". Sí uno lee solo las interpretaciones citadas arriba, entonces podría de hecho estar inclinado a creer que es solo una metáfora aquí.

Si uno lee solo las interpretaciones citadas arriba, entonces podría inclinarse a creer que es solo una metáfora lo que está siendo tratado aquí. Los dos tonos de la consonancia se piensan como dos puntos en el espacio, como entre dos puntos en el espacio yace una 'línea recta', de acuerdo con la metáfora, entre los dos tonos yace un diastema. (Por lo tanto, el hecho de que el *diastema* entre dos tonos fue también *una línea recta real en el espacio* se olvida).

Probablemente, la primera persona que busco explicar el 'intervalo musical' en un sentido metafórico (y que según todas las apariencias deliberadamente quería cambiar su significado), fue Aristóxeno. En el siglo IV A.C. escribió[30]:

> "Un intervalo es el que está delimitado por dos sonidos que tienen diferentes tensiones (es decir tonos). Por lo tanto de acuerdo con el concepto básico de un intervalo se manifiesta tanto como una *diferencia en la tensión* (*διαφορά τις εἶναι τάσεων τὸ διάστημα*) y como un *espacio* capaz de tomar en esos tonos que son más altos que el tono inferior que limita el intervalo, y más bajo que el mayor (*τόπος δεκτικὸς φθόγγων*). Una diferencia de tonos, sin embargo, consiste en ser más o menos tensa".

Está claro que este cambio en el significado de *diastema*, desde una completamente concreta a una metafórica, está estrechamente ligado a la enseñanza básica de Aristóxeno, porque fue un opositor de los pitagóricos. Van Jan ha resumido sus enseñanzas de la siguiente manera[31]:

> "En sus armónicos él no investigó el origen de un tono, ni se preguntó *si era un número o una velocidad.* El oído solo necesita escuchar sin afectación el rango de

[28] Ibíd., p. 329.23ff.
[29] Ibíd., p. 243.2.
[30] *Die Harmonischen Fragmente des Aristoxenos*, ed. P. Marquard, Berlin 1868, pp. 20ff.
[31] C. Van Jan, 'Aristoxenus' (en *Realencyclopädie III*, pp. 1057-65).

> tonos; esto nos dirá con certeza cuales tonos armonizan entre sí… su sistema se basa en la cuarta y la quinta así que son fácilmente perceptible como consonancias, y sin preguntarse *qué razones numéricas que subyacen*, él fue capaz de determinar de ellos los tonos y medio tonos, etc.”

De hecho, las propias palabras Aristóxeno también dan fe de sus tendencias anti-pitagóricas[32]:

> “Estamos tratando de llegar a conclusiones que estén de acuerdo con los datos, a diferencia de los teóricos que nos precedieron. Algunos de ellos introdujo completamente puntos de vista extraños en el tema y desestimó la experiencia sensorial como imprecisa; de ahí que componen causas inteligibles y declaró que había *ciertas razones entre los números y las velocidades* (*λόγους τέ τινας ἀριθμῶν εἶναι καὶ τάχη πρὸς ἄλληλα*) en la que el tono depende de una nota. Estas fueron todas las especulaciones que son completamente ajenas al tema y absolutamente contrario a las apariencias. Otros renunciaron a razones y argumentos por completo y proclamaron sus afirmaciones como si fueran oráculos; pero también ellos prestaron suficiente atención a los datos”.

Sin duda, Aristóxeno está hablando de los pitagóricos cuando dice que algunos teóricos querían explicar el tono de una nota por medio de “ciertas razones entre los números”. Por otra parte, se vio obligado a reinterpretar el significado de *diastema* de una manera metafórica, tanto por quería dejar a un lado la enseñanza de los pitagóricos y porque él atribuye diferencias en el tono a si la cuerda era más o menos tensa. (Veremos en el próximo capítulo que fueron los pitagóricos los que acuñaron el término musical *diastema* y que para ellos esta palabra denota una *línea recta* cuyos *puntos finales* producen una *razón numérica*, es decir, la razón numérica de la consonancia concerniente. Aristóxeno tuvo que cambiar en este sentido, ya que no quería admitir que las razones numéricas tenían nada que ver con consonancias). Esto explica su extraordinaria interpretación de un intervalo musical (*diastema*) ya sea como una ‘diferencia en la tensión’, o algo así como ‘un espacio capaz de tomar en esos tonos que son más altos que el tono inferior que limita el intervalo y más bajo que el más alto’. Es aparente de esta explicación forzada que Aristóxeno quería privar al concepto pitagórico de *diastema* de su significado concreto original. Como de hecho, fue un éxito parcial en este esfuerzo.

---

[32] Mirar P. Marquard (ed.), *Die Harmonischen Fragmente des Aristoxenos*, pp. 46-7 (32, 19ff. en Meibom's numbering).

De acuerdo con el concepto original de Pitágoras, siempre había *dos* números asociados con un *diastema* musical. Como dijo Porfirio en su comentario sobre la teoría de la armonía de Ptolomeo[33], "La mayoría de κανονικοί pitagóricos dicen *intervalos* (διαστήματα) en lugar de *razones numéricas* (λόγοι)".

Estas palabras significan que 'intervalo' (διάστημα) y 'razón numérica' (λόγος) son conceptos equivalentes en la terminología de la teoría musical de Pitágoras. Esta conclusión se confirma no solo por el hecho de que el término διάστημα se utiliza constantemente para nombrar λόγος en el *Sectio Canonis*, sino también por otro pasaje de Porfirio. Aunque los pitagóricos no se mencionan explícitamente en este último pasaje, es claro que la referencia es a ellos[34].

> "Algunos llaman a una *razón numérica entre los puntos finales*, *diastema* (τὸν λόγον καὶ τὴν σχέσιν τῶν πρὸς ἀλλήλους ὅρων τὸ διάστημα καλοῦσι), los cuales podrían ser caracterizados en términos de sus puntos finales como λόγοι, así como διαστήματα, es decir la cuarta sería *epitritos logos* (4: 3), la quinta sería *hemiolios logos* (3: 2) y así sucesivamente".

Esta cita es interesante, no solo porque demuestra que los dos conceptos 'intervalo musical' (*diastema*) y 'razón numérica' (*logos*) fueron equivalentes en cuanto a los pitagóricos le era concerniente, sino también porque implica claramente que los puntos finales (ὅροι), que también debe haber sido números, podría funcionar como 'puntos finales de *diastemata*' y como 'puntos finales del *logoi*'.

Ahora nos queda por mostrar cómo la palabra διάστημα podría significar 'la distancia entre dos puntos', 'el intervalo musical entre dos tonos' y 'razón numérica', todo al mismo tiempo.

2.4 LA 'DIASTEMA' ENTRE DOS NÚMEROS

Ahora voy a tratar de explicar la génesis de dos conceptos interesantes, διάστημα y ὅροι, que figuran en la teoría musical pitagórica. Aunque hasta donde sé no hay ninguna fuente antigua que trate directamente con la cuestión de cómo estos conceptos llegaron a existir, no es un experimento notable descrito por más de un autor clásico tardío, que casi podría

[33] Porfirio, *Kommentar zur Harmonielehre des Ptolemaios*, ed. Düring (Göteborg 1932), p. 92, 22-3: καὶ τῶν κανονικῶν δὲ καὶ πυθαγορείων οἱ πλείους τὰ διαστήματα ἀντὶ τῶν λόγων λέγουσιν.

[34] Ibid., p. 94, 31ff. Mi traducción de este pasaje es provisional. Ver también esa parte del texto marcado por nota 42 abajo.

decirse que dan una respuesta a la misma. Antes de citar uno de estos autores en la traducción, hay dos hechos que deben ser declarados:

(1) Como ya se ha mencionado, los pitagóricos expresaron intervalos musicales como razones numéricas.

(2) Hay toda una serie de pruebas que demuestra que siempre utilizan los mismos números fijos para este propósito[35]. Por otra parte, las razones numéricas que corresponden a las tres consonancias más importantes eran siempre $12:6$ ($= 2:1$, la octava), $12:9$ ($= 4:3$, la cuarta) y $12:8$ ($= 3:2$, la quinta).

Ahora Gaudencio narra el siguiente experimento mediante el cual Pitágoras se supone que han descubierto las razones numéricas que corresponden a los tres intervalos musicales más importantes[36].

> Él extendió una cuerda a través de una regla, llamado *canon*, y dividió esta (regla) en doce partes. En primer lugar se tomó toda la cuerda y luego la mitad de ella, que comprendía seis unidades; él encontró que el tono de toda la cuerda armonizaba con el de la media ($12:6$) concordaba con la *octava*… Luego se tomó toda la cuerda una vez más y también tres partes del todo[37] ($4:3 = 12:9$), y se encontró que estos dos tonos armonizaban de acuerdo con la *cuarta*. Finalmente se tomó toda la cuerda y dos partes del todo ($3:2 = 12:8$), y se encontró que en esta ocasión los dos tonos armonizaban según la *quinta* etc.

Lo primero a destacar es que el experimento acústico descrito en la cita anterior no puede ser caracterizado como 'físicamente imposible'. Hay que reconocer que en las observaciones acústicas de la antigüedad tardía y los experimentos que son físicamente imposibles fueron atribuidos con frecuencia a Pitágoras[38], pero los experimentos con el 'canon' se distinguen de estos. Incluso los estudiosos modernos que son justamente escéptico acerca de estas historias están de acuerdo en su mayor parte que "la teoría pitagórica de la música puede ser verificada en cierta medida"[39] por medio del canon.

---

[35] Ver H. Roller, *Museum Helveticum* 16 (1959), 240-1.

[36] Gaudencio vivió en el siglo IV d.C. ver *Musici scriptores Graeci*, ed. C. Janus (Lipsiae 1895), p. 341. 13ff., para la cita; ver también B. L. van der Waerden, *Science Awakening*, p. 95.

[37] La frase 'tres partes del todo' significa *tres cuartos*: de manera similar: 'dos partes de un todo' en la siguiente frase significa *dos tercios*.

[38] W. Burkert, *Weisheit und Wissenschaft*, pp. 354ff.

[39] Ibid., p. 353.

Por supuesto, esto todavía deja preguntas abiertas como si es correcto atribuir algún tipo de experimentos a Pitágoras, si el 'canon' era tal vez solo una "pieza artificial de un aparato que fue ideado más adelante" y si los números proporcionales de las consonancias musicales fueron realmente descubiertos en el curso de los experimentos de este tipo. Sin embargo, podemos posponer la respuesta por un tiempo, ya que estamos interesados en un aspecto diferente del experimento descrito anteriormente.

El 'canon' mencionado por Gaudencio era una cuerda tensa (monocorde) en una vara de medir que se dividió en doce partes. El punto de tener una escala duodecimal era claramente para asegurar que las razones entre las longitudes de cuerda que se sonaban se pudieran determinar fácilmente. Así que podemos suponer no solo que la vara de medir se dividió en doce partes, sino también que cada parte fue numerada. El pasaje anterior realmente oferta tres experimentos. En cada uno de ellos toda la cuerda (las doce unidades de la varilla de medición) sonó primero y luego una sección corta de la cuerda fue quitada con el fin de producir un tono acorde con el de toda la cuerda. Para llevar a cabo la segunda etapa de cada experimento, debe haber sido necesario evitar que una sección de la cuerda vibre. Aunque Gaudencio no dice nada acerca de cómo se acortó la cuerda en la práctica, tenemos alguna información acerca de esto a partir de otras fuentes. Un pequeño *puente* (ὑπαγωγεύς) se movió debajo de la cuerda estirada[40]. Esta es la razón por la que conjeturo que el canon no solo se divide en doce partes, sino que también fue numerado. Esto permitiría ver de un vistazo donde (es decir, en qué número) del ὑπαγωγεύς se paró, cuando la cuerda se tomó una segunda vez, y por lo tanto la cantidad de la cuerda vibrante y que tanto se mantuvo en silencio.

Como ejemplo, echemos un vistazo más de cerca a la explicación de Gaudencio de cómo se supone que Pitágoras debió haber descubierto la *quinta*. Primero le tomó toda la cuerda y luego la acortó a 'dos partes', es decir, cuando tomó la cuerda por segunda vez, un *tercio* de la misma se mantuvo en silencio y *dos tercios* sonó. Así que cuando tomo la cuerda por primera vez, el puente (ὑπαγωγεύς) se coloca en el extremo del 'canon' (es decir, en el número 12), y fue en el número 8 cuando la cuerda fue tocada por segunda vez.

Los dos tonos que se produjeron estaban en consonancia de acuerdo con la *quinta* y entre ellos se extendía un intervalo musical que podría ser detectado por el oído. Este mismo 'intervalo', sin embargo, también fue visible, en el puente se colocó primero a 12 sobre el canon, y luego a 8. Estos dos números son los *puntos finales del intervalo* de la *quinta*, o

[40] Ver Porphyrios, *Kommentar zur Harmonielehre des Ptolemaios*, ed. Düring (Göteborg 1932), p. 66, 24ff.

ὅροι τοῦ διαστήματος[41] como eran llamados por los griegos. A partir de esto podemos ver de inmediato por qué los pitagóricos sostenían que los números proporcionales de la quinta eran $12:8$ o $3:2$.

Esta interpretación nos ayuda a entender por qué Porfirio dice en el pasaje que se ha citado[42], que los pitagóricos pensaban la *diastema* (intervalo musical) como una 'razón numérica' (λόγος) y como una 'relación entre el punto final' (σχέσις τῶν πρὸς ἀλλήλους ὅρων).

Creo que lo anterior explica satisfactoriamente el origen de los términos musicales *diastema* y *horoi*, a pesar de que ninguno de ellos se menciona explícitamente en el texto de Gaudencio que hemos estado discutiendo. En los experimentos acústicos de los pitagóricos, la palabra διάστημα se entiende como 'línea recta' y se refirió a esa *sección de cuerda en el 'canon' que fue impedido de vibración cuando se produjo el segundo tono de una consonancia* (es decir, después de que toda la cuerda ya había sonado) *y fue de esta manera necesaria para la creación de un intervalo musical*[43]. De ahí una palabra que realmente significaba 'línea recta' llegó a tener también el significado de 'intervalo musical'. Además, dado que los puntos finales (ὅροι) de esta línea recta eran números en el 'canon', la palabra διάστημα también se utilizó para describir la 'relación entre dos números' que fue exhibida por los números proporcionales de las consonancias ($12:6$, $12:9$, $12:8$ y así sucesivamente).

Espero que la interpretación anterior haya arrojado alguna luz sobre la génesis de dos conceptos importantes de la teoría de la música.

Estos son διάστημα, 'el intervalo musical entre dos tonos que se expresa como una razón entre dos números' y ὅροι, 'los puntos finales de una *diastema* que se expresan como números'; de ahí ὅροι también pasó a significar 'los mismos números en la razón numérica (de una consonancia musical)'. De acuerdo con la explicación dada anteriormente, estos dos conceptos fundamentales de la teoría musical pitagórica solo se hacen comprensibles y significativos cuando son considerados en conexión con el canon,

---

[41] De acuerdo con el diálogo de Platón *Philehus* (17c-d), cualquier persona que quiera ser un experto en la teoría musical tiene que saber "los intervalos de notas altas y bajas" (τὰ διαστήματα… τῆς φωνῆς ὀξύτητός τε πέρι καὶ βαρύτητος) y los "puntos finales de estos intervalos" (καὶ τοὺς ὅρους τῶν διαστημάτων).

[42] Véase la anterior nota 34.

[43] Esto también nos permite dar sentido a un fragmento de Filolao (Diels y Kranz, *Fragmente der Vorsokratiker*, I. 440 25): τινὲς… διάστημα ἐκάλεσαν εἶναι ὑπεροχήν. El ὑπεροχή es la diferencia entre las dos secciones de cuerda en un 'canon' que producen las dos notas de una consonancia.

ya que se han desarrollado en el curso de los experimentos acústicos con este instrumento.

Sin embargo, hay una opinión generalizada según la cual se supone que el monocorde y el canon de los pitagóricos es "una pieza artificial de un aparato que fue ideado más adelante"[44]. De hecho, incluso se ha conjeturado que no había escala de medición en el 'canon' hasta después de la época de Aristóxeno, es decir, no antes de 300 a.C.[45] La mayor parte de la evidencia a favor de esta conclusión es el hecho de que el 'canon' no se menciona en el *Musical* p*roblems* (una obra espuria de Aristóteles) ni en la *Sectio Canonis*; igualmente no es mencionado por los escritores del siglo IV y V en general. La explicación dada para esto es que muy probablemente no existía tal instrumento musical en esa época. Creo que esta visión es errónea, ya que se puede mostrar de manera concluyente que el canon ha existido al menos en la época de Platón. Para ver esto, recordemos lo siguiente.

Hay una interesante frase hecha por Platón[46], que dice lo siguiente: *ἐν μέσῳ δὲ τοῦ ἕξ πρὸς τὰ δώδεκα συνέβη τό τε ἡμιόλιον καὶ τὸ ἐπίτριτον*. Una traducción correcta de estas palabras sería[47]: "*La razón* $1\frac{1}{2}$ *y la razón* $1\frac{1}{3}$ *se encuentran en el medio* (de la razón entre) *el 6 a 12*" Utilizando la terminología de los pitagóricos, *ἡμιόλιον* $(= 1\frac{1}{2} = 3:2)$ y *ἐπίτριτον* $(= 1\frac{1}{3} = 4:3)$ son los *números proporcionales de la quinta y cuarta*. Así Platón dice que los números proporcionales de la quinta y la cuarta (que, por supuesto, también se puede escribir como $12:8$ y $12:9$) se encuentran entre 12 y 6 (los números proporcionales de la octava, $12:6$). [Ya hemos citado un fragmento de Filolao[48], que establece que, en la práctica musical la octava consistía en la combinación de una cuarta y una quinta.

La observación de Platón insiste en que los números proporcionales de la quinta y cuarta encajan bien entre los números proporcionales de la octava ($12:6$). Esto demuestra, entre otras cosas que los intentos que ya se habían hecho en la teoría de la música para explicar la resolución de la octava en una quinta y una cuarta. Este punto se abordará más adelante.]

[44] Ver notas 38 y 39 arriba.
[45] Ver B. L. van der Waerden, *Hermes* 78 (1943), 177.
[46] *Epinomis* 991a.
[47] La traducción y la interpretación de este pasaje también se discute por van der Waerden, *Hermes* 78 (1943), 186-7.
[48] Ver notas 24 arriba.

Las únicas preguntas son ahora cómo es que se le ocurrió a alguien colocar los números proporcionales de la quinta y la cuarta (que Platón no escribe como 'números proporcionales', pero de acuerdo con una convención arcaica lo hace como las fracciones correspondientes $1\frac{1}{2}$ y $1\frac{1}{3}$) *'en el medio* (de la razón) *de 6 a 12'* y por qué 12 y 6 fueron elegidos como los números proporcionales de la octava, cuando este intervalo también puede ser descrito como $2:1$. Yo creo que estas preguntas no pueden ser contestadas correctamente a menos que se tenga en cuenta que el instrumento de medición de los pitagóricos (el canon) que se utilizó para ilustrar los números proporcionales de las consonancias se *dividió en doce partes*. En otras palabras, la observación de Platón demuestra convincentemente que el canon existía en ese momento. Intentos modernos de considerar el canon como "una pieza artificial de un aparato que se ideó después" no ha tenido éxito.

2.5 UNA DIGRESIÓN SOBRE LA TEORÍA DE MÚSICA

La presente investigación se refiere principalmente a la historia temprana de la teoría de las proporciones. Toca problemas particulares en la antigua teoría musical solo incidentalmente. Me parece que en la discusión de la génesis de los conceptos $\delta\iota\acute{\alpha}\sigma\tau\eta\mu\alpha$ y $\H{o}\varrho o\iota$, los cuales se aplicaron originalmente solo a la teoría de la música, también se ha hecho una contribución esencial a la historia de la teoría de las proporciones. Como hemos visto, tanto el concepto de *diastema* (intervalo que expresa una razón numérica) y como el *horoi* (los números actuales de una razón numérica) se desarrollaron en el transcurso de los experimentos acústicos con el monocorde y el canon.

A partir de ahora podríamos concentrar nuestra atención en la teoría de las proporciones en sí, porque ya no hay ninguna necesidad de preocuparnos por determinados problemas históricos en la teoría de la música. Sin embargo, ya que creo que el método aplicado anteriormente también puede arrojar nuevas luces sobre muchas preguntas sobre la antigua teoría de la música, que estoy desviando aquí y discutir estas preguntas, a pesar de que no son estrictamente relevantes para la historia de la teoría de las proporciones.

La pregunta de cómo los pitagóricos llegaron a expresar intervalos por medio de razones numéricas con frecuencia se ha discutido en la investigación anterior[49]. La respuesta que se le dio a esta pregunta se puede decir que ha tenido dos aspectos. Por un lado, se destacó que los pitagóricos no podían haber "obtenido las razones numéricas de las

[49] Véase E. Frank, *Plato und die sog. Pythagoreer* (Halle 1923), pp 160-1; W. Burkert, *Weisheit und Wissenschaft*, pp 348-64; también importante artículo de van der Waerdens (ver *Hermes 75* (1943))

consonancias exclusivamente mediante la observación de las diferentes longitudes de cuerda", mientras que, por otro lado, se insistió en que "el método empírico utilizado para medir los tonos con los números era una cuestión secundaria para los pitagóricos" y que "no puede haber diferentes opiniones sobre esto". Esta última afirmación es corroborada por Teón de Esmirna, que escribió[50]: "Algunos quieren entender las (razones numéricas de las) consonancias en términos de pesos, otros en términos de tamaños o en términos de movimiento, y aún otros en términos de escalas".

Es mi opinión que la forma en que la cuestión se plantea inevitablemente condujo a la visión descrita anteriormente (y, además, que esta visión es solo parcialmente cierta). La pregunta más bien abstracta de cómo los pitagóricos llegaron a expresar intervalos por medio de razones numéricas solo puede ser respondida en el intento de estudiar la rica variedad de la literatura clásica y clásica tardía que se ocupa en esta cuestión. Estas fuentes son de fiabilidad distinta, algunas son completamente confiables si uno solo las mira a ellas, entonces se está obligado a aceptar la opinión anterior. Sin embargo, sí algunos hechos datos acerca del lenguaje científico de los griegos se toman en cuenta y además la pregunta anterior se da a través de una formulación más concreta, entonces, se llega a una conclusión totalmente diferente.

Los hechos lingüísticos a los que me refiero son los siguientes. En la antigua teoría musical, los tonos musicales se suele llamar *τόνοι*, del verbo *τείνω* (estirar). Así, un tono musical fue el tono de un instrumento de cuerda. Por otra parte, las consonancias fueron llamadas *χορδῶν συμφωνία* (concorde de cuerdas) en griego.

Estos dos hechos indican claramente que la teoría musical griega se basó principalmente en experiencias y experimentos con instrumentos *de cuerda* (o con una sola cuerda).

Si se le da una forma más concreta a la pregunta anterior, es decir, si uno se pregunta por qué los pitagóricos utilizan los nombres *διάστημα* y *ὅροι* para denotar intervalos musicales expresados como razones numéricas, entonces se hace evidente de inmediato que estos números proporcionales originalmente deben haber representado *razones entre longitudes*. Estas mismas dos expresiones también indican cómo debieron ser de importantes los experimentos en su tiempo para la ciencia de Pitágoras. *Los conceptos 'diastema' y 'horoi', que se han analizado anteriormente, nunca podrían haberse originado sin experimentos musicales que utilizan el canon*.

[50] Theon of Smyrna, ed E. Hiller (Lipsiae 1878), p 59.

La afirmación de que el método empírico usado para determinar las razones numéricas de las consonancias era una cuestión secundaria para los pitagóricos (que es correcta tal y como está), recibe un nuevo énfasis en vista de lo anterior. Aunque los conceptos de *diastema* y *horoi* se originaron en el curso de los experimentos con el canon, Hípaso ya era capaz de establecer las consonancias más importantes por medio del *diskoi* bronce[51]. Experimentos similares también se llevaron a cabo con los recipientes que contienen diferentes cantidades de agua y con instrumentos de viento[52]. Es evidente que los pitagóricos querían mostrar que otros tipos de experimentos condujeron a los mismos números proporcionales de las consonancias al igual que los experimentos originales con el monocorde y el canon. Esto explica porque estos mismos pitagóricos podrían posteriormente sostener que el método empírico utilizado para determinar los números proporcionales de las consonancias era una cuestión secundaria. Las relaciones numéricas reales de las consonancias que se habían establecido de una vez para todos eran importantes para los pitagóricos, no el método empírico utilizado para determinarlos.

También creo que la explicación anterior de los conceptos de *diastema* y *horoi* nos permite aclarar muchos asuntos sobre la falsa tradición que se originó en la antigüedad tardía. Como ejemplo, consideremos el siguiente pasaje[53]:

> "Hay una bonita historia que se encuentra en Nicómaco (p. 10 Meibom), Gaudencio (p. 13 Meibom) y Boecio (pp. 10-1 Friedlein), que cuenta cómo los pitagóricos llegaron a representar a intervalos por medio de razones numéricas. Puede posiblemente no ser verdad, sin embargo. Según el relato, Pitágoras estaba pasando por una herrería y escucha los tonos de los martillos que caen y producen varios intervalos, en particular, la octava, la cuarta y la quinta. Pesó cuidadosamente los martillos y encontró que sus pesos estaban en la misma razón entre sí al igual que los números 12, 9, 8 y 6. Luego se fue a casa, suspendió cuatro cuerdas idénticas con pesos atados a ellas, que eran proporcionales a los pesos de los martillos. Ahora se estableció que la cuerda suspendida con 12 unidades, producen una nota que era una octava más alta que la producida por la cuerda suspendida con seis unidades. Del mismo modo las cuerdas suspendidas con 9 y 8 unidades, producen notas que fueron la cuarta y la quinta menores que la producida por la cuerda original. Él corroboró estos resultados mediante la

[51] Diels and Kranz, *Fragmente der Vorsokratiker*, I. 18. 12; ver también W. Burkert, *Weisheit und Wissenschaft*, pp. 355-6.
[52] Ver B. L. van der Waerden, *Hermes 78* (1943), 172.
[53] Ibíd., p. 170.

> experimentación con cuerdas estiradas y otros instrumentos (el aulos, la siringa, etc.)".

Entre las razones para rechazar esta historia tradicional como falsa, está la siguiente[54]:

> "Si hubiera intentado en realidad llevar a cabo este experimento y medir las razones numéricas (de las consonancias) por medio de pesos suspendidos, como se dice que Pitágoras lo hizo, entonces el intento inevitablemente habría terminado en un fracaso para los pesos correspondientes a la octava que se encuentran en la relación de $1:\sqrt{2}$, no de $1:2$."

Así podemos ver cómo la investigación moderna ha descubierto algunas falsedades en las historias tradicionales. Al hacerlo, sin embargo, la cuestión deja intacto cómo el experimento, que solo podría haber sido pensado y nunca realizado, jamás se le ocurrió a nadie. Sin embargo, me parece que en lo que se refiere a esta cuestión, al menos una parte es muy informativa. Cuando se afirma que Pitágoras "suspendió cuatro cuerdas idénticas con pesos atados a ellas", es claro que quería utilizar las pesas para medir la tensión de las cuerdas.

Un experimento de este tipo solo podría haber sido ideado después de que se dio cuenta de que el tono de una nota depende de la tensión de la cuerda en cuestión. Esto, sin embargo, es exactamente lo que Aristóxeno, opositor de los pitagóricos (ver pág. 113) se negó a reconocer la conexión entre los números proporcionales y las consonancias, logro hacer. Por lo tanto, yo creo que el experimento descrito anteriormente fue en parte una 'respuesta pitagórica' a las enseñanzas de Aristóxeno. La persona que inventó este experimento poco práctico y lo atribuyó a Pitágoras, quería convencer a sus lectores de que los tradicionales números proporcionales de las consonancias también podrían ser demostradas considerando la tensión de la cuerda. Por supuesto, eso no se puede hacer, aunque, ese experimento es de importancia para la historia de la ciencia.

En otras palabras, mi posición es que la tradición clásica tardía, que se ocupa de la ciencia de la música y que dio origen a la historia antes citada, se originó en intentos de reivindicar la teoría pitagórica y estos intentos tuvieron un éxito parcial. Al principio, cuando se acuñaron las expresiones *diastema* y *horoi* (con referencia al monocorde y al canon), uno no tiene que preocuparse demasiado por la tensión o el grosor de la cuerda estirada. En este momento nadie se preguntó si el tono en sí era una velocidad, un

[54] Ibíd., p. 173.

movimiento del aire, una vibración o algo más. Por lo tanto, podría sostenerse que las consonancias dependían simplemente de números. (Estos números, por supuesto, expresaban originalmente razones entre las longitudes de las secciones individuales de la cuerda en el monocorde.) No fue hasta más tarde, cuando se hizo necesario para defender la antigua enseñanza en contra de sus opositores, que también suponía estos mismos números para representar razones entre los *pesos* (es decir, entre diferentes *grados de tensión* de la cuerda) y entre los distintos *espesores* de los objetos que producen los tonos (en este caso, *diskoi* bronce). Esto también explica la invención de historias en parte sin sentido como la mencionada anteriormente, que hablan de observaciones imposibles y experimentos imprácticos. Además, se explica por qué Teón de Esmirna subrayó que no era importante cómo se obtuvieron los números proporcionales de las consonancias[55].

De la misma manera, creo que puedo explicar por qué los antiguos teóricos musicales fueron inconsistentes en su método de asociar un número con el tono de una nota. Originalmente, cuando el punto de partida fue experimentos con el canon, un *número mayor* (una sección más larga de la cuerda) tenía que estar asociada naturalmente con una *nota más grave*. Pero a este método tuvieron que darle vuelta por completo cuando se hizo necesario defender las enseñanzas antiguas contra objeciones posteriores, y tomar nuevas especulaciones en cuenta. Como van der Waerden escribió[56]: "Está claro que quienes aquellos que trataron de interpretar las razones numéricas en términos de peso o velocidad, se vieron obligados a asignar un *número mayor* para una *nota más alta*… "

Hay otro estado de transición interesante que vale la pena destacar. Me refiero a un caso en el que una teoría más reciente se ha tenido en cuenta, aunque el método original de asociar los números proporcionales con intervalos todavía se utiliza. Permítanme citar una vez más al trabajo de van der Waerden[57]:

> "Una posición notablemente vacilante se toma en la *Sectio Canonis*: mientras que en la introducción se afirma que dos tonos están en una razón numérica entre sí porque los tonos son cantidades que *se incrementan cuando se eleva el tono y disminuye cuando se baja*, en el argumento principal del texto los tonos están representados por líneas rectas y los tonos más altos corresponden a líneas más cortas".

[55] Véase n. 50 arriba.
[56] Hermes 78 (1943), pp. 173 4
[57] Ibíd., P. 173.

2.6 PUNTOS FINALES E INTERVALOS REPRESENTADOS COMO 'LÍNEAS RECTAS'

Creo que muchos detalles de la teoría pre-Eudoxiana de proporciones, así como de la teoría matemática griega de la música, se puede ver desde otra perspectiva si se tiene en cuenta la explicación de los orígenes del concepto de *diastema* y *horoi* que se discutió plenamente en el capítulo 2.4. Así que permítanme recapitular aquí y repetir la etimología de estas dos palabras.

En el campo de la música *διάστημα* (línea recta) originalmente significaba el trozo de cuerda en un 'canon' que impidió la vibración cuando se produjo el segundo tono de una consonancia (es decir, después de que toda la cuerda ya había sido tocada). Si este pedazo de cuerda no se había mantenido así, no habría sido posible producir la segunda nota de la consonancia deseada en el monocorde.

El *οροι* eran los puntos finales del trozo de cuerda (la *diastema*) y se mostraron como dos números en el canon.

No sería superfluo indicar aquí la forma precisa en que el concepto de intervalo musical (*diastema*, en el sentido anterior de la palabra) se convirtió en *la razón entre dos números*.

De acuerdo con la explicación anterior, el *diastema* fue el intervalo actual entre dos tonos. Se pudo determinar acústicamente y también era visible como una longitud de cuerda en el 'canon' (es decir, la longitud de la sección de la cuerda que producía la primera nota, difería de aquella que producía la segunda). Esta es la única interpretación que da en este sentido a este tipo de expresiones musicales como *ὅροι τοῦ διαστήματος* (puntos finales de un intervalo). Esta longitud de la cuerda en el monocorde se especificó por sus dos puntos finales (por dos *números* en el canon), así como una línea recta está dada por sus dos puntos finales en la geometría.

Estas cuestiones, sin embargo, se pueden ver de otra manera que difiere en parte de lo anterior. Un intervalo musical se caracteriza por la consonancia de las dos *notas* que las limitan. Estas dos *notas* armonizan entre sí y forman el intervalo que se dice que se encuentran entre ellos. Fue a menudo el caso en la *práctica* musical que la consonancia de dos notas era descrita por las dos cuerdas que la producían. Por ejemplo, la octava (como ya se ha mencionado[58]) fue llamada el concorde de la *ὑπάτη* y la *νήτη*. Esto sugiere la idea de que en la *teoría* musical el *diastema* también pudo haber sido interpretado como

[d] Traduce "El intervalo BC" (N. del T.)
[58] Ver n. 21 antes.

el concorde producido en el monocorde por *dos diferentes longitudes de cuerda*, en lugar de, como un trozo de cuerda que no vibre. Por supuesto, estas dos longitudes de cuerda todavía podían ser caracterizadas por los puntos finales del segundo fragmento. Como de hecho, este es el punto de vista que se encuentra en la *Sectio Canonis*. Para ver esto, solo tenemos que mirar al comienzo de la demostración del Teorema 1 (en la *Sectio Canonis*): ἔστω διάστημα τὸ ΒΓ… Heiberg traduce esto como "sit intervallum BC…" [d].

Una lectura de las palabras griegas, junto con su traducción al latín nos llevaría a pensar en un principio que las letras B y C (o Β y Γ) se refieren a los *puntos finales de una línea recta* (el *diastema*). Esto está de acuerdo con la explicación ofrecida en el capítulo 2.4 según la cual el *diastema* era la sección de cuerda que no vibra (la línea recta sobre la que el intervalo musical dependía), y fue especificado por sus dos puntos finales. Sin embargo, sorprendentemente el diagrama que acompaña a este pasaje en la *Sectio Canonis* deja claro que las letras Β y Γ (dos números en el canon) representan *dos líneas rectas de diferentes longitudes*.

La única manera de explicar este hecho es decir que por el momento las proposiciones de la *Sectio Canonis* recibieron su forma definitiva, *diastema* ya no significaba simplemente "la longitud de la cuerda entre dos números en el canon, que no vibre (y por el cual la sección de la cuerda que produce la primera nota difiere de la producción de la segunda)". En su lugar, se refirió a las *dos secciones de la cuerda que producen las notas* en cuestión y, ya que estos podrían ser caracterizados por los mismos dos números que originalmente habían sido utilizados para especificar el intervalo actual (el trozo de cuerda que no vibra), había llegado a significar 'la razón entre dos números'.

Este ligero cambio de perspectiva (llamado la caracterización de un intervalo musical en términos de las dos longitudes de la cuerda que produce las notas que lo delimitan, en lugar de un trozo de cuerda que no vibre) llevó no solo a la creación de un nuevo concepto (razón entre dos números), sino también a una anomalía curiosa en el uso del lenguaje.

Me refiero al hecho de que la palabra διάστημα (en singular) que originalmente denotaban una *sola línea recta* en la teoría de la música, tenían que ser ilustrado por *dos líneas rectas de diferentes longitudes*. Estas dos líneas representan las longitudes (expresadas como *números*) de las secciones de cuerda que produjeron las notas, y por lo tanto también podría considerarse como representaciones de los números en sí mismos. Diagramas de este tipo se hacen aún más interesante si se considera que lo que antes se llamaban los *puntos* finales del intervalo (ὅροι τοῦ διαστήματος) debe haber sido mostrado como *líneas rectas* en ellos.

De esta manera también se vuelve claro por qué las dos líneas rectas que en el diagrama de las *Sectio Canonis* se supone representan las dos secciones de la cuerda de *cada uno podría ser designados por una sola letra*. Mientras que *diastema* significaba 'el trozo de cuerda en el monocorde, que no vibra', la manera obvia de caracterizar esta línea recta en el 'canon', era en términos de sus dos 'puntos finales' (*horoi*).

Un punto final fue usualmente el número 12, es decir, al final del canon (porque en su mayor parte se buscó una nota en consonancia con la nota clave de todo el monocorde). El otro punto final fue el número en el que el $\upsilon\pi\alpha\gamma\omega\gamma\varepsilon\upsilon\varsigma$ se paró cuando se produjo la segunda nota, es decir, al final de la sección más corta de la cuerda. Este método de caracterización de una *línea recta* en términos de sus dos puntos finales (en términos de dos números en el canon) fue también habitual en la geometría griega.

Sin embargo, cuando la palabra *diastema* se sometió al ligero cambio en el significado descrito anteriormente, ya no era posible utilizar este método de caracterización. Las dos secciones de cuerda que produjeron las notas no podían ser especificadas por sus puntos finales. La razón de esto era que la numeración en el canon comenzó con cero y los griegos no tenían ningún símbolo para este número. Así que el punto final común de estas dos líneas se encuentra en un extremo del monocorde y no había un número para describirlo. Esto hizo que todo fuera más fácil para caracterizar cada uno en términos de su otro punto final y describirlo por un *solo número* (o letra). Por supuesto, los dos números (o letras) que pertenecen a las secciones de cuerda que produjeron las notas eran idénticos a los puntos finales (*horoi*) del fragmento de cuerda que no vibra.

En la *Sectio Canonis* un *diastema* siempre se ilustra con dos líneas, cada uno de los cuales está marcado *por una sola letra*. Así que, en la teoría griega de la música, un *número* siempre se representa como una *línea* y esta línea es designada por una sola letra, *no por sus dos puntos finales* (como fue el caso en la geometría).

Este método de representar *números* por líneas fue tomado de la teoría de la música en la aritmética de Euclides, aunque no de una manera muy consistente. Euclides siempre representa números como líneas. Es intuitivo ver la forma en que se utilizan letras para designar estas líneas que debían presentarse los números, en el libro VII de *Elementos*, por ejemplo:

(1) Hay una serie de proposiciones (por ejemplo, VII. 3, 12, 13, 14, 16 y 17) en el que las líneas se describen *por una sola letra*. Esta manera de representar números es el mismo que en el *Sectio Canonis*.

(2) En el mismo libro, sin embargo, hay proposiciones (VII. 1, 2, 7 y 8 entre otros) en la que los números están representados por líneas y estas líneas están nombradas por dos letras, una al principio y otra al final. Este fue el método usual en la geometría.

(3) Hay incluso algunas proposiciones (por ejemplo, VII. 4, 5, 6 y 9) que usan los métodos anteriores al mismo tiempo. En estas proposiciones, un número se muestra como una línea nombrada por una *sola letra*, mientras que otros se muestran como una línea nombrada por *dos letras*.

Así podemos ver que en la época de Euclides no se había tomado una decisión acerca de la manera de designar (números) líneas en la aritmética, es decir, acerca de si se adoptaba la convención 'musical' (derivados de experimentos con el canon) la cual usa una sola letra o la más 'geométrica' utilizando dos.

2.7 'DIPLASION', 'HEMEOLION' Y 'EPITBITON'

En el curso de nuestras investigaciones hasta ahora hemos aprendido a distinguir dos etapas en el desarrollo del concepto *diastema* que se aplica a la teoría de la música.

(1) Durante la primera etapa el *diastema* (intervalo musical) era la longitud de la cuerda en el monocorde que no vibra, y por lo cual la sección de la cuerda producía la primera nota difería de la segunda. Se caracterizó en términos de sus dos puntos finales (*horoi*) y éstos podrían ser leídos como dos números en el 'canon'.

(2) La explicación de este concepto dada en la *Sectio Canonis* pertenece claramente a una etapa posterior de su desarrollo. Aquí *diastema* no se refiere al fragmento de cuerda en el monocorde que no vibra, sino más bien a las dos secciones de cuerda que produjeron las notas. En este momento la palabra significaba inequívocamente la *razón* entre los dos números que expresan las longitudes de estas dos secciones de cuerda.

Ahora creo que puedo señalar una tercera etapa que precedió a las otras dos. Esta etapa podría decirse que ha preparado el camino para el concepto de *diastema*. Dado que en mi opinión nos da una gran cantidad de información no solo acerca de la teoría de la música, sino también de toda la historia de las matemáticas griegas, me gustaría hablar de ello más plenamente.

Mi punto de partida es el pasaje de Gaudencio, que ha sido citado[59]: "Pitágoras extendía una cuerda a través de una regla, el llamado *canon*, y dividía esta (regla) en doce partes, etc.". Estas palabras indican que se encontraron las razones numéricas de las tres consonancias más importantes solo *después de que el 'canon' había sido dividido en doce partes*. El canon con sus doce divisiones fue el instrumento con el que los pitagóricos realizaron experimentos y por cuya ayuda pudieron determinar las razones numéricas de los intervalos musicales más importantes ($12:6$ para la octava, $12:9$ para la cuarta y $12:8$ para la quinta). De hecho, con base en lo que Gaudencio cuenta de estos experimentos junto con nuestro conocimiento del canon, hemos sido capaces de descubrir los significados originales (y exactos) de los términos musicales *diastema* y *horoi*.

Es el momento de mirar más críticamente la explicación de Gaudencio. Parece poco probable que el experimento que él describe, fue originalmente llevado a cabo por las primeras *divisiones del canon en doce partes*. Esto no habría sido absolutamente necesario, siempre y cuando simplemente quisiéramos exhibir los números proporcionales de las tres consonancias más importantes (la octava, la cuarta y la quinta) por separado en el monocorde, sin tener en cuenta las conexiones entre ellas. Para obtener la octava, solo es necesario *reducir a la mitad* ($2:1$) la cuerda estirada. La quinta se obtiene *dividiendo en tres partes*. (Toda la cuerda y dos tercios de la misma producen notas que son una quinta, $3:2$.) Similarmente, basta con dividir la cuerda *en cuartos* para obtener una cuarta ($4:3$). Incluso las palabras que Gaudencio escogió para describir estos experimentos son tales que permiten al lector atento establecer por sí mismo que el canon debe originalmente ser dividido en dos, tres y cuatro partes, antes de que ser divido en doce. *Por lo tanto, difícilmente puede darse el caso de que la división original del canon musical fue en doce partes*.

En otras palabras, interpreto lo que cuenta Gaudencio como un esquema de cómo se llevaron a cabo estos experimentos musicales en una etapa relativamente tardía. Originalmente se llevaron a cabo simplemente con un monocorde. El canon no se introdujo sino hasta más tarde, cuando se descubrió que había buenas razones para dividir la vara debajo de la cuerda en doce partes.

[59] Ver n. 36 antes.

Espero ser capaz de mostrar que lo anterior es una correcta reconstrucción del proceso de desarrollo, explicando los significados de algunos términos de la teoría de la música que llegaron claramente a existir *antes de la introducción del canon*. Los términos a los que me refiero son los nombres más antiguos conocidos de la octava, cuarta y quinta.

En la teoría de la música pitagórica[60] el nombre más común para la razón numérica de la *octava* fue $\delta\iota\pi\lambda\acute{\alpha}\sigma\iota o\nu\ \delta\iota\acute{\alpha}\sigma\tau\eta\mu\alpha$ o en un fragmento de Filolao[61], $\delta\iota\pi\lambda\acute{o}o\nu$. Esta expresión es traducida por la fórmula $2{:}\,1$ o, teniendo en cuenta las doce divisiones del canon, por $12{:}\,6$. Sin embargo, también hay que tratar de traducirlo literalmente, y considerar la relación con el monocorde. El término técnico $\delta\iota\pi\lambda\acute{\alpha}\sigma\iota o\nu\ \delta\iota\acute{\alpha}\sigma\tau\eta\mu\alpha$ significa literalmente 'línea doble'. Está claro que la octava recibió este nombre porque después que la cuerda estirada había sido pulsada, se redujo a la mitad de su longitud y la sección más corta de la cuerda dio como resultado una nota una octava por encima del producido por toda la cuerda.

Esto deja la pregunta de lo que la palabra *diastema* en sí significa en este contexto (es decir, en la expresión $\delta\iota\pi\lambda\acute{\alpha}\sigma\iota o\nu\ \delta\iota\acute{\alpha}\sigma\tau\eta\mu\alpha$ 'línea doble'). Claramente no tiene el significado que he explicado antes, a saber, "el trozo de cuerda en el monocorde que no vibra". Cuando se usa como un nombre para la razón numérica de la octava, la expresión $\delta\iota\pi\lambda\acute{\alpha}\sigma\iota o\nu\ \delta\iota\acute{\alpha}\sigma\tau\eta\mu\alpha$ *solo puede estar refiriéndose a todo el monocorde*. En mi opinión la única forma concebible para explicar de este nombre es la siguiente.

La mitad de la cuerda estirada (es decir, la sección de cuerda que fue sostenida para producir la segunda nota de una octava)[62] fue considerado como la 'unidad'. En relación con esta unidad, todo el monocorde se convierte en una 'línea doble'. Así que, si el monocorde es tratado como una 'línea doble', es decir, si toda la longitud de la cuerda es sostenida primero y luego la unidad elegida para el caso que nos ocupa (la mitad del monocorde) es sostenida, se obtiene la consonancia de la octava.

A primera vista, esta explicación es bastante sorprendente y puede no parece tener mucho sentido. Sin embargo, debo insistir en que no hay posibilidad de que los antiguos pitagóricos explicaran los números proporcionales de la quinta y la cuarta excepto de esta manera.

---

[60] Ver *Nicomachi Enchiridion*, ed. C. Janus 250. 22ff; También en *Timaeus* de Platón, 36.
[61] Ver n. 24 antes.
[62] La otra posibilidad es que la *sección de silencio* de la cuerda fuese considerada como la unidad, pero esto parece poco probable en vista de los términos relacionados $\dot{\eta}\mu\iota\acute{o}\lambda\iota o\nu$ y $\acute{\epsilon}\pi\acute{\iota}\tau\rho\iota\tau o\nu\ \delta\iota\acute{\alpha}\sigma\tau\eta\mu\alpha$.

En el monocorde, una quinta se obtiene primero tocando toda cuerda y luego sosteniendo una tercera parte de ella, de modo que solo dos tercios de todo el monocorde sonaban la segunda vez ($3:2 = 12:8$). El antiguo nombre pitagórico para este intervalo era ἡ$\mu\iota\acute{o}\lambda\iota o\nu$ $\delta\iota\acute{\alpha}\sigma\tau\eta\mu\alpha$[63] es decir, 'línea de $1\frac{1}{2}$ (unidades) de largo'. Esta descripción también se refiere a todo el monocorde, porque en este caso también, la sección de cuerda que produjo el segundo sonido (la longitud '$0-8$' en el canon) fue la unidad. Esto fue considerado como un 'todo' (ὅ$\lambda o\nu$) y en relación con ella, el monocorde completo (es decir, la longitud '$0-12$' en el canon) fue 'un todo junto con la mitad del total', es decir una 'línea de $1\frac{1}{2}$ (unidades) de longitud' (ἡ$\mu\iota\acute{o}\lambda\iota o\nu$ $\delta\iota\acute{\alpha}\sigma\tau\eta\mu\alpha$). Así que si el monocorde es tratado como una 'línea de $1\frac{1}{2}$ (unidades) de longitud', es decir, si toda la cuerda se tocó primero, seguida de la unidad (dos tercios de la cuerda) en relación con toda la cuerda es una 'línea de $1\frac{1}{2}$ (unidades) de longitud', entonces se obtiene una quinta.

El nombre de los pitagóricos para la razón numérica de la cuarta ($4:3$), ἐ$\pi\acute{\iota}\tau\varrho\iota\tau o\nu$ $\delta\iota\acute{\alpha}\sigma\tau\eta\mu\alpha$[64], se puede explicar de una manera similar. En el monocorde una cuarta se obtiene al mantener una cuarta parte de la cuerda vibrando cuando se tocó por segunda vez. Así, la segunda nota es producida por tres cuartas partes de la cuerda ($12:9$). Si esta longitud ($0-9$) es considerada como la unidad, entonces todo el monocorde ($0-12$) se convierte en una 'línea de $1\frac{1}{3}$ (unidades) de longitud', ἐ$\pi\acute{\iota}\tau\varrho\iota\tau o\nu$ $\delta\iota\acute{\alpha}\sigma\tau\eta\mu\alpha$. (La palabra griega ἐ$\pi\acute{\iota}\tau\varrho\iota\tau o\nu$ significa 'una tercera adicional', es decir 'adicional a la unidad'.)

Sorprendente la confirmación de la explicación de los anteriores términos ἡ$\mu\iota\acute{o}\lambda\iota o\nu$ y ἐ$\pi\acute{\iota}\tau\varrho\iota\tau o\nu$ $\delta\iota\acute{\alpha}\sigma\tau\eta\mu\alpha$ se encuentra en el teorema 8 del *Sectio Canonis*. Para probar su corrección, sin embargo, sería necesario volver a imprimir aquí casi todo el texto griego de este teorema junto con sus diagramas que le acompañan. (La única cosa que no debe ser olvidada en la interpretación de esta proposición [*Sectio Canonis* 8], es que un *diastema*, la razón entre dos números, siempre es ilustrado por *dos líneas rectas* en la *Sectio Canonis*.

Por tanto, todo el monocorde y la cuerda que produce la segunda nota, la unidad, están representados por *dos rectas distintas*).

La investigación etimológica realizada anteriormente nos ha llevado a dos conclusiones:

[63] Ver n. 21 arriba (problema 41) o en *Timaeus* de Platón, 36
[64] Ver Platón, *Timaeus*, 36; o Filolao, fragmento 6 (en Diels y Kranz, *Fragmente der Vorsokratiker*).

(1) La introducción de los términos *diplasion*, *hemiolion* y *epitriton diastema* en la teoría de la música precede *a la división del canon en doce partes*, aunque ya se conocían los números proporcionales de las tres consonancias más importantes en el tiempo antiguo y fueron dados como *razones entre longitudes*. La cuestión de si estas razones fueron descubiertas por el uso del monocorde actual o por el acortamiento de una de las cuerdas en un instrumento de múltiples cuerdas es irrelevante. Al final, el monocorde, como instrumento experimental con una sola cuerda, fue adoptado; antes de esto sin duda, los experimentos se hicieron para producir cualquier nota deseada usando solo una cuerda de un instrumento de cuerdas múltiples, de modo que sería capaz de manejar uno con una sola cuerda.

(2) Otro hecho importante para el cual debo llamar atención especial es que en el momento que los nombres *diplasion*, *hemiolion* y *epitriton diastema* se introdujeron, el sentido técnico de la palabra *diastema* ya era lo mismo que lo que entendemos por 'intervalo musical', aunque en un sentido muy especial. En estos nombres *diastema* no significa 'el trozo de cuerda que no vibra' (la imagen del intervalo audible real); en cambio, se refiere a *todo el monocorde*, con la intención de medir este como un *diastema* diferente en el caso de cada uno de las tres consonancias más importantes. Los nombres pueden ser leídos como los diferentes métodos de medición del monocorde como un *diastema*, a fin de obtener las tres consonancias. El monocorde se convierte en *diplasion diastema* (una doble línea) en el caso de la octava, porque aquí toda la cuerda fue tocada primero, seguida por la *unidad* (que en este caso era un medio). Sin embargo, en el caso de la quinta, el mismo monocorde es un *hemiolion diastema* (línea de $1\frac{1}{2}$ unidades de longitud), porque esta vez toda la cuerda es $1\frac{1}{2}$ veces tan largo como la unidad que produce la segunda nota. El caso de la cuarta puede explicarse de manera similar. Vemos que en este momento no podríamos hablar de *puntos finales en el canon* (ὅροι).

Una comparación entre el sistema de medición descrito anteriormente, y la forma en que se especificaron las razones numéricas de las consonancias en el canon, revela inmediatamente la simplificación ingeniosa que fue provocada por la división del 'canon' en doce partes. Mientras que los nombres *diplasion*, *hemiolion* y *epitriton diastema* eran actuales, fue necesario buscar tres *unidades diferentes de longitud* para medir el monocorde. Además, este sistema de medición llevó al uso de *fracciones* en dos casos (*hemiolion* y *epitriton*). Sin embargo, cuando una vara de medir ya había sido dividida en doce partes se colocó bajo el monocorde, todo el proceso de repente se volvió mucho más simple. Ya no era necesario encontrar una nueva unidad de longitud para cada una de las tres consonancias, ni para expresar la longitud del monocorde en unidades diferentes. En lugar de esto, la longitud del trozo de cuerda que se no vibró podría simplemente ser especificado por dos números en el canon. Así, la introducción de un canon numerado parece haber traído consigo las siguientes innovaciones importantes:

(a) La palabra *diastema* ya no hace referencia a todo el monocorde (como en *diplasion*, *hemiolion* y *epitriton diastema*), sino solo a la sección de cuerda en el monocorde que no vibra. Solo a través de esto un *diastema* llegó a ser un intervalo musical en nuestro sentido de las palabras, es decir, un intervalo entre dos sonidos sucesivos.

(b) $\mathrm{O}\varrho o\iota$, *los puntos finales del trozo de cuerda que no vibra, expresado como dos números* no entró en la teoría de la música hasta después de la introducción del canon numerado. (Por supuesto el concepto de *logos*, en el sentido de la 'razón entre dos números', tampoco existía antes de la introducción del canon. Sobre este tema véase el capítulo 2.18, 'La creación del concepto matemático de $\lambda \acute{o} \gamma o \varsigma$'). Cuando los términos técnicos que hemos estado discutiendo fueron introducidos por primera vez en la música, todavía no existía cosas tales como los *horoi* porque en ese momento todo el monocorde, no la sección de cuerda que no vibraba, era tratado como el *diastema*.

(c) Después de la introducción de un canon numerado, las fracciones que se habían utilizado antes en la teoría de la música ($1\frac{1}{2}$ y $1\frac{1}{3}$) se volvieron redundantes. La quinta y la cuarta a partir de ahora no eran descritas como líneas de $1\frac{1}{2}$ o $1\frac{1}{3}$ unidades de longitud, sino simplemente en términos de los números que dieron los puntos finales de un sector determinado de la cuerda del canon (la sección que no vibra cuando se produjo la segunda nota de la consonancia en cuestión). Por lo tanto, podrían ser especificados *en términos de números enteros*. Por supuesto, los viejos nombres para las fracciones se seguían manteniendo (para las fracciones), pero éstos ya no se entendían como una referencia a las fracciones, sino que denotan razones entre números enteros. De ahí el termino antiguo $\mathring{\eta}\mu\iota\acute{o}\lambda\iota o\nu\ \delta\iota\acute{\alpha}\sigma\tau\eta\mu\alpha$, por ejemplo, significaba originalmente solo una '*línea de* $1\frac{1}{2}$ *(unidades) de longitud*', vino de la época clásica en el sentido de $3:2$ y $12:8$ ó $9:6$ (todos ellos números proporcionales de la quinta).

2.8 ALGORITMO DE EUCLIDES

La etimología de los términos musicales *diplasion*, *hemiolion* y epitriton *diastema* nos ha llevado de nuevo al periodo antiguo, durante el cual los experimentos para determinar las razones numéricas de las tres consonancias más importantes se hicieron con solo una cuerda tensa y sin canon. Vale la pena echar un vistazo más de cerca al método que se empleó en estos experimentos, ya que también jugó un papel importante en la aritmética griega.

El problema era encontrar una nota que, junto con el tono producido por toda la cuerda tensa total, haría una quinta o una cuarta. Ya se sabe en este momento (por experiencia con los instrumentos de viento) que el objeto que produjo los sonidos (en este caso una cuerda estirada) tendría que ser disminuida con el fin de obtener la consonancia deseada; la única pregunta era, qué tanto. Por supuesto, la respuesta a esta pregunta solo puede ser obtenida a través del ensayo y error. Cuando finalmente se descubrió qué tan larga es el fragmento de cuerda que no vibra de tal manera que el resto produciría una nota que era una cuarta o una quinta por encima de la producida por toda la cuerda, la sección de cuerda que produjo la segunda nota de la consonancia fue considerada como la *unidad*. El último paso fue expresar la longitud del fragmento de cuerda que no vibra como una fracción de la unidad que había sido elegida. En el caso de la cuarta era un tercio y en la de la quinta, un medio.

La secuencia de pasos que componen este método puede resumirse como sigue:

a) En el descubrimiento de la sección más corta de la cuerda que, junto con toda la cuerda, dio la consonancia deseada, estaba realmente frente a dos líneas de diferentes longitudes. Una era todo el monocorde y la otra era la sección que produjo la segunda nota.

b) La línea más corta fue considerada como la unidad en este caso, y se *restó* de la más larga. Esto dejó el trozo de cuerda que no vibra como un *residuo*.

c) Para determinar la longitud del resto, se trata de ver *la cantidad de veces se podría restar de la más corta de las dos líneas*. Esto podría hacerse dos veces en el caso de la quinta y tres veces en el caso de la cuarta, porque en el primer caso, el trozo de cuerda que no vibra era la *mitad* de largo que el que produjo la segunda nota, mientras que, en el último era solo un *tercio*.

Así, la línea más corta se restó primero del más largo y luego el resto se restará de la más corta, hasta que no sobre nada.

El método descrito anteriormente es bien conocido por los lectores de Euclides. Es el llamado 'algoritmo de Euclides', o método de *restas sucesivas*, como se denomina en la literatura más reciente sobre la historia de las matemáticas griegas[65]. En *Elementos* ocurren en dos contextos. El primero es en el Libro VII, donde se utiliza para encontrar el máximo común divisor de dos números. El método se aplica para responder a la pregunta de si dos números son primos relativos. Como la *Proposición VII.1* establece:

> "Dados dos números desiguales, si se resta sucesivamente [es decir, el proceso se repite con los sustraendos y residuos] el menor del mayor y si el residuo no mide el número anterior exactamente, hasta que se alcanza la unidad, entonces, los números originales son primos relativos."[66].

Por otra parte, en el Libro X la sustracción sucesiva se usa para responder a la pregunta de si dos magnitudes son conmensurables. Sí este método se aplica a dos magnitudes inconmensurables, entonces el proceso de sustracción sucesiva no terminará (ver *Elementos X.2*).

Por lo que yo sé, el origen de este método no se ha dilucidado. Lo único que se sabe de él (los trabajos de Zeuthen[67]), fue que ya era conocido por Aristóteles[68]. Como Junge escribió una vez[69]: "El método bien puede ser muy antiguo; es conducido inevitablemente al mismo, si se quiere determinar la razón entre las longitudes de dos líneas."

La explicación presentada arriba de los términos musicales *hemiolion* y *epitriton diastema* sugiere que el algoritmo de Euclides (resta sucesiva) también puede tener su origen en la teoría pitagórica de música. Más precisamente, este método fue desarrollado en el curso de experimentos con el monocorde y fue utilizado originalmente para determinar la *razón* entre las longitudes de dos secciones en el monocorde. En otras palabras, la sustracción sucesiva fue desarrollada primero en la teoría musical de proporciones. Esta conjetura encaja muy bien con los demás hechos conocidos sobre el método. Permítanme recordar algunos de ellos aquí.

[65] Ver B. L. van der Waerden, *Erwachende Wissenschaft*, pp. 208 y 236

[66] Traducción de Heath.

[67] *Det Kgl. Danske Vidensk. Selsk. Skrifter, nat. og math*. (Copenhagen), vol. 8, Raekke I, 1917, pp. 199-381.

[68] Aristotle, *Topica* 3, p. 158b 29-35; ver además notas 7, 8 y 9 arriba.

[69] G. Junge, 'Von Hippasus bis Philolaus, "Classica et Mediaevalia" ', *Revue Danoise de Philologie et d'Histoire* 19 (1958), pp. 41-72.

Euclides describe la operación de sustracción sucesiva con el verbo ἀνθυφαιρεῖν [70]. El sustantivo derivado de este es ἀνθυφαίρεσις [71]. Aristóteles menciona esta palabra una vez[72] y al mismo tiempo alude a una antigua definición de guardar la misma razón que Euclides no incluyó en *Elementos*. Esta definición es citada en el comentario de Alejandro de Afrodisia, así como en la Suda (ver bajo ἀνάλογον) y funciona de la siguiente manera: ἀνάλογον ἔχει μεγέθη πρὸς ἄλληλα, ὧν ἡ αὐτὴ ἀνθυφαίρεσις 'Magnitudes que tengan la misma *antifairesis* están en la misma razón'.

En mi opinión el verdadero significado de esta antigua definición puede entenderse correctamente solo si se tiene en mente que el método de *sustracción sucesiva* (ἀνθυφαίρεσις) ya se ha utilizado para calcular la razón entre dos longitudes de la cuerda del monocorde. Puesto que la razón entre dos segmentos de línea se estableció por medio de sucesivas restas, parecía natural definir las razones como *son la misma*, si en cada caso del método de *sustracción sucesiva* (aplicado a las dos cantidades en cuestión) *produjo el mismo resultado*.

[De esta manera los griegos también pueden haber tenido su interés original en el concepto de 'guardar la misma razón' despertado por consideraciones que tienen que ver con la teoría de la música. Debió ser evidente de inmediato para ellos que, al establecer los números proporcionales de la quinta, por ejemplo, que era lo mismo si se utilizaba un monocorde con solo tres divisiones, o un canon con *doce*. Las razones numéricas $3:2$ y $12:8$ (o incluso $9:6$ para el caso) eran iguales entre sí. Además, en todos estos casos de restas sucesivas aplicado a las dos cantidades respectivas conducían al mismo resultado.]

2.9 EL CANON

En el capítulo 2.7 [puntos (a), (b) y (c) en la p. 133] que resumen las principales formas en que los experimentos sobre el monocorde fueron facilitados por la introducción de una vara de medir numerada. Ahora, sin embargo, me gustaría hablar de algunas otras ventajas que tenía.

[70] *Elementos* VII.1
[71] Alexander Aphrodisiensis (Vol. 2 of *Commentaria in Aristotelem Graeca*, ed. M. Wallies, Berlin 1892), p. 545.
[72] Ver n. 68 arriba.

Era bien sabido de la práctica musical que si un par de tetracordios se unían, las dos cuerdas exteriores (la ὑπάτη y la νήτη) producen una octava[73]. Por otra parte, se reconoció que la octava se compone de dos pequeños intervalos musicales. Como Filolao escribió en el fragmento citado anteriormente[74]: "La extensión de una octava es una cuarta y una quinta… para la distancia entre la superior (ὑπάτη) y la cuerda media (μέσσα) es una cuarta y la distancia entre la del medio y la inferior (ἐπὶ νεάταν) es una quinta".

Ahora la pregunta es si estos mismos hechos también pueden ilustrarse en un monocorde, es decir, si se puede mostrar sobre un monocorde que el *diastemata* de la cuarta y quinta en conjunto conforman el *diastema* de la octava.

Por supuesto que era imposible dar una respuesta satisfactoria a esta pregunta mientas tres unidades diferentes (dependiendo de si se considera una octava, cuarta o quinta) se utilicen para medir la longitud del monocorde. Cuando una vara de medir se dividió en cuatro partes iguales y se colocó debajo del monocorde de inmediato se volvió mucho más fácil dar una respuesta. El *diastema* (el fragmento de cuerda que no vibra) de la octava ahora podría ser caracterizado en términos de los dos puntos finales de la cuerda por los números 4 y 2 en la vara de medición ($4\colon 2$). Por lo tanto, era fácil mostrar que este *diastema* era de hecho, compuesto por dos diastemata más pequeños, es decir, la cuarta ($4\colon 3$) y la quinta ($3\colon 2$). Una octava es una *razón compuesta* de una cuarta y una quinta[75], más precisamente, en el monocorde la *longitud* de una octava ($4\colon 2$) se compone de la *longitud* de una cuarta ($4\colon 3$) más la *longitud* de una quinta ($3\colon 2$).

Así los experimentos con el monocorde y la vara de medir con números revelaron los mismos hechos que habían aprendido de la práctica musical. Tales experimentos con un canon, que tal vez se dividió originalmente en solo cuatro partes, también pueden haber contribuido a dar a τετρακτύς el significado casi mítico que tuvo para los pitagóricos[76].

No hay que olvidar, sin embargo, que no hay fuentes que mencionen un canon dividido en cuatro partes. Aunque la invención del canon se atribuye tradicionalmente a Pitágoras (y todo lo que uno puede pensar en la legendaria figura de Pitágoras, esta datación no debe dudarse), las fuentes de la forma en que el canon era divididos, ya no se discuten, o solo mencionan que se *divide en doce partes*. Por lo tanto, la existencia de un canon, con

[73] Ver n. 21 arriba.
[74] Ver n. 24 arriba.
[75] B. L. van der Waerden, *Erwachende Wissenschaft*, p. 183.
[76] Ibíd., p. 157.

cuatro divisiones solo se puede conjeturar. Sin embargo, es una conjetura bastante plausible si se tiene en cuenta los números proporcionales de las consonancias ($4\colon 3$, $3\colon 2$ y, poniendo estos dos juntos, $4\colon 2$) y los *tetraktys* pitagóricos.

En una inspección más cercana las desventajas de un canon con cuatro divisiones (si un instrumento de este tipo nunca fue realmente usado por los pitagóricos), frente a una con *doce*, pronto se hacen evidentes. Como ejemplo, consideremos el siguiente caso.

Por supuesto, en la práctica musical era irrelevante sí dada una nota, que difiera de ella por una cuarta era encontrado primero, seguido por otra que difieren en una quinta de esta última, o en orden contrario. En ambos casos la combinación de los dos intervalos dio como resultado un tono que difería de la original por una octava. Es imposible, sin embargo, para ilustrar este hecho (que el orden en que se encuentran los dos intervalos se puede invertir) por medio de un *canon con cuatro divisiones*. En este caso solo es posible combinar los dos *diastemata* si la cuarta precede a la quinta ($4\colon 3$ y $3\colon 2$ juntos forman $4\colon 2$). Por otro lado, un canon con doce divisiones permite a uno elegir $12\colon 9$ (una cuarta) seguido de $9\colon 6$ (una quinta), o alternativamente $12\colon 8$ (una quinta), seguido de $8\colon 6$ (una cuarta). En cualquiera de los casos una octava ($12\colon 6$) resulta de la combinación de los dos *diastemata*.

La razón para dividir la varilla de medición en *doce* partes ahora se puede apreciar también. Solo necesitamos tener en cuenta que en un principio la *longitud* del monocorde se midió en *tres unidades diferentes* que corresponden a las tres consonancias más importantes. En el caso de una octava, el monocorde se dividió en *dos* partes; en el caso de una cuarta, se divide en *cuatro*, y en el caso de una quinta, se dividió en *tres*. Para ilustrar al mismo tiempo estas tres consonancias en un solo monocorde, fue primero necesario encontrar el *mínimo común múltiplo* de 2, 3 y 4, que es exactamente 12.

Además de permitir una cuarta y una quinta para ser combinados en cualquier orden, un canon con doce divisiones también hace que sea posible ilustrar otra conexión interesante entre las razones numéricas de las consonancias.

Me refiero al hecho de que en las fuentes antiguas el intervalo de la quinta se describe con frecuencia como *superior* a la de la cuarta. Comento aquí de paso que esta afirmación por sí ya revela la forma en que era costumbre medir intervalos en el canon. La sección más larga de cuerda, o todo el monocorde, siempre debe haber sido tocado antes de la más corta. Por lo tanto las parejas de números obtenidos fueron $3\colon 2$ y $4\colon 3$. La forma en que los antiguos pensaban excluye la posibilidad de invertir el orden de cualquiera de los pares (es decir, de asociar $2:3$ con la quinta, o $3:4$ con la cuarta)[77]. Si se hubiera permitido este cambio, la afirmación de que la quinta fue mayor que la cuarta no sería correcta. (Aunque $\frac{3}{2} > \frac{4}{3}, \frac{2}{3} < \frac{3}{4}$) Ahora bien, esto se puede mostrar muy fácilmente en un canon con *doce divisiones*. En este caso el *diastema* de la quinta era la longitud entre los números 12 y 8, mientras que el *diastema* de la cuarta estuvo representado por la longitud entre los números 12 y 9.

Por lo consiguiente, era evidente inmediatamente que *tanto la quinta era mayor que la cuarta, es decir, por la longitud entre los números 9 y 8 en el canon*. Como Filolao escribió[78]: "… la quinta supera la cuarta por un $\dot{\varepsilon}\pi\acute{o}\gamma\delta oov$ (9: 8)".

2.10 OPERACIONES ARITMÉTICAS EN EL CANON

Vale la pena echar un vistazo más de cerca a la afirmación de Filolao que "… la quinta supera la cuarta por un *epogdoon*". Por supuesto la antigua literatura sobre la teoría de la música está llena de tales declaraciones. Por ejemplo, hay un pasaje de la *Teoría de la Armonía* de Ptolomeo que discute el tema de la observación de Filolao con algo más de detalle[79]. Este pasaje es de interés para nosotros, principalmente porque habla de los números proporcionales *hemiolios logos* $(3:2)$ y *epitritos logos* $(4:3)$, en lugar de *quintas* y *cuartas*, continúa diciendo que la 'diferencia' ($\grave{\upsilon}\pi\varepsilon\varrho o\chi\acute{\eta}$) entre estas dos razones es un *epogdoos logos* $(9:8)$.

El método que se utilizaría para obtener esta diferencia (entre las fracciones $\frac{3}{2}$ y $\frac{4}{3}$) es, obviamente, la división; para $\frac{3}{2}:\frac{4}{3} = \frac{9}{8}$. Así, la expresión griega para 'diferencia' utilizada aquí ($\grave{\upsilon}\pi\varepsilon\varrho o\chi\acute{\eta}$) habitualmente se refiere a la *diferencia obtenida por la sustracción*, no a un 'cociente resultante de la división'. Hay, por ejemplo, un pasaje en el comentario de Porfirio en la *Teoría de la Armonía* de Ptolomeo en la que se afirma explícitamente que aunque los pares 6,3 y 2,1 tienen los mismos logos $(6:3 = 2:1)$, sus *diferencias* no son iguales ($\alpha\grave{\iota}\ \delta'\ \grave{\upsilon}\pi\varepsilon\varrho o\chi\alpha\grave{\iota}\ \breve{\alpha}\nu\iota\sigma o\iota$)[80]. En el primer caso la *diferencia* es 3 $(6 - 3 = 3)$ y en el otro es 1 $(2 - 1 = 1)$. Así que la palabra $\grave{\upsilon}\pi\varepsilon\varrho o\chi\acute{\eta}$, al igual que su opuesto, $\breve{\varepsilon}\lambda\lambda\iota\psi\iota\varsigma$, es sin

[77] Ver traducción al alemán de las palabras Philolaos encontrado en Diels y Kranz, *Fragmente der Vorsokratiker*, vol. 1, p. 409.
[78] Ver la nota anterior. Este fragmento de Filolao es una prueba más del hecho que el canon con sus doce divisiones ya existía en su época.
[79] *Die Harmonielehre des Klaudios Ptolomeo*, ed. I. Düring, Berlín (1930). Todo el pasaje se traduce en van der Waerden, *Hermes 78* (1943), 166ff.
[80] Düring's edition, p. 92.1ff

duda, un término técnico que tenía que ver con la *sustracción*; ambas palabras denotan la *diferencia*.

La pregunta ahora es la razón por el *cociente* de las razones de $3:2$ y $4:3$ (es decir, $9:8$) que se llamó una *diferencia* en la teoría de las proporciones, aunque la menor de estas dos razones (4: 3) no representaba un sustraendo pero si un divisor. Creo que esta pregunta se puede responder fácilmente sobre la base de algunos hechos sobre el canon que he explicado anteriormente. Los números proporcionales de la quinta ($12:8$, *hemiolios logos*) y la cuarta ($12:9$, *epitritos logos*) se refieren a las *líneas* sobre el canon, la primera al fragmento de cuerda entre los números 12 y 8, y la segunda al fragmento entre 12 y 9. Con el fin de encontrar que tanto más pequeña es la razón de la cuarta ($12:9$) que la quinta ($12:8$) estando en el mismo canon, fue necesario restar la línea más pequeña de la mayor. Esto dejó una ‘diferencia’ (ὑπεροχή), es decir, la *línea* entre los números 9 y 8 en el canon.

Por lo tanto, si en la teoría griega de proporciones el cociente de dos razones se describe como una *diferencia*, la explicación histórica de este hecho notable es que la operación que hoy se entiende como la división de una fracción con otra, fue concebido originalmente como una operación en un canon con doce divisiones y era simplemente *la sustracción de una línea corta de una más larga*.

Por supuesto, es no solo el término *ὑπεροχή* que testifica el hecho de que la determinación de la ‘diferencia’ entre las razones $3:2$ y $4:3$ originalmente no era una cuestión de división para los griegos, sino de sustracción (ya que esta operación era llevada a cabo directamente en un ‘canon’). De hecho, incluso parece que la operación que denotaría $\frac{3}{2}:\frac{4}{3}$ solo puede ser descrita en términos de la *sustracción* en griego. Esto explica la Proposición 8 de la *Sectio Canonis*: *ἐὰν ἀπὸ ἡμιολίου διαστήματος ἐπίτριτον διάστημα ἀφαιρεθῇ, τὸ λοιπὸν καταλείπεται ἐπόγδοον* (es decir $\frac{2}{3}:\frac{4}{3}=\frac{9}{8}$), que Heiberg traduce como: “Si ab intervallo sesquealtero intervallum sesquetertium *aufertur*, quod *relinquitur* sesqueoctavum est” [e]. El verbo forma *ἀφαιρεθῇ* y *καταλείπεται* son característicos de la *sustracción*, no de la división. (Compare estos con *Elementos* Libro IX, la Proposición 27: *ἐὰν ἀπὸ περισσοῦ ἀριθμοῦ ἄρτιος ἀφαιρεθῇ ὁ λοιπὸς περισσὸς ἔσται*; “Si a numero impari par *subtrahitur*, *reliquus* impar erit.”) [f].

Aquellos términos provenientes de la teoría griega de proporciones que describen la *multiplicación* de una razón por otra como la *adición* pueden ser explicados de la misma manera (como procedentes de operaciones en un canon). Ya he mencionado que la octava fue considerada como un *intervalo compuesto*, $\delta\iota\acute{\alpha}\sigma\tau\eta\mu\alpha\ \sigma\upsilon\nu\tau\varepsilon\vartheta\acute{\varepsilon}\nu$. Si se tiene en cuenta que el trozo de cuerda que tenía que mantenerse aún con el fin de producir la segunda nota de una octava (es decir, la *longitud* entre los números 4 y 2 en un canon con cuatro divisiones) en realidad estaba compuesta de la *longitud* de una cuarta (el fragmento que se encuentra entre 4 y 3) y la de una quinta (el fragmento que se encuentra entre 3 y 2), entonces el uso de un término para 'adición' inmediatamente se hace comprensible. El verbo $\sigma\upsilon\nu\tau\iota\vartheta\acute{\varepsilon}\nu\alpha\iota$ no es más que la expresión técnica para *adición*[81]. Obviamente las dos razones de $4:3$ y $3:2$ (o incluso las fracciones $\frac{4}{3}$ y $\frac{3}{2}$) considerados por ellos mismos deben *multiplicarse* juntos, *no adicionarse*, con el fin de producir la razón de una octava ($4:2$ o $2:1$). El uso inesperado de un término para la adición, en lugar de uno para la multiplicación ($\pi o\lambda\lambda\alpha\pi\lambda\alpha\sigma\iota\acute{\alpha}\zeta\varepsilon\iota\nu$), se explica por referencia a la operación original en un canon.

La adición y sustracción de longitudes de un canon tuvieron trascendentales efectos no solo sobre la terminología musical, sino también sobre los términos utilizados en la teoría griega de proporciones. Incluso Euclides en *Elementos* emplea con frecuencia la expresión $\sigma\upsilon\gamma\kappa\varepsilon\acute{\iota}\mu\varepsilon\nu o\varsigma\ \lambda\acute{o}\gamma o\varsigma$, donde el verbo $\sigma\upsilon\gamma\kappa\varepsilon\tilde{\iota}\sigma\vartheta\alpha\iota$ no tiene su significado habitual de adición, pero en cambio se refiere a la multiplicación. Permítanme darles algunos ejemplos para ilustrar esto:

Elementos VI. 23: "Paralelogramos equiángulares tienen entre sí la *razón compuesta* ($\lambda\acute{o}\gamma o\nu\ \check{\varepsilon}\chi\varepsilon\iota\ \tau\grave{o}\nu\ \sigma\upsilon\gamma\kappa\varepsilon\acute{\iota}\mu\varepsilon\nu o\nu$) de las razones de sus lados".

Elementos VIII.5: "Los números planos tienen entre sí la *razón compuesta* ($\lambda\acute{o}\gamma o\nu\ \check{\varepsilon}\chi o\upsilon\sigma\iota\nu\ \tau\grave{o}\nu\ \sigma\upsilon\gamma\kappa\varepsilon\acute{\iota}\mu\varepsilon\nu o\nu$) de las razones de sus lados".

Otro ejemplo lo proporciona Definición 5 del Libro VI, que probablemente es una interpolación: "Una razón se dice ser *compuesta* de razones ($\lambda\acute{o}\gamma o\varsigma\ \acute{\varepsilon}\kappa\ \lambda\acute{o}\gamma\omega\nu\ \sigma\upsilon\gamma\kappa\varepsilon\tilde{\iota}\sigma\vartheta\alpha\iota\ \lambda\acute{\varepsilon}\gamma\varepsilon\tau\alpha\iota$) sí es formada al *multiplicar* juntas magnitudes de las razones."[82]

---

[e] Traduce "Si el intervalo sesquialtero ab se quita un intervalo sesquitertio, el resto será sesquioctavo" (N. del T.)

[f] Traduce: "Si de un número impar se quita un número par el resto será impar"

[81] Euclides generalmente emplea los verbos $\sigma\upsilon\nu\tau\iota\vartheta\acute{\varepsilon}\nu\alpha\iota$ y $\sigma\upsilon\gamma\kappa\varepsilon\tilde{\iota}\sigma\vartheta\alpha\iota$en el sentido de añadir; ver, por ejemplo, *Elementos* IX.21 y 22.

[82] Vale la pena recordar aquí la observación de Thaers (que se encuentran en su traducción *Die Elemente von Euclid*, part 1, n. 60): "La Definición VI.5 es probablemente falsa, pero bien podría ser parte de una teoría de las proporciones que antecede Libro V"

La expresión $\sigma\upsilon\gamma\kappa\varepsilon\acute{\iota}\mu\varepsilon\nu o\varsigma\, \lambda\acute{o}\gamma o\varsigma$ (*razón compuesta*) se deriva originalmente de una operación en el canon, al igual que el término técnico relacionado $\delta\iota\pi\lambda\alpha\sigma\acute{\iota}\omega\nu\, \lambda\acute{o}\gamma o\varsigma$ (*razón doble*) que aparece en la Definición V.9 de *Elementos*. En cuanto a estos últimos, van der Waerden ha escrito[83]: “Duplicar una razón claramente corresponde a multiplicar una fracción por sí misma. Porque sí $a\!:\!b = b\!:\!c$, entonces $\frac{a}{c} = \left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{b}{c}\right) = \left(\frac{a}{b}\right)^2$. Los griegos fueron sin duda no menos capaces de multiplicar fracciones como nosotros”. Por otra parte, Tannery ya había remontado la expresión ‘razón doble’ de vuelta a la teoría de la música[84]. Lo único que tengo que añadir es que, aunque por supuesto es apropiado referirse a la teoría de la música, en este contexto, no es de por sí suficiente. Los términos técnicos que hemos estado discutiendo (incluyendo la expresión ‘razón doble’) permanecen sin explicación y al menos que se considere la mención en las operaciones aritméticas que se llevaron a cabo en el canon[85].

Hay otros dos puntos que vale la pena hacer en relación con estas operaciones:

(1) Frank ya era consciente del hecho de que los griegos usaban las palabras ‘adición’ y ‘sustracción’ en la teoría musical de proporciones en el sentido de ‘multiplicación’ y ‘división’ respectivamente[86]. Difícilmente se le puede culpar por haberse sorprendido por esto. Sin embargo, en vez de hacer un intento serio de explicar este sorprendente hecho, se le ocurrió la idea frívola que ‘componer razones’ era una operación demasiado compleja para los griegos de haber sido capaz de llevarla a cabo antes del siglo IV. La propuesta de Van der Waerden a esto fue[87]: “Componer razones de esta manera es una operación tan elemental y obvio que no entiendo por qué Frank insiste en que los griegos no tenían una idea clara acerca de esto antes del tiempo de Arquitas y Eudoxo.” Van der Waerden estaba completamente correcto al rechazar visión frívola de Frank; por otro lado, sin embargo, él no pudo entender la ‘problemática’ de lo que Frank encontró. (Él no vio que Frank no pudo resolver la confusión que *parece* existir en la teoría griega de proporciones entre la suma y la *multiplicación,* por un lado, y la resta y la *división* en el otro. Así que ni el filólogo ni el matemático lograron explicar el hecho de que había desconcertado a Frank.)

[83] Math. Ana. 120 (1947/9), 133-4
[84] Van der Waerden; mirar la nota anterior.
[85] Burkert, *Weisheit und Wissenschaft*, p. 348, n. 3, usa la palabra ‘Streckenvorstellung’ en esta conexión.
[86] *Plato und die sog. Pythagoreer*, pp. 158-61, especialmente p. 158, n. 1.
[87] *Hermes 78* (1943), p. 179.

(2) El otro hecho que debe ser enfatizado aquí es el siguiente: En la teoría griega de las proporciones las palabras para la suma y la resta son efectivamente utilizadas en el sentido de la multiplicación y división respectivamente. Este uso proviene de la época en que aún se calculaban razones directamente por *longitudes* de un canon. Sin embargo, si uno considera la teoría de las proporciones tal como se presenta en Euclides, se ve casi las mismas expresiones para la suma y la resta sedan históricamente después, esta vez con el significado de la *suma real* y la *resta*. En las Definiciones V.14 y 15 de *Elementos*, por ejemplo, las palabras *σύνθεσις λόγου* o *διαίρεσις λόγου*, y *ὑπεροχή* se refiere a la actual *adición* y la *resta* de los términos de *λόγοι*, no a la adición (es decir, la multiplicación) o resta (es decir, la división) de dos *λόγοι*. Por supuesto, este uso posterior no tiene nada que ver con las operaciones sobre el canon.

2.11 EL TÉRMINO TÉCNICO PARA 'RAZÓN' EN GEOMETRÍA

En el último capítulo discutimos algunas operaciones aritméticas del 'canon' ('Adición' y 'sustracción' de *diastemas*) que tenía un efecto duradero en la terminología utilizada posteriormente en la teoría de proporciones. Tales expresiones tan importantes como la '*razón compuesta'*, '*razón doble'*, '*diferencia entre dos razones'* etc., que en realidad se refieren a *multiplicación* y *división*, tendrían que ser considerados simplemente como enigmas lingüísticos si cada uno de ellos no podría remontarse a una particular operación sobre el canon. Tendremos que volver al tema de las operaciones aritméticas sobre el canon en un capítulo posterior, pero por el momento se va a interrumpir nuestra discusión de la teoría musical de proporciones y dedicar los próximos capítulos (2.12-2.16) a la consideración de algunos otros términos geométricos.

Es sorprendente que el término musical *διάστημα* (la razón entre dos números) nunca se utiliza en geometría. La palabra *διάστημα* en geometría significa es 'línea' y no otra cosa. (Por ejemplo, el tercer postulado de Euclides, que ya se ha citado una vez, establece que un círculo se puede dibujar con cualquier centro y cualquier *segmento de línea* – *παντὶ διαστήματι*). En geometría el concepto de '*razón entre dos números o cantidades*' no se expresó por *διάστημα* sino por la palabra *λόγος*.

La conjetura de que estos dos términos (*λόγος* y *διάστημα*) deben tener algo que ver entre ellos, se ve confirmado por los siguientes hechos:

1. Como se mencionó anteriormente[88], $\lambda \acute{o} \gamma o \varsigma$ y $\delta \iota \acute{\alpha} \sigma \tau \eta \mu \alpha$ fueron conceptos equivalentes en la teoría pitagórica de la música.

2. Así como un diastema musical tenía dos 'puntos finales' ($\H{o}\varrho o \iota$), en geometría se refiere al $\H{o}\varrho o \iota$ de un $\lambda \acute{o} \gamma o \varsigma$ (como lo demuestra Definición V.8 de *Elementos*, por ejemplo).

Estos dos hechos, sin embargo, no nos dicen nada sobre el origen del concepto $\lambda \acute{o} \gamma o \varsigma$ (a: b). En particular, no sabemos si este término se originó dentro de la teoría de la música, tal vez como un sinónimo para un $\delta \iota \acute{\alpha} \sigma \tau \eta \mu \alpha$ musical, o si existía anteriormente en la geometría y fue solo después equiparado con $\delta \iota \acute{\alpha} \sigma \tau \eta \mu \alpha$ musicales.

Para poder responder a estas preguntas, será necesario llevar a cabo una investigación más exhaustiva del término geométrico $\lambda \acute{o} \gamma o \varsigma$ y su etimología. Por el momento, sin embargo, nuestro punto de partida no será el propio término $\lambda \acute{o} \gamma o \varsigma$, sino el nombre griego para 'proporción', es decir, la palabra $\acute{\alpha} \nu \alpha \lambda o \gamma \acute{\iota} \alpha$. Ya he mencionado (en el capítulo 2.2) que el cuarto lugar respecto a la *proporción* (o que guardan la misma razón) fue llamado $\acute{\alpha} \nu \alpha \lambda o \gamma \acute{\iota} \alpha$ en la geometría griega. Nuestra primera tarea será la de investigar cómo la palabra $\acute{\alpha} \nu \alpha \lambda o \gamma \acute{\iota} \alpha$ adquirió este notable significado.

2.12 Ἀ$\boldsymbol{\nu \alpha \lambda o \gamma}$ί$\boldsymbol{\alpha}$ COMO 'PROPORCIÓN GEOMÉTRICA'.

Esta investigación gana algún interés adicional por el hecho de que la palabra sigue siendo de uso corriente, aunque su significado ha cambiado un poco. Además, con frecuencia hablamos de una 'analogía', por lo que entendemos que es algo más que una 'proporción geométrica'. Vamos a echar un vistazo a la historia de esta palabra griega.

Variantes modernas de la palabra $\acute{\alpha} \nu \alpha \lambda o \gamma \acute{\iota} \alpha$ se encuentran en todos los idiomas europeos. Además, todos ellos tienen más o menos el mismo significado. 'Analogía' significa similitud, la conformidad, la relación, o la extensión de una regla para casos similares. Estos significados ya dejan claro que la palabra moderna deriva del *término gramatical* griego (por medio de la palabra latina *analogía* por supuesto). Los gramáticos griegos han utilizado esta palabra con su actual significado desde la época helenística.

Es menos conocido que esta misma palabra, no era originalmente un término gramatical o lingüístico, sino uno matemático. La raíz de la palabra $\acute{\alpha} \nu \alpha \lambda o \gamma \acute{\iota} \alpha$ es obviamente $\lambda \acute{o} \gamma o \varsigma$, que en matemáticas significó la 'razón' entre dos números o cantidades (a: b). Sí

[88] Ver p. 113-4; También nn. 33 y 34.

$\acute{\alpha}\nu\alpha\lambda o\gamma\acute{\iota}\alpha$ describió un 'par de razones'. Siguiendo a Cicerón[89], esta fue traducida al latín por *proportio* ($a{:}b = c{:}d$). Los gramáticos griegos de la época helenística, sin duda presta su término $\acute{\alpha}\nu\alpha\lambda o\gamma\acute{\iota}\alpha$ del lenguaje de las matemáticas. Así que, en última instancia estamos en deuda con las matemáticas griegas para nuestra palabra 'analogía'.

Nuestra preocupación principal ahora es averiguar el significado original y preciso del término matemático $\acute{\alpha}\nu\alpha\lambda o\gamma\acute{\iota}\alpha$. Antes de tratar de hacerlo, sin embargo, hay dos hechos importantes que han de ser dichos primero.

(1) La expresión $\acute{\alpha}\nu\alpha\lambda o\gamma\acute{\iota}\alpha$ *no figuraba en el lenguaje cotidiano de los griegos*, es decir, que no era una parte del vocabulario común griego, como era hablado en la época clásica. Hay algunos pasajes de Platón[90] que casi llevan a pensar que en su época la palabra $\acute{\alpha}\nu\alpha\lambda o\gamma\acute{\iota}\alpha$ ya había sido adoptada en el lenguaje cotidiano, pero en realidad todas las pruebas (incluyendo estos mismos pasajes) señala el hecho de que $\acute{\alpha}\nu\alpha\lambda o\gamma\acute{\iota}\alpha$ en realidad no estaba acuñada, era una *mot savant* [g]. Por otra parte, al principio no tenía ningún significado fuera de las matemáticas, habiendo sido acuñado por los matemáticos para expresar una noción matemática. Posteriormente la palabra se hizo cargo de las matemáticas en el habla culta y más tarde se transformó en un término técnico de otra rama del saber, es decir, la gramática. El hecho de que ella llego a ser parte del vocabulario común del lenguaje griego muestra la enorme influencia que las matemáticas del Siglo IV ejercieron sobre el conjunto del pensamiento griego. Como veremos más adelante, el término $\acute{\alpha}\nu\alpha\lambda o\gamma\acute{\iota}\alpha$ fue acuñado en el Siglo VI, y por el tiempo de Platón ya era una palabra bastante común en el habla de los educados.

(2) Al parecer, los compiladores de los léxicos griegos, que son los más ampliamente utilizados en la actualidad, no sabían el significado exacto y verdadero de la palabra $\acute{\alpha}\nu\alpha\lambda o\gamma\acute{\iota}\alpha$. A pesar de que registran el significado de esta palabra de una manera que satisfaga inicialmente al lector acrítico, revelan en otras ocasiones que en realidad no lo han entendido. Permítanme ilustrar este punto citando algunos pasajes ilustrativos de estos diccionarios.

En el Diccionario de Passow (1841) $\acute{\alpha}\nu\alpha\lambda o\gamma\acute{\iota}\alpha$ se explica de la siguiente manera: "entsprechendes oder Richtiges Verhältnis, Proporción, Analogie etc."[Correspondiente o razón correcta, proporción, analogía]. Del mismo modo, el Diccionario de Pape (1849)

---

[g] Palabra sabía, en francés (N. del T.)

[89] Timaeus seu de *Universo*, 4§12: "Id optime assequitur, quae Graece $\acute{\alpha}\nu\alpha\lambda o\gamma\acute{\iota}\alpha$ Latine (audendum est enim, quoniam haec primum a nobis novantur) comparatio proportiove dici potest."

[90] Ver, por ejemplo, la política de Platón 257b. o Aristóteles, *Nicomachean Ethics*.

dice: “das richtige Verhältnis, Proporción, Übereinstimmung etc.” [La razón correcta, proporción, conformidad]. Por último, Liddel y Scott (1948) lista bajo ἀναλογία: “proporción matemática, la analogía, etc.” (Y luego cita a las más importantes autoridades).

Naturalmente en la mayoría no hay dificultad en la aplicación de los significados dados anteriormente para los diversos textos antiguos en los que se encuentra la palabra. Sin embargo, tan pronto como se intenta averiguar la derivación de la expresión ἀναλογία, en el uso de estos diccionarios como referencias, se hace evidente que el verdadero significado de la palabra no se ha entendido. Al final, la palabra ἀναλογία está conectada con ἀνάλογος o ἀνάλογον de la misma manera que φιλόλογία está conectado con φιλόλογος. Así que echemos un vistazo a la forma en que estos diccionarios explican ἀνάλογος o ἀνάλογον.

Passow da los siguientes significados (que son casi literalmente los mismos que los que se encuentran en Pape) bajo ἀνάλογος: “dem λόγος entsprechend, verhaltnismassig, iibereinstimmend, gemass, einer bestehen den Regel entsprechend” [en consecuencia con λόγος, proporcional, conforme, en conformidad con, de acuerdo con una regla existente]. Liddel y Scott tienen: “de acuerdo a un debido λόγος, proporcionadas, conforme”.

El lector crítico puede ver de inmediato de estas entradas que los autores no creen necesario explicar el significado exacto de la preposición ἀνά en las palabras ἀναλογία y ἀνάλογος; de hecho ellos no pueden haberlo entendido. Esta sospecha se confirma sobre todo por el demás excelente léxico de Liddel y Scott. Mencionan que el adverbio ἀνάλογος a veces se escribe como ἀνά λόγος; pero en vez de discutir el significado de esta importante frase, se refieren al lector a λόγος. Sin embargo, si uno trata de buscar el significado exacto de ἀνά λόγος bajo λόγος, hay una decepción almacenada, ya que se traduce simplemente por ‘analógicamente’. No podía haber más sorprendente documentación del hecho de que el verdadero significado de la expresión ἀνά λόγος no se ha entendido en absoluto[91].

Una comprensión exacta del término matemático ἀναλογία solo puede ser adquirida partiendo de lo siguiente, hecho bastante evidente. Aunque el sustantivo ἀναλογία parece ser un derivado directo del adjetivo ἀνάλογος, esto último no es la palabra raíz

[91]Lo mismo vale para Diels y Kranz, *Fragmente der Vorsokratiker*, I, p. 436, donde la frase ἀνά λόγος en el segundo fragmento Arquitas es traducida por la palabra alemana ‘analog’. No tengo idea de lo que el traductor tenía en mente cuando escribió esto.

cuya explicación nos conducirá a la solución de nuestro problema (el significado de ἀναλογία). Al parecer, el adjetivo ἀνάλογος, sí se deriva de la expresión adverbial ἀνά λόγον, es decir, un principio solo existía la frase ἀνά λόγος. Está escrito como dos palabras no solo en algunas partes de Platón (por ejemplo, en el *Fedón*, 110a: ἀνά τὸν αὐτόν λόγον), sino también en un fragmento de Arquitas, que "representa tal vez el único sobreviviente, el auténtico texto matemático de la época anterior a Autólico y Euclides"[92]. De esta frase se produjo por un lado, la expresión familiar ἀνάλογον (véase por ejemplo, *Elementos* Definiciones V.6, VII.21, etc.), y por otro lado el adjetivo ἀνάλογος así como el sustantivo ἀναλογία. Así que ahora vamos a tratar de averiguar el significado de ἀνάλογον o ἀνά λόγον.

2.13 Ἀνάλογον

Lo primero que hay que destacar es que nuestro conocimiento de la expresión ἀνάλογον viene exclusivamente del lenguaje de las matemáticas[93]. Es cierto que en una ocasión Platón (*Fedón*, 110d) utiliza ἀνά λόγον y ἀνά τὸν αὐτὸν λόγον), en contextos que no son obviamente matemáticos, no obstante, una inspección más detallada de los pasajes en cuestión, revelan que Platón en realidad lo está utilizando como término matemático. En cualquier caso, el significado de esta expresión solo puede explicarse por referencia al *lenguaje de las matemáticas*.

En *Elementos* hay dos usos diferentes de la palabra ἀνάλογον que tienen que ser claramente distinguidos. Déjeme darle un ejemplo de cada uno de ellos aquí. (En ambos casos, el texto griego se cita junto con la traducción alemana de Thaer[94].

Un ejemplo del primer uso es la definición V.6:

τὰ τὸν αὐτὸν ἔχοντας λόγον μεγέθη ἀνάλογον καλείσθω.	Die dasselbe Verhältnis habenden Grössen sollen *in Proportion stehend* heissen.

[92] Véase O. Toplitz. *Quellen und Studien zur Oeschichte der Mathematik*, etc. B, 2 (1932), 288, n. 5. Véase también M. Timpanaro-Cardini, *Pitagorici, Testimonianze e Frammenti*. fasc. 2 (Florencia 1962, p. 372)

[93] Burkert (*Weisheit und Wissenschaft*, pp 414ff), quien cree que el término matemático λόγος se deriva de la lengua de las finanzas, escribe engañosamente: "Cuando se 'corresponden con el mismo monto' se dice que ellas son ἀνά λόγον". [Las cantidades eran monedas de diferente denominación o monedas corrientes.] No veo cómo se puede hacer una afirmación sin citar ninguna evidencia de ello. Por lo que sé, no hay ningún texto antiguo, dónde se utilizó la frase con este significado. De hecho no hay evidencia de que ἀνά λόγον se utilizó en absoluto *fuera de las matemáticas*.

[h] En correcta proporción, en latín (N. del T.).

[94] C. Thaer , *Elementos de Euclides*, Leipzig 1933-7

[Magnitudes que tienen la misma razón se dice que están en proporción]

El otro uso puede ser ilustrado por el enunciado de la Proposición VI.12:

τριῶν δοθεισῶν εὐθειῶν τετάρτην ἀνάλογον προσευρεῖν.

Zu drei gegebenen Strecken die vierte *Proportionate* zu finden.

[Para tres rectas dadas encontrar una cuarta *proporcional]*

Como podemos ver, en nuestro primer ejemplo la palabra *ἀνάλογον* se refiere a todas aquellas magnitudes que constituyen la proporción, y es traducida por Thaer como "*in proportion stehend*" [h], mientras que en nuestro segundo ejemplo, la palabra se refiere a *una sola magnitud* (*τετάρτη ἀνάλογον*) y por lo tanto se traduce como "*Proportionale*". El último ejemplo sugiere que cada una de las magnitudes que se destina a compensar la proporción es en sí mismo es un *ἀνάλογον*. Sin embargo, nos quedamos con la pregunta de qué es exactamente un *ἀνάλογον*, y por qué la palabra no cambia. La conexión entre estos dos usos no se estableció en el momento.

Resulta que el uso que se da en la segunda cita es la última de las dos (es decir, que pertenece a una etapa posterior del desarrollo lingüístico). Por lo tanto, vamos a volver a ella en un capítulo posterior y tratar con la otra primero.

Nuestro punto de partida será la Definición V.6; por otra parte, vamos a dejar la palabra *ἀνάλογον* sin traducción por el momento. Por lo tanto, nuestra interpretación provisional de la definición es la siguiente: "*Las magnitudes que tienen la misma razón (λόγος) se dice que están ἀνάλογον*."

Es necesario saber lo que es una 'razón' matemática, a fin de comprender esta definición. Por el momento, vamos a aceptar la concepción euclidiana de *λόγον,* según la cual él *λόγον* entre dos números o magnitudes (a y b) es solo $a{:}b$ (como los escribiríamos hoy en día). Tal vez debería mencionar de inmediato que la concepción euclidiana de la razón matemática (*λόγον*) de ninguna manera es la original. Más adelante veremos que, en los tiempos pre-euclidianos *λόγον* era una noción un tanto más amplia; pero este hecho no nos debe preocupar ahora. El concepto Euclidiano de *λόγον* es suficiente para nuestro propósito de descubrir el significado de *ἀνάλογον*. Si sabemos lo que la razón matemática (*λόγον*) de dos magnitudes es, entonces la interpretación de definición V.6, no plantea ningún problema. La definición establece claramente que si la razón entre dos magnitudes a y b es $a\!:b$, y si la razón entre otras dos magnitudes c y d es la misma que entre a y b (en nuestro notación, si $a\!:b = c\!:d$), entonces estos cuatro magnitudes (a, b, c y d) colectivamente se dice que son *ἀνάλογον*.

Esta interpretación también concuerda con otra definición de *Elementos*, que es de naturaleza aritmética. Me refiero a Definición VII.21:

ἀριθμοὶ ἀνάλογόν εἰσιν, ὅταν ὁ πρῶτος τ οῦ δευτέρου καὶ ὁ τρίτος τοῦ τετάρτου ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιος ἢ τὸ αὐτὸ μέρος ἢ τὰ αὐτὰ μέρη ὦσιν.

Analogon sind die Zahlen[95] wenn die erste von der zweiten Gleichvielfaches oder derselbe Teil oder dieselbe Menge von Teilen ist, wie die dritte von der vierten.

[Los números son *analogon* cuando el primero es el mismo múltiplo, la misma parte, o el mismo número de partes, de la segunda como la tercera es de la cuarta.]

Estas definiciones muestran que la palabra *ἀνάλογον* describe al menos cuatro números o magnitudes, dos de los cuales tienen la misma razón entre sí como las otros dos. No podemos aplicar cualquiera de las definiciones anteriores y hablar de *ἀνάλογον* a menos que haya al menos cuatro números o magnitudes presentes[96]. Por supuesto, esta interpretación no contradice la Definición V.8 de *Elementos*, que establece ciertamente que "la menor *analogía* consiste en *tres* términos”. En un caso de este tipo (el *ἀνάλογον συνεχής,* como se le llama) el término medio se toma dos veces ($a\!:b = b\!:c$), de manera que en conjunto hay cuatro términos, no tres. Aristóteles ha explicado este punto con más detalle[97].

El otro dato importante que se desprende de las definiciones anteriores (V.6 y VII. 21) es que la palabra *ἀνάλογον* describe *guardar la misma razón (λόγος)* entre dos pares de números o magnitudes (es decir, que describe la relación que se da entre dos pares de números o magnitudes donde cada uno tienen la misma razón - *τὸν αὐτὸν λόγον*). Su significado se expresa en inglés por la frase ‘en la misma razón’. Aristóteles también le

[95] Heath traduce *ἀνάλογον* en este contexto por *proporcional*, mientras que Thaer usa *en proporción.*
[96] Aristóteles, *Ética a Nicómaco*. 11 31a31, ἡ *γὰρ ἀναλογία ἰσότης ἐστὶ λόγων χαὶ ἐν τέτταρσιν ἐλαχίστοις*.
[97] Ibíd.

atribuye este significado a la palabra ἀναλογία. Él escribe: "*Analogía* es *guardar* la misma razón, es decir λόγοι."

2.14 LA PREPOSICIÓN ἀνά

Nuestra próxima tarea es puramente lingüística, es decir, para explicar cómo la palabra ἀνάλογον es capaz de expresar la idea de *'estar en la misma razón'*. La palabra λόγος significa claramente razón en este contexto, por lo que nuestra tarea se reduce a explicar cómo la *igualdad* entre razones se puede expresar anteponiendo la preposición ἀνά.

Ya he mencionado que el adverbio ἀνάλογον era a la vez escrita como dos palabras (ἀνά λόγον). Toma esta forma en el segundo fragmento de Arquitas. Ahora queremos saber exactamente lo que significa la preposición ἀνά en la expresión ἀνάλογος y ἀναλογία. En primer lugar, permítanme decir que por lo que sé esta pregunta nunca antes se han formulado claramente. No obstante, se ha recibido una respuesta que es a la vez errónea y ampliamente aceptada. En los diccionarios (véase el capítulo 2.12) la palabra ἀνάλογος se explica de la siguiente manera: "dem λόγος *entsprechend, gemäss, verhältnisrässig*" o "*de acuerdo* a un debido λόγος"

Estas explicaciones ofrecen una traducción de la preposición ἀνά como parte de la composición ἀνάλογος, sin embargo, parece ser una traducción equivocada.

No creo creer que el uso original de la preposición ἀνά se pudiera expresar a través de 'entsprechend', 'gemäss' o 'de acuerdo a', debido a que diferentes preposiciones eran usualmente empleadas en tales casos. Como ejemplo, consideremos la preposición κατά. Xenophon [*Cyropaedia*, 8.6, 11] escribe: κατά λόγον τῆν δυνάμεως (en proporción a su poder). Del mismo modo, en las obras de otros autores encontramos frases como χατὰ τὸν αὐτὸν λόγον ο τρόπον (Herodoto, I. 182), κατά τοῦτον τὸν λόγον (Platón, *Protágoras*, 324c), κατὰ λόγον τὸν εἰκότα (Platón, *Timeo*, 30b), κατὰ τὸν λόγον τὸν αὐτὸν (Aristóteles, *Ética a Nicómaco*, 1131b30) y κατὰ τὴν ἀναλογίαν (Platón, *Político*, 257b). En todos estos casos, solo aquella función de la preposición ἀνά que se pensaba encontrar en los compuestos ἀνάλογον y ἀναλογία, se lleva a cabo por la otra preposición κατά. Incluso Heráclito, cuando quiere decir 'de acuerdo a la misma naturaleza (o proporción)', no utiliza ἀνά; en cambio, escribe: εἰδ τὸν αὐτόν λόγον[98].

Estos ejemplos sugieren las siguientes dos conjeturas:

[98] Ver el fragmento 31 de Diels y Kranz, *Fragmente der Vorsokratiker*.

(a) Es poco probable que ἀνά (en la expresión ἀνά λόγον) tuviera originalmente el mismo significado que κατά y εἰς en los ejemplos anteriores. Es poco probable que ἀνά y κατά hubieran sido sinónimos. Estas dos preposiciones, al menos en un principio, tenían significados directamente opuestos. ἀνά significaba 'hacia arriba' o 'arriba', mientras que κατά significaba 'hacia abajo' o 'abajo'.

(b) Como veremos más adelante, una gran cantidad de información histórica se puede obtener una vez que hayamos establecido con exactitud lo que significa preposición ἀνά en la frase ἀνά λόγον. No obstante, quiero destacar aquí que la explicación de ἀναλογία que voy a proponer es válida solo para el significado de este término matemático *en un período temprano*. Sería un error pensar que esta palabra tenía precisamente el mismo significado en los textos posteriores, como los de Platón. La cita de *Política* dada anteriormente muestra que Platón usa la palabra ἀναλογία en un sentido que difiere de los realmente listados en el diccionario. La frase κατά τὴν ἀναλογίαν indica que en la época de Platón el significado original de ἀνά en la palabra ἀναλογία debe haber sido olvidado. (Esta es la única manera de explicar el hecho de que una nueva frase adverbial puede formarse a partir de ἀναλογία anteponiendo la preposición κατά, aunque ἀναλογία en sí misma era solo un *adverbio que se había convertido en un sustantivo*.) Lo mismo puede decirse de ἀνάλογον. En el habla culta ésta palabra, sin duda vino (incluso en *la época clásica*) a significar más o menos lo mismo que nuestro adjetivo 'análogamente'. Próclo[99] por ejemplo, escribe: κατά τὸ ἀνάλογον, que Schonberger[100] traduce acertadamente como "in analoger Weise" [en una manera *análoga*]. Esto, sin embargo, no es el significado que nos interesa. Nuestra preocupación actual es con el significado original de este término matemático, es decir, con el significado que probablemente era corriente en el siglo VI a.C. y cuyas trazas se encuentran en muchas de las proposiciones de Euclides (ya que las proposiciones en cuestión datan de un período muy anterior, el pre-platónico).

En mi opinión, no es difícil averiguar lo que ἀνά significa en la expresión ἀνά λόγον, y por lo tanto descubrir el significado original y exacto del término matemático ἀναλογία. Entre los diversos significados de la preposición ἀνά, todos los grandes léxicos griegos listan una llamada *distributiva* que se produce sobre todo en contextos numéricos. Por ejemplo, en

[99]*Prodi Diadochi in primum Euclidis Elementorum Librum commentarii,* ed. G. Friedlein (Lipsiae 1873), 117. 2.
[100] Proklus Diadochus, *Kommentar zum ersten Buch von Euklids Elementen*, traducido por P. L. Schönberger, ed. M. Steck, Halle 1945.

Xenophon leemos: *ἀνά πέντε παρασάγγας τῆς ἡμέρας* (*a tarifa de cinco* parasangas por día - *Anábasis* 4, 6, 4) y: ἀνά *ἑκατὸν* ἄνδρας (“*cien* hombres *cada uno*” - ibid, 3. 4. 21). Del mismo modo Diofanto (*Aritmética* IV 20) escribe: *ἀνά δύο* (*dos cada vez*).

Tolos los ejemplos que citan los diccionarios ilustran de este significado particular de *ἀνά* que tienen que ver con los números. Podemos corregir la impresión que esto deja, sin embargo, y adicionar la observación que *ἀνά* fue utilizada con este significado distributivo no solo en contextos numéricos, sino también de vez en cuando antes de los sustantivos que tienen alguna relación con el concepto de ‘número’ o con el de ‘división’. Un ejemplo de este uso es, la expresión *ἀνά μέρος*[101] citada en la Gramática de Kuhner[102] donde se traduce como “wechselweise” (por turnos). *ἀνά* está utilizada distributivamente en esta frase, ya que el significado ‘por turnos’ deriva claramente del significado literal original de *ἀνά μέρος*, que era ‘un fragmento a la vez’ o ‘(tomado) en partes’.

Ahora creo que la frase *ἀνά λόγον* tiene que ser entendida de la misma manera; porque así como *ἀνά μέρος* significaba '(tomado) en partes', así *ἀνά λόγον* significaba '(tomado) en *logoi*'. Hay dos hechos muy importantes que apoyan esta explicación.

(1) Los diccionarios nos dicen que la preposición *ἀνά* tuvo su ‘significado distributivo’ especialmente en contextos numéricos. Teniendo en cuenta la expresión *ἀνά μέρος*, esta observación tiene que ser complementada con la observación de que *ἀνά* también podría utilizarse distributivamente antes de los sustantivos que se relacionan con el concepto de ‘división’. Μ*έρος* (parte) y ‘división’ (*distribuere* en latín) son conceptos estrechamente relacionados. Por otro lado, la frase *ἀνά λόγον* muestra que *ἀνά* podría ser utilizado en su sentido distributivo antes de sustantivos que (a diferencia de *πέντε, ἑκατόν* y *δύο* en los ejemplos anteriores) no eran ellos mismos números, pero que en un tiempo no podía ser separada del concepto de ‘número’. *Logos* era originalmente solo la ‘razón entre dos números’.
Por lo menos, estas consideraciones hacen que sea plausible que la preposición en la frase *ἀνά λόγον* este siendo utilizado *distributivamente*.

(2) Un segundo argumento importante a favor de este punto de vista es proporcionado por la forma en que se utilizó la expresión *ἀνά λόγον* en el

[101]Eurípides, *The Phoenician Women*, 478.
[102] R. Kühner- B. Gerth, *Ausjührliche Grammatik der griechischen Sprache. Satzlehre I. Teil*, cuarta edición, Hannover 1955, p. 474.

lenguaje de las matemáticas. Dos pares de números se decían que eran proporcionales cada vez que los miembros de un par estuvieran en la misma razón que los de la otra. Por tanto, los términos de la relación (de proporcionalidad) se *distribuyeron* primero acusa del contraste, y luego se compararon. No hay duda de que el significado exacto de la expresión ἀνά λόγον era '(tomar) el *logoi'.*

2.15 LA EXPRESIÓN ELÍPTICA ἀνά λόγον

Las consideraciones anteriores son simples, sin embargo, establecer de manera concluyente que la preposición ἀνά tiene un significado distributivo en la frase ἀνά λόγον, nos llevan un paso más en nuestra investigación. Aristóteles hace hincapié en que "*analogia* es *guardar el mismo logoi*". Así, para establecer que cuatro números o cantidades estaban ἀνά λόγον, uno tenía que mostrar que eran 'iguales (cuando se toman) en *logoi*'. Esto implica que ἀνά λόγον ([tomada] en *logoi*) significaba en realidad '*igual* (cuando se toman) en *logoi'*, o en otras palabras que ἀνά λόγον fue llamada una expresión *defectuosa* o *elíptica*. La frase utilizada inicialmente en las matemáticas griegas debe haber sido ἀνά λόγον ἴσοι o ἴσα que posteriormente fue abreviada a la expresión estándar ἀνά λόγον (o ἀνάλογον, como a veces fue escrito).

Hay que reconocer que la versión más completa de esta frase no aparece en ninguno de los textos antiguos que han llegado hasta nosotros. Por lo que yo sé, estos contienen solo la forma elíptica ἀνά λόγον (o ἀνάλογον). Sin embargo, no hay duda de que hemos logrado reconstruir correctamente la expresión completa. La evidencia de esto es proporcionada por las dos definiciones de Euclides (*Elementos* VII. 21 y V.6) que ya han sido citados anteriormente. Para interpretar y traducir estos satisfactoriamente, tienen que complementarse (o por lo menos tiene que tener en cuenta que tienen que ser complementada) de la siguiente manera.

Definición VII. 21:

ἀριθμοὶ ἀνάλογον <ἴσοι> εἰσίν, ὅταν
ὁ πρῶτος τοῦ δευτέρου καὶ ὁ τρίτος
τοῦ τετάρτου ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιος
ἢ τὸ αὐτὸ μέρος ἢ τὰ αὐτὰ μέρη ὦσιν.

Los números son iguales (cuanto tomados) en *logoi*, si el primero es el mismo múltiplo, la misma parte, o el mismo número de partes del segundo, que el tercero es del cuarto.

Definición V. 6:

τὰ τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον μεγέθη ἀνάλογον <ἴσα> καλείσθω

Magnitudes que tienen los mismos logos se dice que son iguales [cuando se toman] en *logoi*.

Por supuesto que hay muchos pasajes similares de Euclides[103] que necesitan ser complementados exactamente de la misma manera que el anterior. Permítanme mencionar algunos de ellos aquí.

En *Elementos* Libro VIII, Definición 22, el concepto pitagórico de ‘plano similar’ o ‘números sólidos’ se describe como sigue: “el plano similar o números sólidos, son aquellos cuyos lados (es decir, factores) son iguales (cuando son tomados), en logoi” (οἱ ἀνάλογον <ἴσας> *ἔχοντες τὰς πλευράς*).

La proposición VI. 5 de *Elementos* se ocupa de triángulos cuyos lados son 'proporcionales', es decir, ‘iguales [cuando se toman] en *logoi’* (*ἐὰν τρίγωνα τὰς πλευρὰς ἀνάλογον <ἴσας> ἔχῃ).* Por otra parte, en las proposiciones tales como *Elementos VIII*. 1, 3, 6 y 7, la frase en griego *ἐὰν ὦσιν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον*… que Thaer traduce como “Hat man beliebig viele Zahlen in geometrische Reihe…” (Daba arbitrariamente muchos números que forman una *progresión geométrica*…), se rinde igualmente bien por la traducción más literal: "dada arbitrariamente muchos números que tomados en *sucesión*, *son iguales en logoi…* ".

Es fácil entender cómo la expresión elíptica *ἀνά λόγον* llegó a existir. Al comparar *logoi*, uno estaba realmente preocupado con establecer si eran o no iguales. De ahí la frase ‘[tomado] en *logoi*’ fue utilizado en su mayor parte, en relación con la palabra ‘igual’. Esto significa que después de un tiempo la palabra *ἴσοι* o *ἴσα*, que expresa la igualdad, podría omitirse ya que estaba implícita, por así decirlo, por el resto de la frase. Así, la frase truncada ‘… [Tomada] en *logoi*’ llegó a tener el significado *‘igual* [cuando se toma] en *logoi*’. El hecho de que *ἀνά λόγον* pronto llegó a ser escrita como una palabra independiente es evidencia para la tesis de que esta expresión elíptica se convirtió en una nueva palabra con su propio significado. La nueva palabra, por supuesto, era el adverbio *ἀνάλογον* (‘*igual* [cuando se toma] en *logoi’*). Fue solo después de que este adverbio había sido aceptado en el lenguaje matemático, que era posible derivar el sustantivo *ἀναλογία* de ella. *ἀναλογία* fue la propiedad matemática que poseen los números o cantidades que eran *ἀνάλογον*. En otras palabras, *ἀναλογία* era ‘guardar la misma razón’.

[103] Por ejemplo, Definición VI. 1 y la Proposición VI. 6.

No podemos estar seguros de cuándo los matemáticos acuñaron el término técnico *ἀνάλογον* ([tomar] en *logoi*) ni sobre cuándo este adverbio dio lugar al sustantivo *ἀναλογία* (guardar la misma razón), en ninguno de los textos matemáticos que han sobrevivido de este período. Sin embargo, estos avances sin duda tuvieron lugar antes de la época de Platón. A partir de su tiempo la expresión arcaica *ἀνά λόγον* (igual [cuando se toma] en *logoi*) prácticamente no fue utilizada más, excepto por Euclides. Por otro lado, incluso Platón ya no utiliza *ἀναλογία* con solo su significado matemático. A pesar de que fue originalmente un término puramente matemático, este aparece ya en su tiempo, haber sido corriente en el habla culta. La impresión dejada por los escritos de Aristóteles es de *ἀναλογία* como un término filosófico cuyos orígenes matemáticos parecen haber sido casi completamente olvidados.

Hay, sin embargo, algunos indicios de que la palabra arcaica *ἀνάλογον* sobrevivió como un término matemático y que su significado posteriormente se sometió a algunos cambios. Estos serán discutidos en el capítulo siguiente.

2.16 LA HISTORIA POSTERIOR DE *ἀνάλογον* COMO TÉRMINO MATEMÁTICO.

En el capítulo anterior hemos mostrado cómo la frase *ἀνά λόγον* (una abreviatura de *ἀνά λόγον ἴσοι*) llegó a tener el significado '*igual* [cuando son tomados] en *logoi* '(o, dicho de manera más simple, *'en la misma razón'*), y nosotros establecimos que probablemente adquirió este significado durante el período arcaico. El texto de *Elementos* de Euclides está lleno de ejemplos que se podrían utilizar para ilustrar este significado particular de la frase. Sin embargo, hay dos observaciones que deben ser realizadas con respecto a esto; la primera es que, en la época clásica, los matemáticos griegos ya no utilizan la palabra *ἀνάλογον* cuando querían decir 'en la misma razón', y la segunda es que en ese momento la misma palabra (en su papel como un término matemático) había sido objeto de un ligero cambio de significado. Comencemos por discutir el segundo punto.

Se enfatizó en el capítulo anterior que la expresión elíptica *ἀνάλογον* (*igual* [cuando se toma] en *logoi*) se refirió originalmente a un grupo de al menos cuatro números o cantidades, que tenía la propiedad de que podría dividirse en parejas cuyos miembros estaban en los mismos logos. Euclides, sin embargo, también utiliza esta palabra en un contexto diferente. Ya hemos dado un ejemplo de este segundo uso, es decir, *Elementos* VI. 12: "Dadas tres rectas dadas, hallar *una cuarta proporcional"* (*τετάρτην ἀνάλογον*).

A partir de las palabras griegas entre paréntesis, es evidente que lo anterior fue escrito en una época donde la palabra *ἀνάλογον* fue vista de una manera un tanto diferente. Nadie ha tenido en cuenta por más tiempo del hecho de que se utilizó (como en Definiciones VII.20 y V.6, por ejemplo) para indicar al menos cuatro números (o cantidades) que eran $ἀνά\ λόγον\ ἴσοι$ (o $ἴσα$): se razonada en cambio que si cuatro números (o cantidades) fueron $ἀνάλογον$, entonces cada uno de ellos tenía que ser $ἀνάλογον$ (a los demás). Este uso debe haber sugerido la idea de que $ἀνάλογον$ (una palabra que no declina) fue un inusual tipo de *sustantivo neutro*.

Así que, además de su significado original, $ἀνάλογον$ vino a denotar lo que podríamos llamar ‘proporcional’. Por este motivo se hizo posible hablar de una $τρίτη\ ἀνάλογον$ o una $μέση\ ἀνάλογον$ [104] y aun de $μέσος\ ἀνάλογον\ αριθμός$ y $μέσος\ ἀνάλογον\ αριθμοί$[105]. Este último significado (que se originó en el período pre-platónico) es por supuesto diferente del arcaico y posterior al mismo. Por otra parte, parece que ha preparado el camino para la creación del adjetivo híbrido $ἀνάλογον$. (Cabe mencionar, sin embargo, que este adjetivo no figuraba en el lenguaje matemático.)

Como podemos ver, en el transcurso del tiempo la palabra $ἀνάλογον$ llegó a tener dos significados en matemáticas. Conservó su significado original de ‘*igual* [cuando se toma] en *logoi’* y también llegó a significar ‘proporcional’. Esta ambigüedad parece haber sido en parte responsable del hecho de que más tarde llegó a ser más habitual emplear una expresión diferente de la noción de estar ‘en la misma razón’. Me refiero a $ὁ\ αὐτός\ λόγον$ (‘los mismos logos’ o ‘la misma razón’), que fue la frase que se usa con mayor frecuencia en las matemáticas griegas para expresar que guardan la misma razón. En realidad, Euclides y los matemáticos posteriores emplearon esta expresión de dos formas ligeramente diferentes. Dijeron que los pares de números (o cantidades) ‘*tenían* la misma razón’ ($τὸν\ αὐτός\ λόγον\ ἔχουσι$ – Véase, por ejemplo, *Elementos* VII.17) y también que ‘*estaban* en la misma razón’ ($ἐν\ τῷ\ αὐτῷ\ λόγῳ\ εἰσίν$ – consulte *Elementos* VII.14).

[Por lo tanto, si la frase $ὁ\ αὐτός\ λόγον$ se incluye, los matemáticos tenían a su disposición tres formas de expresar el concepto de estar 'estar la misma razón’. Éstas eran:

(1) La expresión arcaica $ἀνάλογον$ – ‘igual [cuando se toma] en *logoi*'.
(2) La cláusula adverbial de la comparación y $ὡς… οὕτως$ - tal como se utiliza, por ejemplo, en *Elementos* VII.11 (ver p. 104).
(3) La frase $ὁ\ αὐτός\ λόγον$.

[104] Ver las Proposiciones VI. 11 y 13.
[105] *Elements*, VIII. 11 y 12.

Ahora bien, el término que se utiliza con mayor frecuencia para “en la misma razón” en *Elementos* V (un libro que se supone que han sido en su mayoría la obra de *Eudoxo*) parece ser (la misma razón) en lugar del arcaico ἀνάλογον (iguales en *logoi*). Es cierto que la palabra ἀνάλογον también se presenta en este libro, pero solo aparece en la proposición que puede ser clasificada como el trabajo de los matemáticos anteriores o como nuevas formulaciones de los resultados anteriores. Esto se puede ver a partir de lo siguiente.

En la llamada definición fundamental, Eudoxo (V.5, citado anteriormente en la p. 99), ‘guardar la misma razón’, se define como ὁ αὑτός λόγον. Sin embargo, esta definición es seguida inmediatamente por Definición V.6: ‘Las magnitudes que tienen la misma razón (τὸν αὑτὸν ἔχοντα λόγον) son llamadas ἀνάλογον (iguales en *logoi*).’

Este último no es claramente una definición matemática adecuada. Solo sirve para introducir una forma alternativa de describir el concepto (ὁ αὑτός λόγον) definido previamente. Sin embargo, estas dos definiciones, cuando se lee en el orden en que se producen, nos llevan a esperar que tanto ὁ αὑτός λόγον y ἀνάλογον será utilizado para referirse a ‘guardar la misma razón’ en el Libro V. Veamos con qué frecuencia se utiliza cada una de estas frases.

En total, la noción de ‘estar en la misma razón’ se encuentra en *diecisiete* de las proposiciones en libro V. En doce de estas (V.4, 7, 9, 11, 13, 14, 15, 20, 21, 22, 23 y 24) se refieren a través la frase ὁ αὑτός λόγον. Por otro lado, ἀνάλογον se utiliza en solo *cinco* de estas proposiciones (V.12, 16, 17, 18 y 25). Esta estadística es por sí mismo suficiente para sugerir la conjetura de que las proposiciones en el Libro V fueron escritas en una época cuando el término usual para ‘en la misma razón’ ya no era ἀνάλογον, sino ὁ αὑτός λόγον. En al menos dos casos, sin embargo, podemos ir más allá y explicar por qué se utilizó la expresión arcaica ἀνάλογον con este significado en el Libro V. Antes de discutir esto en mayor detalle, tengo que mencionar una interesante peculiaridad del Libro V, a la se le ha prestado poca atención hasta ahora.

La proposición V.19 de *Elementos* establece que: “Si, un todo es a otro todo, como una parte sustraída es a una parte sustraída, el residuo será al residuo como el todo es al todo”.

Si lo anterior se lee en el original griego, entonces uno se asombra al descubrir que es palabra a palabra lo mismo que un teorema que se encuentran en el Libro VII, a saber, la Proposición VII.11. Las dos versiones difieren solo en que los adjetivos $ἀφαιρεθείς$ y $λοιπός$, cuya forma es neutra en el Libro V, se ponen en masculino en el Libro VII. Esta diferencia, por supuesto, surge simplemente del hecho de que "número" en griego es un sustantivo masculino (ό $ἀριθμός$), mientras que 'magnitud' es neutro ($τὸ$ $μέγεθος$)[106]. La proposición del Libro V se aplica a 'magnitudes' arbitrarias; en el Libro VII, sin embargo, se formula solo para 'números'. La diferencia de género también revela cuál de las dos versiones es la primera.

No hay duda de que la proposición inicialmente podría formularse solo para los números, ya que está en el Libro VII. (Aparte de esto, hay otras consideraciones que han llevado a los estudiosos a conjeturar que las proposiciones en el Libro VII anteceden las de libro V[107].) Solo después de la teoría de las proporciones se ha extendido para incluir también magnitudes inconmensurables, podría esta misma proposición (con solo un ligero cambio gramatical en su formulación) ser incorporada en el Libro V. Por supuesto, cuando esto sucedió también se requirió una nueva prueba. La anterior, que se tenía para el caso de los 'números', no era válido para 'magnitudes' arbitrarias. Por lo tanto, desde un punto de vista matemático la Proposición V.19 es completamente diferente de la VII.11, a pesar de que parece ser simplemente una variante lingüística menor de esta última.

En mi opinión, lo que acabamos de aprender de la comparación de estas dos proposiciones (V.19 y VII.11) también nos proporciona una explicación de por qué se utiliza el término arcaico $ἀνάλογον$ para la noción de estar 'en la misma razón' en alguna de las proposiciones en el Libro V. Veamos más de cerca las siguientes dos proposiciones:

V.12: "Si cualquier número de magnitudes son proporcionales ($ἀνάλογον$), como uno de los antecedentes es a uno de los consecuentes, así serán todos los antecedentes a todos los consecuentes"

V.16: "Si cuatro magnitudes son proporcionales ($ἀνάλογον$), lo también serán proporcionales por alternancia ($καὶ$ $ἐναλλὰξ$ $ἀνάλογον$ $ἔσται$)" [Es decir, si $a: b = c: d$, a continuación, $a: c = b: d$]

[106] Heath (*Elementos* de Euclides, vol. 2, p. 312) hace el mismo punto.
[107] BL van der Waerden, Erwachende Wissenschaft , pp. 182ff.

Si limitamos nuestra atención a la declaración de estas dos proposiciones, a continuación, se les ve reaparecer en el Libro VII formulada casi palabra a palabra de la misma manera. La proposición correspondiente a V.12 es:

VII.12: "Si hay tantos números como se quiera en proporción, (*ἀνάλογον),* entonces, así son todos los antecedentes es a los consecuentes, así son todos los antecedentes a todos los consecuentes". Y tenemos que corresponde a V.16:

VII.13: "Si cuatro números son proporcionales (*ἀνάλογον*), también serán proporcionales por alternancia (*καὶ ἐναλλὰξ ἀνάλογον ἔσονται*)."

Como podemos ver, las Proposiciones 12 y 13 en el Libro VII se aplican solo a los números, mientras que los correspondientes (12 y 16) en el Libro V se formulan para magnitudes arbitrarias. Sin duda estas proposiciones originalmente podrían afirmarse y se demostró solo para números, se generaliza posteriormente de manera que se aplicará a magnitudes también. Cuando se modificaron, sin embargo, su redacción se mantuvo sin cambios, excepto que 'número' (*ἀριθμός*) fue sustituido en todo momento por el concepto recién definido de 'magnitud' (*μέγεθος*).

Es inmediatamente evidente a partir de esto, por qué se utiliza el término arcaico *ἀνάλογον* en V.12 y V.16 para expresar 'en la misma razón'. Es una reliquia de las versiones anteriores (VII.12 y 13) de estas proposiciones. Más aún, es precisamente por el uso temprano de esta terminología que la llamada definición de Eudoxo de proporcionalidad (V.5), que emplea la frase *ό αὺτός λόγον*, tuvo que ser complementada por otra (impropia) (V.6: "Las magnitudes que tienen la misma razón se llaman *ἀνάλογον*").

No es solo en el Libro V, sin embargo, que el *ό αὺτός λόγον* aparece con más frecuencia que el arcaico *ἀνάλογον*. Esto también es cierto en el Libro VII, a pesar de que las proposiciones en este último libro son probablemente de una fecha anterior a los de la primera. Es interesante que *ἀνάλογον* (con el significado 'en la misma razón') aparezca en dos de las definiciones (21 y 22) del Libro VII, mientras que *ό αὺτός λόγον*, una frase de origen más reciente, no aparece en ninguna de ellas. (Este hecho es un indicio más de la antigüedad de estas definiciones.) Sin embargo, hay únicamente tres proposiciones (VII.12, 13 y 19) en este libro que mencionan *ἀνάλογον* (igual [cuando se toma] en logoi), en oposición a seis (VII.14, 17, 18, 20, 21 y 22) en el que *ό αὺτός λόγον* aparece. Así, en todo el texto de Euclides, la expresión *ἀνάλογον* (en el sentido de 'en la misma razón') aparece con menos frecuencia que la frase *ό αὺτός λόγον* que tiene el mismo significado.

2.17 CORTES DEL CANON Y MEDIAS MUSICALES

En los últimos cinco capítulos (2.12-2.16) nuestra investigación histórica de los términos matemáticos ἀνάλογον y ἀναλογία se ha limitado a las cuestiones lingüísticas. Debido a esto, todavía no hemos considerado cómo fue que los matemáticos formaron λόγοι (o razones) de pares de números, ni por qué se comparan los números '[tomados] en *logoi*'. Para formular estas preguntas de una manera más concreta, debemos reanudar nuestra discusión de temas musicales.

Aunque ya hemos dedicado un capítulo a un relato de los cálculos (adición y sustracción de longitudes) que se realizaron en el canon, sin embargo, no se ha mencionado el nombre griego para estas *operaciones*. Los pitagóricos las llamaban *los cortes del canon*. Hay, por ejemplo, un pasaje en *la teoría de la armonía* de Tolomeo[108] en la que esboza el procedimiento seguido en algunos experimentos que realizó en el campo de la música. Como sigue:

> "Ellos no obtienen las divisiones (de la cuerda – τὰς κατατομάς) por cálculo, sino por el estiramiento de la cuerda y luego mueven el pequeño puente hasta que cada una de las notas que se están buscando se escuchan Marcando el corte requerido (σημειοῦνται τὴν τουὴν) en esos lugares, y sin preocuparse de las razones"

Vemos de esta forma que la palabra τουὴν o κατατομὴ (*corte*) se utiliza para describir el resultado de tratar de encontrar qué tan larga se debe mantener una sección de cuerda que no vibra en el monocorde con el fin de producir una consonancia. (Estas pruebas se han discutido más de una vez en los capítulos anteriores). Es evidente que los pitagóricos diferían de los 'experimentadores' en que los primeros tuvieron también razones numéricas, mientras que los segundos de ellos, las ignoraron por completo.

Hablando en sentido figurado, toda la cuerda (en el monocorde) fue '*cortada*' sobre el 'canon', donde el pequeño puente (el ὑπαγωγεύς) finalmente se ubicó, es decir, en el punto de separación de la longitud de la cuerda que se pulsó para producir la segunda nota de la sección que no vibra. Las palabras τομή y κατατομή son sinónimos entre sí. Son términos técnicos de la teoría de la música y fueron utilizados muy comúnmente como tal. También vale la pena señalar que la obra sobreviviente más antigua de los

[108] Die Harmonielehre des Klaudios Ptolemaios, ed. Durante (Berlín 1930) 66.28 ff.

pitagóricos sobre la teoría de la música (el texto de los cuales lleva el nombre de Euclides) se llama $\kappa\alpha\tau\alpha\tau o\mu \grave{\eta}$ o $\kappa\alpha\nu \acute{o}\nu o\varsigma$ o *Sectio Canonis*.

Los *cortes del canon* son especialmente importantes, ya que es claro que estas operaciones deben también haber conducido a las así llamadas 'medias musicales'. Los pitagóricos posteriores trataron con muchos tipos diferentes de media; de éstos, sin embargo, solo hay tres que nos interesan. Se puede mostrar que estos tres eran conocidos en el siglo V antes de Cristo y probablemente incluso antes. Ellas son las medias *aritmética, geométrica* y *armónica* (o *subcontraria*). Antes de examinar más de cerca el texto de la explicación más antigua que ha llegado hasta nosotros, vale la pena recordar el significado de las medias aritméticas y armónicas estaba en el estudio de la música. Se ha escrito que[109]:

> Las medias aritmética y armónica generan la división de un intervalo en subintervalos desiguales. Los subintervalos son los mismos en ambos casos, excepto que se producen en el orden inverso... El ejemplo clásico, mencionado por la mayoría de los autores, es la división de la octava. Los números 12 y 6 se colocan en la razón de $2:1$. Su media aritmética es 9 y su media armónica es 8. El primero divide la octava en cuartas y quintas; el segundo lo divide en quintas y cuartas.

La conexión interesante entre las medias aritmética y armónica se puede entender mejor si el canon con sus doce divisiones se mantiene en mente al leer lo anterior. Una media *aritmética* se obtiene cortando el canon en el número 9, porque esto divide el *diastema* de la octava, la sección de la cuerda entre los números 12 y 6, en dos secciones más cortas, que tienen cada una la misma longitud. Este corte está situado exactamente en el punto medio entre 12 y 6, y por lo tanto es a la misma distancia de cada uno de los dos puntos originales finales del diastema. Sin embargo, las dos longitudes iguales ($12-9$ y $9-6$) inducidas por el corte representan dos intervalos musicales diferentes (razones numéricas). Además, puesto que $\frac{12}{9}<\frac{9}{6}$, los números más grandes forman el intervalo más pequeño ($12:9$, una cuarta) y los números menores forman uno mayor ($9:6$, una quinta). La media armónica, por otra parte, que es la subcontraria de la media aritmética, se obtiene haciendo el corte en el número 8. El hecho de que $\frac{12}{8}>\frac{8}{6}$ significa que en este caso la más larga de las secciones resultantes (aquella entre los números 12 y 8)

[109] A continuación, no es una traducción literal, se toma del documento de van der Waerden, *Hermes 78* (1943), 182.

corresponde a la mayor proporción (una quinta), mientras que la más corta (aquella entre el 8 y 6) corresponde a la más pequeña (una cuarta).

La conexión entre las tres medias es el tema del segundo fragmento de Arquitas, que se cita aquí principalmente debido a la interesante terminología utilizada en ella[110].

αι δέ ἑντι τρῖς τᾷ μουσικᾷ, μία μὲν ἀριθμητικά, δευτέρα δὲ ἁ γεωμετρικά, τρίτα δ'ὑπεναντία, ἃν καλέοντι ἁρμονικάν.

ἀριθμητικὰ μέν, ὅκκα ἔωντι τρεῖς ὅροι κατὰ τὰν τοίαν ὑπεροχὰν ἀνὰ λόγον ᾧ πρᾶτος δευτέρου ὑπερέχει, τούτῳ δεύτερος τρίτου ὑπερέχει. καί ἐν ταύτᾳ τᾷ ἀναλογίᾳ συμπίπτει ἦμεν τὸ τῶν μειζόνων ὅρων διάστημα μεῖον, τὸ δὲ τῶν μειόνων μεῖζον. ἁ γεωμετρικὰ δὲ, ὅκκα ἔωντι οἷος ὁ πρᾶτος ποτὶ τὸν δεύτερον, καὶ ὁ δεύτερος ποτὶ τὸν τρίτον. τούτων δ'οἱ μείζονες ἴσον ποιοῦνται τὸ διάστημα καὶ οἱ μείους.

ἁ δ'ὑπεναντία, ἃν καλοῦμεν ἁρμονικάν, ὅκκα ἔωντι <τοῖοι ᾧ> ὁ πρᾶτος ὅρος ὑπερέχει τοῦ δευτέρου αὐταύτου μέρει, τούτῳ ὁ μέσος τοῦ τρίτου ὑπερέχει τοῦ τρίτου μέρει. γίνεται δ'ἐν ταύτᾳ τᾷ ἀναλογία τὸ τῶν μειζόνων ὅρων διάστημα μεῖζον, τὸ δὲ τῶν μειόνων μεῖον.

En la música hay tres medias: la primera es la aritmética, la segunda es la geométrica y la tercera es la subcontraria, que a veces se llama la armónica.

La media aritmética está presente si los tres números difieren, [cuando se toma] en logoi, de la siguiente manera: el segundo número supera el tercero por tanto como el primero supera el segundo $(12 - 9 = 9 - 6)$. Además, esta igualdad [cuando se toma] en logoi significa que la razón [intervalo] de los números más grandes es la más pequeña, y que la razón de los números menores es la mayor $\left[\frac{12}{9} < \frac{9}{6}\right]$. La media geométrica está presente si el primer número es al segundo, como el segundo es al tercero. En este caso los números mayor y menor tienen la misma razón $[a{:}b = b{:}c,$ donde $a > b > c]$. La media armónica o subcontraria está presente si los números son tales que la cantidad por la cual el primero supera el segundo, expresada como una fracción de la primera, es la misma que la cantidad

110 Diels y Kranz, Fragmente der Vorsokratiker I^8, p. 436. Reidemeister (" Das exakte Denken der Griechen " Hamburgo 1949, p. 27) afirma que este fragmento no es auténtico. En mi opinión, sin embargo, su argumento no es convincente.

por la cual el segundo supera el tercero, cuando se expresa como una fracción de la tercera[111]. En este caso de la igualdad [cuando se toma] en logoi, la razón [intervalo] de los números mayores es el mayor y el de los números menores es el menor $\left[\frac{12}{8} > \frac{8}{6}\right]$.

Como podemos ver, la terminología empleada en este fragmento se extrae de la teoría pitagórica de música. No hay necesidad de entrar en cualquier discusión adicional de los términos $\acute{o}\varrho o\iota$ y $\delta\iota\acute{\alpha}\sigma\tau\eta\mu\alpha$ aquí, pero el uso de $\dot{\alpha}\nu\acute{\alpha}\,\lambda\acute{o}\gamma o\nu$ y $\alpha\nu\alpha\lambda o\gamma\acute{\iota}\alpha$ es digno de mención especial. A pesar de que estas palabras se pueden traducir como '(tomadas) en logoi' y 'la igualdad [cuando se toma] en logoi', están sin duda, siendo usadas en el fragmento citado anteriormente con un significado que difiere de todos los demás que hemos considerado hasta ahora. En este fragmento, los pares de números que van a componer la media aritmética (12, 9 y 9, 6) $\dot{\alpha}\nu\acute{\alpha}\lambda o\gamma o\nu$ son comparados, y la media aritmética en sí ($12 - 9 = 9 - 6$) se dice que están en $\alpha\nu\alpha\lambda o\gamma\acute{\iota}\alpha$. Por lo tanto, este uso sugiere que $\lambda\acute{o}\gamma o\varsigma$ se refiere a la relación entre dos números que se ejemplifica por $12 - 9$ y $9 - 6$.

[Hoy en día consideraríamos '$12 - 9$' y '$9 - 6$' como términos que denotan números (resultantes de la aplicación de una operación a otros números) y no como la expresión de una relación entre dos números. Esta observación se aplica a la palabra 'razón' (y la notación '$a{:}b$') así; aunque se utiliza adecuadamente para referirse a una relación, *la práctica común ahora es hablar de la relación entre dos números, como si fuera en sí mismo un número* (por ejemplo, la notación '$a{:}b = c{:}d$' es evidencia de ello). Por supuesto estos usos, son un reflejo de las ideas modernas acerca de las matemáticas (en particular, sobre la clausura de los números reales bajo las operaciones de resta y división) que sería un error atribuir a los griegos. Por lo tanto, es necesario abandonar la terminología moderna cuando se habla de estos conceptos. La relación referida en el párrafo anterior se denota en inglés por la frase ahora obsoleta 'razón aritmética'.][111a]

[111] Es decir, en el caso de una media armónica significa que la relación entre los tres números (a, b y c) se expresan por la fórmula $\frac{a}{a-b} = \frac{c}{b-c}$. Así, en particular, 8 es la media armónica entre 12 y 6 ya que $\frac{12}{12-8} = 3 = \frac{6}{8-6}$.

Por lo tanto, las conclusiones que extraigo del segundo fragmento de Arquitas son las siguientes. En la teoría de la música, la palabra $\lambda ó\gamma o\varsigma$ originalmente significaba cualquier tipo de '*relación entre dos números*', y no solo la '*razón entre dos números'* como se hizo en geometría. En consecuencia, la palabra $ἀ\nu\alpha\lambda o\gamma ί\alpha$ significa como cualquier tipo de '*igualdad entre pares de números*'[112]. No fue hasta más tarde que $\lambda ό\gamma o\varsigma$ tomó el significado más reducido de aquella relación entre dos números a la que nos referimos como la 'razón' (a: b). Además, este cambio resultó del uso de la palabra en geometría, no en la teoría de la música. El comentario correspondiente vale para $ἀ\nu\alpha\lambda o\gamma ί\alpha$, es decir, que en matemáticas se llegó a tener el significado especial de '*guardar la misma razón*' (a: $b = c$: d) en lugar de referirse en general a los pares de números cuyos miembros llevaban la misma relación entre sí.

Aparte del fragmento de Arquitas que acabamos de considerar, no conozco ningún otro texto antiguo que utilice el término matemático $\lambda ό\gamma o\varsigma$ en este sentido antiguo (es decir, con el significado de 'cualquier tipo de relación entre dos números'). En Euclides, $\lambda ό\gamma o\varsigma$ se utiliza siempre en el sentido de 'razón' (a: b, como nos gustaría escribirlo). No obstante, el propio Aristóteles corrobora mi conclusión de que $ἀ\nu\alpha\lambda o\gamma ί\alpha$ originalmente tenía un significado más amplio en matemáticas. En una ocasión, él escribe que la proporción a: $b = c$: d es aquella que "los matemáticos se refieren como la analogía geométrica"[113], mientras que él comenta en otra ocasión, acerca de la noción de $\mu έ\sigma o\nu$, que "sí diez es mucho y dos es poco, entonces seis ocupa la media…, porque es tanto mayor que uno y es más pequeño que el otro, y esto es la media de acuerdo con la analogia aritmética" ($\tau o ῦ\tau o$ $\delta ὲ$ $\mu έ\sigma o\nu$ $ἐ\sigma\tau ὶ\nu$ $\kappa\alpha\tau ά$ $\tau ὴ\nu$ $ἀ\rho\iota\theta\mu\eta\tau\iota\kappa ὴ\nu$ $ἀ\nu\alpha\lambda o\gamma ί\alpha\nu$)[114].

Así que el significado original de $ἀ\nu\alpha\lambda o\gamma ί\alpha$ de hecho debe haber sido 'identidad de cualquier tipo de relación entre dos números'[115].

2.18 LA CREACIÓN DEL CONCEPTO MATEMÁTICO DE $\lambda ό\gamma o\varsigma$

Nos hemos encontrado con dos significados diferentes del término matemático $\lambda ό\gamma o\varsigma$ que han de distinguirse claramente entre sí:

[111a] Nota del traductor (Szabó).

[112] En Arquitas de hecho también se refiere a la media armónica como analogía en el fragmento citado anteriormente.

[113] Ética a Nicómaco, 1131b, 12-3.

[114] Ibid., 1106a33.

[115] Esta es la razón por la que los pitagóricos posteriores fueron capaces de referirse a la media restante ($\mu\epsilon\sigma ό\tau\eta\tau\epsilon\varsigma$), que no será discutido aquí, como $ἀ\nu\alpha\lambda o\gamma ί\alpha$. Sobre este tema, véase P.-H. Michel, De Pythagore à Euclide, París 1950, pp. 365-411, también el artículo mío aparece en n. 12 supra, p. 102.

(1) En Euclides, y en la literatura matemática generalmente, $\lambda\acute{o}\gamma o\varsigma$ denota la relación que nosotros llamaríamos razón ($a\colon b$).

(2) En el fragmento de Arquitas discutido en el capítulo anterior la palabra $\lambda\acute{o}\gamma o\varsigma$ tenía otro significado. Arquitas, cuando se habla de la media aritmética, compara pares de números $\acute{\alpha}\nu\acute{\alpha}\ \lambda\acute{o}\gamma o\nu$. Por otra parte, se refiere a la media aritmética en sí ($12 - 9 = 9 - 6$), y también a la media armónica (12… 8… 6), como $\acute{\alpha}\nu\alpha\lambda o\gamma\acute{\iota}\alpha$. Por lo tanto, él debe utilizar la palabra $\lambda\acute{o}\gamma o\varsigma$ para denotar cualquier tipo de relación entre dos números.

Mi conjetura es que el primero de estos significados (razón) se obtuvo por un proceso de especialización del segundo, y se basa en el siguiente razonamiento:

(a) En la terminología de la teoría de la música, la palabra para 'razón' era $\delta\iota\acute{\alpha}\sigma\tau\eta\mu\alpha$. La forma en que adquirió este significado se puede describir aproximadamente como sigue. Inicialmente significaba una "línea recta" o "longitud". A continuación, pasó a significar que la sección de cuerda que se mantuvo vibrando' (para producir la segunda nota de una consonancia en el monocorde), y finalmente se usó para describir la 'razón entre (los) dos números' (asociados con los puntos finales de este fragmento de cuerda). Un diastema tenía, por supuesto, dos $\acute{o}\varrho o\iota$ (puntos finales o números). Cuando los diversos cálculos (es decir, cortes) se realizaron por primera vez en el canon, y se deseaba comparar diferentes segmentos de línea contenidos en un intervalo, el término $\lambda\acute{o}\gamma o\varsigma$ se introdujo. Se utilizaba para denotar cualquier par de números que forman los puntos finales de un diastema. No hace falta decir que de acuerdo a este antiguo uso musical (los rastros de los cuales se encuentran en nuestro fragmento de Arquitas) las palabras $\lambda\acute{o}\gamma o\varsigma$ y $\delta\iota\acute{\alpha}\sigma\tau\eta\mu\alpha$ no son sinónimos.

(b) Fue solo cuando la teoría de las proporciones, que inicialmente había sido confinado a la música, comenzó a ser utilizado en la aritmética y la geometría, que el significado de $\lambda\acute{o}\gamma o\varsigma$ cambió de cualquier "relación entre dos números” a “razón”. La decisión de asignar este significado a $\lambda\acute{o}\gamma o\varsigma$ puede haber sido motivada al menos en parte por el hecho de que la ambigüedad del término $\delta\iota\acute{\alpha}\sigma\tau\eta\mu\alpha$ (línea recta y razón) debe haber sido especialmente confuso en la geometría. Era conveniente, por lo tanto, introducir un nombre inequívoco para la 'razón' y reservar $\delta\iota\acute{\alpha}\sigma\tau\eta\mu\alpha$ (al menos en la geometría) para 'línea recta'. Después de que el nuevo significado de $\lambda\acute{o}\gamma o\varsigma$ (como un término matemático) había sido resuelto de una vez por todas, un significado correspondiente se llevó a cabo de forma natural en el significado de ἀναλογία, lo cual en adelante llegó a ser 'guardar la misma razón' o 'proporción'.

2.19 UNA DIGRESIÓN SOBRE LA HISTORIA DE LA PALABRA λόγος

La siguiente pregunta que se presenta es cómo la palabra λόγος adquirió su significado de 'relación entre dos números' y, en particular, 'la razón entre dos números'. Este significado era peculiar en la música y las matemáticas. En el habla cotidiana λόγος solo se utilizó con significados como 'palabra', 'discurso', 'conversación', 'relatos', 'explicación' y 'argumento'. Creo que esta pregunta puede ser respondida solo si se tiene en cuenta lo siguiente:

Ya que κατάλογος significaba una 'enumeración', en la época clásica de la palabra λόγος debe haber tenido entre sus otros significados cotidianos uno como 'número', 'cantidad', una 'serie o totalidad de ciertas cosas que pertenecen juntas'. En Herodoto (III.120), por ejemplo, uno encuentra las palabras: Σὺ γὰρ ἐν ἀνδρῶν λόγῳ – "¿Está usted en las filas (o entre el *número*) de los hombres?" [Es decir, '¿Eres digno de ser considerado como un hombre?'] Del mismo modo escribe en otra ocasión (III.125): ἐν ἀνδραπόδων λόγω ποιεὺμενος – "les añade a la *totalidad* (o el *número*) de sus esclavos". En este uso λόγος parece ser un concepto similar al ἀριθμός. La frase οὖτ ἐν λόγω, οὐτ ἐν ἀριθμώ[116] la cual se cita en el léxico de Pape soporta esta conclusión. En lugar de citar una serie de otros ejemplos, permítanme citar un pasaje de Aristóteles (Ética a Nicómaco, 1131b20), que se ejecuta de la siguiente manera: ἐν ἀγαθοῦ γὰρ λόγω γίγνεται τὸ ἔλαττον κακόν πρὸς το μεῖζον κακόν – "Un mal menor comparado con uno mayor, cuenta como uno bueno (o se cuenta en las *filas* de la bondad)."

Me parece que el significado distintivo de λόγος como un término musical se deriva del uso de la palabra que se discute en el párrafo anterior. Dado que uno de los significados cotidianos de λόγος fue 'una serie de cosas' o 'una *combinación* de varios objetos o números', podría darse el significado técnico de 'una combinación de *solo dos números*' que se relacionan entre sí, es decir, una 'relación entre dos números'. (Por supuesto, esto habría requerido la creación consciente de un nuevo concepto.)

Además, hay una interesante ambigüedad sobre la palabra λόγος como fue utilizada por los pitagóricos. En la música y las matemáticas la usaron para referirse a una 'relación

[116] Ver el texto correspondiente a λόγος

entre dos números' ($a - b$) o (a: b), sin embargo, al mismo tiempo ellos siguieron la práctica filosófica general de usarla para significar 'comprensión', 'pensamiento', o 'razón'. Hay innumerables pasajes de la literatura sobre la teoría de la música, que podría ser citado para mostrar que en algunas ocasiones no es nada fácil de distinguir claramente entre estos dos significados (λόγος como 'razón numérica' y λόγος como 'comprensión' o 'razón'). Esto se aplica para la mayoría de los pasajes que no son difíciles de entender, y cuyo significado es claro y sin ambigüedades. Sin embargo, es difícil, cuando uno los lee, saber si λόγος debe ser traducido como 'razón', 'comprensión', 'reflexión' o 'razón numérica'. De los muchos ejemplos que ilustran esta ambigüedad, quiero mencionar solo dos aquí.

Ya hemos hablado de un pasaje de Tolomeo[117] en el que describe los procedimientos utilizados por algunos de los que llevan a cabo experimentos musicales de la siguiente manera: "Ellos no obtienen las divisiones de la cuerda por *cálculo*, sino por el estiramiento de la cuerda y luego mueven el pequeño puente hasta cada una de las notas que se están buscando y luego se escuchan, etc."

El significado de este pasaje no es problemático en absoluto. Si, en cambio, se lee en el original griego (οὐδ δλως ἔτι τῷ λόγω ποιοῦνται τάς κατατομὰς), entonces no es claro si λόγος se supone que significa 'reflexión', 'comprensión' o 'razón numérica', ya que cualquiera de estos sentidos encajaría en el contexto. (La palabra es traducida por 'cálculo' en nuestra versión en inglés del pasaje.)

Hay un pasaje similar entre los escritos de Aristóxeno, el oponente de los pitagóricos[118]. En este se sostiene que solo nuestros sentidos (en particular, la audición) deben ser llamados a decidir sobre los tonos musicales, ya que solo ellos son competentes en esta materia (ἡ αἴσθηοίς ἐστιν ἡ τουτοῦ κυϱία). Luego pasa a añadir que 'nuestros sentidos no requieren ayuda del logos' (οὐδὲ λόγου δεῖται). Como el contexto muestra, este es otro caso en el que λόγος puede tomarse para significar 'razón numérica', así como 'pensamiento racional'. En el último análisis, Aristóxeno no solo rechaza únicamente al hecho de que los pitagóricos llamaban a la razón (λόγος) en lugar de depender exclusivamente de la percepción sensorial, sino también el hecho de que ellos querían hacer los intervalos musicales, los cuales supuestamente eran solo para ser escuchados, dependientes de las *razones numéricas* (λόγος).

[117] Ver n. 108.
[118] Harm. Stoich, 53.13ff.

Esta ambigüedad en el significado de la palabra $\lambda\acute{o}\gamma o\varsigma$ (relación entre dos números, y el pensamiento racional o razón) fue naturalmente de considerable importancia para los pitagóricos que querían ver la 'racionalidad' del universo en términos de *número*.

2.20 LA APLICACIÓN DE LA TEORÍA DE PROPORCIONES A LA ARITMÉTICA Y LA GEOMETRÍA

La evidencia presentada hasta ahora es suficiente, espero, para mostrar que todos los términos importantes de la teoría de las proporciones tienen sus orígenes en la teoría de la música. Además, hemos visto que la evidencia justifica no solo los términos en sí mismos (como $\delta\iota\acute{\alpha}\sigma\tau\eta\mu\alpha$ o $\lambda\acute{o}\gamma o\varsigma$ y $\acute{o}\varrho o\iota$), sino también los conceptos a los que se refieren. Ya que las matemáticas griegas sin estos términos y conceptos serían inconcebibles, uno se inclinaría primero a pensar que la teoría original de proporciones se refiere exclusivamente a la música y que se aplicó posteriormente a la aritmética y la geometría. Esta conjetura se confirma sobre todo por la existencia de ciertos términos geométricos ('razón doble', 'razón compuesta', 'diferencia entre dos razones', etc.) que solo se pueden explicar, al menos desde un punto de vista lingüístico, por referencia a los cálculos realizados en el canon (véase el capítulo 2.10).

Sin embargo, la aplicación de estos conceptos en la aritmética y la geometría estaba lejos de ser un procedimiento mecánico. Parece más bien, que en un comienzo se hizo en la teoría de la música, y que el desarrollo de lo que entenderíamos por la teoría de las proporciones en realidad tuvo lugar dentro de la aritmética y la geometría después de que los conceptos básicos se habían sido tomados de la teoría musical. De hecho, su aplicación a un nuevo campo provocó algunos cambios en los mismos conceptos. Hasta cierto punto, esto ya debería ser evidente teniendo en cuenta nuestra discusión hasta ahora.

Aunque aquellos pitagóricos que se preocupaban por la teoría de la música llegaron tarde a considerar $\delta\iota\acute{\alpha}\sigma\tau\eta\mu\alpha$ y $\lambda\acute{o}\gamma o\varsigma$ como conceptos equivalentes, el fragmento de Arquitas deja claro que $\lambda\acute{o}\gamma o\varsigma$ no significaba originalmente 'razón geométrica', y por lo tanto $\grave{\alpha}\nu\alpha\lambda o\gamma\acute{\iota}\alpha$ no significaba 'proporción geométrica', sino simplemente 'igualdad [cuando se toman] en *logoi'* (donde *logos* era cierta relación no especificada). Parece que, en general, la *comparación* de las cantidades [tomadas] en *logoi* era mucho menos importante en la teoría de la música que en la aritmética y la geometría. Es cierto que los pares de números (los constituyentes de una media aritmética) se comparan $\grave{\alpha}\nu\acute{\alpha}\,\lambda\acute{o}\gamma o\nu$ por Arquitas, no obstante, la noción de 'igualdad [cuando se toma] en *logoi*' no era de gran importancia (desde el punto de vista de los desarrollos posteriores) hasta que llegaron a ser característicos en la aritmética geométrica de los pitagóricos. Para esto, uno debe mirar la definición pitagórica de los números planos semejantes (*Elementos* VII, Definición 21)

Como se mencionó en la Parte 1, los pitagóricos pensaban que cualquier número, cuando se descomponía en dos factores, podría ser considerado como un número plano. (Por ejemplo, 3 estuvo representado por un rectángulo con lados 1 y 3.) La definición (VII.21) afirma: “Números planos semejantes… (δμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοί) son los que tienen sus lados proporcionales (οί ἀνάλογον <ἴσας> ἔχοντες τάς πλευράς).”

Así 3 y 12, por ejemplo, serían números planos semejantes de acuerdo con esta definición, ya que pueden ser representados por un par de *rectángulos semejantes* con lados (factores) 1, 3 y 2, 6, respectivamente. Es obvio que el *logoi* formado a partir de los lados correspondientes de estos rectángulos son iguales ($1:2 = 3:6$).

Además, cada uno de ellos se compone de un par de segmentos de línea, así como un diastema (un intervalo expresado como una relación numérica) en la teoría de la música fue producido por dos secciones de cuerdas que diferían en longitud. El concepto de ‘igualdad [cuando se toman] en *logoi*’, sin embargo, era mucho más importante en la aritmética geométrica (es decir, en la aritmética plana y números sólidos) que en la teoría de la música. En este último, su uso más importante fue en la formulación de tales resultados, como que los números proporcionales de una quinta eran siempre idénticos, conocimiento el cual no dio lugar a ningún descubrimiento adicional.

Por otro lado, cuando se aplica a los lados correspondientes (factores) de números planos, esta misma noción reveló algo de gran importancia. La relación de *semejanza* entre rectángulos podría caracterizarse en términos del mismo. Por supuesto, incluso antes de la introducción del concepto ἀναλογία, los matemáticos deben haber tenido una idea intuitiva de lo que significaba para dos rectángulos ser semejantes. Sin embargo, fue solo después de que se dieron cuenta que la 'semejanza geométrica' (entre los rectángulos en primera instancia, y luego entre las figuras rectilíneas en general) era precisamente la ‘igualdad [cuando se toma] en *logoi*’ (ἀναλογία) de lados correspondientes, que este concepto se convierta en un ser verdaderamente científico. Así vemos que un concepto que nuestras investigaciones etimológicas nos han llevado a concluir que se originó en el campo de la música contribuyó a una mejor comprensión de semejanza geométrica cuando se aplicó en la aritmética geométrica. La semejanza fue vista como “analogía de lados”. Esto explica cómo la palabra ἀναλογία llegó a ser utilizada por los educados en contextos no matemáticos en el sentido de 'semejanza' (ὁμοιότης). (Como es bien sabido, Aristóteles utiliza con frecuencia la frase τὸ ἀνάλογον con solo este significado[119].)

Cabe enfatizar en este punto que hay otra evidencia indubitable para mostrar que el concepto científico de semejanza geométrica debe haber sido un invento de los griegos. La siguiente definición hace esto evidente:

Elementos VI.1: "las figuras rectilíneas semejantes son aquellas que tienen sus ángulos respectivamente iguales (δμοια οχήματα εὐθὺγραμμά ἑστιν, δσα τάς τε γωνίας ἴσας ἔχει κατά μιαν) y los lados de los ángulos iguales, proporcionales (καὶ τὰς περὶ τάς ἴσας γωνίας πλενρὰς ἀνάλογον es decir ἴσας ἑχει)."

Así semejanza se define como tener ángulos iguales y lados en la misma razón (ἀνάλογον). Esto supone tanto el concepto de 'ángulo', que se desarrolló durante el principio del período Jónico[120], y el de ἀνάλογον, que vino de la teoría pitagórica de música.

La diferencia entre la anterior definición de semejanza de figuras rectilíneas y la definición de los números planos semejantes es inmediatamente evidente. Los números planos fueron siempre considerados como rectángulos en aritmética geométrica. (Los pitagóricos también consideran otros tipos de números planos, como los triangulares y pentagonales, pero éstos nunca se discuten en el relato de la aritmética de Euclides.) En el caso de rectángulos semejantes, no obstante, no hubo necesidad de insistir sobre explicación de la igualdad de sus ángulos, ya que un rectángulo por su propia naturaleza solo tiene ángulos rectos. Además, los lados de estos rectángulos representan siempre números enteros. La teoría musical de proporciones se refería únicamente a los números enteros y nunca a magnitudes inconmensurables; así que tenemos una explicación adicional para facilitar, con la que los conceptos de esta teoría se podrían aplicar en la aritmética geométrica.

Sucedió algo diferente cuando los matemáticos volvieron a la semejanza de figuras rectilíneas en general. Este problema no siempre conducía a técnicas aritméticas simples, que funcionaban tan bien en el caso de los rectángulos. Por supuesto, no era menos cierto que los lados de figuras rectilíneas semejantes estaban en la misma razón que estaban los

[119] Metafísica, N. 6.1093b17ff. Para ἀναλογία en el sentido de la ομοιότης, consulte Philodemus: On Methods of Inference, A Study of Ancient Empiricism, PH Lacy y EA Lacy, Filadelfia de 1941. Del mismo modo, por Alexander Aphrodisiensis (vol 2 de Gommentaria in Aristotelem Gracea ed M. . . wallies, Berlín 1892) p. 545, IFF , explica ἀνάλογον como δμοιον. En esta última, ver mi artículo aparece en n. 8 anteriormente.

[120] O. Becker, Grundlagen der Mathematik en geschichtlicher Entwicklung, Freiburgo - Múnich 1954, p. 27.

lados (factores) de números planos semejantes. Sin embargo, a menudo era imposible probar esto rigurosamente (en el caso de triángulos, por ejemplo) siempre que la teoría de las proporciones (como en la aritmética y la teoría de la música) aplica solo a los números y no a magnitudes inconmensurables también. Era conveniente, por lo tanto, basar la semejanza de figuras rectilíneas en primer lugar de la igualdad de sus ángulos. El hecho de que los lados correspondientes sean la misma razón salió casi como una consecuencia.

Mi conjetura es que los conceptos de la teoría musical de proporciones se aplicaron en primer lugar en la aritmética. Su aplicación se vio facilitada por el hecho de que los números de la aritmética, al igual que en la teoría de la música, estuvieron representados por líneas rectas. (Por lo tanto, el producto de dos números era un rectángulo, y el producto de tres factores era un sólido.) Además, la aplicación de esta teoría a la aritmética geométrica contribuyó a la comprensión del problema de la semejanza geométrica, y este problema a su vez pronto dio lugar al problema de la inconmensurabilidad lineal. Incluso creo que la teoría de la música preparó el camino para el descubrimiento de la inconmensurabilidad lineal. Este es el punto que quiero abordar en el próximo capítulo.

2.21 LA MEDIA PROPORCIONAL EN LA MÚSICA, LA ARITMÉTICA Y LA GEOMETRÍA

En un capítulo anterior (véase p. 164) discutimos un fragmento de Arquitas que trata con las tres medias en la música, y se señaló la importancia de dos de ellas (la aritmética y la armónica) para la teoría de la música. [Como se ha señalado, estas dos medias efectúan la división de un intervalo musical en subintervalos desiguales, los subintervalos siendo el mismo en ambos casos, excepto que se producen en el orden inverso. El ejemplo clásico es la división de una octava ($12{:}\,6$) en una cuarta y una quinta ($12{:}\,9$ y $9{:}\,6$) por la media aritmética, y en una quinta y una cuarta ($12{:}\,8$ y $8{:}\,6$) por la armónica.] La llamada media geométrica se encuentra entre estos dos, pero el papel que jugó es menos claro.

De acuerdo con Arquitas, la media geométrica es el 'punto final' ($\acute{o}\varrho o\iota$) entre otros dos 'puntos finales' ("números") que divide el intervalo original (por ejemplo $a{:}\,c$) en dos *subintervalos iguales* (es decir, de tal manera que $a{:}\,b = b{:}\,c$). En el caso de una octava, la media geométrica sería el número x que satisface la ecuación $12{:}\,x = x{:}\,6$. Aún sí las fracciones están permitidas, así como los números enteros, es evidente que no hay tal 'número'. (Ciertamente no hay ninguno en el sentido de la definición de Euclides de número.) *Una octava no se puede dividir en dos subintervalos iguales por un número*. Esto no fue solo una dificultad práctica para los pitagóricos, sino también una teórica. De acuerdo con su teoría, cualquier intervalo musical se podría expresar como una razón de números enteros.

Es evidente que lo anterior se aplica para cuartas $(4:3)$ y quintas $(3:2)$ también; como con la octava, no hay un número que los divide en subintervalos iguales, no existe una media geométrica (numérica) entre sus números proporcionales.

Esto nos lleva a la pregunta de por qué Arquitas cuenta la media geométrica como un ser musical, a pesar de que tal media no puede existir en la música. Por lo que puedo ver, no hay luces sobre esta cuestión por el contexto en el que aparecen sus palabras. De ahí que cualquier respuesta a ella solo puede ser conjetural. Mi opinión es que se puede dar una explicación en los términos siguientes:

Está claro que la *media geométrica* no recibió su nombre hasta después de que los matemáticos no aprendieron a construirla de una manera geométrica. Originalmente se trataba de una fuente de perplejidad considerable a aquellos interesados en la teoría de la música. Lo único que tiene en común con las auténticas 'medias musicales' (es decir, con las aritméticas y las armónicas) es que también surgió por primera vez en la teoría de la música.

Tenemos, de hecho, una prueba definitiva de que los pitagóricos intentaron dividir intervalos musicales en subintervalos iguales. En otras palabras, ellos trataron de encontrar las medias geométricas de estos intervalos y llegaron a la conclusión de que esto no se podía hacer de forma aritmética. Nuestra prueba de ello es la Proposición 3 de la *Sectio Canonis*, que establece[121]:

"Ningún número media proporcional se puede encontrar entre dos números en una razón *superparticularis*."

Para comprender esta afirmación, hay que saber para los griegos que significaba una 'razón superparticularis' ($\grave{\varepsilon}\pi\iota\mu\acute{o}\varrho\iota o\nu\ \delta\iota\acute{\alpha}\sigma\tau\eta\mu\alpha$) lo que podríamos denominar por "$(n+1):n$". Este tipo de razón se ejemplifica no solo para las cuartas $(4:3)$ y quintas $(3:2)$, sino también para las octavas $(2:1)$.

[121] La mayoría de los estudiosos desde los tiempos de Tannerys han atribuido esta proposición a Arquitas (véase, por ejemplo, van der Waerden, Hermes 78 (1943), 169). Nuestra fuente, Boethius (De Musica . III 11), se opone a "una prueba de Arquitas" cuando se habla de la proposición en cuestión. No creo que esto por sí mismo sea una razón suficiente para atribuir toda la proposición a Arquitas. En mi opinión, *Sectio Canonis* 3 fue formulada mucho antes de su tiempo.

La proposición establece, por consiguiente, que no hay media geométrica (numérica) entre dos números en una razón superparticularis. (Hay que tener en cuenta que todos los intervalos musicales importantes son de hecho ejemplos de este tipo de razón.) Por otra parte, los griegos eran muy conscientes del hecho de que este resultado era siempre verdad, no importa que los múltiplos de las razones superparticularis fueran usados para probarlo.

Esto es mucho más evidente desde la prueba de la proposición en la *Sectio Canonis* y desde las otras proposiciones que se asumen en la prueba[122].

Su falta de éxito con este problema en la teoría de la música llevó a los pitagóricos a una postura en forma más general. Ellos se preguntaron en qué condiciones era posible encontrar entre dos números un tercero que tenga la propiedad de tener la misma razón con ambos; es decir, que quería saber si existía un número media proporcional entre dos números. En el Libro VIII de *Elementos* de Euclides hay toda una serie de proposiciones que tratan simplemente esta pregunta. Recordemos algunos de ellos aquí:

VIII.11: "Entre dos números cuadrados hay un número media proporcional, etc."

VIII.12: "Entre dos números cúbicos hay dos números medias proporcionales, etc."

VIII.18: "Entre dos números planos semejantes hay un número media proporcional, etc."

VIII.20: "Si un número media proporcional está entre dos números, los números serán números planos semejantes."

No hay que confirmar la antigüedad de estas proposiciones aritméticas, de hecho, son anteriores al descubrimiento de la inconmensurabilidad lineal. Sin embargo, ya que es posible probarlas sin tal conocimiento[123], parece razonable considerarlos como haber hallado el camino para el descubrimiento de cómo construir una media proporcional de dos líneas rectas en una forma geométrica (ver *Elementos* VI.13).

[122] En lo que se refiere a estas otras proposiciones, no puedo sino estar de acuerdo con el análisis de van der Waerden (véase la nota anterior). Sin embargo, me gustaría disociarme de la opinión de que estas se deben al mismo Arquitas.

[123] Por cierto, estoy de acuerdo con la observación de van der Waerden (ver Zur Geschichte der griechischen Matematik, p. 224) en el sentido de que los problemas en el Libro VIII están muy estrechamente relacionados con la teoría de los irracionales. Estos problemas realmente prepararon el camino para la teoría de los irracionales. Esta es una razón más por la cual el libro VIII no podría haber sido escrito durante la época de Arquitas. La teoría de los irracionales, como podemos ver en el concepto dynamis, se remonta mucho antes que esto.

Por lo tanto, un problema insoluble en la teoría de la música (dividir el intervalo asociado con una consonancia en dos subintervalos iguales o, en otras palabras, encontrar una media geométrica numérica entre los dos números asociados a una consonancia) puede haber conducido, por vía de la aritmética, primero al problema de semejanza geométrica (para las figuras rectilíneas) y luego a la construcción geométrica de una media proporcional a cualquiera para cualquier par de líneas rectas. En un sentido, sin embargo, la última asume un conocimiento de la inconmensurabilidad lineal. Para la media proporcional entre dos líneas rectas cuyas longitudes no son números planos semejantes, es en sí una línea recta inconmensurable en longitud (véase la Parte 1 del presente trabajo).

2.22 LA CONSTRUCCIÓN DE LA MEDIA PROPORCIONAL

La construcción de una media proporcional para dos segmentos de línea dados se discute por Euclides en la Proposición VI.13 de *Elementos*. Sabemos que Hipócrates de Quíos, el famoso geómetra del Siglo V, ya debe haber estado familiarizado con esta[124]. Los antiguos, sin embargo, no nos dejaron ninguna información sobre la edad de la proposición (VI.13), o acerca de los pasos que llevó al descubrimiento de esta construcción. Por tanto, el siguiente intento de reconstruir estos hechos podría ser rechazado por ser considerado desde el principio como tan solo una conjetura. Sin embargo, me parece que todavía vale la pena hacerlo, porque el objetivo de estudiar la historia de las matemáticas es tratar de entender cómo el desarrollo de la ciencia ha llevado de un problema a otro.

La primera cosa a recordar sobre la Proposición VI.13 es que los triángulos rectángulos semejantes se utilizan en la prueba. El problema de la media proporcional es, por supuesto inseparable del problema de la semejanza para las figuras geométricas. Fue una investigación más completa de semejanza geométrica la cual proporciona la solución al problema anterior. Además, su experiencia con la aritmética debe haber sugerido a los griegos que esta era la manera correcta de acercarse a ella. Ellos ya sabían que existía un número media proporcional entre dos números planos semejantes, y también fueron capaces de calcularlo (ver pp. 51-3).

Parece probable que ellos estaban familiarizados con un caso especial de la construcción antes de poder llevarlo a cabo en toda su generalidad (como se hace en *Elementos* VI.13). Un caso en particular, me parece especialmente simple y obvio.

[124] Ver n. 37 de la Parte 1.

Recordemos que el final de la Parte 1 de este libro, nos llevó a conjeturar que el problema de la duplicación de un cuadrado era originalmente equivalente al problema de encontrar una media proporcional entre un número y un segundo que era el doble. De hecho, cuando los griegos descubrieron que la diagonal de un cuadrado era el segmento de línea necesario para construir un segundo cuadrado que tenía el doble del área del original, ellos deben al mismo tiempo haberse dado cuenta de que representaba la media proporcional entre un lado del cuadrado y una línea que era dos veces más que este lado. El primer hecho habría sido visualmente evidente para ellos (ver p. 93), mientras que ellos pueden haber llegado a la convicción de la segunda de la siguiente manera:

(a) Debe haber sido evidente para cualquiera que dos cuadrados tenían que ser semejantes. (Esto debería haber sido así, ya sea que ellos hubieran tomado en cuenta o no el hecho de que si se le asigna un número, como una longitud, a los lados del cuadrado original, este no se podría haber hecho con los lados del segundo cuadrado.) Por otra parte, debe haber sido igualmente obvio que este también era el caso de los triángulos rectángulos obtenidos por reducir a la mitad los dos cuadrados. (Para empezar, por supuesto, la evidencia de esto fue solo visual e intuitiva.)

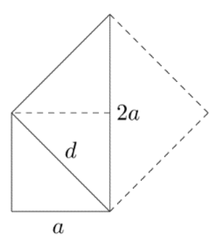


Fig. 5

(b) Ahora era un asunto fácil formar un *logos* de los lados correspondientes de los dos cuadrados y otro de sus diagonales, tal como se hizo en el caso de los números planos semejantes. De ahí que los primeros logos estuvieron integrados por los lados más cortos de los dos triángulos ($a: d$), mientras que la segunda se compone de sus hipotenusas ($d: 2a$). Estos logoi eran evidentemente iguales ($a: d = d: 2a$), al igual que los formados a partir de los lados correspondientes de "números planos semejantes".

De esta forma la diagonal del cuadrado original, mostró claramente ser la media proporcional requerida. [Estas consideraciones también proporcionan una solución para el equivalente geométrico de un problema insoluble a partir de la teoría de la música. Por supuesto, estoy haciendo referencia al problema de la reducción a la mitad de la octava

$(2:1)$, es decir, de encontrar la media proporcional entre dos longitudes de cuerda que producen una octava]

El argumento esbozado anteriormente no es válido a menos que los conceptos de $\lambda\acute{o}\gamma o\varsigma$ y $\grave{\alpha}\nu\alpha\lambda o\gamma\acute{\iota}\alpha$ se tomen como aplicables a las magnitudes, así como a los números. Por lo tanto, tienen que ser entendidos en el sentido de la llamada definición de Eudoxo que se encuentra al principio del Libro V de *Elementos*. Es una cuestión abierta si las definiciones de estos conceptos fueron extendidas en la misma época, en que se advirtió de que la diagonal de un cuadrado era también una media proporcional, o si esto no tuvo lugar tiempo después.

En cualquier caso, la manera en que los matemáticos descubrieron que la diagonal de un cuadrado era la media proporcional entre uno de sus lados y una línea del doble de su longitud, también les enseñó mucho acerca de cómo construir una media proporcional de dos segmentos de líneas arbitrarias.

(1) Lo primero que debe haber sido claro para ellos fue que la forma más simple de obtener una media proporcional era usar triángulos rectángulos semejantes.

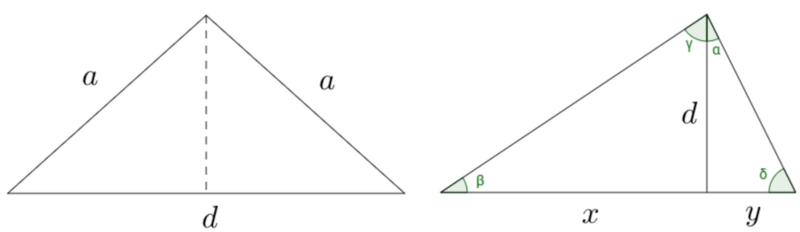


Fig. 6

(2) Ellos también debieron haber advertido que la línea recta en cuestión era precisamente la media proporcional requerida, ya que jugó dos papeles diferentes en lo que se refiere a los dos triángulos. (En la Fig. 5 el segmento de línea d es adyacente al ángulo recto del triángulo más grande, mientras forma la hipotenusa del triángulo más pequeño.)

La pregunta ahora era cómo utilizar esta información; cómo, por ejemplo, hacían ellos para construir un par de triángulos rectángulos semejantes.

Si ellos comenzaron con un ángulo recto de los triángulos isósceles (la mitad de un cuadrado), a continuación, era fácil de responder esta última pregunta. Dos triángulos rectángulos isósceles semejantes (de hecho, dos congruentes), se pueden conseguir a partir de un triángulo, dejando caer una perpendicular desde el ángulo recto a la hipotenusa. Debió de ser inmediatamente evidente que los triángulos obtenidos de este modo fueron semejantes; pero por desgracia no eran adecuados para el propósito que nos ocupa. Sin embargo, el caso especial en el cual la semejanza coincide con la congruencia puede haber sido útil para señalar la manera del caso más general.

Si (como en la Fig. 6) una perpendicular se deja caer desde el ángulo recto de un triángulo rectángulo no isósceles, dos triángulos rectángulos se obtienen de nuevo. Los griegos no se debieron demorar en darse cuenta de que estos también eran semejantes, ya que sus correspondientes ángulos eran iguales ($\alpha = \beta$ y $\gamma = \delta$). La perpendicular d (véase la Fig. 6) juega un doble papel del tipo discutido arriba en (2). Es el más largo de los dos lados adyacentes en el triángulo más pequeño y el más corto de los dos en el más grande. Ellos podían ahora obtener una media proporcional ($x{:}\, d = d{:}\, y$) entre las longitudes x e y simplemente formando *logoi* de los correspondientes lados adyacentes (comparar el porisma en *Elementos* VI.8).

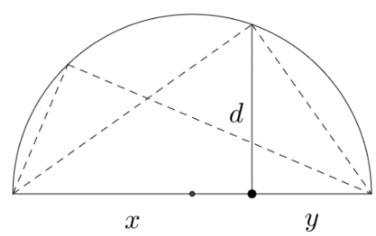


Fig. 7

La construcción de la media proporcional en *Elementos* VI.13 no es realmente nada más que el procedimiento esbozado arriba a la inversa. En el párrafo anterior fue dado un triángulo rectángulo, y una perpendicular fue trazada desde el ángulo recto a la hipotenusa. Esto significaba que la perpendicular en sí era la media proporcional entre los dos segmentos en los que se divide la hipotenusa. Supongamos que en lugar se nos da dos segmentos de línea (x e y) y queremos encontrar la media proporcional entre ellos. Nuestro primer paso sería construir un triángulo rectángulo del tipo dado en la Fig. 7.

Los dos segmentos de línea juntos ($x + y$) forman su hipotenusa. (Esto es obvio a partir de la discusión anterior.) Si consideramos la longitud $x + y$ como el diámetro de un círculo, infinitos triángulos rectángulos se pueden construir sobre él, por el teorema de Thales[125] que establece que el ángulo en un semicírculo es siempre recto.

Lo que se necesita, sin embargo, es un triángulo rectángulo en el que la perpendicular desde el ángulo recto con la hipotenusa divida a esta última en dos segmentos, una de longitud x y el otro de longitud y. Tenemos que elaborar (en el semicírculo superior, por ejemplo) una línea d perpendicular a la hipotenusa, que se cruza en el punto donde x e y se encuentran. El punto en el que d interseca la circunferencia será entonces el tercer vértice del triángulo que se requiere, y la propia d será la media proporcional entre x e y. Vemos, por lo tanto, que esta construcción puede llevarse a cabo utilizando solo algunos hechos muy elementales sobre semejanza junto con un teorema de Thales perteneciente al ángulo en un semicírculo.

Como en el caso anterior, una definición de 'estar en la misma razón' ($\acute{\alpha}\nu\alpha\lambda o\gamma\acute{\iota}\alpha$ o ὸ $\alpha\upsilon\tau\acute{o}\nu$ $\lambda\acute{o}\gamma o\nu$) que se aplica a las *cantidades generales* es indispensable para una prueba rigurosa de lo anteriores. En mi opinión, sin embargo, no tenemos conocimiento suficiente en la actualidad para decidir si esa definición estaba disponible para quienes inventaron esta construcción, o si se basaron en evidencia intuitiva.

2.23 CONCLUSIÓN

Al final de la Parte 1 de este libro hemos llegado a la conclusión de que la existencia de la inconmensurabilidad lineal puede haber sido descubierta en el curso de los intentos de encontrar una *media proporcional* entre dos números (expresado como líneas rectas) o cantidades. Desde un punto de vista histórico, los griegos originalmente pensaron en el problema de la irracionalidad como perteneciente a *la teoría de las proporciones*. Espero que la Parte 2 haya mostrado como la teoría de proporciones, cuyo desarrollo inicial se llevó a cabo en la teoría de Pitagórica de la música, de hecho, puede haber conducido a través de la aritmética al problema de semejanza geométrica y de allí a un problema de la *inconmensurabilidad lineal*.

Hay una cosa, sin embargo, que no debe ser olvidada. Tenemos hasta ahora confinada nuestra investigación a la forma en que los matemáticos griegos pueden haber estado a punto de descubrir que las líneas rectas linealmente inconmensurables hayan existido. Nosotros, como todavía no hemos mostrado cómo llegaron a la etapa de ser capaces de probar la existencia de la inconmensurabilidad lineal de manera rigurosa.

[125] Ver B. L. van der Waerden, *Erwachende Wissenschaft*, p. 145

Aunque podemos suponer que sabían cómo duplicar el área de un cuadrado por medio de su diagonal, e incluso de que estaban convencidos por la *evidencia intuitiva* de que la diagonal, por esta razón sería la media proporcional entre un lado y una línea del doble de su longitud, se necesita más para establecer que el lado y la diagonal de un cuadrado son inconmensurables en longitud.

Una observación similar se aplica a la construcción de la media proporcional a dos segmentos de líneas arbitrarias (*Elementos* VI. 13), así como a la creación del concepto *dynamis*. Por ejemplo, los griegos bien pueden haber sabido que un rectángulo de 3 unidades de ancho y 5 unidades de largo podrían transformarse en un cuadrado de la misma área con la construcción de la media proporcional a dos de sus lados. Además, su conocimiento de la aritmética puede muy bien haber les dicho que un número medio proporcional existía solo entre dos números planos semejantes (ver *Elementos* VIII.18 y 20). Todo esto, sin embargo, los habría llevado a la conclusión de que los lados de una *dynamis* con un área de 15 eran linealmente inconmensurables (con la unidad básica de longitud), solo después la existencia de tales segmentos, ya no estaba en duda. Del mismo modo la definición de proporcionalidad no se podría haber extendido de números a las cantidades generales hasta después de que se descubrió la existencia de la inconmensurabilidad. Por otra parte, la inconmensurabilidad en sí *no es algo que puede ser conocido con certeza de una manera empírica*. *El conocimiento de esta solo se puede obtener por un proceso sistemático de reflexión*.

Por esta razón la parte 3 de este libro está dedicado al problema de cómo los griegos transformaron las matemáticas de un cuerpo de conocimiento práctico y empírico en una ciencia teórica y deductiva. Después de todo, la existencia de la inconmensurabilidad puede probarse rigurosamente solo por los métodos de este último, y no por las de la primera. No quiero concluir la Parte 2, sin embargo, sin expresar brevemente mi opinión sobre la importancia de algunas de nuestras conclusiones para futuras investigaciones.

En las últimas décadas han aparecido varias obras importantes en la historia de la ciencia que se refieren a sí mismos con las matemáticas del periodo pre-griego y con la de los babilonios y egipcios, en particular[126].

Esta investigación ha dado lugar no solo a una mejor comprensión del lugar de las matemáticas en la cultura pre-griega, sino también a la sensación de que nuestra imagen

[126] Los resultados más importantes de estas investigaciones se agrupan en los tres primeros capítulos del libro de Van der Waerden, *Science Awakening*.

anterior del mundo griego y de los inicios de la ciencia debe ser revisada a fondo a la luz de este nuevo conocimiento histórico. Cuando no se sabía nada acerca de las matemáticas egipcias y babilónicas, los griegos podían considerarse correctos o incorrectos comparados con los creadores y fundadores de la ciencia. La situación cambió de repente, sin embargo, cuando se advirtió que muchos descubrimientos matemáticos importantes que previamente habían sido atribuidos a los griegos del siglo V y VI, habían sido hechos en siglos anteriores por los babilonios y los egipcios. Los griegos parecían haber sido despojados gran parte de su antigua importancia en la historia de la ciencia por este nuevo conocimiento de las culturas pre-griegas. Otto Neugebauer, una distinguida autoridad en la historia de las matemáticas, se sintió obligado a escribir que ya que nosotros conocemos algo no solo sobre los dos mil quinientos años que han pasado desde la época clásica, sino también de los dos mil quinteros años que la precedieron, los griegos ya no podían ser considerados como los creadores principales y fundadores de la ciencia[127]. Parecía que su posición histórica no estaba más en el comienzo de la ciencia, sino de alguna manera en el medio[128]. Se hicieron intentos para probar que los griegos hicieron algo más que llevar la ciencia de sus predecesores, y se dijo que[129] "La tradición babilónica proporcionó los materiales con los cuales los griegos, o más precisamente los pitagóricos, construyeron sus matemáticas".

Está claro que los estudiantes en el futuro van a seguir pidiendo lo que los griegos podrían haber aprendido de sus predecesores. En mi opinión, sin embargo, su investigación dará un nuevo giro por el material que se presenta en las dos primeras partes de este libro. A pesar de que todavía se pregunte en qué medida la ciencia griega es solo una continuación de su contraparte pre-griega y hasta qué punto se trata de una creación completamente original, parece que esta cuestión ha llegado a ser más claramente definida de lo que era antes.

Esto se debe a que en los capítulos anteriores nos hemos encontrado con una serie de conceptos matemáticos importantes (*diastema*, *horoi*, *logos*, *analogon*, *analogia*, '*razón compuesta*' y nociones afines, 'un corte del canon', 'media proporcional', 'semejanza geométrica definida como la igualdad de ángulos y *analogía* de lados', *dynamis*,

---

[127] O. Neugebauer, Studien zur Geschichte der antiker Algebra III, *Quetten und Studien zur Geschichte der Math.* etc. B, 3 (1936) 245-59. Él va a decir: "La esencia de la geometría elemental, la teoría elemental de las proporciones y la teoría de las ecuaciones se encuentra en las matemáticas babilónicas sobre la que los griegos construyeron sus propias matemáticas. En todos los casos la conexión entre los dos es evidente e innegable."
[128] B. L. van der Waerden, *Math. Ann. 120* (1947/9) 123.
[129] B. L. van der Waerden, *Erwachende Wissenschaft*, p. 204.

symmetros, *mekei asymmetros*, *dynamei symmetros*, etc.) que, al encararlas, parece como si ellos fueran invenciones completamente originales y auténticamente griegas. Así la pregunta se transforma en una, qué grado de estos mismos conceptos o quizá otros similares figuran en las matemáticas pre-griegas.

Creo firmemente que una respuesta clara y satisfactoria a esta pregunta se puede dar sobre la base de nuestro conocimiento actual de la ciencia pre-griega. Además, el tiempo para hacer conjeturas acerca de lo que los griegos podrían haber tomado prestado de otras culturas vendrá después que nosotros hayamos adquirido una mejor comprensión de los griegos y su ciencia.