

Desarrollo de pensamiento variacional a través de la letra en la iniciación al álgebra

Trabajo de grado para optar al grado de Especialista en Pedagogía

Julieth Marcela Tamayo Cárdenas



Universidad Pedagógica Nacional

Facultad de Educación

Especialización en Pedagogía

Bogotá D.C. 2016

Desarrollo de pensamiento variacional a través de la letra en la iniciación al álgebra

Julieth Marcela Tamayo Cárdenas

Asesora: Luz Betty Ruiz Pulido

Trabajo de grado para optar al grado de Especialista en Pedagogía

Universidad Pedagógica Nacional

Facultad de Educación

Especialización en Pedagogía


Bogotá D.C. 2016

Agradecimientos.

A mi asesora Luz Betty por sus orientaciones para el desarrollo de mi proyecto investigativo y sus exigencias las cuales me permitieron culminar el trabajo satisfactoriamente.

A mis estudiantes y compañeros de la institución que contribuyeron a fortalecer mi labor investigativa y enriquecer mi práctica docente.

A mi hijo y mi compañero de vida quienes se convirtieron en un gran apoyo para la realización de este trabajo.

 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL <i>Universidad de la Pedagogía</i>	FORMATO	
	RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE	
Código: FOR020GIB	Versión: 01	
Fecha de Aprobación: 10-10-2012		

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de Grado de Especialización
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento	Desarrollo de pensamiento variacional a través de la letra en la iniciación al álgebra.
Autor(es)	Tamayo Cárdenas, Julieth Marcela
Director	Ruiz Pulido, Luz Betty
Publicación	Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional. 2016. 66 p.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional
Palabras Claves	PENSAMIENTO VARIACIONAL, DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS, INTERPRETACIÓN Y USO DE LA LETRA, PRACTICA PEDAGÓGICA.

2. Descripción
<p>Este trabajo de grado propone una estrategia didáctica que busque fortalecer el pensamiento variacional en estudiantes de grado octavo del colegio Sierra Morena I.E.D. jornada tarde, quienes se enfrenta a una transición del uso exclusivo de los números a implementar el uso de la letra como representación de comportamientos, regularidades, situaciones cotidianas, entre otras.</p> <p>La propuesta didáctica y pedagógica reflexiona sobre las problemáticas que se generan en el aula y que enmarcan particularmente la enseñanza del álgebra reflejada en el poco interés por el estudiante hacia su aprendizaje y más aún en estas nuevas temáticas. Por ello, la estrategia posee un conjunto de actividades en torno a los diferentes tipos de interpretaciones y niveles de razonamiento de la letra que el estudiante debe adquirir y que hacen parte de los sistemas algebraicos que componen una de las características del pensamiento variacional y que contribuye a potencializar otros pensamientos como el Numérico, geométrico, espacial y aleatorio a propósito de enriquecer todo el pensamiento lógico – matemático.</p>

3. Fuentes

- Abero, L. Berardi, L. Capocasale, A. García M, S. y Rojas S, R. (2015, Marzo). *Investigación Educativa*. Montevideo, Uruguay: Contexto S.R.L.
- Amaya, T. Chacuanes, A. Escorcía, J. Medrano, A. Lopez, A. y Theran, E. (2009). Estrategias para potenciar el pensamiento variacional. En *Acta latinoamericana de Matemática Educativa*. México D.F. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. p.p. 739 – 746. Recuperado de <http://funes.uniandes.edu.co/4920/>
- Anacona, M. (2003). *Historia de las matemáticas*. Cali, Colombia. Revista EMA, vol. 8 p.p. 30 – 46.
- Astolfi, J.P. (1997). *Conceptos claves en la didáctica de las disciplinas*. Sevilla, España. Boeck y Larcier, p.p. 73 – 81.
- Chevillard, Y. (1991). *La transposición didáctica, Del saber sabio al saber enseñado*. Madrid, España, p.p. 7 – 46.
- Godino, J. (2004). *Didáctica de las matemáticas para maestros*. Recuperado de <http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/>
- Ley general de Educación. (Ley 115) (Febrero 8 de 1994). Congreso de la Republica de Colombia. Recuperado de <http://www.mineduacion.gov.co/1621/article-85906.html>
- Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos Curriculares en Matemáticas*. Recuperado de http://www.mineduacion.gov.co/1759/articles-339975_matematicas.pdf
- Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencias*. Recuperado de <http://www.mineduacion.gov.co/1759/w3-article-340021.html>

- Múnera, C. J. (2011, abril). *Una estrategia didáctica para las matemáticas escolares desde el enfoque de situaciones problema*. Medellín, Colombia. Revista de Educación y Pedagogía, vol. 23, p.p.179-193.
- Paramo, P. (2011). *La investigación en ciencias sociales: estrategias de investigación*. Bogotá D.C., Colombia. Universidad Piloto de Colombia, p.p. 267 – 287.
- Rojas G. P., Rodríguez B. J., Romero C. J., Castillo E. E. y Mora V. L., (1999). *La transición Aritmética – Algebra*. Bogotá D.C., Colombia. Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- Sandoval C, C. (2002). Investigación Cualitativa. En Briones, G. *Especialización en teorías, métodos y técnicas de investigación social*. Bogotá D.C., Colombia: ARFO editores e impresores Ltda.
- Secretaria de Educación del distrito, Oficina asesora de planeación y grupo gestión de información. (2015). *Caracterización del sector educativo localidad Ciudad Bolívar*. Bogotá D.C., Colombia. Recuperado de http://www.educacionbogota.edu.co/archivos/SECTOR_EDUCATIVO/ESTADISTICAS_EDUCATIVAS/2015/19-Perfil_localidad_de_Ciudad_Bolivar.pdf
- Socas, M. M., Camacho, M., Paralea, M. y Hernández, J. (1996). *Iniciación al álgebra*. Madrid, España: Síntesis.
- Vasco U. C., (2006, Marzo). *Siete Retos de la educación Colombiana en el periodo 2006 al 2019*. Universidad EAFIT de Medellín, Colombia. Recuperado de <http://eduteka.icesi.edu.co/pdfdir/RetosEducativos.pdf>
- Vasco U, C. (2003). *El pensamiento variacional y la modelación matemática*. Universidad del valle, Universidad de Manizales. Colombia. Recuperado de

https://scholar.google.com.co/scholar?q=related:dUOporkwrGoJ:scholar.google.com/&hl=es&as_sdt=0,5&as_vis=1

4. Contenidos

En la práctica pedagógica con la enseñanza de las matemáticas, el docente experimenta distintas problemáticas en el aula como el desinterés por el aprendizaje por parte del estudiante, vacíos conceptuales, contextos, realidades, necesidades de cada niño que obstaculiza avanzar en la educación matemática. Es así, que el docente debe pensarse en como enamorar a los estudiantes para con esta disciplina teniendo en cuenta estos parámetros y garantizar un desarrollo de pensamiento lógico – matemático.

Las matemáticas en el grado octavo se destacan por que comienza el álgebra a jugar un papel importante como base fundamental para la formación matemática en grados superiores. La letra se convierte en una herramienta para interpretar y describir lenguaje matemático, para plantear, formular, modelar comportamientos de situaciones que vemos en nuestro entorno y que pueden ser analizadas a través de las matemáticas. Diferentes estudios ha abarcado esta situación y la denominan como la transición de la aritmética al algebra en donde la didáctica de las matemáticas contribuye favorablemente a este paso que deben enfrentarse los estudiantes.

El trabajo investigativo se apoya en aquellos estudios pues la transición de la aritmética al algebra debe tener en cuenta no solo la letra como tal, sino también sus interpretaciones, estados, usos y aplicaciones; los estudiantes poseen diferentes tipos de razonamiento según Piaget en torno a estos aspectos de la letra.

Es así, que el proyecto tiene como objetivo desarrollar pensamiento lógico – matemático, específicamente el pensamiento variacional y los sistemas algebraicos mediante una estrategia didáctica que involucre a los estudiantes y promueva su participación, su discurso matemático, el trabajo colectivo para la construcción del conocimiento y la apropiación de la letra y sus usos para el modelamiento de expresiones matemáticas para situaciones problemas cotidianos.

La estrategia didáctica contiene una serie de actividades que evidencian expresiones matemáticas para trabajar el valor numérico, graficas de balanzas para plantear ecuaciones de una sola variable, regularidades para modelar formular matemáticas, graficas de comportamiento de crecimiento para analizar cambios en torno a dos variables como tiempo y altura.

La labor investigativa permite fortalecer la práctica pedagógica del docente y la necesidad de estar constantemente reflexionando la enseñanza de las matemáticas para comprender los contextos y realidades de los estudiantes y así se genere con ellos un acercamiento positivo con el saber matemático.

5. Metodología

El diseño metodológico fue elaborado a partir de la investigación acción que plantea Stenhouse y Lewin, desde la actividad del docente en investigar el ámbito escolar propiamente de las matemáticas a través de la reflexión de la acción.

Comprender las múltiples realidades que intervienen en la enseñanza de las matemáticas hace parte del inicio de la labor investigativa del docente. A propósito del deseo de desarrollar pensamiento variacional, el diseño metodológico se distribuye en tres momentos.

1. **PLANIFICAR:** Indica identificar y delimitar la problemática, diagnosticar el grupo de estudio y diseñar la propuesta didáctica. Para el proyecto investigativo se realizó con ayuda de un instrumento estadístico un análisis del estado del pensamiento variacional y el interés por las matemáticas de los estudiantes en grado octavo.
2. **ACCIÓN:** Ejecutar la estrategia didáctica que contiene todo el conjunto de actividades que tratan el uso y las interpretaciones de la letra.
3. **EVALUACIÓN:** Determinar qué tipo de manifestaciones que se generan en el aula gracias a la estrategia didáctica y que tipo de resultados se evidencian con el pensamiento variacional.

6. Conclusiones

Gracias a esta investigación se logra la fundamentación teórica para facilitar la enseñanza de las matemáticas a través de la didáctica y así reflexionar sobre la práctica pedagógica que contribuya a enriquecer el conocimiento matemático de los estudiantes y transforme sus saberes en torno a sus intereses, necesidades, actitudes, disposiciones para con las matemáticas.

Reconocer sus dificultades tanto cognitivas como convivenciales permite diseñar estrategias que responda a problemáticas y disminuya las distancias que existen entre el estudiante, el docente y el saber matemático.

Dichas estrategias promueve la participación de los estudiantes, la apropiación de un lenguaje matemático, el trabajo colectivo, el discurso para argumentar y defender propuestas o soluciones.

Además, la invitación a continuar elaborando estrategias bien pensadas y acordes a los contextos como labor investigativa que contribuya a desarrollar conocimiento matemático en los estudiantes y que aporte en la consolidación de sus proyectos de vida.

Elaborado por:	Tamayo Cárdenas, Julieth Marcela
Revisado por:	Ruiz Pulido, Luz Betty

Fecha de elaboración del Resumen:	29	11	2016
--	----	----	------

CONTENIDO

Agradecimientos	3
1. Introducción	14
2. Antecedentes	16
3. Problema	19
3.1. Planteamiento del problema	19
3.2. Descripción del problema	19
4. Justificación	21
5. Objetivos	23
5.1. Objetivo General	23
5.2. Objetivos Específicos	23
6. Marco teórico	24
6.1. El estudiante	24
6.2. Práctica pedagógica	24
6.3. Naturaleza y epistemología de las matemáticas	25
6.4. Ser matemáticamente competente	27
6.5. Pensamiento lógico y pensamiento matemático	28
6.6. Tipos de pensamiento lógico – matemático	29
6.7. Pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos	30
6.8. Didáctica de las matemáticas en la iniciación al álgebra	33
6.9. Del saber sabio al saber enseñado	34
7. Metodología	37
7.1. Tipo de investigación	37
7.2. Momentos de la investigación acción	38
7.3. Diseño metodológico	38
7.3.1. Planificación	39
7.3.2. Acción o ejecución	39
7.3.3. Observación y evaluación	39
8. Desarrollo de la investigación	41
8.1. Caracterización del grupo	41
8.2. Propuesta didáctica.	45

8.3. Ejecución y análisis de las fases de la propuesta didáctica	48
8.3.1. Fase 1. Letra en la iniciación del álgebra.	48
8.3.2. Fase 2. Análisis de variabilidad	49
8.3.3. Fase 3. Modelamiento de situaciones.	52
8.3.4. Fase 4. Prueba de aprendizaje	53
8.4. Evaluación	56
9. Conclusiones.	58
10. Bibliografía	60
11. ANEXOS	63

LISTA DE GRÁFICAS

Gráfica 1. Cantidad de estudiantes que presentan respuestas satisfactorias y no satisfactorias en pensamiento variacional y sistemas algebraicos.

Gráfica 2. Prueba de percepción al grupo de estudio.

Gráfica 3. Prueba de percepción grado 803.

Gráfica 4. Prueba de percepción grado 802.

Gráfica 5. Cambio en los resultados de la primera a la segunda prueba por competencias.

Gráfica 6. Resultados de cada tipo de pregunta en el grupo A.

Gráfica 7. Resultados de las pruebas por cada estudiante del grado 802.

Gráfica 8. Resultados de las pruebas por cada estudiante del grado 803.

LISTA DE IMÁGENES

Imagen 1. Algunos ejemplos de las fichas con enunciados matemáticos que se trabajaron en el aula para identificar la interpretación y el nivel de razonamiento de la *letra*.

Imagen 2. Estudiante que explica un ejercicio.

LISTA DE TABLAS

Tabla 1. Unidad didáctica para la interpretación y la aplicación de la *letra* que busca desarrollar el pensamiento variacional.

1. Introducción

Las matemáticas suponen un complicado camino en la época escolar del estudiante que intimida a quien no posea las habilidades o aptitudes para desarrollarlas. En los últimos años, los cambios generacionales, culturales y sociales han influido en el aprendizaje de las matemáticas generando que los docentes constantemente discutan y reflexionen acerca de una renovación curricular en matemáticas que promueva un aprendizaje asertivo en los estudiantes y los motiven a continuar profundizando en esta área.

En el último estudio que se realizó durante la política de la Bogotá Humana, que busca caracterizar el sector educativo en la ciudad, se pudo visualizar en la localidad de Ciudad Bolívar los altos grados de deserción escolar que existen, pero no plantean sus causas o soluciones a esta problemática (Secretaría de educación de Bogotá, oficina de planeación y grupo de gestión de información, 2015). Posiblemente se podría responder que una causa es la poca motivación por el interés en el conocimiento y las dificultades que presenten en el niño que no son atendidas en la escuela.

Hoy en día, cada docente aparte de ser poseedor de un conocimiento sobre alguna disciplina, debe ser un líder de un grupo de estudiantes a lo largo de un año escolar, lo que implica que deba conocer a sus estudiantes más allá de lo cognitivo. El diálogo constante con sus estudiantes y padres de familia, la elaboración y seguimiento de un observador, el análisis de informes académicos, la charla con otros colegas, entre otras estrategias, permite al docente conocer la realidad en la cual están situados cada uno de sus estudiantes y así facilita la identificación de causas que generan dificultades académicas o convivenciales.

En particular, algunas de estas características que se logran visualizar en los estudiantes son aspectos que influyen en el aprendizaje de las matemáticas ya sean

Desarrollo de pensamiento variacional a través de la letra en la iniciación al álgebra

favorables o no. En el grado Octavo del colegio Sierra Morena jornada tarde existen 6 cursos de los cuales se trabaja en la asignatura con tres (802 - 803 - 804). Para este grado, es fundamental la enseñanza de la rama de las matemáticas denominada álgebra y su aporte en el desarrollo del pensamiento matemático está relacionada a diferentes representaciones ya sea algebraico, geométrico, variacional, aleatorio, numérico, entre otros y que contribuyan a que el estudiante sea matemáticamente competente. (Estándares básicos de competencias, 2006)

En perspectiva, de acuerdo con lo trabajado en el primer semestre del presente año, se han observado ciertas dificultades en torno a vacíos conceptuales matemáticos y el uso de herramientas para el desarrollo fortuito de esta disciplina. Por ejemplo, se observó que los estudiantes no usaban adecuadamente una regla, un transportador o un compás, los estudiantes no comprenden en su totalidad la importancia de utilizar un lápiz para el desarrollo de ejercicios matemáticos, no poseen una rigurosidad y orden en sus procedimientos de solución, no multiplican o dividen bien con números decimales, racionales o peor aún con números naturales.

Teniendo en cuenta este panorama, se hace necesario identificar el estado en el que se encuentran dispuestos los estudiantes hacia el aprendizaje, aclarar de manera pertinente los tipos de saberes que se desean alcanzar al abordar las matemáticas y permearlos con procesos dispuestos a dinamizar de manera afectiva y efectiva las interacciones de los individuos en una estrecha relación con la experimentación activa y participativa. Con el fin de hacer de las prácticas de enseñanza, espacios humanizantes enmarcados en el aprender al lado del otro con la posibilidad de ensayar y equivocarse como elemento significador en la construcción de un conocimiento oportuno, sostenible y aplicable.

2. Antecedentes

Anteriores estudios han expresado la importancia de pensar continuamente en estrategias didácticas que respondan a interrogantes que se producen entre los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Para ello, proponen estrategias como enseñanza y aprendizaje por resolución de problemas, creación de ambientes de aprendizaje (Múnera, 2011), secuencias didácticas en las matemáticas (Avendaño, 2011).

Otros un poco más formales proponen aclarar las concepciones e historias de las matemáticas que favorezca el uso adecuado del lenguaje matemático para la enseñanza de las matemáticas (Godino, 2004, p 20), el reconocimiento de su naturaleza y epistemología, la construcción teórica del concepto y el uso de diferentes términos (Anacona, 2003), lo que hace a las matemáticas como parte importante del contexto sociocultural de toda actividad humana y que permitan ser desarrolladas desde un punto de vista constructivista y social (Godino, 2004, p 29).

Estudios más enfocados hacia el pensamiento variacional, denominan como la modelación matemática a situaciones problemas del espacio - tiempo que se desarrolla con ayuda de los otros pensamientos que conforman las matemáticas. Documentos como el del profesor Carlos Eduardo Vasco (2003) dice, que el pensamiento variacional no es la memorización de fórmulas de áreas o volúmenes sino “una manera de pensar dinámicamente y producir mentalmente sistemas que relacionen sus variables internas” (Vasco, 2003, p. 6).

Dichas producciones mentales generan sistemas simbólicos y formulaciones que permiten: “objetivar el modelo mental, calcular representaciones, comparar y reformular los modelos”. (Vasco, 2003, p.6).

Desarrollo de pensamiento variacional a través de la letra en la iniciación al álgebra

El pensamiento variacional se desarrolla de múltiples maneras:

Con el pensamiento numérico en la variación y regularidades e los números, con el pensamiento espacial, a partir de movimientos, transformaciones y cambios de figuras que representan el pensamiento geométrico pero no de la forma estática Euclidiana, y con el pensamiento métrico desde la diferenciación de magnitudes, su comparación y ordenación. (Vasco, 2003, p. 8).

Un grupo de investigación (PEMA) en Sucre en el año 2009, abordó aquella situación sobre las dificultades que se presentan en el aprendizaje de las matemáticas; con base a varios autores que realizaron sus trabajos alrededor del “concepto de función en la formación básica de las matemáticas del estudiante” (Amaya y otros, 2009, p 739).

Es así, que en su proyecto investigativo plantean en tres etapas - Diagnóstico, intervención y prueba final - estrategias que fortalezcan el pensamiento variacional a partir de situaciones problemas de contexto en donde los estudiantes determinen procesos de cambio o variación y modelamientos matemáticos.

Este grupo investigativo tomó un grupo de estudio conformado por 111 niños de diferentes colegios distritales y fue delimitado a 48 niños por diferentes situaciones que se presentaron, lo que ocasionó que algunos desertaran o que interrumpieran el proceso de la labor investigativa.

El profesor Rojas y su grupo Pretexto en el año 1999 también aportaron al estudio del pensamiento variacional, esta vez a partir de las interpretaciones de la *letra* que estableció en sus trabajos Küchemann (1978, 1980 y 1981).

En el trabajo investigativo del profesor Rojas y su grupo de apoyo, tomaron la *letra* en sus 6 tipos de interpretaciones y la asociaron con los niveles de razonamiento de Piaget para

Desarrollo de pensamiento variacional a través de la letra en la iniciación al álgebra

implementar ejercicios y así observar en qué nivel se encuentra el estudiante de manera que se permita establecer estrategias que desarrollen y fortalezcan el pensamiento variacional.

3. Problema

3.1. Planteamiento del problema

¿Cómo lograr que los estudiantes de grado octavo, jornada tarde de la Institución Educativa Sierra Morena de la Localidad 19 Ciudad Bolívar, desarrollen pensamiento variacional a través de la *letra*¹ en la iniciación al álgebra?

3.2. Descripción del problema

Durante el primer semestre en los procesos de enseñanza y aprendizaje que se han desarrollado en los diferentes niveles de la institución educativa Sierra Morena, cada uno de los integrantes del grupo del área de Matemáticas llegamos a la conclusión de priorizar ciertos saberes matemáticos y no seguir al pie de la letra el plan de estudios que ya está establecido por anteriores docentes, lo que significa que es necesario renovar dicho plan de acuerdo con las dificultades actualmente presentes.

En tal priorización de saberes matemáticos y con base en los estándares básicos de aprendizaje (2006) y suprimir los derechos básicos de aprendizaje que promueve el Ministerio de Educación Nacional desde el año 2015, se pudo observar lo importante que es la noción de *letra* para la modelación, planteamiento y solución de situaciones problemas, para fortalecer el lenguaje algebraico, aritmético y formal, para la aplicación de las matemáticas en otros contextos como el geométrico o el estadístico.

¹ La letra se define tal como está escrito en el libro del profesor Rojas y su grupo de apoyo PRETEXTO (1999): particularmente orientado al uso de éstas como representante de números, se empieza a operar con ellas en el contexto de las expresiones algebraicas.

Desarrollo de pensamiento variacional a través de la letra en la iniciación al álgebra

Este tipo de contenidos del álgebra se implementa en grado octavo de manera que se convierta en una herramienta fundamental para el desarrollo de las matemáticas en los últimos grados de la educación media.

Por asignación académica, de los seis grupos de grado octavo, este proyecto será producto de una investigación con tres grupos de ellos. Explorando los saberes que poseen los estudiantes que cursan el grado octavo a modos de observación y de vivencias, se vislumbran ciertas dificultades desde la actitud y comportamientos indispensables para el aprendizaje como el uso de herramientas ya sean regla, compás o transportador. Incluso, es poca la utilidad que ven en el lápiz para la elaboración de procedimientos matemáticos junto con su orden y linealidad que se requiere para mayor comprensión de problemas, lo que llevó en primera medida a crear una cultura en el aula de clase durante el espacio de las matemáticas que permitieran abordar estas dificultades.

Otro tipo de dificultades que se apreciaron, tienen que ver con el manejo de los conceptos básicos de ésta disciplina, muchos de los estudiantes aún no saben operaciones aritméticas básicas entre las diferentes presentaciones que poseen los números como los naturales, enteros o decimales. Además, desconocen en gran parte los conceptos básicos en geometría.

Por lo tanto, fue necesario intervenir en forma preliminar una reestructuración de conceptos básicos en geometría asociados a las operaciones aritméticas con el fin de reforzar en los estudiantes estos conocimientos – que podrían llamarse básicos – para así, con base en el proyecto de investigación diseñar e implementar estrategias alrededor de la noción de *letra* con sus interpretaciones y desarrollos que fortalezcan en el estudiante un aprendizaje asertivo y motivador y respondan a desarrollar el pensamiento variacional.

4. Justificación

El acto educativo se centra en la implementación de una serie de estrategias que fortalecen las técnicas de enseñanza y los procesos de desarrollo de aprendizaje en una relación sistémica con las dificultades que presentan los niños, las carencias en su motivación por las labores propias de la escuela, la dificultad en la adquisición e interpretación de los lenguajes disciplinares de las áreas y toda una serie de distractores de su entorno como el manejo inadecuado de los medios tecnológicos; complejizan la intencionalidad y las búsquedas de los docentes para llevar a buen término su labor pedagógica.

En el caso del desarrollo de las matemáticas en el Colegio Sierra Morena de la localidad Ciudad Bolívar con los estudiantes de grado octavo, se evidencian las dificultades anteriormente mencionadas y que obstaculizan el aprendizaje, lo que en consecuencia provoca la desmotivación para afrontar nuevos retos desde la asignatura

La propuesta del desarrollo del pensamiento variacional a través de la *letra* en la iniciación al álgebra permite establecer una estrategia didáctica que fortalezca los procesos de enseñanza – aprendizaje y se promueva las búsquedas de los estudiantes por afianzar las matemáticas a partir de simbolizar y transferir desde el álgebra, situaciones de la cotidianidad, aprender a modelar situaciones problema. Es decir, plantear por lenguaje algebraico situaciones que requieren de las matemáticas para su solución, donde dichas situaciones serán identificadas por los estudiantes desde el análisis de su contexto social; resolver ecuaciones de una sola variable por medio del estudio de casos o fenómenos que se sitúan dentro del ambiente escolar.

Este estudiante podrá estar en capacidad de aplicar en contextos geométricos, operaciones entre expresiones algebraicas y por ende estructurar el conocimiento matemático.

Desarrollo de pensamiento variacional a través de la letra en la iniciación al álgebra

La aplicación de esta propuesta gana sentido pedagógico al acoger un ambiente de aprendizaje caracterizado por ser un trato humanizante con la óptica de reconocer a cada ser humano desde su singularidad, además de reconocer que los procesos de adquisición responden a diferentes ritmos de aprendizaje y es aquí en donde la construcción en comunidad fortalece vínculos socio-afectivos que transforman el ambiente del aula e inciden positivamente en la motivación del estudiante.

El estudio pretende determinar una estrategia sistémica, adaptada y en armonía con un grupo de estudiantes del grado octavo teniendo en cuenta la etapa de desarrollo emocional, psicológico y cognitivo en la que se encuentra el estudiante, convirtiéndose en un reto para el profesor en el oficio de investigador de proponer nuevos mecanismos de enseñanza desde la pedagogía y la didáctica que responda a motivar al estudiante por el aprendizaje en las matemáticas, como lo mencionó Carlos Eduardo Vasco (2006) como reto de la educación colombiana: “se necesita contribuir a obtener altos niveles en matemáticas para evitar la apatía de los jóvenes, el desprecio por la disciplina y borrar el panorama de ser las matemáticas aburridas, humillantes, y presencien el destierro de aquellos jóvenes que no logran un buen rendimiento y en consecuencia una reducción en el número de aspirantes para profundizar en esta área” (Vasco E, 2006).

5. Objetivos

5.1. Objetivo General

Diseñar una estrategia didáctica que contribuya al aprendizaje de las matemáticas por medio de la noción de *letra* en sus diferentes representaciones que permitan al grado octavo del Colegio Sierra Morena (IED) desarrollar pensamiento variacional.

5.2. Objetivos Específicos

- Formular una estrategia didáctica a partir de las causas que producen el desinterés, las dificultades y los obstáculos en el desarrollo del saber matemático, con el propósito de establecer una propuesta alternativa para favorecer el aprendizaje del álgebra a través de la *letra*.
- Implementar algunas actividades que acojan los criterios y pautas de la estrategia didáctica y respondan al cómo enseñar matemáticas y cómo se aprenden, de manera que los estudiantes de grado octavo reconozcan sus habilidades y generen conocimiento matemático colectivo.
- Evaluar la estrategia didáctica implementada que permita visualizar y analizar sus aspectos favorables y desfavorables a partir de la reflexión de la práctica pedagógica.

6. Marco teórico

Con el propósito de fundamentar el proyecto de investigación y precisar el objeto de estudio, se establecen los siguientes elementos teóricos que conceptualizan los contenidos.

6.1. El estudiante

La ley General de Educación, 115 de 1994 en el capítulo 1, artículo 91; considera al estudiante como el centro del proceso educativo y es quien debe participar principalmente de forma activa en su propia formación integral. Para ello, la escuela mediante su Proyecto Educativo Institucional reconocerá este carácter y los educadores tendrán la responsabilidad de desarrollar su teoría y práctica pedagógica en el fortalecimiento de la investigación del campo pedagógico y en el saber específico según las finalidades de los maestros (Numerales b y c, artículo 109, capítulo 2). Por tanto, el estudiante del colegio Sierra Morena, además de ser considerado como sujeto poseedor de un saber con un proceso de adquisición de conocimiento disciplinar, es un ser humano del cual debe comprenderse en sus acciones y manifestaciones dentro del proceso formativo.

6.2. Práctica pedagógica

La pedagogía definida como la reflexión que surge en el campo de la educación, empodera al docente en su quehacer educativo y potencializa su saber teórico – práctico. Dentro del Proyecto Educativo Institucional del colegio Sierra Morena I.E.D. el énfasis de los procesos escolares de cada estudiante, deben estar fundamentadas en un enfoque pedagógico Estructural cognitivo – afectivo. Esto significa, que el proceso educativo que se lleva a cabo en la institución hace parte de una serie de consideraciones para con el

estudiante; a partir de la comprensión de sus diferentes necesidades que nacen desde sus contextos tanto social, económico y afectivo, entre otros; dichas consideraciones contribuyen a la creación de nuevas estrategias tanto pedagógicas como didácticas que motiven al estudiante y le permita planear y consolidar su proyecto de vida.

6.3. Naturaleza y epistemología de las matemáticas

Existen diferentes posturas de orden filosófico y epistemológico, frente a la historia de las matemáticas que dan cuenta de su desarrollo conceptual.

Se han cuestionado desde siglos atrás la existencia de las matemáticas. La escuela de Platón las consideraba como un sistema de verdades que han existido desde siempre e independientemente del hombre. La corriente del logicismo aseguraba que las matemáticas eran una rama de la Lógica, con vida propia, pero con el mismo origen y método.

El Formalismo que las matemáticas eran una creación de la mente humana y consideraba que ellas consistían solamente en axiomas, definiciones y teoremas como expresiones formales que se ensamblan a partir de símbolos, manipulados de acuerdo con ciertas reglas. La verdad de la matemática para el formalista, radica en la mente humana pero no en las construcciones que ella realiza internamente, sino en la coherencia con las reglas del juego. Otra corriente como el intuicionismo consideraba las matemáticas como el fruto de la elaboración que hace la mente a partir de quien las percibe a través de los sentidos y el estudio de dichas construcciones asociada a los números naturales; mientras el constructivismo también consideraba a las matemáticas como una creación de la mente humana en un conjunto finito de pasos. (Lineamientos curriculares, 1998, p10)

La educación matemática en Colombia tiene en cuenta que ella es una construcción de la mente humana, asociada a su ámbito social y cultural, que se constituye desde tres componentes fundamentales: el estudiante, el maestro y el conocimiento matemático, y propone entender las matemáticas como una disciplina que contribuye a la construcción social y su recorrido histórico posibilita el mejoramiento de diversos aspectos que instauran transformaciones en la escuela.

Se quiere responder a la pregunta sobre la identidad intelectual colombiana, específicamente en lo que se refiere a la identidad en el campo de la educación. En términos generales, se espera que este tipo de estudios sobre las prácticas educativas en el país, brinde explicaciones históricas, epistemológicas y pedagógicas de nuestro pasado, con el fin de encontrar luces sobre aspectos de la cultura y de la educación en matemáticas en el presente, lo que puede ser aprovechado por parte de los docentes, los directivos y la comunidad académica escolar, para hacer más viables futuros proyectos educativos (Anacona, 2003, p11)

A partir de la reflexión histórica de las matemáticas, Anacona (2003) referencia ciertos aspectos en los que las matemáticas ha incidido en la educación Colombiana y por lo cual cada docente se puede apoyar.

- Como elemento en la elaboración de un currículo
- Indicador de dificultades para la comprensión
- Diseño de actividades didácticas entre otros

Estos indicadores exponen un análisis epistemológico de los procesos de evolución del conocimiento matemático, sus dificultades en la comprensión de conceptos, da lugar para que el docente, en la reflexión de su práctica, considere el tipo y ritmo de aprendizaje

del estudiante; este ejercicio le sugiere al docente crear o generar estrategias que desarrollen procesos lógicos de demostración en forma rigurosa, que promuevan el discurso matemático y den cuenta de la existencia de una construcción humana del conocimiento matemático.

6.4. Ser matemáticamente competente

Los estándares básicos de competencias (MEN, 2006) establece una serie de elementos que guían y fundamentan el diseño del currículo, plan de estudios y otros tipos de proyectos escolares. Este documento, define un estándar como “un criterio claro y público que permite juzgar si un estudiante, una institución o el sistema educativo en su conjunto cumplen con unas expectativas comunes de educación de calidad” (MEN, 2006, p11), pero enfatiza en que un estándar no solo se concentra en un conjunto de contenidos temáticos, sino también va dirigido al fortalecimiento de competencias, que constituyen un “ámbito del saber qué, del saber cómo, del saber por qué o del saber para qué, pues para el ejercicio de cada competencia se requieren muchos conocimientos, habilidades, destrezas, comprensiones, actitudes y disposiciones específicas del dominio que se trate” (MEN, 2006, p12).

En matemáticas poseer estas competencias se refiere a:

Formular, plantear, transformar y resolver problemas a partir de situaciones de la vida cotidiana; Utilizar diferentes registros de representación o sistemas de notación simbólica para crear, expresar y representar ideas matemáticas; para utilizar y transformar dichas representaciones y con ellas, formular y sustentar puntos de vista; Usar la argumentación, la prueba y la refutación, el ejemplo y el contraejemplo, como medios de

validar y rechazar conjeturas; Dominar procedimientos y algoritmos matemáticos y conocer cómo, cuándo y por qué usarlos de manera flexible y eficaz. (MEN, 2006, p51)

Por tanto, ser matemáticamente competente supone ser diestro, eficaz y eficiente con las matemáticas, poseer un dominio en el conocimiento conceptual y procedimental y enriquecer una actitud favorable y dispuesta.

Estas competencias serán potenciadas en ambientes de aprendizaje que exijan la comprensión y la significación de situaciones problemas cotidianos que requieren para este proyecto investigativo o para cualquier otro en análisis de las matemáticas en el aula, ser consideradas y reflexionadas constantemente a medida que se vayan creando y ejecutando estrategias didácticas, siempre con el objetivo de fortalecer el pensamiento matemático.

6.5. Pensamiento lógico y pensamiento matemático

Jean Piaget en el siglo XX se interesó por el estudio de la evolución del desarrollo cognitivo en el niño y centró este estudio en 4 momentos de la niñez, dos de ellos enfocados en la operacionalidad concreta y la operacionalidad formal lo que lo llevó a proponer que “el pensamiento lógico actúa por medio de operaciones sobre las proposiciones y que el pensamiento matemático se distingue del lógico porque versa sobre el número y sobre el espacio” (MEN, 2006, p56).

Es decir, que el pensamiento lógico – matemático se define como la adaptación de las características de la realidad por medio de esquemas lógicos y numéricos. Es así, que el pensamiento lógico y el pensamiento matemático no están separados ya que es fundamental que el primero apoye, fortalezca y perfeccione al segundo siendo necesario en

primera medida desarrollar el pensamiento lógico en cualquier ámbito en particular en las matemáticas.

6.6. Tipos de pensamiento lógico – matemático

Como una visión a partir de la reflexión de diferentes comunidades matemáticas se formulan ciertos aspectos que deben destacarse en la construcción del conocimiento matemático, valorando la importancia que tiene en los procesos de enseñanza y aprendizaje como transformador social.

Dichos aspectos reconocen todos aquellos núcleos matemáticos que deben ser dominados por cualquier ciudadano, su impacto en el desarrollo de nuevas tecnologías y la manera como privilegia al estudiante en su quehacer matemático ante las situaciones problema. “Considera que el conocimiento matemático (sus conceptos y estructuras), constituyen una herramienta potente para el desarrollo de habilidades de pensamiento” (Lineamientos Curriculares, 1998, p 14).

Al desarrollarse el conocimiento matemático en diferentes contextos como el álgebra, la geometría, el cálculo, la aritmética, la probabilidad, entre otras. Se establece los diferentes tipos de pensamiento que hacen parte del desarrollo en su totalidad al pensamiento lógico – matemático.

Según los lineamientos curriculares y los estándares básicos de competencias los cinco tipos de pensamiento son:

- El pensamiento numérico y los sistemas numéricos
- El pensamiento espacial y los sistemas geométricos

- El pensamiento métrico y los sistemas métricos o de medidas
- El pensamiento aleatorio y los sistema de datos
- El pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos.

6.7. Pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos

Este pensamiento es el objeto de estudio para el presente proyecto investigativo. El pensamiento variacional se vincula a las matemáticas inicialmente con el uso de las letras como medio de expresión para el pensamiento matemático, donde se visibilicen situaciones cotidianas y su variabilidad o cambio que permitan ser analizadas por medio de las matemáticas.

Este pensamiento posee una estrecha relación con los otros tipos de pensamiento matemático (el numérico, el espacial, el de medida o métrico y el aleatorio o probabilístico) y pueden verse explicadas en diferentes formas; como es el caso de la modelación de procesos y situaciones naturales y sociales ya sean por medio de modelos matemáticos que expliquen la variación (cambios en los comportamientos de las situaciones) expresados en sistemas como los números reales, por medio de visualizaciones geométricas, o con recolección y análisis de un conjunto de datos. (MEN, 2006, p 66).

Para el desarrollo del pensamiento variacional se debe privilegiar a la *letra* como herramienta fundamental desde sus interpretaciones que diferentes docentes en matemáticas se han apoyado. Estas interpretaciones las han expuesto desde la propuesta que hizo Küchemann (1978) en ver la *letra* como facilitador para el desarrollo de las matemáticas en contextos algebraicos de manera que permita hacer una exigencia en el

Desarrollo de pensamiento variacional a través de la letra en la iniciación al álgebra

procedimiento formal para los ejercicios o las actividades que requiera el estudio en el álgebra.

Las interpretaciones de la *letra* tomadas del estudio del profesor Pedro Javier Rojas y su grupo de investigación PRETEXTO, en el libro “LA TRANSICIÓN ARITMETICA – ALGEBRA, Universidad Distrital Francisco José de Caldas son:

- *Letra evaluada.* A la letra se le da un valor numérico en lugar de tratarla como un valor desconocido. Ejemplo: *si $e + f = 8$, ¿Cuánto es $e + f + g$?*
- *Letra no usada.* Se reconoce la letra a lo mucho pero se ignora. Ejemplo: *sumele 2 a $3n$, la respuesta es $2 + 3n$.*
- *Letra como objeto.* Letra que se le asigna como nombre a un objeto a una cosa. Ejemplo: *ante la expresión $2n + 3n$, se puede ver como 2 naranjas + 3 naranjas.*
- *Letra como incógnita.* La letra se piensa como un número desconocido pero alguno en particular. Ejemplo: *Asigne un valor a $3 + 8g$.*
- *Letra como número generalizado.* La letra se interpreta bajo varias representaciones o como un conjunto de valores. Ejemplo: *¿Qué puede decir de C , si $C + D = 10$ y C es menor que D ?*
- *Letra como variable.* La letra representa varios valores pero además el estudiante puede modelar y operar con ellas sin necesidad de tener un valor numérico determinado. Se establece relación con otra u otras letras. Ejemplo: *¿Qué le pasa a $x = y + 3$, si y aumenta en dos?*

Desarrollo de pensamiento variacional a través de la letra en la iniciación al álgebra

Los distintos usos de las *letras* (que constituyen, en general, la manifestación simbólica de las variables), aunque parezcan simples para el que sabe, deben ser reconocidos por los estudiantes para “dotar de significado” el trabajo algebraico.

En general, estas diferencias no son tematizadas en el aula de clase por parte del maestro, quien, al parecer, asume esto como un hecho irrelevante o no hace conciencia de dicha diferenciación. (Rojas y otros, 1999, p33).

Para que se puedan visualizar en el aula estas manifestaciones de la *letra*, Küchemann (1978) toma un marco de referencia con base a los estudios de Piaget sobre el desarrollo cognitivo en la operacionalidad concreta y la formal. Por tanto, asocia a la *letra evaluada y no usada* con la operacionalidad concreta de nivel bajo; a la *letra como objeto* con la operacionalidad concreta de nivel superior; a las *letras como incógnita y como número generalizado* con la operacionalidad formal de nivel bajo y por último a la *letra como variable* con la operacionalidad formal nivel superior.

Esta asociación no puede tomarse, en general, como una correspondencia directa y así, por ejemplo, el hecho de evaluar la *letra*, en un cierto problema, no significa que el estudiante se encuentre en el nivel bajo de las operaciones concretas. Küchemann plantea que las interpretaciones que los estudiantes hacen de las letras dependen de la naturaleza y la complejidad de las preguntas. (Rojas y otros, 1999, p 34)

Es por ello, que deben plantearse un conjunto de actividades que permita observar el estadio de la letra que está desarrollando el estudiante y así establecer un indicativo sobre su nivel de razonamiento.

Desde esta perspectiva, el proyecto investigativo busca identificar aquellos niveles de razonamiento que posibilite generar estrategias tanto pedagógicas como didácticas que

apunten al desarrollo del pensamiento variacional y de paso, al pensamiento lógico – matemático. Es así, que el maestro juega un papel importante en esta pretensión, pues es él quien debe pensar la estrategia, ya que él posee el conocimiento sobre la disciplina y debe apoyarse en los saberes que circulan en el aula que le permitan diseñarla, implementarla, observarla y constantemente evaluarla y rediseñarla.

6.8. Didáctica de las matemáticas en la iniciación al álgebra

Para la enseñanza de las matemáticas, particularmente en el álgebra, el docente posee un saber sabio sobre esta disciplina y es así que dicho saber se reconfigura cuando requiere ser transmitida en el aula de clase. (Chevellard, 1991).

Construir conocimiento matemático, supone tener en cuenta una organización con aspectos de orden formativo, pedagógico y didáctico, y debe tener en cuenta ciertos interrogantes como: ¿Qué se enseña?, ¿Cómo se enseña?, ¿A quién se enseña?, ¿Cómo evaluar lo que se enseña?, situados desde el punto de vista de la enseñanza donde el profesor es su responsable. Sin embargo, la enseñanza no se manifiesta sin un aprendizaje – así no sea el deseado – pues es el aprendizaje el que determina un indicativo de evaluación de lo que se ha enseñado.

En este sentido, la didáctica juega un papel importante en la enseñanza de las matemáticas, ya que el proyecto investigativo explora las distintas rutas de transmitir el saber que favorezca al desarrollo del pensamiento variacional.

La didáctica se apoya en tres tipos de registros en relación con la enseñanza de las ciencias. Según Astolfi (2001, p 76), la didáctica se define como:

Desarrollo de pensamiento variacional a través de la letra en la iniciación al álgebra

- La reflexión sobre los contenidos de enseñanza. Se interesa por su carácter cognitivo, (saber o saber hacer); por su categoría epistemológica; por su metodología de construcción (transposición o elaboración de saberes) y por su organización en currículos, ***una tendencia epistemológica.***
- Una investigación sobre las condiciones de la apropiación de saberes; por la construcción del aprendizaje, los prerrequisitos que suponen esta construcción y por los diferentes obstáculos del aprendizaje, ***una tendencia psicológica.***
- Como investigación didáctica que articule los puntos precedentes de la tarea del docente, las situaciones de la enseñanza, la construcción de los ciclos o secuencias didácticas, la adaptación de estas al público, el enfoque y funcionamiento de la clase, ***una tendencia praxiológica.***

Como punto en común de estas tres tendencias, son los saberes escolares disciplinarios. (Astolfi, 1997, p76).

A propósito del proyecto investigativo, la propuesta adoptaría una *tendencia epistemológica*, esto gracias a que se busca hacer un estudio acerca de los saberes que circulan en el aula y se busca establecer una propuesta metodológica y didáctica que fortalezca el estudio del álgebra y desarrolle pensamiento variacional pues se debe realizar una observación y a partir de ella elaborar nuevas actividades que reconfiguren y constituyan conceptos matemáticos adecuados.

6.9. Del saber sabio al saber enseñado

Tomando como referencia a Chevallard, se entiende la didáctica de las matemáticas a partir de una relación ternaria que existe entre el estudiante, el docente y un saber

matemático. El docente que enseña matemáticas y pretenda ser didacta en esta disciplina, observa, reflexiona y reconstruye sus clases con el objetivo de minimizar la distancia que exista entre el docente y el saber matemático.

El saber matemático sufre una transformación a medida que viaja desde lo que sabe el docente hasta lo que aprende el estudiante. Si se quiere que este saber sea el deseado o sea lo más cercano posible a lo que se quería enseñar, el docente debe pensarse su clase desde el saber enseñado, dicha transformación se denomina la transposición didáctica.

El concepto de transposición didáctica, remite el paso del saber sabio al saber enseñado. Para el maestro, la transposición es una herramienta que le permite recapacitar, tomar distancia, interrogar las evidencias, poner en cuestión las ideas simples. En pocas palabras, una herramienta que le permita ejercer al maestro una vigilancia epistemológica. (Chevallard, 1991, p16).

Es así, que el saber enseñado para este proyecto investigativo se enriquece desde la práctica pedagógica del docente y su transformación en el aula, respondiendo a tres preguntas que se debe hacer, ¿Qué se va a enseñar?, ¿Para qué se va a enseñar? y ¿Cómo se va a enseñar? Es decir, pensar en cómo introducir al estudiante en el álgebra para el desarrollo del pensamiento variacional, indica pensar en los tres interrogantes expuestos.

Ese saber que produce la transposición didáctica será por lo tanto un saber exiliado de sus orígenes y separado de su producción histórica en la esfera del saber sabio, legitimándose, en tanto saber enseñado, como algo que no es de ningún tiempo ni de ningún lugar, y no legitimándose mediante el recurso a la autoridad de un productor cualquiera que fuere. (Chevallard, 1991, p18).

Desarrollo de pensamiento variacional a través de la letra en la iniciación al álgebra

Con fines de desarrollar el pensamiento variacional, el docente tiene aquellos presupuestos de los niveles de razonamiento en las interpretaciones de la *letra* para tener claro lo que va a enseñar, pensarse las estrategias que respondan a como lo va enseñar y que se pueda observar si se cumple con el objetivo.

“El saber enseñado supone un proceso de naturalización, que confiere la evidencia incontestable de las cosas naturales” (Chevellard, 1991, p 18). Por tanto, ese saber matemático que posee el docente, donde la *letra* pasa inadvertida en el desarrollo del álgebra requiere ser mayor analizada, desglosada y planeada de manera que el saber que se transmita al estudiante sea mucho más específico, natural y entendible para él.

7. Metodología

7.1. Tipo de investigación

Con base a las lecturas de Abero (2015) y Paramo (2011). El trabajo de investigación tendrá como eje principal la investigación acción que surge a partir de la reflexión de la práctica del docente y es él mismo quien la problematiza y adopta una postura de experimentación frente a la situaciones problematizadoras buscando comprender las causas, de manera que pueda diseñar y poner en acción estrategias que conduzcan a cambios satisfactorios.

Stenhouse establece esta propuesta para la educación popular desde un enfoque cualitativo que permita la interpretación y comprensión de la realidad en la que están inmersos cada uno de los estudiantes donde el enseñante es el protagonista de concebir, desarrollar e implementar el currículo como herramienta que construya el aprendizaje del estudiante y la autoformación del docente (Paramo, 2011, p 274).

Esta propuesta no pretende homogenizar el conocimiento matemático sino intervenir en los procesos de enseñanza – aprendizaje de las matemáticas que fortalezca el proceso evolutivo, cognitivo y social de cada estudiante, a través de unas estrategias didácticas enfocadas a que desarrollen el pensamiento variacional. “La perspectiva focal de esta alternativa de trabajo cualitativo ha sido el llamado “empoderamiento” a través de la producción y uso del conocimiento por parte de los sectores más pobres y oprimidos” (Sandoval, 2002, p 69).

Dicha producción y empoderamiento del conocimiento matemático se realiza desde un enfoque experimental con un grupo de estudio a quienes se les aplica la propuesta didáctica.

7.2. Momentos de la investigación acción

Con el objetivo de desarrollar pensamiento variacional en los estudiantes de grado Octavo del colegio Sierra Morena I.E.D, localidad Ciudad Bolívar, surge la necesidad de observar, actuar, intervenir y observar nuevamente. La investigación acción desde el punto de vista de Kurt Lewin se caracteriza por el interés de las dinámicas de los grupos en sus intereses y necesidades, y la preocupación del investigador en su práctica investigativa.

La actividad del profesor, considerado como un profesional en su tarea, exige una constante reflexión para seleccionar y encaminar todas sus acciones hacia el objetivo propuesto, en este sentido, es investigador de su propia práctica. La investigación – acción es el modo de sistematizar y hacer colectiva tal reflexión, y se encamina al establecimiento de grupos de aprendizaje permanentes, empeñados en la mejora progresiva de las propias prácticas y en la solución de problemas educativos concretos. (Paramo, 2011, p 274).

A propósito del trabajo investigativo, en el ámbito escolar, particularmente en los procesos escolares de las matemáticas, esta preocupación la asume el docente a partir de la observación del grupo a intervenir con la reflexión de lo que se tiene del objeto de estudio y así planificar una serie de estrategias de acción que aporten al currículo y transforme el grupo en sus actividades de aprendizaje, que promueva la participación y el discurso del saber matemático.

7.3. Diseño metodológico

El diseño metodológico lo propone Lewin como un tipo de acción reflexiva, representada en tres etapas: Planificación, acción o ejecución, observación y evaluación

donde cada uno de estos momentos se desarrollan en forma espiral que se complementan con los otros dos.

7.3.1. Planificación

En esta etapa, la planificación ha sido desarrollada en primer momento desde el recorrido documental que indique que trabajos investigativos en las matemáticas se han generado, que permitiera delimitar el objeto de estudio para el proyecto investigativo y así establecer los objetivos de la investigación.

En un segundo momento, caracterizar el grupo de estudio y diagnosticar en ellos sus niveles de razonamiento con la *letra* para la iniciación del álgebra a través de unos ejercicios resueltos con la ayuda del otro y a través del diálogo, en este momento se hará uso de unos mecanismos estadísticos con el fin de realizar una observación cualitativa, determinar aspectos de percepción y sentimientos frente a las matemáticas y delimitar el grupo de estudio

En tercer momento crear una propuesta didáctica que encierre una serie de fases que contenga unos objetivos de aprendizaje, un conjunto de actividades bajo unos aspectos evaluativos para implementar en la etapa de acción.

7.3.2. Acción o ejecución

De acuerdo a la propuesta didáctica se implementa las fases que allí están estipuladas. En términos de Kurt Lewin, “la ejecución se procede a cristalizar los planes de acción que han sido previstas en la planificación”. (Paramo, 2011, p 269)

7.3.3. Observación y evaluación

Desarrollo de pensamiento variacional a través de la letra en la iniciación al álgebra

Durante la acción de la propuesta didáctica, el desarrollo de la investigación estará en constante observación y evaluación para determinar qué tipos de resultados está generando la propuesta didáctica. Esta etapa utiliza unos instrumentos donde se consigne los saberes que se producen en clase gracias a la transposición didáctica y a los aspectos pedagógicos que se ponen en juego buscando la motivación y el interés de los estudiantes para con las matemáticas y el desarrollo en ellos hacia el pensamiento variacional.

8. Desarrollo de la investigación

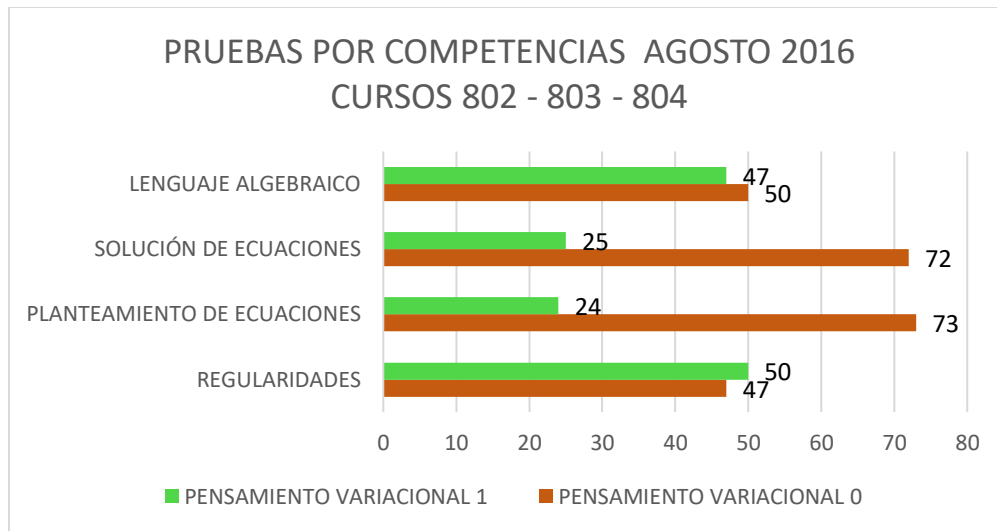
En este capítulo se expondrá el informe final de todo el desarrollo de la investigación según la metodología que fue establecida.

8.1. Caracterización del grupo

La necesidad de desarrollar pensamiento variacional surge desde la discusión entre los profesores de matemáticas del colegio Sierra Morena, localidad Ciudad Bolívar con el propósito de establecer conceptos básicos en el álgebra que sirvan para el desarrollo de esta disciplina en grados superiores; como conclusión, los estudiantes de grado octavo son quienes empiezan este recorrido de las matemáticas haciendo uso de la *letra*.

Para ello, estos estudiantes presentaron a finales del mes de agosto una prueba por competencias de selección múltiple en el área de matemáticas. Desde allí, se hace un diagnóstico acerca de los tipos de pensamiento lógico - matemático que están desarrollando los estudiantes de grado octavo.

La prueba por competencias está compuesta por diez preguntas de las cuales cuatro de ellas corresponden a evaluar pensamiento variacional y sistemas algebraicos; tomando las respuestas de los estudiantes y generando una base de datos, se realiza un diagnóstico preliminar que busca delimitar el grupo de estudio para proceder a diseñar e implementar la estrategia didáctica. (Véase gráfica 1).



Gráfica 1. Cantidad de estudiantes que presentan respuestas satisfactorias y no satisfactorias en pensamiento variacional y sistemas algebraicos.

De acuerdo a que la prueba contiene 4 preguntas de tipo variacional, se genera una base de datos en donde se consigna por cada estudiante con cada pregunta, un 1 si la respuesta es correcta y 0 si no lo fue. Después se realiza un conteo con ayuda del programa Excel para mirar la cantidad de estudiantes que obtienen resultados favorables y desfavorables.

La columna horizontal de color verde significa la cantidad de estudiantes que acertaron en cada pregunta; por ejemplo, en lenguaje algebraico son 47 niños que acertaron y 50 que no.

Por tanto, la gráfica arroja resultados en donde son más los niños que no aciertan en cualquiera de las 4 preguntas que componen el pensamiento variacional.

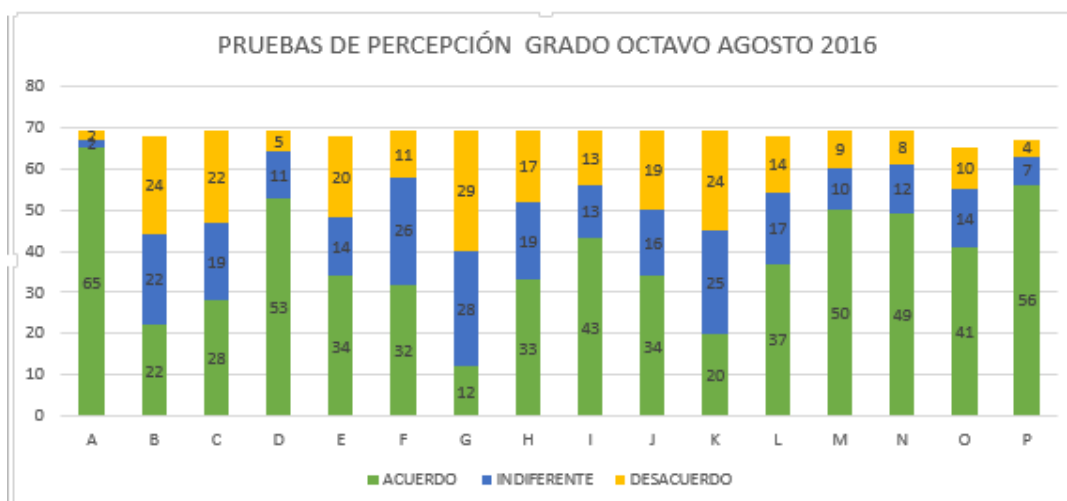
Es así, que el grupo de estudio se conforma por 66 estudiantes de grado octavo después de un proceso de observación con ellos. Inicialmente, este grupo fue escogido a partir de todo un seguimiento en el trabajo de aula por medio del diálogo, intercambio de saberes y compartir con ellos en otros espacios pedagógicos.

Desarrollo de pensamiento variacional a través de la letra en la iniciación al álgebra

A propósito de esclarecer los sentimientos de los estudiantes hacia las matemáticas, se diseñó y se aplicó una prueba de percepción.

Esta prueba de percepción contiene unos enunciados con respecto a sentimientos, actitudes, disposiciones e intereses frente a las matemáticas. Cada estudiante respondía el enunciado con un 1 si **ESTA DE ACUERDO**, 2 si **LE ES INDIFERENTE** y 3 si **NO ESTA DE ACUERDO** (Ver Anexo 1).

A continuación, se muestran los resultados en la siguiente gráfica.



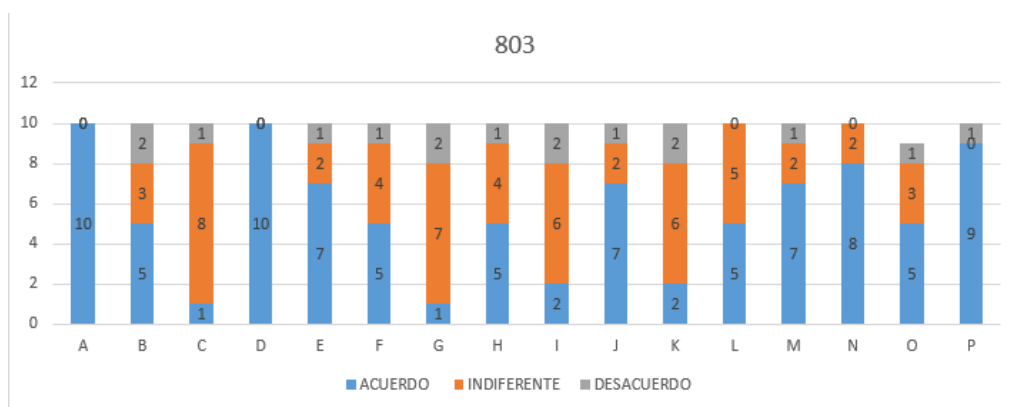
Gráfica 2. Prueba de percepción al grupo de estudio.

Las columnas que tienen color verde son los estudiantes que estaban de acuerdo con los enunciados, las de color azul los estudiantes indiferentes y las de color amarillo, los estudiantes que no estaban de acuerdo a los enunciados.

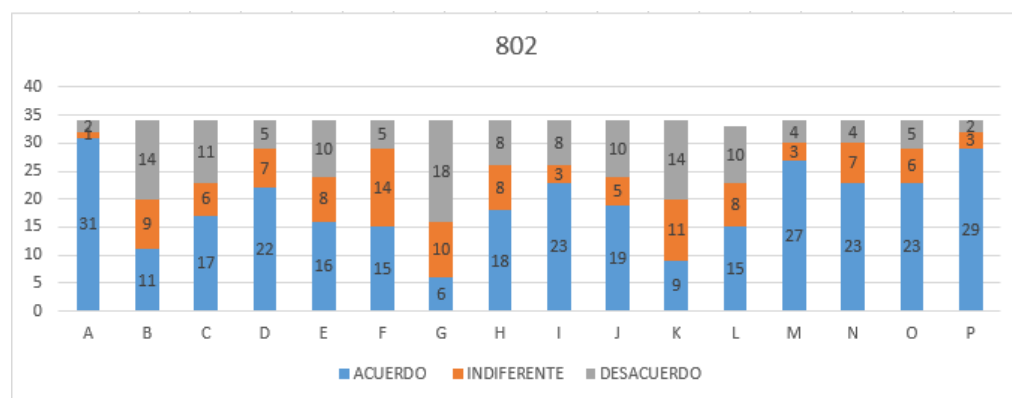
A partir de estos resultados, se puede apreciar que para los estudiantes es importante la clase de matemáticas y son conscientes de lo significativo que son ellas para su formación escolar de tal manera que si se lo propusieran, podrían profundizar y fortalecer conceptos matemáticos y sentirse menos nerviosos al resolver situaciones

problema. Sin embargo, no es de diversión ni de agrado para la mayoría de ellos, resolver ejercicios de matemáticas y compartir con otros un saber matemático.

Ya realizando una observación más puntual hacia cada uno de los cursos, quienes presentan mayores índices de indiferencia y desacuerdo con respecto a estas preguntas de percepción, eran los cursos 803 y 802 respectivamente (véanse gráfica 2 y gráfica 3). Por consiguiente, estos dos grupos serán con quienes se implemente la estrategia didáctica que se diseñó.



Gráfica 3. Prueba de percepción grado 803.



Gráfica 4. Prueba de percepción grado 802

Desarrollo de pensamiento variacional a través de la letra en la iniciación al álgebra

Igual que con la gráfica del grupo general, las columnas muestran la cantidad de estudiantes que están en acuerdo, desacuerdo o le es indiferentes los enunciados en la prueba de percepción con respecto a las actitudes y disposiciones frente a las matemáticas.

El grupo de estudio se dividió en dos: el GRUPO A, con quienes se implementará la estrategia didáctica que se diseñó y el GRUPO B con quienes se seguirá los procesos de enseñanza – aprendizaje usual. El grupo A está conformado por 44 estudiantes de los grados 802 y 803; el grupo B conformado por 22 estudiantes del grado 804.

A propósito de estos parámetros diagnósticos se diseña una propuesta didáctica compuesta por objetivos de aprendizaje que evidencie el desarrollo del pensamiento variacional a través de tres tipos de competencias: el saber qué, el saber para qué y el saber cómo.

Esta estrategia se compone en 4 fases, cada una de ellas con un conjunto de actividades que se desarrollan de manera secuencial el uso de la letra y sus aplicaciones.

8.2. Propuesta didáctica.

NOMBRE	Conceptualización y aplicación de la letra en la iniciación al álgebra		
OBJETIVO DE LA UNIDAD DIDÁCTICA	Propiciar el desarrollo y el fortalecimiento del pensamiento variacional mediante actividades que permita al estudiante conceptualizar, diferenciar, analizar y aplicar la formalización de lenguaje algebraico y el modelamiento de expresiones algebraicas.		
GRADO OCTAVO NUMERO DE ESTUDIANTES: 44	FECHAS DE APLICACIÓN	CONTENIDO TEMÁTICO	
	Semana 1. 5 al 10 de Septiembre	Fase 1. Letra en la iniciación al álgebra	
	Semana 2. 12 al 17 de Septiembre	Fase 2. Análisis de variabilidad	
	Semana 3. 19 al 24 de Septiembre	Fase 3. Modelamiento de situaciones	
	Semana 4. 29 al 30 de Septiembre	Fase 4. Prueba de Aprendizaje	

ASPECTOS DEL PENSAMIENTO VARIACIONAL			
<ul style="list-style-type: none"> • Identificar relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas. • Usar procesos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas. • Modelar situaciones de variación con funciones polinómicas. • Identificar diferentes métodos o técnicas para solucionar sistemas de ecuaciones lineales 			
OBJETIVOS DE APRENDIZAJE			
CONCEPTUAL – SABER QUÉ	ACTITUDINAL – SABER PARA QUÉ	EXPRESIVO – SABER CÓMO	
Interpretar, modelar y resolver por medio de expresiones algebraicas situaciones problemas de contexto cotidiano o geométrico.	Manifiesta interés, entusiasmo y compromiso por el estudio de las expresiones algebraicas evidenciando responsabilidad, orden y la sana convivencia.	Demuestra competencias en razonamiento lógico, manejo de procedimientos y trabajo en equipo al formular y resolver situaciones de variación en diferentes contextos cotidianos o formales.	
HISTORICIDAD DEL CONCEPTO			
<p>El uso de la letra en las matemáticas inicialmente se instaló como una notación simbólica para representar una cosa o alguien, estas notaciones inician con los egipcios y fueron trasladándose a los griegos, a los chinos y a los árabes haciendo representaciones a la escala de los números.</p> <p>Los árabes además de la representación numérica, establecieron el uso de la letra para representar generalizaciones, parámetros, cantidades desconocidas, formulas algebraicas que puedan servir como regla o principio para la construcción del conocimiento</p>			
MARCO TEÓRICO			
<p>Para la enseñanza de la letra en la iniciación al álgebra se debe tener en cuenta los estadios de aprendizaje que relaciona diferentes docentes que poseen didáctica de las matemáticas como Godino, Rojas, entre otros, quienes se basan en la interpretaciones de la letra que propone Küchemann (1978) como:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Letra evaluada • Letra ignorada • Letra como objeto • Letra como incógnita • Letra generalizada • Letra como variable 			
FASE 1. Letra en la Iniciación al álgebra			
PROPÓSITO	TEMAS	DESARROLLO	RECURSOS
Analizar los niveles en que se encuentra los estudiantes en el álgebra con relación a la letras y sus estadios de enseñanza – aprendizaje	Lenguaje algebraico (Letra y sus estadios de desarrollo).	<p>Primer momento Sensibilizar al estudiante sobre el desarrollo de la clase de matemáticas y la importancia que tiene su formación educativa en el álgebra</p> <p>Segundo momento Aplicar la prueba de percepción (<i>Ver Anexo 1</i>)</p> <p>Tercer momento Proyección del video, EL ALGEBRA EN SITUACIONES COTIDIANAS, https://www.youtube.com/watch?v=Rx4UF7OasKA</p> <p>A partir de aquel video realizar un discurso sobre el lenguaje algebraico</p> <p>Cuarto momento Con fichas elaboradas en cartulina exponer y discutir ejemplos de la aplicación de la letra y sus estadios en el álgebra.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Video beam • Cartulina y materiales para recortar y dibujar.
ASPECTOS A EVALUAR			

<ul style="list-style-type: none"> • La disposición del estudiante para con el desarrollo de la clase • Su participación y solución de dudas que se generan • La colaboración y desarrollo de actividad con otros • El tipo de nivel que se aprecia en el estudiante de acuerdo a las fichas elaboradas. <p>TODOS ESTOS ASPECTOS SERAN CONSIGNADOS EN UNA REJILLA DE EVALUACIÓN CUALITATIVA(<i>Ver Anexo 2</i>)</p>
--

FASE 2. Análisis de Variabilidad

PROPÓSITO	TEMAS	DESARROLLO	RECURSOS
Proponer y guiar a los estudiantes una serie de ejercicios que requiera el análisis de expresiones algebraicas a partir de fórmulas, patrones o regularidades	Expresiones algebraicas Valor numérico	<p>Primer momento Invitar a los estudiantes a continuar con el buen ánimo y la excelente disposición que han demostrado en la clase de matemáticas.</p> <p>Segundo momento Enumerar a cada uno de los niños de 1 a 9 y constituir grupos para desarrollar la siguiente actividad. (<i>Ver Anexo 3</i>)</p> <p>Tercer momento. Realizar rondas y guiar a los estudiantes en la solución de los problemas propuestos.</p> <p>Cuarto momento Socializar y discutir las soluciones</p>	<ul style="list-style-type: none"> • El taller impreso (<i>Anexo 3</i>)

ASPECTOS A EVALUAR

<ul style="list-style-type: none"> • La disposición del estudiante para con el desarrollo de la clase • Su participación y solución de dudas que se generan • El trabajo en equipo para con la solución de los problemas propuestos • El forma en que sustenta el estudiante <p>TODOS ESTOS ASPECTOS SERAN CONSIGNADOS EN UNA REJILLA DE EVALUACIÓN CUALITATIVA(<i>Ver Anexo 2</i>)</p>

FASE 3. Modelamiento de situaciones.

PROPÓSITO	TEMAS	DESARROLLO	RECURSOS
Dar lugar a las expresiones algebraicas en un contexto geométrico que le permita al estudiante transferir el lenguaje algebraico a la formulación de perímetros y áreas de figuras geométricas	Términos semejantes y multiplicación de expresiones algebraicas	<p>Primer momento Retroalimentar a los estudiantes sobre lo trabajado en clases anteriores, motivarlos a continuar con la buena disposición</p> <p>Segundo momento Invitar a los estudiantes a elaborar una región que combine figuras geométricas en un octavo de cartulina y escribirle una expresión algebraica con solo dos letras a cada lado de la figura.</p> <p>Tercer momento. Pegar las figuras en la pared y decirle a cada estudiante que debe escribir en el cuaderno el perímetro y el área de cinco figuras que le llame la atención</p> <p>Cuarto momento Revisar y dialogar con cada niño sobre la actividad</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Octavo de cartulina • Colores • Marcadores • Regla • Cinta

ASPECTOS A EVALUAR <ul style="list-style-type: none"> • La disposición del estudiante para con el desarrollo de la clase • Elaboración de regiones geométricas • El trabajo en equipo para con la solución de los problemas propuestos • La forma en que sustenta el estudiante TODOS ESTOS ASPECTOS SERAN CONSIGNADOS EN UNA REJILLA DE EVALUACIÓN CUALITATIVA (<i>Ver Anexo 2</i>)			
FASE 4. Prueba de Aprendizaje			
PROPÓSITO	TEMAS	DESARROLLO	RECURSOS
Implementar una prueba que permite evaluar el aprendizaje que adquirió el estudiante a partir de los contenidos trabajados en sesiones anteriores	Lenguaje algebraico Valor numérico Términos semejantes Regularidades	Primer momento Sensibilizar a los estudiantes sobre la prueba que presentaran, concientizarlos de resolverla teniendo en cuenta la lectura y lo trabajado en clase Segundo momento Resolver la prueba (<i>Ver Anexo 3</i>) Tercer momento. Socialización de la prueba	Prueba
ASPECTOS A EVALUAR <ul style="list-style-type: none"> • La disposición del estudiante para con el desarrollo de la prueba • Resultados de la prueba • La forma en que sustenta el estudiante su respuestas 			

Tabla 1. Unidad didáctica para el uso y aplicación de la letra que busca desarrollar el pensamiento variacional.

8.3. Ejecución y análisis de las fases de la propuesta didáctica

Acorde a las fechas propuestas se dio paso al desarrollo de las fases.

8.3.1. Fase 1. Letra en la iniciación del algebra.

Esta fase con un tinte introductorio para el uso de la *letra*, después de la sensibilización y la exposición del video, se realiza un compartir 20 fichas con enunciados matemáticos para interpretar con los estudiantes y de allí poder identificar el estado de la *letra* que se encuentra en la mayoría de los estudiantes y su nivel de razonamiento.

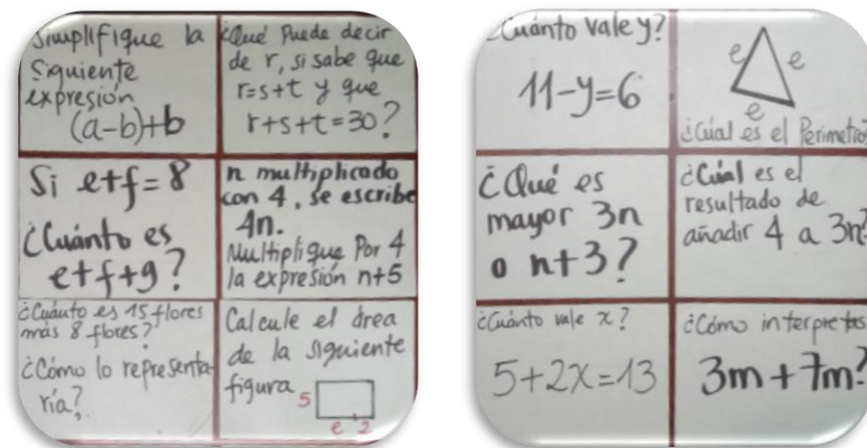


Imagen 1. Algunos ejemplos de las fichas con enunciados matemáticos que se trabajaron en el aula para identificar la interpretación y el nivel de razonamiento de la letra.

En dicha observación se estableció que los estudiantes pertenecientes al grupo A posee al menos 4 de las 6 interpretaciones de la *letra* con un tipo de razonamiento operacional concreta nivel superior y operacionalidad formal nivel bajo; en algunos casos los estudiantes mostraban un razonamiento tipo operacional formal nivel superior.

Estos niveles de razonamiento y los usos de *letra* que estaban manifestando los estudiantes permitían al docente establecer aquellas conexiones adecuadas para con los estudiantes de orientación para el desarrollo de las próximas actividades en las siguientes fases.

8.3.2. Fase 2. Análisis de variabilidad

Enumerando a los estudiantes del 1 al 9 para conformar 9 grupos se busca inicialmente que ellos queden distribuidos no con sus compañeros usuales, de esta manera se invitó a ellos de que se permitieran compartir con otros compañeros con quienes no suelen hacerlo y así se contribuya a la construcción del conocimiento matemático.

Desarrollo de pensamiento variacional a través de la letra en la iniciación al álgebra

Realizando rondas en donde se pudiera orientar, explicar y guiar al estudiante y sus compañeros de grupo, se podían esclarecer los aspectos del pensamiento variacional expuestos, se fortalece en el lenguaje algebraico a través de la *letra*; algunos estudiantes no estaban cómodos inicialmente de trabajar con otros estudiantes con quienes nunca habían compartido, pero al indicarles lo importante del trabajo en equipo para el desarrollo de actividades en matemáticas y que ese tipo de manifestaciones entre ellos se valoraba para la evaluación, evidenciaron otra postura para con la actividad.

Este tipo de actitudes de los estudiantes permiten entre ellos conocerse y establecer relaciones de respeto y equidad, no se sentirán excluidos por su tipo de conocimiento pero estarán comprometidos en enseñar y aprender con su semejante en forma cooperativa que se encaminen a cumplir los objetivos de aprendizaje.

Finalmente, cuando cada grupo dice terminar el taller y haberlo entendido se procede a socializar el taller para esclarecer dudas y discutir distintas formas de solución.

En este momento se fortalece la participación ya que de alguna manera posee unas herramientas para hacerlo. El estudiante comprende el ejercicio y es consciente de cómo lo resolvió, por tanto, es capaz de defender su idea y su argumento con propiedad.

Muchos de los estudiantes se atrevieron a ser dueños de los marcadores y pasar al tablero a explicar el cómo resolvió un ejercicio, otros refutaban o simplemente estaban de acuerdo.



Imagen 2. Estudiante explicando un ejercicio.

Se evidenció un cambio notorio actitudinal en cada grupo, ya que el ambiente se transformó desde el transcribir y hacer lo que el docente les indicaba a que los estudiantes participaran y tuvieran en claro el taller a realizar, con quienes y como, a ser conscientes de que debían de alguna manera establecer un discurso matemático para resolver estos ejercicios con el fin de defender o refutar una idea.

El taller propuesto para esta segunda fase, contiene una serie de ejercicios que cumplen con los aspectos que caracterizan al pensamiento variacional, haciendo uso de la *letra* en sus diferentes interpretaciones y aplicaciones:

- Valor numérico a las expresiones matemáticas. Los estudiantes debían completar una tabla donde daban valor a unas *letras* dentro de una expresión matemática.

- Las regularidades o secuencias. los estudiantes describían el patrón de la secuencia y determinaban una regla y una expresión matemática acorde a la regularidad
- Ecuaciones y balanzas. Para este punto los estudiantes planteaban y resolvían una ecuación que se veía desde un gráfico de balanzas. Allí, los estudiantes determinaban que objeto en el gráfico representaba la variable y que objetos representaban valores conocidos.
- El comportamiento del crecimiento de una planta con el paso de los días desde una gráfica. El estudiante tomaba registro en una tabla a partir de la gráfica, analizaba las variables involucradas y su dependencia o independencia.

8.3.3. Fase 3. Modelamiento de situaciones.

En esta fase cada estudiante debía dibujar una región geométrica y a cada uno de sus lados escribir una expresión algebraica. En intercambio de estos dibujos cada estudiante planteaba el perímetro de la región geométrica de cinco de sus compañeros y debía tratar de simplificar ese planteamiento.

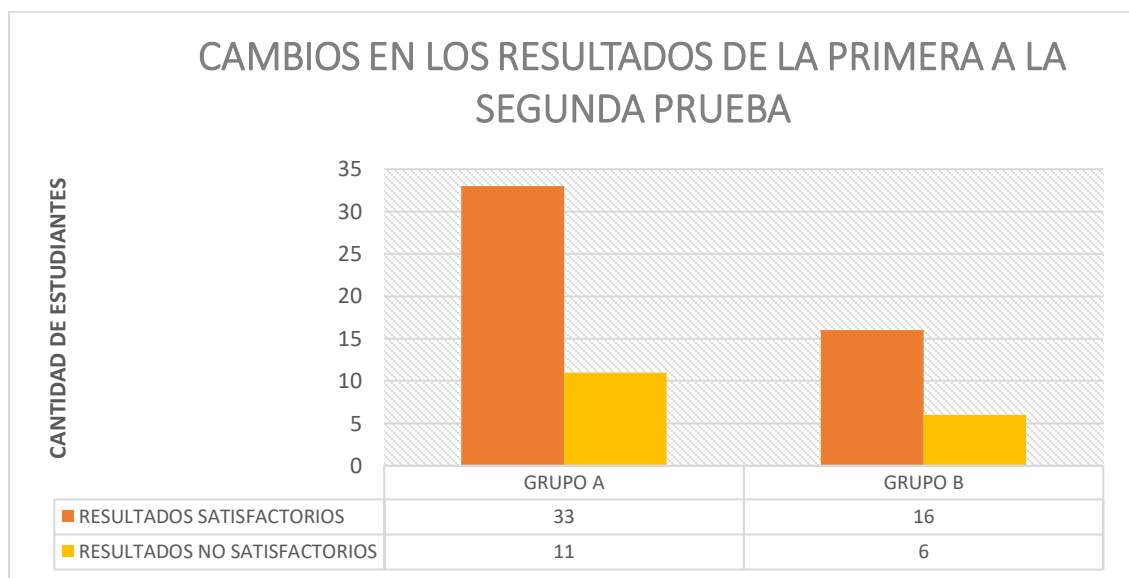
Con esta actividad la reducción de términos semejantes juega un papel importante, ya que los estudiantes comienza a identificar que letras puede operarse, ellos mismos dan cuenta que por ejemplo no es posible que una x se sume con una y , o que una x se reste con un x^2 .

Esto anterior gracias a la familiarización con la letra que han venido ganando los estudiantes en actividades anteriores.

8.3.4. Fase 4. Prueba de aprendizaje

La prueba de aprendizaje está compuesta por seis preguntas de acuerdo con lo trabajado en las fases anteriores. Para su diseño, se tomaron y modificaron preguntas de la pruebas SABER del grado Noveno del año 2016.

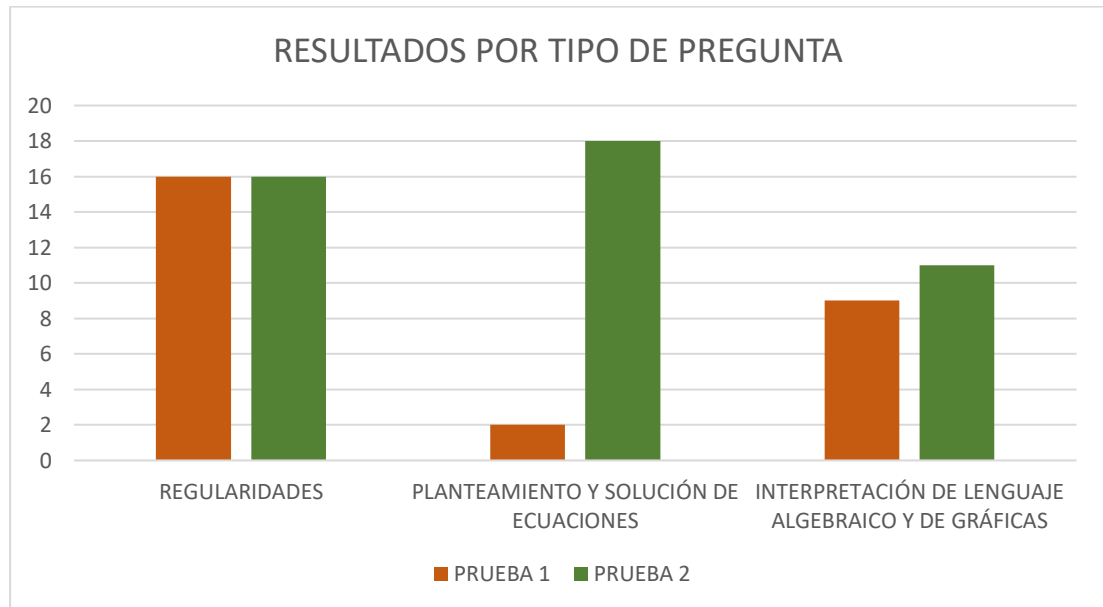
Como se hizo con la primera prueba de competencias, los resultados de cada estudiante se digitaron en una base de datos. Las gráficas resultantes fueron:



Gráfica 5. Cambios en los resultados de la primera a la segunda prueba por competencias

Esta gráfica muestra la cantidad de estudiantes que obtuvieron resultados satisfactorios de la primera a la segunda prueba. Con resultados satisfactorios se refieren a que 33 estudiantes aumentaron al menos en una pregunta acertada en el grupo experimental, eso es un avance en un estudiante de más con respecto a la proporción del grupo B que obtuvo resultados satisfactorios.

Ya analizando propiamente el grupo A nos basamos en la siguiente gráfica:

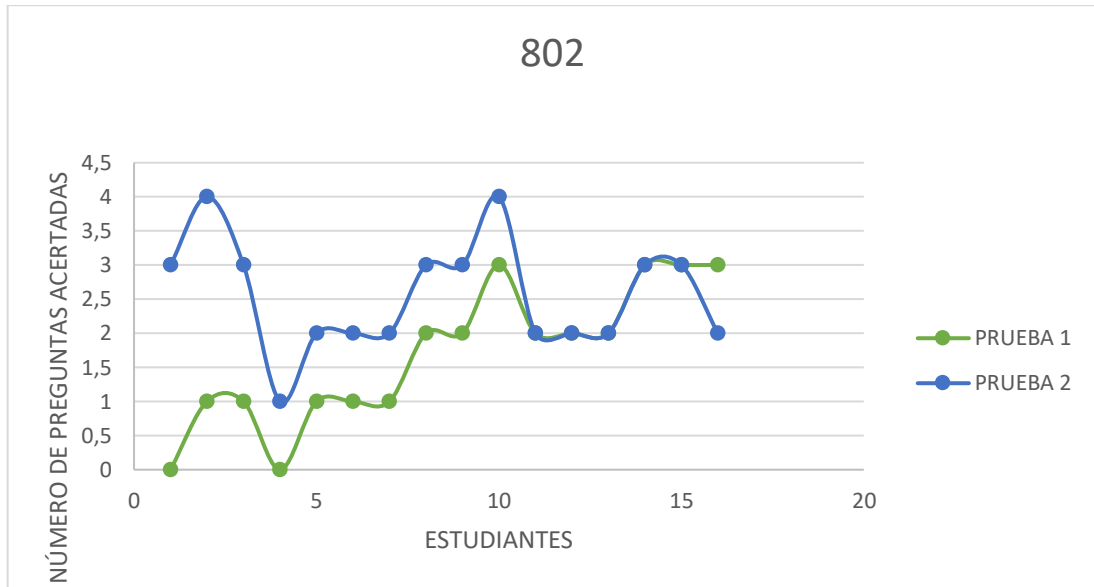


Gráfica 6. Resultados de cada tipo de pregunta en el grupo experimental

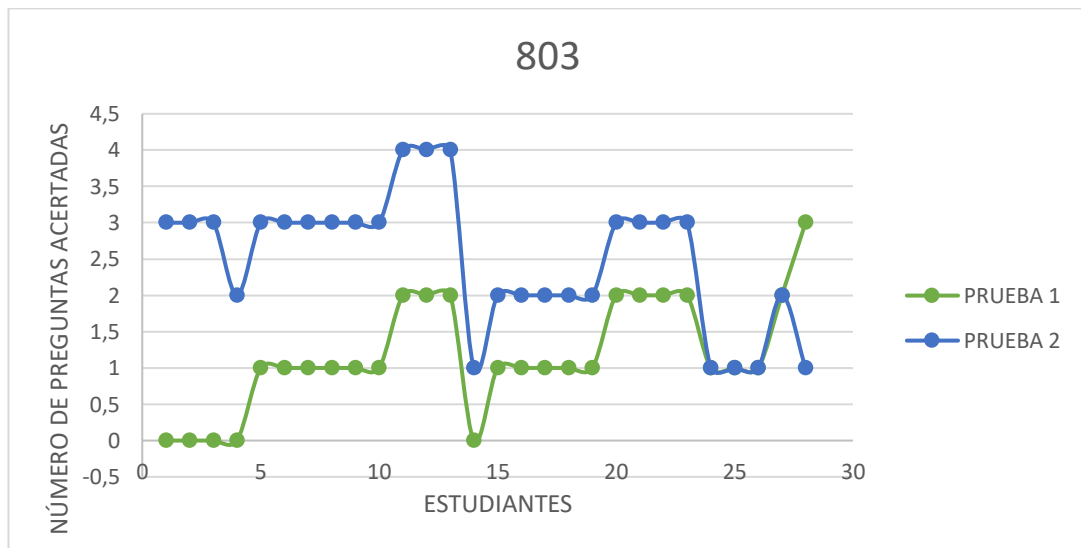
Esta grafica muestra tres tipos de preguntas que componen el pensamiento variacional, en ella se puede ver que la pregunta de Regularidades mantiene una misma proporción en aciertos tanto en la primera como en la segunda prueba. En cambio, en planteamiento y solución de ecuaciones como en interpretación de lenguaje algebraico y de gráficas, hay un incremento notable y otro leve respectivamente.

Esto significa, que los estudiantes fortalecieron pensamiento variacional específicamente en la *letra* interpretada como variable. Es decir, cuando se plantea ejercicios de algún valor desconocido los estudiantes pueden desenvolverse más fácilmente por este reto, pues adquirieron diferentes técnicas de solución y fue notorio su entusiasmo en este tema según lo que se vivenció en el aula. Mientras que aún se requiere mayor profundización en el modelamiento y solución de regularidades o secuencias y en la interpretación de gráficas y del lenguaje algebraico.

Observando los resultados por cada uno de los estudiantes vemos los siguientes gráficos.



Gráfica 7. Resultados de las pruebas por cada estudiante del grado 802.



Gráfica 8. Resultados de las pruebas por cada estudiantes del grado 803.

Cada punto de la gráfica representa un estudiante del grupo A, y las líneas determinan el rendimiento de cada estudiante según cada prueba, la línea verde representa la primera prueba y la línea azul representa la segunda prueba.

Estos resultados dan cuenta que los estudiantes pertenecientes al grupo A evidencian un notable progreso de una prueba a otra en la mayoría de ellos. Es decir, que la estrategia implementada fue de gran ayuda para el desarrollo del pensamiento variacional.

Para quienes no mostraron progreso o se mantuvieron constantes, es necesario reflexionar que aspectos de la propuesta didáctica habrán fallado o que tipos de orientaciones deban modificarse para con estos niños, siempre con el propósito de mejorar sus conocimientos en las matemáticas y de estimular en ellos su gusto por esta disciplina.

8.4. Evaluación

Como pudo entenderse en todo el capítulo del desarrollo de la investigación, la evaluación siempre está presente en cada uno de los momentos vividos del proyecto investigativo; desde la caracterización y planteamiento del problema hasta el análisis de los resultados obtenidos, se realiza una evaluación de tipo cualitativo ya que se tiene en cuenta el desenvolvimiento del estudiante, su participación, su discurso matemático, su técnica al resolver los ejercicios propuestos, su capacidad de defender sus argumentos, su estilo en plantear y proceder a la solución de ejercicios, su actitud frente a la clase, su respeto hacia el ritmo de aprendizaje de sus otros compañeros, su entusiasmo y disposición por desarrollar este tipo de actividades, entre otras cosas.

Desde esta perspectiva, el proyecto investigativo en el uso de los instrumentos estadísticos ayudan a observar y confirmar este tipo de aspectos que manifiesta el estudiante mencionados en el párrafo anterior, pero no son fundamentales.

Desarrollo de pensamiento variacional a través de la letra en la iniciación al álgebra

Como este proyecto investigativo se basa en una metodología de investigación acción, la evaluación permanente permite estar en constante reflexión de acuerdo al saber enseñado, lo que sugiere estar atento a cualquier tipo de modificación o reconfiguración de cualquiera de las propuestas didácticas que se diseñen.

De la misma manera en que se motivó a los estudiantes a realizar la propuesta didáctica, se invita a que realicen observaciones acerca de ella y su realización, según sus opiniones se destacan:

“Durante este año que vimos algebra, aprendimos a resolver ecuaciones de una forma más didáctica, lo que motivo a distintos compañeros a motivarse por las matemáticas, a participar y resolver más ecuaciones de forma más sencilla”.

Oscar Pava, 803

“Profe: como el álgebra necesita el uso de variables, se deben realizar más ejercicios de este estilo para entender mejor el álgebra”

Dayana Hernández, 802

“Este año vimos ecuaciones a través de balanzas, lenguaje algebraico que es la representación simbólica de las matemáticas que se ve en la vida cotidiana, muchos de mis compañeros que no les interesaba la clase, se notó un cambio en estar más cómodos con la clase”

Rosa Miranda, 803

Estas observaciones de estos niños permiten observar que valoran este tipo de estrategias, pues reconocen que las matemáticas son de gran importancia para su desenvolvimiento en su entorno y el álgebra fortalece el desarrollo del pensamiento variacional para adquirir habilidades en las matemáticas.

9. Conclusiones.

A través de este proyecto investigativo se logró en gran medida el fortalecimiento de la práctica pedagógica del docente como profesional en su disciplina y con dificultades en su tipo de enseñanza, haciendo uso de herramientas teóricas de tipo cualitativo con el propósito de mejorar las prácticas de enseñanza que posibiliten la mediación entre el estudiante, el docente y el saber matemático.

No obstante, estas sensaciones no son absolutas pues se es consciente de que en el recorrido de esta profesión siempre surgirán nuevos retos y obstáculos que hacen de este trabajo una completa exploración y reflexión de quehacer educativo con el fin de mejorar y transformar la realidad del estudiante, la enseñanza de las matemáticas y la práctica del docente en esta área.

Realizar un trato más humanizante con el propósito de comprender el contexto de los estudiantes permite generar estrategias pedagógicas y didácticas que beneficien al estudiante y contribuya a construir conocimiento matemático de una forma mucho más agradable y estimulante para con ellos. Es así, que se evidencia un mayor acercamiento entre el docente y los estudiantes que ayuda a mediar y reconfigurar aquellos saberes que circulan en el aula y problematizan los procesos de enseñanza – aprendizaje por medio de la creación del taller de la fase 2, que estaba compuesta por un conjunto de actividades que buscara desarrollar el pensamiento variacional.

Además, la evaluación en matemáticas gracias a este proyecto investigativo, aísla el aprendizaje de un estudiante representada en un número y en cambio, instala de una manera paulatina una nueva manera de observar al estudiante y destacar en él sus talentos, capacidades o habilidades para con las matemáticas, respetando su ritmo de aprendizaje y

Desarrollo de pensamiento variacional a través de la letra en la iniciación al álgebra

sus actitudes frente a esta asignatura, facilitando la observación y si se lograron los objetivos propuestos del saber, el saber cómo y el saber para qué.

Permitirse realizar investigación en la práctica pedagógica contribuye a una mejor adaptación al entorno en que se desenvuelve uno como docente, invitando a transformarla y enriquecerse de manera recíproca por los conocimientos y saberes que existan en aquel entorno que motive en contribuir en el PEI de la institución, teniendo en cuenta que no existe verdad absoluta y que aunque cada docente sea el experto y posea dominio de su disciplina a la cual fue formado, este docente nunca dejará de aprender también de sus estudiantes, de su práctica, de sus colegas y de los contextos que por diferentes factores externos siempre están en constante cambios.

La didáctica establece un mecanismo que debe ser exhaustivamente estudiado para aplicarlo adecuadamente, desde el punto de vista pedagógico posibilita la reflexión de quehacer educativo y ayuda a reconocer los saberes que circulan en el aula y en la escuela alrededor de las matemáticas.

La reflexión será su más poderosa arma para transformar, enriquecer y contribuir a los proyectos de vida en cada uno de sus estudiantes a quienes se les encomendó para formarlos en el conocimiento y se confronten estos de una manera positiva en la vida.

10. Bibliografía

- Abero, L. Berardi, L. Capocasale, A. García M, S. y Rojas S, R. (2015, Marzo). *Investigación Educativa*. Montevideo, Uruguay: Contexto S.R.L.
- Amaya, T. Chacuanes, A. Escorcía, J. Medrano, A. Lopez, A. y Theran, E. (2009). Estrategias para potenciar el pensamiento variacional. En *Acta latinoamericana de Matemática Educativa*. México D.F. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. p.p. 739 – 746. Recuperado de <http://funes.uniandes.edu.co/4920/>
- Anacona, M. (2003). *Historia de las matemáticas*. Cali, Colombia. Revista EMA, vol. 8 p.p. 30 – 46.
- Astolfi, J.P. (1997). *Conceptos claves en la didáctica de las disciplinas*. Sevilla, España. Boeck y Larcier, p.p. 73 – 81.
- Chevillard, Y. (1991). *La transposición didáctica, Del saber sabio al saber enseñado*. Madrid, España, p.p. 7 – 46.
- Godino, J. (2004). *Didáctica de las matemáticas para maestros*. Recuperado de <http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/>
- Ley general de Educación. (Ley 115) (Febrero 8 de 1994). Congreso de la Republica de Colombia. Recuperado de <http://www.mineduccion.gov.co/1621/article-85906.html>
- Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos Curriculares en Matemáticas*. Recuperado de http://www.mineduccion.gov.co/1759/articles-339975_matematicas.pdf
- Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencias*. Recuperado de <http://www.mineduccion.gov.co/1759/w3-article-340021.html>

Desarrollo de pensamiento variacional a través de la letra en la iniciación al álgebra

- Múnera, C. J. (2011, abril). *Una estrategia didáctica para las matemáticas escolares desde el enfoque de situaciones problema*. Medellín, Colombia. Revista de Educación y Pedagogía, vol. 23, p.p.179-193.
- Paramo, P. (2011). *La investigación en ciencias sociales: estrategias de investigación*. Bogotá D.C., Colombia. Universidad Piloto de Colombia, p.p. 267 – 287.
- Rojas G. P., Rodríguez B. J., Romero C. J., Castillo E. E. y Mora V. L., (1999). *La transición Aritmética – Algebra*. Bogotá D.C., Colombia. Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- Sandoval C, C. (2002). Investigación Cualitativa. En Briones, G. *Especialización en teorías, métodos y técnicas de investigación social*. Bogotá D.C., Colombia: ARFO editores e impresores Ltda.
- Secretaria de Educación del distrito, Oficina asesora de planeación y grupo gestión de información. (2015). *Caracterización del sector educativo localidad Ciudad Bolívar*. Bogotá D.C., Colombia. Recuperado de http://www.educacionbogota.edu.co/archivos/SECTOR_EDUCATIVO/ESTADISTICAS_EDUCATIVAS/2015/19-Perfil_localidad_de_Ciudad_Bolivar.pdf
- Socas, M. M., Camacho, M., Paralea, M. y Hernández, J. (1996). *Iniciación al álgebra*. Madrid, España: Síntesis.
- Vasco U. C., (2006, Marzo). *Siete Retos de la educación Colombiana en el periodo 2006 al 2019*. Universidad EAFIT de Medellín, Colombia. Recuperado de <http://eduteka.icesi.edu.co/pdfdir/RetosEducativos.pdf>

Desarrollo de pensamiento variacional a través de la letra en la iniciación al álgebra

- Vasco U, C. (2003). *El pensamiento variacional y la modelación matemática*. Universidad del valle, Universidad de Manizales. Colombia. Recuperado de https://scholar.google.com.co/scholar?q=related:dUOporkwrGoJ:scholar.google.com/&hl=es&as_sdt=0,5&as_vis=1

11. ANEXOS

Anexo 1. Prueba de percepción



COLEGIO SIERRA MORENA
INSTITUCIÓN EDUCATIVA DISTRITAL
Localidad Ciudad Bolívar
Resolución 7561 de Noviembre 24 de 1998 y 8627 de Noviembre 29 de 2001 de Preescolar a
11ª Resolución de Integración No. 1999 del 28 de Junio de 2002
Por una Institución viva activa planeada y proyectada al siglo XXI



PRUEBA DIAGNÓSTICA DE PERCEPCIÓN

Escriba el número 1. SI ESTA DE ACUERDO, 2. SI LE ES INDIFERENTE y 3. SI NO ESTA DE ACUERDO, en el espacio en blanco al frente de cada afirmación.

- A. Considero las matemáticas como una asignatura muy necesaria en mis estudios _____
- B. La asignatura de matemáticas se me da bastante mal. _____
- C. Utilizar las matemáticas es una diversión para mí. _____
- D. Quiero llegar a tener un conocimiento más profundo de las matemáticas. _____
- E. Las matemáticas son una de las asignaturas que más temo. _____
- F. Tengo confianza en mí cuando me enfrento a un problema de matemáticas. _____
- G. Me divierte el hablar con otros de matemáticas. _____
- H. Las matemáticas son agradables y estimulantes para mí. _____
- I. Espero tener que utilizar poco las matemáticas en mi proyecto de vida _____
- J. Trabajar con las matemáticas hace que me sienta muy nervioso/a. _____
- K. No me altero cuando tengo que trabajar en problemas de matemáticas. _____
- L. Me provoca una gran satisfacción el llegar a resolver problemas de Matemáticas. _____
- M. Para mi futuro las matemáticas son una de las asignaturas más importantes que Tengo que estudiar. _____
- N. Si me lo propusiera creo que llegaría a dominar bien las matemáticas. _____
- O. Poseo interés por el aprendizaje en las matemáticas _____
- P. Busco ayuda en el docente o en algún compañero para aclarar mis dudas que tengo en la clase de matemáticas _____

Anexo 2. Rejilla de observación y análisis para cada fase.



COLEGIO SIERRA MORENA
INSTITUCIÓN EDUCATIVA DISTRITAL
Localidad Ciudad Bolívar
Resolución 7561 de Noviembre 24 de 1998 y 8627 de Noviembre 29 de 2001 de Preescolar a
11ª Resolución de Integración No. 1999 del 28 de Junio de 2002
Por una Institución viva activa planeada y proyectada al siglo XXI



REJILLA DE OBSERVACION Y ANÁLISIS

CURSO: _____ FECHA: _____

NOMBRE ESTUDIANTE	ACTITUD	PARTICIPACION	No. DE FICHA	NIVEL QUE SE OBSERVA

ACTITUD: Se refiere a observar la disposición del estudiante, su puntualidad, su toma de apuntes, su solución de dudas.

PARTICIPACIÓN: Analizar el tipo de intervención que hace el estudiante.

NIVEL QUE SE OBSERVA: Se refiere a los tipos de nivel que propone el autor Pedro Rojas y el grupo PRETEXTO, en el libro *LA TRANSICION ARITMETICA – ALGEBRA, Año 1999.*

Desarrollo de pensamiento variacional a través de la letra en la iniciación al álgebra

Anexo 3. Observaciones se consignaban en la rejilla del anexo 1.

COLEGIO MARIA MORENO
INSTITUCION EDUCATIVA ORIENTAL
Luis Beltrán Cordero Rojas
Pasadizo 1981 de Noviembre 24 de 1989 y 1997 en Noviembre 28 de 2007 de Presidencia y
17 de Noviembre de 1999 1999 2007 en Noviembre 28 de 2007
Por una institución que busca planearla y proyectarla al siglo XXI

REJILLA DE OBSERVACION Y ANALISIS
CURSO 8^o FECHA 6 Septiembre 2010

NOMBRE ESTUDIANTE	ACTITUD	PARTICIPACION	No DE FICHA	NIVEL QUE SE OBSERVA
Yohanna Quiroz	no participa		5	0
Thon Pérez				0
Soyda Arias		no participa	1	0 la sustancia (11-2)
Wendy Ceballos				
Orlando Calderón	no participa	no participa	2	0 Evaluacion como sustancia
Edwin Sierra		no participa		
Fernando Valencia		no participa	2, 4	0 la sustancia - materia
Isabella Burbules			5-2	0 los abstracciones
David Alfonso		no participa		
María Beltrán		no participa	2	0 la sustancia - materia
David Mantecón			2	0 la sustancia - materia
Diana Hernández			4	0 la sustancia - materia
Jaura Bravo			4	0 la sustancia - materia
Jaura Saenz			4	0 la sustancia - materia
Isabella Burbules			4, 7	0 la sustancia - materia
Isabella Hernández			6	0 la sustancia - materia
María Cortes			6	0 la sustancia - materia
Marcos Dierke			6	0 la sustancia - materia
Yago Jimenez			2	0 la sustancia - materia
María Paula			9	0 la sustancia - materia
Isabella Burbules			9	0 la sustancia - materia
Diana Capon			10	0 la sustancia - materia
Isabella Burbules			10	0 la sustancia - materia
Valentín Escobar			11	0 la sustancia - materia
Paola Mora			11	0 la sustancia - materia
Isabella Burbules			12	0 la sustancia - materia
Isabella Burbules			13	0 la sustancia - materia
Yago Jimenez			14	0 la sustancia - materia
Isabella Burbules			14	0 la sustancia - materia

ACTITUD: Se refiere a observar la disposición del estudiante, su puntualidad, su toma de apuntes, su solución de dudas.
PARTICIPACION: Analizar el tipo de intervención que hace el estudiante.
NIVEL QUE SE OBSERVA: Se refiere a los tipos de nivel que propone el autor Pedro Rojas y el grupo de autores en el libro LA TRANSICION ALGEBRAICA 1 - 41/25/94 - 486 - 1999

Anexo 4. Taller correspondiente a la fase 2.

COLEGIO MARIA MORENO
INSTITUCION EDUCATIVA ORIENTAL
Luis Beltrán Cordero Rojas
Pasadizo 1981 de Noviembre 24 de 1989 y 1997 en Noviembre 28 de 2007 de Presidencia y
17 de Noviembre de 1999 1999 2007 en Noviembre 28 de 2007
Por una institución que busca planearla y proyectarla al siglo XXI

Resuelve las siguientes situaciones

1. Completa las siguientes tablas

$x + x + x$	$2x + x$	$3x$
1	2	3
2	3	4
3	4	5
4	5	6
5	6	7
6	7	8
7	8	9

$3x + 2y$	2	4	7
1	3	14	
3	12	14	
5			
7			
9			

2. Compara las tablas del punto anterior y escribe qué relación existe entre las expresiones matemáticas

DE ACUERDO A LA SIGUIENTE GRAFICA CONTESTE LA PREGUNTA 3 Y 4

3. Cuál sería el número de triángulos en la figura 4 y en la figura 10

4. Qué expresión matemática representa el número triángulos de acuerdo al número de la figura.

5. Escribe una ecuación que represente el grafico y resuélvela

COLEGIO MARIA MORENO
INSTITUCION EDUCATIVA ORIENTAL
Luis Beltrán Cordero Rojas
Pasadizo 1981 de Noviembre 24 de 1989 y 1997 en Noviembre 28 de 2007 de Presidencia y
17 de Noviembre de 1999 1999 2007 en Noviembre 28 de 2007
Por una institución que busca planearla y proyectarla al siglo XXI

Sigue la siguiente instrucción: Escribe un número, Súmale el número que le sigue, Suma 9 al resultado anterior, Divide por 2, Resta el primer número. ¿Qué puedes decir acerca de este ejercicio?

¿Cómo puedes mostrar que siempre se puede "adivinar" el resultado final?

Crecimiento de una planta. De acuerdo a la siguiente grafica completa la tabla y contesta las preguntas

Tiempo (t)	Altura (A)	Cambio
0	0	
2	1	
4	2	
6	3	
8	4	
10	5	
12	6	
14	7	
16	8	
18	9	
20	10	
22	10	
24	10	

a) ¿Qué puedes decir acerca del crecimiento de la planta?
b) ¿En qué momento la planta crece más rápido?
c) Si el crecimiento de la planta podría ser un modelamiento matemático ¿Cuál sería la variable dependiente e independiente?


6. Completa la tabla con la siguiente regularidad geométrica y contesta las preguntas

Figura	1	2	3	4	5	6	7	8
Número de triángulos								

a) ¿Cuántos triángulos habría en la figura 12?
b) ¿Qué regla podrías proponer con respecto a la secuencia?
c) ¿Qué expresión matemática sería la apropiada para esta secuencia y que cumpla la regla?

Anexo 5. Prueba de aprendizaje fase 4.

PRUEBA POR COMPETENCIAS PARA EVALUAR EL PENSAMIENTO VARIACIONAL MATEMÁTICAS 8	PERIODO 4 2016
--	---------------------------



COLEGIO SIERRA MORENA Sede A – I.T
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
PROFESORA: Julieth Tamayo

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN: DESARROLLO DE PENSAMIENTO VARIACIONAL EN LA INICIACIÓN AL ÁLGEBRA

- Lea antes de comenzar a contestar.
- En la hoja cuadrículada, escribe los procedimientos que sustenten cada respuesta.
- Marque la opción correcta en la hoja de respuestas.

TIPO: SELECCIÓN MÚLTIPLE, RESPUESTA ÚNICA. Las siguientes preguntas están formadas por un enunciado y cuatro posibles respuestas de las cuales una es correcta.

1. Los expertos en obras de construcción afirman que una construcción de determinadas características toma un tiempo que puede expresarse de la siguiente manera

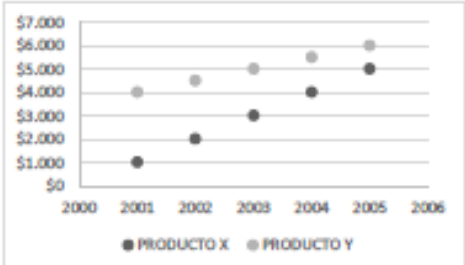
$$t = \frac{3p^2}{q}$$

Donde
t: tiempo en años
p: Número de pisos en la obra
q: Número de trabajadores en la obra

Si se está construyendo un edificio de 15 pisos y se contratan 100 empleados, ¿Cuánto tiempo tardaran en terminar la obra?

A. Aproximadamente 1 año
B. Exactamente 6 años
C. Aproximadamente 7 años
D. No es posible determinar

2. La gráfica muestra el precio por kilo de dos productos, X e Y, durante los años 2001, 2002, 2003, 2004 y 2005.



Una persona pagó \$ 21.000 por la compra de dos kilos X y tres kilos del producto Y. ¿En qué año se realizó la compra?

A. En el año 2001
B. En el año 2002
C. En el año 2003
D. En el año 2004

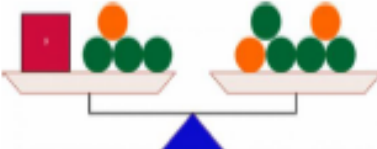
3. Un niño de grado octavo dibujó un rectángulo cuyo lado y ancho miden $x + 2b$ y $2x + a - b$, respectivamente. ¿Cuál expresión representa el perímetro del rectángulo?

A. $3x + b + a$
B. $6x + 2b + 2a$
C. $2x + 4b + 4x + 2a - 2b$
D. No es posible determinar

3. ¿Cuál es la expresión que permite calcular el número de círculos correspondientes a la posición n?

A. n B. n + 1 C. n(n + 1) D. n + (n - 1)

6. En la prueba pasada por competencias uno de los niños del grado octavo resolvió el siguiente ejercicio así:



LAS BOLAS CLARAS REPRESENTAN NÚMEROS NEGATIVOS Y LAS OSCURAS REPRESENTAN NÚMEROS POSITIVOS. El estudiante afirma


que la expresión matemática de la balanza es $x + 2 = 2$ y solución es $x = 0$. ¿Qué puedes decir acerca de la afirmación del niño?

A. Falsa, pues la ecuación no corresponde a la gráfica
B. Verdadera, pues la ecuación y la solución corresponde a la gráfica
C. Falsa, pues la ecuación debe ser $x - 2 = 2$
D. Verdadera, al mover las bolas en la balanza despejando el cuadrado se cancelan entre ellas.


A Continuación, las siguientes preguntas están dirigidas a conocer como es su sentir entorno al nuevo aprendizaje que adquirió con los sistemas algebraicos. Es decir, con el uso de la letra en las matemáticas. Por favor contéstelas con completa honestidad colocando en el espacio en blanco 1. SI ESTA DE ACUERDO, 2. SI LE ES INDIFERENTE y 3. SI NO ESTA DE ACUERDO.

7. Considero las matemáticas como una asignatura muy necesaria en mis estudios _____
8. La asignatura de matemáticas se me da bastante mal. _____
9. Utilizar las matemáticas es una diversión para mí. _____
10. Quiero llegar a tener un conocimiento más profundo de las matemáticas. _____
11. Las matemáticas son una de las asignaturas que más temo. _____
12. Tengo confianza en mí cuando me enfrento a un problema de matemáticas. _____
13. Me divierte el hablar con otros de matemáticas. _____
14. Las matemáticas son agradables y estimulantes para mí. _____
15. Espero poder utilizar poco las matemáticas en mi proyecto de vida _____
16. Trabajar con las matemáticas hace que me sienta muy nervioso/a. _____
17. Me provoca una gran satisfacción el llegar a resolver problemas de Matemáticas. _____
18. Para mi futuro las matemáticas son una de las asignaturas más importantes que tengo que estudiar. _____
19. Si me lo propusiera creo que llegaría a dominar bien las matemáticas. _____
20. Poseo interés por el aprendizaje en las matemáticas _____
21. Busco ayuda en el docente o en algún compañero para aclarar mis dudas que tengo en la clase de matemáticas _____


OBSERVA LA SECUENCIA Y CONTESTA LAS PREGUNTAS 4 Y 5



POSICIÓN 1



POSICIÓN 2



POSICIÓN 3

4. De acuerdo al patrón mostrado en la secuencia, ¿Cuál es la

Desarrollo de pensamiento variacional a través de la letra en la iniciación al álgebra

Anexo 6. Tablas de datos.

GRUPO DE ESTUDIO		REGULARIDADES	PLANTEAMIENTO	SOLUCIONES	ALGORITMO		ANÁLISIS	GRUPO	SECUENCIA	REGULARIDADES	MODALIDADES	REGULARIDADES	DIFERENCIA							
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14							
1	802	BELTRAN SIERRA	CARLOS STIVEN	0	0	0	0	0	0	0	0%	1	0	1	1	0	3	60%	60%	3
2	802	HERRERA VASQUEZ	DAVID	0	1	0	0	0	1	1	25%	1	1	1	1	0	4	80%	55%	3
3	802	RODRIGUEZ MORALES	GILBER ALEJANDRO	0	0	0	1	1	1	1	25%	0	1	1	1	0	3	60%	35%	2
4	802	GUTIERREZ PIDIACHI	JULIANA	0	0	0	0	0	0	0	0%	0	0	1	0	0	1	20%	20%	1
5	802	JIMENEZ RODRIGUEZ	ERIKA TATIANA	0	1	0	0	0	1	1	25%	1	0	1	0	0	2	40%	15%	1
6	802	VALENCIA MAYA	FERNANDO	0	0	0	1	1	1	1	25%	0	0	1	1	0	2	40%	15%	1
7	802	SAENZ GALINDO	LAURA XIMENA	0	0	0	1	1	1	1	25%	0	0	1	0	1	2	40%	15%	1
8	802	PACHON FONSECA	MAICOL ESTIBEN	1	0	0	1	2	2	2	50%	1	0	1	1	0	3	60%	10%	1
9	802	JULIO BRAVO	MARDEYS	0	1	1	0	2	2	2	50%	0	0	1	1	1	3	60%	10%	1
10	802	GARCIA SISA	EDWIN YOBANI	1	1	0	1	3	3	3	75%	1	0	1	1	1	4	80%	5%	1
11	802	SANCHEZ NIETO	SEBASTIAN MATEO	1	0	0	1	2	2	2	50%	0	0	1	1	0	2	40%	-10%	0
12	802	BUSTAMANTE OLIVERO	YUDI FERNANDA	1	1	0	0	2	2	2	50%	1	0	1	0	0	2	40%	-10%	0
13	802	HERNANDEZ QUIROGA	CARLOS ANDRES	1	0	0	1	2	2	2	50%	0	0	1	1	0	2	40%	-10%	0
14	802	ROJAS CADENA	ERIKA NATALIA	1	0	1	1	3	3	3	75%	1	0	1	1	0	3	60%	-15%	0
15	802	RUIDIAZ PATIÑO	NATALIA PAOLA	1	1	0	1	3	3	3	75%	1	0	1	1	0	3	60%	-15%	0
16	802	MONTENEGRO PALACIO	DANIELA	1	0	1	1	3	3	3	75%	1	0	1	0	0	2	40%	-35%	-1
17	803	CORREDOR VIASUS	CARO ESTEFANI	0	0	0	0	0	0	0	0%	1	1	0	1	0	3	60%	60%	3
18	803	YAMBERLA REYES	NICOL ALEJANDRA	0	0	0	0	0	0	0	0%	1	1	0	1	0	3	60%	60%	3
19	803	CAMPOS AVILA	LEIDI NATALIA	0	0	0	0	0	0	0	0%	0	0	1	1	1	3	60%	60%	3
20	803	BIOJO SAYAS	JULIETH	0	0	0	0	0	0	0	0%	0	0	1	1	0	2	40%	40%	2
21	803	MIRANDA VEGA	NAYERLIS ROSA	0	1	0	0	1	1	1	25%	1	0	1	1	0	3	60%	35%	2
22	803	PERDOMO DELGADO	JHON JAIDER	1	0	0	0	1	1	1	25%	0	0	1	1	1	3	60%	35%	2
23	803	BARRERA OROZCO	NAGELY MILENA	1	0	0	0	1	1	1	25%	1	0	1	1	0	3	60%	35%	2
24	803	CARDENAS RAMOS	MABEL FERNANDA	0	0	0	1	1	1	1	25%	1	0	1	1	0	3	60%	35%	2
25	803	GONZALEZ VILLARRAGA	JHON JAIRO	1	0	0	0	1	1	1	25%	1	0	1	1	0	3	60%	35%	2
26	803	MARIN ARGUELLO	JENNIFER ALEXANE	1	0	0	0	1	1	1	25%	1	0	1	1	0	3	60%	35%	2
27	803	ACERO PARRA	JAVIER EDUARDO	1	0	0	1	2	2	2	50%	1	0	1	1	1	4	80%	30%	2
28	803	PAVA ARIZA	OSCAR DAVID	0	1	0	1	2	2	2	50%	1	0	1	1	1	4	80%	30%	2
29	803	VELASCO CARREÑO	DAIRON WALDI	1	0	0	1	2	2	2	50%	1	0	1	1	1	4	80%	30%	2
30	803	GUIZA CUBIDES	JENIFER ANDREA	0	0	0	0	0	0	0	0%	0	0	0	1	0	1	20%	20%	1
31	803	CACERES PIÑERES	CRISTIAN CAMILO	1	0	0	0	1	1	1	25%	0	0	1	1	0	2	40%	15%	1
32	803	NIÑO DIAZ	JOHAN GIOVANNY	1	0	0	0	1	1	1	25%	0	0	1	1	0	2	40%	15%	1
33	803	MARTINEZ MUÑOZ	YERSON MATEO	1	0	0	0	1	1	1	25%	0	0	1	1	0	2	40%	15%	1
34	803	MURILLO	MARIA ALEJANDRA	1	0	0	0	1	1	1	25%	1	0	1	0	0	2	40%	15%	1
35	803	MENDEZ RODRIGUEZ	MICHEL ZULENY	1	0	0	0	1	1	1	25%	1	0	1	0	0	2	40%	15%	1
36	803	GARCIA SANCHEZ	ROBINSON JAVIER	1	0	0	1	2	2	2	50%	1	0	1	1	0	3	60%	10%	1
37	803	UCHUVO RODRIGUEZ	BRAYAN STIVEN	1	0	0	1	2	2	2	50%	0	1	1	1	0	3	60%	10%	1
38	803	YATE VILLARREAL	JORGE LUIS	1	0	1	0	2	2	2	50%	1	0	1	1	0	3	60%	10%	1
39	803	ROZO GOMEZ	KARINA	1	0	0	1	2	2	2	50%	1	0	1	1	0	3	60%	10%	1
40	803	CARDENAS OSORIO	ANGIE NAVELY	1	0	0	0	1	1	1	25%	0	1	0	0	0	1	20%	-5%	0
41	803	CFUENTES ALVAREZ	MABERINTH ESTEBAN	1	0	0	0	1	1	1	25%	0	0	1	0	0	1	20%	-5%	0
42	803	SIERRA GAONA	OSCAR IVAN	0	1	0	0	1	1	1	25%	0	0	1	0	0	1	20%	-5%	0
43	803	OVALLE TORRES	LEIDY JOHANNA	0	0	1	1	2	2	2	50%	0	0	1	1	0	2	40%	-10%	0
44	803	TURRIAGO YARA	LEIDY TATIANA	1	1	0	1	3	3	3	75%	0	0	0	1	0	1	20%	-55%	-2
				16	3	2	9					11	2	18	16	3		12%	0,95	
		GRUPO CONTROL																		
45	804	ACOSTA LEON	JAVIER ANDRES	1	0	1	1	3	3	3	75%	1	0	1	1	1	4	80%	5%	1
46	804	RODRIGUEZ ESPINILLA	DANA YISELA	0	0	0	0	0	0	0	0%	1	0	1	1	0	3	60%	60%	3
47	804	SAENZ PINZON	ADRIANA MARCELA	0	0	0	0	0	0	0	0%	1	0	0	1	0	2	40%	40%	2
48	804	RAMIREZ VELASQUEZ	JEISSON ALEXANDE	1	0	0	1	2	2	2	50%	1	0	1	1	1	4	80%	30%	2
49	804	MANRIQUE MONTERO	KAREN YULIANA	0	0	0	0	0	0	0	0%	0	0	0	1	0	1	20%	20%	1
50	804	PEÑA MURCIA	MIYER FERNANDO	0	0	0	0	0	0	0	0%	0	0	0	1	0	1	20%	20%	1
51	804	CASTILLO CASTRO	MARYURY ADRIAN	0	0	0	0	0	0	0	0%	0	0	1	0	0	1	20%	20%	1
52	804	MESA CHIQUITO	YULI ANDREA	0	0	0	0	0	0	0	0%	1	0	0	0	0	1	20%	20%	1
53	804	ESQUIVEL TAPIERO	VANESSA ALEJAND	1	0	0	0	1	1	1	25%	0	1	0	1	0	2	40%	15%	1
54	804	SOGAMOSO RODRIGUEZ	NUBIA VALENTINA	1	0	0	0	1	1	1	25%	1	0	0	1	0	2	40%	15%	1
55	804	USECHE CAPERA	KEEREN JULIETH	1	0	0	0	1	1	1	25%	0	0	0	1	1	2	40%	15%	1
56	804	RIVERA MORALES	STEWART	0	0	0	1	1	1	1	25%	0	0	1	1	0	2	40%	15%	1
57	804	CUY JIMENEZ	JHONATAN ESNEID	1	0	1	0	2	2	2	50%	1	0	1	1	0	3	60%	10%	1
58	804	BARRERA FLOR	SANDRA PATRICIA	1	0	0	1	2	2	2	50%	1	0	1	1	0	3	60%	10%	1
59	804	ROMERO MENDOZA	CRISTIAN STIVEN	1	0	0	1	2	2	2	50%	1	0	1	1	0	3	60%	10%	1
60	804	SALCEDO LEMUS	JOHAN SEBASTIAN	1	0	0	1	2	2	2	50%	1	0	1	1	0	3	60%	10%	1
61	804	DIAZ	HELENA PATRICIA	1	0	0	0	1	1	1	25%	0	0	0	0	1	1	20%	-5%	0
62	804	RUIZ MORENO	CAMILA ANDREA	0	0	1	0	1	1	1	25%	0	0	1	0	0	1	20%	-5%	0
63	804	OSORIO PEÑA	ESTEBAN YESID	0	1	1	1	3	3	3	75%	1	1	0	1	0	3	60%	-15%	0
64	804	LOZADA VARGAS	JOHAN FERNEY	1	1	1	1	4	4	4	100%	1	1	1	1	0	4	80%	-20%	0
65	804	VILLARREAL HERNANDEZ	CATALINA	1	1	1	1	4	4	4	100%	0	0	1	1	1	3	60%	-40%	-1
66	804	MENA VALDERRAMA	LAURA VALENTINA	0	1	1	0	2	2	2	50%	0	0	0	0	0	0	0%	-50%	-2
				12	4	7	9					12	3	12	17	5		8%	0,77	
				28	7	9	18					23	5	30	33	8				