Consideraciones generales sobre el concepto de número en los *Fundamentos de la Aritmética* de Gottlob Frege

Trabajo para optar al título de

Licenciado en Filosofía

Modalidad: Trabajo monográfico

Presentado por

Jean Paul Rossi Rincón

Cod.: 2010232031

Director

Camilo Andrés Ordoñez Pinilla

Universidad Pedagógica Nacional

Facultad de Humanidades

Departamento de Ciencia Sociales

Licenciatura en Filosofía

Bogotá D.C

2015

	FORMATO	
	RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE	
Código: FOR020GIB	**Versión: 01**	
Fecha de Aprobación: 10-10-2012	**Página 2 de 59**	

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de grado
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Titulo del documento	Consideraciones generales sobre el concepto de número en los Fundamentos de la Aritmética de Gottlob Frege
Autor(es)	Rossi Rincón, Jean Paul
Director	Ordoñez Pinilla, Camilo Andrés
Publicación	Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional, 2016. 59 p.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional
Palabras Claves	CONCEPTO DE NÚMERO; FUNCIÓN; OBJETO; LÓGICA.

2. Descripción

Gottlob Frege dedicó buena parte de su obra a precisar qué es un número. En este sentido, pretendió mostrar que el número tiene una naturaleza de tipo lógico y no de tipo psicológico (número como algo subjetivo) o formal (número como signo sin contenido). A luz de las distinciones mencionadas, es preciso reconstruir dos tesis fundamentales para entender la concepción fregeana del número, a saber, un enunciado numérico contiene una afirmación sobre un concepto y cada número es un objeto independiente. Luego de esto, se examinan los alcances de la definición fregeana de número, a partir de las definiciones de algunos números de la serie de los naturales. Finalmente, se expondrán algunas limitantes a partir de la paradoja que produce el sistema fregeano.

3. Fuentes

Frege, G. (1879). *Begriffsschrift, a formula language, modeled upon that of arithmetic, for pure thought.*

Frege, G. (1891a). Función y concepto. En G. Frege, *Ensayos de semántica y filosofía de la lógica.trad. Luis Manuel Valdés.* Madrid: Tecnos.

Frege, G. (1892 b). Sobre sentido y referencia. En G. Frege, *Ensayos de semántica y filosofía de la lógica. trad. Luis Manuel Valdés* . Madrid: Tecnos.

Frege, G. (1892c). Sobre concepto y objeto. En G. Frege, *Ensayos de semántica y filosofía de la lógica. trad. Luis Manuel Valdés.* Madrid: Tecnos.

Frege, G. (1904). ¿Qué es una función? En G. Frege, *Ensayos de semántica y filosofía de la lógica. tradu. Luis Manuel Valdés,* . Madrid: Tecnos.

Frege, G. (1906a). Cartas a Husserl. En *Ensayos de semántica y filosofía de la lógica. Trad. Luis Manuel Valdés.* Madrid: Tecnos.

Frege, G. (1906b). Introducción a la lógica. En G. Frege, *Ensayos de semántica y filosofía de la lógica. trad. Luis Manuel Valdés.* Madrid: Tecnos.

Frege, G. (1918a). El pensamiento: una investigación lógica. En G. Frege, *Ensayos de semántica y filosofía de la lógica. trad. Luis Manuel Valdés.* Madrid: Tecnos.

Frege, G. (1964). *The Basic Laws of Arithmetic.* (M. Furth, Trad.) Berkeley/Los Angeles: University of California Press.

Frege, G. (1972). *Los Fundamentos de la Aritmética, Investigación lógico matemática sobre el concepto de número. Trad. Ulises Moulines.* Barcelona: Editorial Laia.

4. Contenidos

Gottlob Frege (1848-1925) es ampliamente reconocido por su gran aporte al campo de la lógica y la filosofía en general. Sin embargo, muchos desconocen el que su lógica haya sido una herramienta creada en medio de una empresa mucho más ambiciosa: fundamentar la aritmética con la lógica.

Esta situación encuentra su motivación en que, aparte de que conceptos fundamentales de la matemática en general estuviesen siendo puestos a un análisis más minucioso, a juicio de Frege, nociones centrales, como la de número y numeral, parecían bastante confusas, así mismo, los matemáticos y filósofos de su tiempo parecían concebir de manera inadecuada nociones fundamentales como las de función, concepto y objeto.

De igual forma, para ese entonces parecía de común acuerdo el que nociones como las del 0 y el 1 fuesen concebidas como primitivas y que en consecuencia se entendiesen sólo a partir de propiedades aritméticas; esto resultaba inaceptable para Frege. Por otra parte, la forma en cómo se entendía la unidad, la suma o en general los enunciados sobre números, presentaban lagunas, las cuales se irán exponiendo en la medida en que se desarrolle el texto.

Es en este sentido en el que Frege consideró propicio remitirse a los dominios de su nueva lógica. Estos vislumbraban, en líneas generales, la posibilidad de formalizar la aritmética en términos de axiomas, exclusivamente lógicos, trasladando de esta manera la dependencia de la validez de los teoremas y las verdades de la aritmética a un conjunto de principios que no se apoyaban en hechos empíricos ni en ninguna otra disciplina del conocimiento.

Semejante empresa dependía de una cuestión esencial: postular un concepto de número en términos exclusivos de su nueva lógica, concepto a partir del cual fuese posible formular definiciones para aquellas nociones de la aritmética que se presentaban como primitivas (por ejemplo el cero y el uno). Adicionalmente, dicho concepto debía estar en calidad de ser usado en el tránsito de las demostraciones de los teoremas ya conocidos de la aritmética.

Esta perspectiva sentaría las bases de lo que luego se conocería como *logicismo*: fundar o reducir la matemática a la lógica. De acá que Frege entrase en pugna con otras concepciones muy difundidas en la época, las cuales de alguna forma resultaban ajenas a su proyecto lógico. Por este camino se llegaría a que el número no podría ser una mera forma sin significado o contenido, tampoco una representación privada de un sujeto particular, mucho menos una cosa, una magnitud, o un agregado o propiedad (espacio-temporal) de algo material.

Así las cosas, antes de reconstruir el concepto de número en Frege, será preciso examinar brevemente algunas cuestiones generales y aspectos más relevantes de los argumentos en contra de otras posturas, esto bajo la lupa de la detallada exposición efectuada en los *Fundamentos*. Cumplido lo anterior, podremos explorar aquellas nociones del sistema fregeano que dan sustento al concepto de número, para finalmente llegar a nuestra definición y así evaluar su alcance.

5. Metodología

Revisión y análisis documental de *Los Fundamentos de la Aritmética* de *Frege* y otras fuentes principales y secundarias acorde a la bibliografía.

6. Conclusiones

Luego del concepto de número y de definir algunos números individuales, Frege procede, en lo que resta de los *Fundamentos*, a probar que cada número en la serie numérica tiene otro que le sucede para finalizar con la inducción matemática y los números infinitos. A este punto es posible afirmar que el proyecto fregeano, en líneas generales, satisface las diferentes exigencias planteadas y en consecuencia abona terreno para mostrar cómo las leyes de la aritmética probablemente se pueden fundamentar en principios lógicos.

Es bien sabido que la prueba definitiva de este proyecto venía dada en términos de la posibilidad de formalizar las ideas expuestas en los *Fundamentos*, por medio del lenguaje simbólico de la conceptografía. Frege pretendió consolidar esta empresa por medio de *Los principios de la aritmética* (1964), obra producida a lo largo de dos volúmenes. Sin embargo, "Frege anuncia que el único punto susceptible de plantear alguna dificultad estarían en conexión con el quinto de sus axiomas" (Kenny, 1997, pág. 186). En este sentido, si bien Frege (1964) mantiene su concepción de número gestada años antes en los *Fundamentos*, el papel de los valores de funciones y de las extensiones conceptuales, comenzó a ser significativamente determinante.

Esto se vio reflejado en el quinto axioma que postula en sus *Principios*, el cual relaciona cursos de valor y valores de funciones. En este apartado se sugiere un tránsito desde las expresiones funcionales hacia las expresiones de cursos de valor. Para Sluga (1980) las funciones determinan una correlación entre objetos, ahora bien, dicha correlación puede considerarse, como una entidad; curso de valores. Para el caso de los conceptos la correlación consiste en agrupar objetos de acuerdo al valor de verdad que determinan en el momento de saturar la función. Así, podemos entender las extensiones conceptuales como entidades que gestan clases de objetos correlacionados de manera unívoca con valores de verdad.

Ávila (1992), acota el término *vinculación* en un sentido similar al de correlación de Sluga, llegando así a concebir a la extensión conceptual como una vinculación entre los objetos y un valor de verdad, de tal forma que se pueden conciliar dos cuestiones:

a) que las diferentes funciones que comparten un mismo curso de valores sean diferentes formas de obtener una misma vinculación entre argumentos y valores; y b) que los "conjuntos" asociados a las funciones proposicionales de un argumento, es decir las extensiones de los conceptos, se identifiquen con sus cursos de valores. (Ávila, 1992, pág. 87)

Tenemos que el número es algo que corresponde a un concepto, que le pertenece, así mismo, el número se comporta como un objeto; como parte de un predicado, en ciertas expresiones. Finalmente hemos visto al número como una extensión conceptual, es decir, como un conjunto de conceptos que han sido particionados en términos de su vinculación con valores de verdad. De manera análoga, siguiendo a Ávila (1992), el número que pertenece a un concepto F es la vinculación que reúne a aquellos conceptos equinuméricos a F. "En este sentido, todo concepto está agrupado en algún número de acuerdo con la coordinabilidad de los objetos que pueden agruparse mediante esos modos de agrupar." (pág. 88).

Dependiendo de la forma en cómo se interprete la noción extensión de un concepto se desprenden

diversas consecuencias del sistema fregeano. Las más aceptadas conllevan a situaciones análogas a la siguiente: si se considera la extensión del concepto «ser concepto», obtenemos el conjunto de todos los conceptos, ahora bien, el concepto «ser concepto» caería sobre sí mismo. Esto da para pensar en la otra clase de conceptos, en otra extensión, generada por aquellos conceptos que no caigan sobre sí mismos: «ser concepto que no cae en sí mismo», desembocando en la conocida paradoja descubierta por Bertrand Russell: […] si el concepto 'ser un concepto que no cae en sí mismo' cae en sí mismo, entonces es un concepto que no cae en sí mismo, y, si 'ser un concepto que no cae en sí mismo' no cae en sí mismo, entonces es un concepto que cae en sí mismo, y, por consiguiente, 'ser un concepto que no cae en sí mismo' caería en sí mismo, si y sólo si, no cayese en el concepto 'ser un concepto que no cae en sí mismo' Russell (1964) citado por (González, s.f., p. 12). Sin embargo, casi una centuria más tarde, Crisping Wright (1983), conjeturó que era posible asegurar la consistencia del sistema fregeano si se reemplazaba el axioma V por el *principio de Hume*. Boolos (1998) al parecer demostró esta conjetura, dejando así un vasto campo de estudio por medio del cual se pueda renovar la vigencia del proyecto fregeano.

Elaborado por:	Jean Paul Rossi Rincón
Revisado por:	Camilo Andrés Ordoñez Pinilla

Fecha de elaboración del Resumen:	26	02	2016

Resumen

Gottlob Frege dedicó buena parte de su obra a precisar qué es un número. En este sentido, pretendió mostrar que el número tiene una naturaleza de tipo lógico y no de tipo psicológico (número como algo subjetivo) o formal (número como signo sin contenido). De esta forma, para entender la crítica de Frege a las posturas psicologistas y formalistas, es preciso remitirse a toda la conceptualización que elabora para separar lo psicológico de lo lógico, lo subjetivo de lo objetivo así como la forma del contenido.

Sin embargo, en Frege no encontramos una definición enciclopédica, ya que, en atención al principio de contexto, rector en toda su investigación, para entender lo que es un número, no debemos preguntarnos por dicho término de manera aislada, sino que es preciso analizar los enunciados en los cuales éste aparece. En este sentido, para determinar qué es un número es necesario analizar la estructura y propiedades de las oraciones asertóricas que expresan pensamientos acerca de números.

Para Frege, cualquier enunciado asertivo es un todo completo en sí mismo el cual se puede descomponer en una parte saturada (donde situamos al argumento) y otra insaturada (donde ubicamos a la función). Sin embargo, debemos fijarnos en cierto tipo especial de funciones; aquellas cuyos valores son siempre un valor de verdad, estas funciones las llamaremos conceptos.

A luz de las distinciones mencionadas, es preciso reconstruir dos tesis fundamentales para entender la concepción fregeana del número, a saber, un enunciado numérico contiene una afirmación sobre un concepto y cada número es un objeto independiente. Así las cosas, llegaremos a que el significado de un número viene dado mediante la siguiente expresión: “el número que corresponde al concepto F es la extensión del concepto «equinumérico al concepto F». Donde la extensión de un concepto, es el conjunto de todos los objetos que caen bajo dicho concepto y la equinumerosidad viene determinada por la posibilidad de tener una aplicación biyectiva entre las extensiones de los conceptos.

Luego de esto, se examinan los alcances de esta definición, a partir de las definiciones de algunos números de la serie de los naturales. Finalmente, se expondrán algunas limitantes a partir de la paradoja que produce el sistema fregeano.

Introducción

Gottlob Frege (1848-1925) es ampliamente reconocido por su gran aporte al campo de la lógica y la filosofía en general. Sin embargo, muchos desconocen el que su lógica haya sido una herramienta creada en medio de una empresa mucho más ambiciosa: fundamentar la aritmética con la lógica.

Esta situación encuentra su motivación en que, aparte de que conceptos fundamentales de la matemática en general estuviesen siendo puestos a un análisis más minucioso, a juicio de Frege, nociones centrales, como la de número y numeral, parecían bastante confusas, así mismo, los matemáticos y filósofos de su tiempo parecían concebir de manera inadecuada nociones fundamentales como las de función, concepto y objeto.

> Los conceptos de función, de continuidad, de límite y de infinito han demostrado necesitar definiciones más precisas. Los números negativos e irracionales, que habían sido admitidos en la ciencia desde hacía tiempo, han tenido que ser sometidos, para quedar justificados, a un examen más preciso. (…) Si proseguimos por este camino, deberá conducirnos al concepto de número y a los enunciados más simples válidos para los números enteros positivos, que constituyen la base de toda la aritmética. (Frege, 1972, §1-2)

De igual forma, para ese entonces parecía de común acuerdo el que nociones como las del 0 y el 1 fuesen concebidas como primitivas y que en consecuencia se entendiesen sólo a partir de propiedades aritméticas; esto resultaba inaceptable para Frege. Por otra parte, la forma en cómo se entendía la unidad, la suma o en general los enunciados sobre números, presentaban lagunas, las cuales se irán exponiendo en la medida en que se desarrolle el texto.

Es en este sentido en el que Frege consideró propicio remitirse a los dominios de su nueva lógica. Estos vislumbraban, en líneas generales, la posibilidad de formalizar la aritmética en términos de axiomas, exclusivamente lógicos, trasladando de esta manera la dependencia de la validez de los teoremas y las verdades de la aritmética a un conjunto de principios que no se apoyaban en hechos empíricos ni en ninguna otra disciplina del conocimiento.

Semejante empresa dependía de una cuestión esencial: postular un concepto de número en términos exclusivos de su nueva lógica, concepto a partir del cual fuese posible formular definiciones para aquellas nociones de la aritmética que se presentaban como primitivas (por ejemplo el cero y el uno). Adicionalmente, dicho concepto debía estar en calidad de ser usado en el tránsito de las demostraciones de los teoremas ya conocidos de la aritmética.

Esta perspectiva sentaría las bases de lo que luego se conocería como *logicismo*: fundar o reducir la matemática a la lógica. De acá que Frege entrase en pugna con otras concepciones muy difundidas en la época, las cuales de alguna forma resultaban ajenas a su proyecto lógico. Por este camino se llegaría a que el número no podría ser una mera forma sin significado o contenido[1], tampoco una representación privada de un sujeto particular, mucho menos una cosa, una magnitud, o un agregado o propiedad (espacio-temporal) de algo material.

En los *Fundamentos* encontramos una detallada exposición de este último punto, así como una presentación, un tanto informal, de cómo debería entenderse el concepto de número bajo la perspectiva logicista. Mill, Newton, Hankel, Schröder y Schloelmilch, son algunos de los que figuran en la contienda, sin embargo, la justa con Kant y su

[1] Significado en un sentido fregeano, es decir, existencia de contenido judicable o enjuiciable.

concepción de que los enunciados de la aritmética son sintéticos y *a priori*, es uno de los aspectos más relevantes a la hora de entender el grueso del proyecto fregeano.

No obstante, dado que reconstruir el debate con Kant constituye ya un trabajo bastante extenso que nos aleja un poco de aquellos aspectos más relevantes a la hora de entender el concepto de número, baste mencionar el que para Frege[2](1972), a diferencia de Kant, los enunciados de la aritmética son analíticos y por ende *a priori*[3]. Para llegar a esto debe tenerse en cuenta que Frege redefine las categorías de *analítico* y *sintético*: un enunciado verdadero es analítico si para su prueba acudimos únicamente a principios lógicos, en caso contrario (si se acude a una verificación empírica) es sintético.

> Si, por el contrario, no es posible llevar a término la prueba sin utilizar verdades que no son de naturaleza lógica general, sino que están relacionadas con un campo particular del saber, entonces el enunciado será sintético. Para que una verdad sea a posteriori se exige que su prueba no pueda ser validada sin alguna apelación a los hechos; es decir, a verdades indemostrables y sin universalidad, que contienen aseveraciones sobre objetos particulares. Si, por el contrario, es posible llevar a cabo

---

[2] En consonancia con Leibniz, quien consideraba que la demostración de una verdad de la aritmética no debía depender de ejemplos, ni tampoco acudir a los sentidos, esto, en sentido estricto, respecto a lo relevante en el proceso de la prueba.

[3] Cabe recordar que respecto a los enunciados de la aritmética es posible distinguir entre las fórmulas numéricas, que tratan con números determinados, y las leyes generales, en las cuales suelen intervenir enunciados generales (los que actualmente reconocemos que contienen variables; más adelante se verá que para Frege el uso de este término no tiene justificación alguna), pues, expresan una validez general, no respecto a un número determinado, sino a un conjunto de números. Al primer género pertenecen enunciados como «$2+2=4$» mientras que al segundo enunciados como «$x(y+z)=xy+xz$».

La querella en torno a la naturaleza de estos enunciados versa principalmente sobre las fórmulas numéricas. Para Frege, en concordancia con Leibniz, y a diferencia de personajes como Hobbes, Locke, Newton, Kant, y Baumann, las fórmulas numéricas son demostrables, de hecho, recalca, no es posible aceptar una verdad matemática si no es a través de una demostración.

Según Frege, incluso la inducción (método bastante usado en la matemática para demostrar) puede tener una naturaleza lógica: "Seguramente, el procedimiento mismo de la inducción sólo puede justificarse mediante leyes generales de la aritmética, si es que por inducción no se entiende un simpe hábito" (Frege, 1972, §10).

> la prueba partiendo de leyes generales únicamente, que no pueden ni precisan ser demostradas, entonces la verdad es a priori (Frege, 1972, §3).

Esta cuestión se encuentra en estrecha relación con la tesis logicista: fundamentar la matemática con la lógica no es otra cosa más que mostrar cómo los enunciados de la aritmética son analíticos. Así mismo, mostrar que los enunciados de la aritmética son analíticos depende de que se pueda postular un concepto de número en términos puramente lógicos; desde dicho concepto debería ser posible demostrar la validez de los teoremas ya existentes: "De la presente obra podrá desprenderse que incluso una inferencia matemática aparentemente singular, como la que pasa de n a n+1, se basa en las leyes lógicas universales que no necesita, por tanto, de leyes particulares del pensamiento agregativo" (Frege, 1972, p. 15).

Así las cosas, antes de reconstruir el concepto de número en Frege, será preciso examinar brevemente algunas cuestiones generales y aspectos más relevantes de los argumentos en contra de otras posturas, esto bajo la lupa de la detallada exposición efectuada en los *Fundamentos*. Cumplido lo anterior, podremos explorar aquellas nociones del sistema fregeano que dan sustento al concepto de número, para finalmente llegar a nuestra definición y así evaluar su alcance.

Qué no es el número y los tres principios rectores en la investigación fregeana

El número no es de naturaleza geométrica o resultado de una proporción de longitudes o superficies: "Newton propone entender por número no tanto un conjunto de unidades, como la relación abstracta de cada una de las magnitudes con otra de la misma clase, que se toma como unidad" (Frege, 1972, §19). Esta definición se asienta sobre las nociones de magnitud y relación entre magnitudes, las cuales, a su vez, dependen del concepto de equimultiplicidad (a la hora de determinar la igualdad de dos longitudes), volviendo de esta forma a las ecuaciones numéricas, obteniendo así un círculo en nuestra definición.

El número no es una propiedad de las cosas externas: "Según E. Schröder, el número está copiado de la realidad, es sacado de ella, por medio de la representación de las unidades mediante unos. A esto lo denomina él la abstracción del número" (Frege, 1972, §21). Frege objeta esta concepción, basado en Baumann, aduciendo que las cosas no se nos presentan como unidades rigurosas, por el contrario, muchas de las cosas que podemos llamar unidades eventualmente podemos descomponerlas de manera arbitraria, siendo así multiplicidad.

El número tampoco puede ser propiedad como lo es, por ejemplo, el color o la dureza. Con esto nos referimos a la postura de John Stuart Mill quien considera que "El nombre de un número denota una propiedad que pertenece al agregado de cosas que designamos con este nombre; y esa propiedad es el modo característico de estar constituido el agregado o de poder descomponerse en partes" (Frege, 1972, §23). En este sentido, al ser el número una propiedad perceptible por los sentidos, a medida que experimentamos diversos modos característicos en los cuales se descomponen diferentes agregados, vamos dando sentido a los distintos enunciados numéricos. Esto puede resultar verosímil para cantidades pequeñas, sin embargo, "No tenemos que reunir a todos los ciegos que haya en Alemania para dar sentido a la expresión «el número de gente ciega en Alemania»" (Kenny, 1997, p. 90). Más dramático sería el caso para el cero, el cual incluso Mill consideró como un signo vacío al no poderse encajar bajo esta concepción. Esto se suma al hecho de que en realidad no existe un modo característico bajo el cual descompongamos agregados, este procedimiento puede resultar tan arbitrario como se quiera.

En general, Frege objeta a Mill mediante la afirmación de que es imposible formular un principio de equivalencia entre conglomerados que supuestamente denotan un mismo número, esencialmente como consecuencia de que no es posible especificar la forma canónica de descomposición (no arbitraría) en como deba descomponerse el conglomerado en cuestión. Ahora bien, esta explicación puede dar cuenta de la manera en cómo los hechos observables pueden relacionarse con el contenido de un enunciado numérico, pero en última instancia no son esenciales para la verdad de éste, es decir, para el caso de los teoremas de la aritmética, en el tránsito de una demostración no tendría lugar acudir a dichas asociaciones; se estaría asignando una referencia[4] errónea. "Mill confunde siempre las aplicaciones que se pueden hacer de un enunciado aritmético, las cuales, frecuentemente, son físicas y presuponen hechos observados con el enunciado puramente matemático mismo" (Frege, 1972, §9).

El número no es algo subjetivo, no es producto de procesos mentales. A mediados del siglo XIX, el idealismo ya había perdido bastante fuerza en los círculos filosóficos de Alemania, abriendo paso a la psicología, disciplina que parecía dar un enfoque más "científico" al tratamiento de los problemas. Esta tendencia, propició un espacio en común para que algunos filósofos y matemáticos encontraran las herramientas propicias para dar cuenta de un concepto de número; aquí es donde halla su génesis el denominado *psicologismo* (Luis Valdés, 1998).

De esta línea, destaca aquella postura que caracteriza al número como una imagen[5], la cual Frege (1972) desestimaría categóricamente: "Por esto tampoco puedo estar de acuerdo con Schloemilch, cuando dice que el número es la imagen del lugar de un objeto en una serie" (§27). La razón de esto consiste fundamentalmente en que no siempre que pensamos en un mismo número aparece la misma imagen. Aceptar un fundamento semejante conllevaría a la imposibilidad de establecer un principio de identidad entre números; no podríamos distinguir si el dos mío es el mismo dos tuyo.

---

[4] Ya volveré a esta noción, pues, ha de tener un tratamiento especial en Frege.

[5] Agregará Frege (1972) en una nota al pie: "La imagen en sentido subjetivo es aquello a que se refieren las leyes psicológicas de asociación; tiene un carácter sensible, representativo. La imagen en sentido objetivo pertenece a la lógica y es esencialmente no sensible, si bien el término que se refiere a una imagen objetiva frecuentemente connota también una imagen subjetiva, la cual, sin embargo, no es su referencia. La imagen subjetiva suele ser demostrablemente distinta en distintos hombres, mientras que la objetiva es la misma para todos. Las imágenes objetivas pueden dividirse en objetos y conceptos. Para evitar confusiones usaré «imagen» sólo en sentido subjetivo." (p. 54).

Adicionalmente, qué imagen se tendría de expresiones como diez elevado a la diez o raíz de dos; correríamos el riesgo de caracterizar infinidad de numerales como signos vacíos.

En general, una concepción psicologista del número desemboca en concebirle como algo cuya naturaleza es privada, algo propio de una mente, de un individuo, en la medida en que no habría impedimento alguno para pensar en que cada sujeto, de acuerdo a sus representaciones, construye una idea privada de número sin poder dar cuenta del nivel de semejanza respecto a la idea privada de uno respecto a otro. Esto no proporciona ningún conocimiento genuino sobre los números y sus propiedades o aporte alguno en el tránsito de una demostración. Investigar cómo surgen los números en las mentes individuales no permite distinguir una naturaleza adecuada.

Pues bien, en contraposición al psicologismo, estaban germinando a la par otros sectores que consideraban muy problemático acudir a la psicología a la hora de explicar lo que es un número. En este contexto, se destaca David Hilbert como uno de los más representativos contradictores del psicologismo quien a finales del siglo XIX logró establecer exitosamente una axiomática para la geometría, donde, a diferencia de Euclides, prescindió de definir objetos básicos tales como punto, línea, circunferencia, plano, etc.

Al parecer, el éxito de desarrollar un sistema semejante, donde sólo era necesario trabajar con relaciones entre formas, llevó a Hilbert a concebir al número como un símbolo que no precisaba definición alguna. Sin embargo, ésta concepción suele relacionarse erróneamente con la idea central de lo que se conocería como *formalismo* (el cual, en líneas generales considera que los objetos de la aritmética son los signos mismos, signos sin contenido expreso).

Para Hilbert (1993), es posible asociar consideraciones intuitivas y contenido a los números, pero esto debe ubicarse en un nivel diferente al de la demostración. En este sentido, es posible asociar con mayor fuerza a Jevons a la postura formalista, quien, si bien consideraba al número como una distinción lógica y al álgebra como una lógica altamente desarrollada, parecía tener una idea de “lógica vacía”; una lógica sin contenido.

> Todo aquel que emplea palabras o signos matemáticos pretenden que éstos significan algo, y nadie puede esperar que de signos vacíos vaya a resultar alguna cosa con sentido. Pero es posible que un matemático lleve a cabo largos cálculos, sin referirse con sus signos o a nada intuible o perceptible por los sentidos. Pero ello no basta para que estos signos carezcan de sentido; se puede distinguir todavía entre ellos mismos y su contenido (Frege, 1972, §16).

El número no es un conjunto, una multiplicidad o pluralidad: se excluye de inmediato cualquier concepción de este tipo que relacione al término «conjunto» expresiones como «pluralidad», «multitud» o «montón de cosas», pues quedarían inmediatamente excluidos el cero y el uno; de nuevo el riesgo de tener signos vacíos. Sin embargo, si se concibe el número, a partir de la formulación de Euclides, como un conjunto de unidades, parece gestarse un camino prometedor, aunque la problemática inicialmente se desplaza a indagar por la forma en cómo se puede concebir la «unidad»; esto será tratado en el momento en que reconstruyamos la noción de número en Frege.

Revisemos lo obtenido hasta el momento: el número no es una propiedad de las cosas, como lo es por ejemplo el peso, la dureza o el color. Tampoco algo subjetivo, una imagen o algo físico. El número no surge como el resultado de añadir una cosa a otra y así de manera sucesiva para números más grandes. Por otra parte, las nociones de *multiplicidad, conjunto y pluralidad* no parecen estar suficientemente delimitadas como para soportar una definición satisfactoria.

Así, habiendo delimitado lo que para Frege no puede ser un número, es posible iniciar la reconstrucción de su formulación y para ello es preciso fijar algunas nociones que dan sustento a dicho concepto, pues se verá cómo las categorías de función, concepto, objeto y extensión de un concepto servirán para perfilar tanto la noción general de número como la de cero y uno, las cuales constituyen el punto de partida para construir la serie numérica de los naturales y así, finalmente, dejar todo dispuesto para derivar los teoremas de la teoría de números. De esta forma, como cuestión metodológica, usaré como carta de navegación los tres principios rectores a los que Frege hace referencia en la introducción de sus *Fundamentos*[6]:

> En esta investigación me mantendré en los siguientes principios fundamentales:
> hay que separar tajantemente lo psicológico de lo lógico, lo subjetivo de lo objetivo;
> el significado de las palabras debe ser buscado en el contexto de todo el enunciado, nunca en las palabras aisladas;
> hay que tener siempre presente la diferencia entre concepto y objeto.
> (Frege, 1972, p. 20)

Lo psicológico y lo subjetivo en frente de lo lógico y lo objetivo

El primer principio alude al hecho de que es preciso entender lo *lógico* y lo *psicológico* como nociones mutuamente excluyentes, así mismo ocurre respecto a lo *objetivo* frente a lo *subjetivo.* Ulteriormente, con estas distinciones se pretendía trazar una clara frontera entre la psicología y la aritmética, ya que, para ese entonces, era cada vez más común el importe de nociones de la una a la otra, situación que Frege desestimaba categóricamente: "Cuando Stricker, por ejemplo, dice que las imágenes de los números son motóricas, dependientes de sensaciones musculares, el matemático no puede reconocer ahí sus números y no sabe qué hacer con este enunciado" (Frege, 1972, p. 16).

Para Frege, una disciplina como la psicología podría, a lo sumo, iluminarnos sobre el origen de ciertas ideas asociadas con la matemática, pero nunca incidir en el tránsito de una demostración. "La psicología se interesa por las condiciones causales de nuestros

[6] Es preciso tener en cuenta una de las distinciones fundamentales en Frege, la de sentido y referencia (*Sinn* y *Bedeutung*), la cual es posible aplicar sobre cualquier entidad fundamental como los nombres propios, las funciones, los conceptos y las oraciones. Este punto se irá desarrollando conforme se vayan tratando las categorías en mención.

procesos mentales; la matemática se interesa por la prueba, o la justificación, de los pensamientos que abrigamos. Pero causa y prueba son cosas bastantes diferentes" (Kenny, 1997, p. 74).

Diremos que algo es subjetivo si es de carácter privado, si depende, en su existencia y contenido, del operar de una determinada conciencia. Si lo privado no es compartible, a lo sumo, podemos expresar algo de este género sin que sepamos con rigor el grado de éxito en la comunicación del mismo. En este "mundo interior", como lo denomina Frege en *El pensamiento* (§66), se encuentran las impresiones sensoriales, las creaciones de la imaginación, las sensaciones, sentimientos, estados de ánimo, inclinaciones, deseos, imágenes e ideas[7], etc. Frege reservará un término abreviado para estos estados mentales: *representación.*

La imposibilidad de compartir una representación se cierne sobre el hecho de que no es procedente establecer un criterio para comparar dos elementos que sean de este género. Cabe aclarar que la imposibilidad de tener un criterio de comparación entre representaciones no es de carácter técnico (es decir, que no es cuestión de esperar a que haya elementos técnicos que propicien el éxito en la comunicación de algo subjetivo), sino conceptual[8]. Examinemos la argumentación expuesta en *El pensamiento,* con la que Frege distingue tajantemente a las representaciones de los objetos del "mundo exterior"[9]:

[7] Respecto a las ideas, recordemos que Frege insiste en que tal noción, en efecto, ha de tomarla en sentido subjetivo, respetando aquellas elaboraciones anteriores donde solía estar en estrecha relación con lo objetivo.

[8] "Ciertamente, es posible a veces establecer diferencias entre las representaciones, e incluso entre las sensaciones, de distintos hombres; pero no es posible una auténtica comparación, porque no podemos tener esas representaciones juntas en la misma conciencia." (Frege, 1892a, §30)

[9] Objetos perceptibles por los sentidos.

> (…) las representaciones no pueden ser vistas, ni tocadas, ni olidas, ni gustadas, ni oídas. (…) las representaciones se tienen. Se tienen sensaciones, sentimientos, estados de ánimo, inclinaciones, deseos. (…) las representaciones necesitan un portador. (…) toda representación tiene un solo portador; dos personas no tienen la misma representación. (Frege, 1918a/1998, §67)

Recorramos estos planteamientos a la luz de un ejemplo: si veo una manzana roja, tal situación hace que yo tenga una impresión visual de lo rojo; la impresión no se ve, se tiene; caso análogo con las impresiones producidas por el tacto, gusto, oído y olfato. Adicionalmente, es posible asumir que independientemente de que la mire o no, la manzana sigue existiendo, sin embargo, la impresión visual producida al mirarla existe sólo como producto de dicho acto, sólo a través de mí y en mí; es en este sentido en el que se posee, en el que alguien la porta.

Lo anterior permite entender de qué forma una representación pertenece al contenido de conciencia de un sujeto en particular, así como el hecho de que no sea posible establecer un criterio de identidad o similaridad aplicable a dos representaciones, insisto, tal imposibilidad no obedece a impedimentos técnicos. En consecuencia, no es posible asegurar que dos individuos tienen la misma representación.

Carece de sentido preguntar, por ejemplo, en caso de que llegase otro sujeto a contemplar la manzana en cuestión, cuán semejante o dispar es la impresión de color que cada cual tiene, así hayan sido producidas como consecuencia de percibir un mismo objeto. Acá radica la esencia misma de una representación: ser -contenido de una única conciencia en particular.

Nadie puede tener la representación de otro, entendido esto en el sentido de que una representación esté en capacidad de "desprenderse" de su portador para ser tenida por otro. No es posible, inclusive, evaluar si aspectos tan básicos como la impresión de un determinado color coincide entre dos portadores, pues esto se daría sólo si tuviésemos reunidas en un lugar en común a las impresiones en cuestión para así compararlas, dando fe de que en su “traslado” de los portadores al lugar en común no se les modificó de alguna forma.

Con todo esto, tenemos que bajo la caracterización de lo subjetivo y su relación con las representaciones (que constituyen al denominado «mundo interior») debe quedar claro el desacuerdo de Frege cuando se afirma que el número tiene una naturaleza semejante o que la psicología tiene alguna relevancia respecto a las verdades o las pruebas matemáticas. Ahora bien, al no ser el número una representación, en ninguna de sus acepciones, nos vemos abocados a concebirle como algo objetivo, pero en un sentido diferente al de la objetividad de las cosas físicas, pues, como ya se vio, el número no es ni un objeto del mundo ni una propiedad o abstracción de las cosas físicas (mundo exterior).

Para Frege, algo es objetivo si es de carácter público, compartible, disponible e independiente, en su existencia y contenido, del operar de la conciencia de un sujeto en particular.

> Lo objetivo aquí es regular, conceptual, enjuiciable, lo que puede expresarse en palabras. Lo puramente intuitivo no es comunicable. (…) Así entiendo por objetividad la independencia de nuestras sensaciones, intuiciones e imágenes, de la proyección de representaciones internas a partir de los recuerdos de sensaciones anteriores, pero no la independencia de la razón; pues responder a la pregunta de qué son las cosas independientemente de la razón significaría juzgar sin juzgar, lavar la piel sin mojarla. (Frege, 1972, §26)

Bajo este rango caen no solamente los objetos físicos (aquellos son perceptibles por los sentidos), sino también los *pensamientos*, que sin ser representaciones ni tampoco objetos físicos (no pertenecen a una mente particular y tampoco se pueden percibir a través de algún sentido), satisfacen las características de lo objetivo: “En el sentido de Frege, algo puede ser objetivo sin ser tangible, o espacial, o causalmente operativo.” (Kenny, 1997, p. 93). Es preciso tener en cuenta que la noción de pensamiento es central dentro del sistema fregeano y en especial respecto a la cuestión en torno al número. Para Frege, los números nos vienen dados por medio de pensamientos.

Los pensamientos y el principio de contexto

Los pensamientos, al no ser representaciones, no se portan en el sentido en el que una representación es portada. Al no ser objetos del mundo exterior, no se tienen como se tiene, por ejemplo, una impresión visual. En consecuencia, Frege reservará una expresión especial para denotar la forma en la que éstos nos son dados, a saber, *captar*. "A la captación de pensamientos tiene que corresponder una capacidad mental particular: el poder de pensar" (Frege, 1918a/1998, §74).

En este sentido, si bien la capacidad de pensar encuentra su origen en la mente individual, ésta se expresa de manera externa, por medio de la captación o de la expresión de pensamientos[10]. "Los pensamientos no son entidades mentales, y pensar no consiste en generar internamente tales entidades, sino en captar pensamientos que ya están presentes de modo objetivo" (Frege, 1906a/1998, §102).

De ahí se sigue que se porte aquella capacidad particular (el pensar) y no lo que se capta; los pensamientos no pertenecen, de la forma en que sí lo hacen las representaciones, a los contenidos de conciencia de una mente particular. De esta forma, los pensamientos, al no tener una naturaleza subjetiva pero tampoco física, se ubican (hablando no en un sentido espacio-temporal) en un tercer dominio, el de la lógica.

¿Cómo se capta un pensamiento?: "Se producen cambios en el mundo exterior común que, al ser percibidas por los demás, les brindan la ocasión de captar un pensamiento y

[10] Ya respecto a cosas como la imaginación y la percepción Frege asociará la actividad de intuir, todos procesos enteramente subjetivos. Pensar, si bien es un acto subjetivo, posibilita el abrigo de contenidos objetivos, en otras palabras, posibilita la captación de pensamientos.

de tomarlo como verdadero" (Frege, 1918a/1998, §77). Una vez captado puede ser expresado, puesto en acción o comunicado de un sujeto a otro, y aún así mantener intacta su esencia.[11]

Cuando se capta un pensamiento, éste no se crea, como si sucede con una representación; los pensamientos son *atemporales*[12]; al captar un pensamiento se entra en cierta relación con algo que ya se encontraba disponible. Así mismo, una vez se capte un pensamiento, éste puede incidir en la mente que le ha captado; en ello consiste la actualidad[13] o lo activo de los pensamientos. En este sentido afirma Frege que los pensamientos "no son completamente inactuales, pero su actualidad es de un género completamente diferente de la de las cosas. Y su actuar es provocado por una acción del que piensa: sin ella serían inactivos, al menos hasta donde podemos ver." (1918a/1998, §77).

Si bien los pensamientos no se encuentran sujetos a los cambios que puede tener un objeto físico, como por ejemplo un bolígrafo, el cual, al pasar de un usuario a otro, disminuye su tinta, densidad, etc., tienen una potencia transformadora la cual les posibilita, a través, digamos, de la voluntad de un sujeto, generar cambios en el medio. Quien capta un pensamiento no le modifica, no puede cambiar, por ejemplo, su contenido, lo ha de tomar como tal y como tal ha de incidir eventualmente en la mente de los individuos.

---

[11] Sin embargo, podemos tener pensamientos cuya verdad está ligada a una circunstancia temporal asociada con quien lo enuncia, tal es el caso de expresiones como "Hoy está lloviendo". Pensamientos de este género requieren siempre tener la indicación temporal, de lo contrario no son completos.

[12] Así como no tienen génesis tampoco tienen un final; el que un sujeto deje de pensar no presupone la «extinción» de un pensamiento.

[13] Los pensamientos, sin ser propios de una mente particular y sin tener atributos espacio-temporales, pueden influir o modificar las cosas materiales.

La objetividad de los pensamientos así como su relación con la lógica, la verdad y el lenguaje, constituyen la estructura medular sobre la cual se asienta el concepto de número: “Llamo pensamiento, sin querer dar con esto una definición, a algo para lo cual la verdad[14] puede entrar a consideración[15].” (Frege, 1918a/1998, §61). La ciencia encuentra cabida donde la verdad pueda entrar a consideración, y donde su determinación no dependa de los procesos internos de una mente en particular, sino que dicha determinación sea independiente de cualquier sujeto; acá halla la lógica su objeto de estudio: *encontrar las leyes del ser verdad.*[16]

> Las leyes de la naturaleza son lo general de los acontecimientos naturales, a lo que siempre se adecúan éstos. Es más bien en este sentido en el que hablo de leyes del ser verdad. Desde luego, no se trata aquí de un acontecer, sino de un ser. Pues de las leyes del ser verdad se siguen prescripciones para el afirmar, pensar, juzgar, inferir. Y, así, es posible hablar también de leyes del pensamiento. (Frege, 1918a/1998, §58)

---

[14] Para Frege, el significado de la palabra «verdadero» es completamente *sui generis:* “En las leyes del ser verdad se despliega el significado de la palabra «verdad».” (Frege, 1918a, §59). En este contexto no podemos entender a la verdad en el sentido de lo *veraz*, lo *sincero*, o de lo que se suele entender por *la verdad en el arte* o cuando decimos que alguien tiene *un sentimiento verdadero*. Tampoco en el contexto lógico debe entenderse la verdad como algo que nos habla de lo *genuino* o lo *falseado*, como un predicado o correspondencia entra las representaciones y aquello que representan, ni como una propiedad que refiera a un tipo de impresiones sensoriales; la verdad, en sentido lógico, puede ser concebida como un predicado de segundo orden.

[15] “A lo que acepto como verdadero lo juzgo como verdadero de manera completamente independientemente de mi aceptación de su verdad e independientemente también de si pienso en ello. El que un pensamiento sea verdadero no tiene nada que ver con que se lo piense.” (Frege, 1918a, §74). Poder predicar un valor de verdad no significa que siempre debamos estar en capacidad de determinarlo; es posible entender un pensamiento sin saber su valor de verdad. Tal es el caso, por ejemplo, de las hipótesis científicas.

[16] De acá se desprende la relación entre lógica y referencia: “Si nos interesa la verdad –y es hacia la verdad hacia donde se dirige la lógica-, hay que preguntarse por las referencias, hay que proscribir los nombres propios que no designan o nombran algún objeto” (Frege, 1892b, §133)

Estudiar las leyes del ser verdad no implica estudiar las razones por la cuales se toma algo por verdadero o falso; ésta no es tarea de la lógica. Ahora bien, en relación con los pensamientos, diremos que la lógica estudia la forma en que, dada una cadena inferencial, se puede transitar de un pensamiento a otro, de manera que la verdad se conserve.[17] De esta forma, si aceptamos la premisa de que los números nos son dados a través de pensamientos, la lógica es la herramienta bajo la cual cimentamos aquellas inferencias que nos hablan acerca de números.

Dado que los pensamientos tienen una naturaleza imperceptible, su captación está en función del único acceso que a ellos tenemos: el lenguaje: "El pensamiento, imperceptible en sí, se viste con el ropaje perceptible de la oración, con lo que somos capaces de captarlo. Decimos que una oración expresa un pensamiento. (...) el pensamiento es el sentido[18] de una oración" (Frege, 1918a/1998, §61). Accedemos a los pensamientos a través de oraciones, sin embargo, no todas las oraciones tienen por sentido un pensamiento, no todas expresan un pensamiento. Para limitar nuestro dominio, se excluyen de este análisis las oraciones imperativas, así como aquellas que expresen peticiones, deseos o exclamaciones[19]; este tipo de oraciones no expresan pensamientos.[20]

[17] En otras palabras, cuáles son las condiciones para que, dado un conjunto de premisas y una conclusión, la verdad de la conclusión se siga necesariamente de la verdad de las premisas.

[18] S*inn* (expresión original del alemán) puede entenderse, un tanto superficialmente, como el modo en que algo es presentado.

[19] "Las interrogativas en principio contienen un pensamiento, pero hay que convertirlas en asertóricas para que éste sea expresado como es debido; puede formarse una oración asertórica de una interrogativa y viceversa." (Frege, 1918a/1998, §62) Para Frege las interrogativas, a diferencia de las asertivas, implícitamente aluden a una petición.

[20] Veremos que la clave de este punto radica en tomar a consideración aquellas oraciones que afirmen algo.

Revisemos lo obtenido hasta el momento: indagar por la naturaleza del número conllevó a distinguir entre lo objetivo perceptible (las cosas del mundo) y lo objetivo no perceptible (pensamientos). Por otra parte, en virtud de lo que, según se concluyó, no podía ser el número, nos vimos abocados a tipificarle como algo de tipo *objetivo no perceptible*. Dicha tipificación nos remitió a los pensamientos (las unidades mínimas de significado en el contexto lógico), entidades por medio de las cuales, según Frege, nos son dados los números. Si el número no es subjetivo ni una cosa o abstracción del mundo es algo cuya naturaleza yace en el tercer dominio, el de la lógica. Indagar por su significado se traduce en estudiar los pensamientos que nos hablan acerca de números.

Puesto que accedemos a los pensamientos por medio del lenguaje, específicamente, por medio de oraciones (aunque no por medio de cualquier oración), es hacia ellas que debemos dirigir la mirada. Concebir de esta forma el significado no implica ofrecer una definición, en palabras de Frege, «de tipo escolar»[21]. Dicho significado es algo que se despliega analizando los enunciados donde el término aparezca. Entre varias tareas, nos vemos obligados a indagar qué tipo de cosas afirman los enunciados numéricos.

Esto último refiere sin más, al principio de contexto, el cual, como se había mencionado, es rector en la investigación de los *Fundamentos* (segundo principio), y en general de todo el proyecto fregeano. A través de él se prevé no confundir el significado de una palabra con las eventuales representaciones que de ella podamos tener; esto suele darse

[21] "La definición de un objeto, en sí misma, no afirma en realidad nada sobre el objeto, sino que fija el significado de un signo. Después de haber ocurrido esto, se transforma en un juicio, que trata del objeto; pero ahora ya no lo introduce y se halla al mismo nivel que otras afirmaciones hechas sobre él." (Frege, 1972, §67). Ya en las *Leyes de la aritmética* encontraremos que una definición es una estipulación que indica que un signo nuevo va a tener el mismo *Sinn* y *Bedeutung* que uno anterior y usualmente más complejo (para ampliación del tema consultar los siete principios, escritos en la obra en mención).

cuando nos preguntamos por el significado de una palabra de manera aislada y no en el contexto del enunciado donde ésta aparece[22].

Con esto se pretende marginar cualquier interpretación subjetiva del significado de un término, en otras palabras, se quiere distinguir entre el significado de una palabra y las imágenes o representaciones que de ésta podamos tener. "Lo que parece decir con esto es que, si en una proposición nos encontramos con una palabra que no parece corresponder a ningún objeto del mundo externo, podemos vernos tentados a decir que se refiere a algún objeto interno" (Kenny, 1997, p. 77). Esto, para el caso del término «número», es otra manera de afirmar que no se sigue necesariamente que, al no poder asociar el número a una cosa o abstracción en el mundo entonces se le debe asociar una representación, lo cual, sin embargo, si bien es procedente, no resulta pertinente.

---

[22] Siguiendo a Dummett (1994), esto no debe interpretarse como un giro fregeano que apunte a centrar toda la atención sobre las formas lingüísticas (oraciones) por encima de los pensamientos (dado su carácter imperceptible). En este sentido, puede asumirse que la estructura del lenguaje es un reflejo de la estructura del pensamiento, y si bien puede ser un reflejo distorsionado, es el único al cual tenemos acceso. *"The two notions, of the structure of the sentence and of the structure of the thought, must be developed together" (p. 7)*

Por otra parte, captar un pensamiento no debe entenderse como un proceso de decodificación del lenguaje, esto nos puede llevar a un idealismo y por el mismo sendero a la clásica interpretación platónica del tercer reino fregeano donde habitan pensamientos. Sin embargo, captar un pensamiento tampoco puede ser sinónimo de que accedemos a ellos a través de un lenguaje enteramente construido por nosotros; no es el caso apoyar una interpretación de Frege que nos conlleve a un antirrealismo semántico, donde se conciba al lenguaje como una mera creación convencional y arbitraria.

No podemos evitar que los pensamientos requieran un ropaje (aunque esto oscurece la noción de aquello que se capta) Sin embargo, este ropaje no puede llevarnos a una concepción del contenido como algo enteramente fijo (ideal), tampoco como algo enteramente arbitrario (convencional). Es preciso cultivar una concepción que permita preservar contenidos pero que al tiempo refleje la creatividad y flexibilidad propia del lenguaje.

Función, concepto y objeto

El análisis en cuestión depende de una serie de distinciones asociadas tanto a la totalidad del enunciado como a sus partes en términos de lo que en Frege se debe entender por forma y contenido, signo y cosa designada, *Sinn* y *Bedeutung*[23]. Tales distinciones están vinculadas a la posibilidad de descomponer cualquier pensamiento y, en consecuencia, cualquier oración asertórica en una parte *insaturada (incompleta en sí misma)*, lo que llamaremos *función*, y una parte *saturada (completa en sí misma)*, denominada *argumento*:

> En primer lugar, nos vemos aquí abocados a descomponer un pensamiento en partes, ninguna de las cuales es un pensamiento. El caso más sencillo es la división en dos partes. Las partes son heterogéneas: una insaturada, la otra saturada (completa). Hay que considerar los tipos de pensamientos calificados por la lógica tradicional como juicios singulares. En ellos se afirma algo de un objeto. La oración que expresa tal pensamiento consta de un nombre propio –y éste corresponde a la parte completa del pensamiento- y de una parte predicativa, que corresponde a la parte insaturada del pensamiento. (Frege, 1906b/1998, §203)

Ahora bien, dado que el término «función» históricamente ha tenido un notable uso en diversos contextos (especialmente el matemático[24]), y que, asimismo, el significado de dicha palabra en el sistema fregeano no dista del que tiene en las matemáticas (pues de hecho resulta de una ampliación del mismo), es preciso fijar el sentido de esta expresión.

Para entender lo que es una función veamos la manera en que operan las distinciones mencionadas en algunas expresiones de cálculo, para así poder establecer cuál es el rol

---

[23] Expresión del alemán comúnmente traducida como referencia o significado; someramente puede entenderse como lo que se designa o como aquello de lo que se está hablando.

[24] Por ejemplo, según Frege (1891a), para la época era muy común entender una función como una mera fórmula que contenía una o varias variables.

de las funciones en los enunciados asertóricos: sean las expresiones "3-2", "-4/4" y "-4+5", diremos que son equivalentes en cuanto refieren a lo mismo (es decir, tienen el mismo *Bedeutung*, designan la misma cosa) y diferentes en cuanto a su designación (*Sinn*, la forma en que cada cual es presentada o expresada, bien sea a través de la suma, resta, división, etc.); mismo *Bedeutung*, diferente *Sinn*.

Es en este sentido en el que se afirma que hay propiedades que atañen sólo a la forma, diferentes a aquellas que tienen que ver con el *Sinn* y el contenido de una expresión. Dentro de este último género ubicamos a las leyes lógicas y a las leyes de la aritmética, las cuales no se pueden obtener examinando las propiedades físicas (la forma) de los signos que intervienen.

> La propiedad del 1, a saber: que multiplicado por sí mismo da de nuevo como resultado a sí mismo, sería pura ficción; ninguna investigación microscópica o química, por muy profunda que fuese, podría jamás descubrir esa propiedad en la inocente figura que llamamos signo numérico 1. (Frege, 1891a/1998, §4)

De ahí que se deba distinguir entre la función y su expresión y entre el argumento y su signo; lo primero atañe al *Bedeutung*, lo segundo a la forma y el *Sinn*. Distinguir la forma concierne, por ejemplo, a que una expresión pueda escribirse en diferentes colores, tamaños, etc. Distinguir el *Sinn* remite a la posibilidad de expresar, por ejemplo, un mismo número, a través de diversas operaciones como la suma, resta, multiplicación, etc.

> Me interesa mostrar que el argumento no pertenece a la función, sino que forma junto con la función un todo completo; pues la función, por sí sola, hay que llamarla incompleta, necesitada de compleción o insaturada. Y de este modo se diferencian de modo fundamental las funciones de los números. (Frege, 1891a/1998, §6)

Es posible ilustrar con varios ejemplos la forma en la que operan las distinciones mencionadas en diversas expresiones de cálculo y ecuaciones que podemos encontrar en la matemática, con ello será más claro visualizar la forma en cómo funcionan en las oraciones:

- $2x^3 + x$, función cuyo signo del argumento es x, éste indica, sin especificar cuál sea, un número. Dado que no se ha saturado la función, diremos que esta expresión no tiene designación, en cambio, puede asumirse que, tal como «x», indica un número de manera indeterminada.[25] Frege es insistente con el hecho de que "(…) el argumento no ha de considerarse como algo que pertenece a la función y, por consiguiente, tampoco ha de considerarse que la letra «x» pertenece al nombre de la función;" (Frege, 1892a/1998, §129)[26].
- $2(1)^3 + 1$,- función anterior saturada con el argumento 1.[27]

---

[25] Hay que notar la diferencia existente entre el uso de la expresión «indicar» y de la expresión «designar»: "No se puede decir que «n» designa a un número indeterminado, pero sí que indica indeterminadamente un número." (Frege, 1904, §660)

Cabe mencionar que para Frege, el uso de la expresión «variable» es injustificado en este contexto y por ello se excluye. "En efecto, pueden admitirse magnitudes variables, pero no pertenecen al análisis puro. No hay números variables" (Frege, 1904, §661)

[26] Sin embargo, esto puede resultar confuso para el caso de las conocidas funciones constantes, ya que según Frege, un nombre o palabra de función siempre tiene al menos un lugar vacío el cual indica dónde debe saturarse la función. Claramente en la función constante f(x)=2, esto no se da, de hecho, es posible afirmar que a la derecha del igual tenemos algo que designa un objeto y no una función. Ahora bien, es viable solventar esta situación acudiendo al álgebra, ya que si aplicamos unas cuantas propiedades básicas, es posible reescribir la función en cuestión de manera que se puedan identificar aquellos lugares donde va el argumento: $2 = 2 + x - x$.

Si bien esto parece solucionar el problema, queda la sensación de que, en general, los numerales pueden comportarse como objetos y como funciones. Para no hablar en términos de un "comportamiento dual", podemos simplemente guiarnos por la notación, es decir, si el signo «2» aparece a la derecha de una igualdad teniendo ésta a su izquierda un signo con el que las funciones se suelen notar (f(x), g(y), o h(z), etc.,) tomaremos al signo «2» como palabra para función, en caso contrario, debe tomarse como el signo para un objeto.

[27] En algunos casos puede identificarse fácilmente una función, a partir de diferentes saturaciones de ésta: "Puede colegirse de esto que lo común a cada expresión es aquello en lo que reside la esencia genuina de

- $2(1)^3 + 1 = 3$, la ecuación indica que la expresión a la izquierda del igual tiene el mismo Bedeutung que la de la derecha. Dispuesto de esta forma, diremos que 3 es el *valor de la función*[28] para el argumento 1. Si el cálculo es correcto, diremos que dicha ecuación tiene como Bedeutung lo verdadero.
- $x^2 = 1$, función que toma como valor un valor de verdad. A medida que se satura la función con distintos valores, produce diferentes valores de verdad; dicha expresión es verdadera (en el campo de los reales), para los argumentos 1 y -1.
- $y = x^2 - 4$, «y» indica un número (el valor de la función) al igual que «x», sólo que de manera indeterminada.
- $f(x) = x^2 - 4$, $f(x)$ indica una función, sólo que de manera indeterminada, la cual se define, como sigue, al lado derecho de la igualdad (veremos que en últimas, esto también aplica para el caso de que «y» sea usada como en el ejemplo anterior).

Esta notación manifiesta tanto que la función debe ser saturada así como el tipo de saturación que ésta requiere. Recordemos que el argumento no hace parte de la función y que su signo indica el género de compleción o saturación a la cual está sujeta.[29] El tránsito de una expresión que indica una función o un número de manera indeterminada a la función o al número, es el tránsito de un signo que indica a un signo que designa. En

---

la función, (…)" (Frege, 1981/1998, § 6). Por ejemplo de $2(0) + 1, 2(1) + 1$ y $2(2) + 1$, es posible inferir que se está saturando la función $2x + 1$, con los argumentos 0, 1 y 2.

[28] "llamamos al resultado de completar la función con su argumento, el valor de la función para ese argumento. Así, por ejemplo, 3 es el valor de la función $2x^2 + x$ para el argumento 1" (Frege, 1891a/1998, §8)

[29] "Esta necesidad de compleción puede hacerse visible mediante paréntesis vacíos, por ejemplo «sen()» o «$()^2 + 3(\quad)$». A pesar de que, en rigor, esto es lo más apropiado y lo más idóneo para prevenir el error que surge cuando se considera el signo del argumento como parte del signo de función, es probable que este simbolismo no encuentre aceptación alguna" (Frege, 1904/1998, §664)

rigor, un signo de función no debe aparecer sólo como sí pueden hacer los signos numéricos.

> Se acostumbra a leer la ecuación «y=f(x)» como «y es una función de x». Hay aquí dos errores: en primer lugar, se traduce el signo de igualdad por la cópula; en segundo lugar, se confunde la función con su valor para un argumento. A partir de estos dos errores ha surgido la opinión de que la función es un número, aunque variable o indeterminado. Por el contrario, hemos visto que tales números no existen en absoluto y que las funciones son fundamentalmente diferentes de los números. (Frege, 1904, §65)

Con todo esto, diremos que dos expresiones, que involucren funciones, satisfacen una igualdad si éstas tienen los mismos valores de función para los mismos argumentos, en otras palabras si las funciones respectivas tienen el mismo *recorrido* o *curso de valor*.[30] Según Frege (1891a/1998) este tipo de igualdad constituye la generalización de una ecuación. Por ejemplo, el que las funciones $x^2 - 4x \; y \; x(x-4)$, tengan el mismo recorrido, se expresa de la siguiente forma: $x^2 - 4x = x(x-4)$.

Esto último también puede notarse de la siguiente forma: $\varepsilon'(\varepsilon^2 - 4\varepsilon) = \alpha'(\alpha(\alpha - 4))$, donde, a diferencia de la primer expresión, no se requiere usar obligatoriamente la misma letra en ambos lados de la igualdad. La vocal griega con espíritu suave que antecede a aquello encerrado entre paréntesis, respectivamente a cada lado de la igualdad, indica que estamos hablando del recorrido de la expresión encerrada.

Por otra parte, recordemos el par de ejemplos en los que se mostraba cómo la igualdad tiene como *Bedeutung* un valor de verdad. Esto puede resultar, o bien de simplificar expresiones numéricas o bien de saturar funciones y evaluar si en efecto ambas

---

[30] Wertverlauf: curso (Verlauf) y valor (Wert). En inglés "range of values" "range" o "value distribution" (Carnap). En castellano, según el traductor, suelen emplearse los términos "alcance" o "recorrido". En general $\epsilon`f(\epsilon)$ indica el curso de valor (inicialmente indeterminado) correspondiente a una función cualquiera, de un solo argumento.

expresiones de la igualdad designan lo mismo. Así las cosas, en caso de resultar lo verdadero, diremos que el argumento (con el que se saturó para producir dicho valor) cae bajo un concepto determinado, un concepto que viene dado por el tipo propiedad que determina la función: “De hecho, se puede decir directamente: un concepto es una función cuyo valor es siempre un valor de verdad.” (Frege, 1891a/1998, §15)

Ilustremos lo anterior: tomemos por ejemplo la función $\sqrt{x} = 2$, la cual toma el valor de lo verdadero sólo para el argumento 4 (en el campo de los relaes), en este caso diremos que *el número 4 tiene la propiedad de que su raíz cuadrada es 2.* También podemos afirmar: *2 es la raíz cuadrada de 4* o *4 cae bajo el concepto cuadrado de 2*, viceversa para aquellos argumentos que producen lo falso.

En *Concepto y Objeto* encontramos que la naturaleza del concepto es de carácter *predicativa*, en otras palabras, dado un predicado gramatical[31] (tomado como símbolo o signo) éste designa al concepto[32]. En los *Fundamentos*, encontramos que “el concepto es un predicado posible de un contenido de un juicio singular” (Frege, 1972, §66 nota al pie). Con esto, diremos que “Lo que, en el caso de la función, llamamos insaturación, podemos llamarlo, el caso del concepto, su naturaleza predicativa. Ésta se muestra incluso también cuando se habla de un sujeto conceptual.” (Frege, 1982a/1998, §130).

Por otra parte, Frege reservaría la expresión *extensión conceptual*[33], para denotar el recorrido de un concepto. En efecto, la extensión conceptual es sin más, el curso de valor de una función cuyo valor es un valor de verdad. En consecuencia, ha de ser

---

[31] También denominado *palabra para concepto*, la cual suele venir precedida por un artículo indeterminado.

[32] Afirma Frege que usualmente una palabra para concepto va precedida de un artículo indeterminado, salvo contadas excepciones.

[33] Sobre esta noción volveremos más adelante pues resulta fundamental dentro de la concepción del número fregeana.

familiar la notación para equiparar extensiones de conceptos. En caso de resultar similares, diremos que hay una *identidad en la extensión de los conceptos*. Esto se puede ilustrar, por ejemplo, con los conceptos $(x^2 = 1)\ y\ (x+1)^2 = 2(x+1)$, los cuales toman el valor de lo falso para todo argumento, excepto para el 1 y -1. Así, su identidad en la extensión, vendría denotada por la expresión:

$$\varepsilon\acute{}(\varepsilon^2 = 1) = \alpha\acute{}((\alpha+1)^2 = 2(\alpha+1))$$

Habiendo aclarado la relación entre función y concepto a partir de un análisis de sus respectivos roles, es posible ampliar nuestro espectro volviendo sobre lo que habíamos dejado líneas atrás; las oraciones asertóricas:

> La forma lingüística de las ecuaciones es una oración asertórica. Tal oración contiene como sentido un pensamiento –o, por lo menos, pretende contenerlo–; y este pensamiento es, en general, verdadero o falso, esto es: tiene, en general, un valor de verdad que debe considerarse como la referencia de la oración. (Frege, 1891b/1998, §16)

Tanto las expresiones de cálculo como las oraciones asertóricas, pueden descomponerse en una parte saturada (completa) y otra insaturada (incompleta). Esto también aplica, en general, para ecuaciones, inecuaciones y expresiones analíticas. En este sentido, diremos que el *Bedeutung* de la parte saturada, para cualquiera de las expresiones mencionadas, es un objeto, mientras que el *Bedeutung* de la parte insaturada, es una función o un concepto, según corresponda.

Así mismo, en líneas generales, es posible saturar una función o un concepto con un objeto determinado, formando así un todo completo cuyo *Bedeutung* es, en general, un objeto (para el caso particular de los conceptos, un valor de verdad). De esta forma, una vez ampliados los alcances de estas nociones, especialmente el papel del objeto, pues, por ejemplo, puede desempeñarse tanto como argumento así como valor de función, conviene perfilar dicha noción en términos del *Sinn* y el *Bedeutung*, así como de la forma en que se designa.

Un objeto es completo, saturado, cumple las características de lo objetivo y su rol lógico es el de complementar o saturar funciones; "un objeto es todo lo que no es función" (Frege, 1891b/1998, §18). Se distinguen dos clases de objetos, a saber, aquellos que son perceptibles por los sentidos (propiedades espacio-temporales) y aquellos que no. Dentro del primer género encontramos, en líneas generales, a las cosas del mundo, también denominadas objetos físicos. En el segundo género, encontramos entidades lógicas como los numerales, las oraciones asertivas, los valores de verdad, etc[34].

En los *Fundamentos*, en una nota al pie, encontramos que un "objeto es un sujeto posible de un contenido de juicio singular" (Frege, 1972, §66); las palabras que designan un objeto suelen venir precedidas por un artículo indeterminado, salvo contadas excepciones. De esta forma es que, a diferencia de los conceptos, un objeto no puede ser usado como predicado, puede ser a lo sumo, parte de éste; "entiendo «predicado» y «sujeto» en el sentido lingüístico: un concepto es la referencia de un predicado, un objeto es lo que jamás puede ser la referencia total de un predicado, si bien puede ser la referencia de un sujeto" (Frege, 1892c/1998, §198)

En Frege (1892b/1998), encontramos que un *signo* o *nombre* es una designación arbitraria o convencional, por la que se pueda tener un nombre propio, el cual tiene asociado un *Sinn* (en este caso, el modo en que es presentado el objeto) y un *Bedeutung* (en cuyo caso es un objeto determinado). En un lenguaje ideal, según Frege, se esperaría que a un determinado signo le correspondiese un único *Sinn*, y a su vez que a éste, un determinado *Bedeutung*, sin embargo, es evidente que en el denominado lenguaje natural, esto no se da: para un determinado *Bedeutung* es posible encontrar múltiples

[34] Sin embargo, para el caso de los objetos perceptibles por los sentidos, afirma Frege que es posible recurrir también a la intuición: "Podemos poner también junto a las representaciones las intuiciones en las que las impresiones sensoriales y las actividades mismas ocupan el lugar de las huellas que han dejado en la mente. La distinción es irrelevante para nuestros propósitos, máxime cuando junto a las sensaciones y actividades los recuerdos de éstas ayudan a completar la imagen intuitiva." (Frege, 1892b/1998, p. 88).

Sinn y éstos a su vez, tienen diversas expresiones (en diferentes lenguajes así como diferentes expresiones dentro de un mismo lenguaje, etc.)[35].

Para captar el *Sinn* de un nombre propio, es preciso conocer, con cierto nivel, el lenguaje o las designaciones asociadas a la expresión en cuestión. Sin embargo, el *Bedeutung*, en caso de que exista (ya que captar un determinado *Sinn* no implica la existencia de un *Bedeutung*, tal es el caso de los denominados términos singulares vacíos; por ejemplo, los personajes de ciencia ficción)[36], resulta siempre iluminado de manera parcial. "Para un conocimiento completo de la referencia se requeriría que, para cada sentido dado, pudiésemos decir al instante si está asociado o no con ella. A eso no llegamos nunca." (Frege, 1892b/1998, §27)[37]. Así las cosas, si los objetos se conciben como entidades completas, saturadas, que no conllevan lugares vacíos, las siguientes entidades pueden ser caracterizadas como tal:

Las oraciones asertóricas son un todo completo en sí mismo. Se pueden pensar descompuestas en una parte necesitada de saturación y otra que le satura. En

---

[35] "Un nombre propio (palabra, signo, combinación de signos, expresión) expresa su sentido, se refiere a, o designa, su referencia. Con un signo expresamos su sentido y designamos su referencia" (Frege, 1892b/1998, §31)

[36] Sin embargo, es posible plantearse el siguiente interrogante: si por un lado entendemos al *Sinn* como el modo de presentación de algo, y por otro, decimos que es posible captar *Sinn* sin *Bedeutung*, como es el caso de los términos singulares vacíos, ¿qué se está presentando (a través de un *Sinn*) en los términos singulares vacíos, dado que al no tener *Bedeutung*, no habría algo que presentar? (Evans)

[37] La naturaleza objetiva del Sinn conlleva a distinguirle radicalmente de las representaciones que eventualmente podamos asociarle, por ejemplo, "Si la referencia de un signo es un objeto sensorialmente perceptible, entonces mi representación de él es una imagen originada a partir de recuerdos de impresiones sensoriales dadas que he tenido y de actividades, tanto internas como externas, que he ejercitado" (Frege, 1892b/1998, §29). Es en este sentido en el que Frege afirma que una imagen es un signo con sentido, pero sin referencia.

Es posible tener múltiples representaciones asociadas a un mismo sentido, éstas, en virtud de su condición subjetiva, hacen parte o son modos de una conciencia individual, creadas o tenidas en un momento determinado; no pueden ser propiedad común de muchos como sí lo es el sentido; el sentido ni es el objeto (el *Bedeutung*) ni es algo subjetivo (representación).

consecuencia, su *Bedeutung*[38], que es un valor de verdad (bien sea lo falso o lo verdadero) es un objeto. Así, diremos que una oración asertórica puede ser tomada como un nombre propio para un valor de verdad.

Los recorridos de las funciones son objetos y en consecuencia las extensiones conceptuales también lo son. En efecto, ni las funciones ni los conceptos pueden ser objetos.

Un número, usado como argumento de una función, no conlleva un lugar vacío, por tanto, puede concebirse como un objeto[39].

De acá se desprende el que podamos hablar de oraciones asertóricas sin *Bedeutung*, oraciones en las que la verdad no puede entrar a consideración; el caso paradigmático nos remite a las que se podrían llamar oraciones de ficción. En este tipo de oraciones, encontramos nombres propios emanados del ámbito de la literatura y demás géneros por el estilo, tales como, Ulises, Batman, etc., para Frege, estos nombres propios, son signos con sentido y sin referencia.

Una oración asertiva que contenga un término semejante no puede tener referencia, no podemos, en un sentido científico, afirmar por ejemplo, que Ulises haya desembarcado o no en Ítaca. En efecto, para Frege, oraciones de este género no pueden pertenecer al ámbito científico; su valía pertenece a otros ámbitos.

La ausencia de referencia en una oración asertórica también se da como consecuencia de que la funciones o conceptos, contenidos en ella, no se encuentren bien definidos: por

---

[38] "Por otra parte, sabemos que es indiferente para el sentido de la oración, para el pensamiento, si sus partes tienen o no referencia; por tanto, tiene que estar unido a la oración algo distinto del pensamiento, algo para lo que es esencial el que las partes de la oración tengan referencia; esto es lo que llamaremos la referencia de la oración. Pero lo único para lo que esto es esencial es lo que llamo valor de verdad, es decir, si el pensamiento es verdadero o falso." (Frege, 1906b/1998, §210)

[39] Ya volveré sobre esto.

ejemplo, para el caso de los conceptos tiene que ser posible determinar para cualquier objeto, si éste cae o no bajo el concepto en cuestión. En líneas generales, cualquier función debe producir un valor luego de ser saturada[40].

Finalmente, conviene introducir una noción que será de gran importancia a la hora de reconocer el papel de las asignaciones numéricas. Es así como nos remitimos a aquellas funciones y conceptos que toman por argumentos otras funciones y otros conceptos según corresponda:

> Ahora bien, así como las funciones son fundamentalmente diferentes de los objetos, del mismo modo aquellas funciones cuyos argumentos son y tienen que ser funciones son fundamentalmente distintas de las funciones cuyos argumentos son objetos y no pueden ser otra cosa. A éstas las llamo funciones de primer nivel; a aquéllas, funciones de segundo nivel. Del mismo modo, distingo entre conceptos de primer nivel y de segundo nivel[41]. (Frege, 1891a/1998, §26-27)

Dos tesis fundamentales: una asignación o enunciado de número contiene una afirmación sobre un concepto y cada número es un objeto independiente

Con este aparataje conceptual, nos encontramos en condiciones de reconstruir dos tesis fundamentales (y en apariencia incompatibles), para entender el concepto de número: por un lado, frente a la pregunta “¿de quién decimos algo cuando damos un número?” (Frege, 1972, §45), debemos responder: *una asignación o enunciado de número contiene una afirmación sobre un concepto;* esta afirmación encuentra sustento en el principio de contexto. Por otra parte, tenemos que: *cada número es un objeto*

---

[40]El concepto dado por la expresión «x es la serie menos convergente» es vacío, pues para cualquier argumento, el valor de verdad es lo falso, esto es, ningún objeto cae bajo este concepto.

[41] En este sentido, hay que tener en cuenta que, en cuanto a las relaciones de primer y segundo nivel, un objeto cae *bajo* mientras que el concepto cae *en*.

independiente[42]. Esto tiene que ver con el rol que cumplen los denominados *numerales* (nombres propios de números individuales, como el 0 y el 1). Ya veremos de qué forma se concilian estas dos tesis que parecen violar el tercer principio: distinguir entre concepto y objeto.

Uno de los soportes de este asunto tiene que ver con algo que habíamos dejado sobre el tintero, la noción de *unidad,* y que mencionamos, sería de gran utilidad para una concepción definitiva del número. En este sentido, luego de un detallado tratamiento, Frege llega a la conclusión de que las unidades parecen requerir dos atributos esenciales, en apariencia contradictorios: *la igualdad* y *la diferenciabilidad.* Así mismo:

> Hay que hacer una distinción entre uno y unidad. El término «uno», como nombre propio de un objeto de la investigación matemática, no admite plural. Carece, por tanto, de sentido hacer surgir los números por reunión de unos. El signo más, en 1+1=2, no puede referirse a semejante unión. (Frege, 1972, §45)

Para aclarar la forma en que esto opera, Frege sugiere remitirnos al análisis del contexto de algunos enunciados numéricos: supongamos, por ejemplo, que estamos frente a un agregado de árboles, de éste se podría afirmar: «esto son doce árboles» o «esto es una docena de árboles». Al pasar de un enunciado a otro, no modifico el agregado, ni lo individual o la totalidad de los árboles, sino que ha habido un cambio de denominación, se ha intercambiado un concepto por otro.

Para entender el fondo de esta distinción conviene traer a colación *Concepto y Objeto*, concretamente al apartado que trata sobre las nociones de *propiedad y característica*, a propósito de las funciones y conceptos de orden o nivel superior que ya habíamos mencionado líneas atrás.

[42] Autónomo o autosuficiente; existe o subsiste por sí mismo, independientemente de otros objetos.

> De acuerdo con mi manera de hablar, algo puede ser, a la vez, una propiedad y una característica, pero no de lo mismo. Llamo a los conceptos, bajo los que cae un objeto, sus propiedades, de modo que «ser X es una propiedad de £» es sólo un giro para decir: «£ cae bajo el concepto de X» (Frege, 1892c/1998, §201)

Ahora bien, dado un objeto £, sea I (concepto) la reunión de las propiedades (X,H,Γ) del objeto en mención, se dice entonces que (X,H,Γ) son características del concepto I y al mismo tiempo propiedades de £. Así mismo I está subordinado a X,H y Γ no puede caer bajo ninguno de los tres conceptos, pues I es de segundo nivel mientras que X,H y Γ son de primer nivel.

Hay que ser precavidos con la forma en que Frege hace uso de dichas nociones en los *Fundamentos:* “Por propiedades que se afirman de un concepto, no entiendo, naturalmente, las características que componen al concepto. Estas son propiedades de las cosas que caen bajo el concepto, no del concepto mismo.” (Frege, 1972, §53). Dispuesto lo anterior, es posible afirmar que, para el ejemplo del agregado de árboles, en cada uno de los enunciados no se está diciendo algo de un objeto, sino de un concepto, se está afirmando una propiedad de un concepto; la de que hay algo que cae bajo él, denominado de dos formas diferentes.

> Cuando digo: «Venus tiene 0 lunas», no es que haya allí ninguna luna o agregado de lunas del que pudiera afirmarse algo; pero al concepto «luna de Venus» se le atribuye una propiedad, a saber, la de que nada cae bajo él. (Frege, 1972, §46)

Atribuir una propiedad a un concepto, en el sentido expuesto, no debe entonces confundirse con la denominación de un objeto. “Que un objeto caiga bajo un concepto no significa que la palabra que designa el concepto sea el nombre de la cosa.” (Kenny, 1997, p. 100)[43]. Tal confusión puede resultar de que estemos hablando de un objeto de manera indeterminada, pero esto, según Frege, es sólo otra forma de expresar un concepto. En consecuencia, para el ejemplo del agregado de árboles, no se estableció una correspondencia con diferentes números, se intercambiaron diferentes conceptos cuya asignación numérica era equivalente. "Tan pronto como instalamos en sus derechos el verdadero soporte, el concepto, los números se muestran tan exclusivos entre sí como lo son los colores en su campo." (Frege, 1972, §48); los números no conciernen a las cosas, ni a ningún objeto en general, éstos se asignan a conceptos bajo los cuales pueden o no caer objetos con distintos atributos (perceptibles o no perceptibles).

El anterior esquema ayuda a delimitar las nociones de *existencia* y *unicidad*, las cuales es preciso concebir como propiedades que se afirman de conceptos[44]: la existencia es una propiedad que se afirma de un concepto si hay por lo menos un objeto que caiga bajo él (si no le pertenece[45] el número cero, en palabras de Frege, la negación del número cero). Análogamente, la unicidad es una propiedad que se afirma de un concepto si para cualquier par de objetos a, b que caigan bajo él, se puede concluir que a=b[46], en este caso, al concepto le pertenecerá el número 1. Es claro, cómo la propiedad remite a la pertenencia de un número y no al número como tal. Es en este sentido en el

[43] Sin embargo, es posible obtener un nombre propio que designe un objeto, a partir de una palabra para concepto. "Un término conceptual general designa precisamente un concepto. Únicamente con el artículo determinado o con un pronombre demostrativo puede tomarse como nombre propio de una cosa, pero entonces deja de ser término conceptual." (Frege, 1972, §51)

[44] De igual forma, afirma Frege, no hay impedimento para considerarles, bajo ciertas condiciones, como características de un concepto; en este sentido sería tomados como conceptos de segundo nivel, relación diferente a la subordinación.

[45] O corresponde; usaré indistintamente estos dos términos teniendo en cuenta las diversas traducciones al español de la obra fregeana.

[46] Ya fijaremos el sentido de la igualdad para que esto se haga más patente.

que, cuando afirmamos existencia o unicidad nos referimos no a objetos, sino a conceptos.

Con todo esto, es posible establecer una definición de unidad en función de los términos dispuestos con anterioridad: "Unidad con relación a un número finito solamente la puede constituir un concepto tal que delimite claramente lo que cae bajo él y que no admita ninguna división arbitraria." (Frege, 1972, §54). ¿Cómo funciona esto en términos de las distinciones mencionadas? Tomemos el ejemplo al final del parágrafo citado: sea la oración asertórica «Júpiter tiene 4 lunas», en ella, las unidades son idénticas, en virtud del concepto «luna de Júpiter», cada una de las lunas que conocemos, en efecto, caen bajo dicho concepto (I, II, II y IV, si se quisiese poner etiquetas). Ahora, al afirmar que son distinguibles, unas con otras, "se entenderá por ella la capacidad de distinción de las cosas contadas." (Frege, 1972, §54).

Una vez lo anterior, Frege se dispone ya en el capítulo cuarto de sus *Fundamentos*, a formular las definiciones de 0 y 1 así como el paso de un número al siguiente (incremento en uno)[47]. Esto lo hace teniendo en cuenta los referentes en Leibniz y Mill, quienes, recordemos, consideraban que la serie numérica de los naturales se podía obtener adicionando sistemáticamente el número 1. Sin embargo, dado que se solía partir justamente del 0 y el 1, tales definiciones parecían incompletas en tanto dicho par de números no fuesen definidos:

> [...] a un concepto le corresponde el número 0 cuando, sea lo que sea *a*, vale con toda generalidad el enunciado de que *a* no cae bajo este concepto. […] a un concepto F le corresponde el número 1, cuando, sea lo que sea *a*, no vale toda generalidad el enunciado de que *a* no cae bajo F, y cuando de los enunciados «a cae bajo F» y «b cae bajo F» se sigue con toda generalidad que *a* y *b* son el mismo. […] al concepto F

[47]Hay que tener en cuenta que la serie numérica de los naturales se puede obtener con las definiciones de 0, 1 e incremento en uno (función sucesor).

> le corresponde el número (n+1) cuando existe un objeto *a* que cae bajo F y tal que al concepto «que cae bajo F, pero no *a*» le corresponde el número *n*. (Frege, 1972, §55)

Sin embargo, el mismo Frege nos muestra cómo estas definiciones presentan lagunas: por un lado, el sentido de la expresión «al concepto G le corresponde el número n» es tan oscuro como la expresión análoga pero con el incremento en uno (n+1). Tal situación parece desembocar en el hecho de que no parece haber restricción a la hora de intercambiar «n» o «n+1» por cualquier otro nombre propio, incluso aquellos que, de antemano sabemos, no son números, como *Julio Cesar*. Aún más oscuro es el caso en el que intentamos aplicar esto a un número no natural; "Por lo aprendido de Leibniz, sabemos que cada número natural es accesible por este procedimiento. Lo que *no* sabemos es que *sólo* los números naturales son accesibles mediante él." (Kenny, 1997, p. 108).

Por otra parte, de la indeterminación en el sentido de la expresión «al concepto G le corresponde el número n» se desprende la imposibilidad para probar igualdades de la forma «a=b», pues éstas expresan, según lo convenido, que a un determinado concepto le corresponde tanto el número *a* como el número *b*. En otras palabras, queda obstruido el camino para mostrar que a un determinado concepto corresponde un único número y, en consecuencia, poder "distinguir el 0 y el 1 como objetos independientes, reconocibles siempre que se quiera" (Frege, 1972, §56).

Con el objeto de superar los obstáculos presentados, dirijamos nuestra atención a los enunciados de la forma «al concepto F le corresponde el número n». En este tipo de proposiciones, afirma Frege, «n» no es un predicado, sino una parte de éste. De acá que los números individuales como 0 o 1 no puedan tomarse como propiedades de objetos, que era tal vez la sensación que podía dejar una interpretación apresurada de que un enunciado numérico es una afirmación sobre un concepto. "Un número *n pertenece a* un concepto según esta teoría, pero la propiedad del concepto no es el propio número *n*, sino más bien la propiedad de *que el número n le pertenece a él.*" (Kenny, 1997, p. 109); es en este sentido en el que un número no es una propiedad.

Si cada uno de los números figura como parte del predicado, pueden concebirse respectivamente como objetos autónomos. Esto se confirma al remitirnos a la diversidad de enunciados en los que el signo numérico va precedido por un artículo determinado, caso análogo en las ecuaciones numéricas[48]. Adicionalmente:

> […] toda *forma atributiva* de números, como "Júpiter tiene cuatro lunas", puede traducirse a su *forma objetiva*: "el número de lunas de Júpiter es 4", en la cual '4' aparece como objeto determinado. En este último caso, la función de la partícula 'es' no es copulativa; se trata de un 'es' de identidad que identifica el objeto de referencia de 'el número de lunas de Júpiter' con el objeto de referencia de '4'. (González, s.f., p. 2).

Si bien los numerales (nombres propios de los números individuales) en el contexto de una proposición pueden, en apariencia, figurar como adjetivos, desempeñan en realidad un rol de *palabra-objeto* y no de *palabra*-concepto.

Por otra parte, se había mencionado que la independencia de los objetos se podía entender en términos de *autonomía* o autosuficiencia. Sin embargo, y en contraposición con una tendencia muy fuerte de la época, un objeto autónomo no siempre debe tener una representación asociada. El hecho de que no podamos asociar una imagen a una palabra no es razón para negarle autonomía, significado, contenido, ni mucho menos para excluirle del uso del lenguaje.

El significado de un término es independiente de las imágenes que podamos asociar con éste; en este sentido, hay que tener siempre presente el principio de contexto: el significado de un término se busca en el contexto del enunciado donde éste aparece, las eventuales representaciones que de una palabra podamos tener no determinan los

---

[48] Siendo éste el caso por excelencia, ya que las ecuaciones, aparte de ser las expresiones más comunes en la matemática, permiten identificar fácilmente lo que para Frege es la característica esencial de un objeto: *poseer una identidad susceptible de ser reconocida una y otra vez.* Esto se ilustra, por ejemplo, en el enunciado «1+1=2».

elementos lógicos de los juicios que hagamos[49], es suficiente que el enunciado como un todo, tenga sentido. "La autonomía que pretendo que existe para el número no significa que un numeral designe algo por fuera del contexto de un enunciado, sino que con ello sólo quiero excluir su uso como predicado o atributo" (Frege, 1972, §60).

El concepto de número

Con base en las observaciones anteriores, ahora debemos centrarnos en aquellos enunciados que expresan su característica esencial: poseer una identidad susceptible de ser reconocida una y otra vez, enunciados de la forma: *«el número que corresponde al concepto F es el mismo[50] que el número que corresponde al concepto G».* Si el signo a la izquierda del término «es el mismo que» designa algo, hay que disponer de un criterio para determinar si el signo a la derecha de éste designa lo mismo *"*aun cuando no siempre esté en nuestras manos el poder aplicar este criterio." (Frege, 1972, §62).

Frege sugiere reproducir el sentido del enunciado en mención sin hacer uso de la expresión «el número que corresponde al concepto G», en virtud de los inconvenientes ya vistos con enunciados de la forma «al concepto G le corresponde el número n». "De este modo, estableceremos un criterio general para la igualdad de números. Después de haber conseguido un medio tal de concebir un número determinado y de reconocerlo como el mismo, podremos darle un numeral como nombre propio." (Frege, 1972, §62).

En otras palabras, el concepto de identidad o igualdad numérica nos permitirá obtener el concepto de número: como primera medida, Frege acude a Hume, quien define la igualdad entre números por medio de lo que para la época de Frege ya se entendía —y

---

[49] El tener o no representación alguna de la distancia de la tierra al sol es algo que no incide en los eventuales cálculos que de esto lleguemos a hacer.

[50] «Lo mismo» o «igual» pueden usarse indistintamente en este contexto.

que de hecho era bien recibida— como una *aplicación biyectiva*: “Cuando dos números están combinados de tal modo que el uno tiene siempre una unidad en respuesta a cada unidad del otro, decimos que son iguales.” (Kenny, 1997, p. 113)

Este camino, sin embargo, presenta algunos inconvenientes; por un lado, afirma Frege, la relación de igualdad no es exclusiva de los números, por otro, el camino dado por un concepto de igualdad *general*, concebido de antemano, a partir del cual se obtuviese el concepto de número para luego determinar el criterio de igualdad numérica, no es procedente. Hay que partir de una noción general de igualdad (en cuyo caso nos remite a la ofrecida por Leibniz[51]), para luego “formar el contenido de un juicio que pueda concebirse como una ecuación tal, que cada uno de los miembros sea un número.” (Frege, 1972, §63). Es decir, para obtener lo que debe ser considerado bajo la igualdad numérica, y así el concepto de número quedará determinado mediante esta definición.

El mismo Frege reconoce que todo este tránsito es una forma bastante inusual de definir: “Lo que él está proponiendo es definir «número» en términos de una definición de «…es el mismo número que…». (Kenny, 1997, p. 114). Para ilustrar este punto con mayor claridad, se sirve de un ejemplo que tiene que ver con la forma en cómo obtiene el concepto de dirección de una recta[52] de una forma semejante.

El *quid* del asunto radica en que Frege nota cuan útil resulta la noción *extensión conceptual* en todo este desarrollo, pues determina la igualdad en función de “poner conceptos y establecer la igualdad de sus extensiones, igual que cuando decimos: las extensiones de los conceptos ‘recta paralela a *a*’ y ‘recta paralela a *b*’ son iguales, si y sólo si, *a* es paralela a *b*”;” (González, s.f., p. 5), para obtener finalmente el concepto

---

[51] “«Dos cosas son lo mismo, si una de ellas puede ser sustituida por la otra sin perjuicio de la verdad.»” (Frege, 1972, §65 Nota al pie).

[52] Ver parágrafo 64 al 68 de los *Grundlagen.*

dirección: “La dirección de la recta *a* es la extensión del concepto «paralelo a la recta *a*».*”* (Frege, 1972, §68).

Si bien Frege acude a la noción *extensión conceptual*, ésta no recibe un tratamiento completo en los *Fundamentos*[53] y sólo hasta *Función y Concepto*, casi veinte años después, la menciona con sistematicidad pero poco alcance. Por otra parte, hay que tener en cuenta que la otra noción clave, aparte de la extensión conceptual, es la de *equinumerosidad*[54] la cual es al paralelismo o la semejanza, en el contexto de nuestra definición; “el concepto F es *equinumérico* al concepto G, si existe la antedicha posibilidad[55]” (Frege, 1972, §68).

Siguiendo el esquema de definición del concepto de dirección, Frege define la expresión «El número que corresponde al concepto *F*», como la extensión del concepto «equinumérico al concepto *F*». ¿Cómo llega esto a funcionar? Veamos un ejemplo: el número que corresponde al concepto *días de la semana es* 7, pues, sabemos que los días de la semana son lunes, martes, miércoles, jueves, viernes, sábado y domingo. Hay que notar que si bien se hace uso del número siete en nuestra ejemplificación, dejando así cierta sensación de circularidad, en la definición, como tal, no se acude estrictamente a ningún número en particular. Una forma de entender la figura de la aplicación

[53] Sólo en unas cuantas líneas en un pie de página, aludiendo, por un lado, que en últimas podría usarse indistintamente «extensión conceptual» y «concepto», lo cual puede resultar muy confuso, y por otro, alude a que presupone que se sabe lo que es la extensión de un concepto, lo cual resulta muy vago. Según Kenny (1997) “Para los lógicos anteriores a Frege, la extensión de un concepto es la totalidad de objetos que caen bajo él” (p.116).

[54] Noción que corresponde en teoría de conjuntos con lo que se denomina «equivalencia» o «equipolencia», relación que se da entre dos conjuntos, en caso de poder establecer una aplicación biyectiva entre ellos. Recordemos que una aplicación es biyectiva si es inyectiva (uno a uno) y sobreyectiva. Cabe mencionar que usaremos el término «biunívoca» indistintamente para referir a lo mismo.

[55] La de establecer la aplicación biyectiva.

biyectiva[56] consiste en remitirse al ejemplo de los platos y los cuchillos en el que el camarero “no necesita contar unos con otros; todo lo que tiene que hacer es asegurarse de que hay exactamente un cuchillo junto a cada plato.” (Kenny, 1997, p. 119).

En este sentido, podemos encontrar diversidad de conceptos equinuméricos al concepto mencionado: *colores del arcoíris, pecados capitales, etc.* “dos conceptos *F* y *G* son equivalentes numéricamente si los objetos que caen bajo *F* pueden ser puestos en correspondencia biunívoca con los objetos que caen bajo *G”* (Kenny, 1997, p. 118).

De esta forma, el número que pertenece al concepto *días de la semana* es la extensión del concepto *equinumérico al concepto días de la semana*, caso análogo cuando reemplazo al concepto *días de la semana* por alguno de los otros conceptos que sean equinuméricos a éste. Ahora bien, la extensión que se genera para cualquiera de estos casos es la clase de los conceptos que comparten la propiedad en mención; ésta sería la presentación del número siete en Frege. Teniendo en cuenta lo anterior, debe ser clara la razón por la que:

> Ahora bien, el enunciado: la extensión del concepto «equinumérico al concepto F» es igual a la extensión del concepto «equinumérico al concepto G» es verdadero si y solo si también es verdadero el enunciado «al concepto F le corresponde el mismo número que al concepto G» (Frege, 1972, §69).

Bajo estas condiciones, es posible concebir a la igualdad numérica con mayor precisión, recordemos que había quedado definida en términos de una aplicación biyectiva, y la intención de Frege es la de no dejar nada bajo sospecha de estar fuera del alcance de la lógica, en consecuencia define:

> Ahora bien, si todo objeto que cae bajo el concepto *F*, se halla en la relación Φ[57] con un objeto que caiga bajo el concepto *G*, y si con todo objeto que cae bajo el concepto

[56] También entendida como *correlación biunívoca.*

> *G* está en la relación Φ con un objeto que cae bajo *F*, entonces los objetos que caen bajo *F* y *G* están correlacionados por la relación Φ. (Frege, 1972, §71)

Por ejemplo, si todo estudiante está asesorado por un tutor y si todo tutor asesora a un estudiante, entonces estudiantes y tutores están correlacionados por el asesoramiento. Debe ser claro que esta correlación, no es biyectiva (unívoca en ambos sentidos). Para entender este punto, piénsese en la sociedad colombiana donde los tutores son sobrecargados con varias asesorías; la anterior correlación se adecúa a esta situación. Ahora bien, si nos imaginamos una sociedad ideal en la que cada tutor se le asigna sólo un estudiante y donde, así mismo, a cada estudiante se le asigna un único tutor; estaríamos en frente de una correspondencia unívoca en ambos sentidos. En consecuencia, Frege agrega dos condiciones a la anterior definición para que la correspondencia sea unívoca en ambos sentidos (biyectiva):

> Si *d* está en la relación Φ con *a*, y si *d* está en la relación Φ con *e*, entonces, en general, sean lo que sean *d, a, y e, a* es lo mismo que *e.*
> Si *d* está en la relación Φ con *a*, y si *b* está en la relación Φ con *a*, entonces, en general, sean lo que sean *d, b, y a*, *d* es lo mismo que *b.* (Frege, 1972, §72)

Bajo estos términos, se espera que no quede alguna duda de la naturaleza lógica de la aplicación biyectiva. Así mismo, con estas herramientas se está en condiciones de afirmar que la expresión «el concepto *F* es equinumérico al concepto *G*» significa lo mismo que la expresión "existe una relación Φ que a los objetos que caen bajo el concepto *F* les aplica biyectivamente los objetos que caen bajo *G*" (Frege, 1972, §72). De igual forma, es posible volver al concepto de número para expresarlo en unos

---

[57] En el parágrafo anterior define Frege: "Así como «*a* cae bajo el concepto *F*» es la forma general del contenido de un juicio, que trata de un objeto *a*, también puede admitirse que «*a* se halla en la relación Φ con *b*» es la forma general del contenido de un juicio, que trata del objeto *a* y del objeto *b*." (Frege, 1972, § 71).

términos más contundentes: "«*n* es un número» significa lo mismo que la expresión «existe un concepto tal, que *n* es el número que le corresponde»" (Frege, 1972, §72).

Revisemos lo obtenido, a la luz del escrito de González (s.f.), quien nos remite a la notación simbólica de George Boolos puesta en acción a través de varios artículos referentes al trabajo fregeano, dentro de los cuales destacan *Saving Frege from Contradiction* y *The Consistency of Frege´s Foundations of Arithmetic*, compilados junto con otros 28 artículos en el texto *Logic, logic and logic* (1998), publicado posteriormente a la muerte de Boolos[58]. Tenemos entonces que una biyección es una función tal que:

$$(\forall y\in Y)(\exists! x\in X)[R(x)=y],$$

a partir de dicha notación, el que dos conceptos sean equinuméricos vendría dado por:

$$F\approx G=_{\text{def}}(\exists\varnothing)\{(\forall y\in G)(\exists! x\in F)[R(x)=y]\}.$$

Ahora bien, tomando a la extensión de un concepto F como:

$$Ext(F)=_{\text{def}}\{x|F(x)\},$$

Diremos que la simbolización de la expresión, *el número que corresponde al concepto F es la extensión del concepto «equinumérico al concepto F»*, viene dada por:

$$^{\#}F=_{\text{def}}Ext(\approx F)=_{\text{def}}\{G|G\approx F\}.$$

---

[58] Como veremos, el sistema de Frege generó una paradoja la cual fue encontrada por Russell antes de que Frege publicara el segundo volumen de las *Leyes Básicas de la Aritmética* (Grundgesetze), esto decepcionó profundamente a Frege e hizo que su trabajo pasara a la historia como lo que algunos llaman "el más genial fracaso". Sin embargo, tuvo que pasar casi un siglo para que en 1983, Crisping Wright postulara una conjetura que sostenía la posibilidad de librar el sistema fregeano plasmado en los *Grundgesetze*, de la inconsistencia producto de la paradoja de Russell, si se reemplazaba el axioma V por el *principio de Hume*; dicha conjetura fue probaba años más tarde por Boolos.

Finalmente, siguiendo la exposición de González (s.f.), respecto a la última definición, «*n* es un número» significa lo mismo que la expresión «existe un concepto tal, que *n* es el número que le corresponde», tenemos que viene expresada por:

$$N(n)=_{\mathrm{def}}\exists G(^{\#}G=n).$$

No es difícil notar que la extensión del concepto «equinumérico al concepto *G*», es un conjunto de conceptos (aquellos equinuméricos a *G*), dado que dicho concepto toma por argumento, no objetos, sino conceptos, es en consecuencia, un concepto de segundo orden (o nivel). Acá encontramos varias cuestiones: por un lado, tendríamos que el número es un conjunto de conceptos, una clase, por otro, el número es la extensión de un concepto de segundo orden, según vimos, las extensiones de conceptos no conllevan lugares vacíos, por tanto, son objetos, en consecuencia, el número es un objeto, claro está, uno muy particular.

Un aspecto importante a destacar, nos remite a la relación «…equinumérico a…», la cual cumple con las condiciones para ser una relación de equivalencia (reflexividad, simetría y transitividad). En virtud de lo anterior, toda partición que se haga constituye una clase de equivalencia (de los conjuntos que tienen una biyección con el concepto en juego). "La razón por la que cabría considerar la relación 'equinumérico a' como una relación de equivalencia es simple: se garantizaría por la existencia de las funciones biyectivas tales, como la *idéntica*, la *inversa* y la *compuesta*, para cualquier biyección dada." (González, s.f., p. 8).

Siguiendo a González (s.f), tenemos que, las clases de equivalencia que se determinan por esta relación generan conjuntos de conceptos, dentro de los cuales uno de estos conjuntos viene a ser la extensión del concepto F, es decir, el número que corresponde al concepto F. Con esto, diremos que, el número que corresponde al concepto F es la clase de equivalencia de F que se obtiene a partir de la relación «…equinumérico a…».

Retomemos nuestro camino: posterior a la reproducción del contenido que se hizo sobre la expresión «*n* es un número», Frege se dispuso a demostrar lo siguiente: "el número que corresponde al concepto F es igual al número que corresponde al concepto G, si el concepto F es equinumérico al concepto G." (Frege, 1972, §73). No entraré en detalles respecto a la prueba de esta afirmación, la cual, en general, no presenta dificultad alguna, a cambio, fijaré mi atención sobre la definición de cada uno de los números, haciendo uso de la notación especial.

Estas definiciones parten de una adecuada selección de conceptos que den cuenta de los conjuntos que en cada caso se requiera. Ahora bien, habíamos dicho que, para nuestro ejemplo del número 7, cualquier concepto equinumérico con el concepto *días de la semana*, serviría de la misma forma para presentar el operar de nuestra definición inicial. Sin embargo, esta libertad de selección aún más con ejemplos tan "mundanos" dejan una incómoda sensación respecto al proyecto fundacional de la matemática en la lógica, dado que definir números en términos de pecados capitales o colores del arcoíris, no suena muy ortodoxo, aún más problemática es la cuestión si se piensa, en general, en la serie infinita de los naturales, ¿qué cosa podría ayudarme a definir algo semejante?

Efectivamente esto es tomado a consideración por Frege, por ello, se encarga de que cada una de sus definiciones, contenga términos estrictamente lógicos, haciendo que la libertad de nuestra definición inicial se tome como un aspecto aplicativo de la misma, más no el que le es concerniente a la aritmética. Así las cosas se obtiene que: "Dado que bajo el concepto «desigual consigo mismo» no cae nada, defino: 0 es el número que corresponde al concepto «desigual consigo mismo»[59]." (Frege 1972, §74). En notación especial:

$$0 =_{def} {}^{\#}\text{Cero},$$

[59] Según Leblanc & Ferrater Mora (1962) éste concepto no presenta lagunas lógicas ya que puede entenderse como la negación de la identidad $\forall x(x=x)$.

En donde:

$$\text{Cero}=_{\text{def}}x\neq x$$

En virtud del principio de identidad, toda cosa es idéntica a sí misma, en consecuencia, es claro cómo ningún objeto cae bajo el concepto en mención. En este sentido, trabajar con un concepto contradictorio adquiere sentido en un punto como éste, dada su singularidad, y no se trasgrede espacio alguno siempre y cuando se mantengan definidos sus límites; "Todo lo que de parte de la lógica y para el rigor de la demostración puede exigirse de un concepto, es una delimitación clara según la cual para cada objeto esté determinado si cae bajo el concepto dado o no." (Frege, 1972, §74).

Habiendo asignado el nombre propio «0» de la forma que antecede, siendo esta asignación una suerte de "asignación por excelencia" en virtud de su naturaleza puramente lógica, debe ser claro cómo *0 es el número que corresponde al concepto desigual consigo mismo* así como el que *0 es la extensión del concepto «equinumérico al concepto desigual consigo mismo»*. En otras palabras *0 es el conjunto de los conceptos equinuméricos al concepto desigual consigo mismo.*

Dispuesto lo anterior es preciso definir los siguientes números, sin embargo, antes de designar el siguiente numeral, hay que definir con anticipación la relación en la que se encuentran dos miembros adyacentes (inmediatamente siguiente) de la serie numérica que se está determinando (números naturales):

> […] existe un concepto *F* y un objeto *x* que cae bajo él de tal tipo que el número que corresponde al concepto *F* es *n,* y que el número que corresponde al concepto "que cae bajo *F*, pero no es igual a *x*" es *m.* (Frege, 1972, §76)

De acuerdo a González (s.f.), en notación especial tendríamos:

$$mS^{\subseteq}n=_{\text{def}}(\exists F)(\exists x)[F(x)|\,{}^{\#}F=n\wedge{}^{\#}F\therefore\{x\}=m],$$

En donde:

$$^{\#}F \therefore \{x\} =_{\mathrm{def}} \{G | G \approx Ext(F \therefore \{x\})\} \text{ y } Ext(F \therefore \{x\}) =_{\mathrm{def}} \{y | F(y) \wedge y = x\}.$$

Dicha definición, puede tomarse, según Frege, como *n sigue inmediatamente a m en la serie de los números naturales.* Veamos la manera en que opera, aplicándola justamente a los miembros que siguen al 0 en la serie numérica. Si tomamos el concepto *idéntico*[60] *a cero*, hay, en efecto, un único objeto que cae bajo dicho concepto; el cero. Por otra parte, no hay objeto alguno que caiga bajo el concepto «igual a 0, pero no igual a 0», lo que nos lleva a concluir que 0 corresponde a dicho concepto.

Con dichos datos, obtenemos que: dado que existe un concepto (idéntico a cero) y un objeto que cae bajo él (el cero), de tal forma que el número que corresponde a dicho concepto es n, y que el número que corresponde al concepto «igual a 0, pero no igual a 0», es 0. Que equivale a afirmar que n (que en este caso denominaremos 1) sigue inmediatamente (es el elemento sucesor) a 0 en la serie de los números naturales. “1 es el número que corresponde al concepto «igual a 0».” (Frege, 1972, §77). En notación especial, González (s.f.):

$$0S^{\subseteq}1 =_{\mathrm{def}} (\exists F)(\exists x)[F(x) | {}^{\#}F = 1 \wedge {}^{\#}F \therefore \{0\} = 0],$$

Donde $0^{=} =_{\mathrm{def}} x = 0$ es tal, que ${}^{\#}0^{=} = 1$ y ${}^{\#}0^{=} \therefore \{0\} = 0$.

Los números que suceden al 1 en la serie numérica natural, se definen de manera análoga, obteniendo así el siguiente listado de los primeros elementos:

> 0 es el número que pertenece al concepto *no idéntico a sí mismo*,1 es el número que pertenece al concepto *idéntico a sí mismo*,2 es el número que pertenece al concepto *idéntico a 0 o a 1*,*3* es el número que pertenece al concepto *idéntico a 0, a 1 o a 2.*
> (Kenny, 1997, p. 125)

---

[60] O igual.

Conclusiones

Luego del concepto de número y de definir algunos números individuales, Frege procede, en lo que resta de los *Fundamentos*, a probar que cada número en la serie numérica tiene otro que le sucede para finalizar con la inducción matemática y los números infinitos. A este punto es posible afirmar que el proyecto fregeano, en líneas generales, satisface las diferentes exigencias planteadas y en consecuencia abona terreno para mostrar cómo las leyes de la aritmética probablemente se pueden fundamentar en principios lógicos.

Es bien sabido que la prueba definitiva de este proyecto venía dada en términos de la posibilidad de formalizar las ideas expuestas en los *Fundamentos*, por medio del lenguaje simbólico de la conceptografía. Frege pretendió consolidar esta empresa por medio de *Los principios de la aritmética* (1964), obra producida a lo largo de dos volúmenes. Sin embargo, "Frege anuncia que el único punto susceptible de plantear alguna dificultad estarían en conexión con el quinto de sus axiomas" (Kenny, 1997, pág. 186). En este sentido, si bien Frege (1964) mantiene su concepción de número gestada años antes en los *Fundamentos*, el papel de los valores de funciones y de las extensiones conceptuales, comenzó a ser significativamente determinante.

Esto se vio reflejado en el quinto axioma que postula en sus *Principios*, el cual relaciona cursos de valor y valores de funciones. "V. $\left(\acute{\varepsilon}f(\varepsilon) = \acute{\alpha}g(\alpha)\right) = (x)(f(x) = g(x))$ (si los cursos de valor de dos funciones son idénticos, entonces el valor de una función para un argumento dado es siempre el mismo que el valor de otra función y viceversa)" (Kenny, 1997, pág. 220). En este apartado se sugiere un tránsito desde las expresiones funcionales hacia las expresiones de cursos de valor. Para Sluga (1980) las funciones determinan una correlación entre objetos, ahora bien, dicha correlación puede considerarse, como una entidad; curso de valores. Para el caso de los conceptos la correlación consiste en agrupar objetos de acuerdo al valor de verdad que determinan en el momento de saturar la función. Así, podemos entender las extensiones conceptuales como entidades que gestan clases de objetos correlacionados de manera unívoca con valores de verdad.

Ávila (1992), acota el término *vinculación*[61] en un sentido similar al de correlación de Sluga, llegando así a concebir a la extensión conceptual como una vinculación entre los objetos y un valor de verdad, de tal forma que se pueden conciliar dos cuestiones:

> a) que las diferentes funciones que comparten un mismo curso de valores sean diferentes formas de obtener una misma vinculación entre argumentos y valores; y b) que los "conjuntos" asociados a las funciones proposicionales de un argumento, es decir las extensiones de los conceptos, se identifiquen con sus cursos de valores. (Ávila, 1992, pág. 87)

Tenemos que el número es algo que corresponde a un concepto, que le pertenece, así mismo, el número se comporta como un objeto; como parte de un predicado, en ciertas expresiones. Finalmente hemos visto al número como una extensión conceptual, es decir, como un conjunto de conceptos que han sido particionados en términos de su vinculación con valores de verdad. De manera análoga, siguiendo a Ávila (1992), el número que pertenece a un concepto F es la vinculación que reúne a aquellos conceptos equinuméricos a F. "En este sentido, todo concepto está agrupado en algún número de acuerdo con la coordinabilidad de los objetos que pueden agruparse mediante esos modos de agrupar." (pág. 88).

Dependiendo de la forma en cómo se interprete la noción extensión de un concepto se desprenden diversas consecuencias del sistema fregeano. Las más aceptadas conllevan a situaciones análogas a la siguiente: si se considera la extensión del concepto «ser concepto», obtenemos el conjunto de todos los conceptos, ahora bien, el concepto «ser concepto» caería sobre sí mismo. Esto da para pensar en la otra clase de conceptos, en

---

[61] Asociar ciertos elementos con ciertos valores.

otra extensión, generada por aquellos conceptos que no caigan sobre sí mismos: «ser concepto que no cae en sí mismo», desembocando en la conocida paradoja descubierta por Bertrand Russell:

> […] si el concepto 'ser un concepto que no cae en sí mismo' cae en sí mismo, entonces es un concepto que no cae en sí mismo, y, si 'ser un concepto que no cae en sí mismo' no cae en sí mismo, entonces es un concepto que cae en sí mismo, y, por consiguiente, 'ser un concepto que no cae en sí mismo' caería en sí mismo, si y sólo si, no cayese en el concepto 'ser un concepto que no cae en sí mismo' Russell (1964) citado por (González, s.f., p. 12).

Sin embargo, casi una centuria más tarde, Crisping Wright (1983), conjeturó que era posible asegurar la consistencia del sistema fregeano si se reemplazaba el axioma V por el *principio de Hume.* Boolos (1998) al parecer demostró esta conjetura, dejando así un vasto campo de estudio por medio del cual se pueda renovar la vigencia del proyecto fregeano.

Bibliografía

Ávila, A. (1992). La definición de número en Gottlob Frege. *CRÍTICA, Revista Hispanoameríсona de Filosofía*, 73-101.

Boolos, G. (1998). *Logic, logic, and logic.* . London: Harvard University Press.

Dummett, M. (1994). *Origins of analytical philosophy.* London: Duckworth.

Frege, G. (1879). *Begriffsschrift, a formula language, modeled upon that of arithmetic, for pure thought.*

Frege, G. (1891a). Función y concepto. En G. Frege, *Ensayos de semántica y filosofía de la lógica.trad. Luis Manuel Valdés.* Madrid: Tecnos.

Frege, G. (1892 b). Sobre sentido y referencia. En G. Frege, *Ensayos de semántica y filosofía de la lógica. trad. Luis Manuel Valdés* . Madrid: Tecnos.

Frege, G. (1892a). Comentarios sobre sentido y referencia. En G. Frege, *Ensayos de semántica y filosofía de la lógica. trad. Luis Manuel Valdés.* Madrid: Tecnos.

Frege, G. (1892c). Sobre concepto y objeto. En G. Frege, *Ensayos de semántica y filosofía de la lógica. trad. Luis Manuel Valdés.* Madrid: Tecnos.

Frege, G. (1904). ¿Qué es una función? En G. Frege, *Ensayos de semántica y filosofía de la lógica. tradu. Luis Manuel Valdés,* . Madrid: Tecnos.

Frege, G. (1906a). Cartas a Husserl. En *Ensayos de semántica y filosofía de la lógica. Trad. Luis Manuel Valdés.* Madrid: Tecnos.

Frege, G. (1906b). Introducción a la lógica. En G. Frege, *Ensayos de semántica y filosofía de la lógica. trad. Luis Manuel Valdés.* Madrid: Tecnos.

Frege, G. (1918a). El pensamiento: una investigación lógica. En G. Frege, *Ensayos de semántica y filosofía de la lógica. trad. Luis Manuel Valdés.* Madrid: Tecnos.

Frege, G. (1964). *The Basic Laws of Arithmetic.* (M. Furth, Trad.) Berkeley/Los Angeles: University of California Press.

Frege, G. (1972). *Los Fundamentos de la Aritmética, Investigación lógico matemática sobre el concepto de número. Trad. Ulises Moulines.* Barcelona: Editorial Laia.

González, I. (s.f.). *El concepto de número en Los fundamentos de la aritmética de Gottlob Frege.* . Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.

Hilbert, D. (1993). *Fundamentos de la matemática. Trad. Luis Segura.* Mexico D.F.: Mathema.

Kenny, A. (1997). *Introducción a Frege. Trad. Carmen García* . Madrid: Cátedra-Teorema.

Leblanc, H. L., & Ferrater Mora, J. (1962). *Lógica matemática.* México D. F.: Fondo de Cultura Económica.

Luis Valdés. (1998). *Gottlob Frege, Ensayos de semántica y filosofía de la lógica.* Madrid: Tecnos.

Russell, B. (1964). *The Principles of Mathematics.* London: George Allen & Unwin.

Sluga, H. (1980). *Gottlob Frege.* Londres: Routledge and Kegan Paul.

Wright, C. (1983). *Frege's Conception of Numbers as Objects.* Humanities Press.