

INTRODUCCIÓN A LA GEOMETRÍA ESFÉRICA DE RIEMANN HACIENDO USO
DE CABRÍ GEOMETRE Y UNA REPRESENTACIÓN ANALÍTICA.

WILSON ENRIQUE JIMÉNEZ ACHURY.

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL.
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA.
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS.
BOGOTÁ D.C.
2006.

INTRODUCCIÓN A LA GEOMETRÍA ESFÉRICA DE RIEMANN HACIENDO USO
DE CABRÍ GEOMETRE Y UNA REPRESENTACIÓN ANALÍTICA.

WILSON ENRIQUE JIMÉNEZ ACHURY.
CODIGO: 2001140023.

Monografía para optar el título de
Licenciado en Matemáticas

Asesor:
ALBERTO DONADO NÚÑEZ.
Profesor de la U.P.N.

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL.
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA.
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS.
BOGOTÁ D.C.
2006.

Nota de aceptación

Firma del jurado

Bogotá D.C., 13 de Mayo de 2006

OBJETIVO GENERAL

Reconocer el modelo de la Geometría esférica de Riemann y algunas relaciones entre sus elementos, mediante el uso del programa de geometría dinámica Cabri II y una representación analítica (plano complejo).

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- ✓ Utilizar la herramienta tecnológica Cabri Geometre II, para visualizar y aproximarse a la comprensión de las relaciones entre los elementos de la geometría de Riemann.
- ✓ Identificar el tipo de curvas del plano estereográfico que generan los distintos tipos de rectas en la geometría esférica.
- ✓ Reconocer elementos de la geometría esférica de Riemann tales como rectas, ángulos, triángulos y construcciones análogas a la euclidiana a partir de la comparación entre estas dos geometrías que da origen a su representación en el plano estereográfico.
- ✓ Reconocer la proyección estereográfica como una inversión en el plano estereográfico.

RESUMEN ANALITICO DE ESTUDIO -R.A.E.-

TÍTULO: Introducción a La Geometría Esférica De Riemann Haciendo Uso De Cabri Geometre Y Una Representación Analítica.

AUTOR: JIMÉNEZ Achury Wilson Enrique.

TIPO DE DOCUMENTO: Monografía de Pregrado.

PUBLICACION: Bogotá D.C., Universidad Pedagógica Nacional. 2006

UNIDAD PATROCINANTE: Universidad Pedagógica Nacional. Facultad de Ciencia y Tecnología. Departamento de Matemáticas. Programa de Licenciatura en Matemáticas.

PALABRAS CLAVES: Geometría no Euclidiana, Geometría Esférica, Geometría de Riemann, Plano Riemanniano, E-Líneas, E-Puntos, Proyección Estereográfica, Proyección Estereográfica de forma Analítica, Plano Proyectivo, Construcciones en el plano estereográfico e inversiones en la Esfera.

DESCRIPCIÓN: El presente trabajo se desarrolla con el fin de optar al título de Licenciado en Matemáticas y surge gracias a respuestas que nacen de reflexiones personales acerca de: ¿Cómo utilizar un software bidimensional de geometría dinámica para explorar propiedades de la geometría esférica de Riemann?. Realizadas en el marco del espacio académico de Geometrías no Euclidianas, ofrecido por la Universidad Pedagógica Nacional en el VII semestre de Licenciatura en matemáticas.

La idea principal contenida en el presente trabajo se inscribe en el campo de las Geometrías No Euclidianas, más precisamente, en la Geometría de Riemann, donde Bernhard Riemann (1826-1866) expone sus ideas acerca del concepto de espacio. La temática que se desarrolla es el resultado de algunos análisis realizados en torno a preguntas que surgen al abordar el estudio de conceptos básicos de las Geometrías No Euclidianas.

En 1989, el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) planteó, como una de sus principales metas, reformar el estudio de la geometría, tanto a nivel medio como a nivel medio superior. Concretamente plantearon como uno de sus principales objetivos el *desarrollar una forma de entender un sistema axiomático investigando y comparando la geometría Euclidiana con la no Euclidiana*.

Siendo este uno de los objetivos, el presente trabajo muestra algunas propiedades de la geometría esférica de Riemann comparada con la axiomatización de la geometría euclidiana, valiéndose de la herramienta tecnológica Cabrí, la cual ofrece un medio que puede favorecer el acceso y desarrollo de recursos matemáticos para la construcción de estos modelos (Devlin, 1997).

Se hace insistencia en la actividad docente y en el afianzamiento respecto a la introducción de herramientas tecnológicas en el aula de clase, pues se considera que son pertinentes, así como el estudio de un sistema axiomático a través de la investigación y comparación de las geometrías Euclidianas y No Euclidianas en donde se llegue a resultados como: La Geometría de No-Euclidiana está poniéndose en aumento importante en su papel en la ciencia moderna y tecnología - En estudio de la Geometría no-Euclidiana hace claro que esa geometría no es algo que se completó hace 3000 años en Grecia. Es una corriente y un campo activo de investigación.

FUENTES: Se obtuvo información de 8 fuentes, a saber: CEDERBERG, J.N. A Course in Modern Geometries. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag. New York. 1989; COXETER, H.S.M., Fundamentos de Geometría. Ed. Limusa-Wiley, S.A., México, 1971, Projective Geometry. Springer-Verlag, New York; AMMANA, C., & VILLIANI, V. , Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21 st. Century. An ICMI study, Kluwer Acad. Pub., New ICMI Study Series, vol. 5, Netherlands, 1997; RAMIREZ-GALARZA, A.I., & SIENRA-LOERA, G., Invitación a las geometrías no Euclidianas. Coordinación de Servicio Editoriales, Fac. de Ciencias, UNAM, 2000; REES, ELMER G. Notes on geometry. Springer Undergraduate texts in Mathematics. Berlin, 1983; SINGER, D.A., Geometry: Plane and Nancy. Undergraduate texts in Mathematics, Springer, New York, 1997; Education.ti.Innovaciones Educativas. url:<http://math.rice.edu/~pcmi/sphere/sphere.html>; Devlin, K. (1997). The logical structure of computer-aided mathematical reasoning y *The American Mathematical Monthly*, 104, 7, pp. 632-646

CONTENIDOS: El presente trabajo está dividido en 4 partes. En las 2 primeras se realiza una aproximación a la Geometría de Riemann partiendo de una comparación con la geometría euclidiana, en la 3ª se introduce la geometría esférica como un ejemplo particular de la geometría Riemanniana, expresada en 2 dimensiones (plana) en donde no existen las rectas paralelas y se representa la esfera en un plano bidimensional mediante proyección estereográfica. Y Finalmente, en la 4ª parte se muestran algunos de los resultados obtenidos en las 3 primeras partes y se abordan algunas construcciones análogas al trabajo en el plano euclidiano, identificando los elementos de la geometría esférica de Riemann mediante el

programa Cabrí II, abordando preguntas tales como: ¿Qué elementos de ésta nueva geometría se conservan o permanecen invariantes mediante una proyección estereográfica?; y finalmente, se exponen algunas conclusiones y reflexiones acerca de las actividades propuestas y de los resultados obtenidos a partir del trabajo realizado.

CONCLUSIONES: En 1989, el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) planteó, como una de sus principales metas, reformar el estudio de la geometría, tanto a nivel medio como a nivel medio superior. Concretamente plantearon como uno de sus principales objetivos el *desarrollar una forma de entender un sistema axiomático investigando y comparando la geometría Euclidiana con la no Euclidiana*. Este trabajo se presenta como un paso en el camino hacia este fin.

Para entender la importancia del estudio de la axiomática de la geometría Euclidiana se hace necesario considerar alternativas de geometrías en las cuales resultados análogos a los obtenidos tengan un significado distinto, para hacer una comparación y así dar sentido a su axiomática.

Es necesario entender que la palabra "definición" adquiere un significado muy preciso en geometría que es bastante diferente a su significado en el idioma común, pues la confusión acerca de dicho concepto es la fuente de muchas dificultades en los procesos de demostraciones geométricas.

El estudio de otras geometrías alternativas permiten que el estudiante comprenda mejor los resultados de la geometría euclidiana y además acceda a reconocer que:

- La Geometría No-Euclidiana está teniendo un aumento importante en su papel en la ciencia moderna y tecnología.
- La Geometría Euclidiana no es una rama de la matemática completa desde hace 3000 años en Grecia, sino una corriente y un campo activo de investigación.

Al utilizar la tecnología, en particular CABRI GÉOMETRE para resolver situaciones problema en forma rápida y precisa, se explora y avanza en problemas más interesantes, esta representación de relaciones en forma dinámica permite realizar exploraciones que frecuentemente conllevan a la identificación y formulación de conjeturas permitiendo abordar algunos problemas relacionados con dicha geometría.

CONTENIDO

	Pág
INTRODUCCIÓN	
PRELIMINARES	3
1. BREVES NOCIONES SOBRE LA GEOMETRÍA DE RIEMANN	7
1.1 INTRODUCCIÓN A LAS GEOMETRÍAS NO EUCLIDIANAS	7
1.2 LA GEOMETRÍA DE RIEMANN INTERPRETADA EN UNA SUPERFICIE ESFERICA.	9
1.2.1. La esfera como una superficie de curvatura constante.	11
1.3. LOS ELEMENTOS Y LAS RELACIONES DE LA GEOMETRÍA DE RIEMANN EN LA ESFERA	14
1.3.1. Puntos y rectas en la esfera.	14
1.4. GEOMETRÍA EUCLIDIANA VS GEOMETRÍA ESFÉRICA.	17
2. LA GEOMETRIA DE RIEMANN	21
2.1. LOS ELEMENTOS DE LA GEOMETRÍA DE RIEMANN.	22
2.2. ALGUNAS PROPOSICIONES DE LA GEOMETRÍA DE RIEMANN.	26

3.	OTRA INTERPRETACIÓN DE LA GEOMETRÍA DE RIEMANN: LA PROYECCIÓN ESTEREOGRÁFICA.	31
3.1.	LAS “RECTAS” EN LA GEOMETRÍA ESFERICA CON CABRI MEDIANTE LA PROYECCIÓN ESTEREOGRAFICA.	34
3.1.1.	Identificación de las “rectas”de la geometría esférica de Riemann en el plano estereográfico.	34
3.2.	ALGUNAS CONSTRUCCIONES EN EL PLANO ESTEREOGRÁFICO.	46
3.2.1.	Dada una circunferencia máxima C^* y un punto en ella, construir la circunferencia máxima que es perpendicular a ella y que pasa por el punto dado.	46
3.2.2.	Dada una circunferencia máxima y un punto en la esfera fuera de ella, construir la circunferencia máxima que es perpendicular a ella y que pasa por el punto dado.	49
4.	LA PROYECCIÓN ESTEREOGRAFICA DE FORMA ANALÍTICA	50
4.1.	TRANSFORMACIONES CIRCULARES	54
4.2.	HOMOGRAFÍAS EN LA ESFERA.	60
4.3.	CONSERVACIÓN DE ÁNGULOS.	62
5.	CONCLUSIONES	67

BIBLIOGRAFÍA

ÍNDICE DE FIGURAS

INTRODUCCIÓN.

El presente trabajo se desarrolla gracias a respuestas que surgen de reflexiones personales acerca de: ¿Cómo utilizar un software bidimensional de geometría dinámica para explorar propiedades de la geometría esférica de Riemann? realizadas en el marco del espacio académico de Geometrías no Euclidianas, ofrecido por la Universidad Pedagógica Nacional en el VII semestre de Licenciatura en matemáticas.

Con este fin se exponen algunos resultados en los que se hace uso de la herramienta tecnológica Cabri II (programa de geometría interactiva) que permite obtener una aproximación a la comprensión de los principales resultados de la Geometría esférica, dichos resultados son consecuencia del trabajo en el plano bidimensional mediante una transformación (proyección estereográfica) como representación del espacio, en donde se utilizan elementos de la geometría euclidiana, para identificar posteriormente algunos elementos de la geometría de Riemann interpretados en la esfera, tales como:

Representación de “rectas” en el plano bidimensional, y algunas construcciones análogas a la geometría euclidiana, a saber:

- *Dada una circunferencia máxima y un punto en ella, construir la circunferencia máxima que es perpendicular a ella y que pasa por el punto dado.*
- *Dada una circunferencia máxima y un punto en la esfera fuera de ella, construir la circunferencia máxima que es perpendicular a ella y que pasa por el punto dado.*

En 1989, el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) planteó, como una de sus principales metas, reformar el estudio de la geometría, tanto a nivel medio como a nivel medio superior. Concretamente plantearon como uno de sus principales objetivos el

desarrollar una forma de entender un sistema axiomático investigando y comparando la geometría Euclidiana con la no Euclidiana.

Siendo este uno de los objetivos, el presente trabajo muestra algunas propiedades de la geometría esférica de Riemann comparada con la axiomatización de la geometría euclidiana, valiéndose de la herramienta tecnológica Cabrí, la cual ofrece un medio que puede favorecer el acceso y desarrollo de recursos matemáticos para la construcción de estos modelos (Devlin, 1997).

En particular, la representación de relaciones en forma dinámica permite realizar exploraciones que frecuentemente conllevan a la identificación y formulación de conjeturas permitiendo abordar algunos problemas relacionados con dicha geometría. El empleo del software dinámico no sólo permite explorar relaciones, sino también construir su propio repertorio de resultados matemáticos (Santos & Espinosa, 2002).

PRELIMINARES.

La idea principal contenida en el presente trabajo se inscribe en el campo de las Geometrías No Euclidianas, más precisamente, en la Geometría de Riemann, donde Bernhard Riemann (1826-1866)¹ expone sus ideas acerca del concepto de espacio². La temática que se desarrolla es el resultado de algunos análisis realizados en torno a preguntas que surgen al abordar el estudio de conceptos básicos de las Geometrías No Euclidianas.

Las Geometrías No Euclidianas fueron la mayor contribución en el campo de las matemáticas durante el siglo XIX, tiempo en el cual se profundizó en la comprensión de las propiedades geométricas, pasándose de la geometría métrica clásica a las geometrías afín y proyectiva³. Posteriormente, dichas geometrías se consolidan como las ramas más características de las matemáticas del siglo XX, gracias al desarrollo de la topología que da paso a geometrías tales como la algebraica, la diferencial y la proyectiva.

El principal tema de trabajo desde principios de siglo fue el estudio de la Geometría proyectiva, que sirvió como gran campo de innovación y experimentación; y llevó a los primeros esfuerzos ‘modernos’ de fundamentación axiomática rigurosa, que posteriormente aportaría para la comprensión de la naturaleza de la matemática.

Puede decirse que las geometrías no euclidianas surgen como el resultado de intentar probar el quinto postulado o postulado de las paralelas de Euclides⁴, al ser considerado mucho más complejo, e incluso de carácter distinto a los restantes. Algunos geómetras tales como Wallis intentaron deducirlo de los cuatro primeros postulados y otros como

¹ Matemático y físico alemán, alumno de Gauss el cual dio los primeros pasos para iniciar la geometría diferencial y la topología.

² *Las hipótesis sobre las que se funda la geometría.*

³ Espacios proyectivos, variedades Riemannianas con curvatura de Riemann nula, G. E. Martín, “The foundations of geometry and the non-euclidean plane”, Springer, UTM, 1998.

⁴ Ya que el significado de su enunciado tiende a ser una proposición que podría ser demostrada a partir de los otros postulados y axiomas.

Saccheri, Legendre y Lambert trataron de demostrarlo utilizando una de sus negaciones buscando llegar a una contradicción.

Luego de 2.000 años de intentos infructuosos de demostrar dicho postulado, se llegó a sospechar que no era posible deducirlo de postulados más simples, y que incluso, era lógicamente viable desarrollar geometrías basadas en axiomas contrarios, dándose paso a geometrías alternativas en un espacio posible.

Hasta aquel momento, se pensaba que había plena identidad entre el espacio real y el espacio euclídeo. Se creía que la geometría de Euclides era la única posibilidad conceptual para la mente humana y que además ese espacio conceptualmente necesario y evidente era idéntico al espacio real. Ahora, al constatarse la posibilidad lógica de toda una gama de geometrías, se plantea la posibilidad de que el espacio real físico sea no euclídeo. Lobachevski, Bolyai, Gauss y Riemann consideraron en su momento esta posibilidad.

Lobachevski y Bolyai fueron los primeros en establecer rigurosamente una geometría basada en un axioma no euclídeo de la cual surgen toda una serie de resultados poco familiares, como: “los ángulos de un triángulo suman menos de dos rectos”, “no hay triángulos semejantes de área distinta”, “la medida absoluta de longitud es la altura máxima de un triángulo rectángulo isósceles” y “existen rectas asintóticas, es decir, rectas que se acercan cada vez más sin cortarse nunca”.

Gauss veía una relación clara entre su *artículo sobre superficies curvas*⁵ y la geometría no euclídea; el estudio de este artículo confirmaba la idea que el espacio real pudiera ser no euclídeo. Gauss en sus trabajos mostraba resultados acerca de la suma angular en triángulos formados por geodésicas⁶, que estaban ligados a resultados típicos de las geometrías no euclídeas, es decir, Gauss encontró resultados análogos a la geometría no euclidiana a

⁵ *Disquisitiones generales circa superficies curvas*.

⁶ Geodésicas: Curvas de menor longitud sobre una superficie curva se les da el nombre de «geodésicas».

través del estudio de las superficies, confirmando la posibilidad de que el espacio físico tuviera alguna medida de curvatura.

Riemann menciona en su trabajo “*las hipótesis sobre las que se funda la geometría*” que para analizar con detalle las relaciones internas entre los principios básicos de la geometría hay que desarrollar un concepto general que abarque la idea de espacio. En otros términos, si queremos comprender mejor las suposiciones que esconde la idea habitual de espacio euclídeo, hace falta contemplarla desde un punto de vista más abstracto.

Para Riemann abarcar el concepto abstracto de espacio requiere introducir el concepto de *variedad n-dimensional*⁷, no sólo para comprender mejor las ideas básicas de la geometría, sino también para hacer posibles nuevos planteamientos geométricos en la exploración física del universo. Por tales razones, Riemann titula su trabajo *las hipótesis en las que se funda la geometría*.

A continuación se hará una interpretación de la geometría de Riemann en una superficie esférica, ya que ésta es una superficie de curvatura constante y es una variedad 2-dimensional o plano Riemanniano. Se estudiarán las propiedades geométricas de la esfera, sus elementos y algunas relaciones entre ellos, partiendo de una comparación con los postulados de Euclides para llegar a determinar el porqué la geometría esférica es un ejemplo de geometría no euclidiana.

Aunque la geometría de Riemann se puede interpretar en la superficie de una esfera; las relaciones entre sus elementos son un poco difíciles de visualizar, por tal razón haremos uso de la herramienta tecnológica Cabri Géomètre II. Adicionalmente, al utilizar esta

⁷ Concepto esencialmente topológico: El espacio euclídeo resultará ser una variedad tridimensional a la que se ha impuesto una métrica muy particular. Las variedades Riemannianas son variedades n-dimensionales dotadas de una métrica euclídea *a nivel local*. Pero Riemann destaca, empleando geometría diferencial inspirada en Gauss, que una misma variedad riemanniana puede dar lugar a muy diversas métricas *Globales*.

herramienta tecnológica se hace necesaria la proyección estereográfica que permita relacionar los puntos de la esfera con los puntos del plano euclídeo, y así establecer las propiedades que se mantienen invariantes bajo dichas proyecciones.

Por otra parte la proyección estereográfica se trabajará de forma analítica con el fin de obtener algunos resultados en el plano complejo.

1. BREVES NOCIONES SOBRE LA GEOMETRÍA DE RIEMANN.

A continuación se presentan algunas consideraciones acerca de la Geometría de Riemann, así como de sus elementos, los avances hacia la construcción de la geometría no Euclidiana y su avance en la Geometría moderna.

1.1 INTRODUCCIÓN A LAS GEOMETRÍAS NO EUCLIDIANAS

El periodo más fecundo de la geometría en Grecia es el siglo III A.C. con Euclides, Apolonio y Arquímedes, siendo el libro Los Elementos de Euclides el primer tratado formal y sistemático de la geometría elemental que fue completado posteriormente por Arquímedes quién extendió los problemas de la geometría plana a la geometría de los sólidos o geometría tridimensional.

Recordemos los postulados de Euclides:

(I) Dos puntos distintos determinan una única línea recta.

(II) Una segmento de línea recta puede extenderse sin limitaciones.

(III) Dado un punto y una distancia, es posible trazar una circunferencia que tenga a ese punto como centro, y a esa distancia como radio.

(IV) Todos los ángulos rectos son iguales.

(V) Si una recta que corta a otras dos forma, del mismo lado, ángulos interiores que suman menos de dos ángulos rectos, al prolongar indefinidamente las dos rectas, éstas se cortan del lado en que los ángulos interiores suman menos de dos ángulos rectos.⁸

⁸Esta versión del quinto postulado de Euclides se le atribuye a John Playfair (1748-1819), aunque Proclo (410-485 D.C) lo enunció en el siglo V de nuestra era.

Este postulado, que en su versión más conocida, se denomina el postulado de Playfair: "Dado un punto exterior a una recta, es posible trazar una, y sólo una recta paralela a la recta dada."

Euclides definió como paralelas a dos líneas rectas que no se cortan, y en virtud del quinto postulado, la suma de los ángulos interiores que dichas rectas forman con una línea transversal debe ser, tanto de un lado como del otro, igual a dos ángulos rectos.

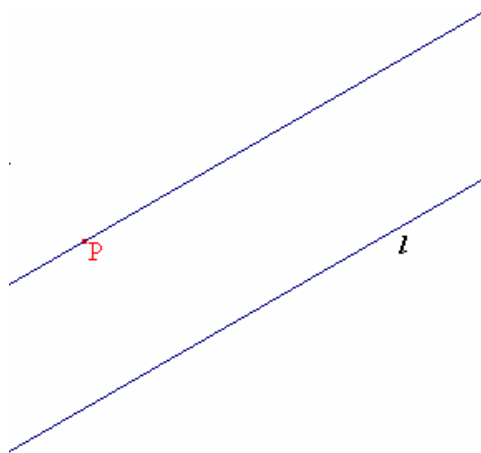


Figura 1. Postulado de las paralelas.

“El lector estará de acuerdo en que el Postulado V tiene una forma bastante más complicada que los cuatro primeros. Hay que aclarar, a favor de Euclides, que si bien existen formas más sencillas de este postulado, la redacción que él propone corresponde a la versión que permite utilizar el postulado para derivar, utilizando la lógica y resultados ya demostrados, nuevos resultados, lo cual era su propósito.” [R.S., pg. 12]

El postulado V ha sido sin duda el más discutido, debido quizá a que las primeras veintiocho proposiciones del libro de los Elementos no hacen uso de dicho postulado, lo cual durante mucho tiempo hizo pensar a los estudiosos del tema que éste podía deducirse de los cuatro postulados anteriores, dándose lugar a una gran cantidad de investigaciones en matemáticas que, en particular dan origen a la creación de las geometrías no Euclidianas.

Hay que notar que ésta segunda forma de enunciar el quinto postulado resalta dos de las cualidades que caracterizan el concepto Euclidiano de líneas paralelas:

*La **existencia** de una recta paralela a una recta dada por un punto exterior a ésta, y el hecho de que dicha paralela sea **única**.*

Debido a esto, al negar el postulado de Playfair, y por ende, el quinto postulado de Euclides, se tiene dos opciones: negar la unicidad de la paralela, o bien, negar su existencia, lo cual se expresa mediante los siguientes enunciados:

- Por *un punto exterior a una recta*, hay al menos dos paralelas a ella.
- Por *un punto exterior a una recta*, no existe paralela alguna.

El primero de estos enunciados, da origen a la geometría hiperbólica desarrollada por Lobachevski-Bolyai el cual no será discutido en el presente trabajo, mientras que el segundo da origen a la geometría elíptica cuya representación más simple es geoméricamente similar a la geometría de la esfera, la cual interpretada adecuadamente menciona resultados relacionados con la geometría de Riemann.

1.2 LA GEOMETRÍA DE RIEMANN INTERPRETADA EN UNA SUPERFICIE ESFERICA.

La geometría esférica o geometría de la superficie 2-dimensional de una esfera es la más sencilla representación de la geometría elíptica, que es denominada geometría de Riemann para una generalización extensa. Esta geometría esférica es un ejemplo de una geometría no-Euclidiana y es la que se describe a lo largo del trabajo.

La geometría elíptica es una geometría no-Euclidiana, en la cual, dada una línea l y un punto P exterior a ella, ninguna línea es paralela a l que pasa por P . El modelo más simple de la geometría elíptica es la geometría esférica, donde los puntos *están* en la esfera, y *las líneas rectas* son grandes círculos que pasan a través de esos puntos. En la esfera, tal como la superficie de la tierra, es fácil dar un ejemplo *de un triángulo* en donde la suma de sus ángulos puede ser 270° , que sería imposible en geometría euclidiana.

En geometría plana los conceptos básicos son el de punto y recta; en la esfera, los puntos se definen en el sentido general y los equivalentes de rectas no se definen en el sentido usual de "línea recta" sino en el sentido "de las trayectoria más corta entre los puntos" denominada geodésica. En la esfera las "rectas" corresponden a la geodésica que son los grandes círculos, los otros conceptos geométricos se definen como en geometría plana pero con las rectas sustituidas por geodésicas. Así, en geometría esférica los ángulos se definen entre las geodésicas, dando paso a una trigonometría esférica que se diferencia de la trigonometría ordinaria en muchos aspectos, por ejemplo en, la suma de los ángulos interiores de un triángulo (puede exceder los 180 grados).

Como se citó anteriormente la geometría esférica es el modelo más simple de la geometría elíptica, en el cual una recta no tiene alguna paralela a través de un punto dado, y se cumplen algunas otras características que posteriormente se describen para luego construir el plano de Riemann modelado por la esfera o también denominado el *plano descriptivo verdadero*⁹; que es obtenido identificando los puntos antipodales¹⁰. Localmente, este plano descriptivo tiene todas las características de la geometría esférica y diversas características globales.

Naturalmente una superficie posee dos dimensiones y es fácil de visualizar cuando es curva; pero algunos matemáticos, como el ruso Nikolai Lobachevski y el alemán Georg

⁹ En el desarrollo del trabajo haremos mención a dicho plano.

¹⁰ Pares de puntos diametralmente opuestos en la esfera.

Friedrich Bernhard Riemann en el siglo XIX se preguntaron si este concepto podría extenderse a los espacios «curvos» de tres dimensiones, teniendo en cuenta que en tales espacios los postulados básicos de la geometría clásica no se cumplen, por ejemplo las rectas podrían cruzarse en más de un punto, las paralelas no mantendrían entre sí la misma distancia, etc. En particular, Riemann tuvo la idea de definir un espacio curvo con cualquier número de dimensiones donde cada punto de un espacio de n dimensiones (n es un número entero positivo cualesquiera) se localiza por medio de un conjunto de n coordenadas.

En su trabajo, Riemann demostró que las propiedades básicas de un espacio curvo están determinadas exclusivamente por la fórmula para medir «distancias». En cada forma de ds^2 , es decir la métrica definida localmente en un cierto espacio riemanniano, las líneas rectas son sustituidas por curvas geodésicas cuya longitud —medida según ds^2 — es mínima.

Una superficie es un espacio de dos dimensiones que podemos “ver” (de lo que se ocupa este trabajo); sin embargo, los espacios curvos de tres o más dimensiones son difíciles o simplemente no se pueden visualizar. No obstante, es posible definirlos y manejarlos matemáticamente sin ninguna dificultad formal, por ejemplo el concepto de espacios riemannianos son un excelente ejemplo que sólo se puede describir en el lenguaje matemático.

Teniendo en cuenta esta dificultad de visualización se estudian las propiedades de la esfera y además se establecen algunas analogías con la geometría de Euclides en donde se muestra el comportamiento de los elementos en este nuevo “plano”.

1.2.1. La esfera como una superficie de curvatura constante. Pensemos en una esfera como la generalización de una circunferencia, pues mientras una circunferencia es el lugar geométrico de los puntos en el plano que equidistan de un punto fijo llamado centro, una esfera es el lugar geométrico de todos los puntos en el espacio que equidista de dicho

punto; al igual que en el caso de la circunferencia, la distancia que hay del centro a uno de los puntos de la esfera se denomina radio.

Por otra parte pensemos en una esfera como una superficie curva en donde lo descrito anteriormente sobre líneas rectas y curvas servirá para la apreciación intuitiva de la curvatura. Una línea que tiene su curvatura constante es un círculo y está directamente relacionada a su radio como se muestra en la figura 2.a en donde se puede observar que a menor radio la curvatura es mayor y a mayor radio menor es la curvatura. Esto lo podemos apreciar si tomamos dos circunferencias tangentes en un punto con distintos radios en donde la de radio menor está contenida en la de radio mayor como se muestra en la Figura 2b concluyendo así que el círculo más pequeño muestra una mayor curvatura. Esta característica relacionada con el inverso del radio, que determina que la curvatura de un círculo es proporcional al inverso del cuadrado del radio, $1 / r^2$. Se puede considerar que una recta es un círculo de radio infinito cuya curvatura, es nula. (el inverso de infinito).

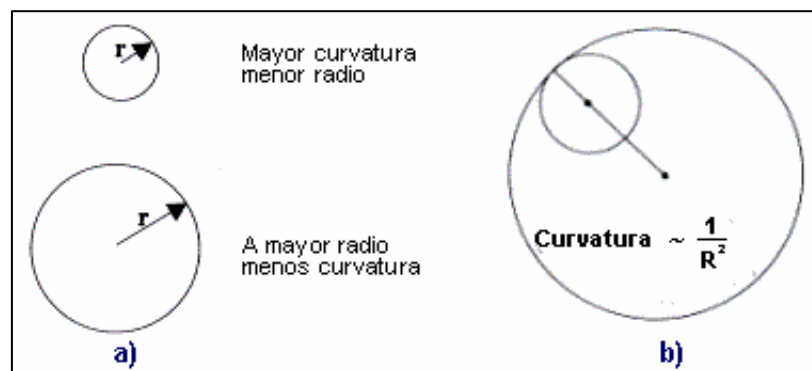


Figura 2. a) Circunferencias: trazado lineal de curvatura constante.
 b) La circunferencia de menor radio tiene mayor curvatura que una con radio mayor.

Cuando percibimos una línea que no es recta, ello implica que tiene distintas curvaturas a lo largo de sus puntos, lo que, de alguna manera, representa cuánto se va curvando. Podríamos suponer que esa curvatura podría medirse simplemente por el radio de un círculo tangente en cada punto; pero ello no es así y es ligeramente más complicado, porque usualmente

existen muchos círculos tangentes allí. Por ejemplo, en un punto de una recta hay infinitos círculos tangentes (Figura 3a).

Visto de otro modo, la tangente a todos esos círculos es siempre la misma recta; entonces, hay que elegir entre ellos el que se ajusta mejor a la curva del caso, lo que requiere que el círculo no sólo sea tangente, sino que se aproxime tanto como sea posible a la curva. Este círculo se llama *osculante*, en el cual no sólo la tangente es común con la curva, sino también el valor de su variación interpretado como la igualdad entre la primera y segunda derivadas.

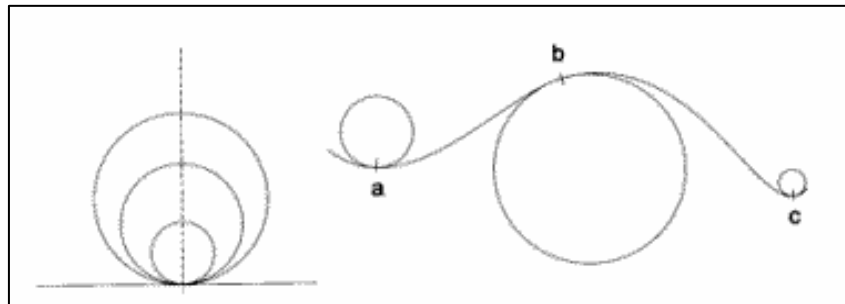


Figura 3. a) Un gran número de circunferencias son tangentes con respecto a cada punto de una línea¹¹.

Lo anterior, geoméricamente, puede construirse considerando dos cuerdas vecinas al punto, y determinando el centro del círculo¹² en la intersección de las normales en sus puntos medios, en el límite que ambas cuerdas tiendan a cero en el punto (Fig 3b)¹².

En el ejemplo de la recta, ambas normales son siempre paralelas y se cortan en el infinito. Luego, la curvatura de una línea en un punto queda medida por el inverso del cuadrado del radio del círculo osculante a ella en ese punto (Fig. 3c)¹².

¹¹ En este trabajo se ha usado una recta como ejemplo.- se describen tres circunferencias tangentes, de un sinnúmero que podrían darse desde un mismo punto. b) El centro del círculo osculante, cuyo radio mide la curvatura, es determinado por la intersección de las normales en el centro de dos cuerdas vecinas. c) En los distintos puntos de una línea curva arbitraria se pueden dar diferentes curvaturas. La medición de ellas se da por el inverso del cuadrado del radio del círculo osculante que se encuentre presente (que comporta una segunda derivada igual a la de la curva).

¹² Construcción típica en la geometría euclidiana en la cual se dan tres puntos arbitrarios y se debe encontrar una circunferencia que pase por los tres puntos.

1.3. LOS ELEMENTOS Y LAS RELACIONES DE LA GEOMETRÍA DE RIEMANN EN LA ESFERA

En la sección 1.1 se hizo referencia al origen y algunos aspectos diversos de la geometría no euclidiana, a partir de esta sección se hablará de un sistema geométrico que en varias relaciones es similar a la geometría esférica, pero en el cual una de las premisas básicas de la geometría elemental tiene lugar; haciéndose énfasis en una diferencia muy importante existente entre la geometría esférica y las de Lobachevski y Euclides.

1.3.1. Puntos y rectas en la esfera. Si tomamos una línea arbitraria y una esfera en el espacio pueden suceder varias cosas que se enumeran a continuación:

- Que la línea y la esfera no se intersequen.
- Que la línea toque a la esfera en un solo punto, y de manera similar al caso de la circunferencia, que sea tangente a la esfera; y finalmente
- Que la línea toque a la esfera precisamente en dos puntos.

En esta última hay un interés particular cuando la línea pasa justo por el centro de la esfera, determinando los “*antípodos*”, ya que presenta una gran similitud con los polos norte y sur en nuestro planeta.

Una pregunta natural que surge en nuestro nuevo “plano” (esfera) es la siguiente:

¿Quiénes juegan el papel de líneas rectas?

Es evidente que no se puede trazar una línea recta en el sentido tradicional sobre una esfera; sin embargo, si recordamos que la línea recta es la trayectoria de menor longitud entre dos puntos dados, podemos generalizar el concepto y definir una curva de longitud mínima sobre una superficie curva, esa curva es una porción de arco (Fig.4).

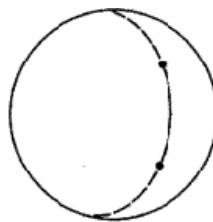


Figura 4. "Rectas" en la geometría esférica.

Sobre un plano, las geodésicas son las líneas más rectas posibles que satisfacen toda una serie de condiciones como: que dos rectas que se cruzan en un punto no vuelven a cruzarse con otro y un par de rectas paralelas nunca se cruzan entre otras. Sin embargo, estas condiciones no son cumplidas por las geodésicas en general, ya que sobre la superficie de una esfera, dos geodésicas se cruzan en dos puntos, un par de geodésicas aparentemente paralelas se cruzan, etc. Como lo muestra la figura 5.

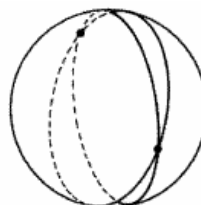


Figura 5. Dos geodésicas se cortan en dos puntos diametralmente opuestos.

Ahora bien, una curvatura tiene similar sentido tanto para un espacio bidimensional como para uno unidimensional, así, la superficie de una esfera tiene una curvatura constante. También en ese tipo de superficie se pueden trazar las líneas más cortas posibles, "segmentos de círculos mayores", los que contienen el centro de la esfera, como los segmentos de la figura 5.

Por otra parte, no deja de ser intuitivo el hecho de que una esfera esté ligada a su radio, como en el caso del círculo. Así la esfera tiene un valor único de curvatura igual en todas las direcciones para cada punto y sobre la superficie entera.

Si imaginamos una esfera de radio gigantesco, su superficie es casi plana y su curvatura tiende a ser nula, además dicha curvatura está relacionada inversamente con su radio, y más precisamente corresponde al inverso de su cuadrado, es decir a $1/r^2$, como ya se había mencionado. Esta curvatura llega a ser cero porque es el límite de una esfera de radio infinito. Pensemos, por ejemplo, en el caso de un mundo sobre la superficie de una esfera; si esta superficie es muy grande y los entes bidimensionales son pequeños, el mundo para ellos es casi plano “exactamente como sucede en la Tierra”, que al ser una esfera muy grande con respecto al tamaño del hombre, la vida normal en ella es plana para los fines prácticos, como la mayoría de las cosas que componen nuestro entorno.

Para hacer una analogía con el plano Euclidiano en donde las rectas son el camino más corto entre dos puntos, escogemos dos puntos arbitrarios y el centro de la esfera y los unimos mediante un arco, luego se prolonga este arco obteniéndose una circunferencia; por lo tanto se puede afirmar que las rectas en las esferas son las circunferencias máximas, las cuales llamaremos *E-líneas*.

Otra forma de determinar éstas circunferencias máximas es cortar la esfera con un plano que pasa justo por el centro de ésta, como se muestra en la figura 6; volviendo a la comparación con nuestro planeta los meridianos y el ecuador juegan este papel, no como los otros paralelos, los cuales tienen longitud menor.

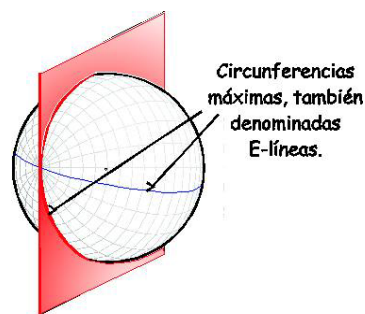


Figura 6. Plano que pasa por el centro de la esfera

1.4. GEOMETRÍA EUCLIDIANA vs. GEOMETRÍA ESFÉRICA.

Mientras en la geometría Euclidiana tenemos puntos y rectas, en la esfera nuevamente tenemos puntos, que llamaremos *E-puntos*, para enfatizar que los pensamos como puntos en la esfera, y las circunferencias máximas denominadas *E-líneas*.

En este momento, ya que prácticamente vivimos en una esfera, resulta natural preguntarse: ¿Qué tipo de geometría es ésta? y ¿Qué propiedades tiene? Trataremos de dar respuesta a éstas preguntas partiendo de los postulados de Euclides.

Iniciando con el primer postulado de Euclides el cual dice que “*dos puntos distintos determinan una única línea recta*”; podemos ver que si tomamos dos puntos P y Q, distintos sobre la esfera, junto con su centro C, entonces P, Q y C determinan tres puntos distintos. Que pueden ser:

- No colineales. esto es, P y Q no son antípodas, determinando un único plano. Por construcción, este plano pasa por el centro, por lo que, al intersecarlo con la esfera nos determina una E-línea.
- Colineales. Esto es esto es P y Q son antípodas, hay muchos planos que contienen a los tres, por lo que la E-línea que pasa por ellos no es *única*. Por ejemplo, si P es el polo norte y Q es el polo sur, todos los meridianos son E-líneas que pasan por estos puntos. Es decir:

No se cumple la unicidad en el primer postulado de Euclides.

Resumiendo, la primera relación de la incidencia para la esfera es:

- ✓ *Si A y B son dos puntos que no son antipodales, entonces existe una E-Línea que los contiene. Si A y B son antipodales, existen muchas E-Líneas que los contienen.*

Ahora continuamos con el segundo postulado el cual dice que “un segmento de línea recta puede extenderse sin limitaciones”, para ello tomemos dos puntos P y Q distintos en la esfera y el arco de circunferencia que los une. Si prolongamos uno de los extremos, por ejemplo Q, se llegará al punto P y posteriormente a Q, por lo cual la E-línea se "prolonga arbitrariamente" pero los puntos se cuentan varias veces. Por tanto:

Se cumple el segundo Postulado de Euclides.

Similarmente, supongamos que tenemos dos E-Líneas; Cada una de éstas determinan la intersección de los planos que las contienen, que por supuesto intersecan a la esfera en dos puntos antipodales. Así la segunda relación de la incidencia es:

✓ *Dos E-LINEAS distintos se encuentran en exactamente dos puntos antipodales.*

Por otra parte, el tercer postulado dice que “*dado un punto y una distancia, es posible trazar una circunferencia que tenga a ese punto como centro, y a esa distancia como radio*”. En este momento cabe preguntarnos: Dados dos puntos distintos P y Q sobre la esfera, ¿cómo medimos la distancia entre ellos?

Sobre la esfera unimos los puntos por medio de arcos de circunferencia, así para dar respuesta a la pregunta anterior basta recordar cómo medimos un arco de circunferencia en el plano. Para esto, tenemos en cuenta que una circunferencia contiene 2π radianes, es decir 360 grados, luego $1 \text{ radian} = (180/\pi) \text{ grados}$, por lo tanto $1 \text{ grado} = (\pi/180) \text{ radianes}$.

Si C es una circunferencia de radio R con centro en C , dados dos puntos distintos P y Q sobre C , si α es el ángulo PCQ medido en radianes ($0 \leq \alpha \leq \pi$), entonces la distancia entre P y Q está dada por:

$$D(P,Q) = R \cdot \alpha$$

y si medimos este ángulo en grados tenemos:

$$D(P,Q) = R \cdot \alpha \cdot (\pi/180^\circ)$$

Ahora que sabemos cómo medir la distancia entre dos puntos, procedamos como sigue: Consideremos una esfera con centro en C y de radio R unidades; tomemos un punto S sobre la esfera y cualquier E-línea que pase por él, luego sobre esta E-Línea tomemos un punto P que diste p unidades del punto S. *Este punto queda caracterizado por la condición de que el ángulo PCS medido en radianes es igual a p / R , donde R es el radio de la esfera.* Ya que esta E-línea es arbitraria, tenemos nuestra E-circunferencia (ver figura 7).

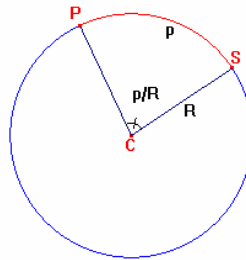


Figura 7. Distancia entre dos puntos en la esfera.

En consecuencia:

Se cumple el tercer postulado de Euclides.

Para determinar si el cuarto postulado el cual nos dice que todos los ángulos rectos son iguales se cumple o no debemos definir la manera de medir el ángulo entre dos E-líneas $L1$ y $L2$.

Antes de pasar a definir esta medida en una superficie esférica detengámonos un poco en una relación, de gran importancia en el trabajo que sigue: En el plano euclidiano el polígono más simple es el triángulo, en dicho plano no existe un polígono con sólo dos lados; ésta característica no se cumple en la esfera, ya que cualesquiera dos E-Líneas se

encuentra en dos puntos antipodales y dividen la esfera en cuatro regiones que llamaremos biángulos, cada una de los cuales tiene dos lados que son segmentos de E-Líneas.



Figura 8. Representación de un Biángulo.

Hay dos cosas que debemos saber acerca de estos polígonos de dos lados “biángulos”. Sus vértices son puntos antipodales, y sus dos ángulos son siempre iguales.

Ahora definiremos la medida del ángulo entre dos E- Líneas como la medida del ángulo entre sus líneas tangentes, por lo cual, la forma de medir los ángulos entre E-líneas coincide con la Euclidiana. En consecuencia,

Se cumple el cuarto postulado de Euclides

Finalmente, abordaremos el quinto postulado a la manera Playfair. Como ya se había mencionado todas las E-Líneas se intersecan en dos puntos antipodales, por lo tanto no hay E-Líneas paralelas, es decir:

No se cumple el quinto postulado de Euclides.

Dicho de otra forma en ésta "geometría" dado un punto exterior a una recta no es posible trazar una paralela a la recta dada.

2. LA GEOMETRÍA DE RIEMANN.

En los siguientes apartados mostraremos las propiedades y las relaciones de la geometría de Riemann a partir de algunas modificaciones de la geometría esférica.

En el plano de Euclides, al igual que en el de Lobachevski, dos rectas pueden tener *no más de un* punto en común; por el contrario en la geometría sobre la esfera, dos E -Líneas siempre se cortan en dos puntos diametralmente opuestos de la esfera. Así, en la geometría esférica no se cumple una de las premisas básicas de las geometrías de Euclides y Lobachevski: “Por dos puntos diferentes pasa una única recta”

El sistema geométrico que en varias relaciones es similar a la geometría esférica, para el cual, la citada premisa se cumple se denomina *Geometría de Riemann*, la cual es un complemento necesario de las Geometrías de Euclides y Lobachevski para dar solución completa de uno de los problemas geométricos principales del siglo XIX.¹³

El hecho de que dos puntos no determinen una única recta es una propiedad que a los geómetras no agrada mucho, por lo cual, para obtener una "geometría agradable", necesitamos identificar los puntos antipodales, que en la geometría de Riemann se definen como un conjunto de parejas de puntos; ésta geometría satisface los cuatro primeros postulados de Euclides, pero no el quinto, pues al igual que en la geometría esférica no existen líneas paralelas, ya que dos líneas en dicha geometría siempre se intersecan en exactamente un punto antipodal.

¹³ Principios de la teoría de grupos en la Geometría.

2.1. LOS ELEMENTOS DE LA GEOMETRÍA DE RIEMANN.

Situemos en el espacio euclidiano una esfera arbitraria k y empecemos a identificar sus elementos; para ello, consideraremos cada par de puntos diametralmente opuestos de k como un objeto único que se llamará “punto” de la geometría de Riemann. Tendremos en cuenta como en la geometría esférica en llamar “recta” a cada circunferencia máxima de la circunferencia k . Como se ilustra en la figura 9.

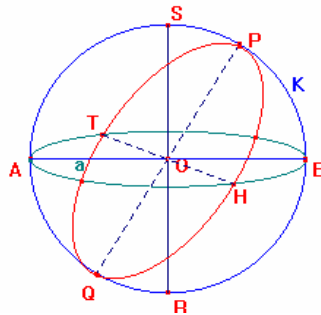


Figura 9. Los puntos y las rectas en la geometría de Riemann

En la figura podemos identificar un “punto” como la pareja $\{P,Q\}$ o $\{S,R\}$ y una “recta” como la circunferencia con centro en O y que pasa por punto $\{P,Q\}$ o $\{A,B\}$. Luego, evidentemente podemos deducir que:

1. Por dos “puntos” pasa una “recta”.
2. Por cada dos “puntos” diferentes pasa *una única* “recta”¹⁴.
3. En cada “recta” hay al menos dos “puntos”, a veces incluso una cantidad infinita de “puntos” y además, se pueden indicar tres “puntos” que no estén sobre una misma “recta”.

¹⁴ Cada “punto” A es un par no ordenado (es decir un conjunto) $\{x, x'\}$ de puntos diametralmente opuestos. Por ello, los “puntos” $\{x', x\}$ y $\{x, x'\}$ coinciden, de modo que por ellos pasen una cantidad infinita de “rectas” no contradice el numeral 2.

Así, para el conjunto considerado de “puntos” y “rectas” se cumplen los 3 anteriores axiomas de incidencia de la geometría euclidiana. Por el contrario, los axiomas de orden, en la forma que fueron enunciados para la geometría elemental, no son aquí aplicables; ya que en estos axiomas se caracteriza el concepto de posición de un punto entre otros dos puntos sobre una recta de la manera tradicional y en la geometría de Riemann para dos “puntos” sobre una “recta”, el concepto “entre” carece de sentido.

En efecto, al considerar tres “puntos” A, B, C arbitrarios en una “recta” no podemos distinguir la posición relativa de alguno de ellos con respecto a los otros como lo muestra la figura 10.

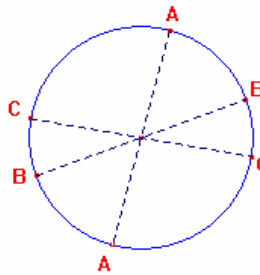
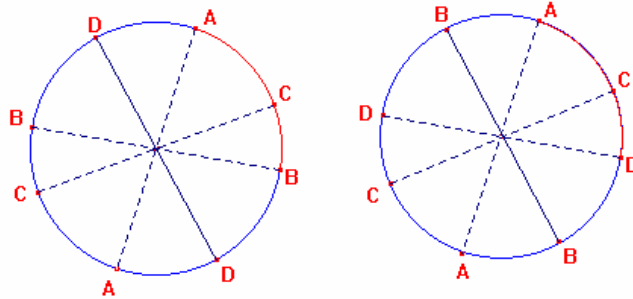


Figura 10. Posición de tres puntos.

Para estudiar el orden de “puntos” sobre una “recta”, se tomarán cuatro “puntos” A, B, C, D de alguna “recta” y considerando su orden de escritura (independientemente de la posición sobre la “recta”), siendo posibles dos casos esencialmente diferentes en la posición de los “puntos” A, B, C, D , con respecto a su numeración:

1. *Los dos primeros “puntos” A y B separan los dos últimos C y D , por lo tanto C y D separan a A y B , como lo muestra la Figura 11a.*
2. *Los dos primeros “puntos” A y B no separan los últimos C y D , por lo tanto, C y D tampoco separan A y B , como se observa en la figura 11b.*



Análogamente si a, b, c, d son cuatro “rectas” que pasan por un mismo “punto” y conservan el orden de escritura, son posibles dos casos en su posición relativa:

1. Las “rectas” a, b separan las c y d , por lo tanto c, d separan a a, b ; como lo muestra la Figura 12a, y
2. Las “rectas” a, b no separan c, d , por lo tanto c, d tampoco separan a a, b , como lo muestra la figura 12b.

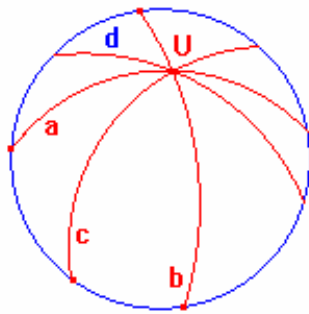


Figura 12a. a y b separan a c y d

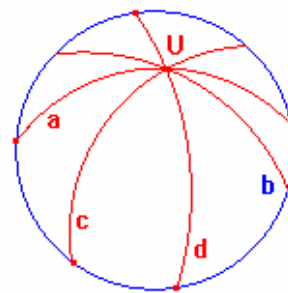


Figura 12b. a y b no separan a c y d .

Adoptaremos este concepto de separación de “puntos” y “rectas” como básico; reduciendo los demás conceptos referentes al orden de posición de “puntos” en una “recta” y “rectas” que pasan por un “punto” a dicho concepto.

Sean A y B dos “puntos” arbitrarios de alguna “recta” u ; entonces todos los “puntos” de la “recta” u , a excepción de A y B, pueden ser separados de manera única de acuerdo a los dos casos anteriormente mencionados de tal forma que no separen a A y B. De acuerdo a esta posibilidad, convendremos en decir que los “puntos” A, B determinan sobre la “recta” u dos “segmentos” y consideraremos puntos interiores de este segmento, a los “puntos” del otro caso en las figuras.

Teniendo en cuenta la figura anterior, uno de los dos segmentos determinados por los “puntos” A, B se representa por dos arcos en línea gruesa; en la figura a, C es un punto interior de este “segmento”, mientras que D es “punto” interior del otro “segmento”; en la figura b, tanto C como D son “puntos” interiores de un mismo “segmento”.

Con respecto a “rectas” que pasan por un “punto”, pueden ser enunciados conceptos análogos. Precisamente, si a y b son dos “rectas” que pasan por algún “punto” U , todas las “rectas” que pasan por U , exceptuando a a y b , pueden ser divididas de manera única en dos clases, de manera que dos “rectas” cualesquiera de una misma clase no separen a a y b , mientras que dos “rectas” arbitrarias de clases diferentes separen a a y b . De acuerdo con esto, convendremos en decir que las “rectas” a y b determinan DOS “ángulos” con vértice U . Consideraremos “rectas” interiores de uno de los “ángulos” a las “rectas” de una de las dos clases antedichas, y “rectas” interiores del otro, a las “rectas” de la otra clase.

Luego de esto se definen de manera natural: el triángulo y sus ángulos internos, el dominio interior de un triángulo, el de un polígono y el de un polígono simple sin autointersecciones, además, los ángulos internos de un polígono simple y toda una serie de conceptos utilizados en la geometría elemental.

Convendremos por último en llamar a dos “segmentos” congruentes, si existe un movimiento en la esfera K sobre sí misma o bien una reflexión especular de ésta con

respecto a uno de sus planos diametrales, que superpone uno de estos “segmentos” al otro¹⁵. Análogamente se define la congruencia de “ángulos” y de figuras arbitrarias¹⁶.

Resumiendo en esta sección consideramos: 1. relaciones de incidencia de “puntos” y “rectas”, 2. relaciones de orden de “puntos” sobre una “recta” arbitraria y de “rectas” que pasan por un “punto” arbitrario y 3. Relaciones de congruencia de “segmentos”, “ángulos” y otras figuras.

El sistema de teoremas que se refiere a estas relaciones se llama **geometría de Riemann**; el conjunto de “puntos” y “rectas”, según las denominaciones que se hallen en las relaciones indicadas, se denomina **plano de Riemann**. Todos los teoremas de la geometría de Riemann representan teoremas de la geometría euclidiana, interpretados adecuadamente, por cuanto los “puntos” y las “rectas” del plano de Riemann son objetos euclidianos.

2.2. ALGUNAS PROPOSICIONES DE LA GEOMETRÍA DE RIEMANN

Como se dijo anteriormente, esta geometría cumple los tres axiomas de incidencia de la planimetría euclidiana; en particular, el cual dice que *“dos diferentes puntos cualesquiera determinan una recta y solo una que pasa por ellos”*. Por otra parte, en la geometría de Riemann tiene lugar una proposición que no existe, ni en la de Euclides, ni en la de Lobachevski, y es, precisamente que: cada dos rectas diferentes tienen un único punto¹⁷ en común. Dicho de otro modo, *en el plano Riemanniano no hay rectas paralelas*.

¹⁵ Los puntos extremos e interiores de un segmento se superponen a los puntos extremos e interiores, respectivamente, del otro.

¹⁶ Una figura M, como conjunto de “puntos” y “rectas” se considera congruente a otra figura M', si entre los “puntos” de éstas, así, como también entre sus “rectas”, se puede establecer una correspondencia Biyectiva de manera como resultado de algún movimiento de la esfera K sobre si misma, o de una reflexión especular con respecto a algún plano diametral, todos los “puntos” y “rectas” de la figura M se superpongan a los “puntos” y “rectas” correspondientes de M'.

¹⁷ Cada dos rectas (circunferencias máximas) de la esfera tienen un par de puntos diametralmente opuestos de intersección.

Así, mientras en la geometría euclidiana tiene lugar el postulado sobre la unicidad de la recta que pasa por un punto dado y no corta a una recta dada y en la de Lobachevski se adopta una de las premisas que niega este postulado asumiéndose que existe una cantidad infinita de estas rectas, en la geometría de Riemann se da lugar a la otra premisa que lo niega, a saber: *En esta geometría toda recta corta a cualquier otra.*

Esta disposición de las rectas en el plano de Riemann difiere radicalmente de la disposición de rectas en el plano de Euclides o en el de Lobachevski, por un motivo más, ya que en la geometría de Riemann “Una recta no divide al plano en dos partes”. Esto significa que cualesquiera que sean la “recta” a y los dos “puntos” A y B que no pertenezcan a ella, siempre se pueden unir A y B con un segmento que no corte a la recta.

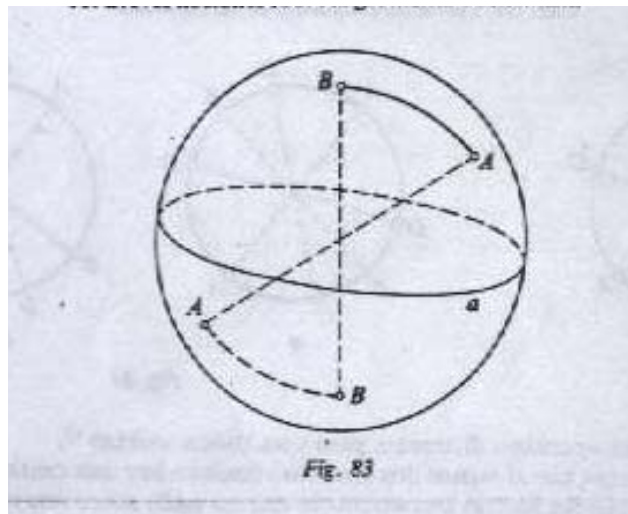


Figura 13. Interpretación del plano de Riemann.

En la geometría de Riemann se define de manera natural la comparación de segmentos y de ángulos entre sí, así como sus mediciones. De lo cual surge la posibilidad de enunciar y demostrar teoremas concernientes a las relaciones entre las magnitudes geométricas, análogos en una u otra forma a los conocidos teoremas de las geometrías de Euclides y Lobachevski.

También, resulta importante resaltar la diferencia existente entre las geometrías de Euclides, Lobachevski y Riemann en cuanto a la proposición referida a la suma de los ángulos internos de un triángulo. En la de Euclides esta suma es igual a la de dos ángulos rectos, en la de Lobachevski es menor a la de dos ángulos rectos y en la de Riemann es mayor que dos rectos.

Para verificar el hecho de que en el plano de Riemann la suma de los ángulos internos de un triángulo sea mayor que dos rectos, basta observar que las rectas del plano riemanniano son circunferencias máximas de alguna esfera y como un triángulo esférico tiene suma de ángulos internos mayor que dos rectos entonces un triángulo en el plano de Riemann tendrá la misma propiedad.

Digamos por último que las relaciones métricas en la geometría de Riemann se expresan por fórmulas de la geometría esférica, adecuadamente interpretadas¹⁸. Por ejemplo, en el plano de Riemann un lado a de un triángulo sobre una esfera de radio R , se expresa en función de los otros dos lados b , c y el ángulo opuesto α , mediante la fórmula:

$$\cos \frac{a}{R} = \cos \frac{b}{R} \cos \frac{c}{R} + \operatorname{sen} \frac{b}{R} \operatorname{sen} \frac{c}{R} \cos \alpha$$

Se sobreentiende que el plano riemanniano fue obtenido identificando los puntos diametralmente opuestos de esta *misma* esfera de radio R . Así, es fácil comprender que R tenga que aparecer en otras fórmulas métricas, que se refieren al plano riemanniano.

¹⁸ Lo cual es comprensible, ya que cada figura M del plano de Riemann representa un par de figuras $M1$ y $M2$ de alguna esfera, situadas simétricamente con respecto al centro de ésta, y cada par de puntos diametralmente opuestos de las figuras $M1$ y $M2$ se considera como un punto de la figura M ; por esto cada relación métrica entre los elementos de M coincide con una relación métrica entre los elementos correspondientes de la figura $M1$, o bien de la figura $M2$.

Éste R (en escala prefijada) caracteriza al plano riemanniano, al igual que a la esfera determinada para definir este plano; haciéndose evidente que cuanto mayor sea R en comparación con las dimensiones de alguna porción del plano riemanniano, tanto menos se distinguirán por sus propiedades las figuras que se encuentran en esa porción de las figuras euclidianas. Por tal razón, R puede considerarse como la “medida de no euclidianidad” del plano riemanniano, en donde, un segmento de longitud R que se encuentre en el plano¹⁹ lleva el nombre de *radio de curvatura*.

Como se mencionó anteriormente, “todos los teoremas de la geometría de Riemann representan teoremas de la geometría euclidiana, interpretados adecuadamente, por esto los teoremas de la geometría riemanniana se deducen de los axiomas de la euclidiana. Por supuesto, no todos los teoremas de ésta última admiten una interpretación como teoremas de la geometría de Riemann; la mayoría de dichos teoremas no guardan relación alguna con los objetos que se han llamado puntos y rectas del plano riemanniano”²⁰. Así, entonces, para obtener los teoremas de la geometría de Riemann a partir de los axiomas de Euclides, deben hacerse algunas deducciones *particulares* de estos axiomas.

Es posible, sin embargo, basar la geometría de Riemann en un sistema particular de axiomas, es decir, en una serie de proposiciones referentes a los conceptos de incidencia, orden y congruencia de los objetos del plano riemanniano, de los cuales puedan deducirse, de manera lógica, todas las demás proposiciones de dicha geometría, de manera que cada deducción conduzca a algún otro teorema.

Es este caso, al demostrar los teoremas de la geometría de Riemann se hacen indiferentes todas las propiedades de sus objetos, con excepción de las que se mencionan en los axiomas. Esta fundamentación axiomática de la geometría de Riemann la transforma en un

¹⁹ Un segmento entendido en el sentido de la geometría de Riemann.

²⁰ Geometría Superior. N.V, Efimov editorial MIR Moscú.

sistema geométrico abstracto, donde entendiendo por “punto” y “recta” a objetos arbitrarios y por “están en”, “separan”, “congruentes” a relaciones arbitrarias entre ellos que satisfagan los axiomas, obtendremos diversos “modelos” concretos de la geometría abstracta de Riemann.

Cada conjunto de objetos que satisfaga las relaciones existentes antes mencionadas con los axiomas de incidencia de la geometría euclidiana, se llamará *plano riemanniano*. **Así, la esfera con los puntos antipodales identificados viene a ser uno de los diferentes planos de Riemann.**

3. OTRA INTERPRETACIÓN DE LA GEOMETRÍA DE RIEMANN: LA PROYECCIÓN ESTEREOGRÁFICA.

El objetivo de este aparte apunta a identificar las distintas representaciones de las “rectas” de la geometría esférica de Riemann en el plano bidimensional representadas mediante la proyección estereográfica. Se mostrará otra manera de representar la geometría de Riemann, construyendo un nuevo modelo de ésta en el cual los objetos se encontrarán en correspondencia determinada con los del modelo de la esfera, que ya conocemos, quedando claro sin remitirnos a los axiomas que ambos modelos realizan una misma geometría.

Para construir nuestro modelo utilizaremos de nuevo el espacio euclidiano, en dicha construcción seguiremos los siguientes pasos: Primero, daremos una idea de lo que es una proyección estereográfica y segundo completaremos el conjunto del espacio euclídeo con un nuevo elemento.

Una proyección estereográfica es una forma de proyectar los puntos de una superficie esférica sobre un plano, dichas proyecciones se utilizan comúnmente en la cartografía para elaborar mapas del modelo esférico de la tierra, en donde por medio de la geometría se representa en una superficie plana tal como un papel o la pantalla de un computador; cualquier intento de trasladar los puntos de una esfera sobre un plano precisa alguna distorsión, las proyecciones estereográficas no son la excepción y de hecho no se constituyen un acercamiento real, ya que la distorsión es mayor.

Un ejemplo real de la representación de una proyección estereográfica está en imaginar una esfera transparente apoyada en un plano. Si llamamos polo sur al punto en el cual la esfera toca al plano, polo norte a su punto diametralmente opuesto y luego ponemos una fuente de luz en el Polo Norte; cada rayo de luz que pasa a través de un punto en la esfera y después toca el plano, es la proyección del punto de la esfera en el plano.

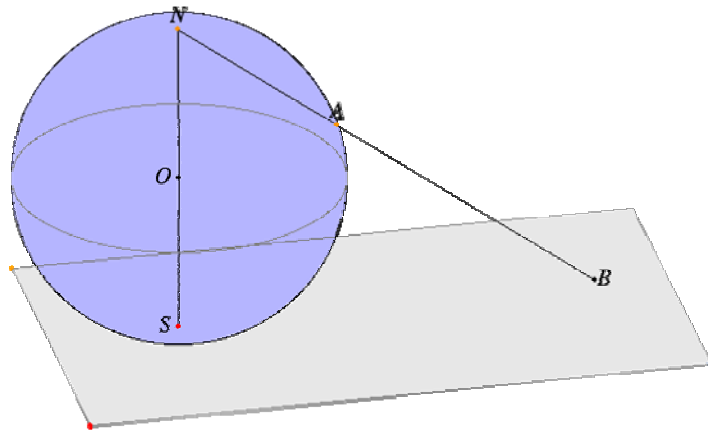


Figura 15: Proyección estereográfica

Completaremos el conjunto de elementos del plano euclídeo con un elemento nuevo, que llamaremos *punto del infinito*. La naturaleza de éste nuevo elemento será para nosotros indiferente, pero, al introducirlo, supondremos que se encuentra en correspondencia determinada con elementos dados inicialmente. El plano que se completa con este nuevo elemento se denomina plano estereográfico.

Consideraremos como elementos del nuevo modelo a los puntos y rectas de algún plano estereográfico α^{21} . El término “un punto está sobre una recta” se interpretará en el sentido habitual, entonces:

1. Se observan los tres axiomas de incidencia de la planimetría euclídea.
2. Dos rectas cualesquiera se cortan (posiblemente en un punto del infinito).

En consecuencia para los puntos y rectas del nuevo modelo las relaciones de incidencia satisfacen las mismas condiciones básicas que tienen lugar en la geometría esférica, consideradas anteriormente. Ahora definiremos en nuestro modelo estereográfico las relaciones de orden y congruencia; con este fin, tomamos alguna esfera k para describir más

²¹ Entre ellos, sus puntos del infinito y la recta del infinito.

detalladamente en que consiste la proyección estereográfica y sus principales características. En este momento lo importante es la selección del punto N de la proyección, el cual debe estar en la esfera y ser diametralmente opuesto al punto de tangencia del plano y la esfera.

En la figura 15 observamos la esfera que es tangente al plano en el punto S (polo sur), de centro O , y punto fijo de la proyección N (Polo Norte).

En la figura 16 observamos una representación bidimensional de la proyección estereográfica, en donde a cada punto de la circunferencia le asociamos un punto en la recta tangente que pasa por el polo sur, Uniendo mediante una recta al polo norte de la circunferencia con el punto que queremos representar mediante proyección estereográfica en la recta m , es decir al punto P le hacemos corresponder el punto P' . A cada punto de la circunferencia le hacemos corresponder uno y solo un punto de la recta, pero en el cual al punto N del polo Norte le hacemos corresponder al punto del infinito Euclidiano, en el plano euclidiano ordinario al punto del infinito ∞ se trata por separado mientras que en la esfera puede ser interpretado como el punto del polo Norte.

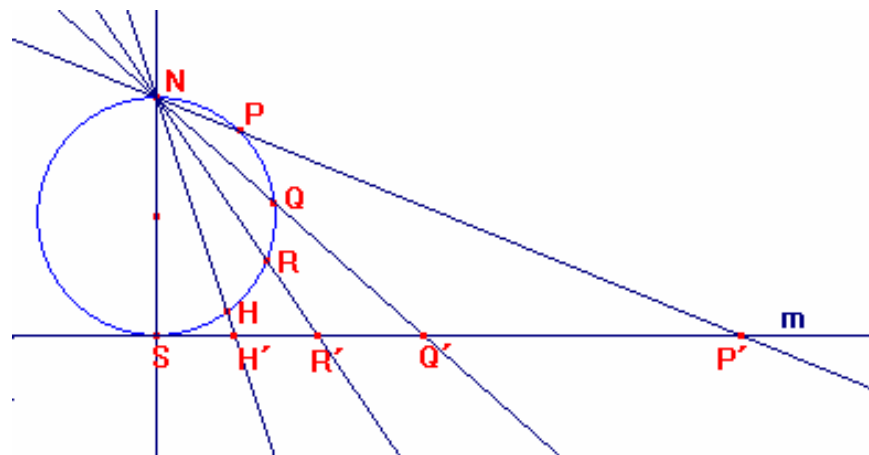


FIGURA 16. Representación de la proyección estereográfica plana.

Un punto A en la circunferencia corresponde a un punto B en la tangente cuando los tres puntos N , A , y B son colineales. El único punto en la circunferencia que no corresponde a

un punto en el plano es el punto N de la proyección, al que le corresponde al punto en el infinito ∞ . Así, tenemos una correspondencia entre la recta con un punto del infinito con la circunferencia.

Generalizando, pondremos en el mismo orden a la circunferencia con la esfera y a la recta con el plano euclidiano con el fin de obtener que: un punto A en la esfera corresponda a un punto B en el plano tangente cuando los tres puntos N , A , y B son colineales. El único punto en la esfera que no corresponde a un punto en el plano es el punto N , *polo norte* y le corresponde al punto en el infinito ∞ . Así, tenemos una correspondencia entre el plano con un punto del infinito con la esfera.

3.1. LAS “RECTAS” EN LA GEOMETRÍA ESFERICA CON CABRI MEDIANTE PROYECCION ESTEREOGRAFICA.

Es conveniente mencionar que definimos plano estereográfico al conjunto de puntos del plano que son representaciones de puntos de la esfera proyectados e identificaremos la representación de cada uno de los elementos de la geometría esférica de Riemann en el plano estereográfico.

3.1.1. Identificación de las “rectas” de la geometría esférica de Riemann en el plano estereográfico.

Recordemos que las rectas en la geometría de Riemann son circunferencias máximas, en donde se pueden distinguir tres tipos de acuerdo a la orientación que tengan en la esfera:

- 1. El ecuador de la esfera.**
- 2. Los meridianos.**
- 3. Circunferencias oblicuas²².**

²² Circunferencias Máximas generadas por cortes con planos que pasan por el centro de la circunferencia y que son oblicuos con respecto al ecuador y los meridianos

A continuación describimos cada una de ellas y su representación en el plano estereográfico.

1. **El ecuador de la esfera:** Es bastante fácil poder determinar porque la proyección estereográfica del ecuador de una esfera de radio unidad es una circunferencia de radio 2 en el plano estereográfico la figura 17 nos ayuda a identificar este caso y su representación en el plano estereográfico con sus puntos correspondientes mediante la proyección estereográfica figura 18.

Podemos mostrar mediante triángulos, que dicha cónica en el plano estereográfico es una circunferencia, como lo muestra el esquema de la figura 19.

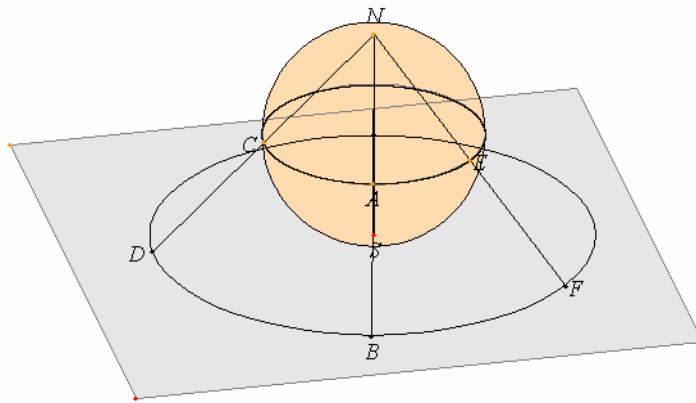


Figura 17. Proyección estereográfica del ecuador.

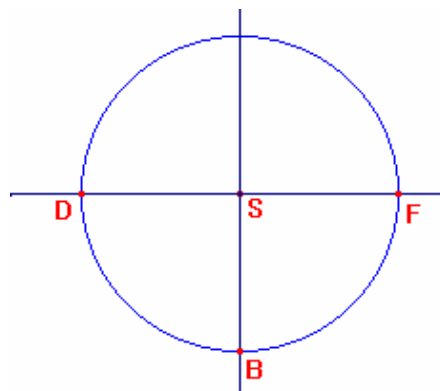


Figura 18. El ecuador en el plano estereográfico

DEMOSTRACIÓN:

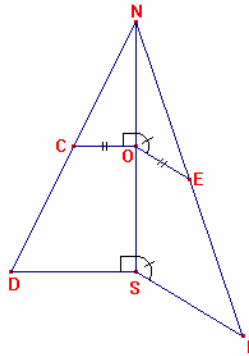


Figura 19. Demostración en el plano estereográfico.

- | | |
|--|--|
| 1. $\overline{CO} \cong \overline{OE}$ | Por ser Radios de la esfera. |
| 2. $\overline{NO} \cong \overline{NO}$ | Propiedad reflexiva. |
| 3. $\angle NOC \cong \angle NOE$ | Dado. |
| 4. $\triangle NOE \cong \triangle NOC$ | Criterio LAL entre 1 - 3 - 2. |
| 5. $\angle CNO \cong \angle ENO$ | Partes correspondientes de triángulos congruentes. |
| 6. $\angle NSD \cong \angle NSF$ | Rectas tangentes a la esfera. |
| 7. $\overline{NS} \cong \overline{NS}$ | Propiedad reflexiva |
| 8. $\triangle NSF \cong \triangle NSD$ | Criterio ALA entre 5 - 7 - 6 |
| 9. $\overline{DS} \cong \overline{SF}$ | Partes correspondientes de triángulos congruentes. |

Queda demostrado así que DS Y SF son radios de la circunferencia; análogamente desarrollamos el mismo procedimiento con los demás puntos proyectados en el plano estereográfico. En este caso no es difícil identificar dicha cónica: **una circunferencia centrada en el polo sur.**

2. **Los meridianos.** Los meridianos o circunferencias máximas que pasan por el polo norte y polo sur de la esfera representan rectas que pasan por el origen en el plano estereográfico, como el meridiano que pasa por los puntos A y C de la esfera, cuya proyección estereográfica corresponde a los puntos D y B en el plano estereográfico como

lo muestra la figura 20; además el punto D puede variar para estar “entre” el polo sur S y el punto B, ya que esta relación puede también ser inversa (figura 21).

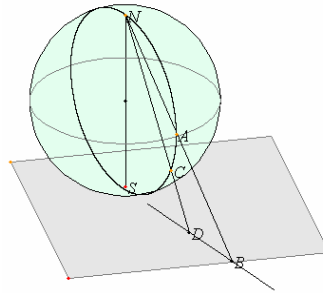


Figura 20. Los meridianos bajo proyección estereográfica

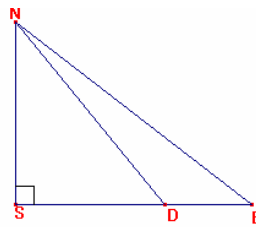


Figura 21. La proyección de los puntos A y C en el plano estereográfico.

CASO ESPECIAL: Otra forma de obtener rectas en el plano estereográfico es partiendo de circunferencias no máximas de la esfera, es decir de aquellas que no son “rectas”; que mediante proyección estereográfica son representadas en el plano estereográfico como rectas que no pasan por el origen (ver figura 22). En este caso no nos detendremos ni haremos explícitas sus relaciones ya que no es de nuestro interés para el presente trabajo.

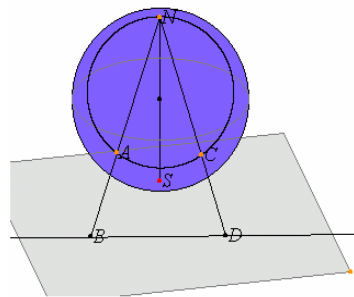


Figura 22. Otras proyección que generan rectas en el plano estereográfico.

Resumiendo los dos casos anteriores se tiene que dichas “rectas” de la geometría esférica de Riemann pueden ser representadas en el plano estereográfico por: Circunferencias con centro el polo sur y por rectas que pasan por el origen de acuerdo como se muestra en la figura 23 en donde se representa el ecuador y un meridiano.

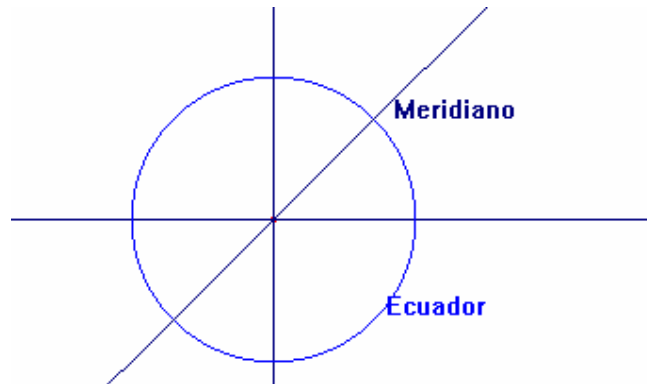


Figura 23. Representación de “rectas” en el plano estereográfico.

3. **Circunferencias oblicuas.** Este es el caso más complicado de representar en el plano estereográfico, para identificar el tipo de cónica que se genera al realizar la proyección nos apoyaremos en el Programa Cabri Geometre II. A continuación damos un ejemplo de la proyección buscada para dichas “rectas” oblicuas que permita dar una idea del tipo de proyección estereográfica en este tipo de “rectas”, obteniendo que su representación son también circunferencias en el plano estereográfico cuyo centro es distinto al polo sur (figura 24).

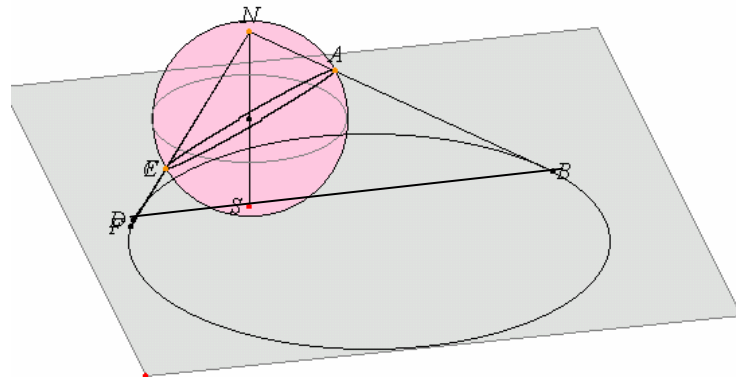


Figura 24. Representación de la proyección estereográfica de “rectas” oblicuas.

Para lograr la anterior identificación en el plano estereográfico debemos partir de algunas características que se pueden encontrar entre dichas “rectas” y otras ya conocidas en la esfera; además es necesario que el lector reconozca o tenga presente que una manera de “ver” o interpretar la proyección estereográfica es reconocerla como inversión en una esfera. Las inversiones en una esfera son análogas tridimensionales de inversiones en un círculo²³, las cuales serán utilizadas para la identificación de algunos puntos de la esfera proyectados en el plano estereográfico.

De acuerdo a lo anterior, consideremos dos puntos A, E diametralmente opuestos en la esfera y diferentes al polo norte, al polo sur o un punto sobre el ecuador. Podemos suponer que dichos puntos son los puntos más alto y más bajo respectivamente con relación a la esfera, todo con el fin de poderlos identificar en la cónica que queremos construir en el plano estereográfico. Así entonces tomemos por ejemplo al punto más bajo y llamémosle E y al más alto A y los puntos correspondientes mediante la proyección en el plano estereográfico los puntos F y B respectivamente como lo ilustra la figura 24.

Si utilizamos algunos resultados de la Geometría proyectiva tal como que la proyección de una circunferencia en un plano desde un punto fijo es una elipse, (figura 25) sabemos de antemano que la representación en el plano estereográfico de dicha recta es una elipse en la cual, para nuestro caso el punto fijo de la proyección es N y los vértices serán F y B, además que su centro es el punto medio entre ambos. Es decir que la elipse o cónica que buscamos debe pasar por los puntos F y B; y su centro esta en el punto medio de ambos.

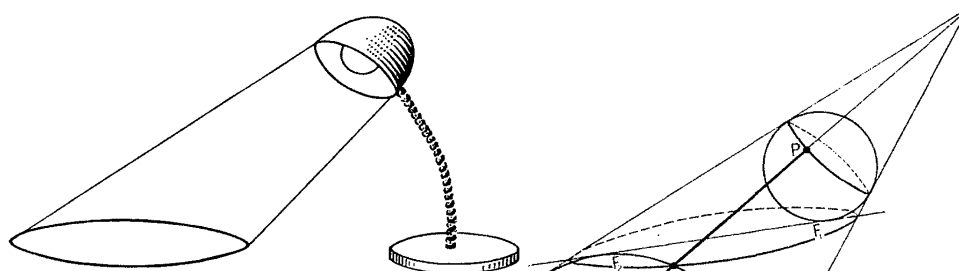


Figura 25. Proyección de una circunferencia en un plano desde un punto fijo

²³ VER ANEXO 1.

Por otra parte se tiene que en la barra de herramientas de Cabri Geometre II se encuentran el elemento Cónica en donde a partir de cinco puntos dibuja la cónica que pasa por ellos.

Es decir, que para dibujar una cónica se debe encontrar cinco puntos que pasen por ella, de acuerdo a las consideraciones antes mencionadas, el trabajo a realizar en lo que sigue es encontrar éstos cinco puntos y determinar la cónica en el plano estereográfico que pasa por ellos.

Veamos primero algunas características de dichos puntos y a partir de ellos construyamos la cónica. Inicialmente determinemos la posición de B conociendo F, en otras palabras vamos a determinar la posición de un punto en el plano estereográfico conociendo o dado uno inicialmente.

Observemos que:

1. **Existe un meridiano que pasa por los puntos A, E, N y S. Llamémosle m_1 . (Por dos puntos pasa una única recta)²⁴**
2. **El $\angle ENA$ es recto.**

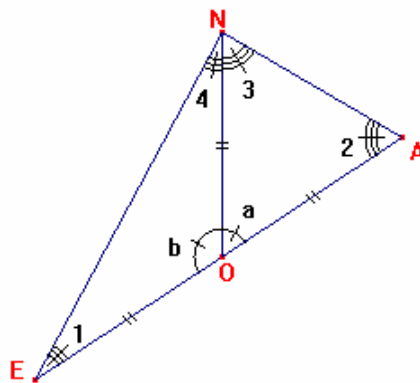


Figura 26. Demostración 2.

²⁴ En el sentido de la geometría de Riemann se cumplen los axiomas de incidencia verificados anteriormente, los puntos $\{A, E\}$ y $\{N, S\}$ son puntos diametralmente opuestos, es decir que por estos dos puntos pasa una única que recta que es un meridiano ya que pasa por el polo norte y polo sur de la esfera.

DEMOSTRACIÓN:

1. $\overline{NO} \cong \overline{OA} \cong \overline{OE}$

Por ser radios de la esfera.

2. $\triangle AON, \triangle NOE$

Son isósceles por 1.

3. a y b forman un par lineal.

Dado.

4. $\angle a + \angle b = 180$

Definición de par lineal.

5. $\angle 2 \cong \angle 3$ y $\angle 4 \cong \angle 1$

Ángulos de la base de un triángulo isósceles son congruentes .1

6. $\angle 2 + \angle 3 + \angle a = 180$ y $\angle 1 + \angle 4 + \angle b = 180$

Suma de los ángulos interiores de un triángulo suman 180.

7. $2\angle(3) + \angle a = 180$ y $2\angle(4) + \angle b = 180$

Sustitución de 6 en 7.

8. $2\angle(3) + 2\angle(4) + \angle a + \angle b = 360$

Suma de igualdades en 7.

9. $2\angle(3) + 2\angle(4) + 180 = 360$

Sustitución de 4 en 8.

10. $\angle 3 + \angle 4 = 90$

Aritmética.

De acuerdo a lo anterior la suma de los ángulos 3 y 4 es 90° , en otras palabras el $\angle ENA$ es de 90 grados, es decir recto.

Es necesario recordar la proyección estereográfica de dichas rectas oblicuas, en las cuales se harán algunas consideraciones importantes y así mismo serán demostradas.

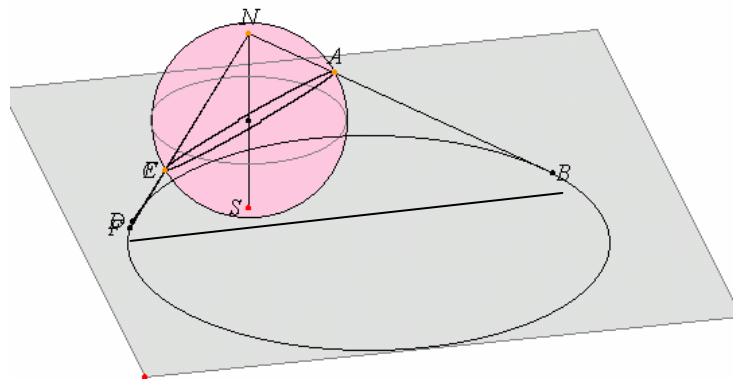


Figura27 a. Representación de la proyección estereográfica de “rectas” oblicuas.

3. Los puntos B, F y S son colineales y S está entre ellos. (definición de colinealidad).

4. $\Delta FSN \sim \Delta NSB$.

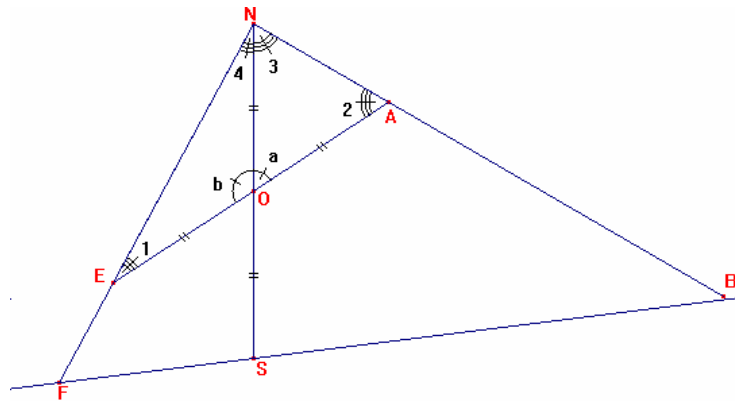


Figura 27 b. Demostración 3.

DEMOSTRACIÓN:

- | | |
|---|--|
| 1. $\overline{NS} \perp \overline{FB}$ | Cualquier recta que pasa por el punto de tangencia es perpendicular al radio. |
| 2. $\angle NSB, \angle NSB$ | Son rectos por definición de recta perpendicular en 1. |
| 3. $\angle FNB$ ES RECTO. | Resultados anteriores en el numeral 2. |
| 4. ΔFNB Es rectángulo. | Definición de triángulo rectángulo y 3. |
| 5. $\Delta FSN \approx \Delta NSB \approx \Delta FNB$ | En un triángulo rectángulo la altura correspondiente a la hipotenusa divide al triángulo en otros dos que son semejantes entre si. |

Por las consideraciones anteriores una forma de trazar B a partir de F es la siguiente:

Se construye la circunferencia de radio 2 en el plano estereográfico, obtenemos el inverso²⁵ F' de F con respecto a dicha circunferencia y después el simétrico de F' con respecto al origen. El punto así obtenido será B (ver figura 28).

²⁵ El punto generado por inversión de dicho punto con la circunferencia de radio 2.

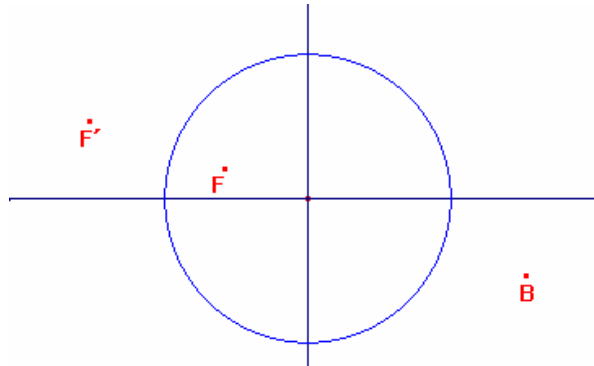


FIGURA 28. Obtención de un punto diametralmente opuesto de la esfera en el plano estereográfico

Con lo anteriormente realizado resta únicamente determinar 3 puntos de la cónica buscada en el plano estereográfico para completar la construcción.

Ahora tenemos que:

1. La circunferencia máxima oblicua inicial interseca al ecuador en dos puntos. Llamémoslos Q y P.

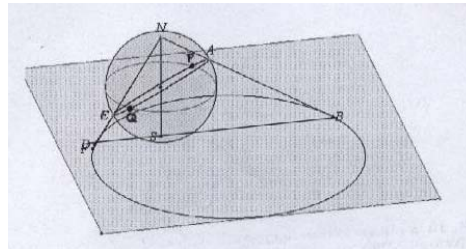


FIGURA 29. Características de las rectas.

2. Los puntos de intersección anteriores se encuentran sobre la mediatriz del segmento EA.

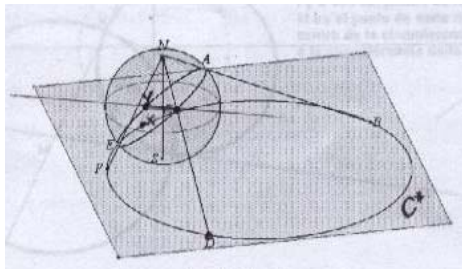


FIGURA 30.

3. El meridiano que forma un ángulo recto con respecto al meridiano m_1 contiene a la mediatriz anterior. Llamémosle m_2 .

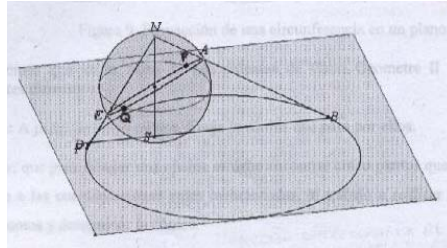


FIGURA 31

4. La recta que pasa por el origen del plano estereográfico y que es perpendicular al segmento FB es la proyección del meridiano m_2 .

Por las consideraciones anteriores una forma de generar otros dos puntos nuevos de la cónica buscada es entonces trazar la perpendicular al segmento FB que pase por el centro de la circunferencia de radio 2. Dichos puntos W, Y respectivamente están en correspondencia con los puntos de intersección Q y P entre la circunferencia máxima oblicua y ecuador.

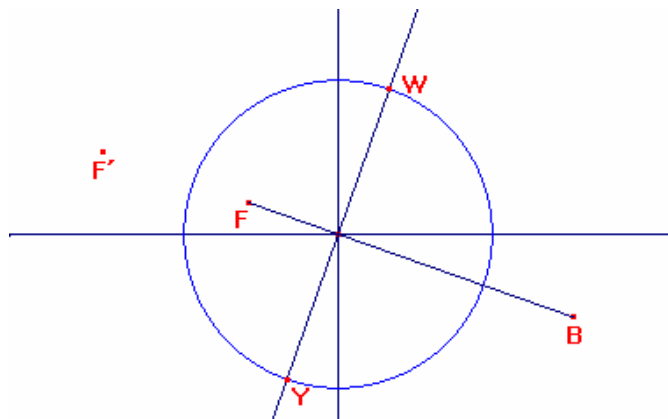


FIGURA 32. Obtención de la proyección de los puntos P y Q de la esfera.

Ahora solo falta determinar un punto de la cónica que se esta buscando para completar la definición de la cónica pedida en el plano. Sea M el punto medio entre FB; ya que como se dijo inicialmente F y B son los vértices de la elipse. M es entonces el centro de la cónica. Tomemos indistintamente W o Y y encontremos el punto T simétrico del punto elegido con respecto a M, que también se encontrará en la cónica y con esto el conjunto de cinco puntos esta completo.

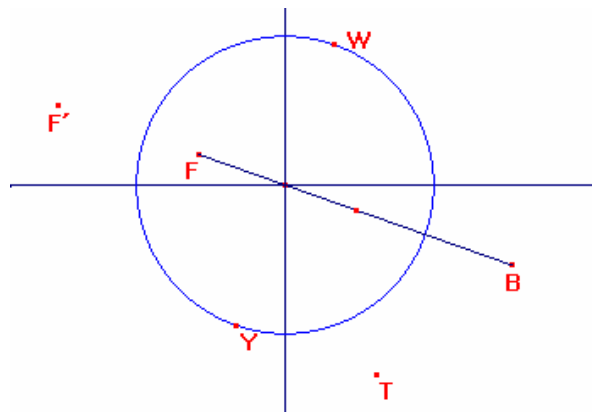


FIGURA 33. Determinación del quinto punto del conjunto de la cónica buscada en el plano estereográfico.

Finalmente utilizamos el comando de cónicas para trazar la elipse requerida, una sorpresa muy grata nos espera en el plano estereográfico: **la complicada elipse toma la forma de una simple y amable circunferencia (ver figura 34)**

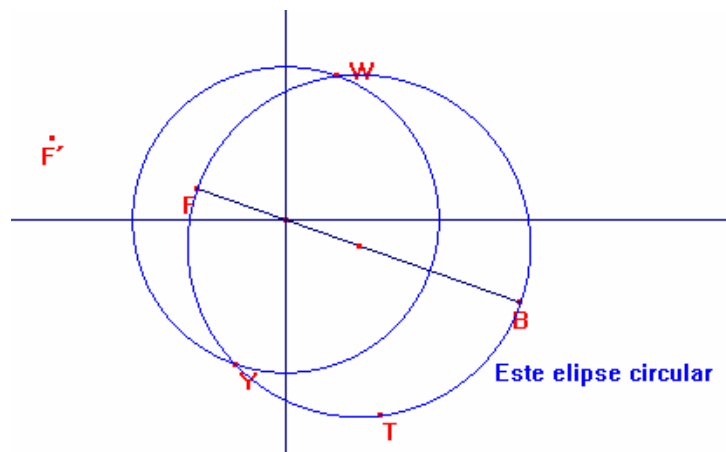


FIGURA 34. Cónica que pasa por los puntos W, F, B Y e T.

Este descubrimiento hace que el trazo anterior pueda facilitarse, simplificándolo espectacularmente: una vez que se ha conocido B a partir de F, se traza el punto medio M y entonces se dibuja la circunferencia con centro en M y radio el segmento de M a F.

3.2. ALGUNAS CONSTRUCCIONES EN EL PLANO ESTEREOGRAFICO.

Teniendo en cuenta que la proyección estereográfica representa algunos elementos de la geometría esférica de Riemann de una forma no muy usual y además que en el plano estereográfico se puede trabajar de manera análoga a la geometría euclidiana. En lo que sigue nos ocuparemos de dos construcciones que se realizan en dicha geometría y determinar finalmente que la proyección estereográfica es un mapeo conforme, es decir, conserva ángulos.

3.2.1 Dada una circunferencia máxima y un punto en ella, construir la circunferencia máxima que es perpendicular a ella y que pasa por el punto dado:

Sean C la circunferencia máxima en la esfera de Riemann y C^* la circunferencia asociada en el plano estereográfico. La construcción se comienza por C^* y un punto D sobre ella. Bajo proyección estereográfica se generan C y C respectivamente en la esfera. (ver figura 35).

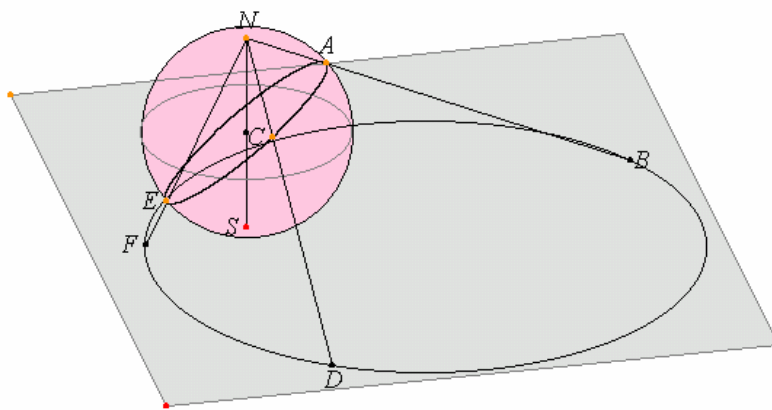


Figura 35. "Recta" en la esfera y un punto en ella.

Ya que D pertenece tanto a la circunferencia C^* como a la circunferencia buscada, en este punto de intersección el radio de C^* es tangente para la circunferencia buscada y viceversa.

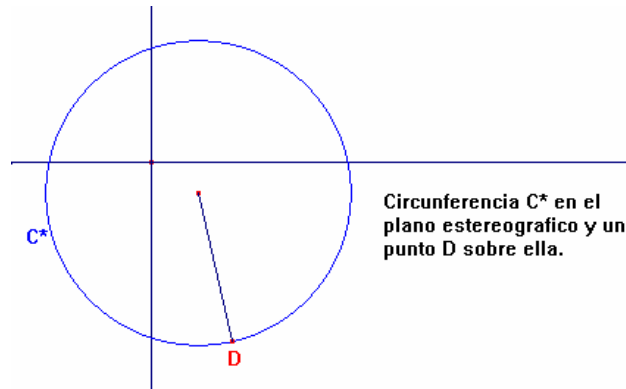


Figura 36. Representación en el plano estereográfico de la construcción 3.2.1.

Por otra parte si C es un punto de C , también lo es el punto diametralmente opuesto a él, el cual llamaremos Y; sea X el punto correspondiente en el plano estereográfico. Ya que X es también punto de intersección entre la circunferencia C^* y la circunferencia buscada, para encontrar el centro de esta circunferencia basta trazar tangentes a C^* que pasen por dichos puntos de tal manera que el punto de intersección de éstas es M. El radio es, por supuesto la distancia desde dicho punto hasta cualquiera de los puntos C o X.

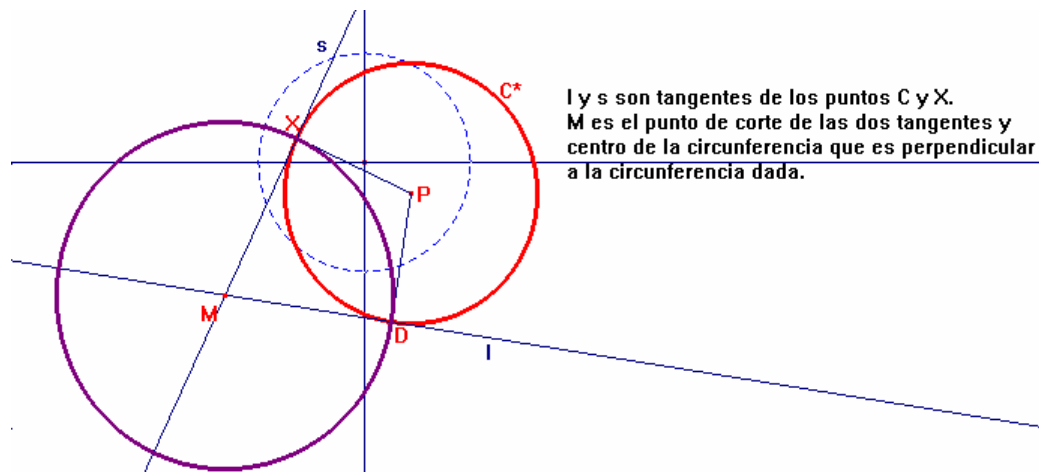


Figura 37. Circunferencia perpendicular buscada.

Advierta que si los puntos D y X son diametralmente opuestos en el plano estereográfico, las rectas tangentes serán paralelas y el centro de la cónica buscada no se puede determinar, luego este caso sucederá cuando la “recta” en la esfera es el ecuador, en donde la “recta” perpendicular es un meridiano que pase por cualquier punto de éste (figura 38)

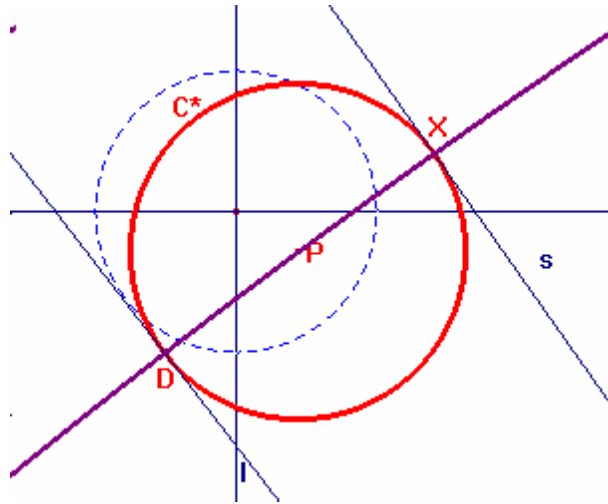


Figura 38. Perpendicular buscada cuando la recta es el ecuador.

3.2.2. Dada una circunferencia máxima C^* y un punto en la esfera fuera de ella, construir la circunferencia máxima que es perpendicular a ella y que pasa por el punto dado.

Sean C la circunferencia máxima en la esfera de Riemann y C^* la circunferencia asociada en el plano estereográfico. El trazo comienza por C^* y un punto n' que no pertenezca a ella. Bajo proyección estereográfica se generan la circunferencia C y el punto n correspondiente en la esfera. Para generar una circunferencia perpendicular a C^* que pase por n' se necesita una circunferencia ortogonal a C^* que pase por n' , la cual pasará también por el punto n'' inverso de n con respecto a la circunferencia C^* .

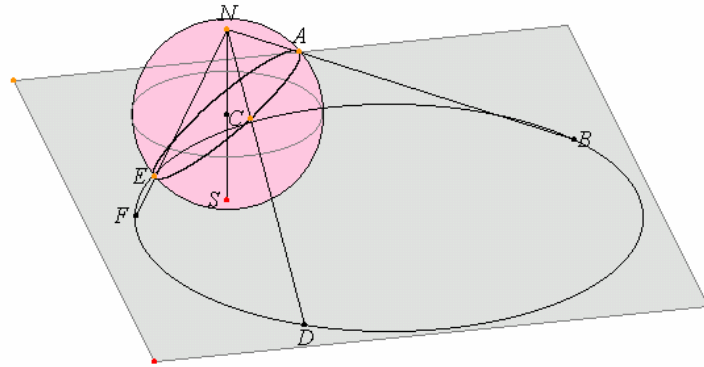


Figura 39. Perpendicular de una recta por un punto fuera de ella.

Además, en la esfera los puntos correspondientes a n y el diametralmente opuesto, pertenecerán a la misma circunferencia C . Por esto, el punto en la esfera correspondiente a n' en el plano estereográfico, así como el correspondiente a su inverso con respecto a la circunferencia C^* , son dos puntos de la circunferencia máxima perpendicular buscada. El centro O de la circunferencia buscada en el plano estereográfico es la intersección de las mediatrices entre los pares de puntos (n, n') y (n, n'') .

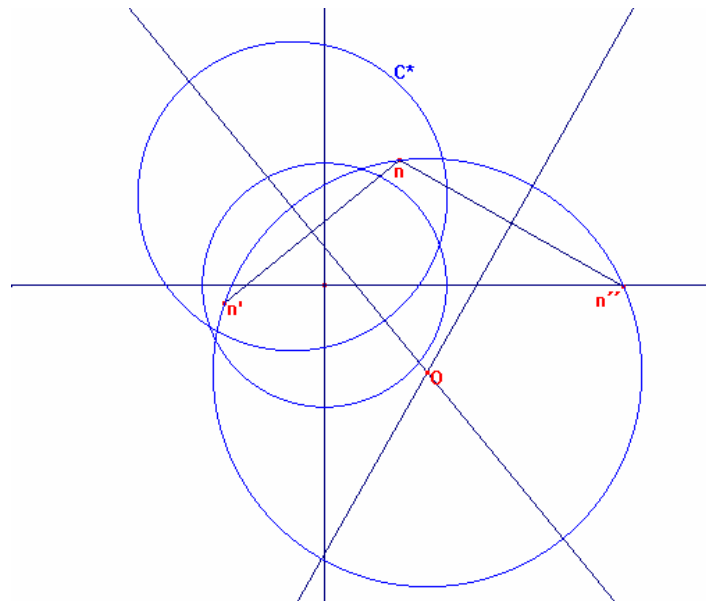


Figura 40. Construcción de perpendicular en el plano estereográfico

4. LA PROYECCIÓN ESTEREOGRAFICA DE FORMA ANALÍTICA.

Aunque hemos hablado poco de esferas hasta ahora, los hechos que necesitamos sobre ellas son todos elementales y requieren poco más que el teorema de Pitágoras. Comencemos con la definición.

Definición 11.1 Una *esfera* de centro un punto O y radio $r > 0$ en un espacio tridimensional euclídeo E es el conjunto de todos los puntos de E cuya distancia a O es igual a r .

Si fijamos un sistema de referencia con origen en O , es claro que la esfera está formada por los puntos cuyas coordenadas cumplen la ecuación.

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

Si π es un plano, la distancia de O a π se define como la distancia de O al punto donde la perpendicular a π por O corta a π . Es fácil ver que es la menor distancia posible entre O y un punto de π . Se comprueba sin dificultad que si S es la esfera de centro O y radio r y si la distancia de O a π es d , entonces $S \cap \pi$ es vacía si $d > r$, un punto si $d = r$ o una circunferencia de radio $\sqrt{r^2 - d^2}$ si $d < r$. Recíprocamente, toda circunferencia contenida en S es la intersección con S del plano que la contiene.

Es muy práctico referirse a una esfera con el vocabulario propio de la geografía. Fijado un sistema de referencia con origen en su centro, el punto $(0, 0, r)$ es el *polo norte*, el punto $(0, 0, -r)$ es el *polo sur*, la circunferencia $z = 0$ es el *ecuador*, las circunferencias que pasan por ambos polos son los *meridianos* y las circunferencias determinadas por planos paralelos al ecuador son los *paralelos*.

Ahora podemos definir la *proyección estereográfica* de una esfera S en su plano ecuatorial π como la aplicación que a un punto P de S que no sea el polo norte N le hace corresponder el punto P' donde la recta NP corta a π . Observar que las rectas que pasan por N y son paralelas a π forman un plano que dista r del centro de la esfera, luego ninguna de ellas corta a S en otro punto P , luego la proyección está bien definida y es fácil ver que biyecta $S/\{N\}$ con π .

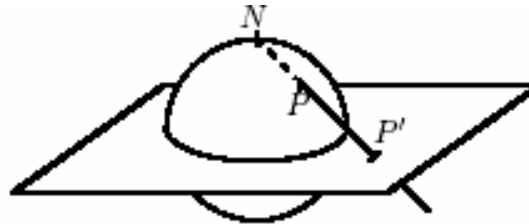


Figura 41. Proyección estereográfica en el plano π .

Conviene calcular su expresión en coordenadas. Por simplicidad supondremos que la esfera tiene radio 1. Dado uno de sus puntos $P = (x, y, z)$ que no sea el polo norte, la recta que lo une con N es:

$$(0, 0, 1) + \lambda(x, y, z-1), \lambda \in \mathbb{R}.$$

El valor de λ que hace que este punto esté en π es el que cumple $1 + \lambda(z-1) = 0$, o sea, $\lambda = 1/(1-z)$. El punto de corte es:

$$P' = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}, 0 \right)$$

Así pues, si tomamos como sistema de referencia en π el formado por O y los dos primeros vectores de la base del sistema de referencia de E , la expresión en coordenadas de la proyección estereográfica es:

$$f(x, y, z) = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z} \right)$$

También es fácil obtener una expresión para la inversa. Dado un punto $P' = (a, b)$ en π , la recta que pasa por N y P' es:

$$(0, 0, 1) + \lambda(a, b, 1), \lambda \in \mathbb{R},$$

y los puntos de esta forma que están en la esfera son los que cumplen:

$$(\lambda a)^2 + (\lambda b)^2 + (1 - \lambda)^2 = 1,$$

lo que implica que o bien $\lambda = 0$ (que corresponde al polo norte) o bien:

$$\lambda = \frac{2}{a^2 + b^2 + 1}$$

que corresponde al punto

$$g(a, b) = \left(\frac{2a}{a^2 + b^2 + 1}, \frac{2b}{a^2 + b^2 + 1}, \frac{a^2 + b^2 - 1}{a^2 + b^2 + 1} \right)$$

La situación que encontramos no es completamente análoga al caso bidimensional. Al proyectar una cónica en una recta podíamos asignar también una imagen al centro de la proyección de modo que toda la cónica se correspondía con toda la recta proyectiva. En cambio, si tratamos de extender la proyección estereográfica a la completación proyectiva de π nos encontramos con que hay infinitos puntos infinitos a los que tenemos que asignar una antiimagen mientras que sólo nos queda un punto en la esfera al que asignar una imagen.

Por lo tanto, tenemos que los puntos de la esfera no se corresponden con los del plano proyectivo, sino con los del plano completado con un único punto infinito. Llegados aquí la teoría encaja con otra parte de la geometría proyectiva. Podemos identificar los puntos del plano afin real con los de la recta afin compleja, con la diferencia de que la completación proyectiva de la recta compleja se obtiene adjuntando un solo punto.

Así pues, resulta que los puntos de la esfera se corresponden de forma natural con los de la recta proyectiva compleja. Fijado un sistema de referencia en el espacio de la esfera y otro en la recta compleja, una biyección entre esfera y recta es la dada por:

$$f(x, y, z) = \left(\frac{x}{1-z}, i \frac{y}{1-z} \right)$$

Entendiendo que $f(0, 0, 1) = \infty$. Alternativamente, $f(x, y, z) = (x + yi, 1 - z)$.

Aunque desde un punto de vista estricto la recta proyectiva compleja es toda ella una recta, sin más distinción, lo cierto es que fijando en ella un sistema de referencia proyectivo, podemos pensar en ella como $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ y hablar de rectas y circunferencias reales.

Enseguida veremos que conviene adoptar lo siguiente:

Consideraremos que el punto infinito pertenece a todas las rectas de \mathbb{R}^2 , de modo que es colineal con cualquier par de puntos infinitos.

Por ejemplo, con este convenio podemos enunciar:

Teorema *La proyección estereográfica biyecta las circunferencias de la esfera con las rectas y las circunferencias de $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$*

Demostración: Una circunferencia en la esfera S está formada por los puntos que cumplen la ecuación de un plano: $Ax + By + Cz + D = 0$. La expresión $g(a, b)$ nos da entonces que las coordenadas (a, b) de sus imágenes han de cumplir

$$2Aa + aBb + C(a^2 + b^2 - 1) + D(a^2 + b^2 + 1) = 0,$$

o equivalentemente,

$$(C + D)(a^2 + b^2) + 2Aa + 2Bb + (D - C) = 0.$$

Recíprocamente, todos los puntos que cumplen la anterior expresión provienen de puntos en la circunferencia dada. Ahora bien, esta última ecuación corresponde a una circunferencia si $C \neq -D$ y a una recta si $C = -D$. Notemos que esto sucede si y sólo si el polo norte $(0, 0, 1)$ está en la circunferencia de partida, luego las circunferencias que pasan por el polo norte son las que se transforman en rectas, las cuales contienen, por convenio, la imagen del polo norte.

Por otra parte es claro que ajustando A, B, C y D se puede hacer que los coeficientes de esta expresión tomen cualquier conjunto de valores, luego todas las circunferencias y todas las rectas del plano son imágenes de circunferencias de la esfera.

4.1. TRANSFORMACIONES CIRCULARES

En esta sección describiremos las homografías de la recta proyectiva compleja $P^1(\mathbb{C}) = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ desde el punto de vista de la geometría euclídea de \mathbb{R}^2 . En la sección siguiente las relacionaremos con la esfera a través de la proyección estereográfica.

Sabemos que las homografías de la recta compleja son las aplicaciones de la forma

$$f(z) = \left(\frac{az + b}{cz + d} \right) \quad \text{con } ad - bc \neq 0$$

Si $c = 0$ tenemos simplemente una aplicación de la forma $f(z) = az + b$. Si $c \neq 0$ podemos expresarla como

$$f(z) = \left(\frac{a}{c} + \frac{b - \frac{ad}{c}}{cz + d} \right)$$

Con lo que en cualquier caso f se expresa como composición de aplicaciones de la forma $z \rightarrow az + b$ con la inversión $z \rightarrow 1/z$. Vamos a estudiar por separado cada una de estas aplicaciones. Comencemos por la última.

La aplicación $z \rightarrow 1/z$ transforma 0 en el punto infinito. Si $z \neq 0$ entonces admite una expresión en coordenadas polares como $z = |z|_{\theta}$, y entonces su inverso es $|z|^{-1}_{\theta,-1}$. Ahora bien, el punto $|z|^{-1}_{\theta}$, es el inverso de z respecto a la circunferencia de centro 0 y radio 1 en el sentido de la definición²⁶ luego $z \rightarrow z^{-1}$ es la composición de esta inversión con la reflexión respecto al eje real.

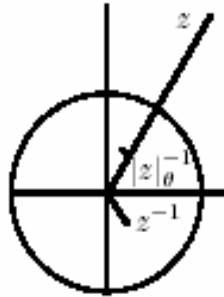


Figura 42.

Figura 42. Representación en el plano polar.

Consideremos ahora las aplicaciones de la forma $z \rightarrow az + b$. Podemos descomponerlas como composición de un producto $z \rightarrow az$ y una suma $z \rightarrow b+z$. La suma es geoméricamente una traslación, luego se expresa como producto de dos reflexiones. El producto se descompone a su vez en los productos.

$$Z \rightarrow \frac{a}{\|a\|} z \quad \text{y} \quad z \rightarrow \|a\| z$$

²⁶ Diremos que dos puntos Q y R son mutuamente *inversos* respecto a la circunferencia de centro O y radio r si ambos se encuentran sobre la misma semirrecta de origen O y además $\|OQ\| \|OR\| = r^2$. Convenimos en que O es el inverso de todos los puntos infinitos. En estos términos, la polar de un punto Q respecto a una circunferencia de centro O es la perpendicular a OP que pasa por el inverso de P .

El primero es un giro, luego también es un producto de dos reflexiones. El segundo es una homotecia de centro 0. Veamos que puede expresarse como composición de dos inversiones respecto a dos circunferencias de centro 0. En efecto, la inversión respecto a la circunferencia unitaria transforma cada número z de argumento θ en $|z|^{-1}e^{i\theta}$, y si ahora aplicamos la inversión respecto a la circunferencia de radio r obtenemos $r^2|z|e^{i\theta}$. Si $r = \sqrt{|a|}$ es $|a|z$.

Con esto tenemos probada la mitad del teorema siguiente:

Teorema: *Las homografías de $P^1(\mathbb{C})$ son las aplicaciones expresables como composición de un número par de reflexiones respecto de rectas e inversiones respecto de circunferencias.*

Demostración: Hay que probar que un producto de dos reflexiones / inversiones es una homografía. Observar que las inversiones respecto a circunferencias no son biyectivas en el plano proyectivo euclídeo, pues hacen corresponder el centro de la circunferencia con todos los puntos infinitos, pero sí lo son en $P^1(\mathbb{C})$ si convenimos que intercambian el centro con el único punto infinito. Del mismo modo podemos considerar a las biyecciones afines de \mathbb{R}^2 como biyecciones en $P^1(\mathbb{C})$ si convenimos que todas ellas ∞ .

El producto de dos reflexiones es un giro o una traslación. Las traslaciones son de la forma $z \rightarrow z + a$, luego son homografías. Si f es un giro de centro O , entonces $z \rightarrow f(z+O)$ es un giro de centro O , luego existe un número complejo a de módulo 1 tal que $f(z+O) - O = az$, luego $f(z) = a(z - O) + O$, luego es una homografía.

Consideremos ahora una reflexión f y una inversión g . Supongamos primero que el eje de f pasa por el centro de la circunferencia fijada por g . Consideremos una traslación que lleve dicho centro al punto 0, seguida de un giro de centro 0 que transforme el trasladado del eje

de f en el eje real, seguido de una homotecia de centro 0 que transforme la traslación de la circunferencia de g en la circunferencia unidad. Si llamamos h a esta composición, es claro que h es una homografía. Más aún, es una semejanza del plano euclídeo. Es fácil ver que $h^{-1} f h$ es la reflexión respecto al eje real y que $h^{-1} g h$ es la inversión respecto de la circunferencia unidad. Por consiguiente $h^{-1} f h h^{-1} g h$ y $h^{-1} g h h^{-1} f h$ son ambos iguales a la homografía $z \rightarrow 1/z$, luego fg y gf también son homografías.

Supongamos ahora que el eje de f no pasa por el centro de la circunferencia de g . Sea f' una reflexión respecto a una recta que pase por dicho centro. Entonces $fg = f' f' fg$ es el producto de dos homografías, luego es una homografía, e igualmente se prueba que gf lo es.

Si tenemos una composición de dos inversiones f y g , tomamos como h la reflexión respecto a la recta que pasa por los centros de sus circunferencias (una cualquiera si ambos coinciden). Entonces $fg = fhg$ es un producto de dos homografías, luego es una homografía, y lo mismo vale para gf .

Definición: Llamaremos *transformaciones circulares* a las biyecciones de $P^1(\mathbb{C})$ en sí mismo que se expresan como producto de reflexiones e inversiones.

Una transformación circular es *directa* si se expresa como producto de un número par de reflexiones e inversiones. En caso contrario es *inversa*. Llamaremos *grupo circular* al grupo de todas las transformaciones circulares.

Hemos probado que las homografías en \mathfrak{R} son las transformaciones circulares directas. Una transformación circular no puede ser a la vez directa e inversa, pues en tal caso podríamos expresar una reflexión o una inversión como producto de un número par de ellas, luego sería una homografía, pero esto es imposible, pues las reflexiones y las inversiones fijan a infinitos puntos.

Es claro que las homografías que fijan a ∞ son las de la forma $z \rightarrow az + b$ y hemos visto que éstas se descomponen en producto de un número par de reflexiones (sin que aparezcan inversiones). Más en general, si f es una transformación circular que fija a ∞ , o bien es una homografía y estamos en el caso anterior, o bien es inversa, y entonces podemos tomar cualquier reflexión g y tenemos que $h = fg$ es una homografía que fija a ∞ , luego $f = hg$ es también producto de reflexiones. Puesto que las composiciones de reflexiones son las semejanzas de \mathfrak{R}^2 , hemos probado lo siguiente:

Teorema *Las transformaciones circulares que fijan a C son exactamente las semejanzas de \mathfrak{R}^2 .*

Si una transformación circular f es directa y deja fijos a tres puntos (finitos o no) entonces es la identidad, porque es una homografía. Si f es inversa esto ya no es cierto, pero sólo hay dos posibilidades. En efecto, sea g la reflexión respecto de la recta que pasa por los tres puntos fijos si son colineales o la inversión respecto de la circunferencia que pasa por ellos si no lo son. Entonces fg es una homografía que fija a los tres puntos, luego es la identidad, luego $f = g$. Hemos probado el teorema siguiente:

Teorema *Si una transformación circular fija a tres puntos (finitos o no), entonces es la identidad, una reflexión o una inversión.*

De aquí podemos deducir muchas consecuencias interesantes:

Teorema *Si f es una transformación circular y g es una reflexión o una inversión, entonces $f^{-1}gf$ es una reflexión o una inversión.*

Demostración: Sean A, B, C tres puntos fijados por g . Entonces $f^{-1}gf$ fija a $f(A), f(B)$ y $f(C)$, luego por el teorema anterior es la identidad, una reflexión o una inversión. Como es una transformación inversa no puede ser la identidad.

Teorema *Las transformaciones circulares transforman cada circunferencia y cada recta en una circunferencia o una recta.*

Demostración: Sea f una transformación circular. Dada una recta o circunferencia C , sea g la reflexión o inversión que fija a sus puntos. Entonces $f^{-1}gf$ es también una reflexión o una inversión, y fija exactamente a los puntos de $f[C]$, luego $f[C]$ es una recta o una circunferencia.

Teorema *Si C y C' son dos rectas / circunferencias, existe una transformación circular que transforma una en otra.*

Demostración: Tomemos tres puntos P, Q, R en C y tres puntos P', Q', R' en C' y sea f la homografía PQR y $P'Q'R'$. La imagen de C por f contiene tres puntos de C' , luego ha de ser C' , pues por tres puntos pasa una única recta / circunferencia.

En vista de los teoremas anteriores resulta razonable introducir los convenios siguientes:

Definición: Llamaremos *circunferencias* de $P^1(\mathcal{C})$ a las rectas y a las circunferencias. Llamaremos *inversiones* tanto a las reflexiones como a las inversiones (respecto a circunferencias).

En estos términos las transformaciones circulares transforman circunferencias en circunferencias, y cualquier par de circunferencias están conectadas por una transformación

circular. Por tres puntos cualesquiera pasa una única circunferencia. El teorema fundamental de la geometría afín nos permite caracterizar las transformaciones circulares:

Teorema *Una biyección de $P^1(\mathbb{C})$ en sí mismo es una transformación circular si y sólo si transforma circunferencias en circunferencias.*

Demostración: Sea f una biyección que transforme circunferencias en circunferencias. Sea $f(\infty) = P$. Sea g cualquier transformación circular que cumpla $g(P) = \infty$. Entonces $f \circ g$ transforma circunferencias en circunferencias y deja fijo a ∞ , luego vista como aplicación en \mathbb{R}^2 transforma rectas en rectas.

Por el teorema fundamental de la geometría afín se trata de una biyección afín, luego se extiende a una homografía en \mathbb{R}^2 . Como transforma circunferencias en circunferencias es una semejanza, luego es una transformación circular y f también.

4.2. HOMOGRAFÍAS EN LA ESFERA

Los resultados de la sección anterior muestran que la geometría circular no distingue las rectas de las circunferencias. Esto resulta completamente natural cuando se relaciona con la geometría de la esfera.

Definición Sea S una esfera en un espacio tridimensional euclídeo E . Una *homografía* en S es una biyección $f: S \rightarrow S$ inducida por restricción a partir de una homografía en E que fije a S .

Vamos a probar que la proyección estereográfica hace corresponder las homografías de una esfera con las transformaciones circulares de la recta compleja.

Las homografías de E transforman planos en planos, luego las homografías de una esfera S transforman circunferencias en circunferencias. Cuando componemos una homografía f en S con la proyección estereográfica p obtenemos una biyección $p^{-1} f p$ de la recta compleja en sí misma que claramente transforma circunferencias en circunferencias, luego es una transformación circular. Hemos de probar que toda transformación circular puede obtenerse de este modo. De hecho basta probar que todas las reflexiones de la recta compleja provienen de homografías en la esfera, ahora bien, dada una inversión f , la antiimagen en S del conjunto de puntos fijados por f es una circunferencia en S , luego si probamos que existe una homografía que fija a dicha circunferencia, su correspondiente en $P^1(\mathcal{C})$ será una transformación circular que fija a la misma circunferencia que f , luego será f . En resumen, basta probar que para cada circunferencia C en S existe una homografía en S que no es la identidad pero fija a todos los puntos de C .

Sea π el plano de C , sea r la perpendicular a π que pasa por el centro O de S , sean N y M los puntos donde r corta a S , sea π' cualquier plano que contenga a r , sea C la circunferencia en que π' corta a S , sea $s = \pi \cap \pi'$, que es una recta perpendicular a r . Sean A y B los puntos donde s corta a r , sea Q el polo de s . El punto Q es el conjugado armónico de O respecto a M y N , luego no depende de la elección de π' . La involución en C de centro Q cumple $ABMN$ y $ABNM$.

Consideremos ahora la homología f de centro Q y eje π que envía M a N . Su restricción a cada plano π' cumple $ABM ABN$, luego es de hecho la involución anterior, luego en particular fija a $S \cap \pi'$, luego f fija a S , con lo que induce una homografía en S que ciertamente fija a cada punto de C .

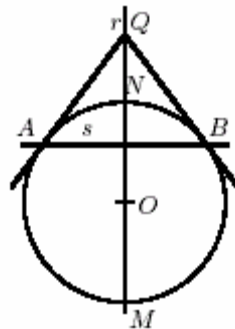


Figura 43. Conjugado armónico.

Con esto tenemos demostrado el teorema que perseguíamos:

Teorema *La proyección estereográfica induce un isomorfismo entre el grupo de homografías de una esfera y el grupo de transformaciones circulares de la recta proyectiva compleja.*

Este teorema nos permite traducir a términos de homografías en esferas los resultados que ya conocemos sobre transformaciones circulares. Por ejemplo, dada una circunferencia C en una esfera S , existe una única homografía en S distinta de la identidad que fija a todos sus puntos, a la cual llamaremos *inversión* respecto a C . Toda homografía en una esfera es producto de reflexiones. Si una homografía fija a tres puntos es la identidad o la inversión respecto a la circunferencia que los contiene.

A su vez, el teorema anterior nos aporta un dato importante sobre las transformaciones circulares:

Teorema *La restricción de una transformación circular a una circunferencia es una transformación circular. Más aún, cada homografía entre dos circunferencias se extiende a una única transformación circular directa.*

Demostración: La restricción de una transformación circular a una circunferencia C puede descomponerse en producto de tres homografías: primero la inversa de la proyección estereográfica, que es una proyección perspectiva que transforma C en una circunferencia C' en S , luego la homografía que induce en la esfera la homografía correspondiente a la transformación dada, que transforma C' en otra circunferencia C'' y por último la restricción a C'' de la proyección estereográfica, que es de nuevo una proyección perspectiva.

Dada una homografía entre dos circunferencias, tomamos tres puntos de la primera y consideramos la transformación circular directa que coincide sobre ellos con la homografía dada. Obviamente ambas han de coincidir sobre toda la circunferencia y la unicidad es clara.

4.3. CONSERVACIÓN DE ÁNGULOS

Vamos a definir el ángulo entre dos circunferencias secantes y probaremos que las transformaciones circulares conservan ángulos. Antes conviene aclarar las posiciones relativas entre dos circunferencias cualesquiera:

Teorema *Dos circunferencias distintas tienen cero, uno o dos puntos en común. Según el caso se llaman disjuntas, tangentes o secantes. Dado un punto A en una circunferencia C y un punto B que no esté en C , existe una única circunferencia C' que pasa por B y toca a C en A .*

Demostración: Aplicando una transformación circular si es preciso, podemos suponer que una de las circunferencias pasa por ∞ y la otra no, con lo que tenemos una recta y una circunferencia (en el sentido usual), luego efectivamente se cortan en a lo sumo dos puntos.

Respecto a la segunda parte, aplicando una transformación circular podemos suponer que A es el punto infinito, con lo que el resultado equivale a que por un punto exterior a una recta pasa una única paralela.

En lo sucesivo convendremos que la tangente a una circunferencia por dos de sus puntos es ella misma. De este modo, si P es un punto de una circunferencia C y Q es otro punto cualquiera (en C o fuera de C), existe una única circunferencia tangente a C que pasa por P y Q . En estos términos la recta tangente a una circunferencia por uno de sus puntos es la circunferencia tangente por dicho punto y por ∞ .

Dos rectas secantes forman dos pares de ángulos opuestos por el vértice. Llamaremos *ángulo* entre ambas a la medida del menor de ellos. El *ángulo* entre una circunferencia y una recta secante es el ángulo entre la recta y la recta tangente por cualquiera de los puntos de corte. No importa la tangente que se escoja, pues la reflexión respecto a la perpendicular a la recta por el punto medio de los puntos de corte deja invariante a la recta y transforma una tangente en otra. El *ángulo* entre dos circunferencias (usuales) secantes es el ángulo entre sus tangentes por los puntos de corte. También es claro que no importa el punto de corte elegido.

Con esto tenemos definido el ángulo entre dos circunferencias secantes cualesquiera. La definición puede resumirse así: el ángulo entre dos circunferencias es el ángulo entre sus rectas tangentes por ∞ y uno de los puntos de corte.

Teorema *Las transformaciones circulares conservan los ángulos entre circunferencias.*

Demostración: Sean C_1 y C_2 dos circunferencias secantes y sea P un punto de corte (podemos suponerlo finito). Sea t_i la tangente a C_i por P o bien $t_i = C_i$ si C_i es una recta.

Entonces el ángulo entre C_1 y C_2 es por definición el ángulo entre t_1 y t_2 . Una inversión respecto de una circunferencia (usual) de centro P deja invariantes a t_1 y t_2 y transforma cada circunferencia C_i en una recta sin más punto en común con t_i que ∞ (o bien $t_i = C_i$). En cualquier caso transforma a C_i en una recta paralela a t_i , de modo que estas rectas forman entre sí el mismo ángulo que las circunferencias de partida.

Sean ahora C'_i las imágenes de cada C_i por una transformación circular arbitraria. Del mismo modo podemos transformarlas en dos rectas que forman el mismo ángulo que ellas. El teorema se reduce, pues, a probar que si una transformación circular hace corresponder dos pares de rectas secantes, entonces el ángulo que forman es el mismo.

Sea f una transformación circular que haga corresponder dos rectas secantes r_1 y r_2 con dos rectas secantes r'_1 y r'_2 . Sea O el punto de corte de las primeras y O' el punto de corte de las segundas. Entonces o bien $f(O) = O'$ y $f(\infty) = \infty$ o bien $f(O) = \infty$ y $f(\infty) = O'$. En el segundo caso podemos componer f con una inversión respecto a una circunferencia de centro O' , lo cual deja inalteradas a r'_1 y r'_2 pero hace que ∞ quede fijo. Por lo tanto los dos pares de rectas se corresponden por una semejanza, y las semejanzas conservan los ángulos.

Los teoremas anteriores ilustran una potente técnica para obtener resultados sobre circunferencias: reducirlos mediante inversiones a resultados sobre rectas.

Teorema Sean C_1 y C_2 dos circunferencias secantes. Sea P un punto de corte y Q un punto cualquiera. Sea C'_1 la tangente a C_1 por P y Q . Entonces el ángulo entre C_1 y C_2 es el mismo que entre C'_1 y C_2 .

Demostración: Basta aplicar una transformación circular f que convierta Q en ∞ . Basta probar que $f[C_1]$ y $f[C_2]$ forman el mismo ángulo que $f[C'_1]$ y $f[C'_2]$, pero esto es cierto por definición de ángulo entre circunferencias.

Teorema Sean P, Q, R y S cuatro puntos colineales y sea C una circunferencia que tenga a PQ por diámetro. Entonces $H(P, Q; R, S)$ si y sólo si toda circunferencia que pasa por R y S es ortogonal a C .

Demostración: Supongamos $H(P, Q; R, S)$. Aplicando una inversión podemos suponer que P es el punto infinito. Entonces Q es el punto medio de R y S y la circunferencia C es la recta perpendicular a RS por Q . En estas condiciones es fácil ver que toda circunferencia que pasa por R y S es ortogonal a C .

Supongamos ahora que se cumple esta propiedad. Tomemos una circunferencia C' cualquiera que pase por R y S . Por hipótesis corta ortogonalmente a C en dos puntos A y B . Consideremos ahora la circunferencia C'' que pasa por A, R y el conjugado armónico de R respecto de P y Q . Por la parte anterior C' también es ortogonal a C , ahora bien, por dos puntos A y R pasa una única circunferencia ortogonal a C , luego $C' = C''$, de donde S ha de ser el conjugado armónico de R respecto de P y Q .

Ahora vamos a definir el ángulo entre dos circunferencias en una esfera y probaremos que la proyección estereográfica conserva los ángulos.

Definición Si dos circunferencias en una esfera S se cortan en un punto P , definimos el *ángulo* que forman como el ángulo entre sus rectas tangentes por P .

El teorema siguiente prueba en particular que el ángulo entre dos circunferencias secantes en una esfera no depende de cuál de los dos puntos de corte se toma para calcularlo.

Teorema *La proyección estereográfica conserva ángulos.*

Demostración: Observemos en primer lugar que si C es una circunferencia en una esfera S y C' es una circunferencia tangente a C por un punto P , entonces ambas tienen la misma recta tangente por P , concretamente, la intersección de los planos de C y C' . Por lo tanto, si tenemos dos circunferencias C_1 y C_2 y C'_1, C'_2 son sus tangentes por P y por otro punto Q , el ángulo entre C_1 y C_2 es el mismo que el ángulo entre C'_1 y C'_2 . Por el teorema 11.17, lo mismo vale para las proyecciones, luego basta probar el teorema para circunferencias que se corten en un par de puntos antípodas P y Q .

Sean p_1 y p_2 las proyecciones estereográficas de una esfera en dos planos π_1 y π_2 . Sea $f: \pi_1 \rightarrow \pi_2$ una isometría entre ellos. Entonces $p_2^{-1} p_1 f$ es una biyección de π_2 en sí mismo que transforma circunferencias en circunferencias, luego es una transformación circular, luego conserva ángulos, luego $p_2^{-1} p_1$ también conserva ángulos.

Esto implica que al proyectar dos circunferencias de una esfera en un plano obtenemos dos circunferencias que forman el mismo ángulo independientemente del plano sobre el que proyectemos. En particular, podemos utilizar la proyección respecto al plano perpendicular a la recta PQ .

En estas condiciones es fácil ver que las rectas tangentes a C_1 y C_2 tanto por P como por Q son paralelas a las proyecciones de C_1 y C_2 , luego los ángulos son los mismos.

5. CONCLUSIONES.

La experiencia obtenida del presente trabajo fue productiva tanto en la parte académica como en la pedagógica, ya que el hecho de iniciar un estudio de la geometría no euclidiana y más precisamente la geometría esférica es un buen comienzo para establecer un nuevo paradigma en la enseñanza de la geometría que permita romper con la idea que la geometría plana o euclidiana en la cual se inicia al estudiante en sus primeros años de estudio y luego se profundizada hacia su axiomática en la secundaria, y en donde se observa la apatía por los estudiantes ya que los resultados obtenidos en esta geometría carecen de sentido y pasan a ser simplemente “obvios” y evidentes por si mismos, se hace necesario considerar alternativas de geometrías en las cuales resultados análogos a los que se obtienen en la geometría plana tuvieran un significado distinto, para luego ser comparado con la geometría euclidiana y dar sentido finalmente a su axiomática. Se consideró trabajar la geometría esférica ya que prácticamente vivimos en una esfera y los elementos de esta geometría son fáciles de distinguir así como de los resultados obtenidos.

Al comienzo del trabajo se planeo desarrollar una serie de actividades que permitieran al estudiante identificar algunos elementos de esta geometría alternativa pero se desistió ya que las actividades no estaban plenamente diseñadas y se necesitaba de una muestra a la cual se requeriría aplicarlas, razón por la cual se decidió con la asesoría del profesor Alberto Donado al cual expreso mis más sinceros agradecimientos por sus muy sabios aportes y direccionamiento que se realizara un marco teórico para que sirviera como futuro referente en la construcción de dichas actividades.

En el desarrollo del presente referente se hace uso de CABRI el cual crea un ambiente interactivo y novedoso para aprender sobre y explorar la geometría plana, y más precisamente esta “nueva” geometría que es en donde se quiere enfatizar para encontrar patrones, relaciones y similitudes con la geometría familiar para los estudiantes: la plana.

Todo mediante una transformación como la proyección estereográfica. El paquete del software incluye explicaciones, actividades, y estrategias por incorporar la geometría Euclidiana y la no-Euclidiana en el plan de estudios de la escuela secundaria.

En conclusión, el estudio de otras geometrías alternativas permiten que el estudiante comprenda mejor los resultados de la geometría euclidiana y además acceda a reconocer que:

- ❑ La Geometría de No-Euclidiana está poniéndose en aumento importante en su papel en la ciencia moderna y tecnología.
- ❑ La palabra "definición" tiene un significado muy preciso en geometría que es bastante diferente de su significado en el idioma común. La confusión en este concepto es la fuente de muchas dificultades entendiendo los procesos de pruebas geométricas.
- ❑ Un estudio de la Geometría no-Euclidiana hace claro que esa geometría no es algo que se completó hace 3000 años en Grecia. Es una corriente y un campo activo de investigación.

Finalmente, como sugerencia, considero importante que los profesores siempre que les sea posible motiven el uso de programas como CABRI-GEOMETRE II ya sea en clase como material de ayuda didáctica para el estudiante durante el desarrollo de la asignatura, o como un ejercicio extra clase; pues al utilizar la tecnología para resolver situaciones problema en forma rápida y precisa, se podría avanzar en otros problemas más interesantes. Todo esto siempre y cuando se logre superar el problema sobre el uso de la tecnología en el aula, ya que es considerado por algunos más un problema que una solución, en el sentido en que el estudiante necesitará una previa inducción, que de no ser en una forma clara y precisa de seguro acarreará inconvenientes en el futuro.

BIBLIOGRAFÍA.

CEDERBERG, J.N. A Course in Modern Geometries. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag. New York. 1989.

COXETER, H.S.M., Fundamentos de Geometria. Ed. Limusa-Wiley, S.A., México, 1971, Projective Geometry. Springer-Verlag, New York.

MAMMANA, C., & VILLIANI, V. , Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21 st. Century. An ICMI study, Kluwer Acad. Pub., New ICMI Study Series, vol. 5, Netherlands, 1997.

RAMIREZ-GALARZA, A.I., & SIENRA-LOERA, G., Invitación a las geometrías no Euclidianas. Coordinación de Servicio Editoriales, Fac. de Ciencias, UNAM, 2000.

REES, ELMER G. Notes on geometry. Springer Undergraduate texts in Mathematics. Berlin, 1983.

SINGER, D.A., Geometry: Plane and Nancy. Undergraduate texts in Mathematics, Springer, New York, 1997.

Education.ti.Innovaciones Educativas. url:<http://math.rice.edu/~pcmi/sphere/sphere.html>

Devlin, K. (1997). The logical structure of computer-aided mathematical reasoning.. *The American Mathematical Monthly*, 104, 7, pp. 632-646

ANEXO I. RESUMEN DE INVERSIONES.

Para estudiar la proyección estereográfica como una inversión de puntos en una esfera, se comienza primero por mostrar las inversiones de puntos en circunferencias y para esto no se necesitan todas las propiedades de éstas en un círculo, sólo algunas de ellas. Por supuesto que se necesita una definición.

Se toma un círculo con centro O y radio $OA = r$, en donde a cada punto P distinto del centro O , el inverso del punto P en el círculo O es el punto P' en la línea OP para que la proporción $OP / R = R / OP'$ se cumpla. Una condición equivalente es que $OP \cdot OP' = R^2$. Ver figura 1.

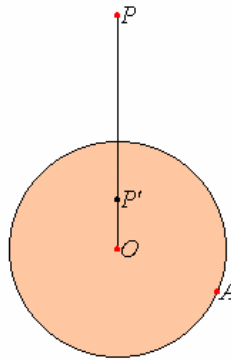


Figura 1. Inverso de un punto.

Se observa que cuando P es el centro O del círculo, se hace corresponder un punto en el plano inusual para completar la correspondencia y este punto es ∞ , para el cual diremos que O es su inverso.

Se convendrá en usar la anotación $P \nabla C$ para indicar el punto inverso P' . Lea " $P \nabla C$ " como "P a través de C." Más generalmente, cuando B es cualquier figura geométrica plana (el punto, línea, el círculo, etc.) y C es un círculo, usaremos la anotación $B \nabla C$ para el resultado de invertir B en el círculo C . también se usará esta anotación para reflejar una línea recta.

Así, si B es cualquier figura geométrica llana, y L es una línea recta, entonces $B \nabla L$ es la figura que es el resultado de reflejar B por medio de L .

Se advierte además que la inversión en un círculo es una involución. Es decir, una aplicación de inversión en el mismo círculo en una segunda aplicación deshace la primera. Por otra parte, esta es una operación que cuando la hacemos dos veces obtenemos la operación idéntica, es decir. Algebraicamente, esta observación es la identidad $(B \nabla C) \nabla C = B$ donde B es cualquier figura plana.

Advierta además que un punto P es su propio inverso, es decir, $P \nabla C = P$, si y sólo si este punto está sobre la circunferencia del círculo. En particular, $C \nabla C = C$.

Una Construcción Normal Para La Inversión

En la construcción normal para invertir un punto en un círculo se usa el compás y una recta perpendicular. Sólo necesitamos considerar los puntos P que están fuera del círculo, o los que estén dentro del círculo distintos del centro y los puntos que están sobre la circunferencia.

Sea C un círculo con centro O y radio $OA = r$, y P un punto. Para invertir P en el círculo, primero dibuje la línea OP . Ahora, si P es un punto fuera del círculo, entonces dibuje las tangentes PB y PC al círculo, entonces dibuje la línea BC . En donde se cortan estas dos líneas será el punto inverso P' . Ya que los dos triángulos $\triangle OBP$ y $\triangle BP'P$ son semejantes, por consiguiente la proporción $OP / r = r / OP'$.

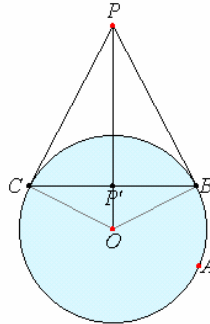


Figura 2. Inversión de un punto exterior.

Pero si P es un punto dentro del círculo (excepto el centro), entonces se traza la línea BC perpendicular a OP , y sea B y C los puntos de intersección de esa línea con el círculo. Entonces trace las tangentes al círculo a B y C . En este caso, el punto inverso P' es la intersección de las dos líneas tangentes. Tengamos en cuenta que los dos triángulos semejantes se siguen de nuevo que los segmentos de la proporción son idénticos.

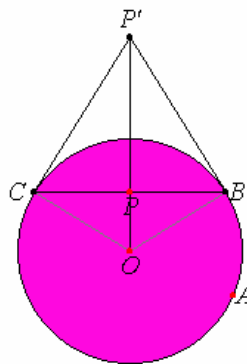


Figura 3. Inverso de un punto ubicado fuera del círculo.

Un tercer caso ocurre cuando P queda sobre la circunferencia, y en este caso el punto inverso P' esté igual que el propio P .

El cuarto caso ocurre cuando P es el centro O del círculo, y como arriba expresado, O y ∞ son inversos.

Invirtiendo líneas en un círculo.

Solo se necesita saber algunas propiedades de inversión. El primero es que cuando invierte una línea recta en un círculo, el resultado es un círculo. También, cuando usted invierte un círculo en otro, entonces el resultado es un círculo (o en un caso especial, una línea recta).

Nosotros invertiremos líneas y círculos en nuestro círculo con el centro O y radio $OA = r$.

Primero, considere una línea BC que no pasa por el centro O que Nosotros mostraremos que su lo inverso es un círculo con el mismo centro del círculo. Sea D el pie de la perpendicular dibujada de O con la línea BC . Sea D' el inverso del punto D . Dibujemos el círculo con diámetro OD' . Sea E un punto arbitrario en la línea BC , y sea E' donde el rayo OE se encuentra el círculo con el diámetro OD' . Entonces el triángulo $OE'D'$ es un triángulo rectángulo, y es semejante a la ODE del triángulo rectángulo. Figura 4.

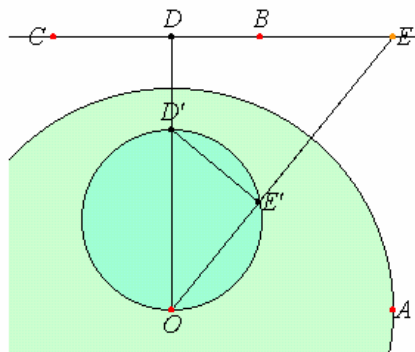


Figura 4. Inversión de una recta.

De lo anterior tenemos la proporción: $OE / OD = OD' / OE'$. Por consiguiente:
 $OE \cdot OE' = OD \cdot OD' = r^2$. Concluimos que E' es el inverso a E . Como E era un punto arbitrario en la recta, podemos concluir que el círculo con el diámetro OD' es el inverso a la línea BC .

Invirtiéndolo en un círculo.

Luego, invertiremos un círculo BCD en el círculo con centro O y radio $OA = r$. Hay dos casos a considerar—Cuando O está fuera del círculo BCD, y cuando queda dentro de ese círculo. (El tercer caso es cuando O queda en el círculo, pero eso se tiene el cuidado de anterior, y el inverso de BCD es una línea recta.)

Empezaremos con el caso donde O queda fuera del círculo BCD. Sea E cualquier punto en el círculo BCD, y F otro punto donde la línea OE corta el círculo BCD. Sea OT una línea de la tangente de O al círculo BCD al punto T, y además a t denotar la longitud OT. (Ver figura 5) entonces por la proposición de Euclides III.35, $OE \cdot OF = t^2$.

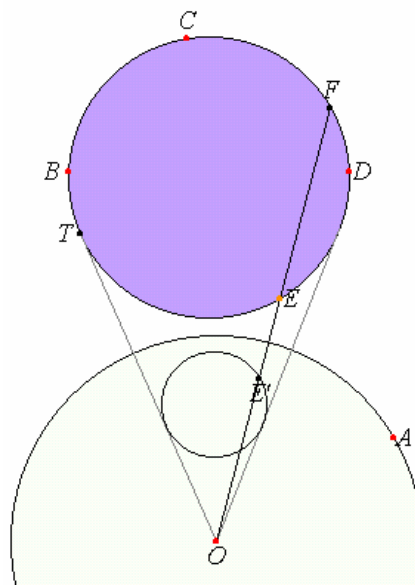


Figura 5. Inversión de un círculo.

Estamos buscando un punto E' en la línea OE tal que $OE \cdot OE' = r^2$. Dividiendo esta ecuación por $OE \cdot OF = t^2$, lo que nosotros necesitamos es un punto E' para que $OE' / OF = t^2 / r^2$.

Por consiguiente, OE' es un factor constante OF . Esto significa que cuando nosotros aplicamos una escala al plano por un factor de t^2 / r^2 con el punto fijo plano O, entonces los

puntos en el círculo BCD se invertirá a los puntos en el círculo en escala. Note que el original y el de escala los círculos tienen las mismas líneas tangentes del punto O.

El otro caso ocurre cuando O queda dentro del círculo BCD. Puede parecer que no hay ninguna tangente de O al círculo BCD que nosotros nos hemos encontrado con problemas serios. Pero nosotros no usamos las líneas tangentes realmente en el primer caso; todo lo que nosotros necesitamos saber es que el producto OE OF es una constante. En este caso, es también una constante.

Sea E cualquier punto en el círculo BCD, y F otro punto dónde la línea OE corta el círculo BCD. (Este decir, F está en el otro lado de O.) entonces por la proposición de Euclides III.36, el producto OE OF es una constante, denótese por k.

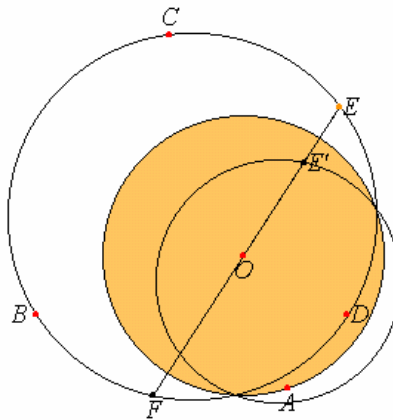


Figura 6. Inversión de un círculo con centro en el interior.

Nosotros todavía estamos buscando un punto E' en la línea OE tal que $OE \cdot OE' = r^2$. Dividiendo esta ecuación por $OE \cdot OF = k$, necesitamos es un punto E' para que:

$$OE' / OF = K / r^2.$$

Por consiguiente, OE' es un factor constante de OF . Esto significa que cuando nosotros aplicamos una aplicación al plano por un factor de k / r^2 con el punto fijo del plano O , entonces los puntos en el círculo BCD se invertirá a los puntos en el círculo aplicado.

Se concluye que cuando un círculo es invertido en otro, y el centro del otro no está en la circunferencia del primero, entonces el resultado es un círculo. Pero si el centro del otro está en el exterior de la circunferencia del primero, entonces el resultado es una línea recta.

ANEXOS

Pág.

ANEXO I. RESUMEN DE LAS INVERSIONES.

72

LISTA DE FIGURAS.

	Pag
Figura 1. El postulado de las paralelas.	8
Figura 2. a) Circunferencias: trazado lineal de curvatura constante. b) La circunferencia de menor radio tiene mayor curvatura que una con radio mayor.	12
Figura 3. Un gran número de circunferencias son tangentes con respecto a cada punto de una línea	13
Figura 4. "Rectas" en la geometría esférica.	15
Figura 5. Dos geodésicas se cortan en dos puntos diametralmente opuestos.	15
Figura 6. Plano que pasa por el centro de la esfera.	16
Figura 7. Distancia entre dos puntos en la esfera.	19
Figura 8. Representación de un Biángulo.	20
Figura 9. Los puntos y las rectas en la geometría de Riemann.	22
Figura 10. Posición de tres puntos.	23
Figura 11. a) A y B separan a C y D. b) Ay B no separan a C y D.	24
Figura 12. a) a y b separan a c y d b). a y b no separan a c y d .	24
Figura 13. Interpretación del plano de Riemann.	27
Figura 14.	
Figura 15. Proyección estereográfica.	32
Figura 16. Representación de la proyección estereográfica plana.	33
Figura 17. Proyección estereográfica del ecuador.	35
Figura 18. El ecuador en el plano estereográfico.	35

Figura 19. Demostración en el plano estereográfico.	36
Figura 20. Los meridianos bajo proyección estereográfica.	37
Figura 21. La proyección de los puntos A y C en el plano estereográfico.	37
Figura 22. Otra proyección que generan rectas en el plano estereográfico.	37
Figura 23. Representación de “rectas” en el plano estereográfico.	38
Figura 24. Representación de la proyección estereográfica de “rectas” oblicuas.	38
Figura 25. Proyección de una circunferencia en un plano desde un punto fijo.	39
Figura 26. Demostración 2.	41
Figura 27. Demostración 3.	42
Figura 28. Obtención de un punto diametralmente opuesto de la esfera en el plano estereográfico.	43
Figura 29. Características de las rectas.	43
Figura 30. Características de las rectas.	43
Figura 31. Características de las rectas.	44
Figura 32. Obtención de la proyección de los puntos P y Q de la esfera.	44
Figura 33. Determinación del Quinto punto del conjunto de la cónica buscada en el plano estereográfico.	45
Figura 34. Cónica que pasa por los puntos W, F, B Y e T.	45
Figura 35. ”Recta” en la esfera y un punto en ella.	46
Figura 36. Representación en el plano estereográfico de la construcción 1.	47
Figura 37. Circunferencia perpendicular buscada.	47
Figura 38. Perpendicular buscada cuando la recta es el ecuador.	48

Figura 39. Perpendicular de una recta por un punto fuera de ella.	49
Figura 40. Construcción de perpendicular en el plano estereográfico	49
Figura 41. Proyección estereográfica en el plano π .	51
Figura 42. Representación en el plano polar.	55
Figura 43. Conjugado armónico.	61

LISTA DE ANEXOS

	Pág
ANEXO I. RESUMEN DE LAS INVERSIONES	72