



UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA
NACIONAL

Educadora de educadores

DEFINICIÓN Y DESCRIPCIÓN DE UNA FUNCIÓN ASOCIADA A LA MÉTRICA
DEL TAXISTA

FABIAN CENDALES CASTELLANOS
ALEJANDRO HERNANDEZ FORIGUA

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
BOGOTÁ D.C.
2016-1



UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA
NACIONAL
Educadora de educadores

DEFINICIÓN Y DESCRIPCIÓN DE UNA FUNCIÓN ASOCIADA A LA MÉTRICA DEL TAXISTA

Trabajo presentado como requisito para optar con el título de Licenciado en Matemáticas

FABIAN CENDALES CASTELLANOS

Código: 2010240017

C.C: 1075660579

ALEJANDRO HERNANDEZ FORIGUA

Código: 2011140028

C.C: 1026266032

Director:

ALBERTO DONADO

FIRMA DIRECTOR

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
BOGOTÁ D.C.
2016-1

DEDICATORIA

A Dios que es una parte fundamental en las labores y que cada día nos permite tener nuevos conocimientos y nos regala su santa bendición.

A mi hija Mariana Cendales que me inspiro para la culminación de mi carrera universitaria y por tanto a la realización de este trabajo.

A mi padre German Cendales que con su ayuda fue un gran apoyo en mi carrera universitaria.

A los estudiantes de la licenciatura en matemáticas que aportaron con sus comentarios a la realización de este trabajo.

AGRADECIMIENTOS

A el profesor Alberto Donado que fue nuestro asesor en este trabajo de grado y que nos colaboró con los problemas y dudas que se tenían para este trabajo.

A los profesores del departamento de matemáticas por enriquecer nuestros conocimientos a lo largo de nuestra carrera universitaria.

RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN – RAE

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de grado.
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central.
Título del documento	DEFINICIÓN Y DESCRIPCIÓN DE UNA FUNCION ASOCIADA A LA METRICA DEL TAXISTA
Autor(es)	Cendales Castellanos, Fabian; Hernández Forigua, Alejandro
Director	Alberto Donado.
Publicación	Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional, 2016. 92 P.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional.
Palabras Claves	MÉTRICA, BOLAS EN UNA MÉTRICA, MÉTRICA DEL TAXISTA, LEJANIA, DESIGUALDAD TRIANGULAR EN UNA MÉTRICA, FRONTERA, INTERIOR, COMETA, TRAPECIO ISÓSCELES, ESPACIO TOPOLOGICA, BASE PARA UNA TOPOLOGIA.

2. Descripción
<p>Este trabajo surge a partir de una propuesta del profesor Alberto Donado, de generar cónicas utilizando una métrica distinta. Luego de estudiar y trabajar con la métrica del taxista, nos surge la inquietud de que, si es posible, a partir de esta métrica crear otra métrica, y si con esta nueva métrica será posible trazar algunos lugares geométricos. Para esto se empezó por definir la métrica que se iba a utilizar, acotando la métrica del taxista.</p> <p>Nos referimos al término métrica puesto que en un principio se pensó que cumplía todas las condiciones para que lo fuera, pero en la exploración con el programa Geogebra se observó que la desigualdad triangular no se cumplía en algunos puntos del plano, por lo que se concluyó que la función no era una métrica.</p> <p>Nos enfocamos en explorar con el programa para encontrar en que puntos no se cumplía la desigualdad triangular. Desde este momento lo que para nosotros era una métrica paso a ser una función a la cual le dimos el nombre de función lejanía, definida en este trabajo en el primer capítulo. Se estudiaron las propiedades que cumplía y también se pensó en</p>

cómo sería una circunferencia generada con esta función. Luego se le aplicaron nociones topológicas a pesar de no ser métrica, para observar que pasaba con los elementos propios de la topología cuando se generan a partir de una función no métrica. Se trabajó bastante en generar y describir las circunferencias, para luego partiendo de estas y de la definición de bolas, generar y describir bolas con la función lejanía.

3. Fuentes

Las fuentes consultadas que ayudaron en el desarrollo de esta propuesta fueron:

Neira, C (2011). *Topología general*. Bogotá, Colombia: Universidad Nacional de Colombia.

Muñoz, J. (2003). *Topología Básica*. Bogotá, Colombia: Universidad Nacional de Colombia.

Muñoz, J. (2002). *Introducción a la teoría de conjuntos*. Bogotá, Colombia: Universidad Nacional de Colombia.

Horváth, J. (2005). *Introducción a la topología general*. Callege Park, Md Estados Unidos: Universidad de Maryland.

Moise, E. (2009). *Geometría Moderna*. Massachusetts, Estados unidos: Addison Wesley Iberoamérica.

4. Contenidos

Este trabajo se compone de tres capítulos, descritos a continuación:

Descripción de la función lejanía: En este capítulo trabajamos definiendo la función que se va a trabajar, también se hacen demostraciones sobre las cuatro propiedades que cumple una métrica, con lo cual se observa que la cuarta propiedad de una métrica que es la desigualdad triangular no la cumple para algunos puntos. Se observó que algunos puntos para los cuales no se cumple la desigualdad pertenecen a las bolas generadas con la métrica del taxista, esto se pudo conjeturar gracias a la exploración con el programa Geogebra. También se estudia y se demuestran algunas propiedades que cumple la función lejanía, como por ejemplo la mayor lejanía entre dos puntos.

Bolas en la función lejanía: En este capítulo que fue uno de los más intensos y el que requirió más tiempo en su elaboración, se dio características a los tipos de bolas que se encontraban al utilizar la función lejanía, se comenzó mirando las bolas que tenían como radio la mayor lejanía, para poder graficar este tipo de bolas utilizamos el programa Derive 6, puesto que Geogebra no nos permitía graficar este tipo de ecuaciones. en esta parte de la exploración notamos que el programa Derive graficaba siempre el borde de la bola, puesto que este programa grafica solamente igualdades.

Luego se trabajaron bolas donde el centro estaba ubicado en alguno de los ejes y radio cualquiera, se observó que este tipo de bolas eran simétricas respecto a los ejes coordenados, y se profundizó en encontrar las coordenadas para cualquier bola con centro en el eje y radio cualquiera, observando que la frontera de la bola tenía la apariencia de un cometa. Surgió la pregunta de cómo encontrar las coordenadas de cualquier tipo de bolas, ubicadas con el centro en cualquier parte del plano y con un radio cualquiera, observando que el borde de las bolas que no tienen centro en los ejes, tienen como forma un trapecio.

Bolas en la métrica usual y en la función lejanía: En este capítulo miramos como encerrar una bola construida con nuestra función lejanía con una bola construida con la métrica usual, esto lo podemos realizar ya que en el anterior capítulo encontramos las coordenadas de los vértices del borde de las bolas generadas con la función lejanía.

Así mismo se realizó la exploración para poder encontrar ahora una bola de la métrica usual contenida en una bola generada con la función lejanía. También se observó que siempre que se intersecan dos bolas lejanía es posible encontrar una bola contenida en esa intersección. Gracias a lo observado se pudo conjeturar que la colección de bolas generadas con la función lejanía, son base para una topología, y que la topología generada por la colección de B_l es más fina que las generadas por la colección de B_d . Entendiendo como B_l a las bolas generadas con la función lejanía y B_d a las bolas generadas con la métrica usual.

5. Metodología

En la realización de este trabajo de grado utilizamos los siguientes pasos para poder presentar nuestra exploración a toda la comunidad universitaria.

- ❖ Se comenzó con la exploración en el programa Geogebra sobre las características que se observaban entre la distancia entre dos puntos utilizando la definición de la función que se creía en un principio era una métrica, con esta exploración comenzamos a observar algunas características que cumplía la función.
- ❖ Luego surgió la pregunta de si la función que estábamos trabajando era una métrica o no, y se decidió realizar la comprobación de cada una de las propiedades que cumple una métrica, cuando llegamos a comprobar la cuarta propiedad de una métrica que es la desigualdad triangular, se observó que esta se cumplía para algunos puntos y para otros no. Se pasó a seguir realizando exploraciones con el programa Geogebra y a utilizar la geometría dinámica para saber cuáles puntos podíamos caracterizar para que se cumpliera la desigualdad triangular y con cuáles puntos no funcionaba la desigualdad triangular.

- ❖ Utilizando el programa Derive 6 se empezó a graficar bolas en la función que se había definido y mirar cómo se comportaban realizando un cambio el radio. Con ayuda de Derive 6 se observaron características que tenían estas bolas y se pasó a encontrar las coordenadas de los vértices de las cometas que definen los bordes de la bola para cualquier punto que tomáramos como centro y con un radio cualquiera.
- ❖ Se realizaron varias gráficas para encontrar circunferencias contenidas en la métrica usual y en nuestra función lejanía, mirar como realizábamos una circunferencia que encerrara una bola de nuestra función, y también mirar como obteníamos una circunferencia que estuviera contenida en una bola construida con nuestra función.

6. Conclusiones

Observamos que siendo más rigurosos en las exploraciones se obtienen nuevos resultados, tanto que al principio de las exploraciones se creía que era una métrica y después se encontraron varios contraejemplos. El trabajo se centra un poco en desarrollar generalizaciones de las bolas en nuestra función lejanía para así poder encontrar si esta función nos sirve como base para una topología. Dentro de las conclusiones generales, podemos encontrar las siguientes.

- ✓ La función que definimos no es una métrica ya que no cumple la desigualdad triangular.
- ✓ La mayor lejanía entre dos puntos es uno (1).
- ✓ Las bolas que tienen como radio la mayor lejanía tiene como frontera algún(os) cuadrantes del plano cartesiano.
- ✓ Las bolas centradas en alguno de los ejes tienen como frontera un cuadrilátero el cual recibe el nombre de cometa.
- ✓ Las bolas centradas en un punto diferente al (0,0) y a los ejes, tiene como frontera la forma de un trapecio.
- ✓ Podemos encerrar una bola construida con la función lejanía en una circunferencia construida con la métrica usual.
- ✓ Se conjetura que la colección de bolas lejanía es base para una topología.
- ✓ La topología generada por la colección de B_l es más fina que las generadas por la colección de B_d

En cuanto a la tecnología observamos que la utilización de varios programas nos da una mejor observación sobre las funciones que se exploraron en este trabajo. El programa Geogebra nos sirve cómo ayuda para poder observar en que puntos no se cumple la

desigualdad triangular y el programa Derive 6 nos ayuda a conjeturar varias de las proposiciones que se presentaron.

Elaborado por:	Fabian Cendales Castellanos, Alejandro Hernández Forigua.
Revisado por:	Alberto Donado.

Fecha de elaboración del Resumen:	20	07	2016
-----------------------------------	----	----	------

Tabla de contenido

1. INTRODUCCIÓN	12
2. OBJETIVOS	13
2.1. Objetivo general	13
2.2. Objetivos específicos	13
3. CAPITULO No. 1	14
3.1. DESCRIPCIÓN DE LA FUNCIÓN	14
3.2. PROPIEDADES DE UNA MÉTRICA	15
3.3. PUNTOS DONDE NO SE CUMPLE LA DESIGUALDAD TRIANGULAR	20
3.4. MÁS PUNTOS DONDE NO SE CUMPLE LA DESIGUALDAD TRIANGULAR	28
3.4.1. PRIMER REGULARIDAD DONDE NO SE CUMPLE LA DESIGUALDAD TRIANGULAR.....	28
3.4.2. SEGUNDA REGULARIDAD DONDE NO SE CUMPLE LA DESIGUALDAD TRIANGULAR ..	30
3.5. ACOTACIÓN DE LA FUNCIÓN LEJANÍA	32
3.6. PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN LEJANÍA	33
3.6.1. ¿CÓMO SE CALCULA LEJANIA ENTRE DOS PUNTOS?	33
3.6.2. LEJANÍAS GENERALES ENTRE DOS PUNTOS	35
3.7. CONCLUSIONES DEL PRIMER CAPÍTULO	42
4. CAPÍTULO No. 2	43
4.1. FRONTERAS E INTERIOR DE UNA BOLA	43
4.2. TIPOS DE BOLAS	44
4.2.1. Bola tipo 1	44
4.2.2. Bolas tipo 2.....	44
4.2.3. Bolas tipo 3.....	47
4.2.4. Bolas tipo 4.....	49
4.2.5. Bolas tipo 5.....	64
4.2.6. Bolas tipo 6.....	68
4.3. CONCLUSIONES DEL SEGUNDO CAPÍTULO	78
5. CAPÍTULO No. 3	79
5.1. Bolas <i>Bl</i> contenidas en bolas <i>Bd</i>	79
5.2. A partir de la bola <i>Bd</i> encontrar una bola <i>Bl</i> que esté contenida en ella.....	83
5.3. Bolas <i>Bd</i> contenidas en bolas <i>Bl</i>	86
5.4. Conclusión.....	88
5.5. Las bolas <i>Bl</i> como base para una topología sobre \mathbb{R}^2	89

5.6. CONCLUSION DEL TERCER CAPITULO 90

6. BIBLIOGRAFIA 91

INTRODUCCIÓN

En este trabajo definimos una función llamada lejanía, esta función en principio se empezó a trabajar como una métrica, pero luego de una larga exploración en el programa Geogebra y de verificar las propiedades que debe cumplir, se evidenció que esta función no cumple la desigualdad triangular en algunos puntos del plano. A pesar de esto aplicamos nociones topológicas para poder ver qué pasa con los elementos propios de la topología cuando se definen a partir de una función no métrica.

En el primer capítulo se muestran algunas propiedades que cumple nuestra función, en especial la lejanía entre los puntos. Como la función es acotada la mayor lejanía que hay entre dos puntos es uno, por lo que nos enfocamos en mostrar específicamente cuando dos puntos están a mayor lejanía. Primero se hizo una exploración con los programas Derive 6 y Geogebra, para poder conjeturar cuando dos puntos están a mayor lejanía, luego a partir de esas conjeturas entramos a demostrar formalmente lo encontrado.

En el segundo capítulo se procede a definir y describir las bolas abiertas lejanía partiendo de la definición de bolas abiertas en la métrica usual. Se encuentran diferentes tipos de bolas, estos tipos de bolas se caracterizan según su forma, puesto que ésta depende de donde están centradas y que radio tengan. En esta parte del trabajo nos centramos en encontrar algunas regularidades, como, por ejemplo, cuando el borde de la bola define un cuadrilátero y en que coordenadas están los vértices del éste, para luego así poder desarrollar el trabajo que se pretende en el siguiente capítulo.

En el tercer capítulo luego de definir y caracterizar cada tipo de bolas lejanía se procede a compararlas con las bolas de la métrica usual, la idea en esta parte es tratar de encerrar cualquier bola usual en una bola lejanía y cualquier bola lejanía en una usual, este trabajo se hace utilizando el programa Derive 6 y haciendo uso de algunos hechos encontrados durante en el primer y segundo capítulo, en esta parte se conjeturo que para cada bola usual existe una bola lejanía contenida en ella, pero no toda bola lejanía contiene una bola usual. Por último, en la exploración realizada en Derive 6, se pudo evidenciar que siempre que se intersecan dos bolas lejanía, para cualquier punto que pertenezca a esa intersección será posible encontrar una bola lejanía centrada en él, de tal manera que esa bola esté contenida en esa intersección, por lo que se conjeturo que la colección de bolas lejanía es base para una topología.

OBJETIVOS

Objetivo general

Aplicar nociones topológicas a una función asociada a la métrica del taxista y generar objetos propios de un espacio métrico para luego compararlos con los generados con la métrica usual.

Objetivos específicos

- Definir una función asociada a la métrica del taxista.
- Mostrar por que la función no es métrica.
- Mostrar algunas propiedades que cumple la función.
- Aplicar nociones topológicas a la función.
- Generar y describir bolas a partir de la función.
- Utilizar programas de graficación que faciliten la generación de conjeturas con respecto a los objetos a estudiar.
- Comparar las bolas generadas a partir de la función con las bolas generadas con la métrica usual.
- Realizar un documento escrito en el cual se evidencien los resultados obtenidos en la exploración y el trabajo realizado.

CAPITULO No. 1

En este capítulo definiremos una función a la cual le vamos a poner el nombre de función lejanía, analizaremos cada una de las propiedades que cumple una métrica para saber si esta función que se va a definir tiene las mismas características de una métrica. Luego de esto se iniciará a calcular lejanías entre dos puntos ubicados en diferentes partes del plano, para poder encontrar cuanto es la mayor lejanía entre dos puntos.

Se mostrarán también algunas propiedades que cumple la función lejanía estas propiedades las llamaremos teoremas y se hará la demostración de cada una de ellas.

Utilizaremos el programa Geogebra para que nos ayude hacer una mejor visualización y una mejor exploración para cualquier punto ubicado en el plano cartesiano, también se trabajará un poco con el programa Derive 6 para poder realizar algunos gráficos donde se muestren todos los puntos que cumple una condición específica.

DESCRIPCIÓN DE LA FUNCIÓN

Dada una función sobre \mathbb{R}^2 , llamada lejanía entre dos puntos, ésta es definida como:

$$l(A, B) = \begin{cases} \frac{d_t(A, B)}{d_t(A, (0,0)) + d_t(B, (0,0))} & \text{si } A \neq (0,0) \text{ y } B \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } A = (0,0) \text{ y } B = (0,0) \end{cases}$$

Donde:

$l(A, B)$ = lejanía entre el punto A y el punto B.

d_t = distancia del taxista.

$d_t(A, B)$ = distancia del taxista entre el punto A y el punto B.

$d_t(A, (0,0))$ = distancia entre el punto A y el punto (0,0) u origen .

$d_t(B, (0,0)) = \text{distancia entre el punto } B \text{ y el punto } (0,0) \text{ u origen.}$

De una manera más clara, si $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$

$$l(A, B) = \begin{cases} \frac{|x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|}{|x_1| + |y_1| + |x_2| + |y_2|} & \text{si } x_2 \neq 0, x_1 \neq 0, y_2 \neq 0, y_1 \neq 0 \\ 0 & \text{si } x_2 = 0, x_1 = 0, y_2 = 0, y_1 = 0 \end{cases}$$

PROPIEDADES DE UNA MÉTRICA

Definición No. 1.

Sea X un conjunto. Se dice que $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ define una métrica en X si se cumple que:

1. $d(A, B) \geq 0$
2. $d(A, B) = 0 \leftrightarrow A = B$
3. $d(A, B) = d(B, A)$
4. $d(A, B) \leq d(A, C) + d(B, C)$ (Desigualdad triangular)

Podemos trabajar la función lejanía como una función muy cercana a una métrica puesto que cumple algunas condiciones que cumple una métrica.

1. PROPIEDAD No. 1

Si $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$, entonces:

$$l(A, B) \geq 0$$

Puesto que todos los términos están dentro de valor absoluto esta función siempre será positiva.

2. PROPIEDAD No.2

Dados $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ la lejanía entre los puntos A y B es cero, es decir, $(l(A, B) = 0)$ si solo si $A = B$

$$l(A, B) = 0 \leftrightarrow A = B$$

Parte uno

Dados $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ la lejanía entre los puntos A y B es cero, es decir, $(l(A, B) = 0)$ si $A = B$

Demostración:

Si $|x_1| + |y_1| + |x_2| + |y_2| \neq 0$ entonces suponemos que:

$$\frac{|x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|}{|x_1| + |y_1| + |x_2| + |y_2|} = 0$$

Entonces $|x_2 - x_1| + |y_2 - y_1| = 0$

Como $|x_2 - x_1| \geq 0$ y $|y_2 - y_1| \geq 0$ entonces la única manera para que $|x_2 - x_1| + |y_2 - y_1| = 0$ es que $|x_2 - x_1| = 0$ y $|y_2 - y_1| = 0$ por lo que $x_2 = x_1$ y $y_2 = y_1$ en consecuencia $A = B$

Parte dos

Dados $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ si $A = B$ entonces la lejanía entre los puntos A y B es cero, es decir, $(l(A, B) = 0)$

Ahora si $A = B$ entonces

$$x_2 = x_1 \text{ Y } y_2 = y_1$$

Por lo que

$$\frac{|x_1 - x_1| + |y_1 - y_1|}{|x_1| + |y_1| + |x_1| + |y_1|} = \frac{0}{|x_1| + |y_1| + |x_1| + |y_1|}$$

Ahora

$$\frac{|x_1 - x_1| + |y_1 - y_1|}{|x_1| + |y_1| + |x_1| + |y_1|} = 0$$

En consecuencia

$$l(A, B) = 0$$

3. PROPIEDAD No.3

Dados $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ la lejanía entre A y B es la misma lejanía que existe entre B y A.

$$l(A, B) = l(B, A)$$

Si la lejanía entre dos puntos A y B es:

$$\frac{|x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|}{|x_1| + |y_1| + |x_2| + |y_2|}$$

Por propiedades del valor absoluto $|x_2 - x_1| = |x_1 - x_2|$ y $|y_2 - y_1| = |y_1 - y_2|$.

Por la conmutatividad de la suma $|x_1| + |y_1| + |x_2| + |y_2| = |x_2| + |y_2| + |x_1| + |y_1|$

Por lo que

$$\frac{|x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|}{|x_1| + |y_1| + |x_2| + |y_2|} = \frac{|y_2 - y_1| + |x_2 - x_1|}{|x_2| + |y_2| + |x_1| + |y_1|}$$

Por lo tanto $l(A, B) = l(B, A)$

4. PROPIEDAD No. 4

Desigualdad triangular $d(A, B) \leq d(A, C) + d(B, C)$

La función **lejanía** no cumple la desigualdad triangular (ver imagen 1), pero se define como una función cercana a una métrica puesto que en la mayoría de los puntos del plano se cumple esta propiedad. En un principio se pensó que esta función era una métrica, pues al utilizar el programa Geogebra y tomar tres puntos y moverlos por varias partes del plano se cumplía la desigualdad triangular. Pero al ser un poco más rigurosos nos dimos cuenta que en algunos puntos del plano no se cumple esta desigualdad.

Algunos de esos puntos son todos los puntos $(x, y) \in B_t(A, a)$, donde A es el punto (a, a) y B_t es una bola en la métrica del taxista.

.

Nota: recordemos la notación que se utiliza en un espacio métrico cuando uno se refiere a las bolas.

Las bolas se definen como:

Bola centrada en A , con $A(x, y)$ y de radio r , $r \in \mathbb{R}^+$, $B(A, r) = \{(m, n) \in \mathbb{R}^2: d((m, n), A) < r\}$.

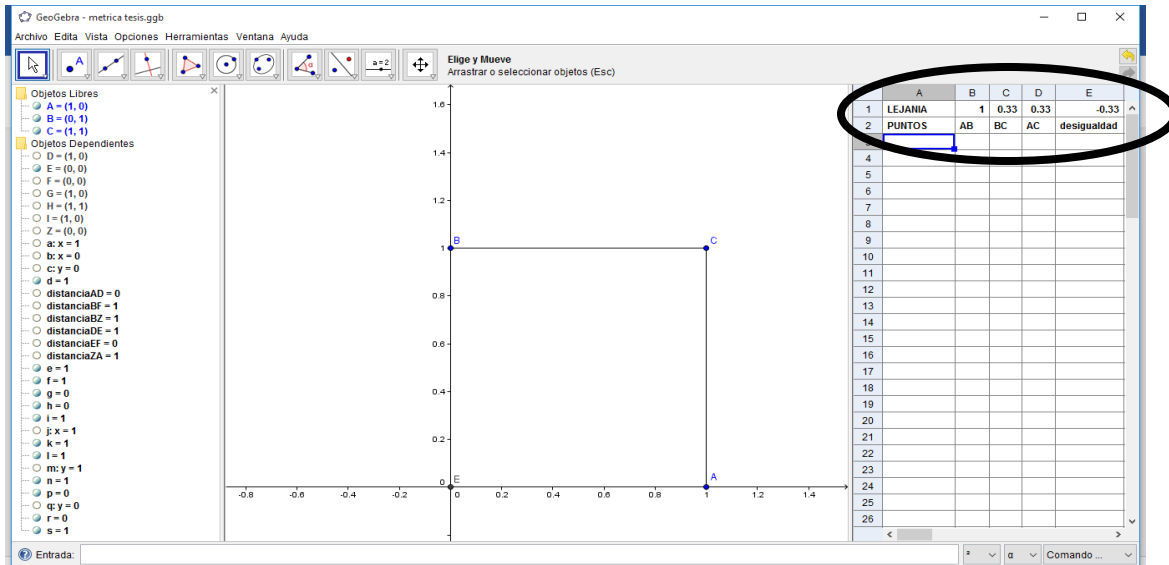
En nuestra notación

- Punto A , con coordenadas $A(x, y)$.
- B_t como bola del taxista.
- $B_t(A, a)$, bola del taxista centrada en $A(x, y)$ y radio $r = a$.

Ejemplo No 1:

Esta parte se evidenció al hacer la desigualdad triangular con los puntos $A(1,0)$, $B(0,1)$ y $C(1,1)$, puesto que al hacer los cálculos esta desigualdad no se cumplía.

En la siguiente imagen observamos los puntos ubicados en el plano cartesiano, así como se nombra en la parte anterior. En la parte superior derecha observamos la lejanía de cada uno de los puntos.



1. Imagen

Desigualdad triangular dados los puntos $A(1,0)$, $B(0,1)$ y $C(1,1)$ parte analítica

$$l(A, B) = l((1,0), (0,1)) = \frac{|1 - 0| + |0 - 1|}{|1| + |0| + |0| + |1|} = \frac{1 + 1}{1 + 1} = \frac{2}{2} = 1$$

$$l(A, C) = l((1,0), (1,1)) = \frac{|1 - 1| + |0 - 1|}{|1| + |0| + |1| + |1|} = \frac{1 + 0}{1 + 1 + 1} = \frac{1}{3}$$

$$l(B, C) = l((0,1), (1,1)) = \frac{|1 - 0| + |1 - 1|}{|1| + |1| + |0| + |1|} = \frac{1 + 0}{1 + 1 + 1} = \frac{1}{3}$$

$$0 \leq l(A, C) + l(B, C) - l(A, B)$$

$$0 \leq \frac{|1 - 1| + |0 - 1|}{|1| + |0| + |1| + |1|} + \frac{|1 - 0| + |1 - 1|}{|1| + |1| + |0| + |1|} - \frac{|1 - 0| + |0 - 1|}{|1| + |0| + |0| + |1|}$$

$$0 \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - 1$$

$$0 \leq \frac{2}{3} - 1$$

$$0 \leq -\frac{1}{3}$$

En este caso se llega a una contradicción entonces:

$$l((1,0), (0,1)) \geq l((1,0), (1,1)) + l((1,1), (0,1))$$

$$l(A, B) \geq l(A, C) + l(B, C)$$

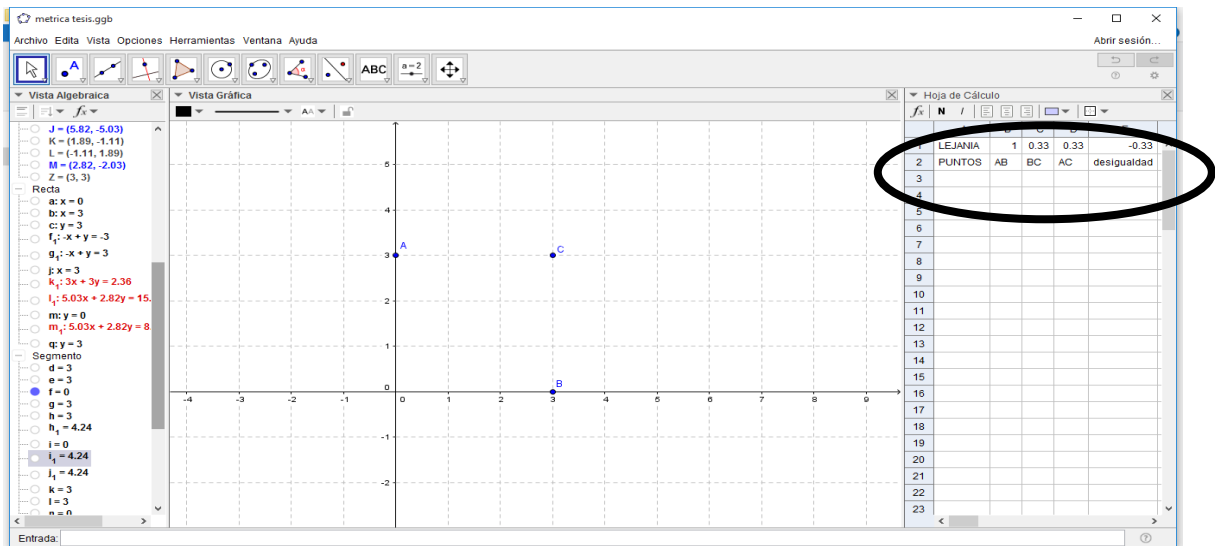
por lo que no se cumple la desigualdad triangular.

PUNTOS DONDE NO SE CUMPLE LA DESIGUALDAD TRIANGULAR

Ejemplo No. 1

Miremos que para cualquier trio de puntos que sean de la forma $A(a, 0)$, $B(0, a)$ y $C(a, a)$ no se cumple la desigualdad triangular.

En la imagen 2 se observa un ejemplo de la ubicación del punto C donde no se cumple la desigualdad triangular.



2 Imagen

TEOREMA A.

Si tenemos puntos $A(a, 0)$, $B(0, a)$ y $C(a, a)$, tal que $a \in \mathbb{R} - \{0\}$, entonces $l(A, B) \leq l(A, C) + l(B, C)$.

DEMOSTRACIÓN.

$$l(A, B) = l((a, 0), (0, a)) = \frac{|a - 0| + |0 - a|}{|a| + |0| + |0| + |a|} = \frac{|a| + |-a|}{|a| + |a|} = \frac{2|a|}{2|a|} = 1$$

$$l(A, C) = l((a, 0), (a, a)) = \frac{|a - a| + |0 - a|}{|a| + |0| + |a| + |a|} = \frac{|-a|}{3|a|} = \frac{|a|}{3|a|} = \frac{1}{3}$$

$$l(B, C) = l((0, a), (a, a)) = \frac{|a - 0| + |a - a|}{|a| + |a| + |0| + |a|} = \frac{|a|}{3|a|} = \frac{1}{3}$$

$$0 \leq l(A, C) + l(B, C) - l(A, B)$$

$$0 \leq \frac{|a - a| + |0 - a|}{|a| + |0| + |a| + |a|} + \frac{|a - 0| + |a - a|}{|a| + |a| + |0| + |a|} - \frac{|a - 0| + |0 - a|}{|a| + |0| + |0| + |a|}$$

$$0 \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - 1$$

$$0 \leq \frac{2}{3} - 1$$

$$0 \leq -\frac{1}{3}$$

En este caso se llega a una contradicción entonces

$$l((a, 0), (0, a)) \geq l((a, 0), (a, a)) + l((a, a), (0, a))$$

$$l(A, B) \geq l(A, C) + l(B, C)$$

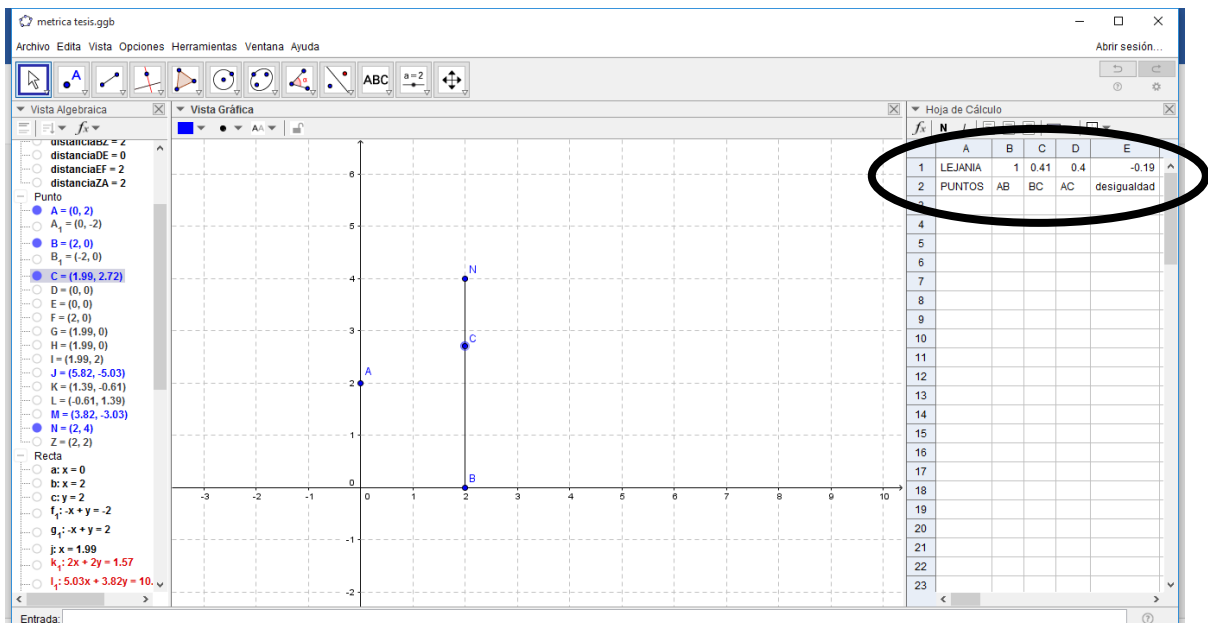


Por lo que no se cumple la desigualdad triangular entre puntos con estas coordenadas.

Ejemplo No. 2

Ahora probaremos que al comparar los puntos $A(a, 0)$, $B(0, a)$ y $C(a, k)$ de tal manera que k sean todos los puntos que están en una diagonal de las bolas en la métrica del taxista con centro en $E(a, a)$ y radio a , tampoco se cumple la desigualdad triangular.

En la imagen 3 se presenta el lugar donde pueden ir ubicado el punto C (segmento \overline{BN}), donde no se cumple la desigualdad triangular.



3 Imagen

TEOREMA B.

Si $A(a, 0)$, $B(0, a)$ y $C(a, k)$ tal que $0 \leq k \leq 2a$ $a \in \mathbb{R} - \{0\}$, entonces $l(A, B) \geq l(A, C) + l(B, C)$.

DEMOSTRACIÓN

Tenemos que:

$$l(A, B) = l((a, 0), (0, a)) = \frac{|a - 0| + |0 - a|}{|a| + |0| + |0| + |a|} = \frac{|a| + |-a|}{|a| + |a|} = \frac{2|a|}{2|a|} = 1$$

Entonces suponemos la siguiente desigualdad

$$l(A, B) \leq l(A, C) + l(B, C)$$

$$0 \leq l(A, C) + l(B, C) - l(A, B)$$

$$0 \leq \frac{|a - a| + |k - 0|}{|a| + |0| + |a| + |k|} + \frac{|a - 0| + |k - a|}{|a| + |0| + |k| + |a|} - \frac{|a - 0| + |0 - a|}{|a| + |0| + |0| + |a|}$$

$$0 \leq \frac{|a - a| + |k - 0|}{|a| + |0| + |a| + |k|} + \frac{|a - 0| + |k - a|}{|a| + |0| + |k| + |a|} - 1$$

$$0 \leq \frac{|k|}{2|a| + |k|} + \frac{|a| + |k - a|}{2|a| + |k|} - 1$$

$$0 \leq \frac{|k| + |a| + |k - a|}{2|a| + |k|} - 1$$

$$0 \leq \frac{|k| + |a| + |k - a|}{2|a| + |k|} - \frac{2|a| + |k|}{2|a| + |k|}$$

$$0 \leq \frac{-|a| + |k - a|}{2|a| + |k|}$$

$$0 \leq -\left(\frac{|a| - |k - a|}{2|a| + |k|}\right)$$

Como $0 \leq k \leq 2a$ entonces:

$$0 - a \leq k - a \leq 2a - a$$

$$-a \leq k - a \leq a$$

Por definición de valor absoluto en desigualdades tenemos que:

$$|k - a| \leq a$$

$$|k - a| \leq |a|$$

$$0 \leq |a| - |k - a|$$

como $|a| - |k - a| \geq 0$ entonces $-\left(\frac{|a| - |k - a|}{2|a| + |k|}\right) \leq 0$, lo que contradice la hipótesis, por tanto:

$$l(A, B) \geq l(A, C) + l(B, C)$$

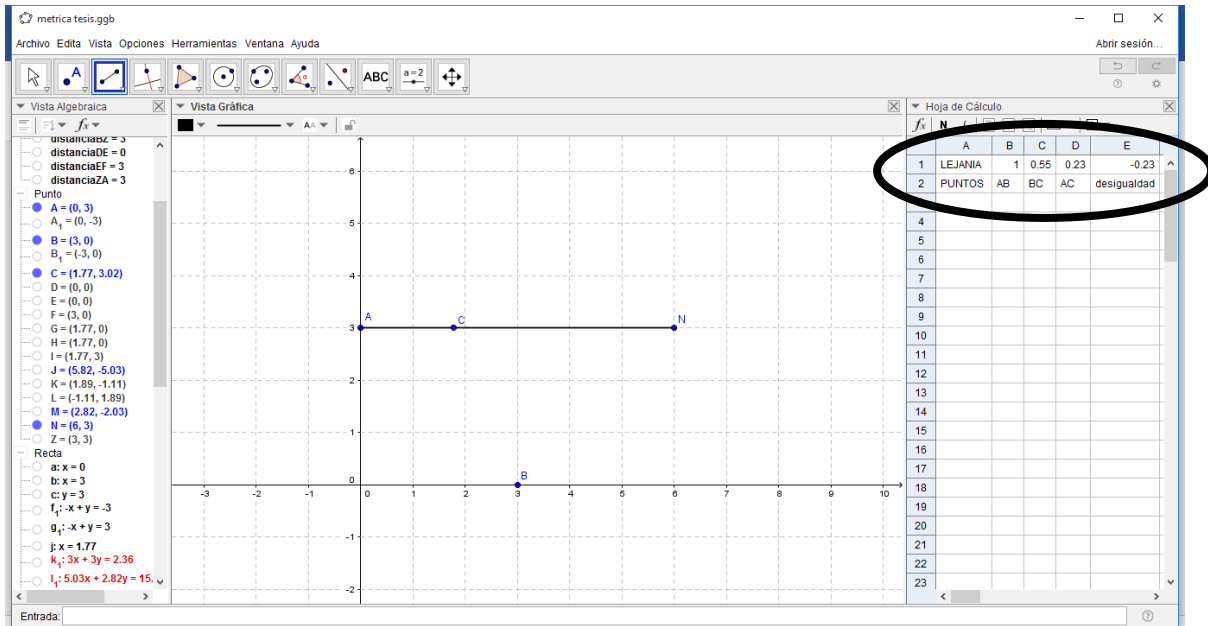


NOTA: Cuando hablamos del punto $C(a, 2a)$ estamos hablando de uno de los vértices del rombo que definen el borde de la bola en métrica del taxista por lo que todos los puntos $C(a, k)$ con $2a \geq k$ están dentro de la bola y pertenecen a esa diagonal.

Ejemplo No. 3

Ahora probaremos que al comparar los puntos $A(a, 0)$, $B(0, a)$ y $C(k, a)$ de tal manera que k sean todos los puntos que están en una diagonal de las bolas en la métrica del taxista con centro en $E(a, a)$ y radio a .

En la imagen 4 se presenta el lugar donde pueden ir ubicado el punto C (segmento \overline{AN}), donde no se cumple la desigualdad triangular.



4 Imagen

TEOREMA C

Si $A(a, 0)$, $B(0, a)$ y $C(k, a)$ tal que $0 \leq k \leq 2a$ y $a \in \mathbb{R} - \{0\}$, entonces $l(A, B) \geq l(A, C) + l(B, C)$.

DEMOSTRACIÓN

Dado que

$$l((a, 0), (0, a)) = \frac{|a - 0| + |0 - a|}{|a| + |0| + |0| + |a|} = \frac{|a| + |-a|}{|a| + |a|} = \frac{2|a|}{2|a|} = 1$$

Además, tenemos que:

$$0 < k < 2a \quad \text{y} \quad A(a, 0); B(0, a); C(k, a)$$

Entonces suponemos la siguiente desigualdad:

$$l(A, B) \leq l(A, C) + l(B, C)$$

$$0 \leq l(A, C) + l(B, C) - l(A, B)$$

$$0 \leq \frac{|k-a|+|a-0|}{|k|+|a|+|a|+|0|} + \frac{|k-0|+|a-a|}{|k|+|0|+|a|+|a|} - \frac{|0-a|+|a-0|}{|0|+|a|+|a|+|0|}$$

$$0 \leq \frac{|k-a|+|a|}{|k|+2|a|} + \frac{|k|}{|k|+2|a|} - \frac{|-a|+|a|}{2|a|}$$

$$0 \leq \frac{|k-a|+|a|+|k|}{|k|+2|a|} - 1$$

$$0 \leq \frac{|k-a|+|a|+|k|}{|k|+2|a|} - \frac{|k|+2|a|}{|k|+2|a|}$$

$$0 \leq \frac{|k-a|-|a|}{|k|+2|a|}$$

$|k| + 2|a| \geq 0$ ya que los valores de a y k están en valores absolutos.

Para se cumpla la desigualdad $0 \leq \frac{|k-a|-|a|}{|k|+2|a|}$ tenemos que se tiene que cumplir que:

$$0 \leq |k-a|-|a|$$

De la inecuación anterior obtenemos:

$$|a| \leq |k-a|$$

Como $|a|$ es positivo entonces $k-a$ también es positivo.

$$|a| \leq k-a$$

$$-(k-a) \leq a \leq k-a$$

$$-(k-a)+k-a \leq a+k-a \leq k-a+k-a$$

$$0 \leq k \leq 2k-2a$$

Tomando una parte de la desigualdad ($k \leq 2k-2a$), obtenemos:

$$k - 2k \leq 2k - 2a - 2k$$

$$k \geq 2a$$

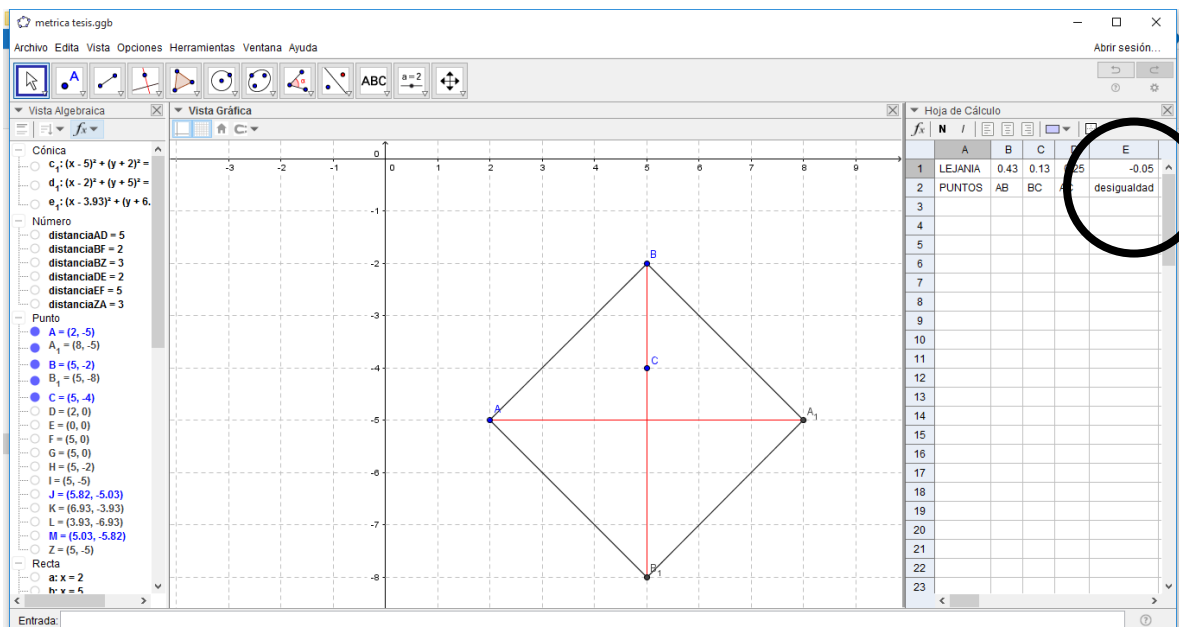
Lo cual contradice la hipótesis

Por tanto $l(A, B) \geq l(A, C) + l(B, C)$.



Cuando hablamos del punto $C(2a, a)$ estamos hablando de uno de los horizontales de la bola en métrica del taxista por lo que todos los puntos $C(k, a)$ con $2a \geq k$ están dentro de la bola y pertenecen a esa diagonal.

En la imagen 5 observamos que en los segmentos que son diagonales a nuestra bola en la métrica del taxista no se cumple la desigualdad triangular. En la parte resaltada podemos observar el valor que se obtienen al realizar $l(A, C) + l(B, C) - l(A, B)$.



5. imagen

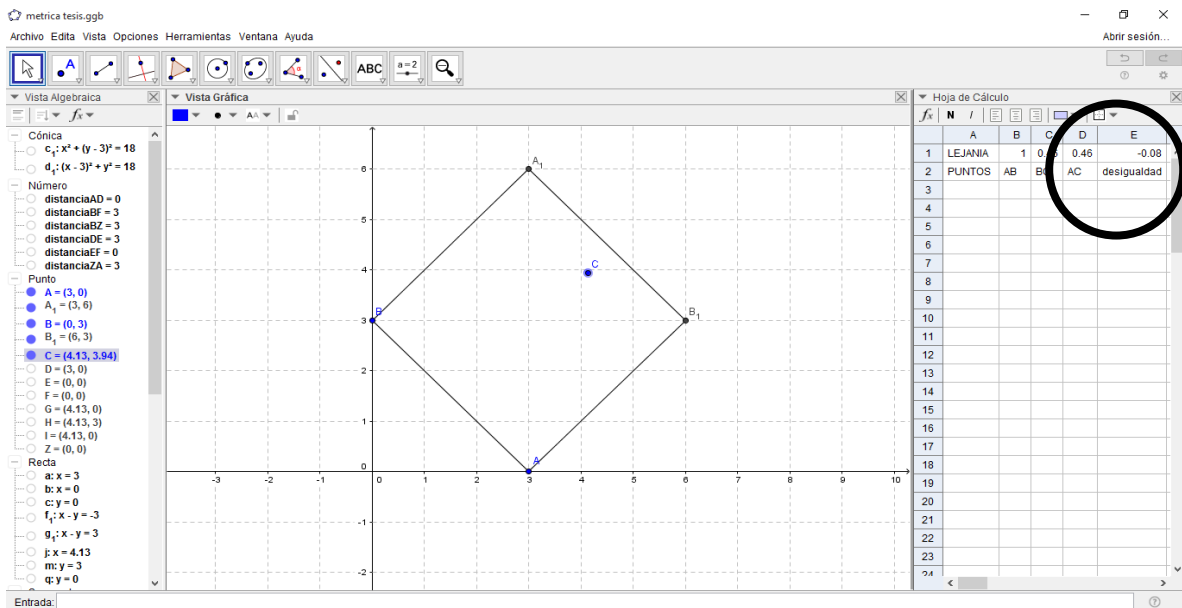
MÁS PUNTOS DONDE NO SE CUMPLE LA DESIGUALDAD TRIANGULAR

Con la exploración que se realizó en el programa Geogebra se encontraron unos puntos en los cuales la desigualdad triangular no se cumplía. Vamos a caracterizar estos puntos y mostrar algunos ejemplos gráficos.

PRIMER REGULARIDAD DONDE NO SE CUMPLE LA DESIGUALDAD TRIANGULAR

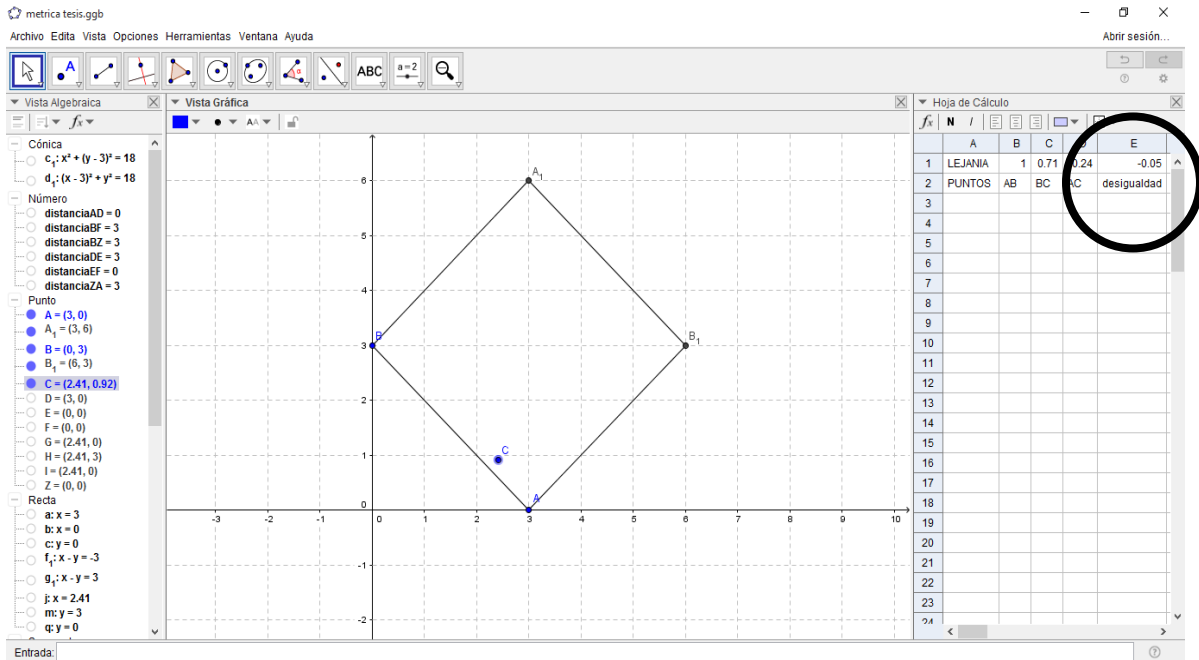
Cuando tenemos los puntos $A(x_1, 0)$, $B(0, y_2)$ y el punto $C(x_3, y_3)$, de tal forma que $x_1 = y_2$, podemos encontrar una gran cantidad de puntos C donde la desigualdad triangular no se cumple.

Vamos a tomar el siguiente ejemplo: $A(3,0)$, $B(0,3)$



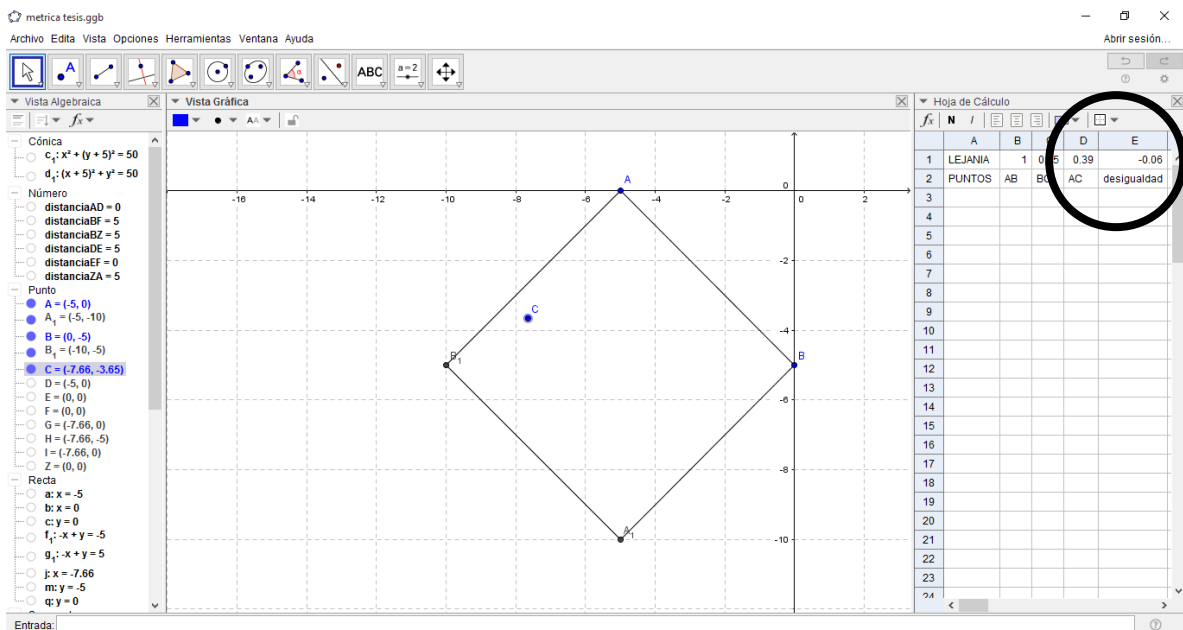
6. Imagen

En el anterior ejemplo observando la parte gráfica la desigualdad triangular no se cumple para el punto C ubicado en este lugar. Seguimos moviendo el punto C y encontramos que la desigualdad triangular no se cumple para ninguno de los puntos que se encuentran ubicados en el rombo de coordenadas (A, B, B_1, A_1) . En la siguiente imagen podemos observar el punto C ubicado en otro lugar dentro del rombo donde tampoco se cumple la desigualdad triangular.



7. Imagen

Si ubicamos los puntos de la siguiente manera tampoco se cumplirá la desigualdad triangular. $A(-5,0)$, $B(0,-5)$



8. Imagen

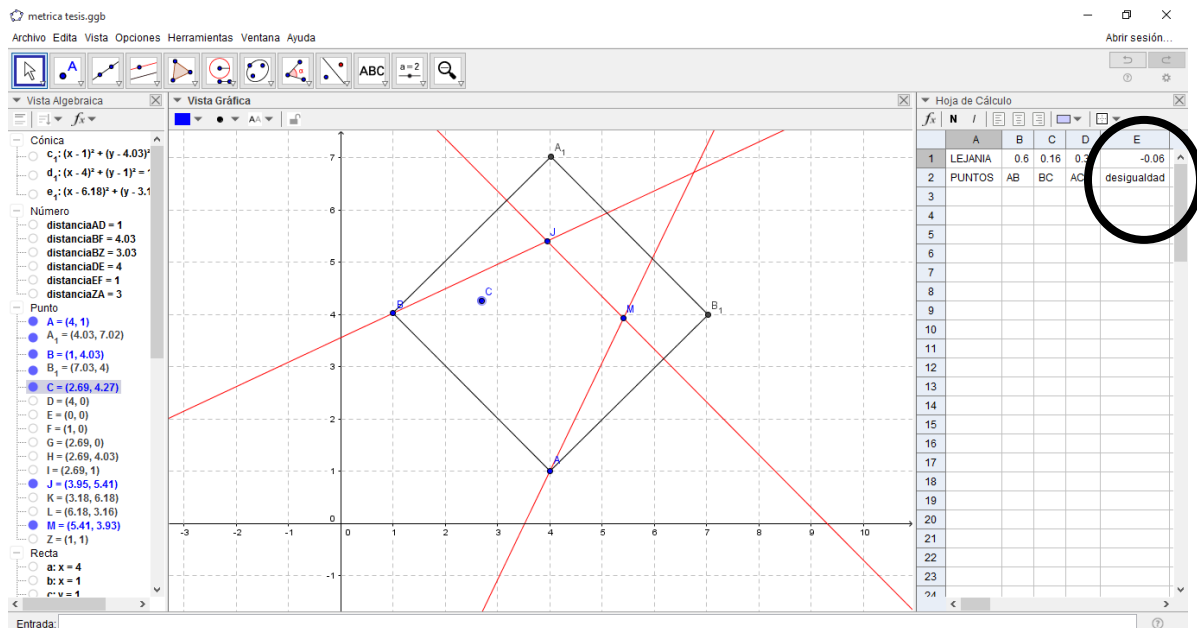
Con lo anterior podemos concluir que la desigualdad triangular no se cumple para dentro de las circunferencias con métrica del taxista centradas en el punto (a, a) , $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

Si tenemos los puntos $A(a, 0)$, $B(0, b)$ y el punto $C(x_3, y_3)$, de tal forma que $|a| = |b|$, donde $a \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R}$, entonces la desigualdad triangular no se cumple para los puntos que pertenecen a la bola en la métrica del taxista centrada en (a, b) .

SEGUNDA REGULARIDAD DONDE NO SE CUMPLE LA DESIGUALDAD TRIANGULAR

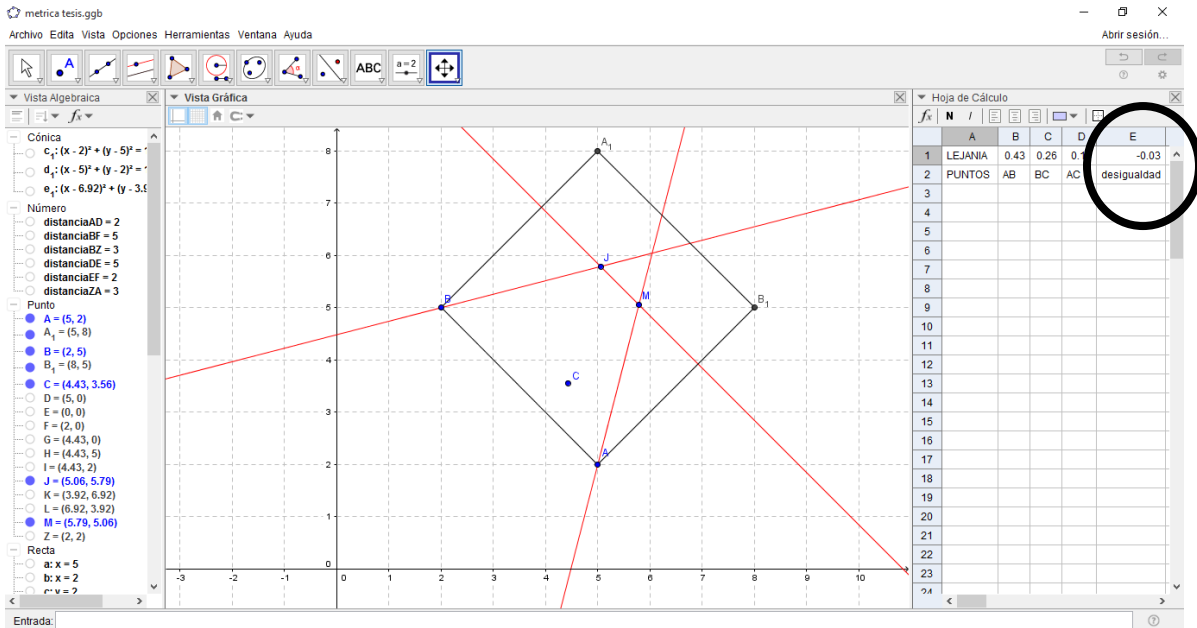
Cuando exploramos un poco más, lo que se realizó fue mirar los puntos A y B con otro tipo de coordenadas, estas coordenadas son las siguientes: $A(a, b)$, $B(c, d)$ de tal forma que $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ y $|a| = |d|$ y $|b| = |c|$

Un ejemplo es: $A(1,4)$, $B(4,1)$



9. Imagen

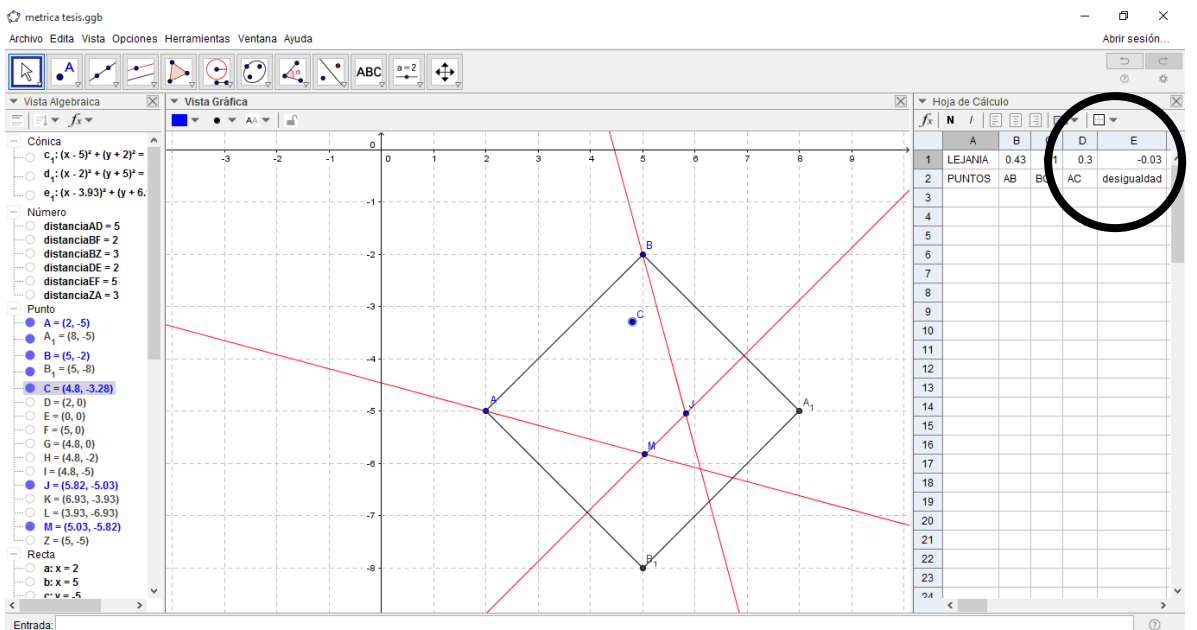
Observamos que la desigualdad triangular no se cumple para los puntos que están en el interior del trapecio isósceles (AMJB). Tomamos otro ejemplo con las características de las coordenadas para los puntos A y B, estos puntos son los siguientes: $A(2,5)$, $B(5,2)$.



10. Imagen

En el ejemplo anterior también observamos que la desigualdad triangular no se cumple para los puntos C que están en el interior del trapecio isósceles (AMJB).

Tomando otro tipo de coordenadas $A(2, -5)$, $B(5, -2)$.



11. Imagen

En el ejemplo anterior observamos que la desigualdad triangular no se cumple para los puntos C que están en el interior del trapecio (AMJB).

Concluimos que teniendo un punto $A(a, b)$ y un punto $B(c, d)$, de tal forma que $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ y $|a| = |d|$ y $|b| = |c|$, se forma la bola en la métrica del taxista con centro en (b, b) y radio $c - a$, en esta bola que obtenemos no se cumple la desigualdad triangular en unos trapecios que están contenidos en la bola con la métrica del taxista donde la base mayor del trapecio es el segmento \overline{AB} .

Para estos trapecios no se pudo encontrar una regla general donde pudiéramos descubrir las coordenadas del trapecio, o que relación tenían los vértices del trapecio con los puntos A y B.

ACOTACIÓN DE LA FUNCIÓN LEJANÍA

Deseamos saber entre cuales valores está acotada nuestra función lejanía, para esto tenemos que por la propiedad No. 1 la función lejanía está definida de la siguiente forma.

$$0 \leq l(A, B)$$

Como la función lejanía está relacionada con la métrica del taxista y está definida de la siguiente forma:

$$l(A, B) = \frac{d_t(A, B)}{d_t(A, (0,0)) + d_t(B, (0,0))} \text{ si } A \text{ y } B \neq (0,0)$$

En la métrica del taxista se cumple la desigualdad triangular, por tanto:

$$d_t(A, B) \leq d_t(A, (0,0)) + d_t(B, (0,0))$$

Cómo las distancias en la métrica del taxista son positivas, podemos reescribir la desigualdad anterior, multiplicándola a ambos lados de la desigualdad por

$\frac{1}{d_t(A, (0,0)) + d_t(B, (0,0))}$, de la siguiente forma:

$$\frac{d_t(A, B)}{d_t(A, (0,0)) + d_t(B, (0,0))} \leq \frac{d_t(A, (0,0)) + d_t(B, (0,0))}{d_t(A, (0,0)) + d_t(B, (0,0))}$$

Por tanto:

$$\frac{d_t(A, B)}{d_t(A, (0,0)) + d_t(B, (0,0))} \leq 1$$

$$l(A, B) \leq 1$$

Con lo anterior podemos decir que la función lejanía está acotada de la siguiente forma:

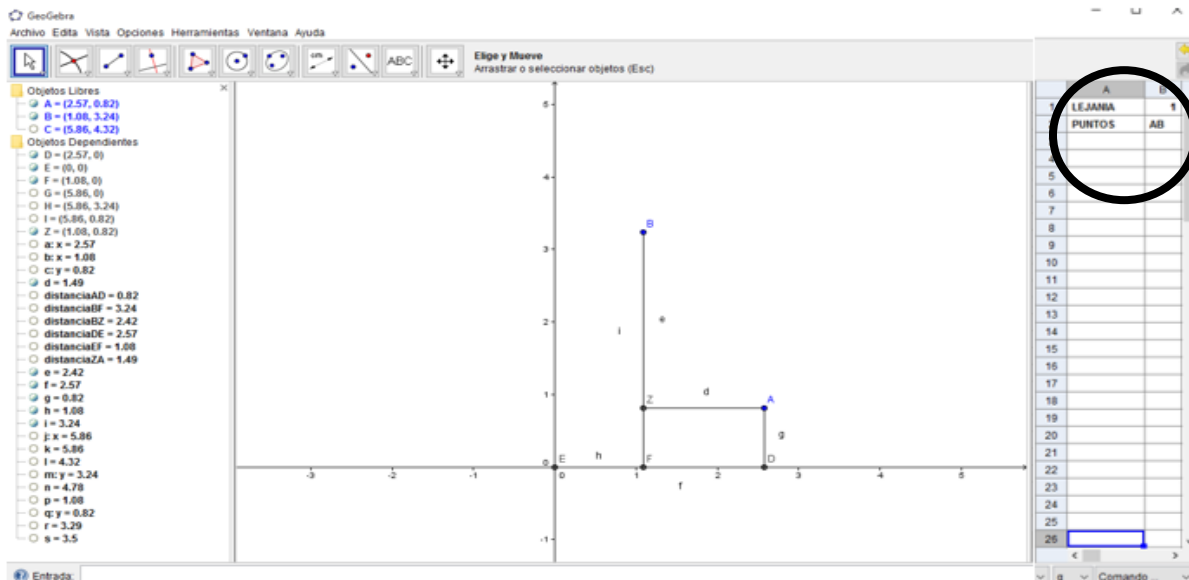
$$0 \leq l(A, B) \leq 1$$

PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN LEJANÍA

¿CÓMO SE CALCULA LEJANIA ENTRE DOS PUNTOS?

En la exploración que se realizó en el programa Geogebra se encontraron algunas características que cumplía la función cuando se cambiaban las coordenadas de los puntos a los cuales se les quiere hallar la distancia. Esta característica se enuncia a continuación.

Para hallar la lejanía entre dos puntos vamos a ayudarnos del siguiente gráfico (ver imagen 12).



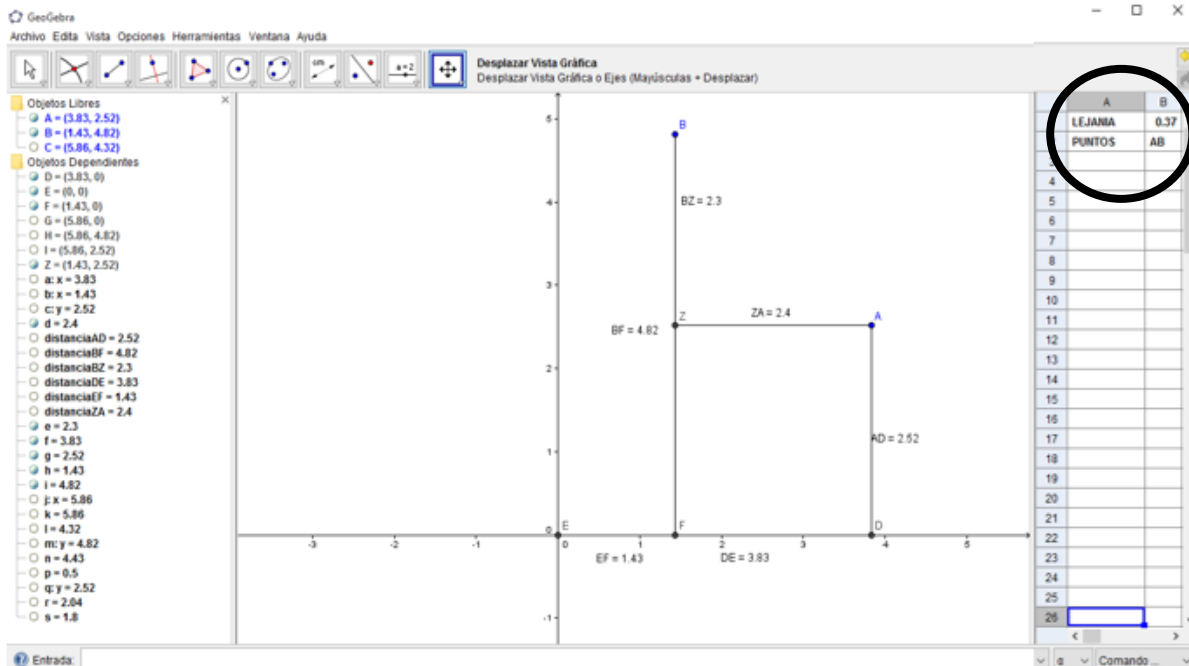
12. Imagen

La lejanía entre dos puntos la tomamos de la siguiente forma:

$$\text{Lejanía}(A, B) = \frac{d_t(A, B)}{d_t(A, (0,0)) + d_t(B, (0,0))} = \frac{e + d}{(i + h) + (g + f)}$$

Observemos con un ejemplo donde se utilice las longitudes de cada segmento.

En la siguiente imagen (ver imagen 13) tenemos los puntos A y B ubicados en el plano cartesiano y las distancias de cada uno de los respectivos segmentos, también tenemos el punto (0,0) que lo nombramos E.



13. Imagen

$$BZ = 2,3$$

$$ZA = 2,4$$

$$\text{distancia taxista } AB = d_t(A, B) = BZ + ZA = 2,3 + 2,4 = 4,7$$

$$AD = 2,52$$

$$DE = 3,83$$

$$\text{Distancia taxista } AE = d_t(A, (0,0)) = AD + DE = 2,52 + 3,83 = 6,35$$

$$BF = 4,82$$

$$FE = 1,43$$

$$\text{Distancia taxista } BE = d_t(B, (0,0)) = BF + FE = 4,82 + 1,43 = 6,25$$

$$\text{Lejanía } (A, B) = \frac{d_t(A, B)}{d_t(A, (0,0)) + d_t(B, (0,0))} = \frac{4,7}{6,35 + 6,25} = 0,37$$

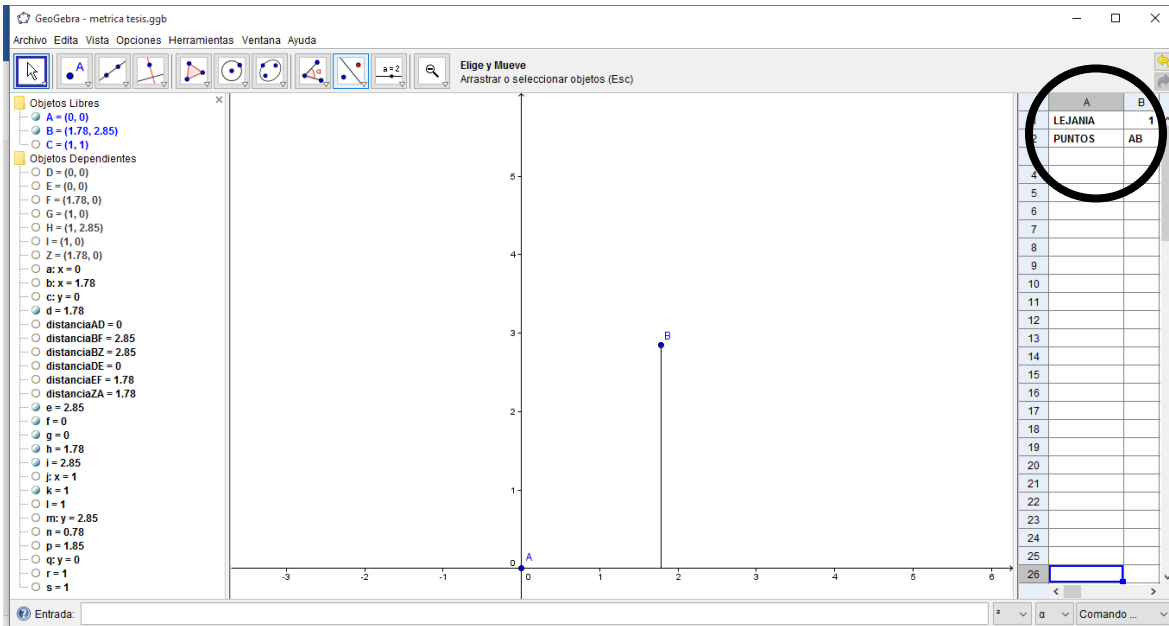
LEJANÍAS GENERALES ENTRE DOS PUNTOS

PRIMERA LEJANIA: LEJANIA ENTRE (0, 0) Y CUALQUIER PUNTO (x, y)

Si tenemos A punto ubicado en (0,0) y un B punto ubicado en cualquier parte del plano (x, y) con $x \neq 0$ y $y \neq 0$, entonces la lejanía entre A y B es siempre uno (1).

Lo que se pretende demostrar en esta parte es que la lejanía entre el origen en el plano cartesiano y cualquier punto que tomemos siempre va a ser uno, realizando la excepción de que los dos puntos no pueden ser iguales.

En la siguiente imagen (imagen 14) podemos observar los puntos A y B, el punto A ubicado en (0,0) y el punto B ubicado en otra parte del plano. En la parte superior derecha de la imagen podemos ver la lejanía que hay entre los puntos A y B.



14. Imagen

Cómo se muestra (imagen 14), se cumple para cualquier punto B ubicado en el plano diferente (0,0).

TEOREMA No. 1

Si tenemos $A(0,0)$ y $B(x,y)$ entonces la mayor lejanía entre A y B es 1.

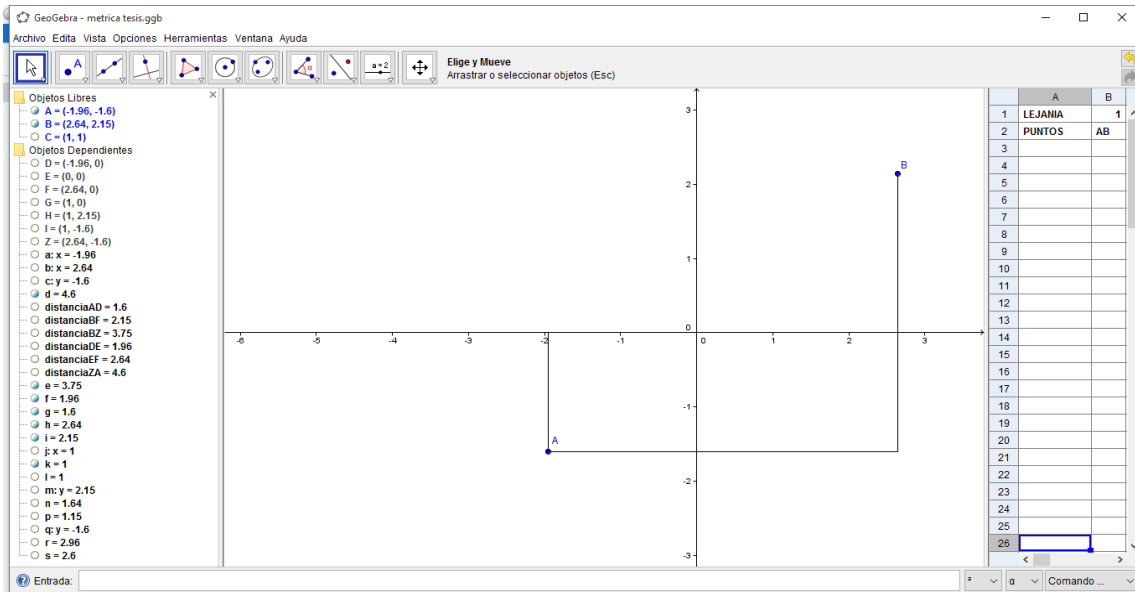
DEMOSTRACIÓN

$$l(A,B) = \frac{|x-0| + |y-0|}{|x| + |0| + |y| + |0|} = \frac{|x| + |y|}{|x| + |y|} = 1 \quad \square$$

SEGUNDA LEJANIA: LEJANIA ENTRE PUNTOS UBICADOS EN EL PRIMER Y TERCER CUADRANTE

Si tenemos A punto con coordenadas (x_1, y_1) donde $x_1 \in \mathbb{R}^-$ y $y_1 \in \mathbb{R}^-$, B punto con coordenadas (x_2, y_2) donde $x_2 \in \mathbb{R}^+$ y $y_2 \in \mathbb{R}^+$, entonces la mayor lejanía que hay entre A y B es siempre uno (1).

En la siguiente imagen (imagen 15) observamos el punto A ubicado en el tercer cuadrante del plano cartesiano y al punto B ubicado en el primer cuadrante del plano cartesiano. En la parte superior derecha de a imagen observamos la lejanía que hay entre los puntos A y B.



15. Imagen

TEOREMA No. 2

Si tenemos $A(a, b)$ tal que $a, b \in \mathbb{R}^-$ y $B(c, d)$ tal que $c, d \in \mathbb{R}^+$ entonces la mayor lejanía entre A y B es 1.

DEMOSTRACIÓN

$$l(A, B) = \frac{|c - a| + |d - b|}{|c| + |a| + |d| + |b|}$$

Realizaremos el siguiente cambio de variable:

$$h > 0 ; h = -a$$

$$k > 0 ; k = -b$$

De tal forma que:

$$l(A, B) = \frac{|c + h| + |d + k|}{|c| + |h| + |d| + |k|}$$

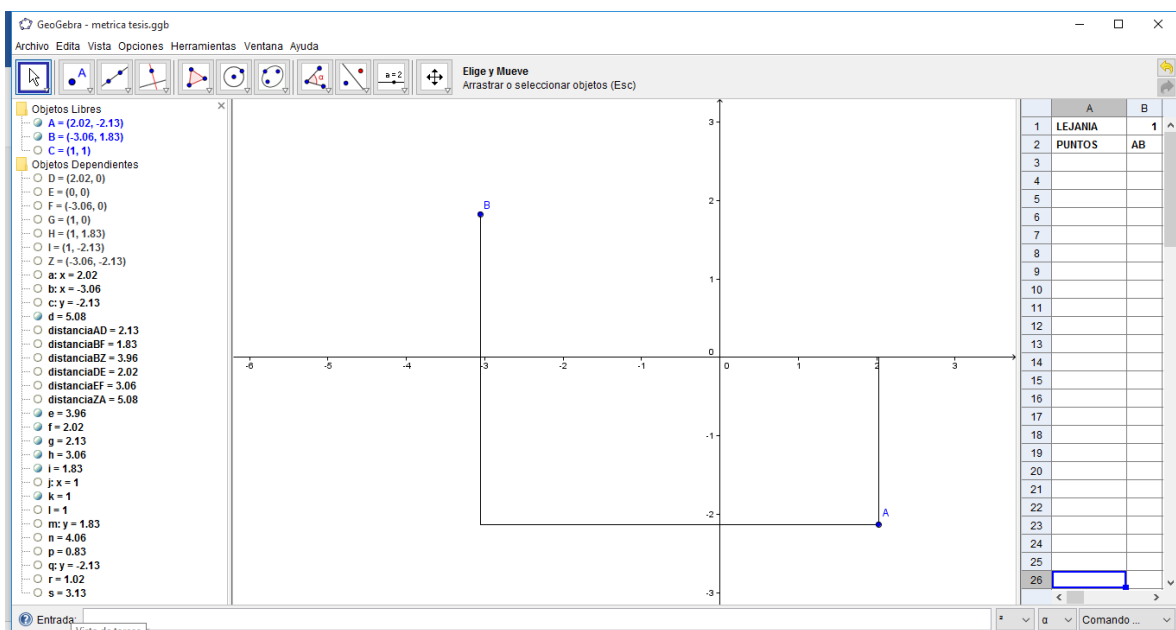
Cómo $c, d \in \mathbb{R}^+$ y $h > 0, k > 0$ tenemos:

$$l(A, B) = \frac{|c| + |h| + |d| + |k|}{|c| + |h| + |d| + |k|} = 1 \quad \square$$

TERCERA LEJANÍA: LEJANÍA ENTRE PUNTOS UBICADOS EN EL SEGUNDO Y CUARTO CUADRANTE

Si tenemos A punto con coordenadas (x_1, y_1) donde $x_1 \in \mathbb{R}^+$ y $y_1 \in \mathbb{R}^-$ (cuarto cuadrante), B punto con coordenadas (x_2, y_2) donde $x_2 \in \mathbb{R}^-$ y $y_2 \in \mathbb{R}^+$ (segundo cuadrante) entonces la mayor lejanía que hay entre A y B es siempre uno (1).

En la siguiente imagen (imagen 16) observamos el punto A ubicado en el cuarto cuadrante del plano cartesiano y al punto B ubicado en el segundo cuadrante del plano cartesiano. En la parte superior derecha de la imagen 13 observamos la distancia que hay entre los puntos A y B.



16 Imagen

TEOREMA No. 3

Si tenemos $A(a, b)$ y $B(c, d)$ tal que $b, c \in \mathbb{R}^-$ y $a, d \in \mathbb{R}^+$ entonces la mayor lejanía entre A y B es 1.

DEMOSTRACIÓN

$$l(A, B) = \frac{|c - a| + |d - b|}{|c| + |a| + |d| + |b|}$$

Realizaremos el siguiente cambio de variable:

$$h > 0; h = c$$

$$k > 0; k = -b$$

$$l(A, B) = \frac{|-h - a| + |d + k|}{|h| + |a| + |d| + |k|} = \frac{|-(h + a)| + |d + k|}{|h| + |a| + |d| + |k|}$$

Por propiedades del valor absoluto tenemos:

$$l(A, B) = \frac{|h + a| + |d| + |k|}{|h| + |a| + |d| + |k|}$$

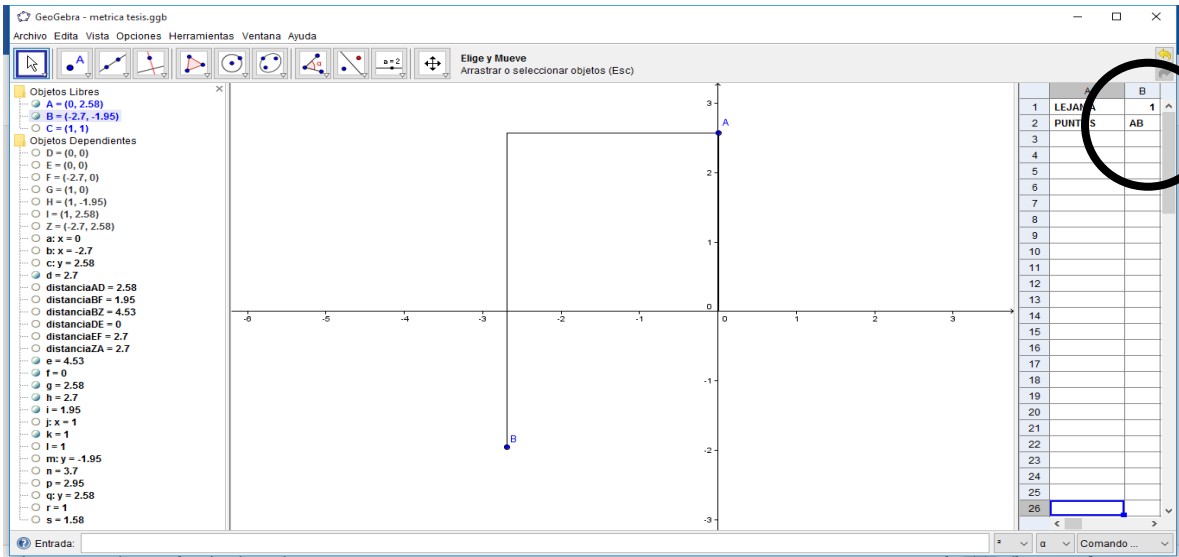
Cómo tenemos $a, d \in \mathbb{R}^+$ y $h > 0, k > 0$, entonces:

$$l(A, B) = \frac{|h| + |a| + |d| + |k|}{|h| + |a| + |d| + |k|} = 1 \quad \square$$

CUARTA LEJANÍA: LEJANÍA ENTRE PUNTO $A(0, y_1)$ Y PUNTO $B(x_2, y_2)$ UBICADO POR DEBAJO AL EJE X Ó SOBRE EL EJE X

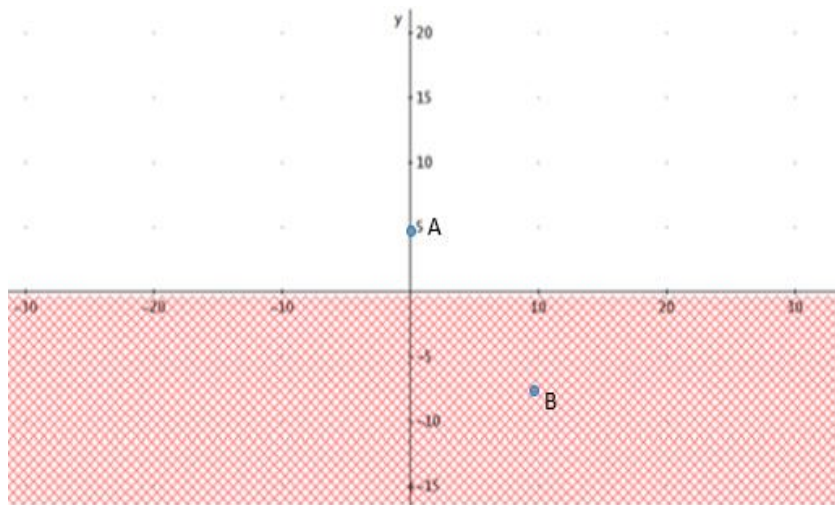
Si tenemos A punto con coordenadas $(0, y_1)$ donde $y_1 \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, B punto con coordenadas (x_2, y_2) donde $x_2 \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ y $y_2 \in \mathbb{R}^- \cup \{0\}$ y $(0, y_1), (x_2, y_2) \neq (0, 0)$, entonces la mayor lejanía que hay entre A y B es siempre uno (1).

En la siguiente imagen (imagen 17) observamos el punto A en el eje y, con la coordenada de y un número real positivo y también al punto B ubicado en el tercer cuadrante. (este punto B puede estar ubicado en el tercer cuadrante o en cuarto cuadrante). En la parte superior derecha encontramos la lejanía entre los puntos A y B.



17. Imagen

En la siguiente imagen (imagen 18) observamos el punto A en el eje y, con la coordenada de "y" un numero real positivo y tambien al punto B ubicado en el eje x (este punto B puede estar ubicado en cualquier parte del eje x o por debajo del eje x), la zona donde puede estar ubicado el punto B es la que esta sobreada.



18. Imagen

TEOREMA No. 4

Si tenemos $A(0, b)$ y $B(c, d)$ tal que $c \in \mathbb{R}, d \leq 0$ y $b \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ entonces la mayor lejanía entre A y B es 1.

DEMOSTRACIÓN

$$l(A, B) = \frac{|0 - c| + |b - d|}{|0| + |c| + |b| + |d|}$$

Realizaremos el siguiente cambio de variable:

$$h > 0 ; h = -d$$

por tanto, obtenemos:

$$l(A, B) = \frac{|c| + |b + h|}{|c| + |b| + |h|}$$

Como $b \in \mathbb{R}^+$ y $h > 0$ tenemos:

$$l(A, B) = \frac{|c| + |b| + |d|}{|c| + |b| + |d|} = 1 \quad \square$$

A continuación, evidenciamos 3 teoremas análogos al teorema No 4, no presentamos su demostración pues es esencialmente igual a la de éste teorema.

TEOREMA No. 5

Si tenemos dos puntos $B(a, b)$ y $A(0, d)$ tal que $a \in \mathbb{R}, b \geq 0$ y $d \in \mathbb{R}^-$ entonces la mayor lejanía entre A y B es 1.

TEOREMA No. 6

Si tenemos dos puntos $A(a, b)$ y $B(c, 0)$ tal que $b \in \mathbb{R}, a > 0, c \leq 0$ entonces la mayor lejanía entre A y B es 1

TEOREMA No. 7

Si tenemos dos puntos $A(a, b)$ y $B(0, d)$ tal que $b \in \mathbb{R}, a < 0, d \geq 0$ entonces la mayor lejanía entre A y B es 1.

CONCLUSIONES DEL PRIMER CAPÍTULO

En este capítulo se realizó la descripción de la función lejanía además se comprobaron cada una de las propiedades que tiene que cumplir una métrica, de esta comprobación resultó que nuestra función lejanía no cumplía la cuarta propiedad que es la desigualdad triangular. Nos centramos en mirar en qué casos no se cumplía la desigualdad triangular moviendo los puntos por todo el plano cartesiano, se encontraron regularidades para algunos puntos en específico y se generalizo para cuando tenemos los puntos ubicados sobre los ejes.

Se encontró que la desigualdad triangular no se cumplía en algunas bolas en la métrica del taxista y tampoco en algunos paralelogramos que se encontraron dentro de las bolas en la métrica del taxista.

Por último, se mostraron algunas propiedades que cumplía la función lejanía, como la distancia entre dos puntos, la máxima distancia que hay entre dos puntos y algunas distancias de cuando movíamos los puntos por el plano cartesiano. Estas propiedades se enunciaron como teoremas que fueron demostrados de forma general para cualquier punto en el plano cartesiano.

Se llegaron a dos conclusiones generales en este primer capítulo que son las siguientes:

- ✓ La función lejanía no la podemos definir como una métrica ya que no cumple la desigualdad triangular en algunos puntos del plano cartesiano.
- ✓ La máxima distancia que hay entre dos puntos utilizando nuestra función lejanía es uno.

CAPÍTULO No. 2

Luego de definir la función lejanía y a pesar de que en algunos puntos no se cumple la desigualdad triangular, le aplicamos a ésta función las nociones topológicas como si fuera una métrica. Para ello lo primero que se hizo fue tomar la definición de bola en un espacio métrico y adaptarla a esta función.

Para realizar las exploraciones que se trabajaran en este capítulo, dejaremos a un lado el programa Geogebra y vamos a utilizar el programa Derive 6, y que en este programa podemos realizar las gráficas de las bolas en la función lejanía y en Geogebra es un poco más complejo trabajar este tipo de funciones.

Definición de bola en un espacio métrico: Si (X, d) es un espacio métrico, se llama bola abierta centrada en $x \in X$ y de radio $\varepsilon > 0$ al conjunto:

$$B(x, \varepsilon) = \{y \in X : d(x, y) < \varepsilon\}$$

Ahora adaptaremos esta definición para nuestra función lejanía.

Definición: Sea \mathbb{R}^2 el conjunto y $l(A, B)$ la función lejanía, se llama bola abierta lejanía centrada en $A \in \mathbb{R}^2$ y de radio $0 < \varepsilon \leq 1$ al conjunto:

$$B_l(A, \varepsilon) = \{B \in \mathbb{R}^2 : l(A, B) < \varepsilon\}$$

Donde $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$

En otras palabras, podríamos definir este conjunto como:

$$B_l(A, \varepsilon) = \left\{ (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2 : \frac{|x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|}{|x_1| + |y_1| + |x_2| + |y_2|} < \varepsilon \right\}$$

FRONTERAS E INTERIOR DE UNA BOLA

Para poder analizar mejor las gráficas que resultan al intercambiar las coordenadas de los centros y el radio de las bolas, tenemos que referirnos a dos términos en general para poder ver este capítulo:

Interior de una bola abierta lejanía: Sea M una bola abierta lejanía. P Es un punto interior de M , si existe una bola B abierta de la topología usual en \mathbb{R}^2 , tal que $B \subseteq M$.

Frontera de una bola abierta lejanía: Sea W una bola abierta lejanía. P Está en la frontera de W , si toda bola abierta de la topología usual que contenga a P contiene puntos de W y del complemento de W .

TIPOS DE BOLAS

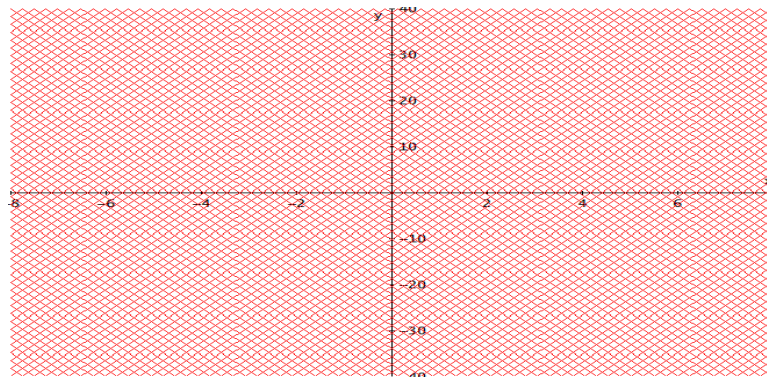
En la función lejanía hay varios tipos de bolas por lo que vamos a caracterizar cada una de ellas para luego tratar de encontrar algunas propiedades.

Bola tipo 1

Bola centrada en el punto $A(0,0)$ y radio $\varepsilon = 1$, esta bola es la más sencilla, puesto que como ya demostramos en el **teorema 1**, todos los puntos del plano están a una lejanía de 1 respecto al punto $(0,0)$, entonces el único punto que pertenecería a esta bola sería el punto A , porque por definición la lejanía del punto A a el mismo es 0.

$$B_l(A, \varepsilon) = \{(x_2, y_2) \in X : l(A, (x_2, y_2)) < \varepsilon\}$$

En la imagen 19 podemos observar que el programa Derive 6 presenta de forma sombreada la gráfica de la frontera de la bola centrada en $(0,0)$ y de radio 1, el interior de esta bola es el punto $(0,0)$.



19 Imagen

Bolas tipo 2

Bola centrada en el punto $A(x_1, y_1)$ donde $x_1 \neq 0$ e $y_1 \neq 0$, y radio $\varepsilon = 1$.

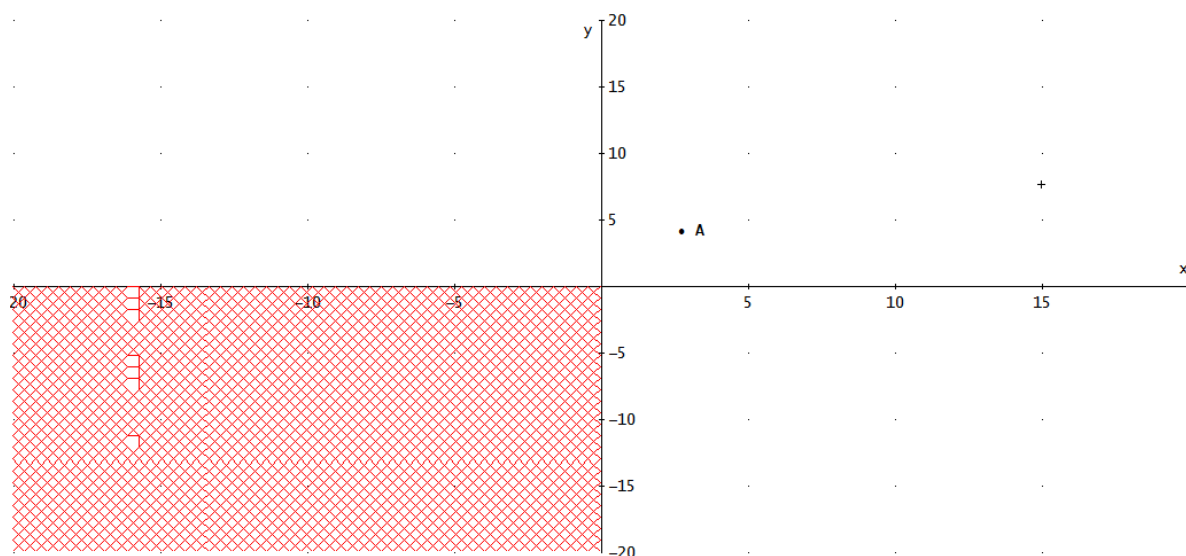
$$B_l(A, \varepsilon) = \left\{ (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2 : \frac{|x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|}{|x_2| + |y_2| + |x_1| + |y_1|} < \varepsilon \right\}$$

$$\forall x_1 \neq 0, \forall y_1 \neq 0$$

Ejemplo No. 1

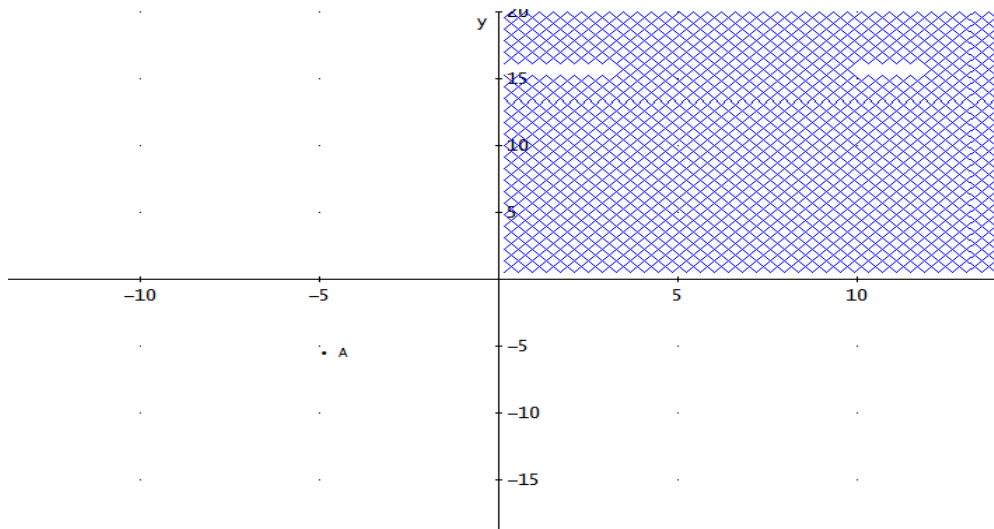
Para este tipo de bolas tenemos que utilizar el **teorema 2**, que dice que la distancia entre los puntos ubicados en los cuadrantes I y III están a una distancia de 1.

En la imagen 20 se observa que la parte sombreada del plano es la frontera de la bola lejanía centrada en el punto A que pertenece al primer cuadrante y de radio 1, también se evidencia que el interior de esta bola son los demás puntos del plano.



20 Imagen

En la imagen 21 se observa que la parte sombreada del plano es la frontera de la bola lejanía centrada en el punto A que pertenece al tercer cuadrante y de radio 1, también se evidencia que el interior de esta bola son los demás puntos del plano.

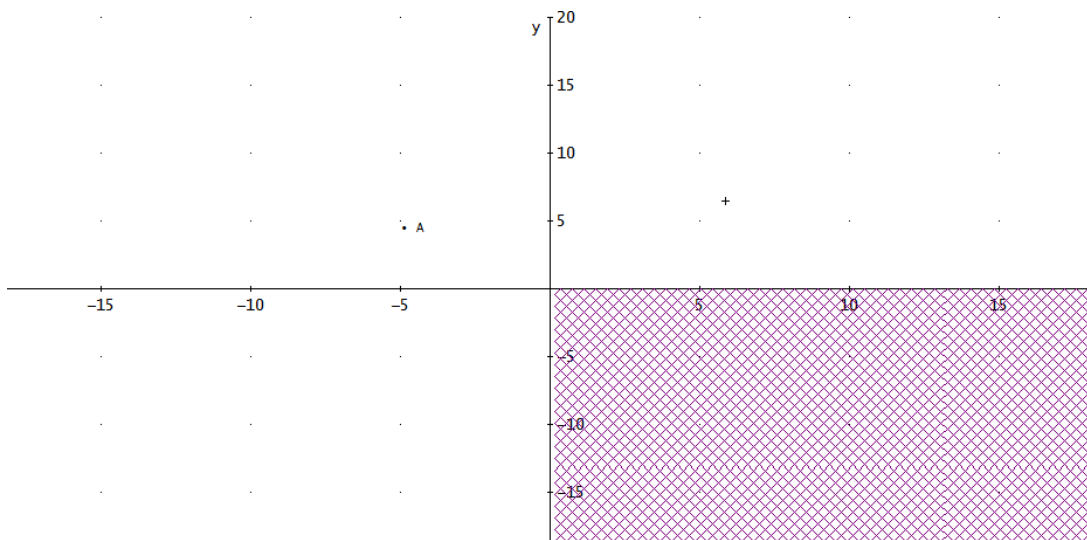


21. Imagen

Ejemplo No. 2

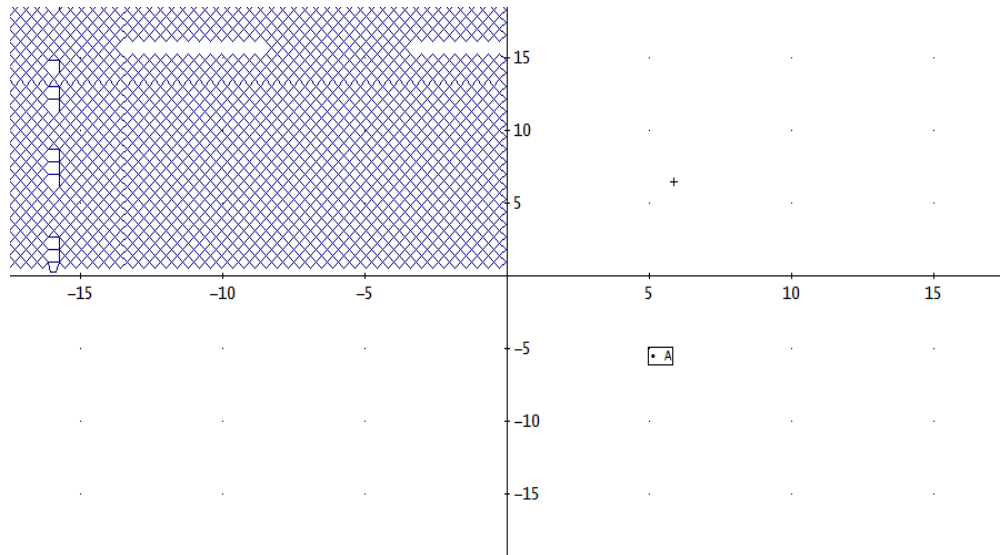
Para obtener otro tipo de bolas, tenemos que utilizar el **teorema 3**, que dice que la distancia entre los puntos ubicados en los cuadrantes II y IV están a una distancia de 1.

En la imagen 22 se observa que la parte sombreada del plano es la frontera de la bola lejanía centrada en el punto A que pertenece al segundo cuadrante y de radio 1, también se evidencia que el interior de esta bola son los demás puntos del plano.



22. Imagen

En la imagen 23 se observa que la parte sombreada del plano es la frontera de la bola lejanía centrada en el punto A que pertenece al cuarto cuadrante y de radio 1, también se evidencia que el interior de esta bola son los demás puntos del plano.



23. Imagen

Bolas tipo 3

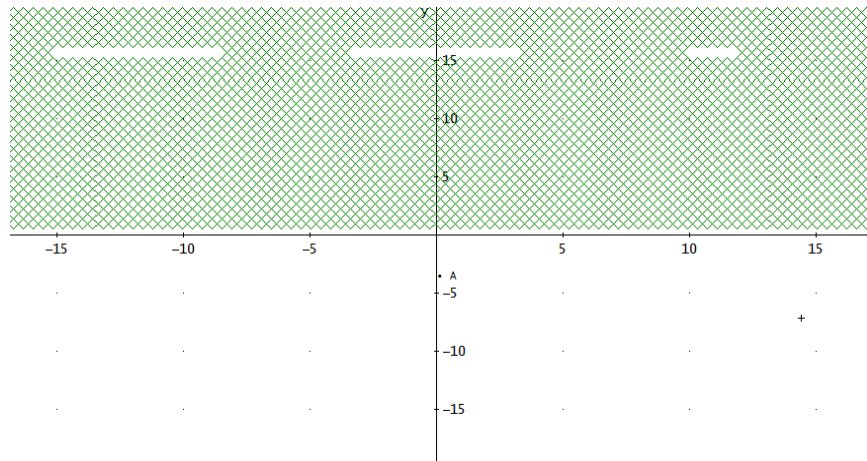
Bola centrada en el punto $A(0, y_1)$ donde $y_1 \neq 0$ y radio $\varepsilon = 1$.

$$B_l(A, \varepsilon) = \left\{ (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2 : \frac{|x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|}{|x_2| + |y_2| + |x_1| + |y_1|} < \varepsilon \right\}, \quad \forall y_1 \neq 0$$

En este tipo de bolas utilizamos el **teorema 4**, donde dice que la distancia de un punto ubicado en cualquiera de los ejes, nos da como resultado que la lejanía está en dos cuadrantes.

Ejemplo No. 1

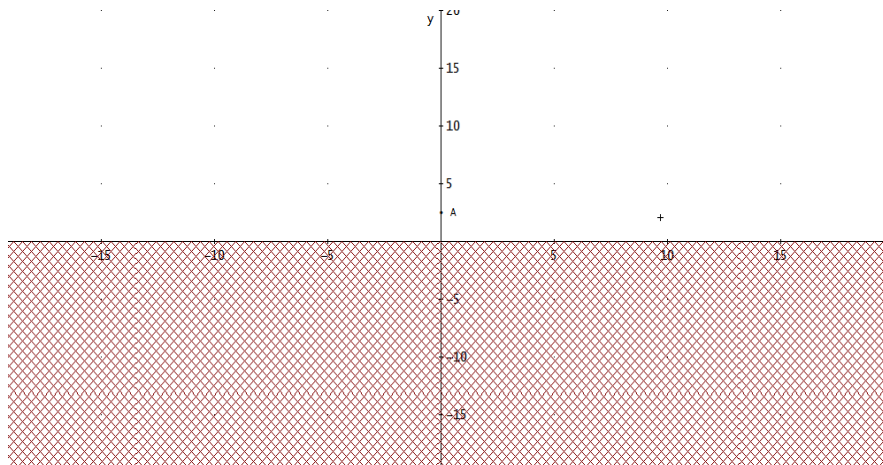
En la imagen 24 observamos el, punto A ubicado en el eje Y negativo y la parte sombreada que es la frontera de la bola lejanía.



24. Imagen

Ejemplo No. 2

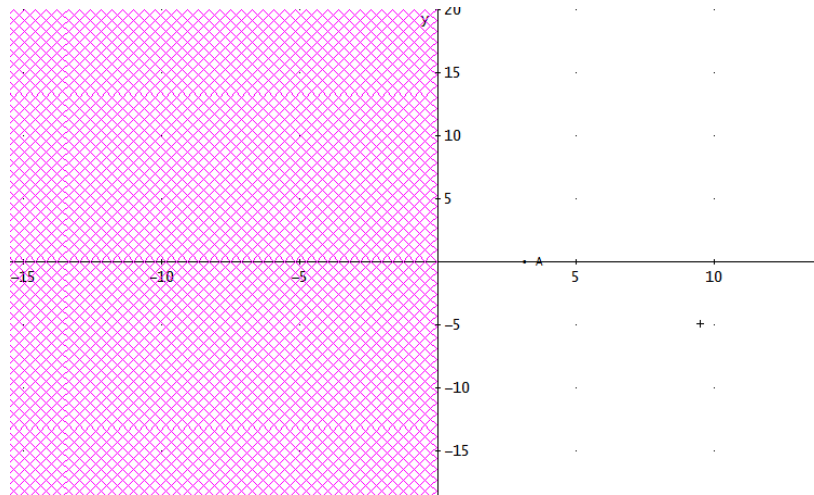
En la imagen 25 observamos el, punto A ubicado en el eje Y positivo y la parte sombreada que es la frontera de la bola lejanía.



25. Imagen

Ejemplo No. 3

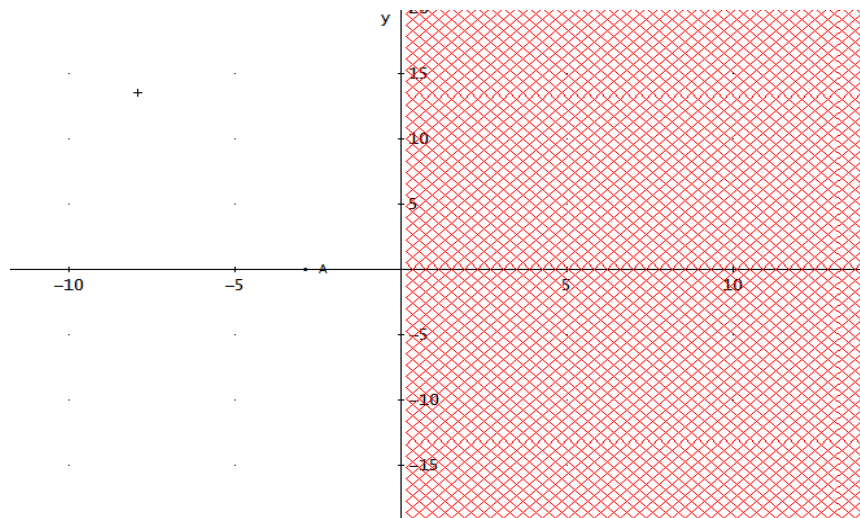
En la imagen 26 observamos el, punto A ubicado en el eje X positivo y la parte sombreada que es la frontera de la bola lejanía.



26. Imagen

Ejemplo No. 4

En la imagen 27 observamos el, punto A ubicado en el eje X negativo y la parte sombreada que es la frontera de la bola lejanía.



27. Imagen

Bolas tipo 4

Bola centrada en el punto $A(0, y_1)$ donde $y_1 \neq 0$ y radio $\varepsilon < 1$.

$$B_l(A, \varepsilon) = \left\{ (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2 : \frac{|x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|}{|x_2| + |y_2| + |x_1| + |y_1|} < \varepsilon \right\}, \quad \forall y_1 \neq 0.$$

Estas bolas son simétricas respecto al eje y , el borde de la bola tiene la apariencia de una cometa. Si se traza la recta $y = y_1$ esta recta intersecta la cometa en los vértices simétricos al eje y (ver imagen 28).

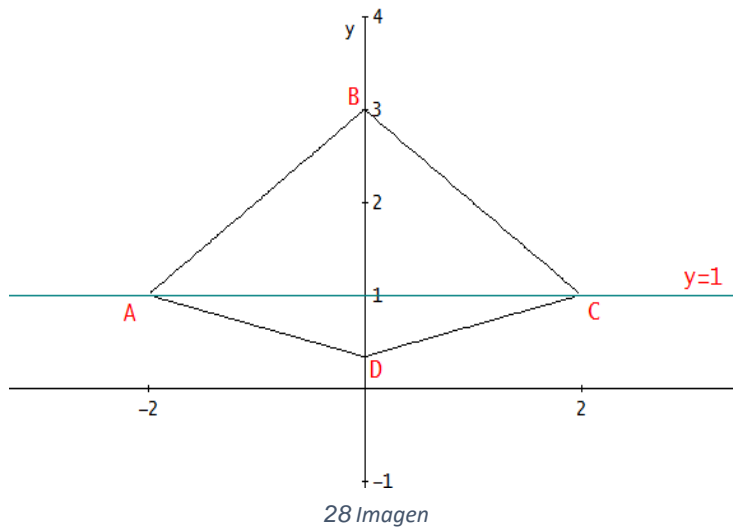
Bolas centradas en el punto $S(0, y_1)$ donde $y_1 \neq 0$ y radio $\varepsilon = \frac{1}{p}$, $\forall p \in \mathbb{N}$.

A continuación, se caracterizarán este tipo de bolas, primero dando ejemplos concretos, para luego llegar a una conjetura.

Bolas centradas en el punto $S(0, y_1)$ donde $y_1 \neq 0$ y radio $\varepsilon = \frac{1}{2}$.

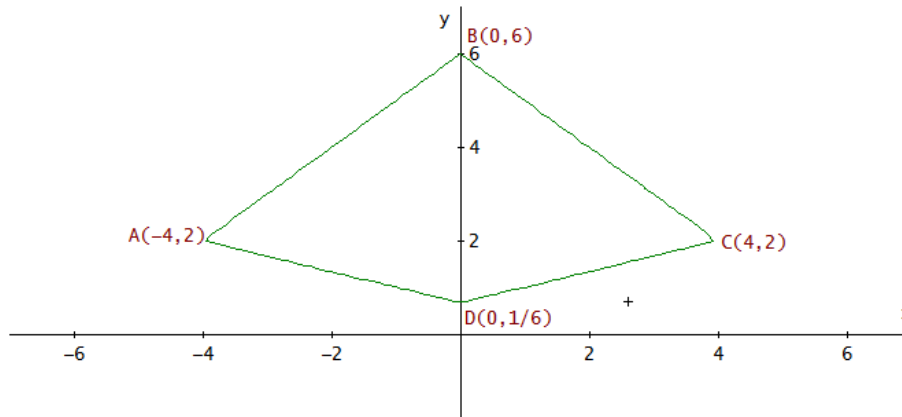
$$B_l\left(S, \frac{1}{2}\right) = \left\{ (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2 : \frac{|x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|}{|x_2| + |y_2| + |x_1| + |y_1|} < \frac{1}{2} \right\}, \quad \forall y_1 \neq 0.$$

- Bola centrada en el punto $S(0,1)$ y radio $\varepsilon = \frac{1}{2}$ (ver imagen 28).



Los vértices de la cometa que están sobre el eje y están en las coordenadas $B(0,3)$ y $D(0, \frac{1}{3})$, y los vértices que son simétricos respecto al eje y están en las coordenadas $A(-2,1)$ y $C(2,1)$.

- Bola centrada en el punto $S(0,2)$ y radio $\varepsilon = \frac{1}{2}$ (ver imagen 29).



29 Imagen

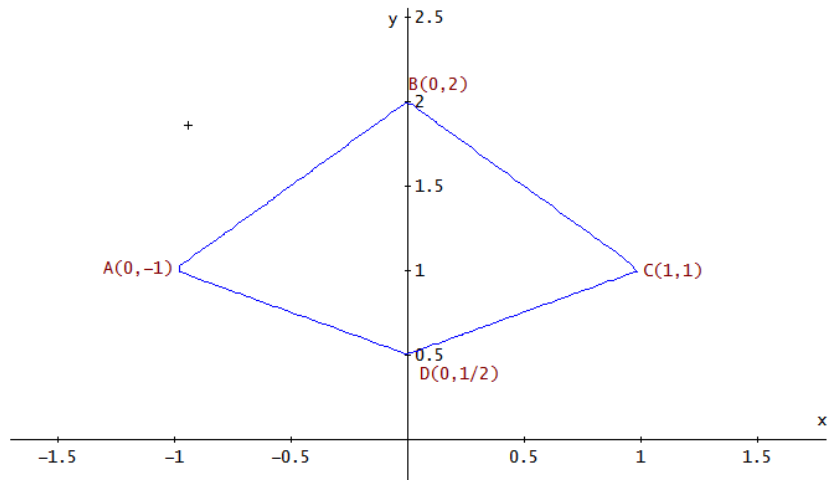
Vértices $B(0,6)$ y $D\left(0, \frac{1}{6}\right)$, $A(-4,2)$ y $C(4,2)$.

Por lo anterior y también por más exploraciones realizadas con el programa Derive 6, se puede concluir que para cualquier bola centrada en el punto $S(0, y)$ y radio $\varepsilon = \frac{1}{2}$, los vértices de la cometa que define el borde de la bola están situados en los puntos $A(-2|y|, y)$, $B(0, 3y)$, $C(2|y|, y)$ y $D\left(0, \frac{y}{3}\right)$.

Bolas centradas en el punto $S(0, y_1)$ donde $y_1 \neq 0$ y radio $\varepsilon = \frac{1}{3}$.

$$B_l\left(S, \frac{1}{3}\right) = \left\{ (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2 : \frac{|x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|}{|x_2| + |y_2| + |x_1| + |y_1|} < \frac{1}{3} \right\}, \quad \forall y_1 \neq 0.$$

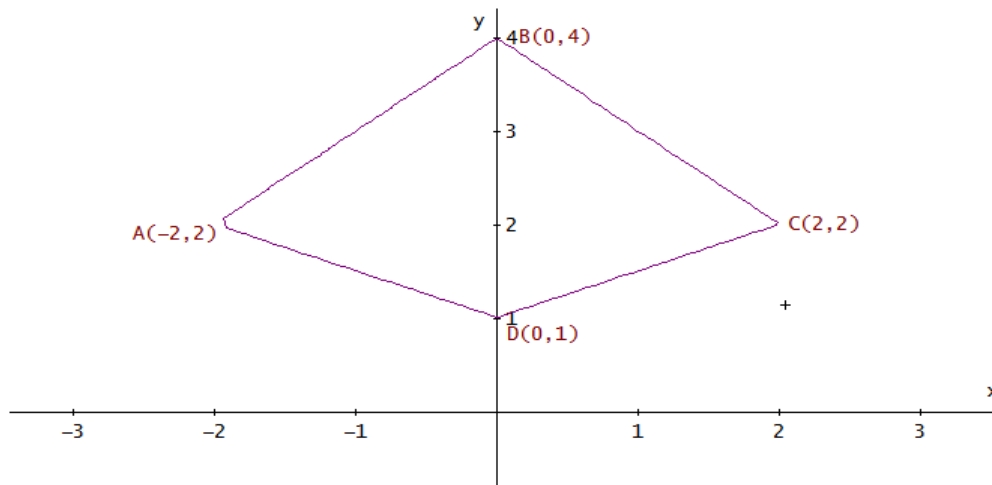
- Bola centrada en el punto $S(0,1)$ y radio $\varepsilon = \frac{1}{3}$ (ver imagen 30).



30 Imagen

Vértices $B(0,2)$ y $D\left(0,\frac{1}{2}\right)$, $A(-1,1)$ y $C(1,1)$.

- Bola centrada en el punto $S(0,-2)$ y radio $\varepsilon = \frac{1}{3}$ (ver imagen 31).



31 Imagen

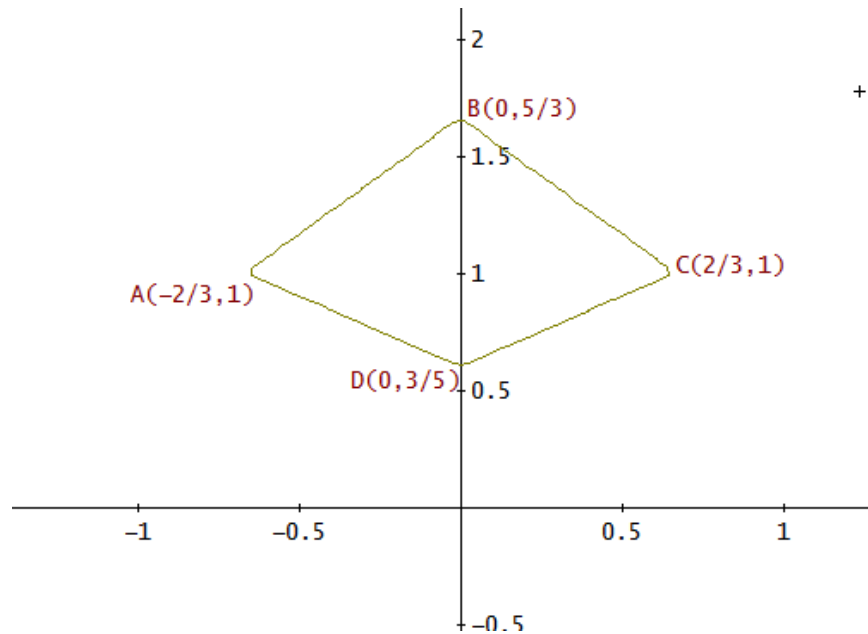
Vértices $B(0,4)$ y $D(0,1)$, $A(-2,2)$ y $C(2,2)$.

Por lo anterior y realizando más exploraciones con el programa Derive 6, se puede concluir que para cualquier bola centrada en el punto $S(0,y)$ y radio $\varepsilon = \frac{1}{3}$, los vértices de la cometa que define el borde de la bola están situados en los puntos $A(-|y|,y)$, $B(0,2y)$, $C(|y|,y)$ y $D\left(0,\frac{y}{2}\right)$.

Bolas centradas en el punto $S(0, y_1)$ donde $y_1 \neq 0$ y radio $\varepsilon = \frac{1}{4}$.

$$B_l\left(S, \frac{1}{4}\right) = \left\{ (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2 : \frac{|x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|}{|x_2| + |y_2| + |x_1| + |y_1|} < \frac{1}{4} \right\}, \quad \forall y_1 \neq 0.$$

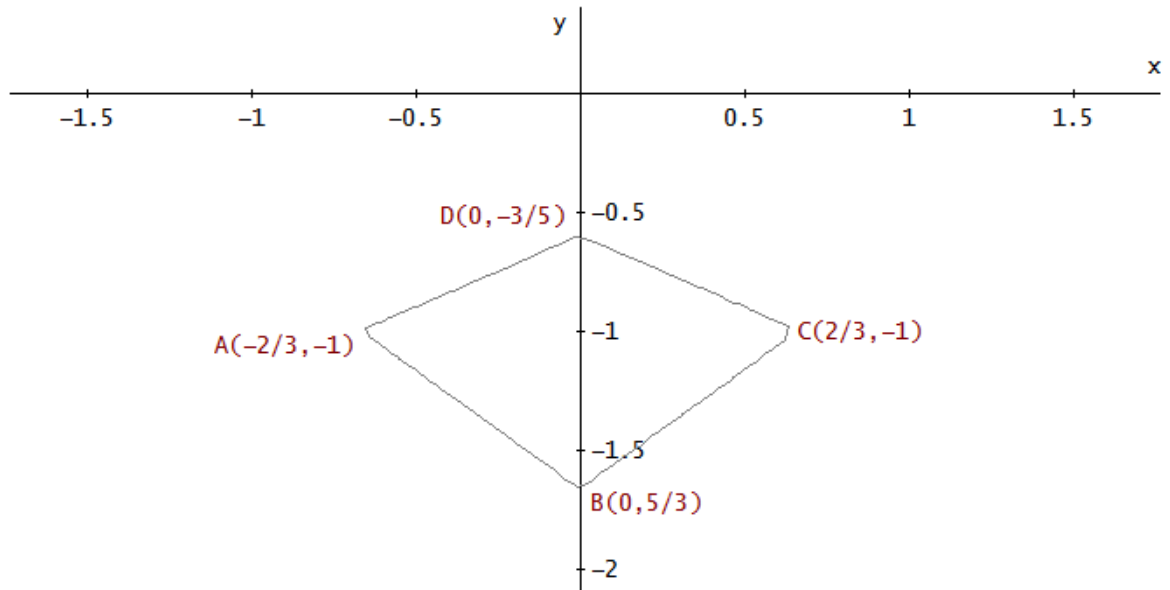
- Bola centrada en el punto $S(0,1)$ y radio $\varepsilon = \frac{1}{4}$ (ver imagen 32).



32 Imagen

Vértices $A\left(-\frac{2}{3}, 1\right)$, $B\left(0, \frac{5}{3}\right)$, $C\left(\frac{2}{3}, 1\right)$ y $D\left(0, \frac{3}{5}\right)$

- Bola centrada en el punto $S(0, -1)$ y radio $\varepsilon = \frac{1}{4}$ (ver imagen 33).



33 Imagen

Vértices de la cometa están en los puntos $A\left(-\frac{2}{3}, -1\right)$, $B\left(0, -\frac{5}{3}\right)$, $C\left(\frac{2}{3}, -1\right)$ y $D\left(0, -\frac{3}{5}\right)$.

Por lo anterior se puede concluir que para cualquier bola centrada en el punto $S(0, y)$ y radio $\varepsilon = \frac{1}{4}$, los vértices de la cometa que define el borde de la bola están situados en los puntos $A\left(-\frac{2}{3}|y|, y\right)$, $B\left(0, \frac{5}{3}y\right)$, $C\left(\frac{2}{3}|y|, y\right)$ y $D\left(0, \frac{3}{5}y\right)$.

Generalidad

Luego de ver algunos ejemplos y explorar otros más, ahora vamos a encontrar una regularidad para las coordenadas de cada uno de los vértices de la cometa que determina el borde de la bola.

En la siguiente tabla se mostrarán las coordenadas de los vértices de las cometas que determinan el borde de las bolas centradas en $S(0, y)$ y de radio $\varepsilon = \frac{1}{n}$.

ε	Coordenada del punto A	Coordenada del punto B	Coordenada del punto C	Coordenada del punto D
$\frac{1}{2}$	$(-2 y , y)$	$(0, 3y)$	$(2 y , y)$	$(0, \frac{1}{3}y)$
$\frac{1}{3}$	$(- y , y)$	$(0, 2y)$	(y , y)	$(0, \frac{1}{2}y)$
$\frac{1}{4}$	$(-\frac{2}{3} y , y)$	$(0, \frac{5}{3}y)$	$(\frac{2}{3} y , y)$	$(0, \frac{3}{5}y)$
$\frac{1}{5}$	$(-\frac{2}{4} y , y)$	$(0, \frac{6}{4}y)$	$(\frac{2}{4} y , y)$	$(0, \frac{4}{6}y)$
.
.
.
$\frac{1}{n}$	$(-\frac{2}{n-1} y , y)$	$(0, \frac{n+1}{n-1}y)$	$(\frac{2}{n-1} y , y)$	$(0, \frac{n-1}{n+1}y)$

Luego de encontrar estas fórmulas generales para las bolas con centro en $S(0, y)$ y de radio $\varepsilon = \frac{1}{n}$, lo que se hizo para comprobar si esta conjetura era cierta fue tomar una bola centrada en cualquier punto $S(0, y)$, donde $y \in \mathbb{R} - \{0\}$ y de radio $\varepsilon = \frac{1}{n}$ y verificar las coordenadas de los vértices del cometa que determinaba la frontera de la bola lejanía con las fórmulas encontradas, obteniendo resultados correctos a las coordenadas de dichos vértices.

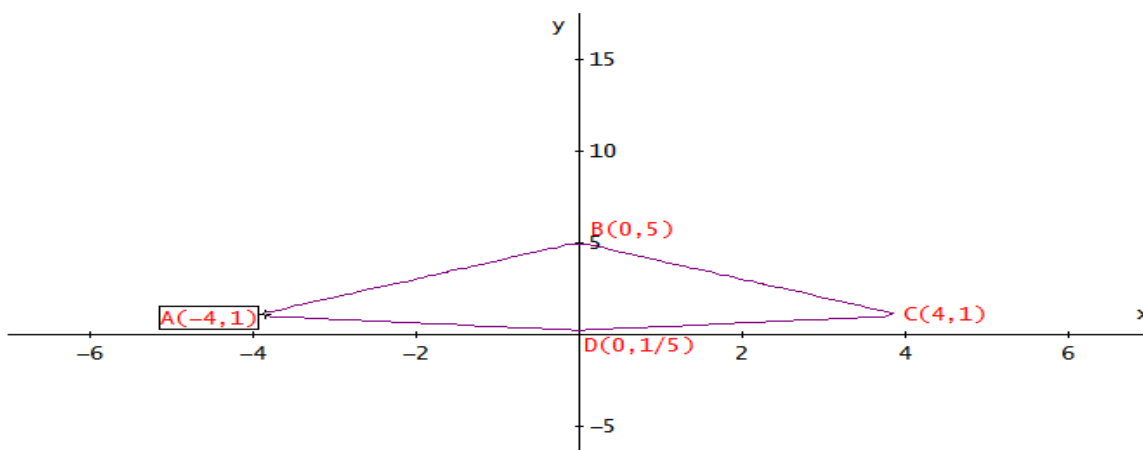
Bolas centradas en el punto $S(0, y_1)$ donde $y_1 \neq 0$ y radio $\varepsilon = \frac{2}{p}$, $\forall p \in \mathbb{N}$.

A continuación, se caracterizarán este tipo de bolas, primero dando ejemplos concretos, para luego llegar a una conjetura y una generalización.

Bolas centradas en el punto $S(0, y_1)$ donde $y_1 \neq 0$ y radio $\varepsilon = \frac{2}{3}$.

$$B_l\left(S, \frac{2}{3}\right) = \left\{ (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2 : \frac{|x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|}{|x_2| + |y_2| + |x_1| + |y_1|} < \frac{2}{3} \right\}, \quad \forall y_1 \neq 0.$$

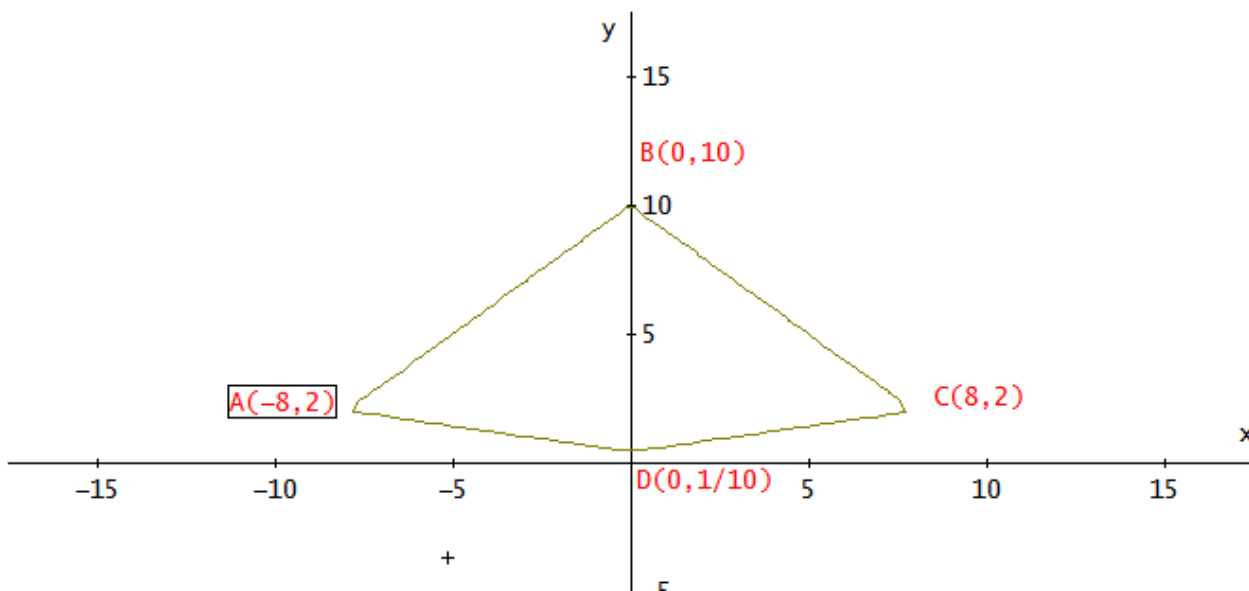
- Bola centrada en el punto $S(0,1)$ y radio $\varepsilon = \frac{2}{3}$ (ver imagen 34).



34 Imagen

Vértices $A(-4,1)$, $B(0,5)$, $C(4,1)$, $D\left(0, \frac{1}{5}\right)$.

- Bola centrada en el punto $S(0,2)$ y radio $\varepsilon = \frac{2}{3}$ (ver imagen 35).



35 Imagen

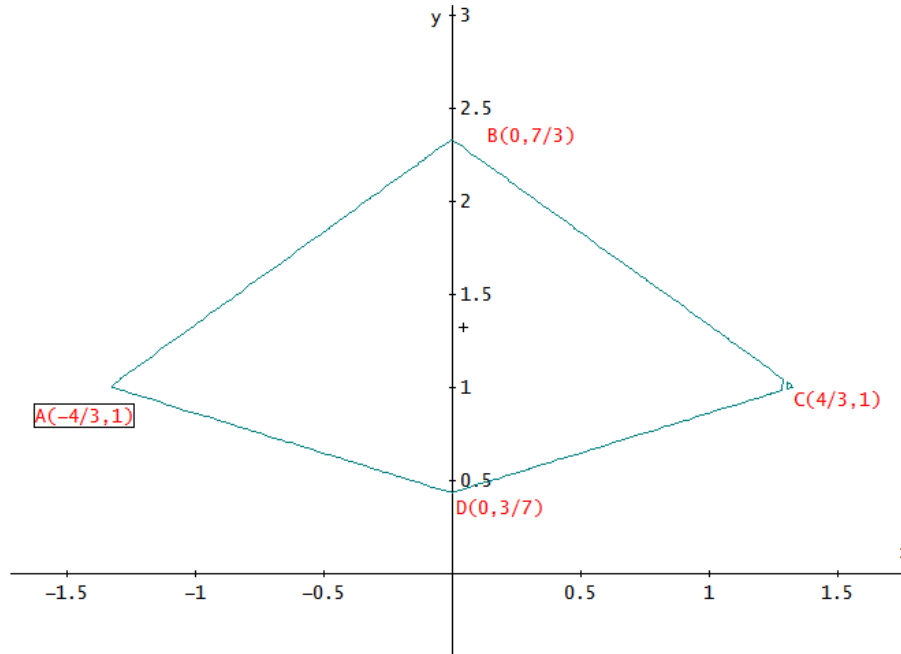
Vértices $A(-8,2)$, $B(0,10)$, $C(8,2)$, $D\left(0, \frac{1}{10}\right)$.

Por lo anterior se puede concluir que para cualquier bola centrada en el punto $S(0, y)$ y radio $\varepsilon = \frac{2}{3}$, los vértices de la cometa que define el borde de la bola están situados en los puntos $A(-4|y|, y)$, $B(0, 5y)$, $C(4|y|, y)$ y $D(0, \frac{1}{5}y)$.

Bolas centradas en el punto $S(0, y_1)$ donde $y_1 \neq 0$ y radio $\varepsilon = \frac{2}{5}$.

$$B_l\left(S, \frac{2}{3}\right) = \left\{ (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2 : \frac{|x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|}{|x_2| + |y_2| + |x_1| + |y_1|} < \frac{2}{3} \right\}, \quad \forall y_1 \neq 0.$$

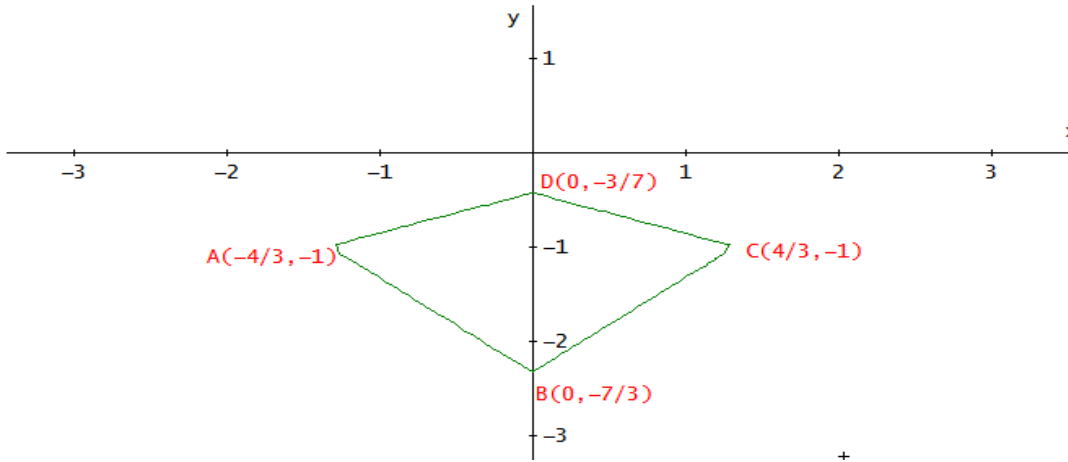
- Bola centrada en el punto $S(0, 1)$ y radio $\varepsilon = \frac{2}{5}$ (ver imagen 36).



36 Imagen

Vértices $A\left(-\frac{4}{3}, 1\right)$, $B\left(0, \frac{7}{3}\right)$, $C\left(\frac{4}{3}, 1\right)$, $D\left(0, \frac{3}{7}\right)$.

- Bola centrada en el punto $S(0, -1)$ y radio $\varepsilon = \frac{2}{5}$ (ver imagen 37).



37 Imagen

Vértices $A\left(-\frac{4}{3}, 1\right)$, $B\left(0, -\frac{7}{3}\right)$, $C\left(\frac{4}{3}, -1\right)$, $D\left(0, -\frac{3}{7}\right)$.

Por lo anterior se puede concluir que para cualquier bola centrada en el punto $S(0, y)$ y radio $\varepsilon = \frac{2}{5}$, los vértices de la cometa que define el borde de la bola están situados en los puntos $A\left(-\frac{4}{3}|y|, y\right)$, $B\left(0, \frac{7}{3}y\right)$, $C\left(\frac{4}{3}|y|, y\right)$, $D\left(0, \frac{3}{7}y\right)$.

Generalidad

Luego de ver algunos ejemplos, ahora vamos a encontrar una regularidad para las coordenadas de cada uno de los vértices de la cometa que determina el borde de la bola.

En la siguiente tabla se mostrarán las coordenadas de los vértices de las cometas que determinan el borde de las bolas centradas en $S(0, y)$ y de radio $\varepsilon = \frac{2}{n}$.

ε	Coordenada del punto A	Coordenada del punto B	Coordenada del punto C	Coordenada del punto D
$\frac{2}{3}$	$A(-4 y , y)$	$B(0, 5y)$	$C(4 y , y)$	$D\left(0, \frac{1}{5}y\right)$
$\frac{2}{5}$	$A\left(-\frac{4}{3} y , y\right)$	$B\left(0, \frac{7}{3}y\right)$	$C\left(\frac{4}{3} y , y\right)$	$D\left(0, \frac{3}{7}y\right)$

$\frac{2}{7}$	$A\left(-\frac{4}{5} y , y\right)$	$B\left(0, \frac{9}{5}y\right)$	$C\left(\frac{4}{5} y , y\right)$	$D\left(0, \frac{5}{9}y\right)$
$\frac{2}{9}$	$A\left(-\frac{4}{7} y , y\right)$	$B\left(0, \frac{11}{7}y\right)$	$C\left(\frac{4}{7} y , y\right)$	$D\left(0, \frac{7}{11}y\right)$
$\frac{2}{11}$	$A\left(-\frac{4}{9} y , y\right)$	$B\left(0, \frac{13}{9}y\right)$	$C\left(\frac{4}{9} y , y\right)$	$D\left(0, \frac{9}{13}y\right)$
...
$\frac{2}{n}$	$A\left(-\frac{4}{n-2} y , y\right)$	$B\left(0, \frac{n+2}{n-2}y\right)$	$C\left(\frac{4}{n-2} y , y\right)$	$D\left(0, \frac{n-2}{n+2}y\right)$

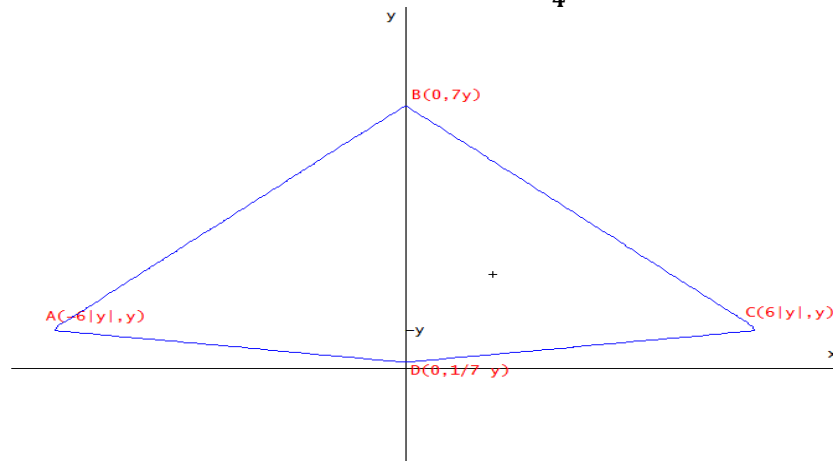
Luego de encontrar estas fórmulas generales para las bolas con centro en $S(0, y)$ y de radio $\varepsilon = \frac{2}{n}$, lo que se hizo para comprobar si esta conjetura era cierta fue tomar una bola centrada en cualquier punto $S(0, y)$, donde $y \in \mathbb{R} - \{0\}$ y de radio $\varepsilon = \frac{2}{n}$ y verificar las coordenadas de los vértices del cometa que determinaba la frontera de la bola lejanía con las fórmulas encontradas, obteniendo resultados correctos a las coordenadas de dichos vértices.

Bolas centradas en el punto $S(0, y_1)$ donde $y_1 \neq 0$ y radio $\varepsilon = \frac{3}{p}$, $\forall p \in \mathbb{N}$.

Bolas centradas en el punto $S(0, y_1)$ donde $y_1 \neq 0$ y radio $\varepsilon = \frac{3}{4}$.

$$B_l\left(S, \frac{3}{4}\right) = \left\{ (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2 : \frac{|x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|}{|x_2| + |y_2| + |x_1| + |y_1|} < \frac{3}{4} \right\}, \quad \forall y_1 \neq 0.$$

- Bolas centradas en el punto $S(0, y)$ y radio $\varepsilon = \frac{3}{4}$ (ver imagen 38).



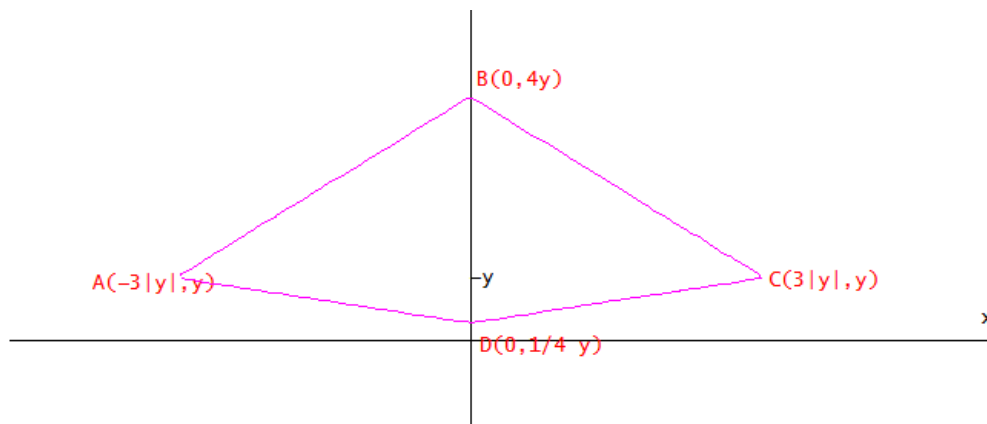
38 Imagen

Vértices $A(-6|y|, y)$, $B(0, 7y)$, $C(6|y|, y)$, $D\left(0, \frac{1}{7}y\right)$.

Bolas centradas en el punto $S(0, y_1)$ donde $y_1 \neq 0$ y radio $\varepsilon = \frac{3}{5}$.

$$B_l\left(S, \frac{3}{5}\right) = \left\{ (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2 : \frac{|x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|}{|x_2| + |y_2| + |x_1| + |y_1|} < \frac{3}{5} \right\}, \quad \forall y_1 \neq 0.$$

- Bolas centradas en el punto $S(0, y)$ y radio $\varepsilon = \frac{3}{5}$ (ver imagen 39).



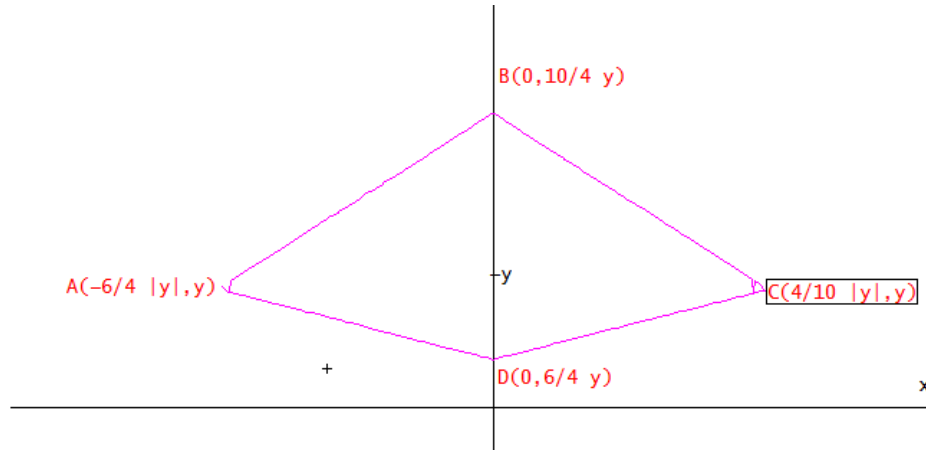
39 Imagen

Vértices $A(-3|y|, y)$, $B(0, 4y)$, $C(3|y|, y)$, $D\left(0, \frac{1}{4}y\right)$.

Bolas centradas en el punto $S(0, y_1)$ donde $y_1 \neq 0$ y radio $\varepsilon = \frac{3}{7}$.

$$B_l\left(S, \frac{3}{7}\right) = \left\{ (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2 : \frac{|x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|}{|x_2| + |y_2| + |x_1| + |y_1|} < \frac{3}{7} \right\}, \quad \forall y_1 \neq 0.$$

- Bolas centradas en el punto $S(0, y)$ y radio $\varepsilon = \frac{3}{7}$ (ver imagen 40).



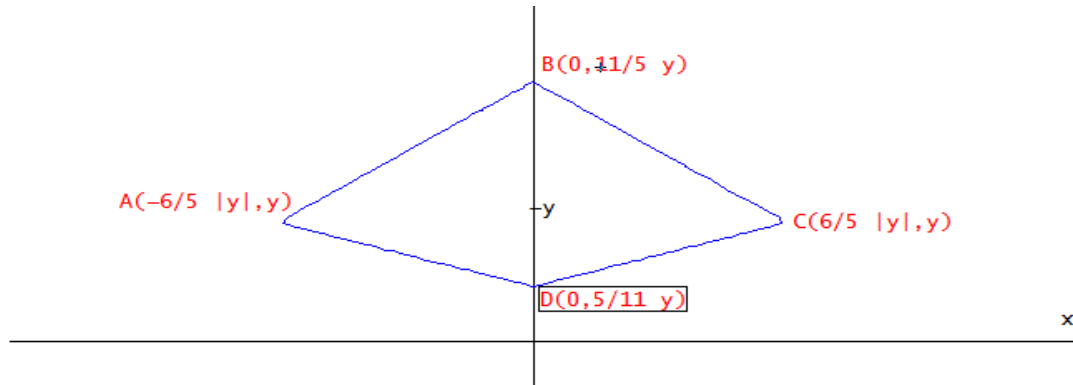
40 Imagen

Vértices $A\left(-\frac{6}{4}|y|, y\right)$, $B\left(0, \frac{10}{4}y\right)$, $C\left(\frac{6}{4}|y|, y\right)$, $D\left(0, \frac{4}{10}y\right)$.

Bolas centradas en el punto $S(0, y_1)$ donde $y_1 \neq 0$ y radio $\varepsilon = \frac{3}{8}$.

$$B_l\left(S, \frac{3}{8}\right) = \left\{ (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2 : \frac{|x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|}{|x_2| + |y_2| + |x_1| + |y_1|} < \frac{3}{8} \right\}, \quad \forall y_1 \neq 0.$$

- Bolas centradas en el punto $S(0, y)$ y radio $\varepsilon = \frac{3}{8}$ (ver imagen 41).



41 Imagen

Vértices $A\left(-\frac{6}{5}|y|, y\right)$, $B\left(0, \frac{11}{5}y\right)$, $C\left(\frac{6}{5}|y|, y\right)$, $D\left(0, \frac{5}{11}y\right)$.

Generalidad

Luego de ver algunos ejemplos, ahora vamos a encontrar una regularidad para las coordenadas de cada uno de los vértices de la cometa que determina el borde de la bola.

En la siguiente tabla se mostrarán las coordenadas de los vértices de las cometas que determinan el borde de las bolas centradas en $S(0, y)$ y de radio $\varepsilon = \frac{3}{n}$.

ε	Coordenada del punto A	Coordenada del punto B	Coordenada del punto C	Coordenada del punto D
$\frac{3}{4}$	$A(-6 y , y)$	$B(0, 7y)$	$C(6 y , y)$	$D\left(0, \frac{1}{7}y\right)$
$\frac{3}{7}$	$A\left(-\frac{6}{4} y , y\right)$	$B\left(0, \frac{10}{4}y\right)$	$C\left(\frac{6}{4} y , y\right)$	$D\left(0, \frac{4}{10}y\right)$
$\frac{3}{10}$	$A\left(-\frac{6}{7} y , y\right)$	$B\left(0, \frac{13}{7}y\right)$	$C\left(\frac{6}{7} y , y\right)$	$D\left(0, \frac{7}{13}y\right)$

$\frac{3}{13}$	$A\left(-\frac{6}{10} y , y\right)$	$B\left(0, \frac{16}{10}y\right)$	$C\left(\frac{6}{10} y , y\right)$	$D\left(0, \frac{10}{16}y\right)$
$\frac{3}{16}$	$A\left(-\frac{6}{13} y , y\right)$	$B\left(0, \frac{19}{13}y\right)$	$C\left(\frac{6}{13} y , y\right)$	$D\left(0, \frac{13}{19}y\right)$
...
$\frac{3}{n}$	$A\left(-\frac{6}{n-3} y , y\right)$	$B\left(0, \frac{n+3}{n-3}y\right)$	$C\left(\frac{4}{n-3} y , y\right)$	$D\left(0, \frac{n-3}{n+3}y\right)$

Luego de buscar los vértices de la cometa que define el borde de la bola centrada en $S(0, y)$ para radios $\varepsilon = \frac{1}{n}$, $\varepsilon = \frac{2}{n}$, $\varepsilon = \frac{3}{n}$. Se encontró una regularidad y se definió una fórmula para hallar los vértices para cualquier borde de la bola centrada en $S(0, y)$ y radio $\varepsilon < 0$. Miremos la siguiente tabla:

k	ε	Coordenada del punto A	Coordenada del punto B	Coordenada del punto C	Coordenada del punto D
1	$\frac{1}{n}$	$\left(-\frac{2}{n-1} y , y\right)$	$\left(0, \frac{n+1}{n-1}y\right)$	$\left(\frac{2}{n-1} y , y\right)$	$\left(0, \frac{n-1}{n+1}y\right)$
2	$\frac{2}{n}$	$A\left(-\frac{4}{n-2} y , y\right)$	$B\left(0, \frac{n+2}{n-2}y\right)$	$C\left(\frac{4}{n-2} y , y\right)$	$D\left(0, \frac{n-2}{n+2}y\right)$
3	$\frac{3}{n}$	$A\left(-\frac{6}{n-3} y , y\right)$	$B\left(0, \frac{n+3}{n-3}y\right)$	$C\left(\frac{4}{n-3} y , y\right)$	$D\left(0, \frac{n-3}{n+3}y\right)$
4	$\frac{4}{n}$	$A\left(-\frac{8}{n-4} y , y\right)$	$B\left(0, \frac{n+4}{n-4}y\right)$	$C\left(\frac{8}{n-4} y , y\right)$	$D\left(0, \frac{n-4}{n+4}y\right)$
...
k	$\frac{k}{n}$	$A\left(-\frac{2k}{n-k} y , y\right)$	$B\left(0, \frac{n+k}{n-k}y\right)$	$C\left(\frac{2k}{n-k} y , y\right)$	$D\left(0, \frac{n-k}{n+k}y\right)$

Bolas tipo 5

Bola centrada en el punto $A(x_1, 0)$ donde $x_1 \neq 0$ y radio $\varepsilon < 1$.

$$B_l(A, \varepsilon) = \left\{ (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2 : \frac{|x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|}{|x_2| + |y_2| + |x_1| + |y_1|} < \varepsilon \right\}, \quad \forall x_1 \neq 0.$$

Estas bolas son simétricas respecto al eje x , el borde de la bola tiene la apariencia de una cometa. Si se traza la recta $x = x_1$ esta recta intersecta el trapecio isósceles en los vértices simétricos al eje x .

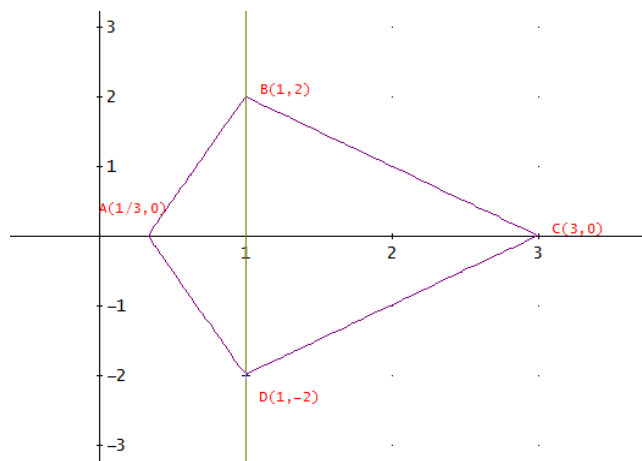
Bolas centradas en el punto $S(x_1, 0)$ donde $x_1 \neq 0$ y radio $\varepsilon = \frac{1}{p}$, $\forall p \in \mathbb{N}$.

A continuación, se caracterizarán este tipo de bolas, primero dando ejemplos concretos, para luego llegar a una conjetura.

Bolas centradas en el punto $S(x_1, 0)$ donde $x_1 \neq 0$ y radio $\varepsilon = \frac{1}{2}$.

$$B_l\left(S, \frac{1}{2}\right) = \left\{ (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2 : \frac{|x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|}{|x_2| + |y_2| + |x_1| + |y_1|} < \frac{1}{2} \right\}, \quad \forall x_1 \neq 0.$$

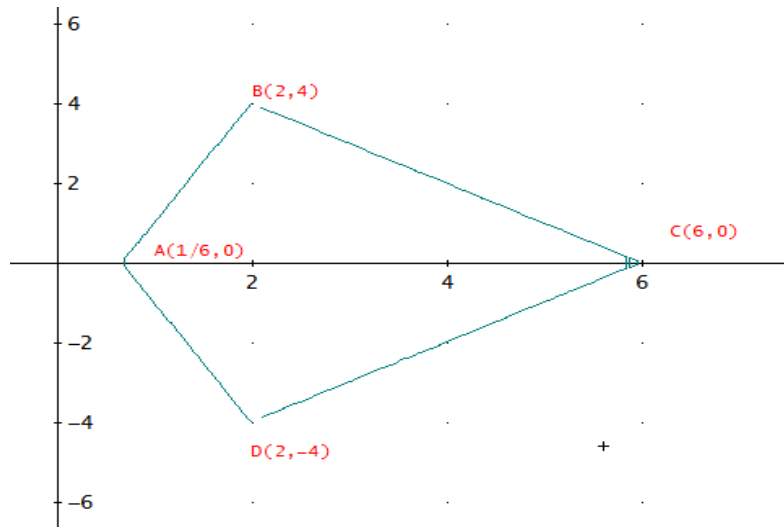
Para la bola centrada en el punto $S(1,0)$ y radio $\varepsilon = \frac{1}{2}$, el borde es la cometa que se ve en la Imagen 42.



42 Imagen

Los vértices de la cometa que están sobre el eje x están en las coordenadas $C(3,0)$ y $A(\frac{1}{3},0)$, y los vértices que son simétricos respecto al eje y están en las coordenadas $D(-2,1)$ y $B(2,1)$.

Para la bola centrada en el punto $S(0,2)$ y radio $\varepsilon = \frac{1}{2}$, el borde es la cometa que se ve en la Imagen 9.



43 Imagen

Como se puede ver en la imagen los vértices están situados de la siguiente manera:

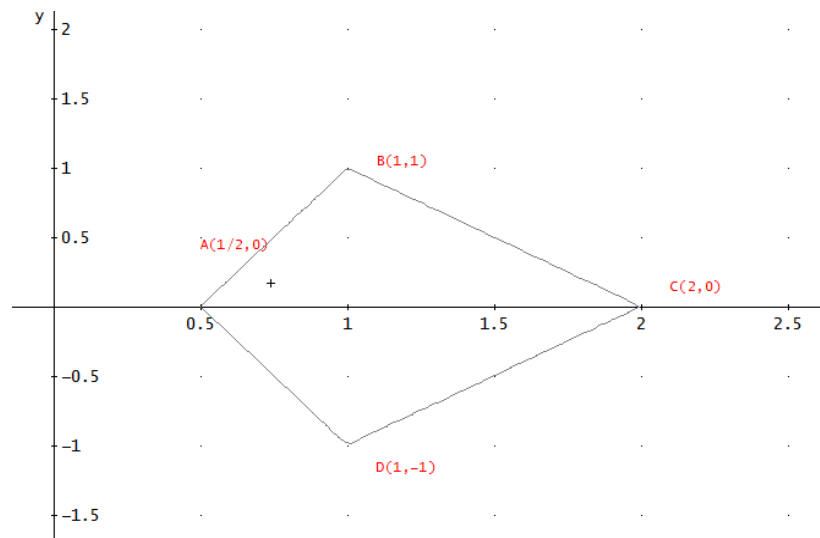
Los vértices que están sobre el eje y están en las coordenadas $C(6,0)$ y $A(\frac{1}{6},0)$ y los vértices que son simétricos respecto al eje y están en las coordenadas $D(2,-4)$ y $B(2,4)$.

Por lo anterior se puede concluir que para cualquier bola centrada en el punto $S(x,0)$ y radio $\varepsilon = \frac{1}{2}$, los vértices de la cometa que define el borde de la bola están situados en los puntos $B(x,2|x|)$, $C(3x,0)$, $D(x,-2|x|)$ y $A(\frac{x}{3},0)$.

Bolas centradas en el punto $S(x,0)$ donde $y_1 \neq 0$ y radio $\varepsilon = \frac{1}{3}$.

$$B_l\left(S, \frac{1}{3}\right) = \left\{ (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2 : \frac{|x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|}{|x_2| + |y_2| + |x_1| + |y_1|} < \frac{1}{3} \right\}, \quad \forall x_1 \neq 0.$$

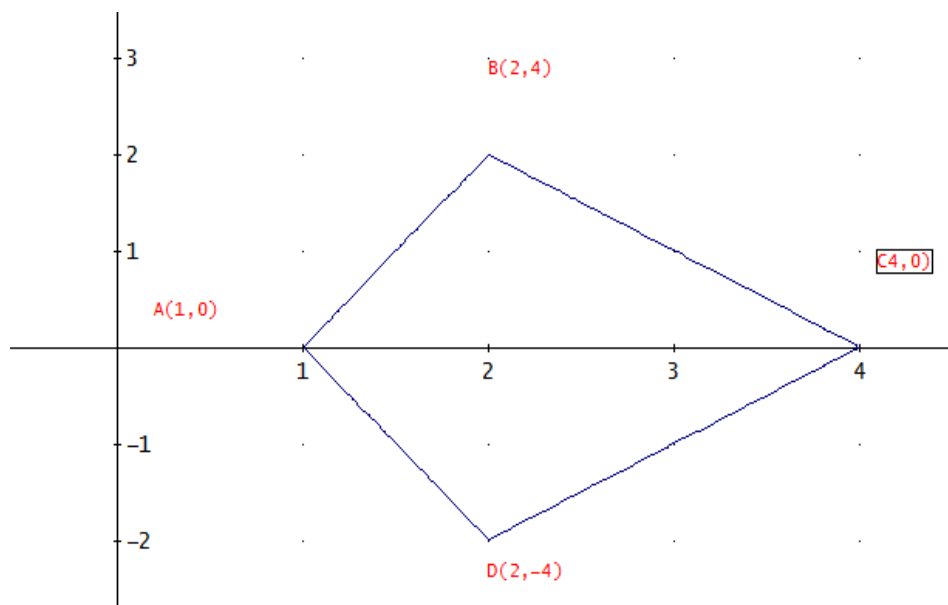
- Bola centrada en el punto $S(1,0)$ y radio $\varepsilon = \frac{1}{3}$ (ver imagen 44).



44 Imagen

Los vértices de la cometa que están sobre el eje y están en las coordenadas $C(2,0)$ y $A(\frac{1}{2}, 0)$ y los vértices que son simétricos respecto al eje y están en las coordenadas $B(1,1)$ y $D(1,-1)$.

- Bola centrada en el punto $S(0,2)$ y radio $\varepsilon = \frac{1}{3}$ (ver imagen 45).



45 Imagen

Los vértices de la cometa que están sobre el eje y están en las coordenadas $A(1,0)$ y $C(4,0)$ y los vértices que son simétricos respecto al eje y están en las coordenadas $B(2,4)$ y $C(2,-4)$.

Por lo anterior se puede concluir que para cualquier bola centrada en el punto $S(x, 0)$ y radio $\varepsilon = \frac{1}{3}$, los vértices de la cometa que define el borde de la bola están situados en los puntos $D(x, -|x|)$, $C(2x, 0)$, $B(x, |x|)$ y $A\left(\frac{x}{2}, 0\right)$.

Vistas las exploraciones anteriores observamos que las bolas que estas con el centro sobre el eje x se comportan de la misma manera que las bolas que tienen su centro sobre el eje y , así podemos generalizar un poco más.

Generalidad

Luego de ver algunos ejemplos, ahora vamos a encontrar una regularidad para las coordenadas de cada uno de los vértices de la cometa que determina el borde de la bola.

En la siguiente tabla se mostrarán las coordenadas de los vértices de las cometas que determinan el borde de las bolas centradas en $S(x, 0)$ y de radio $\varepsilon = \frac{1}{n}$.

ε	Coordenada del punto D	Coordenada del punto C	Coordenada del punto B	Coordenada del punto A
$\frac{1}{2}$	$(x, -2 x)$	$(3x, 0)$	$(x, 2 x)$	$\left(\frac{x}{3}, 0\right)$
$\frac{1}{3}$	$(x, - x)$	$(2x, 0)$	(x, x)	$\left(\frac{1}{2}x, 0\right)$
$\frac{1}{4}$	$\left(x, -\frac{2}{3} x \right)$	$\left(\frac{5}{3}x, 0\right)$	$\left(x, \frac{2}{3} x \right)$	$\left(\frac{3}{5}x, 0\right)$
.
.
.
$\frac{1}{n}$	$\left(x, -\frac{2}{n-1} x \right)$	$\left(\frac{n+1}{n-1}x, 0\right)$	$\left(x, \frac{2}{n-1} x \right)$	$\left(\frac{n-1}{n+1}x, 0\right)$

Las bolas que resultan de ubicar el centro en el eje x , resultan de forma análoga a las bolas que se forman cuando se centra en el eje y , por tal motivo vamos a generalizar para cualquier bola centrada en el eje x y con un radio cualquiera.

Luego de buscar los vértices del trapecio isósceles que define el borde de la bola centrada en $S(x, 0)$ para radios $\varepsilon = \frac{1}{n}$, $\varepsilon = \frac{2}{n}$, $\varepsilon = \frac{3}{n}$. Se encontró una regularidad y se definió una fórmula para hallar los vértices para cualquier borde de la bola centrada en $S(x, 0)$ y radio $\varepsilon < 1$. Los resultados los observamos en la siguiente tabla:

Recordemos que $\frac{k}{p}$ son los radios de las bolas en la función lejanía

k	ε	Coordenada del punto D	Coordenada del punto C	Coordenada del punto B	Coordenada del punto A
1	$\frac{1}{n}$	$\left(x, -\frac{2}{n-1} x \right)$	$\left(\frac{n+1}{n-1}x, 0\right)$	$\left(x, \frac{2}{n-1} x \right)$	$\left(\frac{n-1}{n+1}x, 0\right)$
2	$\frac{2}{n}$	$\left(x, -\frac{4}{n-2} x \right)$	$\left(\frac{n+2}{n-2}x, 0\right)$	$\left(x, \frac{4}{n-2} x \right)$	$\left(\frac{n-2}{n+2}x, 0\right)$
3	$\frac{3}{n}$	$\left(x, -\frac{6}{n-3} x \right)$	$\left(\frac{n+3}{n-3}x, 0\right)$	$\left(x, \frac{4}{n-3} x \right)$	$\left(\frac{n-3}{n+3}x, 0\right)$
4	$\frac{4}{n}$	$\left(x, -\frac{8}{n-4} x \right)$	$\left(\frac{n+4}{n-4}x, 0\right)$	$\left(x, \frac{8}{n-4} x \right)$	$\left(\frac{n-4}{n+4}x, 0\right)$
...
k	$\frac{k}{n}$	$\left(x, -\frac{2k}{n-k} x \right)$	$\left(\frac{n+k}{n-k}x, 0\right)$	$\left(x, \frac{2k}{n-k} x \right)$	$\left(\frac{n-k}{n+k}x, 0\right)$

Con los procedimientos anteriores encontramos las coordenadas de los vértices que determina la figura de la frontera de la bola lejanía. Para verificar lo encontrado, tomábamos un radio cualquiera y un punto sobre el eje X para ser centrada nuestra bola lejanía, aplicábamos las fórmulas que se encontraron y comparábamos estos resultados con los obtenidos por las gráficas que realizaba el programa Derive 6.

Bolas tipo 6

Bola centrada en el punto $A(x_1, y_1)$ donde $x_1 \neq 0, y_1 \neq 0$ y radio $\varepsilon < 1$.

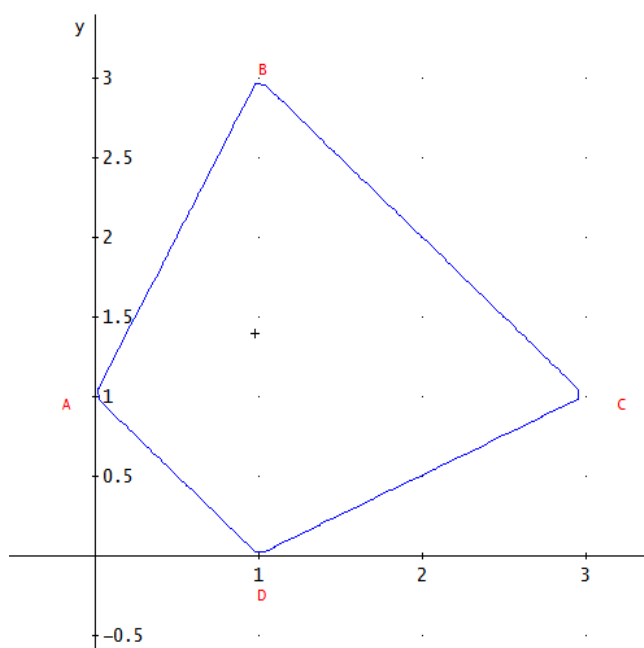
$$B_l(A, \varepsilon) = \left\{ (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2 : \frac{|x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|}{|x_2| + |y_2| + |x_1| + |y_1|} < \varepsilon \right\}, \quad \forall x_1 \neq 0, y_1 \neq 0.$$

En este tipo de bolas podemos observar que la frontera de la bola tiene la apariencia de un trapecio. Se van a trabajar bolas donde al parecer no se deforman al tocar el eje y , estas bolas tienen un comportamiento general y estas son las que vamos a explorar en esta parte del trabajo.

Caso No. 1: bolas centradas en $S(a, b)$ tal que $a = b$.

Para este tipo de casos lo que se comenzó hacer fue observar las bolas con el centro en el punto $S(1,1)$ e ir variando los radios (ε)

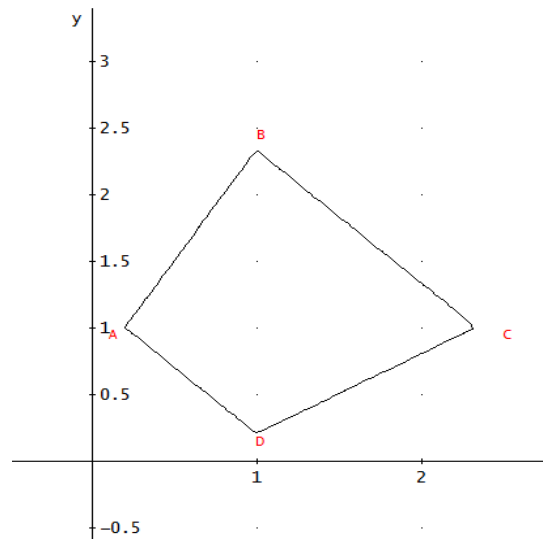
- **Bola centrada en $S(1, 1)$ radio $\varepsilon = \frac{1}{3}$ (ver imagen 46).**



46 Imagen

Vértices del cuadrilátero formado son: $A(0,1), B(1,3), C(3,1), D(1,0)$

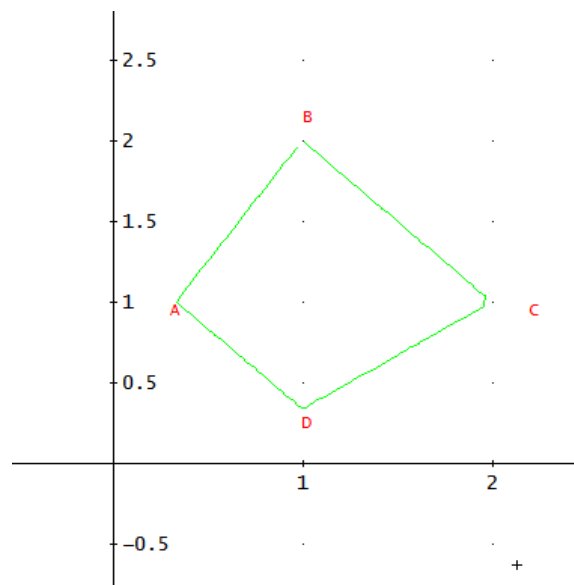
- Bola centrada en $S(1, 1)$ radio $\varepsilon = \frac{1}{4}$ (ver imagen 47).



47 Imagen

Vértices del cuadrilátero formado son: $A\left(\frac{2}{10}, 1\right), B\left(1, \frac{7}{3}\right), C\left(\frac{7}{3}, 1\right), D\left(1, \frac{2}{10}\right)$

- Bola centrada en $S(1, 1)$ radio $\varepsilon = \frac{1}{5}$ (ver imagen 48).



48. Imagen

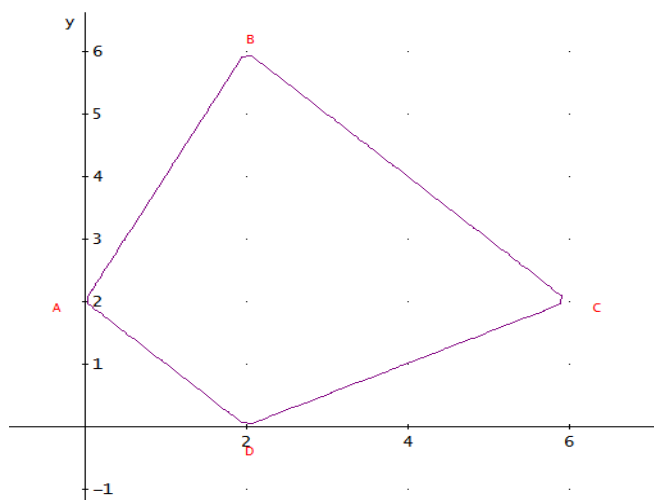
Vértices del cuadrilátero formado son: $A\left(\frac{1}{3}, 1\right), B(1,2), C(2,1), D\left(1, \frac{1}{3}\right)$

En la siguiente tabla se arrojan los resultados de los vértices de las bolas centradas en $(1,1)$ y radios diferentes.

ε	Coordenada A	Coordenada B	Coordenada C	Coordenada D
$\frac{1}{3}$	$A(0,1)$	$B(1,3),$	$C(3,1)$	$D(1,0)$
$\frac{1}{4}$	$A\left(\frac{2}{10}, 1\right)$	$B\left(1, \frac{7}{3}\right)$	$C\left(\frac{7}{3}, 1\right)$	$D\left(1, \frac{2}{10}\right)$
$\frac{1}{5}$	$A\left(\frac{1}{3}, 1\right)$	$B(1,2)$	$C(2,1)$	$D\left(1, \frac{1}{3}\right)$
...
$\frac{1}{n}$	$\left(\frac{n-3}{n+1}, 1\right)$	$\left(1, \frac{n+3}{n-1}\right)$	$\left(\frac{n+3}{n-1}, 1\right)$	$\left(1, \frac{n-3}{n+1}\right)$

Ya realizamos tres casos en donde se tenía el centro en el punto $S(1,1)$, ahora lo que haremos es cambiar el centro al de coordenadas $S(2,2)$ e ir variando la medida de los radios.

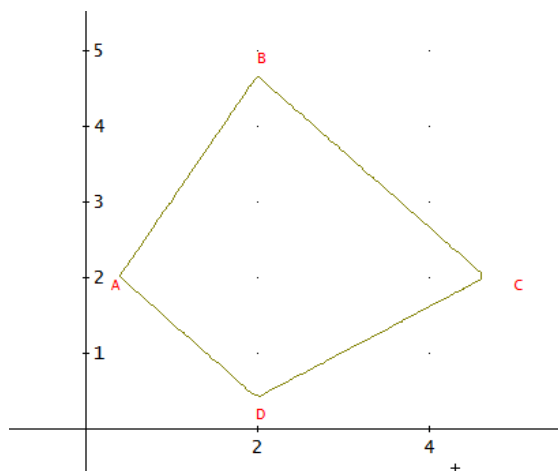
- **Bola centrada en $S(2,2)$ radio $\varepsilon = \frac{1}{3}$ (ver imagen 49).**



49 Imagen

En la bola anterior los vértices del cuadrilátero formado son: $A(0,2), B(2,6), C(6,2), D(2,0)$

- Bola centrada en $S(2, 2)$ radio $\varepsilon = \frac{1}{4}$ (ver imagen 50).



50 Imagen

Vértices del cuadrilátero formado son: $A\left(\frac{2}{5}, 2\right), B\left(2, \frac{14}{3}\right), C\left(\frac{14}{3}, 2\right), D\left(2, \frac{2}{5}\right)$

En la siguiente tabla se arrojan los resultados de los vértices de las bolas centradas en $(2,2)$ y radios diferentes.

ε	Coordenada A	Coordenada B	Coordenada C	Coordenada D
$\frac{1}{3}$	$A(0,2)$	$B(2,6)$,	$C(6,2)$	$D(2,0)$
$\frac{1}{4}$	$A\left(\frac{2}{5}, 2\right)$	$B\left(2, \frac{14}{3}\right)$	$C\left(\frac{14}{3}, 2\right)$	$D\left(2, \frac{2}{5}\right)$
...
$\frac{1}{n}$	$\left(\frac{2(n-3)}{n+1}, 2\right)$	$\left(2, \frac{2(n+3)}{n-1}\right)$	$\left(\frac{2(n+3)}{n-1}, 2\right)$	$\left(2, \frac{2(n-3)}{n+1}\right)$

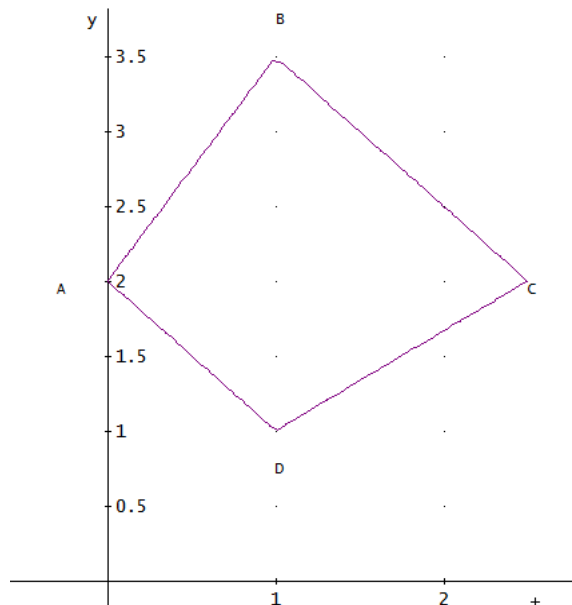
Observamos otra serie de ejemplos donde el centro tiene coordenadas $S(a, b)$, donde $a = b$ y $a \neq 0$, además de esto se fueron cambiando los radios de la forma $\frac{1}{n}$ donde $n \in \mathbb{N}$, con esta exploración se lograron los siguientes resultados:

Centro (a,b)	Radio (ε)	Coordenadas A	Coordenadas B	Coordenadas C	Coordenadas D
(1,1)	$\frac{1}{n}$	$(\frac{n-3}{n+1}, 1)$	$(1, \frac{n+3}{n-1})$	$(\frac{n+3}{n-1}, 1)$	$(1, \frac{n-3}{n+1})$
(2,2)	$\frac{1}{n}$	$(\frac{2(n-3)}{n+1}, 2)$	$(2, \frac{2(n+3)}{n-1})$	$(\frac{2(n+3)}{n-1}, 2)$	$(2, \frac{2(n-3)}{n+1})$
...
(a,a)	$\frac{1}{n}$	$(\frac{a(n-3)}{n+1}, a)$	$(a, \frac{a(n+3)}{n-1})$	$(\frac{a(n+3)}{n-1}, a)$	$(a, \frac{a(n-3)}{n+1})$

Bola centrada en el punto $A(1, b)$ y radio $\varepsilon < 1$.

Después de realizar esto nos dimos a la tarea de encontrar una regularidad para las bolas que tienen centro en $S(1, b)$, $b \in \mathbb{N}$ y radio $\frac{1}{n}$ con $n \in \mathbb{N}$

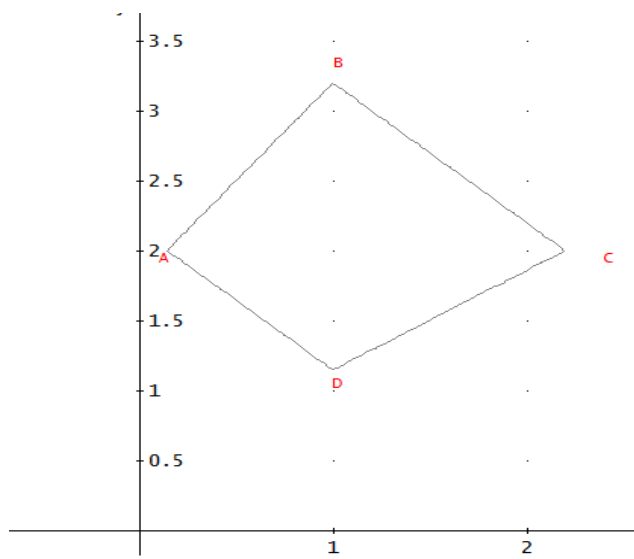
- **Bola centrada en $S(1, 2)$ radio $\varepsilon = \frac{1}{5}$ (ver imagen 51).**



51 Imagen

Vértices del cuadrilátero formado son: $A(0, 2), B(1, \frac{14}{4}), C(\frac{10}{4}, 2), D(1, 1)$

- Bola centrada en $S(1, 2)$ radio $\varepsilon = \frac{1}{6}$ (ver imagen 52).



52 Imagen

Vértices del cuadrilátero formado son: $A\left(\frac{1}{7}, 2\right), B\left(1, \frac{16}{5}\right), C\left(\frac{11}{5}, 2\right), D\left(1, \frac{8}{7}\right)$

Realizamos otras exploraciones y llegamos a una generalización de las bolas con centro en $(1, 2)$ y radio $\frac{1}{n}$, que se presenta en la siguiente tabla:

ε	Coordenada A	Coordenada B	Coordenada C	Coordenada D
$\frac{1}{5}$	$A(0, 2)$	$B\left(1, \frac{14}{4}\right)$	$C\left(\frac{10}{4}, 2\right)$	$D(1, 1)$
$\frac{1}{6}$	$A\left(\frac{1}{7}, 2\right)$	$B\left(1, \frac{16}{5}\right)$	$C\left(\frac{11}{5}, 2\right)$	$D\left(1, \frac{8}{7}\right)$
...
$\frac{1}{n}$	$\left(\frac{n-5k}{n+1}, 2\right)$	$\left(2, \frac{2(n+2k)}{n-1}\right)$	$\left(\frac{n+5k}{n-1}, 2\right)$	$\left(2, \frac{2(n-2k)}{n+1}\right)$

Generalización

Después de esto se hicieron varias exploraciones donde las coordenadas del centro tenían la forma $(1, b)$ y con radios que estaban de la forma $\frac{k}{n}$, se llegó a una fórmula

general para encontrar los vértices del trapecio isósceles que resulta, la información recolectada se presenta en la siguiente tabla:

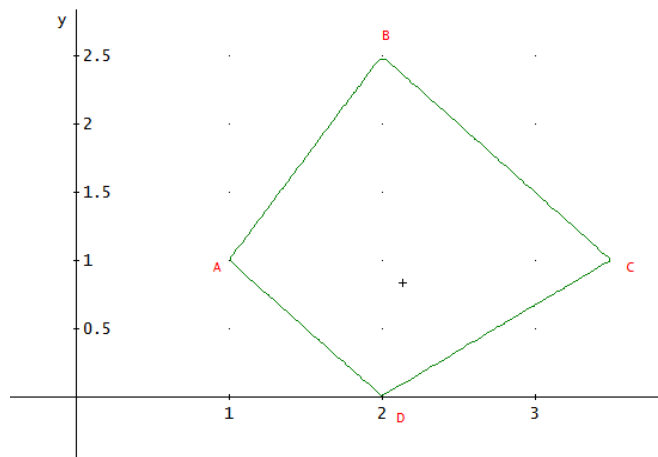
Centro (a,b)	ε	Coordenada A	Coordenada B	Coordenada C	Coordenada D
(1,2)	$\frac{1}{n}$	$\left(\frac{n-5k}{n+1}, 2\right)$	$\left(1, \frac{2(n+2k)}{n-1}\right)$	$\left(\frac{n+5k}{n-1}, 2\right)$	$\left(1, \frac{2(n-2k)}{n+1}\right)$
(1,2)	$\frac{k}{n}$	$\left(\frac{(n-k)-4k}{n+k}, 2\right)$	$\left(1, \frac{2(n+k)+2k}{n-k}\right)$	$\left(\frac{(n+k)+4k}{n-k}, 2\right)$	$\left(1, \frac{2(n-k)-2k}{n+k}\right)$
(1,3)	$\frac{1}{n}$	$\left(\frac{n-7k}{n+1}, 3\right)$	$\left(1, \frac{3n+5k}{n-1}\right)$	$\left(\frac{n+7k}{n-1}, 3\right)$	$\left(3, \frac{3n-5k}{n+1}\right)$
(1,3)	$\frac{k}{n}$	$\left(\frac{(n-k)-6k}{n+k}, 3\right)$	$\left(1, \frac{3(n+k)+2k}{n-k}\right)$	$\left(\frac{(n+k)+6k}{n-k}, 3\right)$	$\left(1, \frac{3(n-k)-2k}{n+k}\right)$

(1,b)	$\frac{k}{n}$	$\left(\frac{(n-k)-2bk}{n+k}, b\right)$	$\left(1, \frac{b(n+k)+2k}{n-k}\right)$	$\left(\frac{(n+k)+2bk}{n-k}, b\right)$	$\left(1, \frac{b(n-k)-2k}{n+k}\right)$

Bola centrada en el punto $A(a, 1)$ y radio $\varepsilon < 1$.

Después de realizar esto nos dimos a la tarea de encontrar una regularidad para las bolas que tienen centro en $S(a, 1)$, $b \in \mathbb{N}$ y radio $\frac{1}{n}$ con $n \in \mathbb{N}$.

Bola centrada en $S(2, 1)$ radio $\varepsilon = \frac{1}{5}$ (ver imagen 53).



53 Imagen

Vértices del cuadrilátero formado son: $A(1,1), B\left(2, \frac{5}{2}\right), C\left(\frac{7}{3}, 1\right), D(2,0)$

Realizamos otras exploraciones y llegamos a una generalización de las bolas con centro en $(2,1)$ y radio $\frac{1}{n}$, que se presenta en la siguiente tabla:

ε	Coordenada A	Coordenada B	Coordenada C	Coordenada D
$\frac{1}{5}$	$A(1,1)$	$B\left(2, \frac{5}{2}\right)$	$C\left(\frac{7}{3}, 1\right)$	$D(2,0)$
$\frac{1}{6}$	$A\left(\frac{8}{7}, 1\right)$	$B\left(2, \frac{11}{5}\right)$	$C\left(\frac{16}{5}, 1\right)$	$D\left(2, \frac{1}{7}\right)$
...
$\frac{1}{n}$	$\left(\frac{2(n-2k)}{n+1}, 1\right)$	$\left(2, \frac{n+5k}{n-1}\right)$	$\left(\frac{2(n+2k)}{n-1}, 1\right)$	$\left(2, \frac{n-5k}{n+1}\right)$

Generalización

Después de esto se hicieron varias exploraciones donde las coordenadas del centro tenían la forma $(a, 1)$ y con radios que estaban de la forma $\frac{k}{n}$, se llegó a una fórmula general para encontrar los vértices del trapecio isósceles que resulta, la información recolectada se presenta en la siguiente tabla:

Centro (a,b)	ε	Coordenada A	Coordenada B	Coordenada C	Coordenada D
$(2,1)$	$\frac{1}{n}$	$\left(\frac{2(n-2k)}{n+1}, 1\right)$	$\left(2, \frac{n+5k}{n-1}\right)$	$\left(\frac{2(n+2k)}{n-1}, 1\right)$	$\left(2, \frac{n-5k}{n+1}\right)$
$(2,1)$	$\frac{k}{n}$	$\left(\frac{2(n-k)-2k}{n+k}, 1\right)$	$\left(2, \frac{(n+k)+4k}{n-k}\right)$	$\left(\frac{2(n+k)+2k}{n-k}, 1\right)$	$\left(2, \frac{(n-k)-4k}{n+k}\right)$
...
$(a,1)$	$\frac{k}{n}$	$\left(\frac{a(n-k)-2k}{n+k}, 1\right)$	$\left(a, \frac{(n+k)+2ak}{n-k}\right)$	$\left(\frac{a(n+k)+2k}{n-k}, 1\right)$	$\left(a, \frac{(n-k)-2ak}{n+k}\right)$

Observando las regularidades que se cumplían para las bolas centradas en $(1,b)$ y $(a,1)$, con radios $\frac{k}{n}$, observamos una regularidad que se cumplía para encontrar las coordenadas del trapecio isósceles que graficaba el Derive 6, como

fronteras de nuestras bolas para cualquier centro con cualquier radio, las fórmulas para hallar cada coordenada están presentadas a continuación:

- Coordenadas para el punto A

$$\left(\frac{a(n-k) - 2bk}{n+k}, b \right)$$

- Coordenadas para el punto B

$$\left(a, \frac{b(n+k) + 2ak}{n-k} \right)$$

- Coordenadas para el punto C

$$\left(\frac{a(n+k) + 2bk}{n-k}, b \right)$$

- Coordenadas para el punto D

$$\left(a, \frac{b(n-k) - 2ak}{n+k} \right)$$

Con un poco más de exploración encontramos que estas coordenadas también nos sirven para cuando los centros de las bolas están ubicados en cualquier cuadrante del plano cartesiano y con cualquier radio que tomemos, lo único que hay que hacer es agregar valores absolutos de la siguiente forma:

- Coordenadas para el punto A

$$\left(\frac{|a|(n-k) - 2|b|k}{n+k}, b \right)$$

- Coordenadas para el punto B

$$\left(a, \frac{|b|(n+k) + 2|a|k}{n-k} \right)$$

- Coordenadas para el punto C

$$\left(\frac{|a|(n+k) + 2|b|k}{n-k}, b \right)$$

- Coordenadas para el punto D

$$\left(a, \frac{|b|(n-k) - 2|a|k}{n+k} \right)$$

CONCLUSIONES DEL SEGUNDO CAPÍTULO

En este capítulo, a pesar de que nuestra función no cumplía la desigualdad triangular en algunos puntos, y aplicando las nociones topológicas a nuestra función, se generaban un tipo de bolas en las cuales sus bordes tenían la forma de cometas y trapecios isósceles, mirando también las bolas formadas por los cuadrantes del plano cartesiano. Para cada uno de los tipos de bolas se encontró una regla general de cómo encontrar las coordenadas de la frontera de la bola generada con nuestra función, esto anterior en miras al tercer capítulo donde se necesitaban estas coordenadas para poder encerrar las bolas de la función lejanía en las bolas de la métrica usual y viceversa.

Como conclusiones generales podemos decir lo siguiente:

- ✓ Las fronteras de algunas bolas definidas con nuestra función en algunos casos son cuadrantes del plano cartesiano.
- ✓ Los vértices de la frontera de la bola generada con nuestra función los podemos encontrar aplicando las formulas encontradas.

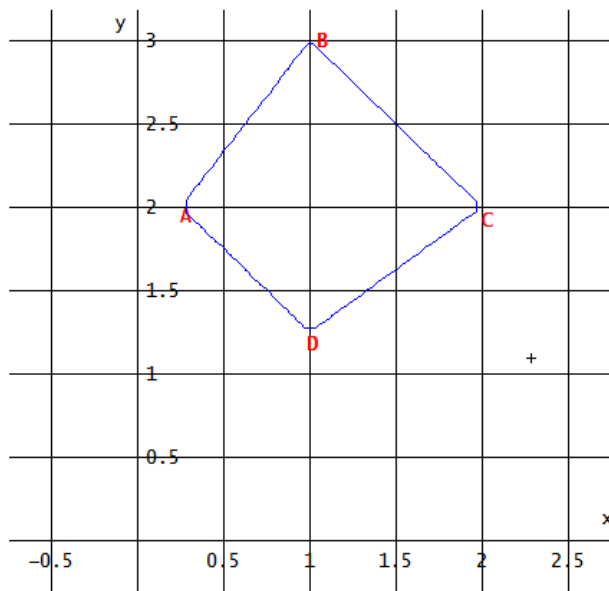
CAPÍTULO No. 3

Como la función lejanía la estamos trabajando como una métrica, en el capítulo 2 nos dedicamos a caracterizar todos los tipos de bolas que se definen a partir de esta función, encontramos varios tipos de bolas, para cada tipo de bola que encontramos se dieron algunas generalidades. En este capítulo utilizaremos esas generalidades para ver si las bolas generadas en el capítulo anterior, son base para una topología, y si esa topología generada guarda alguna relación con la topología generada por la métrica usual en \mathbb{R}^2 .

En el capítulo dos encontramos las coordenadas de los vértices del cuadrilátero que define el borde de la bola, estos vértices nos sirven de alguna manera para hallar el radio de una bola usual que esté contenida en la bola definida por nuestra función. A partir de ahora se notarán B_l a las bolas definidas por la función lejanía, y B_d a las bolas de la métrica usual en \mathbb{R}^2 .

Bolas B_l contenidas en bolas B_d

Para la primera parte de este capítulo lo que se hará es que a partir de una bola B_l se encontrará una bola B_d que la contenga.



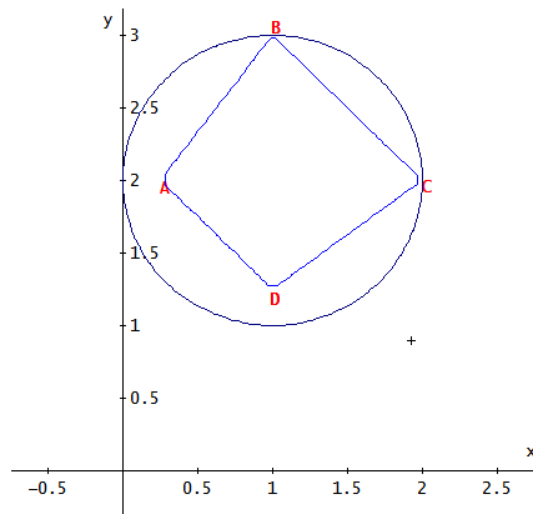
52 imagen

En la imagen anterior (*imagen 52*) se puede observar que, como ya se definió en el capítulo dos, los vértices A y D están a la misma distancia del centro de la bola. Por otra parte, estos dos vértices están a menor distancia del centro que los vértices B y C.

En esta imagen (imagen 52) podemos ver una bola centrada en $(1,2)$ y radio $\varepsilon = \frac{1}{7}$, se puede observar que los vértices B y C están a la misma distancia del centro, y que están a mayor distancia del centro que A y D .

Al tener la coordenada de uno de los vértices del cuadrilátero que define la frontera de la bola B_l , podemos encontrar una bola B_d que contenga a B_l , puesto que hallando la distancia del centro de B_l a los vértices B o C encontramos el radio de esta.

Ejemplo 1: Para el caso de la bola B_l centrada en $(1,2)$ y radio $\varepsilon = \frac{1}{7}$, podemos observar en la imagen 53 que las coordenadas de los vértices B y C son $(1,3)$ y $(2,2)$ respectivamente, entonces el radio de la bola B_d que contiene a B_l y está centrada en $(1,1)$ es 1.



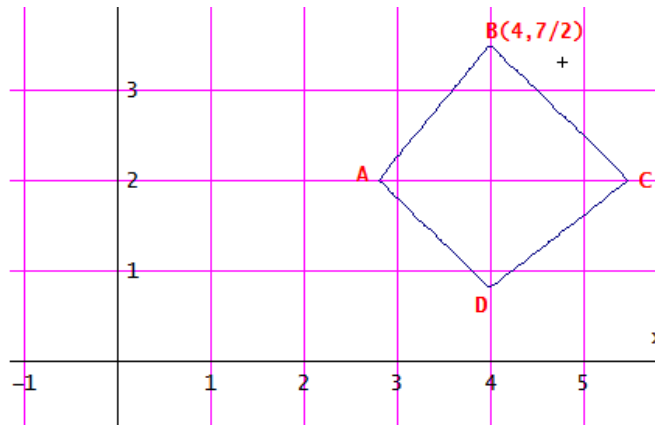
53 Imagen

En esta misma imagen se puede ver que los vértices B y C los cuales son puntos de la frontera de B_l también son puntos de la frontera de la bola B_d .

A continuación, veremos algunos ejemplos donde es necesario utilizar la fórmula para hallar los vértices del cuadrilátero que define la frontera de la bola B_l .

Ejemplo 2: Para la bola centrada en $(4,2)$ y radio $\varepsilon = \frac{1}{9}$ (imagen 54) a simple vista no es claro cuáles son las coordenadas de los vértices del cuadrilátero, por lo que vamos a utilizar la fórmula $B\left(a, \frac{|b|(n+k)+2k|a|}{n-k}\right)$ encontrada en el capítulo anterior.

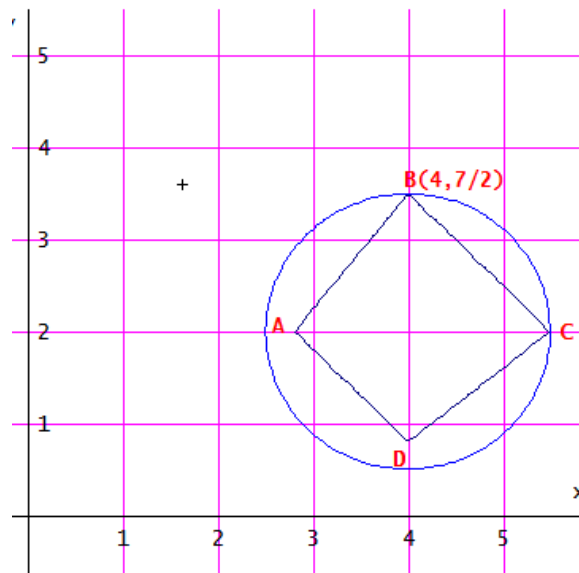
Para este caso $a = 4$, $b = 2$, $n = 9$ y $k = 1$ reemplazando en la fórmula tendríamos $B\left(4, \frac{|2|(9+1)+2(1)|4|}{9-1}\right)$ entonces $B\left(4, \frac{7}{2}\right)$.



54 Imagen

Ahora, como ya tenemos la coordenada del punto B , podemos hallar el radio r de la bola B_d la cual contenga a la bola $B_l \left((4,2), \frac{1}{9} \right)$. Para hallar este radio basta hallar la distancia entre la ordenada del centro de la bola y la ordenada del punto B , entonces el radio de la bola B_d es $r = \left| 2 - \frac{7}{2} \right|$ entonces $r = \frac{3}{2}$ por lo que la bola B_d que contiene a la bola B_l es:

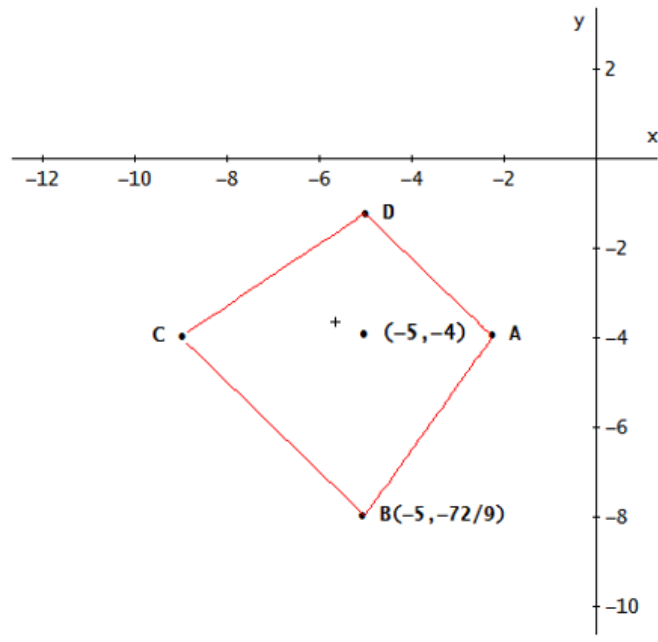
$$B_d \left((4,2), \frac{3}{2} \right) = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : d((4,2), (x,y)) < \frac{3}{2} \right\}$$



55 Imagen

En la imagen 55 podemos apreciar que los puntos B y D que pertenecen a la frontera de $B_l \left((4,2), \frac{1}{9} \right)$ también son puntos de la frontera de la bola $B_d \left((4,2), \frac{3}{2} \right)$.

Ejemplo 3: Para la bola centrada en $(-5, -4)$ y radio $\varepsilon = \frac{2}{11}$ imagen 56, se hallará el vértice B del cuadrilátero utilizando la fórmula $B\left(a, -\left(\frac{|b|(n+k)+2k|a|}{n-k}\right)\right)$ encontrada en el capítulo anterior, en este caso $a = -5$, $b = -4$, $n = 11$ y $k = 2$ por lo que reemplazando en la formula tenemos $B\left(-5, -\left(\frac{|-4|(11+2)+2(2)|-5|}{11-2}\right)\right)$ entonces $B\left(-5, -\frac{72}{9}\right)$.

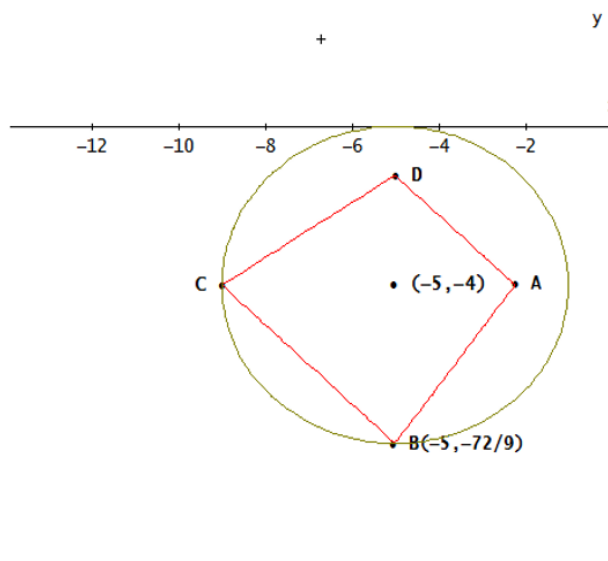


56 Imagen

Ahora, como ya tenemos la coordenada del punto B , podemos hallar el radio r de una bola B_d la cual contenga a la bola $B_l\left((-5, -4), \varepsilon = \frac{2}{11}\right)$. Para hallar este radio hallamos la distancia entre la ordenada del centro de la bola B_l y la ordenada del punto B , por lo tanto el radio de la bola B_d es $r = \left| -4 - \left(-\frac{72}{9}\right) \right|$, entonces $r = 4$ por lo que la bola B_d que contiene a la bola B_l es $B_d\left((-5, -4), 4\right) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : d\left((-5, -4), (x, y)\right) < 4\}$ (imagen 57).

En esta imagen (imagen 57) podemos apreciar que los puntos B y D que pertenecen a la frontera de $B_l\left((-5, -4), \frac{2}{11}\right)$ también son puntos de la frontera de la bola $B_d\left((-5, -4), 4\right)$.

57 Imagen



Gracias a la exploración que se hizo con el programa Derive y a las regularidades encontradas en el capítulo 2 para hallar las coordenadas de los vértices del cuadrilátero que definen la frontera de la bola B_l , fue posible conjeturar que para cualquier bola B_l podemos encontrar una bola B_d que la contenga.

A partir de la bola B_d encontrar una bola B_l que esté contenida en ella

Teniendo la coordenada del centro de la bola B_d y su radio, podemos obtener las coordenadas del vértice B del cuadrilátero que define la frontera de la bola B_l . Luego el radio de B_l se obtiene de hallar la lejanía entre las abscisas del centro de B_d y el punto B . Como los puntos B y C de la frontera de B_l están a la misma distancia del centro, y esos puntos son los que tienen mayor distancia respecto a este, podemos afirmar que toda la bola B_l está contenida en la bola B_d (Imagen 58).

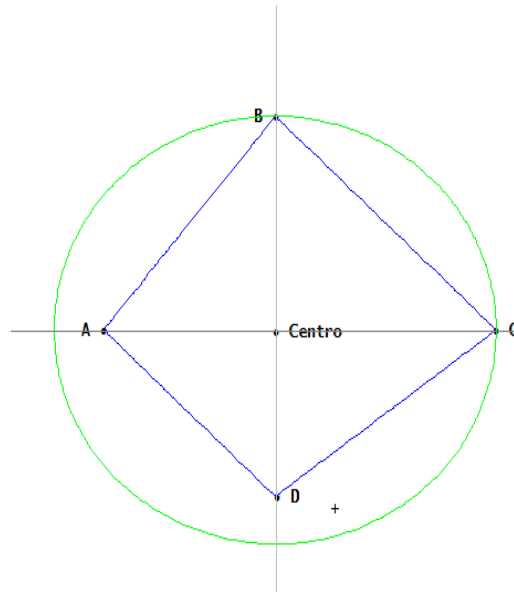


Imagen 58

Ejemplo 1: Dada la bola $B_d((3,4), 2)$. Para hallar la coordenada del punto B , se suma a la abscisa de la coordenada del centro, el radio de la bola B_d , por lo que el punto B está en la coordenada $(3,6)$. Ahora para encontrar el radio de B_l hallamos la lejanía entre el centro de la bola B_d y el punto B .

Lejanía entre el centro de la bola B_d y el punto B :

Recordemos que la función lejanía está definida como:

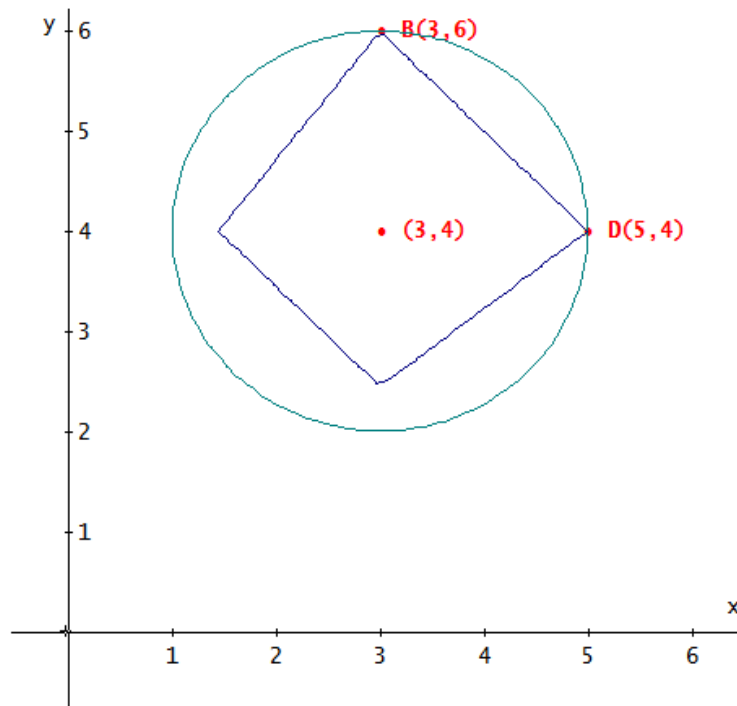
$$l((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \begin{cases} \frac{|x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|}{|x_1| + |y_1| + |x_2| + |y_2|} & \text{si } x_2, x_1, y_2 \text{ e } y_1 \neq 0 \\ 0 & \text{si } x_2, x_1, y_2 \text{ e } y_1 = 0 \end{cases}$$

La lejanía entre los puntos $(3,4)$ y $(3,6)$ es:

$$l((3,4), (3,6)) = \frac{|3 - 3| + |6 - 4|}{|3| + |4| + |3| + |6|}$$

$$l((3,4), (3,6)) = \frac{1}{8}$$

Como la lejanía entre $(3,4)$ y $(3,6)$ es $\frac{1}{8}$, entonces la bola $B_l((3,4), \frac{1}{8})$ está contenida en la bola B_d (imagen 59).

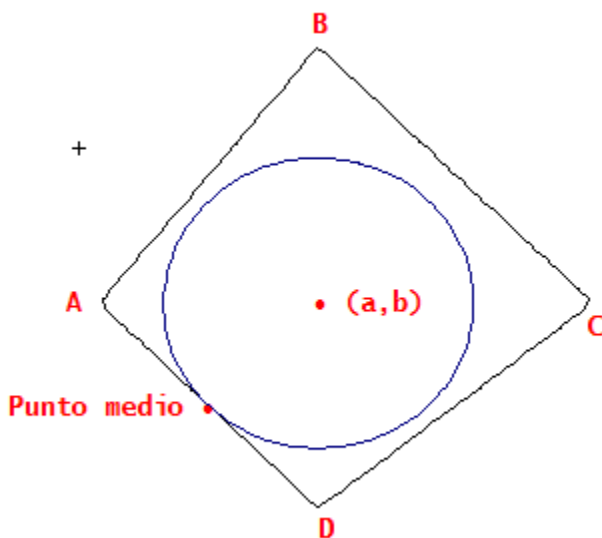


59 Imagen

Gracias a la exploración que se hizo con el programa Derive y a las regularidades encontradas en el capítulo 2 para hallar las coordenadas de los vértices del cuadrilátero que definen la frontera de la bola B_l , fue posible conjeturar que para cualquier bola B_d podemos encontrar una bola B_l que este contenida en ella.

Bolas B_d contenidas en bolas B_l

Dada una bola B_l centrada en (a, b) y radio ε , la bola B_d que está contenida en B_l y tiene como centro el punto (a, b) , debe tener como radio la distancia del centro al punto medio de los puntos A y D (Imagen 60).



60 Imagen

De una manera más formal:

Dada la bola $B_l(A(a, b), \varepsilon)$ cuyas coordenadas de los vértices A y D de la frontera son $\left(\frac{|a|(n-k)-2k|b|}{n+k}, b\right)$ y $\left(a, \frac{|b|(n-k)-2k|a|}{n+k}\right)$ respectivamente y la coordenada del punto medio entre estos dos puntos es $\left(\frac{|a|(n-k)-2k|b|+a(n+k)}{2(n+k)}, \frac{|b|(n-k)-2k|a|+b(n+k)}{2(n+k)}\right)$, si el radio de la bola B_d centrada en (a, b) es $r = \sqrt{\left(a - \frac{|a|(n-k)-2k|b|+a(n+k)}{2(n+k)}\right)^2 + \left(b - \frac{|b|(n-k)-2k|a|+b(n+k)}{2(n+k)}\right)^2}$ Entonces $B_d((a, b), r) \subseteq B_l((a, b), \varepsilon)$.

Ejemplo 1. Dada la bola B_l centrada en $(4, 2)$ y radio $\varepsilon = \frac{1}{9}$, los vértices A y D de la frontera son $\left(\frac{14}{5}, 2\right)$ y $\left(4, \frac{4}{5}\right)$ respectivamente. Hallaremos primero las coordenadas del punto medio entre A y D .

Como $a = 4$, $b = 2$, $n = 9$ y $k = 1$ reemplazando en:

$$\left(\frac{|a|(n-k) - 2k|b| + a(n+k)}{2(n+k)}, \frac{|b|(n-k) - 2k|a| + b(n+k)}{2(n+k)} \right)$$

Entonces:

$$\left(\frac{|4|(9-1) - 2(1)|2| + 4(9+1)}{2(9+1)}, \frac{|2|(9-1) - 2(1)|4| + 2(9+1)}{2(9+1)} \right)$$

Por lo que la coordenada del punto medio entre A y D es $\left(\frac{17}{5}, \frac{7}{5}\right)$.

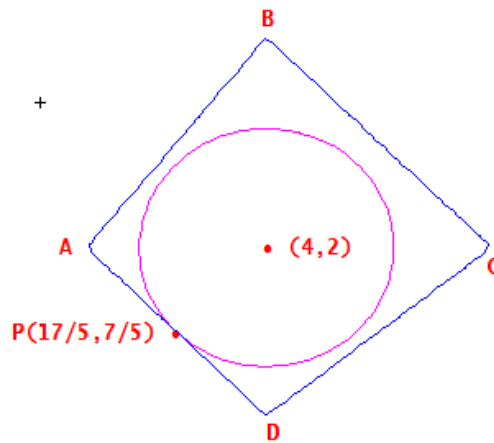
Ahora para encontrar el radio r de la bola B_d que este contenida en la bola $B_l\left((4,2), \varepsilon = \frac{1}{9}\right)$, hallamos la distancia entre el centro de la bola y el punto medio de A y D .

$$r = \sqrt{\left(4 - \frac{17}{5}\right)^2 + \left(2 - \frac{7}{5}\right)^2}$$

$$r = \sqrt{\frac{18}{25}}$$

Teniendo el radio y el centro de la bola B_d en la imagen 61 se puede observar que

$$B_d\left((4,2), \sqrt{\frac{18}{25}}\right) \subseteq B_l\left((4,2), \varepsilon = \frac{1}{9}\right).$$



61 Imagen

Ejemplo 2: Dada la bola B_l centrada en $(3,5)$ y radio $\varepsilon = \frac{2}{13}$, los vértices A y D de la frontera son $\left(\frac{13}{15}, 5\right)$ y $\left(3, \frac{43}{15}\right)$ respectivamente. Hallaremos primero las coordenadas del punto medio entre A y D .

Como $a = 3$, $b = 5$, $n = 13$ y $k = 2$ reemplazamos en:

$$\left(\frac{|a|(n-k) - 2k|b| + a(n+k)}{2(n+k)}, \frac{|b|(n-k) - 2k|a| + b(n+k)}{2(n+k)} \right)$$

Entonces

$$\left(\frac{|3|(13-2) - 2(2)|5| + 3(13+2)}{2(13+2)}, \frac{|5|(13-2) - 2(2)|3| + 5(13+2)}{2(13+2)} \right)$$

Por lo que la coordenada del punto medio entre A y D es $\left(\frac{29}{15}, \frac{59}{15}\right)$.

Ahora para encontrar el radio r de la bola B_d que este contenida en la bola $B_l \left((3,5), \varepsilon = \frac{2}{13} \right)$, hallamos la distancian entre el centro de la bola y el punto medio de A y D .

$$r = \sqrt{\left(3 - \frac{29}{15}\right)^2 + \left(5 - \frac{59}{15}\right)^2}$$

$$r = \sqrt{\frac{512}{225}}$$

Teniendo el radio y el centro de la bola B_d podemos decir $B_d \left((3,5), \sqrt{\frac{512}{225}} \right) \subseteq B_l \left((3,5), \varepsilon = \frac{2}{13} \right)$.

Conclusión

Gracias a la exploración que se hizo con el programa Derive y a las regularidades encontradas en el capítulo 2 para hallar las coordenadas de los vértices del cuadrilátero que definen la frontera de la bola B_l , fue posible conjeturar que para cualquier bola B_l podemos encontrar una bola B_d que este contenida en ella.

Las bolas B_l como base para una topología sobre \mathbb{R}^2

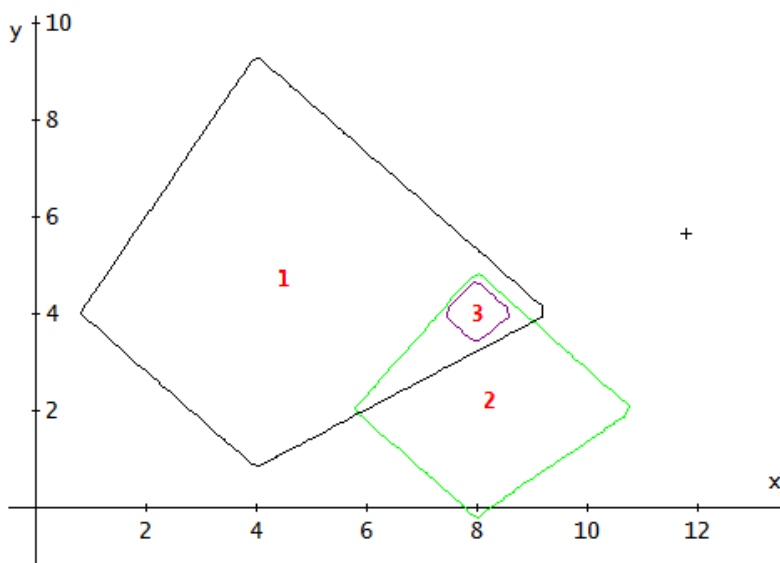
En esta parte del trabajo trataremos de mostrar que dada la función lejanía podemos definir una base para una topología.

Recordemos que para mostrar que una colección de bolas forma una base para una topología, se requiere demostrar que cualquier punto de la intersección de dos bolas es centro de una bola que está contenida en esta intersección.

Por lo que para mostrar que las bolas B_l forman una base para una topología se debe demostrar que si $(x, y) \in B_l((x_1, y_1), \varepsilon_1) \cap B_l((x_2, y_2), \varepsilon_2)$ existe un $B_l((x, y), \varepsilon_3)$ tal que $(x, y) \in B_l((x, y), \varepsilon_3) \subset B_l((x_1, y_1), \varepsilon_1) \cap B_l((x_2, y_2), \varepsilon_2)$

Empezaremos por mostrar algunos ejemplos donde se evidencia que esto se cumple.

Ejemplo 1: En la imagen 62 se puede observar que dada la bola $B_l\left((4,4), \frac{1}{4}\right)$ y la bola $B_l\left((8,2), \frac{1}{8}\right)$ para el punto $(8,4) \in B_l\left((4,4), \frac{1}{4}\right) \cap B_l\left((8,2), \frac{1}{8}\right)$ existe la bola $B_l\left((8,4), \frac{1}{37}\right)$ tal que $B_l\left((8,4), \frac{1}{37}\right) \subset B_l\left((4,4), \frac{1}{4}\right) \cap B_l\left((8,2), \frac{1}{8}\right)$.



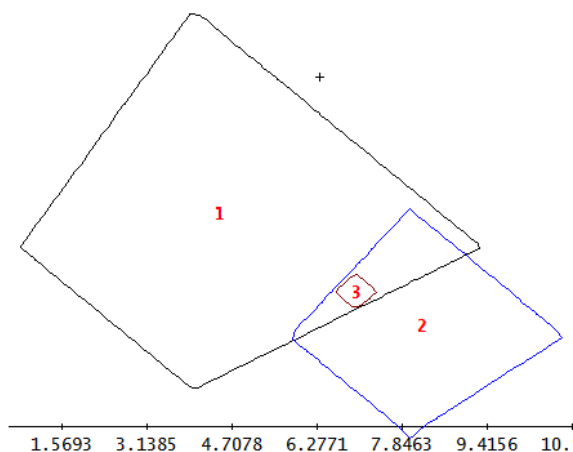
1 es la bola $B_l\left((4,4), \frac{1}{4}\right)$

2 es la bola $B_l\left((8,2), \frac{1}{8}\right)$

3 es la bola $B_l\left((8,4), \frac{1}{37}\right)$

62 Imagen

En la imagen 63 se puede observar que dadas las mismas bolas $B_l\left((4,4),\frac{1}{4}\right)$ y $B_l\left((8,2),\frac{1}{8}\right)$ y dado el punto $(7,3) \in B_l\left((4,4),\frac{1}{4}\right) \cap B_l\left((8,2),\frac{1}{8}\right)$ existe otra bola $B_l\left((7,3),\frac{1}{50}\right)$ tal que $B_l\left((7,3),\frac{1}{50}\right) \subset B_l\left((4,4),\frac{1}{4}\right) \cap B_l\left((8,2),\frac{1}{8}\right)$.



- 1 es la bola $B_l\left((4,4),\frac{1}{4}\right)$
- 2 es la bola $B_l\left((8,2),\frac{1}{8}\right)$
- 3 es la bola $B_l\left((7,3),\frac{1}{50}\right)$

63 Imagen

Luego de explorar con derive conjeturamos que para cada $(x, y) \in B_l((x_1, y_1), \varepsilon_1) \cap B_l((x_2, y_2), \varepsilon_2)$ existe un $B_l((x, y), \varepsilon_3)$ tal que $(x, y) \in B_l((x, y), \varepsilon_3) \subset B_l((x_1, y_1), \varepsilon_1) \cap B_l((x_2, y_2), \varepsilon_2)$, por lo que la colección de bolas B_l es base para una topología.

Ahora como para cada $B_d((x_1, y_1), \varepsilon)$ y para cada punto $(x_2, y_2) \in B_d((x_1, y_1), \varepsilon)$ existe $B_l((x_2, y_2), r) \subseteq B_d((x_1, y_1), \varepsilon)$, se tiene que si T_l es la topología generada por la base formada por la colección de bolas B_l , y T_d es la topología usual del plano, entonces $T_d \subseteq T_l$.

A pesar de que se cumple lo anterior las topologías no son equivalentes puesto que para cada $B_l((x_1, y_1), \varepsilon)$ y para cada punto $(x_2, y_2) \in B_l((x_1, y_1), \varepsilon)$ existe $B_d((x_2, y_2), r) \subseteq B_d((x_1, y_1), \varepsilon)$ excepto para las bolas **Tipo 1** por esta razón podemos decir que la topología T_l es mas fina que la topología T_d .

CONCLUSION DEL TERCER CAPITULO

En este capítulo nos dedicamos a estudiar si es posible encontrar una bola lejanía contenida en la intersección de dos bolas lejanía, a partir de la exploración y utilizando algunos hechos definidos en el capítulo dos, se pudo conjeturar que la colección de bolas es base para una topología, puesto que para cada punto que

pertenece a la intersección de dos bolas B_l , se puede hallar una bola B_l que esté contenida en esta intersección.

En este capítulo también nos dedicamos a comparar las bolas generadas con la métrica usual y las bolas generadas con la función lejanía, lo que se hizo fue que a partir de una bola B_l encontramos una bola B_d que este contenida en B_l , y a partir de de una bola B_d encontramos una bola B_l que este contenida en B_d . Luego lo que se hizo fue que a partir de una bola B_l encontramos una bola B_d que contiene a B_l , y a partir de de una bola B_d encontramos una bola B_l que contiene a B_d . Como para toda bola B_d fue posible encontrar una bola B_l contenida en ella, pero no para toda B_l fue posible encontrar una bola B_d contenida en ella, entonces se conjetura que la topología generada por la colección de bolas B_l es más fina que la topología generada por la colección de bolas B_d .

BILBIOGRAFIA

Neira, C (2011). *Topología general*. Bogotá, Colombia: Universidad Nacional de Colombia.

Muñoz, J. (2003). *Topología Básica*. Bogotá, Colombia: Universidad Nacional de Colombia.

Muñoz, J. (2002). *Introducción a la teoría de conjuntos*. Bogotá, Colombia: Universidad Nacional de Colombia.

Horváth, J. (2005). *Introducción a la topología general*. Callege Park, Md Estados Unidos: Universidad de Maryland.

Moise, E. (2009). *Geometría Moderna*. Massachusetts, Estados unidos: Addison Wesley Iberoamérica.

BIBLIOGRAFIA

Neira, C (2011). *Topología general*. Bogotá, Colombia: Universidad Nacional de Colombia.

Muñoz, J. (2003). *Topología Básica*. Bogotá, Colombia: Universidad Nacional de Colombia.

Muñoz, J. (2002). *Introducción a la teoría de conjuntos*. Bogotá, Colombia: Universidad Nacional de Colombia.

Horváth, J. (2005). *Introducción a la topología general*. Callege Park, Md Estados Unidos: Universidad de Maryland.

Moise, E. (2009). *Geometría Moderna*. Massachusetts, Estados unidos: Addison Wesley Iberoamérica.