EL VALOR DE LA GEOMETRIA EUCLIDEA PARA LA ENSEÑANZA DE LA LOGICA

Trabajo para optar al título de

Licenciada en Filosofía

Modalidad: Monografía

Presentado por

Ingrid Carolina Covaleda Rodríguez

Cod.:2012132006

Directora

Ángela Rocío Bejarano

Universidad Pedagógica Nacional

Facultad de Humanidades

Departamento de Ciencias Sociales

Licenciatura en Filosofía

Bogotá D.C.

2018

Resumen

Con el objetivo de probar mi tesis: que la enseñanza de la geometría euclídea puede ser una estrategia para la enseñanza de la lógica, seguiré el siguiente orden: en primer lugar, hablaré del contexto histórico y teórico del método geométrico euclídeo. Estos antecedentes permitirán comprender cómo opera dicho método, para luego analizar el aspecto pedagógico y las habilidades geométricas que pone en práctica Euclides de Alejandría en la investigación al modo geométrico. En segundo lugar, muestro una coyuntura entre la geometría euclídea y la lógica, principalmente la lógica aristotélica, la cual resulta desde el concepto de demostración, pues este es fundamental tanto en la geometría como en la lógica. Desde allí, doy alcance al tema pedagógico, y trabajo las habilidades lógicas que pueden ser desarrolladas desde una base geométrica. Por último, y en tercer lugar, planteo cómo puede darse esta coyuntura en un caso puntual, expongo esta idea desde el proyecto lógico de Lewis Carroll. Para esta sección, parto de la admiración de este lógico por la geometría de Euclides, que se convierte en un asunto muy importante en su proyecto, pues allí la geometría es un elemento didáctico muy poderoso para el aprendizaje de la lógica.

Palabras clave: Euclides de Alejandría, método geométrico, lógica, habilidades geométricas, habilidades lógicas.

Abstract

With the objective to prove my thesis: the teaching of Euclidean geometry can be a strategy for teaching logic, I will follow the next order: First, I speak of historical and theoretical context of euclidean geometric method. These antecedents will allow to understand how this method operates, then analyze the pedagogical aspect and geometric skills that implements Euclid of Alexandria in research to geometrically. Second, I show a juncture between Euclidean geometry and logic, mainly the aristotelian logic, which results from the concept of demonstration, because this is fundamental both in geometry and in logic. From there, I come to the pedagogical topic, and I work the logical skills that can be developed from a geometric base. Finally, and third, I propose how this conjuncture can occur in a specific case; I expose this idea from the logical project of Lewis Carroll. For this section, I start from the admiration of this logician for the geometry of Euclid, which becomes a very important issue in his project, because geometry is a very powerful didactic element for learning logic.

Keywords: Euclid of Alexandria, geometric method, logic, geometric abilities, logical abilities.

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de grado
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento	El valor de la geometría euclídea para la enseñanza de la lógica
Autor(es)	Covaleda Rodríguez, Ingrid Carolina
Director	Bejarano, Ángela Rocío
Publicación	Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional 2018, p.61.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional
Palabras Claves	EUCLIDES DE ALEJANDRIA; METODO GEOMETRICO; LOGICA; HABILIDADES GEOMETRICAS; HABILIDADES LOGICAS.

2. Descripción

Con el objetivo de probar mi tesis: que la enseñanza de la geometría euclídea puede ser una estrategia para la enseñanza de la lógica, seguiré el siguiente orden: en primer lugar, hablaré del contexto histórico y teórico del método geométrico euclídeo. Estos antecedentes permitirán comprender cómo opera dicho método, para luego analizar el aspecto pedagógico y las habilidades geométricas que pone en práctica Euclides de Alejandría en la investigación al modo geométrico. En segundo lugar, muestro una coyuntura entre la geometría euclídea y la lógica, principalmente la lógica aristotélica, la cual resulta desde el concepto de demostración, pues este es fundamental tanto en la geometría como en la lógica. Desde allí, doy alcance al tema pedagógico, y trabajo las habilidades lógicas que pueden ser desarrolladas desde una base geométrica. Por último, y en tercer lugar, planteo cómo puede darse esta coyuntura en un caso puntual, expongo esta idea desde el proyecto lógico de Lewis Carroll. Para esta sección, parto de la admiración de este lógico por la geometría de Euclides, que se convierte en un asunto muy importante en su proyecto, pues allí la geometría es un elemento didáctico muy poderoso para el aprendizaje de la lógica.

3. Fuentes

Ángelis, E. (1968). El método geométrico de Descartes a Spinoza. *Tarea*, 25-47.

Aristóteles. (1982). *Tratados de lógica (Órganon).* Madrid: Gredos, S.A.

Aristóteles. (1994). *Metafisica.* Madrid: Gredos, S.A.

Aristóteles. (1995). *Primeros Analíticos.* Madrid: Gredos.

Campos, A. (1994). *Axiomática y geometría desde Euclides hasta Hilbert y Bourbaki.* Bogotá: Universidad Nacional.

Carroll, L. (2015). *El juego de la lógica.* Madrid: Alianza Editorial, S.A.

Coolidge, J. L. (1947). *A history of geometrical methods.* Gran Bretaña: Universidad Press.

Dodgson, C. L. (1885). *Euclid and his modern rivals.* Londres: Macmillan and Co.

Durán, A. J. (2002). La matemática y sus elementos: de Euclides a Bourbaki. *La gaceta de la RSME*, 649-672.

Euclides. (1576). *Los seis libros primeros de la geometría de Euclides.* Sevilla: Concejo real de sevilla.

Euclides. (2007). *Elementos I-VII.* Barcelona: Gredos S.A.

Euclides, & Aristóteles. (2000). *Sobre las líneas indivisibles- Mecánica- Óptica- Catóptica- Fenómenos.* Madrid: Gredos, S.A.

Frege, G. (1897). Lógica. 156-178.

Hilbert, D. (1993). *Fundamentos de las matemáticas.* Mexico: Servicios Editoriales de la Facultad de Ciencias, UNAM.

Hoffer, A. (1981). Geometry is more than a proof. *The mathematics teacher* , 11-18.

Jiménez, D. (2006). ¿Qué era un irracional para un matemático griego antiguo? *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, 87.

Morado, R. (2005). ¿Para quien la lógica? *Cuadreno de seminario de pedagogía universitaria, UNAM.* Ciudad de Mexico.

Pajares, A. B. (2016). *Fragmentos Presocraticos: De Tales a Democrito.* Madrid: Alianza Editorial .

Pastor, A. J., & Gutierrez Rodriguez, A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la goemetría: el modelo de van Hiele. En *Teoria y practica en educación matematíca* (págs. 295-384). Sevilla: S. llinares y M.V Sanchez.

Pin, V. G. (2015). *Pitagoras, La infancia de la filosofia.* Buenos Aires: Emse Edapp S.L.

Piquer, D. A. (2004). *Logica.* Madrid: Impresor de Camara de S.M.

Proclo. (1792). *The philosophical and matematical commentaries of Proclus on the firts book of Euclid´s elements.* Londres: Extracts from curiosities of literture.

Sanchez, C. H. (2006). ¿como se construye un cuadrado? o el análisis de una síntesis euclidiana. *Lecturas Matemáticas*, 22-44.

Solé, J. (2015). *La filosofía la modo geométrico.* Buenos Aires: Emse Edapp.

Spinoza, B. (1988). *Spinoza: Correspondencia.* Madrid: Alianza Editorial, S.A.

Vega, L. (1985). Sobrela invención griega de la demostración. 149-173.

Vega, L., & Olmos, P. G. (2011). *Compendio de lógica y argumentación.* Madrid: Trotta.

4. Contenidos

La geometría euclídea está y ha estado en el olvido, una razón es que su doctrina y sus aportes pedagógicos siempre estuvieron envueltos en el rigor que exigía la investigación y en el cultivo de un sujeto preocupado por la búsqueda del conocimiento necesario para construir su propio intelecto, y el conocimiento significativo para la sociedad. La geometría es una ciencia que estudia todo lo referente al espacio, de ahí la conexión del sujeto con su contexto. Dicha búsqueda del conocimiento se da por el mero interés de aprender una ciencia y contribuir a ella. Por esto una de las principales consignas del estudio de la geometría euclídea es que quien se sumerge en ella, debe consagrarse a la investigación libre de reconocimientos económicos y de banalidades. El estudio de la geometría, en especial la geometría de Euclides, fue muy cálida con aquellos que quisieron aportarle, pero muy fría con aquellos que quisieron opacarla. Quizás esta rigurosidad y ahínco de sus exponentes, los geómetras antiguos, entre ellos Euclides, por construir una ciencia cuyo interés es la búsqueda del conocimiento basado en el esfuerzo y la dedicación libre de asuntos externos a la investigación, apartaron a la geometría de la difusión masiva de sus obras. Esta ciencia, que se caracteriza por su diligencia y aplicación, se la guardó con esmero para evitar que fuera contaminada de trivialidades. Es muy posible que por esta razón no se hiciera tan visible, como sí lo fueron otras corrientes del pensamiento clásico. El hecho de que la geometría y, en especial, la geometría euclídea no hayan sido muy visibles, no resta nada a su valor. En este trabajo, hay una fundamentación histórica que servirá para ilustrar el contexto y los aspectos significativos de dicha geometría, lo que corroborará aquello que se quiere resaltar: el peso de la geometría euclídea en un ámbito pedagógico dirigido a la enseñanza de la lógica. Esto último dado que el estudio de la geometría euclídea puede permitir que los estudiantes desarrollen habilidades lógicas como la creatividad, el criterio, la capacidad demostrativa, el análisis y la síntesis, desde el estudio del método geométrico, específicamente al estilo de Euclides en "Elementos", pues partiendo de allí es posible fomentar ciertas habilidades fundamentales para la lógica. Dichas habilidades geométricas resultan ser fundamentales para el pensamiento lógico de los estudiantes, dado que ellas invitan al estudiante a examinar cómo se hilan los pensamientos con otros y qué se puede reflexionar de sus razonamientos.

Aquellas habilidades geométricas fundamentales para la lógica, como la observación, verbalización, esquematización, lógica, modelación/aplicación, buscan que el estudiante valore su acercamiento a la lógica como aquello que puede hacer más claras las cosas, como aquello que lo aparta de las confusiones, de modo que su intelecto pueda verse altamente desarrollado. La coyuntura de la geometría y la lógica es una estrategia en la que el estudiante puede percibir estas dos ciencias como cercanas y muy poderosas para el entendimiento y para la constitución del conocimiento sólido. En suma, la enseñanza de la geometría euclídea podría considerarse como una estrategia para la enseñanza de la lógica.

5. Metodología

Diseño o Modo: Monografía

Investigación sobre propuesta pedagógica guiada al fomento de habilidades lógicas por medio de la geometría y sus habilidades, elaborada bajo un examen histórico, teórico y pedagógico de la geometría de Euclides de Alejandría.

6. Conclusiones
La tarea de rescatar el valor de la geometría euclídea para la enseñanza de la lógica, según mi parecer, trae a colación varios elementos importantes. En el trabajo de Euclides se puede notar el aprovechamiento de los estudios sobre la naturaleza iniciados por Tales. Realmente Euclides da ejemplo de lo que significa construir con una ciencia, pues perfeccionó una pila de apuntes sobre geometría y, además, ideó una solución para el problema de los inconmensurables. Perfeccionar un método e incorporar allí su propio avance es una muestra del rigor euclídeo que tanto se pregonó en su labor como profesor. Según mi juicio, este rigor invita al estudiante a comprometerse en la investigación y cuestionamiento de su espacio. Involucrarse con el espacio, con el contexto en sentido de la construcción de una ciencia, implica involucrase con la sociedad y con el crecimiento de la misma, cuestión que le da un matiz muy particular a la doctrina de Euclides y, desde luego, a su aporte pedagógico. Explorar esta propuesta puede prestarse para una investigación que indague por el valor ético del proyecto pedagógico de Euclides, que puede desprenderse de esta investigación en la posteridad. Por otra parte, investigar sobre la relación pedagógica entre la geometría y la lógica, sobre todo en la relación Aristóteles-Euclides, invita a pensar que pueden coexistir diversas formas de interpretar el mundo. Aristóteles constituye un cuerpo de conocimientos desde lógica, sin desconocer a la geometría, en sus escritos se la nombra en repetidas ocasiones, aunque sin mucho detalle; por su parte, Euclides, inmediatamente posterior a Aristóteles, afina un método basado en un sistema lógico, como lo es sistema axiomático, tomando varias cosas de la doctrina aristotélica, como los principios, evidentemente expuestos en un leguaje geométrico. Estas dos formas de construir un cuerpo de conocimientos, aunque aparentemente diferentes guardan una estrecha relación muy interesante pero poco explorada. Mi disertación sobre esta relación pretende ampliar y explicar de forma detallada dicho encuentro, contribuyendo al estudio de la geometría en relación con la lógica desde una mirada filosófica.

Por último, la coyuntura planteada entre geometría y lógica, puesta en el ámbito educativo, más que dar a conocer unos contenidos, invita al cultivo personal del estudiante, a reconocer su espacio y a investigar sobre el mismo de una forma ordenada y sólida, de esta forma, cultivar su entendimiento para acercarse a la lógica. Cuando un estudiante toma conciencia de ello y del rigor investigativo que puede alcanzar con el desarrollo de las habilidades geométricas y lógicas, puede contribuir a la sociedad, afinando conocimientos, razonando de buena manera y cuestionando aquello que se aleja de la claridad que proporciona el acercamiento a la lógica. En mi opinión, la implementación de esta estrategia concuerda con aquel propósito de Carroll de sustentar la lógica desde un fundamento geométrico para el goce intelectual de los estudiantes, cosa que provocará en el estudiante aquella actitud hacia el conocimiento de la que se habló con anterioridad, y evitará que proyectos tan ricos como el de Euclides se queden en un olvido que no merece. Sin embargo, esta postura puede dar paso a otras formas de aplicar la coyuntura entre geometría y lógica, no solo L.Carroll, puede ser la única alternativa de aplicación, puede haber otras posturas dignas de investigación que complementen este trabajo

Elaborado por:	Covaleda Rodríguez Ingrid Carolina
Revisado por:	Bejarano Ángela Rocío

Fecha de elaboración del Resumen:	06	06	2018

Tabla de contenido

Introducción

La geometría euclídea está y ha estado en el olvido, una razón es que su doctrina y sus aportes pedagógicos siempre estuvieron envueltos en el rigor que exigía la investigación y en el cultivo de un sujeto preocupado por la búsqueda del conocimiento necesario para construir su propio intelecto, y el conocimiento significativo para la sociedad. La geometría es una ciencia que estudia todo lo referente al espacio, de ahí la conexión del sujeto con su contexto. Dicha búsqueda del conocimiento se da por el mero interés de aprender una ciencia y contribuir a ella. Por esto una de las principales consignas del estudio de la geometría euclídea es que quien se sumerge en ella, debe consagrarse a la investigación libre de reconocimientos económicos y de banalidades.

El estudio de la geometría, en especial la geometría de Euclides, fue muy cálida con aquellos que quisieron aportarle pero muy fría con aquellos que quisieron opacarla. Quizás esta rigurosidad y ahínco de sus exponentes, los geómetras antiguos, entre ellos Euclides, por construir una ciencia cuyo interés es la búsqueda del conocimiento basado en el esfuerzo y la dedicación libre de asuntos externos a la investigación, apartaron a la geometría de la difusión masiva de sus obras. Esta ciencia, que se caracteriza por su diligencia y aplicación, se la guardó con esmero para evitar que fuera contaminada de trivialidades. Es muy posible que por esta razón no se hiciera tan visible, como sí lo fueron otras corrientes del pensamiento clásico. El hecho de que la geometría y, en especial, la geometría euclídea no hayan sido muy visibles, no resta nada a su valor.

En este trabajo, hay una fundamentación histórica que servirá para ilustrar el contexto y los aspectos significativos de dicha geometría, lo que corroborará aquello que se quiere resaltar: el peso de la geometría euclídea en un ámbito pedagógico dirigido a la enseñanza de la lógica. Esto último dado que el estudio de la geometría euclídea puede permitir que los estudiantes desarrollen habilidades lógicas como la creatividad, el criterio, la capacidad demostrativa, el análisis y la síntesis, desde el estudio del método geométrico, específicamente al estilo de Euclides en “Elementos”, pues partiendo de allí es posible fomentar ciertas habilidades fundamentales para la lógica. Dichas habilidades geométricas resultan ser fundamentales para el pensamiento lógico de los estudiantes, dado que ellas invitan al estudiante a examinar cómo se hilan los pensamientos con otros y qué se puede reflexionar de sus razonamientos.

Aquellas habilidades geométricas fundamentales para la lógica, como la observación, verbalización, esquematización, lógica, modelación/aplicación, buscan que el estudiante valore su acercamiento a la lógica como aquello que puede hacer más claras las cosas, como aquello que lo aparta de las confusiones, de modo que su intelecto pueda verse altamente desarrollado. La coyuntura de la geometría y la lógica es una estrategia en la que el estudiante puede percibir estas dos ciencias como cercanas y muy poderosas para el entendimiento y para la constitución del conocimiento sólido. En suma, la enseñanza de la geometría euclídea podría considerarse como una estrategia para la enseñanza de la lógica.

-Capítulo 1-

Euclides, la geometría y las habilidades geométricas

1. ¿Qué es la geometría?

Como primera medida, al hablar de geometría es necesario definirla como la ciencia que se dedica a la especulación rigurosa de fenómenos espaciales. Su raíz griega *γεωμετρία (geometría)*[1], indica algo al respecto; esta palabra se puede traducir como "la medida de la tierra". Sin embargo, su significado que puede ser mejor interpretado como "la medida del espacio". Esta medida del espacio refiere claramente a lo físico; de hecho, diría que este espacio físico que estudia la geometría es en efecto la naturaleza, o *Φυσις (physis).* La *physis* traducida como "naturaleza", aparte de referirse a los seres animados e inanimados, también comprende "el modo natural de ser", o la "constitución" de las cosas. Así pues, en este sentido, la geometría como una ciencia sostenida en la especulación rigurosa, no solo se dedica a observar y describir detalladamente patrones u objetos de la naturaleza; también la geometría daría cuenta del por qué y el para qué de lo que se observa. Proclo (trad. 1792) menciona que

> La geometría es una ciencia especulativa (me refiero a la geometría de los antiguos), es deseable por su propio bien y por contemplaciones aún más elevadas, la visión del intelecto, a la que en última instancia es subordinada. Porque, cuando se estudia con este punto de vista, abre el ojo del alma a los espectáculos de la realidad perfecta, y lo purifica de la oscuridad del olvido material.[2] (p.CV)

Al tener en cuenta lo anterior, retomo a comentaristas como Eliano el polígrafo, quien ya insinuaba el argumento anterior; él indica que "las arañas pueden trazar un círculo sin necesitar nada de Euclides". Eliano quiso resaltar el carácter especulativo de la geometría, por la cual se pueden ver detalladamente actividades de la naturaleza y analizarlas desde una perspectiva geométrica, como la elaboración de la red de la araña tejedora, o el marco hexagonal fabricado por las abejas.

[1]La definición de este concepto es tomado del diccionario griego clásico Vox, editado en 1967 por José M Pabón en la ciudad de Madrid. En adelante, los siguientes términos griegos tendrán la misma referencia.

[2] Geometry is a speculative science (I mean the geometry of the ancients), it is both desirable for its own sake and for still higher contemplations, the vision of intellect, to which it is ultimately subservient. For, when studied with this view, it opens the eye of the soul to spectacles of perfecto reality, and purifies it from the darkness of material oblivion (Traducción propia. De ahora en adelante, tómense todas las traducciones como una elaboración propia).

En este orden de ideas, la geometría en el caso de las arañas tejedoras o de las abejas, bien demuestran que por medio de ella es posible una lectura de la naturaleza, que sustenta una forma de interpretar el mundo.

1.1. La geometría euclídea entre el *Mythos* y el *Logos*

La geometría euclídea fue un punto de referencia en la antigüedad, tanto para la ciencia como para la enseñanza de las ciencias. El trabajo que desarrolló Euclides de Alejandría resalta el fructífero y provechoso trabajo intelectual que se inició desde los viajes de Tales a Egipto, los cuales sembraron la semilla de una nueva forma de explicar el mundo para la antigua Grecia. El trabajo de Euclides de Alejandría recogió importantes avances que se remontan a las enseñanzas recogidas por Tales y Anaxágoras, los pitagóricos y otros geómetras anteriores a él. El estudio de la geometría desde Tales hasta Euclides fue un periodo muy fructífero, de grandes avances, no tiene punto de comparación ni siquiera con los avances que se han hecho en la actualidad. Pero, vale decir que, de este periodo de bonanza no se sigue que la geometría se haya dado por terminada; más bien, la geometría se ha mantenido, construido y ampliado, pese al olvido con el que esta ciencia ha luchado desde los tiempos de los pensadores antiguos, hasta la actualidad, ella aún sigue vigente y con mucho que aportar.

> El avance de Euclides o de cualquier otro geómetra de los tiempos clásicos hasta el estado presente del conocimiento geométrico, es realmente grandioso, especialmente si medimos el avance en términos de la adquisición de hechos más que el progreso de la percepción filosófica. Pero no importa qué tan alto establezcamos este avance, es realmente pequeño comparado con el maravilloso avance en los procesos intelectuales que resultan de la genialidad de un pequeño número de profundos pensadores que vivieron en los 300 años que separan a Tales de Euclides[3] (Coolidge, 1947, p. 29).

Estos tiempos tan provechosos para la geometría, entre la Grecia arcaica y la Grecia Alejandrina, a su vez, fueron los tiempos en que la sociedad de entonces vivió un cambio en la manera de darle una interpretación del mundo. La etapa más fructífera de la geometría se da en la transición del *μύθος* (*mythos*) al *λόγος* (*logos*), transición que en cierta manera le da un lugar significativo al intercambio cultural que por aquel entonces se desplegaba. Grecia pasaba por

[3] The advance from Euclid or any other geometer of classical times to the present estate of geometrical knowledge is indeed great, especially if we measure advance in terms of the acquirement of facts rather the progress of philosophical insight. But no matter how high we set this advance, it is small indeed compared with the marvelous advance in intellectual processes resulting from the genius of small number of deep thinkers who lived in the 300 years that separate Thales from Euclid.

un momento en el cual aumentaron las migraciones, se ampliaban las rutas y caminos comerciales. "De otra parte, esas migraciones provocan que el mundo griego entre en contacto con otras ideas y enriquezca sus puntos de vista" (Pajares, 2016, p 22). De esto se sigue que de los viajes emprendidos por sabios como Tales y Anaxágoras las tierras egipcias, propiciaron el mejor ambiente para el pensamiento matemático- geométrico en la Grecia arcaica.

Esta transición dada de forma lenta y progresiva, en la que el *μύθος* (*mythos*) y el *λόγος* (*logos*) convivían uno con el otro, dio como fruto una explicación del mundo que se acomodaba más a la ciencia que a los relatos míticos sobre los orígenes de los fenómenos naturales. Anaximandro es un buen ejemplo de ello; el milesio, basado en sus recorridos por las tierras cercanas a su ciudad, las islas griegas, el mar mediterráneo y Egipto, elaboró el primer mapa. La elaboración de un mapa en aquel entonces muestra una nueva forma de recorrer las tierras, demuestra un conocimiento del espacio riguroso, un estudio del entorno, una observación más allá de los mitos, una construcción de conocimiento que no se queda solo para Anaximandro y sus allegados, es un conocimiento compartido con la sociedad; un mapa de aquellas tierras en el periodo en donde se ampliaron las rutas comerciales, evidentemente es un elemento crucial para el desarrollo de la sociedad de este tiempo.

1.2. "No hay camino de reyes en geometría"

El esfuerzo por parte de Euclides de edificar una ciencia para el cultivo intelectual de sí mismo y para la sociedad, parece reflejarse en una consigna recogida por el medieval Iovannes de Estobeo, consigna que dice que "No hay camino de reyes en la geometría". Este lema se atribuye a la respuesta que Euclides le dio al diádoco Tolomeo Soter, cuando éste le insinuó que quería iniciarse en la geometría, tal insinuación al parecer fue propuesta como si dedicarse a esta disciplina fuese algo corriente y sin esfuerzos. El lema, "No hay camino de reyes en la geometría" también puede tener relación con el hecho de que sus predecesores, los primeros geómetras, lograron superar problemáticas sociales mejor que las autoridades de entonces. Una de las problemáticas solventada por los geómetras más conocida, es aquella en la que estos llegaron a estar por encima de los reyes, dado que pudieron satisfacer las leyes, por medio del acto de mostrar ante la misma ley, de forma certera y verdadera, una repartición justa de las tierras de los habitantes de Egipto, que cada año eran devastadas por las aguas del rio Nilo.

En la introducción de la edición de "Elementos" de 1576[4], se habla de la problemática que en aquellos días devastaba las tierras en Egipto. La geometría da un paso muy importante al dar solución a un problema durante el mandato del rey Meris. Dicho mandato radicó en buscar una solución a las pugnas anuales entre los terratenientes de las tierras aledañas al rio Nilo, pues este rio durante verano sufría grandes inundaciones que borraban los linderos de los terrenos; al ceder las inundaciones y quedar las tierras sin referencias, cada terrateniente dividía los terrenos a su conveniencia, lo que tenía como consecuencia acalorados conflictos por la repartición de las tierras. Estos conflictos lograron ser solucionados gracias a los geómetras y sus conocimientos sobre el espacio y las reglas que rigorosamente elaboraron. Los geómetras, con sus estudios y avances sobre la geometría plana, lograron establecer reglas válidas para la justa repartición de terrenos, cuya aplicación sería válida para todos los propietarios de tierras. Aunque como tal, la sugerencia de la búsqueda de una forma de organizar las tierras fue una imposición del rey Meris, quienes realmente metieron sus manos en el asunto fueron los geómetras, cosa que los reyes y legisladores solo vieron desde sus tronos. Este acontecimiento en la sociedad egipcia les dio a los matemáticos y, sobre todo, a los geómetras importantes reconocimientos dignos de sacrificios a los dioses; por ejemplo a Pitágoras, por sus estudios en distancias y cantidades, le ofrecieron el sacrificio hecatombe.

> (Pitágoras)acabó muchas cosas de esta ciencia, entre las cuales halló la virtud o potencia del triángulo rectángulo, con tanto contentamiento y satisfacción de haberle hallado, que se dice de él, en pago de la merced recibida haber ofrecido a la Diosa Minerva el sacrificio hecatombe que entonces llamaban, en el cual sacrificó cien vacas (Zamorano,1576, p.5).

Todos los beneficios que trajo el estudio de la geometría dentro de la sociedad egipcia de aquel entonces, hizo que esta disciplina fuera digna de ser compartida con las sociedades cercanas, como a la antigua Grecia que se encontraba en un periodo de crecimiento mercantil y cultural. La geometría logró hacer a sus exponentes personajes dignos de admiración, esto porque los geómetras bajo su trabajo y esfuerzo, cultivaron conocimiento sólido que no depende de principios autoritarios, monetarios, ni nada parecido; pues como ya lo expresa Euclides "no hay camino de reyes en geometría". Aquí prima el trabajo investigativo propio. La geometría y

[4]Edición traducida al español y escrita por el astrólogo, matemático y catedrático en cosmología Rodrigo Zamorano.

su impacto en la sociedad de entonces pudo aliviar la problemática social que aquejaba a los egipcios desde tiempos anteriores a los geómetras, y de ello, se desarrolló un método para dar claridad y hallar una respuesta a problemáticas referentes al espacio; por otro lado, este trabajo investigativo no se hace para obtener algún provecho económico, más bien se hizo para beneficio de la sociedad y del conocimiento.

> Una sociedad particular solo puede desarrollarse saludablemente cuando también lo hacen los pueblos vecinos. De manera análoga, el bienestar y el interés de los estados demandan no solo el mantenimiento de un orden interno, sino también la existencia de un orden general en las relaciones entre ellos. Lo mismo ocurre con la ciencia (Hilbert, 1993, p. 23).

En concordancia, aquí otra anécdota al respecto. Se dice que Estobeo, comentó que Euclides ordena a su esclavo darle dinero a un aprendiz, quien al resolver el teorema de Pitágoras, le pregunta a Euclides que obtendrá con ello; se dice que Euclides dijo a su esclavo "Dale tres óbolos, pues necesita sacar provecho de lo que aprende". Se puede entender que esta orden de Euclides es hecha despectivamente, pues como ya se dijo, no prima el beneficio económico y en general, no prima ningún beneficio superficial, prima una verdad válida para la sociedad la producción de conocimiento, la construcción de una ciencia.

En este orden del texto, en el que hablamos de la geometría euclídea, sus inicios, su lugar en la sociedad y su exponente más destacado en el rol de educador, se puede concluir que la geometría es una ciencia en la cual hacerse diestro en ella significa un constante estudio y observación de la naturaleza, sumado a la dedicación a esquematizar y ordenar las cuestiones que de ella surgen, lo que se relaciona con la idea de que los estudiosos de la geometría han de consagrarse a una investigación, en la que indefectiblemente se sigue un método, el método geométrico "Hay señales del celo de algunos de sus miembros por asegurar una especie de ortodoxia euclidiana tanto en el cultivo de la matemática elemental, como en la investigación avanzada" (Euclides, trad.2007, p. XIII). Tal esfuerzo por la investigación avanzada es también un reflejo de lo que vivía en la sociedad de entonces. Pareciese que los acontecimientos políticos y culturales que hacen que una sociedad cambie su modo de vida, afecten también el estudio de las ciencias[5].

2. Logos (*λόγος*), análogos (*αναλόγος*) y armonía *(αρμονια)*

El método geométrico es una forma de escritura que data desde antes de Euclides de Alejandría, no se tienen muchas fuentes que informen sobre este estilo de escritura, pero sí se sabe que fue la forma de expresar razonamientos referentes al espacio. Los primeros escritos expuestos al modo geométrico tratan sobre astronomía y óptica. El modo geométrico está compuesto de un sistema que comprende nociones comunes o axiomas, los cuales dan paso a elaboraciones más complejas nombradas como proposiciones, que desembocan en una demostración, que tiene como objetivo una sustentación irrefutable. "Es un método deductivo axiomático, en que las conclusiones se infieren necesariamente de las premisas" (Solé, 2015, p. 50). Se puede decir que el estilo que caracteriza a Euclides es similar a una red, a un tejido, pues se comienza definiendo lo más esencial y primordial, las bases, y de estas definiciones se va llegando a un criterio por el cual hallemos más conexiones que entre sí guarden coherencia, toda la cadena de definiciones, proposiciones y demostraciones, las cuales dependen de la parte más pequeña y esta parte primordial depende también de las más complejas como las demostraciones que se siguen.

> La ordenación se lleva a cabo recurriendo a una cierta *trama de conceptos* relacionados entre sí, de tal manera que cada objeto y a cada hecho del campo del conocimiento de que se trate les corresponda, respectivamente, un concepto de esa trama y una relación lógica entre conceptos del mismo. La trama de conceptos no es otra cosa que la *teoría* de esta esfera del saber (Hilbert, 1993, p. 23).

---

5 El pensamiento de Euclides ve un cambio político y cultural, que se puede comparar con la transición del *mytho*s al *logo*s que Tales y Anaxágoras vivieron; una transición que involucró un cambio en la forma de explicarse el mundo. De la misma forma, Euclides, unos 300 años después, también se ve inmerso en un cambio social significativo: la geometría euclídea se desarrolla en el momento en el que la Grecia Alejandrina pasa por el cambio político y cultural, desencadenado tras la muerte de Alejandro Magno. Cada terreno a cargo un diádoco, generó un cierto malestar en la gran Alejandría. Tolomeo Soter I, el diádoco Alejandrino designado a lo que correspondería a Egipto, tomó el poder de estas tierras. El mando y poder de Tolomeo, según lo que cuentan los comentaristas, sería de disgusto para Euclides, en sentido de que el diádoco buscaría convertirse en geómetra, sin pensar que la geometría busca la construcción del conocimiento, del sujeto y a su vez de la sociedad, no el poder y el reconocimiento sin más; de ahí que Euclides le haya respondido que "no hay camino de reyes en geometría".

De acuerdo con la cita, el carácter axiomático formal le permite a Euclides lograr una sistematización de un cuerpo de conocimientos, que aunque compleja, no deja de mantener un orden, una estructura. Esto hace a Euclides un autor sumamente rico, pues con este estilo particular nos demuestra que se pueden explorar diversas maneras de poner en uso un sistema formal de elementos que se relacionan ordenada y coherentemente, y de proponer un estilo para la enseñanza de ella, como él mismo hizo con sus alumnos. El entretejido geométrico de Euclides también da cuenta de que ninguno de sus elementos, sean definiciones, proposiciones o demostraciones, sobra o se escapa de su aparato discursivo, implementa una manera geométrica, como lo es el uso de algoritmos, para hacer que todo concuerde con todo desde cualquier punto. Todo esto con el fin de búsqueda de la verdad y de conocimiento válido, provechoso, sustentable y libre de refutaciones.

> Si aquello que se propone es claramente conforme con estos principios, es evidentemente verdadero; si la conformidad de la cosa con los principios no es clara, entonces considera si se acerca, o no a ellos, y tiene por más verosímil aquello, que nota tener mayor conformidad con tales principios. Sea ejemplo: Dice EUCLIDES, que todas las líneas que en un círculo van desde la circunferencia al centro son iguales, y que en todo triángulo los tres ángulos equivalen a dos rectos: el entendimiento haya tanta conformidad entre estas cosas, y los primeros principios, que con un poco de atención fácilmente asiente ellas (Piquer, 2004, p. 54).

Así pues, "Elementos" se trata de una exposición sobre los conocimientos de la época, sostenidos en un edificio conceptual, cuyos cimientos yacen por los elementos que en un sentido preciso no son todos y cada uno de los enunciados. Al mirar la obra saltan a la vista algunos comentarios, que aunque puedan parecer apéndices de la misma, no dejan de ser relevantes; elementos son las partes fuertes, las partes irrefutables, más generales y universales.

> ¿Que se entendería por elemento? Dice Proclo: Según Menecmo, el termino elemento se usa en dos sentidos. Aquel lo que es instrumento para obtener algo, es elemento de ese algo obtenido; como la primera proposición de Euclides lo es de la segunda de la cuarta y de la quinta. El termino elemento se utiliza también para aquello más simple, en que se divide un compuesto; en este caso ya no se puede decir que todo es un elemento de todo, sino únicamente que ciertas cosas comparables a principios con elementos de las que aparecen como resultados de ellas; así, los postulados son

> elementos de los teoremas. Este es el sentido que tiene el termino elemento en los Elementos de Euclides” (Campos, 1994, p. 2).

El método geométrico, además de lo ya dicho, tiene la particularidad de poderse entender ya sea por el camino de la síntesis o del análisis, por medio de la síntesis parece el camino que mejor se le puede dar al lector, pues es la forma en la que suele ser escrito el método geométrico, comenzado por los elementos más sencillos como las nociones comunes y se avanza con atención hasta los elementos más complejos como las proposiciones o demostraciones. Se examina la causa por sus efectos, “demuestra, a decir verdad, claramente todo aquello que está contenido en sus conclusiones, y se sirve de una larga serie de definiciones, postulados, axiomas, teoremas y problemas” (Angelis, 1968, p. 28). Basta con ver la obra de Euclides para notar lo dicho anteriormente. El método geométrico como puede leerse de forma sintética, es decir de los axiomas a las demostraciones, también puede leerse a la inversa, de forma analítica si se quiere, de las demostraciones a los axiomas, es cuestión de la vía que quiera tomar el lector para recorrer el método.

2.1 *Ἀνθυφαίρεσις (anthyphairesis)*. Reducción al absurdo y máximo común divisor

En consistencia con el sistema deductivo axiomático ya mencionado, traeré a colación el algoritmo de la antanairesis para Aristóteles o de la antipairesis para Euclides[6], todo ello con el objeto de evidenciar la forma en la que el método geométrico opera. Ambas palabras, antipairesis y antanairesis parten de su original en griego *ἀνθυφαίρεσις (anthyphairesis)*. Esta palabra griega nos devela en cierta forma su significado con la preposición *ἀνθυ (anty*), la cual nos indica un encuentro entre dos cosas. Tanto para Euclides como para Aristóteles, parto de la misma raíz griega, en cierto modo ambas palabras son sinónimas puesto que ambas refieren a una demostración siguiendo un orden coherente, en el que negar lo que se concluye, ciertamente, no es posible. Se puede decir que para Euclides la antipairesis cobra un sentido geométrico, en función de la concordancia entre un elemento y otro, Euclides encuentra que no puede ser posible que no exista una medida común para las magnitudes racionales e irracionales; para Aristóteles tiene, más bien, sentido en la lógica de predicados, más exactamente en el principio de la reducción al absurdo, en el que se resalta la imposibilidad de contradecir la conclusión que se defiende. Aristóteles en 41ª20 del Órganon, hace una analogía

[6] Se nombra el matiz aristotélico del concepto como una referencia, pero sobre el que se centra esta parte es el concepto con carácter euclídeo.

de este principio con la inconmensurabilidad de las magnitudes de las que habla Euclides, en la que se ve con claridad la estrecha relación entre uno y otro.

A continuación, hablaré de este algoritmo como parte importante del pensamiento euclidiano, pues este algoritmo resuelve una armonía entre partes. Esta cuestión se ve tanto en su obra "Elementos", como en el avance geométrico que se le atribuye al resolver este problema en su obra "Elementos" I y II. La antipairesis euclídea asienta un paradigma en el pensamiento de entonces, pues a partir de la antipairesis se desarrollará el máximo común divisor, algoritmo que sería la solución al problema de la conmensurabilidad de los inconmensurables planteado por los pitagóricos. Es allí el momento en el cual relacionaré los conceptos de *λόγος* o razón, y *αναλογος*, proporción. Luego de ello, como complemento, hablaré de su variante, la antanairesis aristotélica, la que puede ser entendida mediante el principio de reducción al absurdo.

En primer lugar, para abordar este tema, iré a la "infancia de la filosofía"[7]; unos siglos antes de Euclides, hasta Pitágoras y sus predecesores, Tales y Anaxímenes. Ya desde la época de Tales y Anaxímenes, se hacía hincapié por buscar el principio de las cosas en una observación detallada de la naturaleza. Era la incansable búsqueda por un principio común a todas las cosas, o más bien, los primeros intentos por ordenar el mundo mediante un sistema axiomático, que diera cuenta de forma incuestionable del orden o explicación de la naturaleza. En el caso de Tales y Anaxímenes, se buscaba un sistema sólido que explicara los fenómenos naturales, este sistema comenzaba a darnos pistas de la construcción de un edificio conceptual compacto y objetivo que sería desarrollado con rigor un par de siglos después. Los primeros pasos de este sistema tuvieron lugar a través de la observación de lo que ocurría en la naturaleza, de lo que ocurría en la *φύσις (physis)*. Estos intentos por buscar un principio para las cosas, incubaron una tradición que maduraría con Pitágoras y daría a luz su fruto, luego con Euclides.

> "Tales habría tenido razones muy serias para sostener que tras la aparente diversidad de los fenómenos hay un elemento común, que él denomina <<agua>>. Y tal sería el caso de Anaxímenes, cuando reduce las apariencias a fenómenos de condensación o de refracción de otro elemento primordial" (Pin, 2015, p. 22).

Este rumbo investigativo, el cual indaga por la búsqueda de elementos por los cuales podamos explicar sólidamente lo que pasa en la naturaleza, llegado al pensamiento pitagórico se topa con

[7]Mención que hace Víctor Gómez Pin, en su libro "Pitágoras" refiriéndose a la etapa del pensamiento pitagórico.

la idea de la armonía griega, *αρμονια* (*armonía*). Este concepto indica el juntar una cosa con otra en un orden placentero. En aquel entonces, la observación de la naturaleza parecía muy alejada de la armonía, pues este concepto tenía más relación con los cantos y música de orden sagrado. Cabe preguntarse ¿cómo Pitágoras encuentra la relación entre elementos o principios y armonía? Para dar una respuesta, se debe resaltar que la corriente de Anaxímenes y Tales muy seguramente fue enseñada a Pitágoras, es muy probable este hecho, por el contacto que los más antiguos, tuvieron con la cultura egipcia a cerca del conocimiento de las matemáticas; que además, es la cultura y el conocimiento con que también Pitágoras en sus viajes entró en contacto. Prueba de lo anterior es la anécdota histórica que se nombra más arriba, la cual narra el sacrificio hecatombe que los egipcios habrían ofrecido a Pitágoras por sus conocimientos sobre el triángulo rectángulo.

A Pitágoras se le atribuye la invención de un instrumento musical, el cual se llamó monocordio. Del nombre de este instrumento podemos fácilmente deducir que se trata de una cuerda única que produce sonidos congruentes entre sí., Gómez Pin (2105), respecto al monocordio nos indica lo siguiente:

> los sonidos no surgen de forma azarosa sino mediante regulación de la cuerda que los produce, la cual obedece a dos maneras de registro matemático (….) el número de vibraciones en las cuerdas, de tal manera que <<matemática>> es ya la cualidad misma del sonido susceptible de ser utilizado. Cuándo ya tenemos un conjunto amplio de sonidos bien diferenciados entre sí, a la hora de seleccionarlos para forjar la secuencia constitutiva de la frase musical, introducimos por algún método un criterio de combinación proporcional o armónico" (p. 22).

Con el funcionamiento del monocordio pitagórico, me atrevo a dar la respuesta a la pregunta por la relación entre elementos y armonía, pues este instrumento musical al poder construir armonías con números según la concepción griega de número, es decir, con magnitudes, escorzos, pedazos, o lo que solemos llamar números racionales, o más exactamente, la concepción de número que hereda Euclides de la ortodoxia pitagórica "Una unidad es aquello en virtud de lo cual cada una de las cosas que hay es llamada una" (Euclides def. VII.1). Se puede pensar que uno de los pensamientos más fuertes para Pitágoras y su escuela es la perfecta conjugación de partes o elementos entre un todo, así como el monocordio juega con las melodías, según se divida la cuerda proporcionalmente, la escuela pitagórica sienta el concepto de armonía, en relación a las magnitudes.

De lo anterior también se puede bien asumir que el *λόγος* o la razón, y el *αναλογος*, la proporción, tienen un evidente lugar en esta consigna pitagórica, la cual indica buscar una armonía entre elementos. Dado que tal relación de armonía y elementos no se puede dar arbitrariamente, entonces tiene que darse bajo criterios, en otros términos, tiene que darse bajo el ejercicio reflexivo de la razón. La razón o *λόγος* tiene que aplicarse proporcionalmente o análogamente a las partes. De la misma forma como se ejecuta la armonía en un sistema de melodías, por ejemplo, aplicada a la cuerda del monocordio, la armonía debe aplicarse a las cuestiones de la matemática como las magnitudes, según la escuela pitagórica.

> Así pues, los pitagóricos habrían empezado por constatar que las consonancias y armonías musicales respondían a relaciones numéricas, y animados por tal descubrimiento buscaron otros puntos de correspondencia entre los números y el mundo. El éxito les llevo entonces a considerar que << el entero cosmos es armonía y numero>> (Pin, 2015, p. 90).

Euclides de Alejandría, el profesor alejandrino, conocido por ser amable con sus alumnos y un personaje ácido con aquellos que trivializaron la geometría, hereda este lema pitagórico. Euclides estudia tanto este asunto, que encuentra una conciliación entre diferentes lenguajes numéricos que pusieron en aprietos a la doctrina de la línea pitagórica. Para los pitagóricos fue un problema de consideración hallar la conmensurabilidad entre dos magnitudes inconmensurables, el lado del cuadrado y su diagonal. Encontrar una armonía, una medida común entre este par de cosas aparentemente irreconciliables; la diagonal del cuadrado, una magnitud irracional y el lado, una magnitud racional, fue un problema de importancia para los pitagóricos, entre ellos Euclides.

Es de esta forma que la antipairesis se vuelve tan importante en la creación de un método geométrico para el profesor alejandrino, pues ordenar las partes placentera, razonable y objetivamente, es lo particular del método que perfeccionó. La antipairesis aparte de solucionar un problema que venía desde los pitagóricos, es también un esquema que le daría orden a la pila de apuntes de geometría que había antes de que Euclides los ordenara. Ahora bien, como ya lo dijimos antes, la raíz de la antipairesis euclídea, *ἀνθυφαίρεσις* (*anthyphairesis*), nos habla del encuentro de dos cosas, esta vez el encuentro entre dos magnitudes inconmensurables entre sí, la diagonal del cuadrado y el lado; esto nos presenta el encuentro entre dos lenguajes distintos; por un lado, los números racionales, es decir, números o magnitudes que se pueden dividir en partes iguales y, por otro lado, los números irracionales, los cuales no pueden ser divididos en partes iguales, dado que siempre quedará un segmento incompleto. Euclides logra solucionar este problema sobre la armonía de los pitagóricos, lo hizo con el máximo común divisor. La aplicación de la antipairesis o dicho formalmente como el método de sustracción recíproca[8].

De la anterior proposición podemos notar claramente la equivalencia entre número y magnitud, de la que ya se hizo mención párrafos más arriba. La operación que hace Euclides para hallar la conciliación de las distancias ya nombradas, es decir, la diagonal y el lado el cuadrado, se hace por medio de la resta recíproca de escorzos, buscando una proporción que valga para ambas distancias. En términos generales, lo que hace es dividir una magnitud en otras magnitudes, las cuales guarden una proporción entre sí.

> Euclides ofrece un método no menos eficaz para hallar la medida común máxima de dos números por el mismo método de sustracción recíproca sucesiva (*anthyphairein*). Puede que este método proceda de la determinación de razones entre dos secciones del monocordio- como sugiere A.Szabó-. Desde luego, la noción de *anthyphairesis* parece relacionada con un concepto de razón numérica anterior a Euclides (Euclides, Elementos I-VII, Trad. 2007, pág. 295).

En concordancia con lo citado sería muy acertado relacionar históricamente al algoritmo de Euclides con el funcionamiento del monocordio pitagórico, y en este trayecto histórico, engancharse con el principio de reducción al absurdo de Aristóteles.

La relación más evidente entre Euclides y Aristóteles se da fundamentalmente desde el principio de reducción al absurdo, también hay una conexión con los demás principios, aunque con menos intensidad. La reducción al absurdo nos presenta la demostración de la veracidad de una conclusión, considerando en primer lugar que negarla o decir que tal conclusión es falsa, nos conduce a una cadena de contradicciones o absurdos, lo cual constata que la conclusión es verdadera. También, la demostración de la resta recíproca nos indica que se debe

---

[8]Véase el esquema y la proposición dos del libro séptimo

conciliar una magnitud común entre una magnitud racional y otra irracional, puesto que negar que existe una medida que pueda medir tanto a la una como a la otra, de igual forma nos conduce en una cadena de divisiones entre segmentos al infinito. Aristóteles nos da una prueba del principio de reducción al absurdo que calza con el problema de la inconmensurabilidad de las magnitudes, de la que habla Euclides; en ambos pensamientos se quiere dar solución al problema que yace cuando hay un par de elementos que son contradictorios o inconmensurables. En Aristóteles que algo sea o no sea y para Euclides, una magnitud racional y otra irracional. En ambas posturas, se ha de concluir respecto a alguna de las opciones; Euclides concilia una medida común para ambas magnitudes, es decir, optando por encontrar una medida racional y Aristóteles concuerda con lo siguiente.

> Que la diagonal es inconmensurable <se prueba> porque lo impar se hace igual a lo par al suponer que sea conmensurable. Así, pues, que lo par se hace igual a lo impar se prueba por razonamiento; en cambio, que la diagonal es inconmensurable se demuestra por hipótesis, ya que en virtud de la contradicción se desprende una falsedad. En efecto, en eso consistía el razonar a través de lo imposible, en mostrar <que se da> algo imposible en virtud de la hipótesis <establecida> al principio (Aristoteles, Organon,trad.1995, 41a- 25-30).

Así pues, esta forma de demostración también es un pilar en el método geométrico, no solo es la fórmula para el algoritmo desarrollado por Euclides, también es el esquema que ordena la pila de contribuciones geométricas anteriores a Euclides. La antipairesis da un orden a los principios o lemas que son autoevidentes y de carácter objetivo, desde los cuales el método geométrico traza su trama. El propósito de desarrollar un discurso axiomático o sostenido en definiciones o principios de la mano con tal algoritmo ordena la conceptualización y la deducción de elementos, encontrando entre ellos una concordancia de segmentos perfecta dentro de un todo. Euclides construye una ciencia al resolver el problema planteado de los pitagóricos, y construye con ella al hacer parte clave el algoritmo en el método.

2.2. La demostración. Δείκνυμι (*Deiknymi*)

Euclides, y su libro "Elementos", al llevar a cuestas una gran herencia de la geometría egipcia, se le ha considerado como un grato expositor del concepto de demostración. Este concepto tiene como sentido el acto de dar a conocer las cosas, su equivalente griego es la palabra *Δείκνυμι (*deiknymi)*,* la cual significa simplemente "mostrar". El acto de mostrar, por lo general, se asumía con un matiz ciertamente jurídico o legal, específicamente referido al tema de la posesión de las tierras; aquí vemos cómo este concepto guarda una estrecha relación con la problemáticas sociales, como por ejemplo, las inundaciones que la sociedad egipcia sufría cada año. La relación entre el concepto y la problemática tiene sustento en el hecho de que el rio Nilo durante cada verano se desbordaba, y las tierras perdían sus linderos. Los terratenientes entraban a discutir por la cuestión de no tener con que, o no saber cómo "mostrar" a los legisladores los terrenos que les pertenecían. "Legisladores y filósofos realizan, pues, actividades paralelas. En ambos casos se intentan hallar nuevas respuestas, ahora sobre bases racionales, a las necesidades de la vida social" (Pajares, 2016, p. 21) Entonces bien, cuando hablamos de demostración no hablamos estrictamente de persuadir al otro a que crea que su discurso es erróneo o que está mal, a una refutación o a cuestionar las conclusiones o las premisas de otro según convenga, vale decir que este tipo de cosas corresponden a escuelas como la de Euclides de Megára[9].

La demostración griega en el tiempo de Euclides y Aristóteles se refiere más bien a una serie ordenada de proposiciones, las cuales deben ser incuestionables, no deben requerir prueba adicional alguna por su carácter universal. Dicho de otra forma, la demostración griega exige una cierta axiomatización. Podríamos decir que estos requerimientos de demostración griega implican valerse de proposiciones universales, este planteamiento se incuba y se consolida desde el principio de no contradicción aristotélico "<< Lo que es>> se dice tal ya accidentalmente ya por sí mismo" *(*Aristóteles, Organón, trad 1995,1017a5) Esto se refiere a que algo es verdadero en sentido que cumple con sus accidentes o cualidades, en otro sentido, una cosa no puede cumplir con los accidentes de sí mismo y de otra cosa a la vez, una cosa no puede ser dos cosas al mismo tiempo, como por ejemplo, un número no puede ser par e impar al tiempo.

> Además, 'ser' y 'es' significa que algo es verdadero, y 'no ser' que no es verdadero, si no falso, lo mismo en la afirmación que en la negación. Así, que Sócrates *es* músico significa que tal cosa es verdad, o si bien, que Sócrates *es* no-blanco que < tal cosa> es verdad; por el contrario, que la diagonal *no es* conmensurable <significa> que es falso < que lo sea> *(*Aristóteles, Organón, trad 1995,1017a5).

[9]Euclides de Megára, fundador de la escuela megárica. Discípulo de Sócrates, no confundir con Euclides de Alejandría.

De lo citado, se hace una referencia al principio de no contradiccion, en el que se prueba la validez de una conclusión y se infiere que la diagonal como magnitud es conmensurable, la incomesurabilidad de una magnitud no tiene cabida. Es entonces donde se nota una fuerte tendencia a la necesidad de acudir a principios o proposiciones que no requieran una prueba y esa prueba de otra prueba o de una regresion al infinito; como por ejemplo, se acude a las cualidades de alguna cosa para decir que 'es', luego se añade que es incongruente que ese algo 'no sea' y así con ello da cuenta que es falso que la diagonal de un cuadrado como una magintud pueda ser par o impar al tiempo.

En concordacia, parece haber una cierta similitud entre la teoría aristotélica y el método geométrico de Euclides. Es claro que la forma en la que se explicaba el mundo según los geómetras de Egipto llegó a la antigua Grecia por el intercambio cultural que se nombró al principio. La convergencia entre estas posturas se evidencia, por ejemplo, en cuanto a que Aristóteles hablaba de un punto como principio, concordando con Euclides. De cierto modo, se puede ver que en ambos se hablan de figuras geométricas; Euclides enseña cómo construirlas y Aristóteles las usa como un recurso para hacer explicaciones sobre la naturaleza. También en ambos se construye un cuerpo de propociones. Seguido de ello se deriva un subconjuto de afirmaciones, para después concluir algo del subconjunto. Aunque esta forma de desmostración en Aristóteles no se da al modo geométrico como en la obra de Euclides, ambos construyen un cuerpo de conocimientos "la forma deductiva de los Elementos evidencia y consagra la universalidad de aplicación que era capaz la lógica de Aristoteles" (Durán, 2002, p. 652).

Asi pues, tanto en Euclides como en Aristóteles se observa la creación de un sistema ordenado que no pretente refutar a otro, sino mas bien "demostrar" al juicio de todos las cosas como son, pues estas demostraciones se basan en definciones universales. No solo cabría hablar de la invención griega, sino de la fundación griega de nuestra idea clásica de demostración (Vega, Sobrela invencion griega de la demostracion, 1985, p. 155) Lo curioso de esta relación es que así como ambas teorías surgieron en un momento similar en la historia, alrededor del siglo III y IV a.c, también perduraron en el tiempo y se establecieron como el paradigma o el modelo de la lógica, Aristóteles en la argumentación y Euclides en la geometría; a la misma vez se vieron reformuladas alrededor del siglo XIX. Los cuestionamientos a la lógica aristotélica coincidieron con la aparición de la geometría no euclídea, la cual no es que niegue directamente los conocimientos de Euclides, sino que reformula la geometría a partir de la quinta definición de "Elementos", la cual habla de las líneas paralelas. Matemáticos estudiosos de la geometría como Lobachevski, Bolyai y Gauss fueron los exponentes de este estilo de geometría, que aunque como tal no refuta la del siglo III a.c, sí se reconoce que dio paso a planteamientos nuevos a partir del examen de las definiciones euclídeas.

> El paralelo/ contraposición Euclides-Aristóteles no es nuevo, sino más bien todo lo contrario. Mucho se ha discutido sobre este asunto, y cabe pensar que se siga haciendo, aunque no es fácil adivinar qué nuevos elementos de juicio podrían modificar los planteamientos hechos hasta nuestros días(….) el estudio histórico de las obras que han dejado su huella en la concepción filosófica de la ciencia, los elementos de Euclides se presentan inmediatamente después de los Analíticos de Aristóteles. Una y otra han tenido el mismo destino: han atravesados los siglos alejadas de todo aquello que podría precederlas y seguirlas ofreciendo en el marco de un rigor que parecía irreprochable y señalando una cumbre de perfección cuya superación era empresa desesperada. Mediante ellas la razón antigua ha modelado, en cierto modo, el pensamiento moderno (Durán, 2002, p. 651).

Desde este recorrido, puedo concluir que la obra de Euclides, ciertamente es reflejo de la teoría aristotélica, es un proyecto con mucha riqueza que vale la pena escudriñar, pues el proyecto euclídeo puede tomarse como un paralelo con la obra aristotélica. Como ya se sabe, la obra del estagirita constituye un cuerpo de conocimientos muy valiosa para el pensamiento antiguo; de la misma forma, el pensamiento de Euclides reflejado en el la geometría, aunque menos visible que la doctrina aristotélica, también constituye un cuerpo de conocimientos muy importantes respecto al estudio del espacio, la investigación y construcción de la ciencia al método geométrico y la pedagogía basada en el rigor y la construcción del conocimiento.

3. El elemento *(ςτοιχειον)* y el elementador *(ςτοιχειοτης)*

Euclides, el profesor alejandrino, dio nombre al sistema geométrico deductivo basado en la observación rigurosa de la naturaleza, en este compiló los estudios geométricos de pensadores anteriores a él, como "Elementos". Con el fin de explicar un poco más afondo la promesa del título de esta obra, definiré la palabra elemento desde su equivalente del griego antiguo, la lengua en la que la obra fue escrita. La palabra para "elemento" se traduce de su igual griego *ςτοιχειον (estoikeion*). Esta palabra, en un uso cotidiano en la época viva del griego clásico, significó una porción o escorzo similar a las particiones del reloj para indicar una hora del día o, también, el sonido inicial de una palabra. En general se le dice elemento una parte que compone un todo.

> En torno a los principios, si ha de suponerse que son principios y elementos los géneros, o si lo son, más bien, los constitutivos intrínsecos primeros a partir de los cuales cada cosa es: así de la voz parecen ser los elementos y principios los constitutivos primeros a partir de los cuales se componen las voces, y no el universal <<voz>> ; y decimos que son los elementos de las demostraciones geométricas, aquellas proposiciones cuyas demostraciones están contenidas en las demostraciones de las demás (Aristóteles, Organón, trad.1995, 998 a 25).

En lo que refiere a la geometría respecto a Euclides, un elemento viene a ser una partícula que depende de la siguiente, en sentido de que los elementos están relacionados entre sí, son parte de una construcción en la cual todas las partes se sostienen unas con otras. Dicho de otra manera, es una forma para explicar la coherencia entre partes, un elemento hace referencia a la proposición que implica la prueba de otras proposiciones; lo que se refiere al enunciado particular, que si bien se sirve de sí mismo para ser demostrado, sirve a otros para de igual modo demostrarse.

> Llaman elemento a aquello que, siendo uno y pequeño se aplica en muchas cosas, y de ahí que lo que es pequeño y simple e indivisible se denomine elemento. De donde resulta que las cosas máximamente universales son elementos, ya que cada una de ellas, siendo una simple, es inmanente en muchas cosas, en todas o la mayoría; y de ahí resulta también la opinión de que la unidad y el punto son principios (Aristóteles, Organón, trad.1995,1014b5).

El concepto de elemento en el contexto euclidiano[10], significa principio o comienzo, un comienzo que le da paso a una serie progresiva de operaciones. En este sentido sería plausible hablar de Euclides como el elementador o *'ο ςτοιχειοτης* (*ho estokeiotes*), puesto que así como sus elementos dan paso a la deducción progresiva de proposiciones, Euclides, como el elementador, es a su vez el creador de su obra compuesta de elementos de geometría, es

[10]sinónimo de la palabra *αϱχη* (*arjé)* comienzo.

Euclides el punto de partida de la producción de conocimiento dentro de las investigaciones de su ortodoxia. Este autor aparte de ser un profesor diestro en geometría, también enseña a sus estudiantes a construir una ciencia, un conocimiento consistente y fundamentado en la observación rigurosa de la naturaleza, fértil y provechoso para la sociedad.

3.1. Euclides, el profesor de geometría alejandrino

De Euclides de Alejandría no se tienen muchas referencias. Sobre la vida de este personaje se sabe que es uno de los geómetras griegos más importantes, que vivió entre el siglo III y IV a.c, contemporáneo al diádoco Tolomeo Soter I. De él también se sabe que fue profesor en la Escuela de Alejandría de Platón. Aparte de los datos anteriormente mencionados, se saben algunas anécdotas contadas por Proclo y Iovannes de Estobeo, entre otros comentaristas, anécdotas en las que en ocasiones lo hacen ver como un estudioso de la geometría poco simpático, y otras como un profesor comprensivo y afable. Euclides, como ya se sabe, aunque es el ícono de la geometría griega, es un observador riguroso de la naturaleza, no es el creador de la geometría, pues la geometría es una ciencia que surge tras la observación de la naturaleza; tampoco es el inventor del estilo en el que escribió su más reconocida obra, Elementos I y II, ese estilo de escribir, plasmado en nociones comunes, proposiciones, demostraciones, ya había sido expuesto en escritos sobre astronomía y óptica, entre otros, aunque no con la misma rigurosidad en que lo hizo Euclides.

Euclides toma importancia cuando la obra del profesor alejandrino dio cuenta de forma rigurosa, de las maneras en que los objetos de la naturaleza pueden ordenarse en el espacio; es decir, por ejemplo, dar cuenta sobre cómo la tierra puede dividirse, sobre cómo podemos clasificar y trazar figuras en la naturaleza. La geometría es una ciencia que emerge de una profunda y rigurosa observación a la naturaleza, la cual tiene como objetivo el estudio y la búsqueda de conocimiento fiable de lo referente al espacio. Como ya lo vimos, este estudio se remonta desde los sacerdotes egipcios que adoctrinaron a Tales, Anaximandro, Pitágoras, Eudoxo, Teeteto y Papo, entre otros, quienes aportaron en buena medida a la construcción de una ciencia, cuyos conocimientos no se quedarían estáticos y contribuyeron como solución a los problemas de entonces. La geometría desde esos tiempos es comprendida como la ciencia que estudia el espacio y el posicionamiento de los cuerpos en éste, Euclides de Alejandría el profesor alejandrino por el siglo III a.c, toma el lugar principal en el reconocimiento de las obras de geometría. El reconocimiento llega porque su trabajo se sostiene en la labor rigurosa de perfeccionar las obras anteriores a él, en estudiarlas, afinarlas y, sobre todo, hallar un orden para ellas mediante el perfeccionamiento del método geométrico, el cual venía siendo desarrollado por los astrónomos. Euclides ubica a las obras anteriores a él como aquellas que carecen de un orden, pues aunque como tal Euclides no pudo haber escrito su obra sin los avances de sus predecesores, hay que reconocer que este fue quien consolidó y ordenó aquella pila de aportes de 300 años. Como lo menciona Vega (2007) "Es Euclides quien compiló los elementos poniendo en orden varios teoremas de Eudoxo, perfeccionando muchos resultados de Teeteto y dando así mismo pruebas incontestables de aquello que sus predecesores solo habían probado con escaso rigor" (p. XII).

El estudio riguroso, principal característica de la obra del alejandrino, es la semilla que en sus estudiantes se germinó como la construcción y cultivo del conocimiento, al mismo tiempo que se cultiva el estudiante, como se verá más adelante. Euclides de Alejandría impulsó la búsqueda del conocimiento que no pretende alguna ganancia material, como la riqueza o banalidades como la fama. Si bien las contribuciones de Euclides como la de sus predecesores fueron altamente valoradas, esto no obedece al afán por ser alabados, sino porque sus contribuciones sobre geometría eran una lectura muy valiosa del espacio y dieron solución a muchas problemáticas que aquejaban a la sociedad de entonces.

3.2. La propuesta pedagógica del profesor alejandrino

En relación con los parágrafos anteriores, diríamos que Euclides, dentro de su doctrina, estando en su papel de profesor en la escuela de Alejandría, además de apadrinar a sus discípulos para enseñarles sobre teoremas, también los cobijó en un círculo académico serio, en donde se indagaba rigurosamente por el conocimiento sustentable y organizado. La clave del éxito del grupo de estudio de la geometría que diría Euclides está en la fiabilidad de sus conocimientos. Ellos resultan de un método deductivo cuya particularidad es que los elementos más restringidos como definiciones y postulados, dan paso a otros elementos que alimentan a una conclusión incuestionable, que se obtiene con la suma de todo lo anterior, esto con el objetivo de "perfeccionar la intelección del conjunto de la geometría por parte del estudiante" (Euclides, Elementos I-VII, 2007, p. XXIV). La riqueza de este método para el aprendiz o alumno es bastante significativa, pues aparte de aprender un teorema sobre geometría plana, también aprendía el método deductivo del cual sacar conocimientos sólidos aplicables en la realidad y que se pueden conectar con otras ciencias. Como se dijo más arriba, la geometría dio un paso significativo en el momento en que la observación rigurosa dio paso a la aplicación de lo que se estudiaba y proporcionó una solución a una problemática de la sociedad, como la organización de las tierras de la sociedad egipcia, el establecimiento de fechas para los cultivos, la elaboración de mapas, entre otras cosas.

Indiscutiblemente todo este camino deductivo iniciaba desde el maestro, iniciaba desde Euclides, "el viejo profesor alejandrino no solo enseña una ciencia, sino que, en cierto modo, parece empeñado en enseñar a aprenderla y a construirla" (Euclides, Elementos I-VII, 2007, p. XXIV). He aquí el valor pedagógico de Euclides, aprender a construir una ciencia y aprender a construir con ella. Los estudiantes del geómetra alejandrino, bajo esta condición, no solo tenían un compromiso con aprender lo que se les enseña, sino que también tenían un compromiso con ellos mismos. Construir una ciencia y construir con ella, también implica una construcción del estudiante como sujeto en la sociedad, pues al involucrase en la investigación y en el estudio de la geometría, se excluye todo aquello que sea banal y superfluo, de todo aquello que afecte al desarrollo intelectual de una sociedad. Para estudiar geometría, el estudiante requiere determinación para a llevar a cabo un estudio riguroso, que ayude a la construcción de una ciencia, una ciencia que estudia todo lo referente al espacio. En otras palabras, el estudiante necesita mantenerse al margen de la ambición del dinero y banalidades; pues de no ser así, el estudio arduo y riguroso, se vería corrompido, infértil, e inútil para la sociedad. Este compromiso personal del estudiante, refleja asimismo un compromiso con la sociedad.

Desde aquellos tiempos, la geometría tiende a asociarse con el hermetismo, con que es un grupo cerrado o aislado. Puede que lo sea en la medida en que excluye las cosas que alejan al estudiante del gusto por el estudio, la investigación y la curiosidad de ir más allá de lo que aparece a simple vista. Sin embargo, pese a algunos detractores, la geometría fue muy apreciada por la sociedad, ya sea porque los geómetras compartían sus avances y así, una solución a los problemas de aquel tiempo, una forma nueva de explicar el mundo, todo ello, sin pedir retribución alguna. La percepción de la geometría en las sociedades antiguas fue favorable, porque el estudio de la geometría no estaba contaminado de caprichos autoritarios o monetarios y aparte sus avances significaban una contribución a la sociedad. La propuesta pedagógica del Euclides de Alejandría es una propuesta muy completa, involucra la construcción de la ciencia, un conocimiento riguroso; la construcción de un sujeto dado a la búsqueda del saber y a la construcción de una sociedad. Valdría la pena investigar en otra ocasión la propuesta ética de la geometría.

El aporte pedagógico de Euclides pone de manifiesto un conocimiento construido con tal rigurosidad, que era difícil de ignorar para los reyes, ciudadanos, esclavos, sacerdotes y otros. La geometría a la vez de ser una ciencia construida de un profundo estudio, la cual construye un sujeto, es un conocimiento para la sociedad. Entonces, la geometría aparte de contribuir al desarrollo de esta sociedad, cultivó el conocimiento, un método, una ciencia, independiente de los beneficios banales. Bien puede decirse que hay una fuerte relación entre la sociedad y la ciencia, puesto que el desarrollo de una indefectiblemente depende de la otra.

3.3. Habilidades geométricas desde Euclides de Alejandría

Para comenzar a hablar de habilidades geométricas, antes de cualquier cosa, debemos insistir en que Euclides de Alejandría, aparte de ser un conocedor de la matemática griega debido a su herencia pitagórica, es sobre todo un profesor, que según cuentan, fue atento y accesible con sus estudiantes pero ácido y frio con aquellos que banalizaron el aprendizaje y la enseñanza de la lógica. Tal pensamiento se recoge en su conocida consigna “no hay camino de reyes en geometría” de la cual ya se habló anteriormente. El carácter pedagógico de este profesor alejandrino, como ya se dijo, reside en que es más importante enseñar a construir una ciencia que aprender conocimientos ya establecidos. Diría que esta característica tan especial de nuestro profesor alejandrino propone ciertamente una constante búsqueda de conocimiento, una constante corrección, perfeccionamiento y afinación de aquello que se investiga. Puede leerse que el conocimiento para Euclides no tiene un buen sustento si no se ejercita, si no se examina una y otra vez, si no se le suma un sustento cada vez, si no se construye algo a partir de ello. Esta práctica bien puede relacionarse con el hecho de volverse habilidoso en algo, en este caso volverse un habilidoso en geometría, o tener habilidades geométricas. Pero, ¿qué es una habilidad?, acá me remito directamente al concepto de habilidad que usaban los griegos, el concepto de *πολυμεχανία* (polymejanía). Esta palabra se refiere a un mecanismo que se acciona muchas veces, o a repetir muchas veces una acción para desarrollar una destreza del sujeto.

En otros términos, una persona se hace hábil en la medida que se da cuenta de las capacidades que adquiere con la experiencia. Este concepto en su época viva aplicaba para alguien que, por ejemplo, había viajado mucho y que por ello era hábil para desplazarse por las tierras, o de una persona que continuamente desarrollaba una técnica y por ello era hábil para realizar algún arte. La repetición constante de una actividad hace a una persona hábil. Por otro lado, diría que parece que esta habilidad que se constituye por medio de la repetición ya está en el sujeto, está implícita en él, sino que esta se hace evidente en el sujeto cuando se realizan constantemente las actividades pertinentes para sacar la habilidad a la luz. Así, muy seguramente, Euclides hizo a sus estudiantes hábiles en geometría, como efecto de la estricta ortodoxia de la cual fue profesor en aquellos días. Ahora bien, para hablar de las habilidades geométricas según Euclides, tomaré la propuesta de otros pedagogos, que aunque muchísimo más recientes, hacen una clasificación que muy bien puede encajar con el pensamiento euclídeo.

Así las cosas, podré como referencias tanto las habilidades que propone Alan Hoffer y el modelo de niveles de pensamiento geométrico de la pareja holandesa van Hiele. La relación entre estas dos partes los van Hiele y Hoffer, viene a darse en una especie de cuadrícula en la que cada una de las cinco habilidades de Hoffer, se corresponde con alguno de los cinco niveles de los van Hiele, es decir que cada habilidad, tiene un nivel. Con ello podemos determinar el nivel de habilidad que se tiene en la geometría. Así pues, las habilidades de Hoffer comprenden actividades claves que ya se mencionaron a lo largo de este capítulo. Presentaré de forma ordenada, de esta manera, las habilidades que propone Hoffer: visual, verbal, de dibujo, lógica y para modelar.

Aquí, fácilmente podemos concordar en que las actividades de los griegos, desde la época de Tales, daban cuenta de una observación, de un enfrentamiento visual con la naturaleza, luego de esto adquiría una comunicación verbal de aquello que se observaba, posteriormente, a una esquematización, así como en el trabajo de Euclides, en donde se ven gráficas que reconstruyen lo que expresa con sus palabras, para desde luego, aplicar un criterio sólido, o hallar una relación lógica, que después culmina en una habilidad para modelar, o más bien, abstraer un criterio y poder "meter mano" en el alguna problemática a resolver. Cada una de estas habilidades se fortalece a medida que se repite una y otra vez, hasta ir superando cada vez mejor las dificultades, o como lo plantean los van Hiele, ir pasando por niveles de pensamiento desde lo más básico como el reconocimiento e ir avanzando al análisis, luego al ordenamiento, después a la deducción y culminar en el rigor.

> La actividad que realice el estudiante para desarrollar su capacidad de razonamiento debe orientarse a hacerle consiente de esta habilidad implícita; para ello será necesario

> plantearle actividades en las que requiera la utilización de dicha habilidad, ya que la practica repetida y la experiencia son las que darán lugar al desarrollo de su forma de razonar (Pastor & Gutierrez Rodriguez, 1990, p. 312).

Los niveles de pensamiento de los Van Hiele serán una manera de evaluar qué tan desarrollada tiene la habilidad el alumno, puede ayudar como indicador de evaluación de un profesor. Aunque esto no deja de ser importante, el punto fuerte aquí son las habilidades geométricas que tomaré de A. Hoffer como estrategia para desarrollar ciertas habilidades lógicas. Tomo estas habilidades geométricas porque ellas indican que, al igual que una araña o una abeja que resuelve un problema espacial sin la lección de Euclides, las personas muestran habilidades geométricas desde el momento que pueden distinguir el espacio que los rodea y pueden resolver problemas que refieren al espacio. Por ejemplo, saber dónde se encuentra un objeto X ya demuestra que una persona, sea un niño pequeño o un adulto, tiene conocimiento del espacio que le rodea. Profundizaré más en esta idea.

3.3.1. Observación

La visualización es una habilidad geométrica, por la que se inicia la investigación en esta ciencia. Los primeros pesadores como Tales o Anaximandro elaboraron muchos de sus avances por la observación de la naturaleza y, por supuesto, la confirmación de lo que observaban era en sí, el mismo curso natural de las cosas, como por ejemplo la predicción de los eclipses que se confirmaba con el mismo acontecimiento del eclipse. La observación como habilidad geométrica tiene el carácter de ser la primera instancia en la que se conoce el espacio. "La geometría es claramente un tema visual, pero con demasiada frecuencia sus aspectos visuales han servido principalmente como una herramienta de comprobación"[11] (Hoffer, 1981, p. 11). De esta manera, por la observación de su entorno es que cualquier persona puede iniciar en la investigación guiada a la geometría, de una simple vista se puede llegar una especulación muy nutrida.

3.3.2. Verbalización

La verbalización como habilidad geométrica requiere un estudio más profundo, requiere el uso del lenguaje geométrico (áreas, lados, ángulos, círculos). El inicio de esta habilidad puede darse con un lenguaje poco preciso en cuanto a términos, pero como habilidad, puede desarrollarse

[11] Geometry is quite clearly a visual subject, but all too often it's visual aspects have served primarily as a toll proofs

al punto de manejar un lenguaje más riguroso para expresarse. En los "Elementos" de Euclides, se puede ver el avance en la adquisición de un lenguaje riguroso, si se empieza desde la primera definición respecto al punto, y conforme se avanza se llega al uso de un lenguaje geométrico muy riguroso. "Las formulaciones precisas pueden ser aplicadas a los estudiantes antes de que estén listas, antes de que tengan la oportunidad de describir los conceptos mismos y reconocer la falta de precisión en sus declaraciones"[12] (Hoffer, 1981, p. 12).

3.3.3. Esquematización

La esquematización es el paso delante de la habilidad anterior, dado que es la forma en la que una persona puede darle a entender a otra una cuestión espacial usando un dibujo o esquema que soporta lo que se dice verbalmente. Anaxágoras es un muy buen ejemplo. Este hombre dibujó un mapa que fue de mucha importancia para las rutas comerciales de las islas griegas por el mediterráneo, Asia y Egipto; es decir que Anaxágoras elaboró un esquema de las tierras que conocía. Como geógrafo, conocía muy bien el leguaje de la medición de tierras y aparte daba cuenta de una observación rigurosa de su entorno. "Las habilidades de dibujo pueden, y probablemente deberían, construirse con regla, en las primeras etapas del proceso ayuda a los estudiantes a comprender las propiedades de las figuras"[13] (Hoffer, 1981, p. 12). La habilidad de dibujo esquematización puede ser una buena forma de ver como se interpreta el espacio.

3.3.4. Lógica

La lógica como habilidad geométrica es la que hace que el estudiante vea una coherencia entre todo lo que ha aprendido, que evite memorizar y repetir sin antes preguntarse la relación que hay entre una cosa y otra. Invita a tomar una postura y a dar una explicación coherente, una explicación sólida. Esta habilidad, a mi parecer, fue la que más se desarrolló en las lecciones de Euclides, en su rol como profesor. Euclides, además de enseñar teoremas, quería que sus estudiantes construyeran con lo aprendido, que vieran la solidez del cuerpo de conocimientos que habían aprendido y que dieran continuidad siguiendo la coherencia de las investigaciones, desde entonces se sabía que repetir sin más no construye, en cambio relacionar coherentemente un cuerpo de conocimientos alimenta la investigación, la vuelve fértil.

[12] Precise formulations may be thrust on students before they are ready - before they have the opportunity to describe concepts themselves and recognize the lack of precision in their statements.

[13] Drawing skills can and probably should straightedge constructions early in the course helps students understand properties of figures

> La geometría es una de las asignaturas escolares que ayuda a los estudiantes a aprender a analizar la forma de un argumento y reconocer argumentos válidos e inválidos en el contexto de figuras geométricas, en caso de estrés, en problemas de la vida cotidiana[14] (Hoffer, 1981, p. 12).

La lógica como habilidad geométrica, es una semilla que todas las personas en el general pueden darse a la tarea de germinar y ver sus frutos. A mi modo de ver, esta habilidad es muy importante para la construcción del conocimiento y el desarrollo cognitivo de las personas. Esta habilidad fomenta la capacidad de ampliar y afinar un cuerpo de conocimientos o de criterios que las personas hacen a lo largo de la vida, dado que invita a examinar una y otra vez lo que se aprende con el fin de que cada vez los razonamientos sean más concretos y sólidos. La habilidad lógica es la que hace que los razonamientos que pueda hacerse una persona no se queden inertes, es la que impulsa a alimentar, evaluar, un cuerpo de conocimientos y a aplicarlos en la vida en sociedad.

3.3.5. Modelar/ Manipular / Aplicar

Esta habilidad trata de darle una aplicación a lo aprendido en alguna situación de la vida, como cuando los geómetras egipcios solucionaron la división ordenada de las tierras tras las abnegaciones de las tierras cercanas al rio Nilo. Esta habilidad es la que ciertamente reúne el rigor de todas las anteriores, implica un estudio muy arduo y completo del espacio. Se trata del acto darle una continuidad, del aporte del estudiante. Según Hoffer, Euclides es el mejor ejemplo de esta habilidad, aprendió de las cosas anteriores a él, enseñó la disciplina geométrica, solucionó el problema pitagórico de la inconmensurabilidad de las magnitudes y aparte de ello, ordenó la pila de aportes anteriores a él en "Elementos" "Uno de los mejores ejemplos tempranos de un modelo matemático se encuentra en Elementos de Euclides, que puede haber sido el resultado de un intento de describir el universo lógicamente, como era conocido por los griegos"[15] (Hoffer, 1981, p. 12).

---

[14] geometry is one of the school subjects that helps students learn to analyze the form of an argument and recognize valid and invalid arguments in the context of geometric figures and, if stressed, in problems of daily life.

[15] one of the best early examples of a mathematical model is found in Euclid Elements, which may have been the result of an attempt to logically describe the universe as it was known to the Greeks.

-Capítulo 2-

La lógica geométrica y la geometría de la lógica

En el estudio de la geometría que se ha hecho en este trabajo, he expuesto varios temas de importancia respecto del método geométrico euclídeo y las habilidades geométricas que pueden desprenderse de este método. He dedicado una parte significativa a la anterior sección, la cual explica cómo opera el método geométrico, cuál es su valor pedagógico y qué habilidades se pueden resaltar. Ahora bien, es momento de articular todos estos argumentos con el campo de la lógica, pues la lógica y su enseñanza es lo que se pretende apoyar en este trabajo.

1. Lógica aristotélica

Aunque Aristóteles dentro de sus escritos sobre lógica no utiliza propiamente la palabra "lógica", se puede rastrear qué significa este concepto dentro del pensamiento aristotélico. Para esto acudiré a las raíces griegas de los términos, mostraré qué elementos constituyen la lógica aristotélica y, de esta forma, hallaré la relación entre la teoría euclidiana y aristotélica.

Inicio con uno de los conceptos que se trataron en el apartado anterior, el de *logos*. Este concepto se definió anteriormente como razón; pero no tiene un solo significado, tiene diferentes interpretaciones que aunque no se alejan de la definición de razón, implican diferentes variaciones. Lo mismo sucede con conceptos como razonamiento, explicación, definición, afirmación, orden o sentencia.

Parte de lo que compone Aristóteles en sus escritos sobre lo que se ha denominado como lógica aristotélica, tiene que ver con lo que se ha dicho sobre *logos*. En griego clásico existe una palabra que se asemeja un poco más a la palabra lógica: *λογικός (logicós),* pero esta solo alude a la mente o al espíritu. La palabra *logos* es más coherente con lo que Aristóteles entiende como lógica, *logos* es una palabra que a pesar de sus múltiples significados, cuando se la trata en relación al orden y al razonamiento coherente, también significa el acto de discutir filosóficamente, que no es otra cosa que argumentar en filosofía, sus múltiples variantes indican un buen razonar. Dicho acto argumentativo, se vale de una serie componentes que lo alimentan. Con el fin de comprender mejor, nombro unas palabras que comparten la misma raíz y que alimentan la definición de lógica aristotélica: una muy utilizada por Aristóteles es la palabra silogismo, cuyo equivalente en griego clásico *Συλλογισμός (*silogismós) se puede traducir como razonamiento, o conclusión valida; o *Λογισμός* (logismos) la cual traduce cuenta, cálculo, consideración, pensamiento o reflexión. Aparte de aquellas palabras que comparten la raíz, también el acto argumentativo se relaciona con palabras como demostración, *Δείκνυμι* (deiknymi), cuyo significado indica acciones como sacar a la luz, revelar, probar o declarar; análisis, *ἀνάλυσις* (análysis), la cual traduce solución o estudio minucioso. Esto explica que para Aristóteles la lógica es un instrumento para conocer en un sentido científico y que opera considerando los conceptos anteriormente mencionados. Miguel Candel Sanmartín (1982) indica que "La «lógica» aristotélica no es, pues, episteme, conocimiento; es mero órganon, instrumento del conocer" (Introducción al Organon,trad.1082 p.8). No por nada el tratado de lógica de Aristoteles adopta el nombre de Organon, cuyo equivalente en griego clasico es *ὄργανον (*organon), que indica un instrumento o herramienta útil. Este instrumento o herramienta tiene como objetivo servir a la argumentación, al razonamiento, bajo formas dialécticas [16] de exposición y demostración acerca de conocimientos sólidos como el conocimiento cientifico. El Organon es un compuesto de obras[17] que se destacó por ser la primera investigación sistemática sobre el razonamiento válido, el Organon fue interpretado por los filósofos como una propedeútica para la filosofía, por su carácter investigativo.

1.1. Lógica: de la demostración jurídica a la demostración científica. El vínculo de la geometría euclídea con la lógica aristotélica

En el capítulo anterior, en varios de los apartados se insinuaron cosas que están muy relacionadas con lo que se ha establecido como lógica, tal como la coherencia y construcción de un cuerpo de conocimientos, la ciencia, la cadena de elementos del sistema axiomático y la ordenación de razonamientos, entre otras cosas similares. Aquí desarrollaré la idea de que todas estas cosas son las que muestran una evidente articulación de la geometría con la lógica. Ahora bien, la forma de comenzar a entender esta coyuntura, será desde el concepto de demostración, el cual tiene dos matices: el jurídico y el científico.

La demostración es un concepto que está muy presente en la geometría de los griegos, por supuesto, también en la geometría euclídea. En la geometría de Euclides la demostración tiene

[16] Entiéndase dialéctica como la técnica de la conversación.
[17] Categorías (sobre las relaciones entre el sujeto y el predicado), Sobre la interpretación (hermenéutica del sujeto con el lenguaje) Primeros analíticos, (Propedéutica del conocimiento general), Segundos analíticos (metodología sobre el conocimiento), Tópicos (sobre la dialéctica aristotélica), Refutaciones sofisticas (sobre refutaciones aparentes o razonamientos desviados).

la característica principal de ser un razonamiento que indica una prueba mediante un argumento coherente y sólido. Este concepto constituye un cimiento para la construcción de una ciencia y a su vez, pretende que exista trasparencia en el cuerpo de conocimientos, conformado por nociones comunes, proposiciones y teoremas. El concepto de demostración toma un buen lugar en la obra de Euclides, dado que con ella se puede probar qué tan sólida es la relación entre los elementos. La forma de argumentar del método geométrico puede rastrearse en los tratados lógicos de Aristóteles, que aunque no haga como tal una exposición al método geométrico, sí alude a muchas cuestiones sobre este.

> De las cosas indefinidas no hay ciencia ni razonamiento demostrativo, por ser inestable el <término> medio, en cambio, de las que es natural que se produzcan, sí lo hay, y casi <se puede decir que> las discusiones y las investigaciones tienen lugar sobre las cosas que son admisibles de este modo; en cambio, sobre aquellas <otras cosas admisibles>, cabe realizar un razonamiento, pero no se suele investigar (Aristoteles, Organon,trad.1995, 32b- 20).

En concordancia, es admisible decir que de aquellas cosas que son definidas, se puede investigar y por tanto hacer razonamientos demostrativos, cuestión que bien puede leerse en la obra de Euclides de Alejandría. Su obra "Elementos" comienza precisamente con definiciones, elementos universales, que se asienten de manera natural y, a partir de allí, una sucesión de elementos más complejos que pretenden soportar la demostración de aquello que se quiere probar en los teoremas, lo que alimenta al carácter científico de la geometría. El concepto de demostración prueba qué tan consistente es el cuerpo de conocimientos que se estudia.

Se puede decir que el carácter probatorio del concepto de demostración proviene del matiz jurídico y social del concepto original, pues los habitantes de las tierras circundantes al mar mediterráneo debían demostrar o probar ante las leyes de los gobernantes las extensiones de tierra o propiedades, denuncias, las defensas, etc., con argumentos sólidos y transparentes. Esta demostración jurídica de cierta forma fue la que la que heredó la ciencia que expone Euclides de Alejandría.

Por esta región, hubo un pico de migraciones, lo que enriqueció los puntos de vista en la forma de explicar el mundo. Esta tasa tan alta de desplazamientos fue el ambiente óptimo para el crecimiento de la geometría y otras ciencias. También fue el ambiente para ver la necesidad de buscar formas de organizar la sociedad, que se tornaba cada vez más variada y colorida. El ejemplo que más se destaca es el auge de migrados a las colonias griegas de Asia menor y Egipto. De esta multiculturalidad se procuró una forma de organizar leyes para el manejo de cada sector de la sociedad.

> Hay que contar con el enorme número de movimientos migratorios de los griegos en los siglos VIII y VII a.C. Estos traen como consecuencia el desarraigo de las tradiciones locales al fundarse asentamientos humanos del nuevo cuño. No olvidemos que la filosofía no surge en las ciudades más antiguas de la Grecia continental, sino precisamente en tierras de emigrados: las colonias griegas de Asia Menor (Mileto, Éfeso, Colofón) y, en el otro extremo del mediterráneo, en el sur de Italia. Por esas mismas fechas comienzan a escribirse las primeras legislaciones (Pajares, 2016, p. 21).

De lo citado se puede decir que con las migraciones, también hubo un cambio social y, por ende, un cambio en la organización de la sociedad. Es decir que se hizo evidente conformar una organización jurídica que comprendiese todos estos cambios. Resaltar el carácter jurídico de la demostración implica la armonía entre todos lo que conforman una sociedad, lo jurídico es un fundamento para establecer unas normas válidas que regulen la convivencia en sociedad. De ahí que un concepto como el de la demostración tenga un lugar importante. La demostración se hace tan necesaria porque es la forma en la que una persona argumenta una explicación. No se trata de persuasión, sino de coherencia y buenos razonamientos.

La geometría adopta el concepto de demostración, quizás del ámbito social que la toca. Recuérdese que la geometría es una ciencia fértil para quien la estudia y para la sociedad. Sin embargo, este concepto en el auge de las ciencias de la filosofía antigua, fue mutando a un matiz más científico que jurídico. La geometría da cuenta de ello, introduciendo el concepto de demostración para probar la coherencia de un cuerpo de argumentos y razonamientos de tinte científico. Quizás por esta mutación que fue teniendo el concepto de demostración, cuando se habla de geometría en la actualidad, no es muy común relacionar a la geometría con los temas sociales y jurídicos. Sin embargo no es que la demostración tenga un significado totalmente diferente del que tuvo en el momento de la geometría antigua, sino que han cambiado algunos matices de ella.

Entretanto, desde esta mutación del concepto, y el auge de las ciencias de la antigua Grecia, se introduce la pregunta ¿cómo es que el concepto de demostración implica una conexión con el tema que aquí más nos interesa, la lógica?; debo decir que esta relación se hace clara en el momento en que la preocupación por el razonamiento ordenado y coherente empieza a tomar fuerza en las ciencias. De lo dicho con anterioridad, llego a la conclusión de que este concepto fue mutando con el tiempo, para finalmente ser un concepto necesario en la lógica. Luis Vega (1985) en su texto "Sobre la invención griega de la demostración" afirma que se puede especular sobre el trayecto que sufrió el concepto de la demostración, desde una comprobación con fines jurídicos al concepto de demostración estrictamente en la lógica, entendiendo la lógica como "la disciplina que se ocupa de formular criterios para la evaluación de argumentos, ha sido parte de la filosofía desde su nacimiento; no en vano el quehacer filosófico involucra de manera fundamental la elaboración de argumentos" (Vega & Olmos, Compendio de lógica y argumentación, 2011, p. 383).

Así pues, cuando se habla de lógica como la disciplina que se ocupa de los criterios de validez de los argumentos, es claro que se habla de una disciplina de carácter científico, una disciplina que pretende evaluar la solidez y la coherencia de un cuerpo de conocimientos, aquí es donde tiene lugar la demostración en la lógica. El concepto de demostración hace parte de la lógica como una prueba que es construida con buen razonamiento y argumentación. En concordancia con el carácter jurídico que acompañó a la demostración alguna vez, con mucha intensidad, la lógica debe tener leyes que permanezcan y que guíen los razonamientos a no separarse de lo verdadero. Con lo anterior, vale decir que el método geométrico que dentro de su sistema axiomático admite la demostración, bien se acopla a la definición lógica que se dio más arriba, puesto que el método geométrico es un cuerpo de conocimientos que están basados en una estricta ordenación y coherencia en la que cada parte se sostiene a sí misma y sostiene a las otras y que, por supuesto, exige la demostración del cuerpo de conocimientos que expone. Parece ser que la demostración está estrechamente ligada a la lógica, al buen razonar y por ello está ligada a la construcción de una ciencia. Tal relación entre lógica, demostración y ciencia, también está presente en el proyecto lógico de G. Frege, conocido como el segundo padre de la lógica, dado que el proyecto fregeano se ocupa de las leyes por las que se enlaza con validez un pensamiento a otro. La prueba o demostración se hace para comprobar la rigurosidad, solidez y coherencia de la relación lógica entre distintas proposiciones, teoremas y axiomas, y puede ser útil para la fundamentación de cualquier ciencia.

Ahora, hablando en un sentido ya más lógico que jurídico, puede introducirse el tema de la relación de Euclides de Alejandría con la lógica Aristotélica. Este vínculo es muy interesante, ya se ha dado a entender en el capítulo anterior y se ha sugerido en algunas afirmaciones de este. Como ya se dijo, Euclides de Alejandría, como heredero de una larga tradición geométrica, expone su teoría en un sistema que se puede ajustar a la lógica a aristotélica. Euclides, aunque posterior a Aristóteles, guarda una relación muy estrecha con lo planteado por el estagirita.

> A la demostración la llamo razonamiento científico; y llamo científico a aquel <razonamiento> en virtud de cuya posesión sabemos. Si, pues, el saber es como estipulamos, es necesario también que la ciencia demostrativa se base en cosas verdaderas, primeras, inmediatas, más conocidas, anteriores y causales respecto de la conclusión: pues así los principios serán también apropiados a la demostración. En efecto, razonamiento lo habrá también sin esas cosas, pero demostración no: pues no producirá ciencia 71b20 (Aristóteles, Organon, 71b- 20).

Existen razones de peso para suponer que Aristóteles y su teoría sobre lógica, contienen una parte de ese cuerpo de razonamientos que desarrolló Euclides, inmediatamente después en "Elementos". En lo citado se habla de principios que son apropiados para la demostración, que no es otra cosa diferente de lo que hace Euclides. En ambos parece haber cosas en común, aunque expuestos de forma diferente. Como se mencionó en el capítulo anterior, ambos resuelven el problema pitagórico sobre la medida común entre magnitudes conmensurables e inconmensurables; por una parte Aristóteles argumenta en el Órganon mediante el principio de reducción al absurdo, que es improbable que dos magnitudes pertenecientes a una misma figura, el cuadrado, no pudiesen tener una medida común. Incluso en una obra poco conocida de Aristóteles, nombrada como "Sobre las líneas indivisibles" se puede ver cómo Aristóteles trata de trazar un camino de proposiciones que se relacionan entre sí y que hablan de esta problemática de aquel entonces. Esta obra poco conocida, no es propiamente una exposición al modo geométrico, pero sí alude que un orden lógico de razonamientos como el método geométrico, es una buena forma de abordar problemáticas referentes al espacio. Paloma Ortiz García hace mención a este asunto en la introducción de esta obra.

> Ser consciente de ese hecho requiere reflexión y contraste de argumentos. Y eso es precisamente lo que nos ofrece el tratado Sobre las líneas indivisibles: el testimonio de los debates previos indispensables para levantar sobre fundamentos sólidos del formidable monumento lógico que son los Elementos, (Introducción a Sobre las líneas indivisibles, trad. 2000, p. 9).

Considerar a los Elementos de Euclides como un monumento lógico, de evidentes influencias aristotélicas, es una muy buena razón para concretar esta relación del método geométrico con la lógica. Puedo decir que el método geométrico es un aparato lógico, dado que formula argumentos muy sólidos, desmenuzando cada parte ya sea en un axioma o definición, proposición, teorema o demostración. Tiene un evidente orden, dicho en otras palabras, sigue unas leyes, que invitan seguir la secuencia entre un elemento y otro.

1.2. Lógica: leyes y principios

Para abordar este tema, hay que tener en cuenta que la teoría euclidiana adherida a la fuerte teoría Aristotélica sobre lógica, se vio fuertemente cuestionada en el siglo pasado. Por esta época nacen las geometrías no euclídeas y se derrumba el fundamento aristotélico de sujeto-predicado. Puede parecer que el surgimiento de estas cosas le reste importancia o reconocimiento a este par de sabios y sus teorías, pero si se ven los detalles de estos acontecimientos, no resulta ser el caso. En el caso de Euclides, las nuevas geometrías plantean teorías ciertamente diferentes, pero se siguen planteando bajo el método geométrico; y en el caso de Aristóteles, aunque G. Frege reformula parte del trabajo del estagirita, tampoco se aleja de aquello que se planteó en un principio, un buen razonar o una buena argumentación basada en la coherencia o en las leyes entre elementos. La lógica fregeana se ocupa de las relaciones inferenciales entre pensamientos, de la validez y de la manera en la que se conserva la verdad entre contenidos, entre el antecedente y el consecuente (Bejarano, 2017, pp. 172). La articulación entre razonamientos con sentido y rigurosidad, resultados de la inferencia y la argumentación, es la cuestión de la que finalmente se encarga la lógica.

> En nuestros días, según parece, apagados los antiguos fervores fundamentalistas de la filosofía de la lógica tradicional, no dejan de plantearse algunas cuestiones relacionadas con los supuestos y las condiciones del discurso racional que pueden tener interés desde el punto de vista de la argumentación (Vega & Olmos, 2011, p. 371).

A pesar de los cambios que han tenido ciertos fundamentos de la lógica y, por ende, de la geometría, sobre todo en el siglo anterior, se sigue manteniendo una constante preocupación por el razonamiento coherente o por la argumentación sólida. Los tratados de lógica de Aristóteles, los "Elementos" de Euclides, y las teorías recientes, bien pueden plantear problemáticas que se pueden desarrollar bajo principios ciertamente diferentes, pueden atacar posturas o defender otras. Pero la cosa que tienen todas en común es que para que los argumentos que planteen se sostengan, estas teorías tienen que estar apoyadas por una ley o fórmula, por la cual se pueda seguir el hilo de lo que se quiere plantear. En concordancia, para hablar de leyes lógicas, en el caso de Euclides y sus "Elementos" expuestos al método geométrico, es necesario entender a qué se puede llamar ley lógica. Así las leyes lógicas, de acuerdo con Luis Vega (2011) "pueden verse como proposiciones verdaderas por su propia forma lógica" (p.369). De esto me atrevo a decir que siendo el método geométrico axiomático, una clase de sistema lógico, la ley que a este sistema se suscribe es la forma en que se enlazan todos los elementos que la conforman bajo la fórmula de la antipairesis, dichas leyes se prueban por el concepto del que hablamos anteriormente, es decir, por medio de la demostración, claramente desde su connotación lógica. "Su validez puede determinarse (…) mediante la teoría de la demostración, donde las leyes lógicas vienen a ser las fórmulas primitivas o derivadas del cuerpo deductivo del sistema" (p.369). De esta formulación se puede ir haciendo cada vez más clara la coyuntura de la teoría euclidiana con la lógica, pues a este punto es razonable decir que el sistema axiomático, tan rigorosamente organizado por Euclides de Alejandría es una clase de sistema lógico a todas luces. El método geométrico como una clase de sistema lógico, se acopla bien a las cuestiones de las que se ocupa la lógica, "La lógica trata de las leyes de la verdad, no de cómo los seres humanos piensan, sino de cómo tienen que pensar, si es que no han de apartarse de la verdad" (Frege, 1897, p. 178). El método axiomático es una buena manera de acercase a la lógica, dado que es un sistema que invita a seguir un hilo o secuencia de elementos los cuales tienen como finalidad sostener un argumento que tiene tal rigurosidad que sirve para construir una ciencia.

2. Método geométrico y habilidades geométricas: contribuciones pedagógicas para la enseñanza de la lógica

Luego de haber hablado sobre el carácter lógico del método geométrico, es ahora el momento de hablar sobre cómo el método geométrico y sus habilidades[18] pueden contribuir a la enseñanza de la lógica mediante el desarrollo de ciertas habilidades. Para este propósito vale recordar cómo se desarrolló la pedagogía euclidiana o, dicho de otra forma, cómo se desarrolló el aporte pedagógico del profesor alejandrino. Así pues, como ya se dijo con anterioridad, Euclides de Alejandría ha sido referenciado como un profesor muy dedicado a sus estudiantes, pero ácido con aquellos de quisieron arrebatarle el carácter científico a la geometría, queriéndola hacer ver como algo superfluo. La dedicación a sus estudiantes radicaba en que más que enseñarles los teoremas de los anteriores geómetras, ellos debían aprender a construir con la geometría; es decir, que el propósito de Euclides fue estimular en sus estudiantes el peso de la disciplina y el rigor del estudio juicioso por cuenta propia. Entonces, el desarrollo de las habilidades del estudiante se daba en la medida de que este se proponía a avanzar. Por la coyuntura que hay entre el método geométrico y la lógica, en sentido de que se desarrollan las habilidades geométricas por el interés propio de conocer, también de esta misma forma se desarrollan algunas habilidades lógicas, habilidades lógicas concernientes al estudio del espacio. Para comprender mejor esta coyuntura, puede tomarse como ejemplo la obra de M.C Escher, la cual evidencia acertijos visuales en los cuales se busca descifrar una historia o mensaje. Como un ejemplo, tómese "Reptiles" (1943)[19] en la que se precisa de habilidades lógicas y espaciales o relativas a la geometría para plasmarla e interpretarla. En esta litografía, se evidencia una observación detallada de la naturaleza en un orden lógico, pues se incorporan animales y plantas, así mismo, algunas figuras como polígonos y sólidos en un orden coherente, placentero y armonioso. "Reptiles" expone el gran rigor intelectual que requieren habilidades espaciales, o geométricas, como una base para habilidades lógicas aplicables al espacio, pues con ellas es que, se pueda visualizar como se enlazan las figuras entre sí, por ejemplo el tránsito entre figuras planas y tridimensionales, véase el patrón de los reptiles guiado por una margen de dodecágonos a la vez que el reptil que camina por un dodecaedro, o que el elemento principal entre los polígonos y los sólidos son los reptiles, elementos de la naturaleza, que indican la transición del plano a lo tridimensional. También se

[18] Entiéndase "habilidad" desde *πολυμεχανία* (polymejanía), perfeccionamiento de una acción mediante la repetición continúa de la misma.

[19] Véase la figura 2

pueden analizar los demás elementos que completan la obra; El libro sobre naturaleza y los cuadernillos que pueden insinuar el esfuerzo intelectual de la obra que puede dar a entender que del rigor de la observación puede resultar un cambio de interpretación de la naturaleza. En general, este tipo de acertijos visuales necesitan de habilidades lógicas para la interpretación del espacio en el que son plasmadas. Estas habilidades se explicarán a lo largo de este apartado.

2.1. Euclides el profesor alejandrino y las habilidades lógicas

Con el fin de comprender mejor lo que se plantea en esta parte, resalto los tiempos del profesor alejandrino, en los que cualquier persona podía iniciar sus estudios en geometría. La única condición para adentrarse en el estudio de ella, consistía en apartarse de las banalidades de dinero y la fama. Dicho de otra forma, quien deseara involucrarse con el estudio de la geometría, debía iniciarse en la investigación en pro del rigor concerniente al estudio de una ciencia y del conocimiento, además de aportar a la sociedad significativamente con la aplicación de la misma; claro está, sin buscar pago alguno. Ser un estudiante de geometría euclídea significaba que se debía dejar de mirar el mundo para observar la naturaleza con mucho detalle. Iniciarse en esta ciencia especulativa era un proceso que implicaba desarrollar habilidades geométricas como las nombradas por A. Hoffer, las cuales se mencionaron en el anterior capítulo. Estas habilidades que en principio cualquier persona las tiene, pero poco desarrolladas, en razón de que todas las personas de alguna forma perciben el espacio y perciben también cómo se ubican las cosas en él; con dedicación y estudio estas personas pueden llegar a un nivel importante de razonamiento geométrico, y en concordancia con el tema de este capítulo, con el desarrollo de habilidades geométricas, viene también el fomento de algunas habilidades lógicas que se pueden relacionar con el rigor geométrico.

Pensar en que el estudiante alejandrino realizaba un proceso por el cual iba desarrollando sus habilidades geométricas, también implica que pensar que desarrollaba algunas habilidades lógicas, esto es un indicio para decir que Euclides de Alejandría como profesor de geometría, aunque muy docto en esta ciencia, introdujo a su ortodoxia en su ejercicio investigativo sin atiborrar o agobiar a los estudiantes con teoremas muy complejos. El ejercicio investigativo era un proceso, en primer lugar, porque como ya se ha dicho, el estudio de la geometría requiere un ejercicio constante en el que cada vez el estudiante se vuelve más diestro y hábil; segundo, requiere que el estudiante por su propia cuenta quiera iniciar un proceso investigativo, requiere actitud como parte del rigor que exige construir con una ciencia, lo que significa que el estudiante es quien se adueña del nivel de rigor que quiera alcanzar. Lo anterior indica que desde el lado del profesor, desde el lado del elementador, de Euclides, como cimentador de una clase de sistema lógico como lo es el sistema axiomático del método geométrico, el propósito mayor no es fijarse en cómo sus alumnos piensan que es el mundo, sino cómo hacer que sus estudiantes se instruyan en la investigación de la naturaleza y comprendan un sistema lógico mediante un método, el método geométrico. En la medida en que el estudiante quiera desarrollar sus habilidades, el profesor alejandrino le presenta incógnitas más complejas, las cuales pretenden ser despejadas mediante la utilización del método axiomático.

Ahora bien, en cuanto a la lógica, como ya se ha recalcado, ella no se ocupa de lo falso o de lo verdadero, si no que más bien lo que le preocupa es la coherencia entre un elemento y otro, una proposición y otra; a la pedagogía euclidiana le interesa, precisamente eso. Esto quiere decir que el estudiante puede encontrar cómo se da tal coherencia en el sistema axiomático, por el cual se estudia la geometría, evidentemente, de una forma progresiva en la medida que el estudiante desarrolla sus habilidades.

> Lo que es natural para uno, para otro puede muy bien no serlo. De ello dan buen testimonio las enormes diferencias en las gramáticas. Ningún reproche debe temer menos el lógico que el de que sus proposiciones no estén de acuerdo con la manera como naturalmente pensamos. Si a alguien sin instrucción se le enseñan los rudimentos de las matemáticas con el mayor rigor lógico, lo encontrará generalmente muy antinatural debido precisamente a dicho rigor. Un profesor juicioso renunciará de antemano a ese rigor y luego procurará introducir a la necesidad de ser rigurosos poco a poco. (G Frege, Lógica p.173).

Según esto, se puede indicar que para desarrollar habilidades se necesita avanzar poco a poco, y en este proceso las habilidades lógicas pueden ser fomentadas según se desarrollan habilidades geométricas, es decir, que la geometría puede ser una estrategia pedagógica para que los estudiantes desarrollen asimismo ciertas habilidades lógicas y se dé el aprendizaje de la lógica de forma fructífera. El hecho de que la geometría antigua sea una ciencia cuyas pretensiones son cultivar y consagrar al estudiante en la investigación, construir la ciencia y construir con ella, en otras palabras, hacer de la geometría una conocimiento fértil, toma mucho sentido en esta sección, pues dicha riqueza de la geometría, bien puede ser provechosa para el aprendizaje de la lógica mediante el desarrollo de ciertas habilidades lógicas.

2.2. Habilidades lógicas

Pasando al tema pedagógico, vale recordar que una habilidad es una actividad que se puede desarrollar o perfeccionar en la medida en que se hace una y otra vez. Con las habilidades geométricas, las personas según sus experiencias sensoriales, desarrollan de alguna u otra manera etapas básicas de estas habilidades. Con las habilidades lógicas pasa lo mismo, las personas a medida de que crecen y se enfrentan a problemas que necesitan una solución, acuden a esta herramienta del conocimiento para superar las dificultades. Al igual que con las habilidades geométricas, el comienzo del desarrollo rigoroso de las habilidades lógicas recae en el estudiante, en el interés por la investigación y el conocimiento, la semilla a germinar. El estudiante debe alejarse de las cosas que pueden hacer ver tanto a la lógica como a la geometría como algo muy lejano y complicado. Se debe reconocer la riqueza de la geometría y la lógica.

> La lógica nutre nuestra mente como las vitaminas y el ejercicio nutre nuestro cuerpo. Esta manera de acercarnos a la lógica es fructífera. La lógica no es solamente una teoría abstracta y enrarecida, sino también una ciencia aplicable que arroja técnicas útiles para la vida diaria (Morado, 2005, parr. 1).

Según R. Morado en "Para quién la lógica" (2005), aunque todas las personas en general poseen cierto desarrollo de habilidades lógicas, entendiéndolas como aquellas habilidades que desarrollan la coherencia y el buen razonar, el desarrollo riguroso de ellas depende de las necesidades de la persona. Por ejemplo en el ejercicio filosófico en el que se acude tanto a la argumentación, la necesidad de desarrollar habilidades lógicas es alta. Hay habilidades lógicas que se pueden desarrollar de las habilidades geométricas, por un lado la habilidad de crear y criticar, por otro lado el acto de demostrar, ya sea por la habilidad de analizar o la de sintetizar. Estas habilidades lógicas están emparentadas sobre todo con las habilidades geométricas de la verbalización, la lógica y la observación.

Como complemento tomo los aportes de Morado, en cuanto a las habilidades lógicas. Estas habilidades se sostienen en un trípode el cual está soportado por la actitud o interés del estudiante, el desarrollo de la habilidad y el conocimiento que se va adquiriendo. Dicho modelo es acorde con la pedagogía euclídea, pues esta también da mucho valor al interés y a la actitud del estudiante. De eso se deriva el nivel de habilidad y el nivel de conocimiento que pueda desarrollar el estudiante. Acoplar estas clases de habilidades puede ser una muy buena estrategia para la enseñanza de la lógica.

2.2.1. Habilidad creativa

Esta habilidad toma lugar desde el aporte pedagógico del profesor alejandrino, quien invita a sus alumnos a construir con una ciencia. En el caso de Euclides, esta ciencia es la geometría, pero como ya se vio, la geometría está acompañada de la lógica. Por lo tanto, esta habilidad también puede desarrollarse como habilidad lógica. Construir o crear con una ciencia, sea la geometría, indica que se debe se debe iniciar dentro de la investigación de un problema o dificultad, y de allí aportar un avance, construir o crear algo nuevo a partir de dicha problemática. Como ya se advirtió, la geometría es una ciencia fértil, crear o construir a partir de ella es uno de sus aportes más valiosos. Así como las problemáticas referentes al espacio propiciaron avances y aportes, es decir, construcciones y creaciones, en el caso de la lógica, una forma apropiada de fomentar tal habilidad es por medio de acertijos, la construcción de cadenas inferenciales válidas o de demostraciones, reguladas por reglas de acuerdo con las cuales el alumno debe intentar deducir algo respecto al sistema que indica el acertijo. Tómense como ejemplos la creación de cadenas inferenciales en los acertijos lógicos de Lewis Carroll[20] o los acertijos geométricos, pues en ellos hay un proceso creativo, que busca validez, rigor y coherencia.

2.2.2. Habilidad crítica

Dicha habilidad consiste en que mediante reglas, como las que están presentes en el método axiomático, se afina la habilidad de deducir, de hilar pensamientos, no sin un rumbo, sino con criterios y límites claros y establecidos. Desarrollar esta habilidad lógica puede ser muy beneficioso para el estudiante, pues al tener claros ciertos criterios pueden evaluar la validez o invalidez de argumentos, es decir, que puede discernir si lo que se argumenta sigue un hilo según reglas y criterios. Evidentemente, cuando se desarrolla esta habilidad, comienzan a ser más valiosos aquellos argumentos estructurados con coherencia y criterios. Desarrollar esta habilidad también invita al estudiante a la construcción de sí mismo, pues a partir de la asimilación de criterios, el estudiante podrá, tanto construir o crear razonamientos, como

[20] Me remito a las deducciones que permiten resolver acertijos presentes en obras como "Alicia en el país de las maravillas".

reevaluar razonamientos que ya poseía. "La lógica es en gran medida el estudio del razonamiento, de la argumentación. Por ello la buena educación lógica incluye habilidades para analizar argumentos" (Morado, 2005, parr. 6). Esta habilidad guarda una relación con la geometría, en sentido de que en el estudio de ella se necesita tener claridad en los conceptos y criterios para llegar a elaboraciones de la talla de Euclides y su ortodoxia.

2.2.3. Habilidad demostrativa

Esta habilidad cobra un lugar significativo en el sistema axiomático, demostrar es uno de los vínculos más fuertes que tiene una ciencia como la geometría con otra como la lógica. Aunque la demostración haya tenido matices jurídicos y científicos, su objetivo es el mismo, es probar ya sea ante la ley o ante la ciencia la validez de los argumentos creados mediante un sistema de razonamientos. Como habilidad lógica invita a exponer cómo se ha razonado, bajo qué criterios, "Como cualquier otra ciencia, la lógica es un ejercicio de honestidad intelectual" (Morado, 2005, parr. 5). La habilidad demostrativa es fundamental en la lógica, pues es mediante una prueba lógica que G. Frege buscó fundametantar la matemática en su tiempo. Por medio de esta se busca probar de la manera más rigurosa la validez de una cadena de inferencias; en concordancia con el método geométrico, este método implica demostraciones y deducciones válidas.

2.2.4. Habilidad de Análisis

El analisis es un método de razonamiento por el cual se parte de la explicación o teorema hacia las nociones comunes, es partir del todo para ir hacia las partes. "En el análisis se suponía el problema resuelto y se razonaba "hacia atrás" para llegar a un punto" (Sánchez, 2006, p.31). Esta habilidad brinda al estudiante la capacidad de desmenuzar explicaciones como teoremas, es decir, que fomenta la capacidad de ir de la conclusión a las premisas. El método axiomático, bien puede leerse así, se puede buscar el teorema e ir desmenuzándolo hasta llegar al elemento más general. Muy útil para el estudiante cuando quiere buscar las causas de un problema o acertijo. Las obras de M.C Escher pueden servir para desarrollar esta habilidad, dado que con anterioridad se dijo que estos acertijos visuales necesitan ser desmenuzados o analizados con el fin de develar aquello que este quiere decir o problematizar a su espectador. En este caso, para analizar dichas imágenes se hace necesario poner en práctica habilidades lógico-espaciales.

2.2.5. Habilidad de Síntesis

La habilidad de la síntesis también es un método de razonamiento como el análisis, solo que acá se razona a la inversa, es decir que se parte de los elementos o nociones comunes, para ir llegando a la teorema o conclusión. El método geométrico usa este orden, este inicia con las nociones comunes hasta llegar a ideas más complejas como proporciones o demostraciones. "En la síntesis se partía de los principios, problemas o teoremas conocidos para probar el resultado encontrado" (Sánchez, 2006, p.31). Esta habilidad hace que el estudiante junte o compile los elementos, es decir que comprenda cómo se da, cómo se reúne un cuerpo de conocimientos. Esta habilidad también permite comprender como está articulado un texto argumentativo o una red de inferencias.

3. Baruch Spinoza: habilidades geométricas y habilidades lógicas

Un buen ejemplo de la comunión entre habilidades lógicas y habilidades geométricas es Spinoza. Es bien sabido que este sistema axiomático es adoptado por algunos filósofos posteriores a Euclides de Alejandría. En esta ocasión tomaré a Baruch Spinoza, quien de alguna manera volvió a poner en boca de muchos el método geométrico y sus particularidades, en sentido de que pudo construir sólidamente un cuerpo de conocimientos adoptando el método axiomático, de forma similar a Euclides de Alejandría, la "Ética demostrada según el orden geométrico" de B. Spinoza es comparable con la empresa deductiva más celebrada, conocida como "Elementos". Ambos hacen uso de un sistema axiomático, proposiciones y demostraciones que se validan unas con otras a medida que se avanza en la lectura..

El trabajo de Spinoza es resaltable; por un lado, rescata el método geométrico de ese olvido en el que quedó después de la filosofía antigua, y por otro, expone muy bien los alcances de las habilidades geométricas en función de las habilidades lógicas. Para este tema me baso en la obra póstuma que recoge sus correspondencias "Spinoza, Correspondencia". En este texto, Spinoza hace algo parecido a una labor pedagógica, pues explica a sus interlocutores cuestiones acerca de la elaboración de una de sus obras más reconocidas "La ética demostrada según el orden geométrico". Spinoza sabe que no muchas personas poseen el rigor para entender el desarrollo del cuerpo de conocimientos que describe él en su obra, quizás personas con acercamientos a las matemáticas pudieron haber entendido mejor el porqué del uso del método geométrico, sin embargo, en su correspondencia, aunque sus interlocutores son muy diestros académicamente en otras disciplinas, les cuesta seguir algunas cosas de la forma argumentativa del método axiomático, les cuesta seguir el orden sintético en el que se escribe la obra. Parte de entender lo que quiere plasmar, es entender la vía por la cual decide hacerlo, tener muy buena habilidad de síntesis y de análisis haría más fácil la comprensión de su obra a sus interlocutores. Tal es el caso de las correspondencias con Henry Oldemburg, quien desde un principio reconoce la riqueza de este método, pero afirma que desea que se le expliquen algunas cosas al respecto.

> (H.Oldemburg). Entonces solo hablamos de temas tan importantes como de paso y prisa, y como además todos ellos siguen torturando desde entonces mi espíritu, la amistad surgida entre nosotros me confiere el derecho de tratarlos con usted y de rogarle con toda amabilidad que me exponga con más amplitud sus ideas (Spinoza, 1988, p.79).

Este interlocutor muestra el interés por aprender un conocimiento del que se habló en el apartado anterior, uno de los pilares tanto en las habilidades geométricas como lógicas; por supuesto, ante esta actitud, Spinoza contesta siempre de forma concreta y específica a sus preguntas, tal actitud hacia el conocimiento y la razón invita a comprender la coherencia con la que se relaciona una cosa con la otra, a comprender cómo se desprende una cosa de la otra y, sobre todo, a guiar al otro en esto. B. Spinoza invita a sus interlocutores a que comprendan de forma lógica cómo es que se compone su edificio conceptual, los invita a que lo conciban como un sistema que funciona en su totalidad, y no en pequeñas partes, dado que todo está relacionado entre sí. Del mismo modo, Euclides invita a sus estudiantes a comprender la rigurosidad que implica la demostración al modo geométrico, dado que cada una de sus partes sustenta un pilar de todo el aparato axiomático. Dicha forma de comprender siempre de forma progresiva en la que no intenta persuadir a su interlocutor de que asiente sin más "No obstante para demostrarlo con claridad y concisión, no he ideado nada mejor que someter al examen de su ingenio lo que yo he probado según el método geométrico, correspondencia" (Spinoza, 1988, p.81).

Aunque esta correspondencia no es el tema principal de este trabajo, se pueden rescatar cosas muy valiosas de ella: el interés por una discusión racional entre las partes por un conocimiento científico, estas correspondencias muestran el interés por afinar conocimientos entre las partes, cumple con lo que se habló del *logos* más arriba, con una discusión filosófica. Dicho de otra forma existe una gran disposición a explicar aquello que no está claro, a introducir a otro a comprender el rigor de un sistema lógico como el método geométrico, lo que puede entenderse como el acto de construir una ciencia. De ello puedo decir que estas evidencian mucho de esa comunicación coherente y honesta de la que hablan las habilidades lógicas mencionadas y sobre todo a la construcción de una ciencia, cuestión a la que invitan las habilidades geométricas.

Vale recordar que B. Spinoza expone su teoría desde axiomas, proposiciones que conducen a teoremas, es un cuerpo de conocimientos que se sostienen entre sí. El consejo que da él a sus interlocutores para poder entender su teoría es que comprendan qué está escrita bajo este sistema, y en caso de no comprender algún concepto solo deben seguir el orden. Spinoza parte de unas proposiciones que conducen directamente a teoremas, a diferencia de Euclides en "La ética demostrada según el orden geométrico" Spinoza incluye elementos como los corolarios, los cuales ayudan a la comprensión del lector. Pero el punto que es más significativo es que Spinoza se ciñe a este método porque sabe que este sistema propio del método axiomático reúne relaciones entre pensamientos que siguen un orden propio del método geométrico, cuestión que resalta el valor de la geometría de una forma muy destacable.

-Capítulo 3-

La enseñanza de la geometría para la enseñanza de la lógica

En este apartado presentaré la propuesta de Carroll como un caso puntual en el que las habilidades geométricas fomentan habilidades lógicas. Desde mi punto de vista, esta es una propuesta muy valiosa para la enseñanza de la lógica a través del aprendizaje de la geometría. Dicha propuesta es aquella que presentó el estudioso de la lógica y la geometría Lewis Carroll. En esta estrategia, por medio de la geometría se llega a un aprendizaje de la lógica, dado que los escritos con fines pedagógicos del autor demuestran la preocupación de que quien lo lea comprenda lógicamente, comprenda cómo es que se enlaza una cosa con la otra, apoyado desde el método axiomático, expuesto con un estilo muy particular, propio de L.Carroll, que hace que el lector vea tanto a la lógica como a la geometría como algo cercano que se puede comprender. Para desarrollar esta idea tomo los escritos "El juego de la lógica" y "Euclides y sus rivales modernos"; en el primero, L.Carroll adopta el método geométrico para explicar de una forma muy sencilla pero a la vez muy sólida cómo se pueden organizar lógicamente las cosas que están presentes en el mundo; y en el segundo texto, L. Carroll compone un diálogo entre personajes cuya relación es la lógica y las matemáticas, que tiene como objetivo comprender la obra de Euclides de Alejandría, "Elementos". De esta forma, destacaré a la geometría como una estrategia para el aprendizaje de la lógica, por sus alcances didácticos y su relación con el espacio, lo cual significa una cercanía con los sentidos y percepción para el estudiante, y desde ello, el aprendizaje de la lógica puede ser más satisfactorio e interesante.

1. El valor de la geometría euclídea en la lógica de Lewis Carroll

Charles L Dodgson, el lógico estudioso de las matemáticas, más reconocido como Lewis Carroll, rescató la propuesta pedagógica de la geometría de Euclides de Alejandría. El carácter pedagógico euclidiano, como ya se mencionó, se basa en construir una ciencia y en construir con ella. L.Carroll revive esta idea, él construyó una forma de hacer ver a los jóvenes lo confuso que puede convertirse el mundo en caso de alejarse de ella. El proyecto lógico de Carroll consiste en hacer de la lógica algo que puede ser provechoso para la vida, no una ciencia confusa que agobia al entendimiento. Alfredo Deaño (2015) en el prólogo de "El juego de la lógica" dice que, "Carroll afirma que su intención es << popularizar este tema fascinante>>, hacer accesible la lógica a los jóvenes estudiantes proporcionándoles una fuente de goce intelectual" (p.18). Desde esta idea, el matemático inglés construyó una serie de acertijos que invitan a ejercitar las habilidades geométricas y lógicas que se mencionaron con anterioridad, acertijos que suelen ser juegos de palabras que atraen al lector.

El proyecto lógico de Carroll, que busca que las personas se acerquen a la lógica y vean en ella un goce y deleite intelectual, guarda una especial relación con el proyecto lógico euclidiano, en la medida del aprovechamiento del método geométrico para organizar las cosas del mundo. En "El juego de la lógica" es donde se ve más claramente la predilección del matemático inglés por el método geométrico, pues su manera de organizar las cosas que hay en el universo está basada en el sistema axiomático euclidiano, que parte de principios a proposiciones, para luego esquematizar y conjugar en un sistema de celdillas o fichas el valor e hilaridad de las proposiciones, muy al estilo de Aristóteles. En Carroll parece haber un piso del modo geométrico en sus explicaciones lógicas, apoyadas por ayudas didácticas como dicho sistema de celdillas, nombrado como diagramas bilaterales o trilaterales; estos son cuadrículas, figuras y elementos geométricos, que sirven para explicar relaciones lógicas entre distintos conceptos, referidos a las cosas que hay en el mundo. Los diagramas que plantea L.Carroll son sistemas geométricos, que en este caso están al servicio de un sistema lógico en un rol didáctico, y tienen dos funciones: entretener al lector, mientras ayudan al fomento de sus habilidades lógicas mediante la comprensión de los mismos.[21] Lo que evidencia que la relación entre lógica y geometría puede tener un alcance pedagógico muy significativo. Así como Euclides indujo a sus estudiantes en un círculo investigativo riguroso, Carroll quiere invitar a los jóvenes a valorar la riqueza intelectual de la que los puede proveer el acercamiento a la lógica.

El proyecto de L. Carroll parece tener claro que desarrollar habilidades depende del rigor que el estudiante quiera dedicarle al estudio de esta ciencia, tal cual como se vio en la propuesta pedagógica de Euclides. Carroll bien rescata la idea euclidiana del rigor y la investigación e introduce claves importantes para adentrarse en el rigor de comprender su proyecto lógico.

La primera clave que da L.Carroll, es iniciar por los principios o axiomas[22], iniciar por el elemento más general que inicia el cuerpo de conocimientos a comprender.

> “empezar por el *principio,* sin permitirse satisfacer una curiosidad ociosa chapoteando en el libro aquí y allá. Esto le llevaría verosímilmente a dejarlo a un lado con el siguiente comentario:<<¡Es demasiado duro para mí!>> desperdiciando así la oportunidad de enriquecer su acervo de delicias intelectuales” (Carroll, 2015, p.33).

Quizás una de las razones por la cuales los estudiantes están predispuestos a pensar que el aprendizaje de la geometría y de lógica es algo engorroso, se deba a que no tienen una guía por la cual comenzar. Esta clave, aunque parezca muy sencilla, invita al estudiante a un ejercicio de honestidad con lo que lee y consigo mismo, invita al rigor de la investigación. Adelantarse sin antes haber comprendido siquiera los axiomas, en vez de dar claridad, producirá más confusión. Comprender los principios es una forma de comenzar el acercamiento a la lógica desde la geometría. En relación con esto, L.Carroll, hace un especial énfasis en no continuar hasta estar seguro de haber comprendido a cabalidad cada parte. La importancia de este compromiso, a mis ojos, tiene dos objetivos: por un lado, que el estudiante adquiera el rigor de esforzarse por comprender y aclarar sus dificultades; y por otro lado, motivar al estudiante a

[21] Véase la fig. 2
[22] Téngase en cuenta la definición de principio o axioma vista en el primer capítulo

que no invierta su tiempo en vano en una lectura que no va a completar, pues es más provechoso superar las dificultades y confusiones que dejarlas de lado.

La anterior es una estrategia por la cual se desarrolla una habilidad, téngase en cuenta que una habilidad requiere de ejercicio, una habilidad hace referencia a algo que se hace repetidas veces hasta llegar al punto hacerse diestro. Es decir que el desarrollo de una habilidad está en el ejercicio y la repetición constante con el fin de alcanzar el máximo rigor posible. Asunto que desarrolla tanto las capacidades del estudiante como el conocimiento que se quiere afinar.

> "Cuando llegue a algún pasaje que no entienda *léalo de nuevo;* si todavía no lo entiende, *léalo de nuevo*. Si fracasa incluso después de tres lecturas, habrá que pensar que su cerebro se encuentra un poco cansado. En este caso, deje el libro, dedíquese a otras ocupaciones y al día siguiente, cuando vuelva a él fresco, vera probablemente que se trata de algo *completamente* fácil" (Carroll, 2015, p.35).

Concordando con L.Carroll, el desarrollo de una habilidad no está en repetir una acción sin más, sino a sabiendas de que con la repetición se afianzan lo que ya se domina y se supera lo que se dificulta. Esta unión de habilidades geométricas y habilidades lógicas, cuyo propósito es darle un goce intelectual al estudiante, reanuda el legado de Euclides de Alejandría, y muestra a la lógica como algo provechoso, cercano y comprensible.

Para complementar lo anterior, L.Carroll añade la discusión o el dialogo filosófico entre pares con el fin de potenciar todo lo que se mencionó con anterioridad. El matemático inglés argumenta que cuando se estudia lógica, o cualquier otra ciencia, en caso de encontrar alguna dificultad, una buena alternativa para superar problemas es discutir filosóficamente, al estilo del *logos* griego y de los diálogos clásicos, con alguien que esté dispuesto a aprender. "Provéase de un amigo genial que le acompañe en la lectura del libro y en la discusión de dificultades. *Discutir* es un maravilloso modo de allanar los obstáculos" (Carroll, 2015, p.35). En este buen aporte, una vez más se rescata la contribución pedagógica euclidiana, pues aunque Carroll no lo diga en "El juego de la lógica" esta consigna se basa en otro de sus textos, expresamente dedicado a la memoria del profesor alejandrino: "Euclides y sus rivales modernos", entre los personajes, entre los que está Euclides, hay un diálogo en el que analizan los "Elementos" del geómetra alejandrino. El diálogo tiene como objetivo comprender todo el aparato axiomático de Euclides, y cómo sus rivales, como tal no niegan sino que modifican según su tiempo la doctrina geométrica que dejó Euclides. Los personajes se sumergen en una larga discusión, en la que argumentan lógicamente cómo es que comprender el método geométrico de los "Elementos" es el punto focal para entender el cuerpo de conocimientos plasmado allí. En un esfuerzo por revivir el legado euclídeo, Carroll o como él se identifica en este texto, Charles Dodgson, caracteriza a Euclides como el profesor dedicado que está dispuesto a leer las críticas de sus rivales modernos, pero asimismo está dispuesto a defender el carácter lógico de su sistema axiomático, "Es muy probable que veamos aquí, lo que se ha notado antes, que se puede proponer un curso que difiere ampliamente del de Euclides, y luego, bajo la guía de conocimiento y experiencia superior, los vagabundos regresan al viejo camino" [23](Dodgson, 1885, p. 244). Lo anterior sugiere que aunque el trabajo de Euclides pueda haber sido cuestionado, no puede negarse el rigor de su trabajo en "Elementos", al punto de que sus rivales modernos sustentan sus modificaciones y explicaciones al método geométrico nacido muchos siglos atrás. De esta manera, Carroll usa a la lógica para mostrar la articulación y coherencia del proyecto geométrico de Euclides y, en ese sentido, articula de nuevo a estas dos ciencias.

1.2. Cruce entre habilidades lógicas y habilidades geométricas en el proyecto de L.Carroll

Como se hizo evidente con el proyecto de L.Carroll es posible involucrar pedagógicamente tanto habilidades lógicas como habilidades geométricas, en este apartado profundizaré cómo es que esto puede ser posible. Se dijo que las habilidades geométricas eran: la observación, la verbalización, la esquematización, la lógica y la modelación o manipulación; y que las habilidades lógicas eran: la creatividad, el criterio, la demostración, el análisis y la síntesis. Ahora bien, es momento de ver cómo es que estas se relacionan entre sí en el proyecto de L.Carroll, que a mi parecer, encaja muy bien con el objetivo de este trabajo, pues este proyecto apoya el aprendizaje de la lógica basado en el método geométrico de Euclides de Alejandría y en el rescate de la propuesta pedagógica del alejandrino.

En primer lugar, se debe partir de la habilidad geométrica de la observación, habilidad por la cual todas las personas percibimos el mundo. El axioma con que inicia "El juego de la lógica" es que "El universo contiene ´cosas´." (2015, p. 37), noción común que da cuenta de esta

[23] We shall very likely see here, what has been noticed before, that a course may be proposed which differs widely from Euclid's, and then, under the guidance of superior knowledge and experience, the wanderers are brought back to the old path.

habilidad. Desde esta noción común se puede advertir la relación con la habilidad crítica o de adquirir criterios, pues es con ella que se puede delimitar una cosa de la otra. En el proyecto de L.Carroll dicha habilidad crítica se llama clasificación y se define como un proceso mental en el que se pueden relacionar las cosas según sus atributos. Entonces, dicho proceso mental conduce a la habilidad geométrica de la lógica, que concuerda ciertamente con hilar una cosa con otra; en este caso, la relación coherente entre las cosas que ocurren en el mundo. Esta coherencia puede darse de dos maneras: ya sea analíticamente o sintéticamente; habilidades lógicas que bien relacionan las cosas, ya sea desmenuzando la totalidad o reuniendo las partes. Dichas habilidades, análisis y síntesis, son caminos que conducen a una forma de explicación o demostración, siendo la demostración la habilidad lógica que prueba que lo que se quiere explicar, se sustenta sólidamente. Esta explicación puede complementarse con la habilidad geométrica de la esquematización, la cual se vale de dibujos o gráficas que ayuden a la comprensión de lo que se explica con palabras, aquí entra la habilidad geométrica de la verbalización, que es la que permite que el estudiante exprese aquello que piensa. Esta habilidad verbal, bien se corresponde con la habilidad creativa, dado que es de esta manera que los estudiantes pueden construir esquemas, argumentos o inferencias lógicas y, así, dar paso a la habilidad de la modelación o manipulación, pues es con ella como el estudiante aplica lo que ha aprendido. En concordancia, este cruce de habilidades puede verse en el uso de los diagramas bilaterales y trilaterales, dado que ellos son esquemas cuadriculados que pretenden ordenar lógicamente distintos elementos, categorizados en proposiciones compuestas por nombres, cantidades, atributos y predicados. De ello se puede decir que también reúnen habilidades lógicas como el criterio, el análisis, la síntesis y la creatividad, pues este ejercicio le da vía libre al lector para experimentar creando proposiciones de cuanta cosa pueda pensar. Este tipo de diagramas es una ayuda didáctica en la que por medio de la habilidad de la observación, el lector puede comprender cómo se pueden organizar aquellas cosas que hay en el universo, con el complemento de que estos diagramas pueden ser compartidos con un amigo o compañero, cosa que puede dar fruto a discusiones de tinte lógico, como en "Euclides y sus rivales modernos", muy útiles para aquel que se introduce en el acercamiento de la lógica.

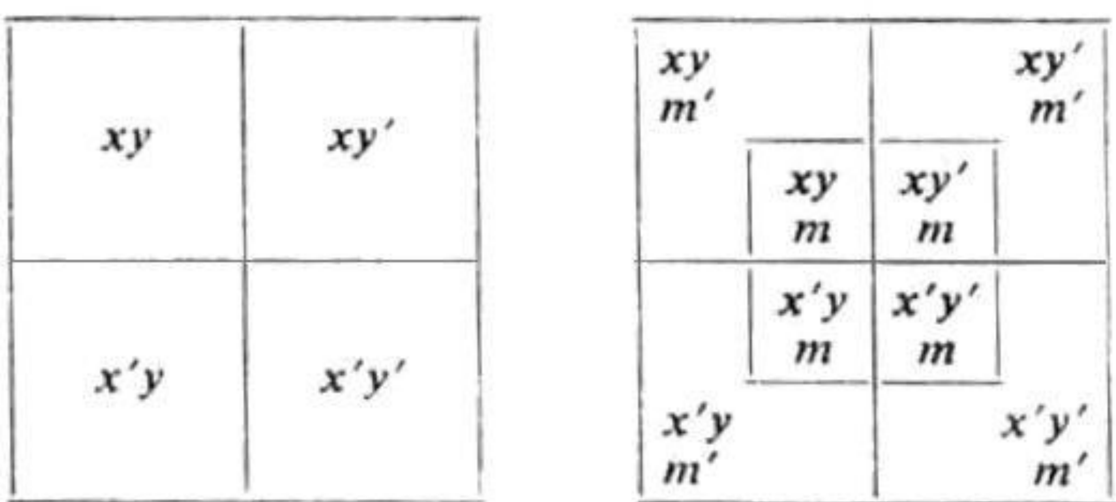
2. Aplicación de la geometría como estrategia para la enseñanza de la lógica

El proyecto pedagógico euclidiano, que invita al estudiante a aprender el rigor de una ciencia y a construir con ella, es producto de una especulación sobre la naturaleza. La geometría, como la ciencia que estudia todo aquello referente al espacio, invita al estudiante a hacerse partícipe de su entorno. Para un estudiante, el reconocimiento de su espacio es algo significativo, pues es una actividad que realiza desde que sus sentidos perciben el mundo. Para el estudio y desarrollo de habilidades geométricas es este el punto de partida, el nivel de reconocimiento espacial del estudiante. La geometría como una estrategia pedagógica para la enseñanza de la lógica cumpliría un papel importante, conduciría al desarrollo de habilidades geométricas a partir del reconocimiento espacial del estudiante, estudiar el método geométrico sería muy provechoso, dado que desde allí, desde esta cadena lógica de elementos, es que el estudiante puede desarrollar habilidades lógicas. A mi parecer el proyecto de L.Carroll reúne esto, y además lo complementa con el elemento didáctico de los acertijos, con los diagramas bilaterales y trilaterales, o narraciones al estilo de "Lo que la tortuga le dijo a Aquiles", "una paradoja lógica" entre otros. Estos pueden ser comparables con las problemáticas sociales a las que se enfrentaba la geometría en los tiempos de los primeros geómetras, incluso con ciertos problemas que se presentan en el curso de la vida de los estudiantes, los cuales pueden ser resueltos mediante análisis lógicos. "La lógica no es solamente una teoría abstracta y enrarecida, sino también una ciencia aplicable que arroja técnicas útiles para la vida diaria" (Morado, 2005, párr. 1). Dicho aprovechamiento de la claridad que puede proveer el acercamiento a la lógica, también puede ser aprovechable pedagógicamente. En este punto tomo como ejemplo el texto de L.Carroll "Lo que la tortuga le dijo a Aquiles", textos de este estilo pueden ser una ayuda pedagógica muy completa para cumplir con esta estrategia. Allí hay elementos didácticos como la inclusión de personajes míticos como Aquiles y personajes fantasiosos como una tortuga que habla; estos dos personajes representan dos posturas, una que está a favor del proyecto euclidiano y otra que se rehúsa a ver la hilaridad en el proyecto del profesor alejandrino. Allí Aquiles se declara un admirador de Euclides, mientras que la tortuga es quien no acepta una y otra vez la hilaridad de las proporciones euclídeas respecto al triangulo. Este texto hace alusión a una relación entre geometría, lógica y al hecho de escudriñar una y otra vez la coherencia de ciertas cadenas de inferencias para develar la validez de la conclusión, repetición que enfatiza el desarrollo de habilidades lógicas mediante ayudas didácticas como una conversación entre personajes míticos y fantasiosos. Lo anterior induce al lector al aprendizaje y al conocimiento valor de la lógica y la geometría euclídea como ciencias con las que el intelecto puede deleitarse. Ellos son mecanismos para captar la atención del estudiante; con esto, en el texto se resalta la hilaridad y coherencia del aparato axiomático euclídeo y, por supuesto, la importancia que ello tiene. Todo esto con el propósito de que el estudiante se haga partícipe de las capacidades de su intelecto y vea en su aprendizaje algo significativo.

Figuras

Fig. 1

Fig2



Consideraciones finales

La tarea de rescatar el valor de la geometría euclídea para la enseñanza de la lógica, según mi parecer, trae a colación varios elementos importantes. En el trabajo de Euclides se puede notar el aprovechamiento de los estudios sobre la naturaleza iniciados por Tales. Realmente Euclides da ejemplo de lo que significa construir con una ciencia, pues perfeccionó una pila de apuntes sobre geometría y, además, ideó una solución para el problema de los inconmensurables. Perfeccionar un método e incorporar allí su propio avance es una muestra del rigor euclídeo que tanto se pregonó en su labor como profesor. Según mi juicio, este rigor invita al estudiante a comprometerse en la investigación y cuestionamiento de su espacio. Involucrarse con el espacio, con el contexto en sentido de la construcción de una ciencia, implica involucrase con la sociedad y con el crecimiento de la misma, cuestión que le da un matiz muy particular a la doctrina de Euclides y, desde luego, a su aporte pedagógico. Explorar esta propuesta puede prestarse para una investigación que indague por el valor ético del proyecto pedagógico de Euclides, que puede desprenderse de esta investigación en la posteridad.

Por otra parte, investigar sobre la relación pedagógica entre la geometría y la lógica, sobre todo en la relación Aristóteles-Euclides, invita a pensar que pueden coexistir diversas formas de interpretar el mundo. Aristóteles constituye un cuerpo de conocimientos desde lógica, sin desconocer a la geometría, en sus escritos se la nombra en repetidas ocasiones aunque sin mucho detalle; por su parte, Euclides, inmediatamente posterior a Aristóteles, afina un método basado en un sistema lógico, como lo es sistema axiomático, tomando varias cosas de la doctrina aristotélica, como los principios, evidentemente expuestos en un leguaje geométrico. Estas dos formas de construir un cuerpo de conocimientos, aunque aparentemente diferentes guardan una estrecha relación muy interesante pero poco explorada. Mi disertación sobre esta relación pretende ampliar y explicar de forma detallada dicho encuentro, contribuyendo al estudio de la geometría en relación con la lógica desde una mirada filosófica.

Por último, la coyuntura planteada entre geometría y lógica, puesta en el ámbito educativo, más que dar a conocer unos contenidos, invita al cultivo personal del estudiante, a reconocer su espacio y a investigar sobre el mismo de una forma ordenada y sólida, de esta forma, cultivar su entendimiento para acercarse a la lógica. Cuando un estudiante toma conciencia de ello y del rigor investigativo que puede alcanzar con el desarrollo de las habilidades geométricas y lógicas, puede contribuir a la sociedad, afinando conocimientos, razonando de buena manera y cuestionando aquello que se aleja de la claridad que proporciona el acercamiento a la lógica.

> El objetivo es tomar control de nuestra vida intelectual, para disfrutarla más intensa y plenamente. La pereza y la mala alimentación intelectual pueden ser muy sabrosas a corto plazo pero son malas apuestas para vivir confortable y provechosamente a largo plazo. El estudio bien dirigido de la lógica nos dará mayores posibilidades de ser felices mientras que la falta de entrenamiento o el mal entrenamiento pueden incluso estropear nuestros talentos naturales (Morado, 2005, párr. 2).

En mi opinión, la implementación de esta estrategia concuerda con aquel propósito de Carroll de sustentar la lógica desde un fundamento geométrico para el goce intelectual de los estudiantes, cosa que provocará en el estudiante aquella actitud hacia el conocimiento de la que se habló con anterioridad, y evitará que proyectos tan ricos como el de Euclides se queden en un olvido que no merece. Sin embargo, esta postura puede dar paso a otras formas de aplicar la coyuntura entre geometría y lógica, no solo L.Carroll, puede ser la única alternativa de aplicación, puede haber otras posturas dignas de investigación que complementen este trabajo.

Trabajos citados

Angelis, E. (1968). El método geométrico de Descartes a Spinoza. *Tarea*, 25-47.

Aristoteles. (1982). *Tratados de lógica (Órganon).* Madrid: Gredos, S.A.

Aristoteles. (1994). *Metafisica.* Madrid: Gredos, S.A.

Aristoteles. (1995). *Primeros Analíticos.* Madrid: Gredos.

Campos, A. (1994). *Axiomática y geometría desde Euclides hasta Hilbert y Bourbaki.* Bogotá: Universidad Nacional.

Carroll, L. (2015). *El juego de la lógica.* Madrid: Alianza Editorial, S.A.

Coolidge, J. L. (1947). *A history of geometrical methods.* Gran Bretaña: Universidad Press.

Dodgson, C. L. (1885). *Euclid and his modern rivals.* Londres: Macmillan and Co.

Durán, A. J. (2002). La matemática y sus elementos: de Euclides a Bourbaki. *La gaceta de la RSME*, 649-672.

Euclides. (1576). *Los seis libros primeros de la geometría de Euclides.* Sevilla: Concejo real de sevilla.

Euclides. (2007). *Elementos I-VII.* Barcelona: Gredos S.A.

Euclides, & Aristóteles. (2000). *Sobre las líneas indivisibles- Mecánica- Óptica- Catóptica- Fenómenos.* Madrid: Gredos, S.A.

Frege, G. (1897). Lógica. 156-178.

Hilbert, D. (1993). *Fundamentos de las matemáticas.* Mexico: Servicios Editoriales de la Facultad de Ciencias, UNAM.

Hoffer, A. (1981). Geometry is more than a proof. *The mathematics teacher* , 11-18.

Jimenez, D. (2006). ¿Qué era un irracional para un matemático griego antiguo? *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, 87.

Morado, R. (2005). ¿Para quien la lógica? *Cuadreno de seminario de pedagogía universitaria, UNAM.* Ciudad de Mexico.

Pajares, A. B. (2016). *Fragmentos Presocraticos: De Tales a Democrito.* Madrid: Alianza Editorial .

Pastor, A. J., & Gutierrez Rodriguez, A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la goemetría: el modelo de van Hiele. En *Teoria y practica en educación matematíca* (págs. 295-384). Sevilla: S. llinares y M.V Sanchez.

Pin, V. G. (2015). *Pitagoras, La infancia de la filosofia.* Buenos Aires: Emse Edapp S.L.

Piquer, D. A. (2004). *Logica.* Madrid: Impresor de Camara de S.M.

Proclo. (1792). *The philosophical and matematical commentaries of Proclus on the firts book of Euclid´s elements.* Londres: Extracts from curiosities of literture.

Sanchez, C. H. (2006). ¿como se construye un cuadrado? o el análisis de una síntesis euclidiana. *Lecturas Matemáticas*, 22-44.

Solé, J. (2015). *La filosofía la modo geométrico.* Buenos Aires: Emse Edapp.

Spinoza, B. (1988). *Spinoza: Correspondencia.* Madrid: Alianza Editorial, S.A.

Vega, L. (1985). Sobrela invención griega de la demostración. 149-173.

Vega, L., & Olmos, P. G. (2011). *Compendio de lógica y argumentación.* Madrid: Trotta.