MANUAL DEL SOFTWAREIFS CONSTRUCTION KIT PARA GENERAR IMÁGENES QUE REPRESENTAN FRACTALES MEDIANTE SISTEMAS DE FUNCIONES ITERADAS

LUIS CARLOS RIVERA LONDOÑO

Trabajo de grado para optar al título de Licenciado en matemáticas

Asesor: Jorge Edgar Páez Ortegón

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

BOGOTÁ
2015

Nota de aceptación:

____
____
____
____
____
____

____
Firma del presidente del jurado

____
Firma del jurado

____
Firma del jurado

Dedicatoria

A mis padres y hermanos que nunca han dejado de creer en mí a pesar de las dificultades que la vida me ha presentado.

A mi compañera Esperanza que ha estado ahí siempre con su apoyo y comprensión.

Agradecimientos

La culminación de una corta etapa en la vida de una persona como lo es la formación profesional, siempre debe ser el comienzo de otra etapa de aprendizaje aún más profundo que no necesariamente es la formación de postgrado, sino las vivencias que se tienen en el ejercicio de la dura labor docente.
En primer lugar, quiero agradecer a Dios por permitirme acceder a tan bella ciencia y compartir lo que se aprende con otras personas.

Mis padres han sido un apoyo moral muy fuerte que me ha permitido continuar en pie de lucha, pues no han sido fáciles los momentos que he vivido tratando de cumplir algunas metas que me he trazado en la vida. No tengo palabras para expresar mis más profundos agradecimientos a ellos y a mis hermanos que siempre estuvieron pendientes de mi formación.

A mi novia Esperanza, que desde hace muchos años ha sido mi apoyo incondicional, mi confidente, mi amiga la persona que más me ha alentado a no desfallecer cuando la crisis está cerca.

Doy además gracias a todos aquellos docentes de la Universidad Pedagógica Nacional que se esmeraron directa e indirectamente por dar lo mejor de sí para contribuir en mi proceso de formación docente, y muy especialmente a quienes intervinieron directamente en la culminación del presente trabajo, mi asesor Jorge Edgar Páez Ortegón, y los jurados Fernando Ospina y Benjamín Sarmiento.

A la Lic. Lida Constanza Mora Mendieta por su paciencia y constante apoyo, junto con su grupo de colaboradoras administrativas.

Resumen Analítico en Educación -RAE

1.Información General	
Tipo de documento	Trabajo de grado
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento	Manual del software **IFSConstruction Kit** para generar imágenes que representan fractales mediante sistema de funciones iteradas
Autor(es)	Rivera Londoño, Luis Carlos
Director	Páez Ortegón, Jorge Edgar
Publicación	Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional. 2015, 96 p.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional
Palabras Claves	FRACTALES, MANUAL DE **IFS CONSTRUCTION KIT**, SISTEMAS DE FUNCIONES ITERADAS, TEOREMA DEL PUNTO FIJO, OPERADORDE HUTCHINSON

2.Descripción
Los últimos avances en matemáticas en el campo de geometría fractal han permitido el surgimiento de una gran variedad de aplicaciones informáticas útiles para la representación de conjuntos fractales. Este trabajo pretende presentar a **IFSConstruction Kit** como una opción para construir fractales con base en los sistemas de funciones iteradas.

3.Fuentes
Se han usado 25 fuentes para la elaboración de este trabajo, 11 sitios web y 14 fuentes físicas, de las cuales las más representativas son: Adame Sarmiento, E. a. (s.f.). *Sistemas de funciones iteradas y los fractales.* Recuperado el 22 de 10 de 2013, de Fundación Universitaria Konrad Lorenz: http://www.konradlorenz.edu.co/images/stories/suma_digital_matematicas/SFI%20y%20los%20Fractales.pdf

Barnsley, M. (1993). *Fractals everywhere.* San Francisco: Morgan Kaufmann.

Barnsley, M., & Demko, S. (8 de Junio de 1985). *Iterated Function Systems and the Global Construction of Fractals.* Recuperado el 11 de noviembre de 2012, de http://www.jstor.org/stable/2397690?origin=JSTOR-pdf

Falconer, K. (2003). *Fractal geometry, Mathematical foundations and aplications.* England: WILEY.

Hutchinson, J. E. (1981). Fractals and sel similarity. *Indiana University Mathematics Journal*, 713 - 747.

Mandelbrot, B. (1997). *La geometría fractal de la naturaleza.* Madrid: Tusquets.

Mathematics Department - Yale University. (01 de Junio de 2012). *Benoit B. Mandelbrot*. Recuperado el 01 de Junio de 2012, de http://users.math.yale.edu/mandelbrot/

Real Academia Española. (2010). *Diccionario de la lengua española - Vigésimo segunda edición*. Recuperado el 7 de Noviembre de 2012, de http://lema.rae.es/drae/?val=fractal

Rubiano Ortegón, G. N. (2000). *Fractales para profanos.* Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.

Sorando, J. M. (s.f.). *Fractales, geometría del caos.* Recuperado el 11 de Julio de 2012, de http://www.unizar.es/ttm/2009-10/FractalesSorando.pdf

4.Contenidos
Capítulo 1. Justificación. Capítulo 2.Objetivos. Capìtulo 3. Marco Teórico. Capítulo 4. Manual del software IFS Construction Kit. Capítulo 5. Conclusiones.
5.Metodología

No aplica metodología de investigación.

6.Conclusiones

- Los sistemas de funciones iteradas son una forma de representar y generar una gran variedad de fractales.
- Las transformaciones en el plano cartesiano no son solo un constructo geométrico, sino una aplicación práctica del algebra lineal.
- La representación gráfica de los fractales de forma iterativa ayuda a comprender lo que hace cada transformación con un compacto, en donde el software actúa como un mediador entre la estructura matemática y la representación gráfica.
- Los sistemas de funciones iteradas han sido usados ampliamente en diversos campos de estudio, pero principalmente en la compresión de imágenes digitales (compresión fractal) y en la creación de realidades virtuales (paisajismo artístico para cine y tv).
- Se ha hecho un manual del software IFS Construction Kit, junto con una descripción y relación entre transformaciones afines en el plano cartesiano y su representación matricial, el cual ha de ser útil para una mejor apropiación de conceptos como las transformaciones afines en el plano y su aplicación iterada para obtener representaciones gráficas de fractales.
- Los fractales generados con sistemas de funciones iteradas en $\mathbb{R}^2$, se basan en transformaciones lineales y afines en el plano, cuya representación gráfica precisa de software especializado y enfocado para tal fin.
- El estudio de los sistemas de funciones iteradas, le sirve a docentes en formación y en ejercicio para una mejor comprensión del concepto de sistemas de funciones iteradas, y para ver las transformaciones lineales y afines en el plano cartesiano desde un punto de vista matricial.
- A nivel personal, el estudio de los sistemas de funciones iteradas me ha permitido tener una visión más amplia de las transformaciones lineales y afines en el plano cartesiano, ya que estas están asociadas a matrices cuadradas 2x2, que transforman un compacto de R^2 en otro compacto.
- Los sistemas de funciones iteradas no son las únicas maneras de generar fractales existen otras, pero estas son de vital importancia porque son el sustento matemático de una teoría geométrica que aún se encuentra en su etapa de descubrimiento y formalización.

- Al seleccionar un determinado software, se encuentra que después de escribir algo sobre este, hay otros paquetes enfocados a otras características de los fractales que requiere una gran profundización y elevados conocimientos en matemáticas para nada elementales y no tan al alcance de todos.
- En la elaboración de este trabajo se encuentran dificultades especialmente de acceso a determinada literatura de nivel investigativo

- Como tema de profundización para un estudio posterior es:¿cómo se generan fractales basados en bases numéricas complejas?.

Elaborado por:	Rivera Londoño, Luis Carlos
Revisado por:	Páez Ortegón, Jorge Edgar

Fecha de elaboración del Resumen:	01	11	2015

Contenido

Lista de tablas

LISTA DE FIGURAS

INTRODUCCION

En este trabajo, se muestran aspectos teóricos fundamentales y relevantes para los sistemas de funciones iteradas, tales como las transformaciones en el plano, el teorema del punto fijo, la representación matricial de tales transformaciones y el concepto de iteración.
Seguidamente se presenta una descripción del funcionamiento del software IFS CONSTRUCTION KIT, dedicado enteramente a la generación de imágenes que representan fractales en R^2.

Se pretende acercar al usuario de herramientas informáticas a una potente aplicación para la generación de imágenes fractales usando fórmulas matemáticas correspondientes a transformaciones afines en R^2.

Se presentan algunos fractales que son generados mediante sistemas de funciones iteradas y que en la actualidad son considerados como fractales clásicos, haciendo especial énfasis en las iteraciones usando imágenes sucesivas generadas en el software, del cual se presenta un manual del usuario para el manejo de IFS CONSTRUCTION KIT, en el que se describen las principales funciones y herramientas que este ofrece al usuario para la manipulación de sistemas de funciones iteradas desde entorno gráfico y numérico.

1. JUSTIFICACIÓN

Uno de los requisitos que debe cumplir el estudiante de la Licenciatura en Matemáticas para optar al título de licenciado es realizar un trabajo de grado en alguna de las modalidades propuestas. Para este caso, se presenta una propuesta en la línea de fractales: Diseño de manuales de software para generar fractales. En particular, se pretende escribir un manual del usuario del software IFS Construction Kit para Windows donde se muestran procedimientos, comandos y funciones para crear imágenes que representan fractales generados mediante sistemas de funciones iteradas.
Se ha elegido este software porque está enfocado a la representación gráfica y matricial de fractales generados con sistemas de funciones iteradas quesegún Michael Barnsley en (Barnsley & Demko, Iterated Function Systems and the Global Construction of Fractals, 1985), es la forma más global de generar fractales.
Considero importante el manual que se presenta en este trabajo, porque con la incorporación de elementos teóricos de los sistemas de funciones iteradas (en adelante SFI), se tiene una mayor comprensión de lo que el software está haciendo al representar gráficamente las transformaciones dadas por el usuario.

2. OBJETIVOS

2.1. Objetivo general

- Crear un manual de usuario del software IFS Construction Kit, para generar imágenes que representan fractales usando sistemas de funciones iteradas.

2.2. Objetivos específicos

- Estudiar la forma como se iteran las transformaciones afines$f: R^2 \to R^2$ en la generación de imágenes que representan fractales.
- Presentar las bases teóricas de los sistemas de funciones iteradas, como una de las formas de construcción de fractales.
- Generar un manual sobre el funcionamiento del software IFS Construction Kit para la generación de imágenes que representan fractales, teniendo en cuenta las transformaciones afines $f: R^2 \to R^2$

3. MARCO TEÓRICO

Desde hace unas décadas la geometría fractal se ha convertido en uno de los campos de investigación matemática más importantes, pues con ella se hace una mejor descripción de la naturaleza y gran parte de sus fenómenos.
Muchas han sido las personas que han estudiado los fractalesdesde distintos ámbitos, pues se han encontrado muchas relaciones de tal teoría con distintas ramas del conocimiento como la biología, la economía el arte gráfico, la música, la geología, y por supuesto las matemáticas, por mencionar algunos casos.
Las ideas teóricas principales de este escrito, se basan en las descritas por Michael Barnsley en (Barnsley, Fractals everywhere, 1993), quien es considerado el matemático que junto conJhon Hutchinson en(Hutchinson, 1981) sentaron las bases teóricas matemáticas para generar imágenes que representan fractales usando los SISTEMAS DE FUNCIONES ITERADAS que es el tema central de este trabajo.

En adelante se utilizará la sigla **SFI** para referirse a **sistemas de funciones iteradas**. Cuando se use ***.ifs*** (en minúscula) se refiere a la ***extensión del archivo*** que guarda los parámetros de un SFI.
La sigla **IFS** se usa, para referirse al **nombre del software**.

3.1. Un acercamiento al concepto de fractal

La palabra fractal fue propuesta por el propio Mandelbrot y proviene del latín "*fractus*" que significa quebrado o fracturado.

Muchas han sido las definiciones que se han tratado de dar acerca de los fractales, sin embargo, no hay un consenso acerca de una definición rigurosa pues cada una de las dadas, deja por fuera a algunos de los conjuntos que se han considerado como fractales.

Según (Mandelbrot, 1997) un fractal es un conjunto para el que su dimensión Hausdorf – Besicovich excede estrictamente a su dimensión topológica.
Pero el mismo Mandelbrot reconoce no estar totalmente satisfecho con esta definición pues excluye a una gran variedad de fractales. Aunque sus trabajos se derivaron de otros matemáticos que le antecedieron y cuyos avances para su época eran considerados como patológicos para los matemáticos más prestigiosos de la época (1918 - 1926), y quienes llamaron a ciertas figuras "monstruos matemáticos".

Para (Barnsley, Fractals everywhere, 1993) un fractal es cualquier conjunto compacto[1] de R^2

[1] De manera general Barnsley define un fractal como cualquier compacto de un espacio métrico completo.

La palabra fractal está incluida en el diccionario español de la Real Academia Española. Según (Real Academia Española, 2010) un fractal es una “*Figura plana o espacial, compuesta de infinitos elementos, que tiene la propiedad de que su aspecto y distribución estadística no cambian cualquiera que sea la escala con que se observe.*”

Así los fractales poseen algunas propiedades que los hacen particularmente únicos:

- Es un conjunto infinitamente complejo.
- Se genera mediante funciones matemáticas.
- Presenta cuasi – auto semejanza[2] a cualquier escala.
- Su dimensión es fraccionaria.

Una definición alterna de lo que es un fractal basado en SFI es: un fractal es un compacto de $\mathbb{R}^2$ al que converge el SFI asociado, es decir, es el punto fijo del SFI.

3.2. Consideraciones teóricas de los sistemas de funciones iteradas

Los sistemas de funciones iteradas surgen de transformaciones geométricas en el plano cartesiano, las cuales se detallan a continuación:

3.2.1 Transformaciones lineales en el plano euclidiano ($\mathbb{R}^2$)

Cualquier transformación lineal $f: R^2 \to R^2$ tiene asociada una única matriz de transformación $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

A continuación se muestran las transformaciones en el plano más usuales:

Identidad:

Tal transformación puede ser vista como una rotación uniforme de 0° y un escalado uniforme con factor de escala $S = 1$

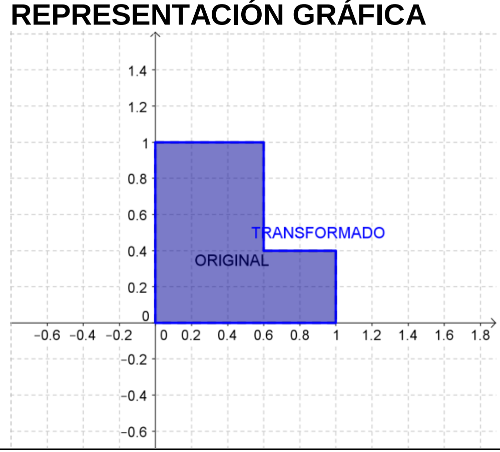
REPRESENTACIÓN MATRICIAL	**REPRESENTACIÓN GRÁFICA**
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$	

Tabla 1. Transformación identidad.

[2] Semejanza estadística

Reflexión con respecto al eje x:

Tal transformación puede ser vista como una rotación uniforme de 0° y un escalado con factores de escala $S_x = 1$ y $S_y = -1$

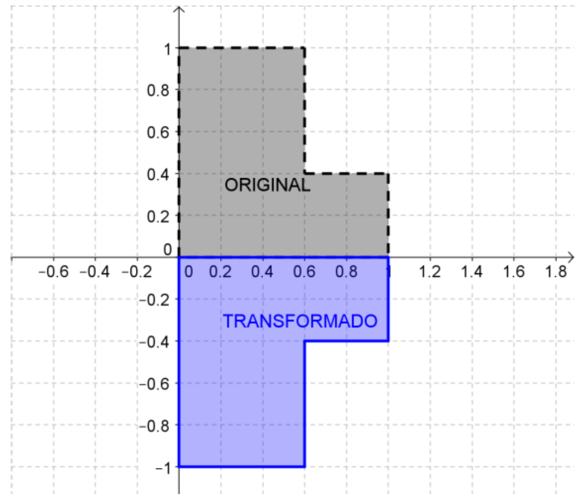
REPRESENTACIÓN MATRICIAL	REPRESENTACIÓN GRÁFICA
$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	

Tabla 2. Reflexión vertical.

Reflexión con respecto al eje y:

Tal transformación puede ser vista como una rotación uniforme de 0° y un escalado con factores de escala $S_x = -1$ y $S_y = 1$

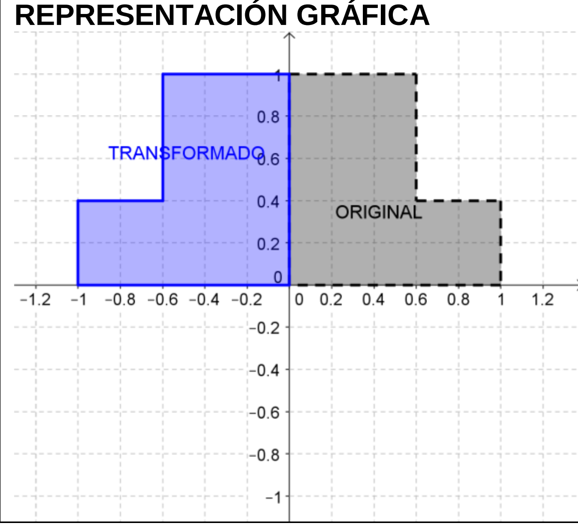
REPRESENTACIÓN MATRICIAL	REPRESENTACIÓN GRÁFICA
$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	

Tabla 3. Reflexión horizontal.

Reflexión con respecto a la recta $y = x$

Tal transformación puede ser vista como una rotación con ángulos $\theta_x = 90°$ y $\theta_y = -90°$ y con factores de escala $S_x = 1$ y $S_y = 1$

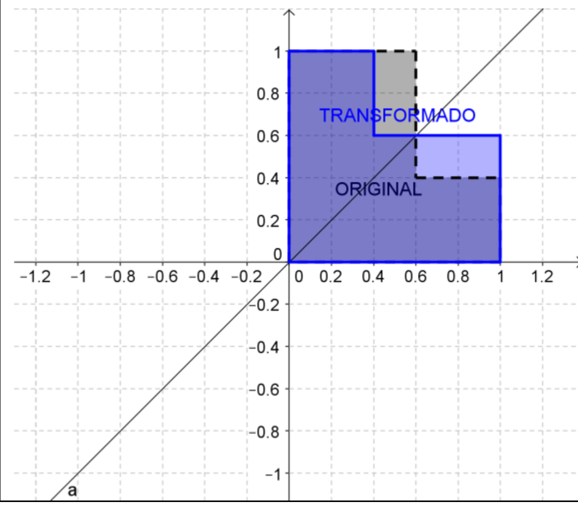
REPRESENTACIÓN MATRICIAL	**REPRESENTACIÓN GRÁFICA**
$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	

Tabla 4. Reflexión respecto a la recta $y = x$.

Escalado (Dilatación) con respecto al eje x, donde $|S_x| \geq 1$

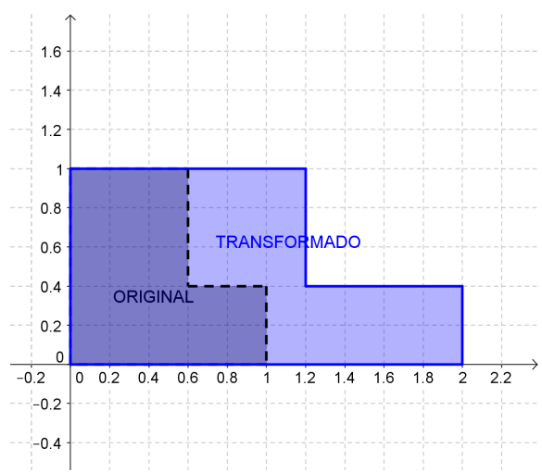
REPRESENTACIÓN MATRICIAL	**REPRESENTACIÓN GRÁFICA**
$A = \begin{pmatrix} S_x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	

Tabla 5. Dilatación (escalado) horizontal.

Escalado (Dilatación) con respecto al eje y, donde$|S_y| \geq 1$

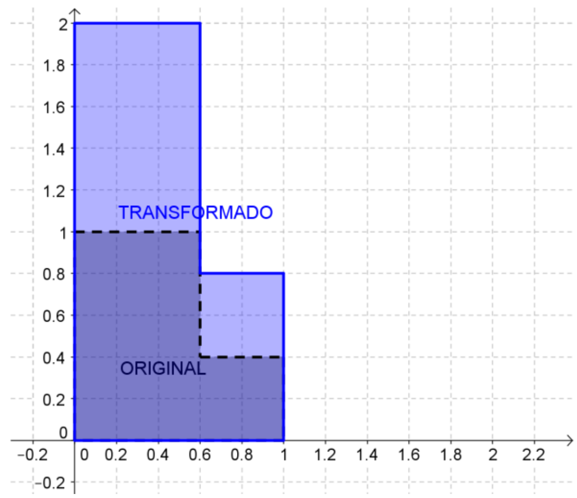
REPRESENTACIÓN MATRICIAL	REPRESENTACIÓN GRÁFICA
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S_y \end{pmatrix}$$	

Tabla 6. Dilatación vertical.

Escalado (Contracción) con respecto al eje x, donde$0 < |S_x| < 1$

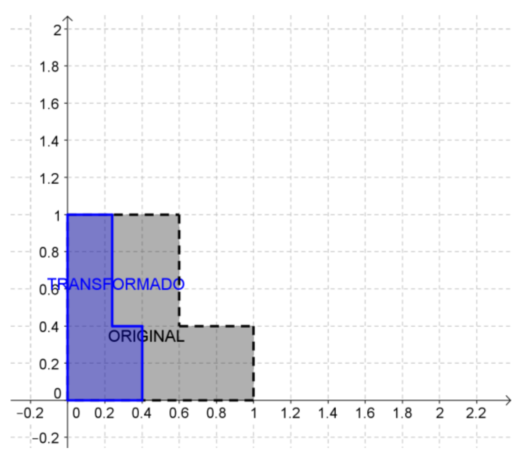
REPRESENTACIÓN MATRICIAL	REPRESENTACIÓN GRÁFICA
$$A = \begin{pmatrix} S_x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$	

Tabla 7. Contracción horizontal.

Escalado (Contracción) con respecto al eje y, donde $0 < |S_y| < 1$

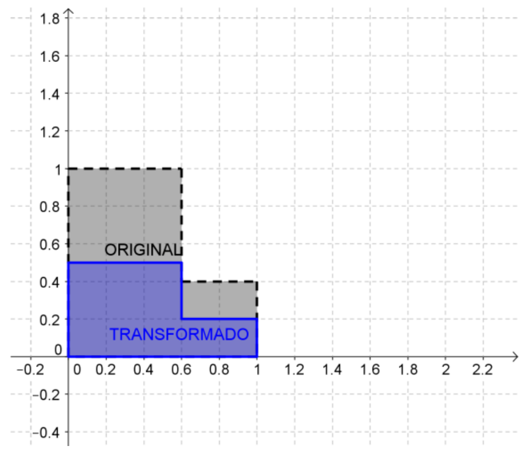
REPRESENTACIÓN MATRICIAL	REPRESENTACIÓN GRÁFICA
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S_y \end{pmatrix}$$	

Tabla 8. Contracción vertical.

Corte (Cizallado) en la dirección x:Es una rotación vertical

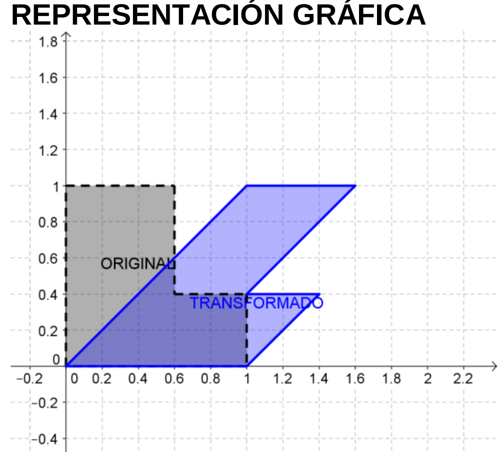
REPRESENTACIÓN MATRICIAL	REPRESENTACIÓN GRÁFICA
$$A = \begin{pmatrix} 1 & C_x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$	

Tabla 9. Corte (cizallado) horizontal.

Corte (Cizallado) en la dirección y:Es una rotación horizontal

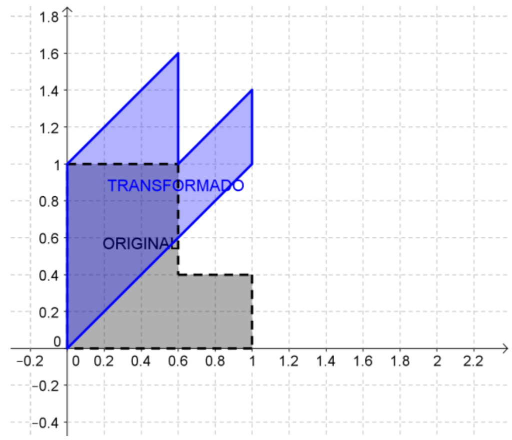
REPRESENTACIÓN MATRICIAL	REPRESENTACIÓN GRÁFICA
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ C_y & 1 \end{pmatrix}$$	

Tabla 10. Corte (cizallado) vertical.

Rotación horizontal: Se puede resumir en una rotación no uniforme en que el ángulo $\theta_y = 0$

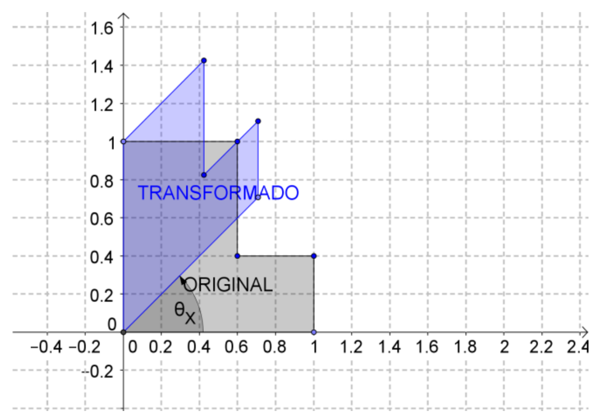
REPRESENTACIÓN MATRICIAL	REPRESENTACIÓN GRÁFICA
$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta_x) & 0 \\ \sin\,(\theta_x) & 1 \end{pmatrix}$$	

Tabla 11. Rotación horizontal.

Rotación vertical: Se puede resumir en una rotación no uniforme en que el ángulo $\theta_x = 0$

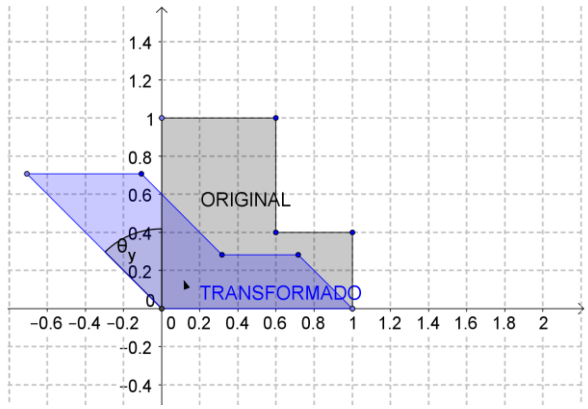
REPRESENTACIÓN MATRICIAL	REPRESENTACIÓN GRÁFICA
$A = \begin{pmatrix} 1 & -\sin\left(\theta_y\right) \\ 0 & \cos\left(\theta_y\right) \end{pmatrix}$	

Tabla 12. Rotación vertical.

Rotación no uniforme:
Los ángulos θ_x y θ_y son distintos

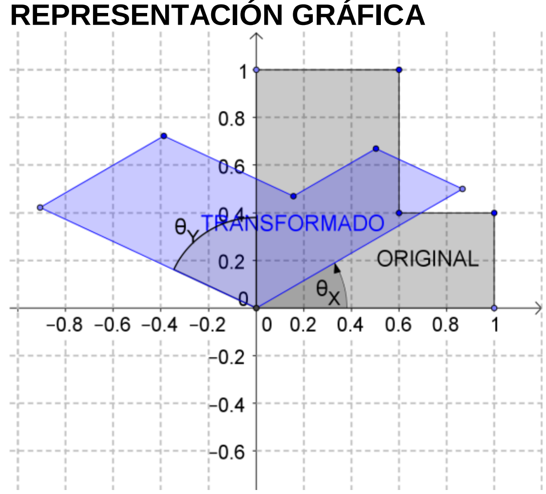
REPRESENTACIÓN MATRICIAL	REPRESENTACIÓN GRÁFICA
$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta_x) & -\sin\left(\theta_y\right) \\ \sin\left(\theta_x\right) & \cos\left(\theta_y\right) \end{pmatrix}$	

Tabla 13. Rotación no uniforme.

Los cortes horizontal y vertical son equivalentes a las rotaciones horizontal y vertical respectivamente.
Todas las transformaciones anteriores pueden resumirse en rotaciones y escalados para obtener la única matriz de transformación con base en multiplicaciones matriciales 2×2 de la siguiente manera:

a. Matriz de rotaciones:

$$R = \begin{bmatrix} \cos(\theta_x) & -\sin\left(\theta_y\right) \\ \sin(\theta_x) & \cos\left(\theta_y\right) \end{bmatrix}$$

b. Matriz de escalados

$$S = \begin{bmatrix} S_x & 0 \\ 0 & S_y \end{bmatrix}$$

Al hacer la multiplicación matricial se debe tener en cuenta el orden de las transformaciones, pues la multiplicación matricial no es conmutativa, esto es:

$$R \times S = \begin{bmatrix} \cos(\theta_x) & -\sin\left(\theta_y\right) \\ \sin(\theta_x) & \cos\left(\theta_y\right) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} S_x & 0 \\ 0 & S_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_x \cos(\theta_x) & -S_y \sin\left(\theta_y\right) \\ S_x \sin(\theta_x) & S_y \cos\left(\theta_y\right) \end{bmatrix}$$

La anterior matriz es la forma más general de escribir una transformación lineal.

Una definición alterna de contracción es la siguiente:

Una transformación $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es llamada contractiva, o contracción si existe una constante$s$, donde $0 \;\; s < 1$tal que

$$d\left(f(x), f(y)\right) \;\; s \cdot d(x,y) \forall x, y \in \mathbb{R}^2$$

El número $s$es llamado factor de contracción (o contractividad) para f.

En lenguaje ordinario una contracción hace que la distancia entre dos puntos sea “*menor*”.

Ejemplo:

Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida como $f(x) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

Y sean $A = (2,4)$ y $B = (-2,7)$ puntos de $\mathbb{R}^2$

$$d(A,B) = \sqrt{16+9} = 5$$

$$f(A) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$f(B) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{7}{2} \end{bmatrix}$$

$$d(f(A), f(B)) = \sqrt{4 + \frac{9}{4}} = \frac{5}{2}$$

Claramente $d(f(A), f(B)) \leq d(A,B)$ por lo tanto f es una contracción.

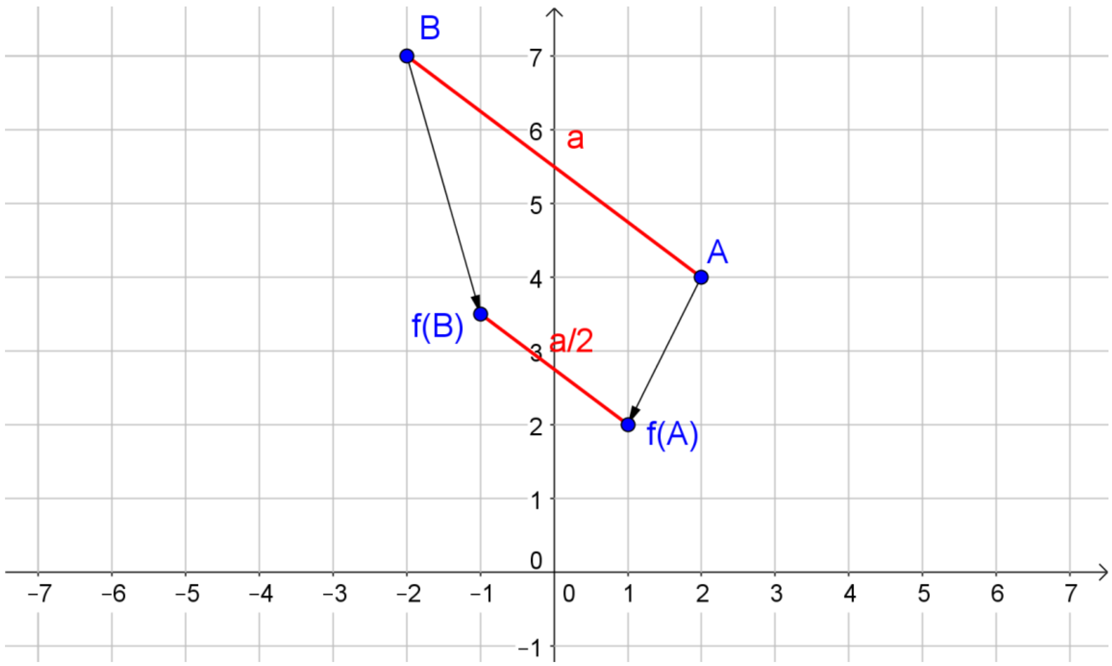


Figura1. Ejemplo de contracción

3.2.2 Transformación de un triángulo en otro mediante una transformación afín

Las transformaciones afines de segmentos son segmentos, por lo tanto, basta con transformar los puntos extremos del segmento. Sean los vértices de un triángulo $P_1(x_{P1}, y_{P1})$, $P_2(x_{P2}, y_{P2})$ y $P_3(x_{P3}, y_{P3})$ al que se llamará triángulo **ORIGINAL**; y $P'_1(x'_{P1}, y'_{P1})$, $P'_2(x'_{P2}, y'_{P2})$ y $P'_3(x'_{P3}, y'_{P3})$ las coordenadas de los tres vértices de otro triángulo al que se llamará **FINAL**.
Surge la inquietud de ¿cuál es la transformación afín T que convierte el triángulo ORIGINAL en el FINAL?

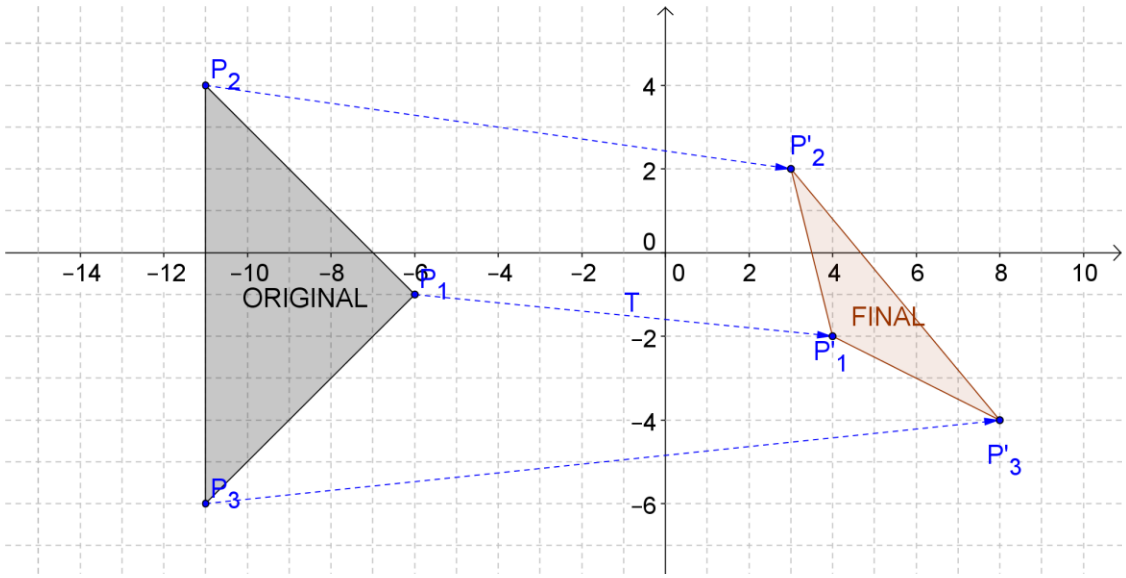


Figura2. Transformación de un triángulo en otro

En lo que sigue se aborda la respuesta a esta pregunta: ¿Cuál es la transformación afín T que tranforma un triángulo en otro?

Cada vértice $P_i(x_{Pi}, y_{Pi})$ tiene su imagen $T(P_i) = P'_i(x'_{Pi}, y'_{Pi})$.

La transformación afín tiene la forma:
$x'_{Pi} = a \cdot x_{Pi} + b \cdot y_{Pi} + eyy'_{Pi} = c \cdot x_{Pi} + d \cdot y_{Pi} + f$ para $i \in \{1,2,3\}$; así para cada vértice:

$$x'_{P1} = a \cdot x_{P1} + b \cdot y_{P1} + e \qquad y'_{P1} = c \cdot x_{P1} + d \cdot y_{P1} + f$$
$$x'_{P2} = a \cdot x_{P2} + b \cdot y_{P2} + e \qquad y'_{P2} = c \cdot x_{P2} + d \cdot y_{P3} + f$$
$$x'_{P3} = a \cdot x_{P3} + b \cdot y_{P3} + e \qquad y'_{P3} = c \cdot x_{P3} + d \cdot y_{P3} + f$$

Matricialmente la transformación anterior puede verse de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} x'_{P1} \\ x'_{P2} \\ x'_{P3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{P1} & y_{P1} & 1 \\ x_{P2} & y_{P2} & 1 \\ x_{P3} & y_{P3} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ e \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} y'_{P1} \\ y'_{P2} \\ y'_{P3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{P1} & y_{P1} & 1 \\ x_{P2} & y_{P2} & 1 \\ x_{P3} & y_{P3} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c \\ d \\ f \end{bmatrix}$$

Que corresponde a dos sistemas de ecuaciones lineales 3×3 en donde se desconocen a, b, c, d, e, f al resolver cada sistema por la regla de Crammer:
Sean:

$$A = \begin{bmatrix} x_{P1} & y_{P1} & 1 \\ x_{P2} & y_{P2} & 1 \\ x_{P3} & y_{P3} & 1 \end{bmatrix}$$

Aquí, $\Delta = |A| = x_{P1} \cdot y_{P2} + x_{P2} \cdot y_{P3} + x_{P3} \cdot y_{P1} - x_{P3} \cdot y_{P2} - x_{P1} \cdot y_{P3} - x_{P2} \cdot y_{P1}$

$$A_a = \begin{bmatrix} x'_{P1} & y_{P1} & 1 \\ x'_{P2} & y_{P2} & 1 \\ x'_{P3} & y_{P3} & 1 \end{bmatrix}$$

$\Delta_a = |A_a| = x'_{P1} \cdot y_{P2} + x'_{P2} \cdot y_{P3} + x'_{P3} \cdot y_{P1} - x'_{P3} \cdot y_{P2} - x'_{P1} \cdot y_{P3} - x'_{P2} \cdot y_{P1}$

$$A_b = \begin{bmatrix} x_{P1} & x'_{P1} & 1 \\ x_{P2} & x'_{P2} & 1 \\ x_{P3} & x'_{P3} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_b = |A_b| = x_{P1} \cdot x'_{P2} + x_{P2} \cdot x'_{P3} + x_{P3} \cdot x'_{P1} - x_{P3} \cdot x'_{P2} - x_{P1} \cdot x'_{P3} - x_{P2} \cdot x'_{P1}$$

$$A_e = \begin{bmatrix} x_{P1} & y_{P1} & x'_{P1} \\ x_{P2} & y_{P2} & x'_{P2} \\ x_{P3} & y_{P3} & x'_{P3} \end{bmatrix}$$

$$\Delta_e = |A_e| = x_{P1} \cdot y_{P2} \cdot x'_{P3} + x_{P2} \cdot y_{P3} \cdot x'_{P1} + x_{P3} \cdot y_{P1} \cdot x'_{P2} - x_{P3} \cdot y_{P2} \cdot x'_{P2} - x_{P1} \cdot y_{P3} \cdot x'_{P3} - x_{P2} \cdot y_{P1} \cdot x'_{P1}$$

$$A_c = \begin{bmatrix} y'_{P1} & y_{P1} & 1 \\ y'_{P2} & y_{P2} & 1 \\ y'_{P3} & y_{P3} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_c = |A_c| = y'_{P1} \cdot y_{P2} + y'_{P2} \cdot y_{P3} + y'_{P3} \cdot y_{P1} - y'_{P3} \cdot y_{P2} - y'_{P1} \cdot y_{P3} - y'_{P2} \cdot y_{P1}$$

$$A_d = \begin{bmatrix} x_{P1} & y'_{P1} & 1 \\ x_{P2} & y'_{P2} & 1 \\ x_{P3} & y'_{P3} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_d = |A_d| = x_{P1} \cdot y'_{P2} + x_{P2} \cdot y'_{P3} + x_{P3} \cdot y'_{P1} - x_{P3} \cdot y'_{P2} - x_{P1} \cdot y'_{P3} - x_{P2} \cdot y'_{P1}$$

$$A_f = \begin{bmatrix} x_{P1} & y_{P1} & y'_{P1} \\ x_{P2} & y_{P2} & y'_{P2} \\ x_{P3} & y_{P3} & y'_{P3} \end{bmatrix}$$

$$\Delta_f = |A_f| = x_{P1} \cdot y_{P2} \cdot y'_{P3} + x_{P2} \cdot y_{P3} \cdot y'_{P1} + x_{P3} \cdot y_{P1} \cdot y'_{P2} - x_{P3} \cdot y_{P2} \cdot y'_{P2} - x_{P1} \cdot y_{P3} \cdot y'_{P3} - x_{P2} \cdot y_{P1} \cdot y'_{P1}$$

La matriz de la transformación es: $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\Delta_a}{\Delta} & \frac{\Delta_b}{\Delta} \\ \frac{\Delta_c}{\Delta} & \frac{\Delta_d}{\Delta} \end{bmatrix}$ y el vector de traslación es $t = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\Delta_e}{\Delta} \\ \frac{\Delta_f}{\Delta} \end{bmatrix}$

Un ejemplo implementado en Geogebra:

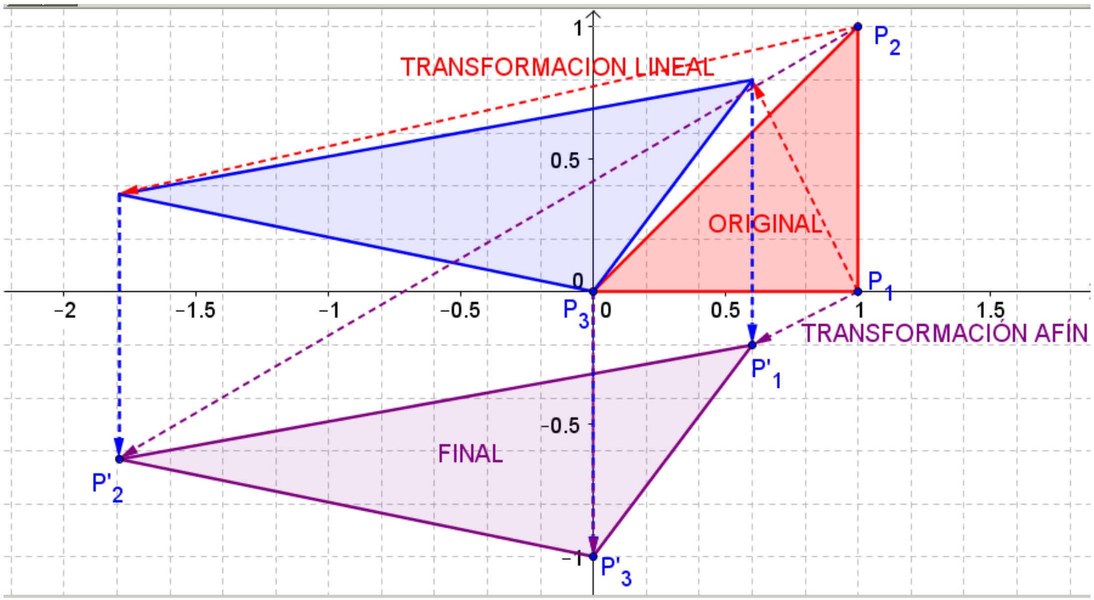


Figura3. Ejemplo de transformación de un triángulo en otro

3.2.3 Teorema del punto fijo

Definición de punto fijo: Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$una transformación. Un punto $x_f$tal que $f(x_f) = x_f$es llamado **punto fijo** de la transformación f.

Por ejemplo en $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función $f(x) = x^2$ tiene dos puntos fijos en $x = 0$ y en $x = 1$

En la Figura4 Ejemplo de puntos fijos en una función de variable real, se muestra un ejemplo de la función $f(x) = x^2$

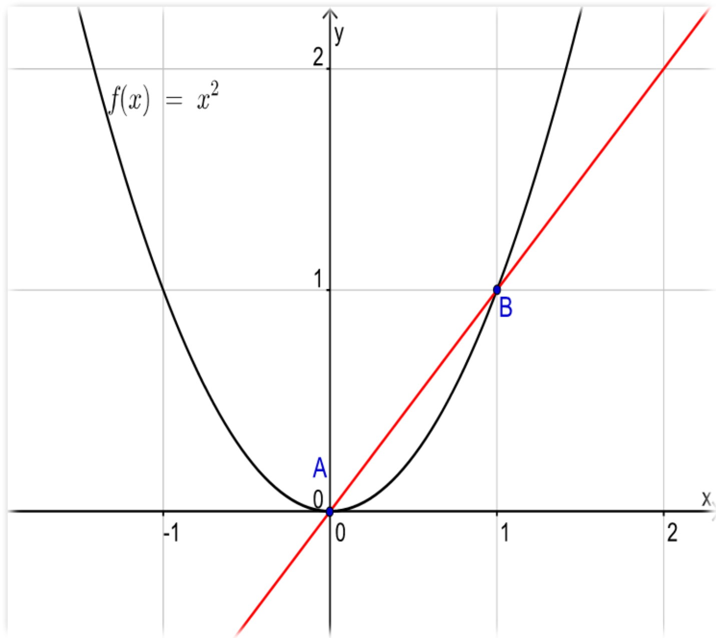


Figura4 Ejemplo de puntos fijos en una función de variable real

TEOREMA: Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación (aplicación) contractiva sobre $\mathbb{R}^2$ con factor de contracción s, entonces f posee exactamente un **punto fijo**[3] $x_f \in \mathbb{R}^2$ tal que para algún $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^2$ la sucesión $\left\{\overset{n}{f}(x)\right\}$ converge a x_f. En símbolos $lim_{n\to\infty}\left\{\overset{n}{f}(x)\right\} = x_f \quad \forall x \in \mathbb{R}^2$

La demostración del anterior teorema es tomada de (Pérez Urquidi, 2008).

Demostrar este teorema implica dos pasos, primero la existencia y segundo la unicidad

i. Existencia del punto fijo

Sea $x_0 \in H(\mathbb{R}^2)$ un punto arbitrario la sucesión $\{x_n\}$ obtenida recursivamente como $x_{n+1} = f(x_n)$ para $n = 0,1,2,3,\dots$

Se pretende probar que $d(p,q) \to 0$ cuando $n \to \infty$

$d(x_{n+1}, x_n) = d(f(x_n), f(x_{n-1}))$ para $n = 1,2,3,\dots$

Y dado que f es una contracción, esta igualdad se convierte en

$d(x_{n+1}, x_n) \leq s \cdot d(f(x_n), f(x_{n-1}))$ para $n = 1,2,3,\dots$

Al iterar n veces la anterior desigualdad se tiene que

---

[3] Existen muchas postulaciones de teoremas del punto fijo, pero fue Brower quien inicialmente lo afirmó.

$d(x_{n+1}, x_n) = s^n \cdot d(x_1, x_0)$Para$n = 1,2,3, \ldots$

Aplicando la desigualdad triangular

$$d(x_q, x_p) \leq \sum_{n=p}^{q-1} d(x_{n+1}, x_n) \leq \sum_{n=p}^{q-1} s^n \cdot d(x_1, x_0)$$

$$= d(x_1, x_0) \cdot \sum_{n=p}^{q-1} s^n \leq d(x_1, x_0) \cdot \sum_{n=p}^{\infty} s^n$$

$$= d(x_1, x_0) \cdot \frac{s^p}{1-s}$$

Como $d(x_1, x_0)$, s^p y $1 - s$ son constantes positivas y $0 \leq s < 1$ se tiene que $d(x_q, x_p) \to 0$ cuando $p \to \infty$. Además, al ser $\mathbb{R}^2$ un espacio métrico completo, existe un $x \in \mathbb{R}^2$ tal que $d(x_n, x) \to 0$ y por la propiedad de la contracción, $d(f(x_n), f(x)) \leq s \cdot d(x_n, x)\ \forall n \in \mathbb{N}$ al sustituir $f(x_n)$ por x_{n+1}, pues es un proceso iterativo, se tiene

$$d(x_{n+1}, f(x)) \leq s \cdot d(x_n, x)$$

Pero como $d(x_n, x_0) \to 0$, tomando como límite en ambos lados de la desigualdad, se obtiene que $d(x, f(x)) \leq 0$ que dada la no negatividad de la distancia implica que $d(x, f(x)) = 0$ y por lo tanto $f(x) = x$, es decir x es un punto fijo de f.

ii. Unicidad del punto fijo

Supongamos que existe otro punto fijo $y \neq x$, entonces$f(y) = y$. Así, $d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leq s \cdot d(x, y)$ por tanto, $d(x, y) = 0$ pues $0 \leq s < 1$por ser una contracción, y por la propiedad 3 de la distancia, $x = y$ contradiciendo la hipótesis inicial, quedando demostrado que el punto fijo de una contracción es único.

Definición de contracción: enel espacio métrico completo$(\mathrm{H}(\mathbb{R}^2), \mathrm{h}(\mathrm{d}))$, sean $\{w_n : n = 1,2,3, \ldots, N\}$ aplicaciones contractivas sobre $(H(\mathbb{R}^2), h(d))$, y $\{s_n\}$los factores de contracción de $\{\mathrm{w_n}\} : 0 < n < N$, entonces: $W: H(\mathbb{R}^2) \to H(\mathbb{R}^2)$definida como:

$W(B) = w_1(B) \cup W_2(B) \cup \ldots \cup w_N(B) = \bigcup_{i=1}^{N} w_i(B)$Es una aplicación de contracción sobre $\mathrm{H}(\mathbb{R}^2)$con factor de contracción$s_{\mathrm{w}} = max\{s_n\}$.

3.2.4 Sistemas de funciones iteradas

Con base en los hechos descritos en las secciones anteriores se definen los sistemas de funciones iteradas como sigue:

Un **sistema de funciones iteradas**es un conjunto de aplicaciones contractivas $w_n: H \rightarrow H$,con sus respectivos factores de contracción $\{s_n\}$, es decir $W = \{H, \{w_n: s_n: n = 1,2,3, \ldots, N\}\}$y $s_w = max\{\mathrm{s_n}: \mathrm{n} = 1,2,3, \ldots, N\}$

3.2.5 Algunos ejemplos de fractales clásicos

Uno de los fractales más clásicos es el denominado Conjunto de Cantor propuesto por el matemático George Cantor cuyo sistema de funciones iteradas asociado es el siguiente:

$W = \{f_1 = A_1 x,\ f_2 = A_2 x + t\}$, donde $A_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} A_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $t = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \end{bmatrix}$
Estas matrices están asociadas con escalados en x de razón $\frac{1}{3}$ y un traslado al segundo tercio.

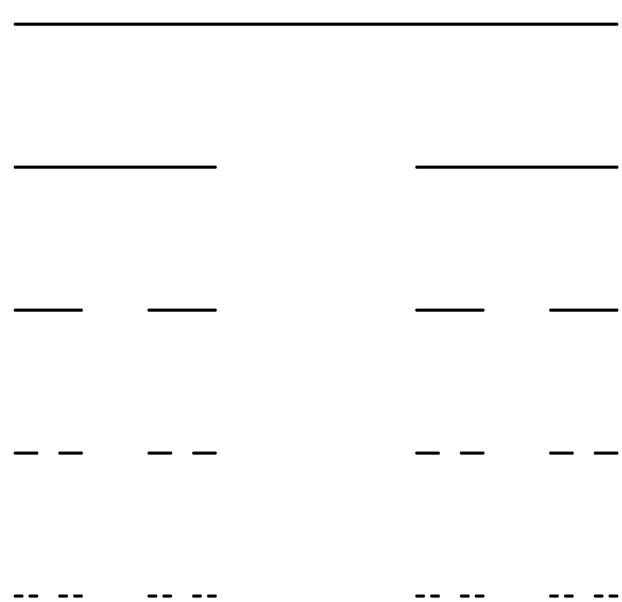


Figura5. El conjunto de Cantor (Polvo de Cantor) iteración 4

Otro de los fractales clásicos de estudio es el triángulo de Sierspinski, cuyo sistema de funciones iteradas, está dado por:

$W = \{f_1, f_2, f_3\}$Donde cada una de las funciones, así como las transformaciones a las que se asocia, están especificadas en la Tabla 14. Sistema de funciones iteradas para el triángulo se Sierspinsky

Funciones del SFI	Transformaciones
$f_1 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	Homotecia de razón $\frac{1}{2}$, sin rotación ni traslación
$f_2 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \end{bmatrix}$	Homotecia de razón $\frac{1}{2}$, sin rotación, traslación según el vector$\begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \end{bmatrix}$
$f_3 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.43 \end{bmatrix}$	Homotecia de razón $\frac{1}{2}$, sin rotación, traslación según el vector $\begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.43 \end{bmatrix}$

Tabla 14. Sistema de funciones iteradas para el triángulo se Sierspinsky

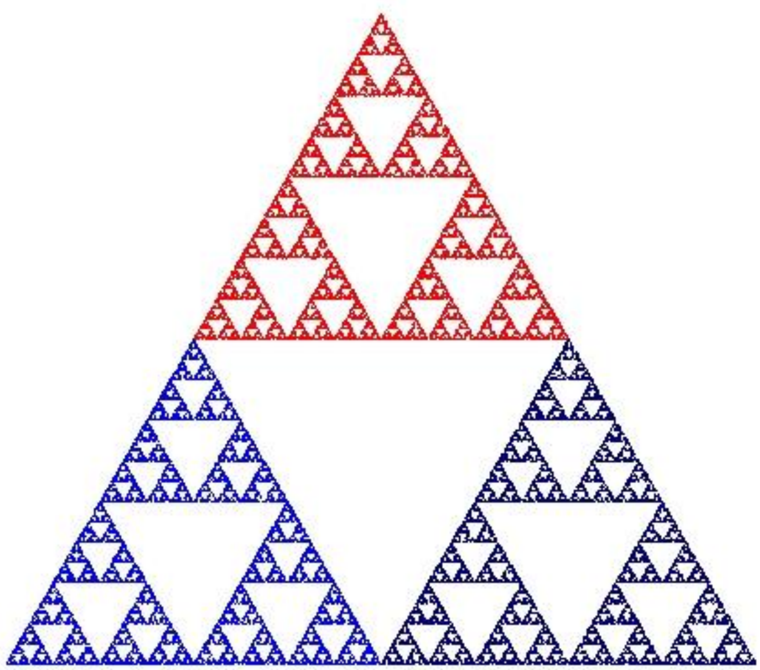


Figura6. Atractor del sistema de funciones iteradas del fractal de Sierspinski

Otro de los fractales más conocidos es la curva de Koch, cuyo sistema de funciones iteradas es:

$$W = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$$

En la Tabla 15. Sistema iterado de funciones para la curva de Koch se muestran las funciones de esta curva, así como las transformaciones a las que se asocian.

FUNCION	ESCALADOS		ROTACIONES	
	S_x	S_y	θ_x	θ_x
$f_1 = \begin{bmatrix} 0.333 & 0 \\ 0 & 0.333 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0^O	0^O
$f_2 = \begin{bmatrix} 0.167 & -0.289 \\ 0.289 & 0.167 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.333 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	60^O	60^O
$f_3 = \begin{bmatrix} 0.167 & 0.289 \\ -0.289 & 0.167 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.289 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	-60^O	-60^O
$f_4 = \begin{bmatrix} 0.333 & 0 \\ 0 & 0.333 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.667 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0^O	0^O

Tabla 15. Sistema iterado de funciones para la curva de Koch

El atractor del anterior sistema de funciones iteradas se muestra en la Figura7. Atractor de la curva de Koch

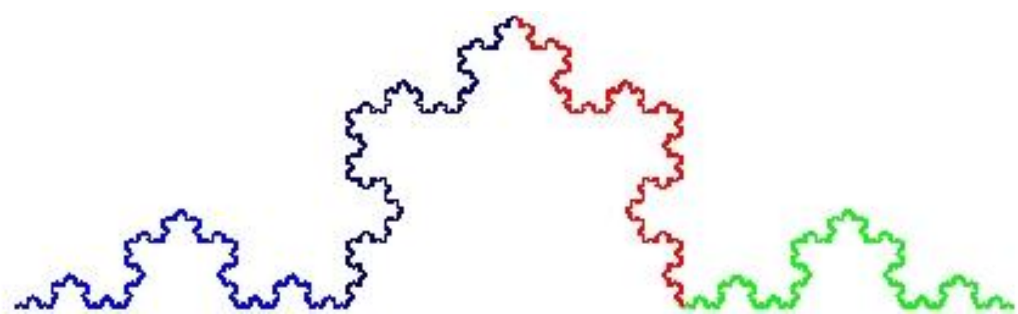


Figura7. Atractor de la curva de Koch

La alfombra de Sierspinski es otro de los fractales clásicos, cuyo sistema de funciones iteradas asociado es $W = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8\}$ donde cada f_i tiene la misma matriz asociada $A_i = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ porque son 8 homotecias todas con factor $\frac{1}{3}$, sin rotación, lo único que las diferencia son los vectores de traslación t_i, los cuales son:

$t_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $t_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{bmatrix}$, $t_3 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \end{bmatrix}$, $t_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$, $t_5 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$, $t_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$, $t_7 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$, $t_8 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$

El atractor del sistema se muestra en la siguienteFigura8Atractor del fractal alfombra de Sierspinski:

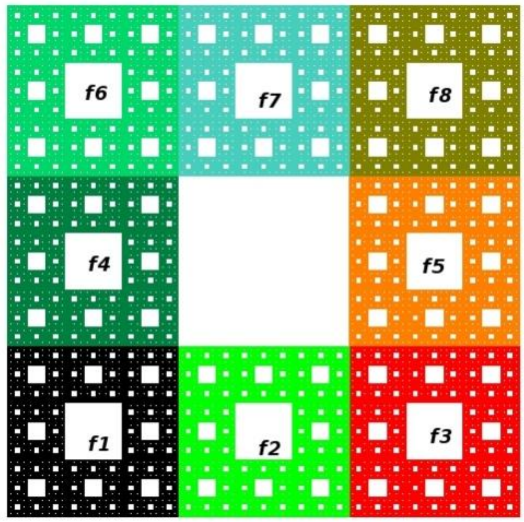


Figura8Atractor del fractal alfombra de Sierspinski

La representación gráfica anterior se ha realizado en colores y se han indicado las funciones, para visualizar el efecto de cada una de las funciones que forman el sistema de funciones iteradas asociado al fractal.

Hasta el momento se han presentado resultados teóricos que soportan la construcción de fractales mediante sistemas de funciones iteradas, así como algunos ejemplos de fractales clásicos.

En lo que sigue, se muestra el funcionamiento del Software IFS Construction Kit y su relación directa con lo hasta aquí expuesto.

4. IFS CONSTRUCTION KIT.

IFS Construction Kit es un software diseñado para dibujar imágenes que representan fractales generados mediante los sistemas de funciones iteradas.
En esta sección, se presentan algunos elementos básicos que le sirven usuario del software como una guía o referencia en su interacción con la aplicación para la creación de fractales mediante sistemas de funciones iteradas.
Además se busca mostrar el funcionamiento del software en la construcción de imágenes que representan fractales generadas por sistemas de funciones iteradas. Se describen cada uno de los comandos de cada menú, para familiarizar al usuario de la aplicación con su uso, y para una mejor comprensión de lo que significa un sistema de funciones iteradas.

Se dan ejemplos que sirvan para ilustrar de mejor manera lo que algunos comandos hacen al ser usados.

4.1. Introducción

IFS ConstructionKit es una aplicación hecha para diseñar y dibujar imágenes que representan fractales basados en los sistemas de funciones iteradas. Ha sido diseñado y mantenido por Lawrence H. Riddle, profesor del Departamento de matemáticas del Agnes Scott College en Decatur Georgia Estados Unidos.

A continuación se hace una breve descripción del programa:
El software no requiere instalación, solo se descomprime el archivo descargado y se ejecuta el archivo “IFS Construction Kit.exe”

El programa consta de tres ventanas principales que se muestran en la Figura9.Ventana principal de IFS construction Kit.

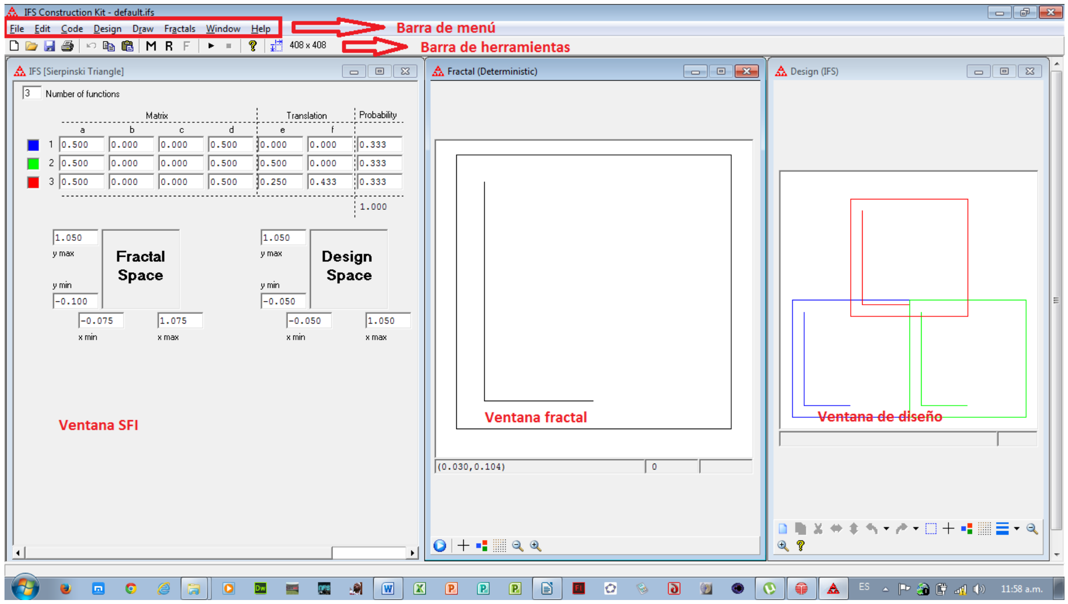


Figura9.Ventana principal de IFS construction Kit

4.1.1. La ventana SFI

Es donde se puede ver y editar el código de las transformaciones que conforman el sistema de funciones iteradas. En esta ventana se muestra la escala usada en las otras dos ventanas.

Si la carpeta que contiene los archivos SFI de exploración, tiene un archivo llamado default.ifs, entonces este archivo será automáticamente leído cuanto el programa inicia, y el primer SFI en el archivo será mostrado en la ventana SFI. Si no se encuentra el archivo anterior, entonces el programa leerá un archivo llamado default.chg que contiene los movimientos del juego del caos. Si tal archivo es encontrado, entonces se iniciará un juego del caos de forma automática. En caso de que ninguno de los archivos se encuentre, entonces se inicia el programa con una sola función en la ventana SFI usando una escala de ½.

Consta de dos modos: modo SFI y modo juego del caos

4.1.1.1. Modo SFI

Para cargar un archivoifs, se debe elegir archivo>>abrir del menú archivo, o presionar simultáneamente las teclasCtrl O. Los archivos .ifs son archivos de texto como se describe en la sección4.2.3.Archivo>>añadir archivo .

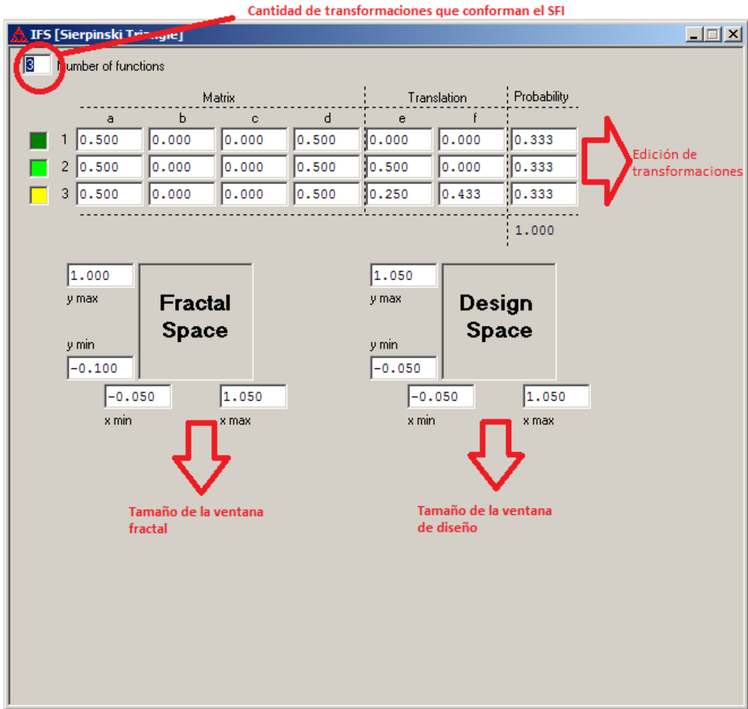


Figura10. Ventana SFI en modo de matriz compacta

En la sección 4.4.El menú código (code), se describe con más detalle las opciones en esta ventana y de otras dos ventanas de matrices: como función (sección 4.4.2.Código >>Formulario de Matriz funcional) y como transformaciones (sección 4.4.3. Código >>Formulario de Escalado/Rotación), en la cual se puede ingresar rotaciones y escalados del compacto inicial.

4.1.1.2. Modo Juego del Caos

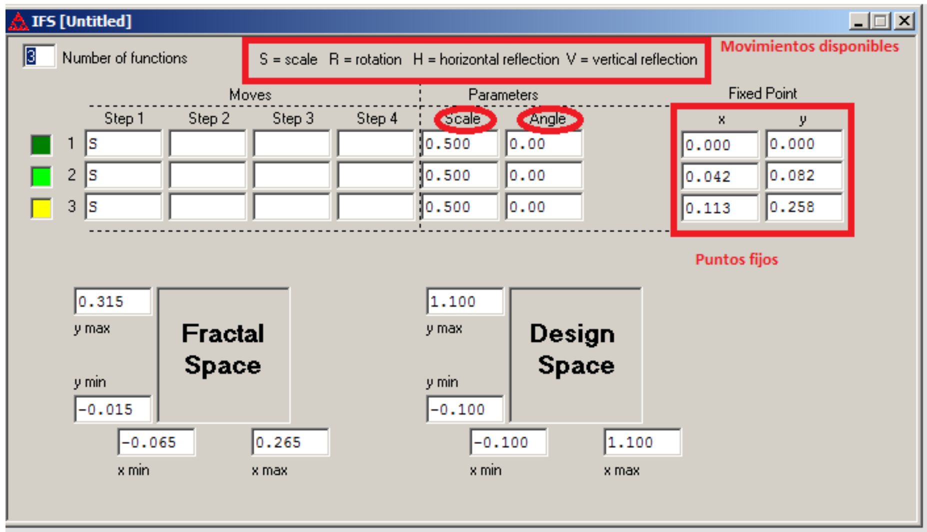


Figura11. Ventana SFI para el juego del caos

Los comandos y opciones principales de la ventana SFI se describen con más detalle en la sección 4.4. El menú código (code)

4.1.2. La ventana de Diseño (Design)

Muestra el efecto de las transformaciones sobre un polígono inicial. Es posible hacer transformaciones tales como: trasladar, escalar, rotar, estirar o cizallar un objeto inicial (compacto) usando el mouse para trasladar el compacto inicial o deformarlo de forma horizontal o vertical (escalados). Esto proporciona una forma de definir o modificar las transformaciones sin tener que introducir los números en la ventana SFI.
Usando clic derecho se puede acceder al menú de diseño que se describe ampliamente en la sección 4.5.El menú de diseño (Design).
Hay dos tipos de ventanas de diseño dependiendo de si se trabaja en el modo SFI o en el modo juego del caos.

4.1.2.1. Modo SFI

En la Figura12. Ventana de diseño para un SFI, se muestra la ventana de diseño que consta de un área de diseño y una barra de herramientas.

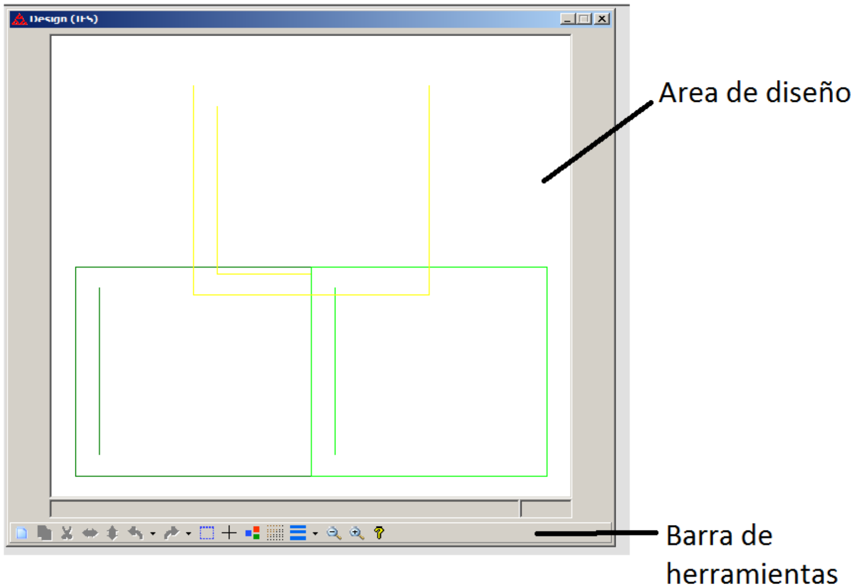


Figura12. Ventana de diseño para un SFI

Al hacer clic derecho sobre el área de diseño se accede a un menú con herramientas útiles para crear de forma práctica un SFI como se muestra en la siguiente figura.

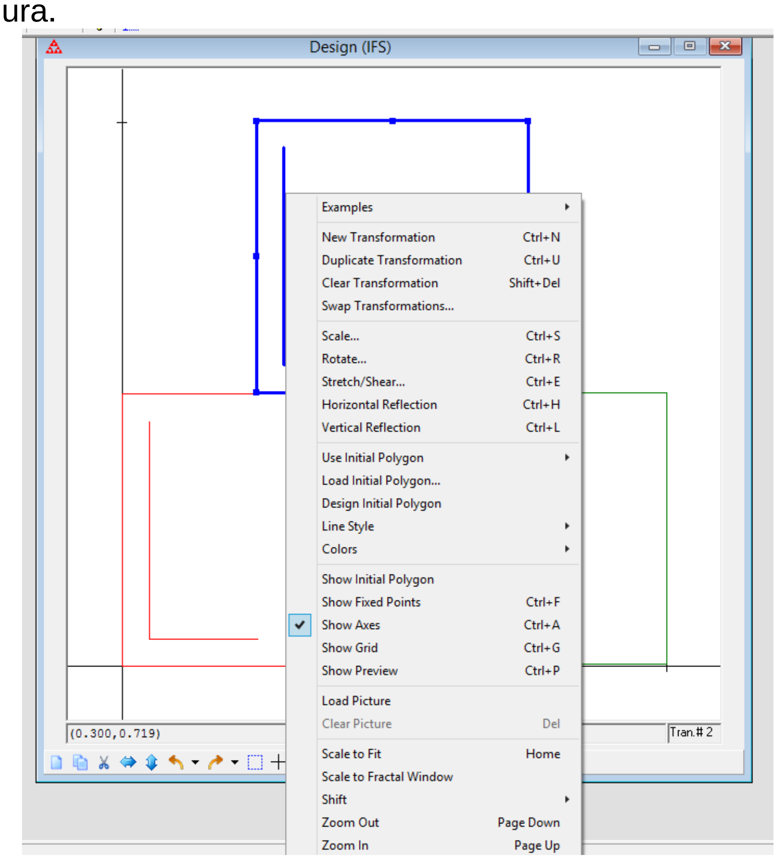


Figura 13. Menú en ventana de diseño

4.1.2.2. Modo juego del caos

Las reglas del juego del caos para un fractal,definen transformaciones basadas en escalados, rotaciones y reflexiones(3.2.1. Transformaciones lineales en el plano euclidiano ($\mathbb{R}^2$)) con respecto a puntos fijos antes elegidos y al origen en un sistema coordenado. El usuarioescribe las reglas sobre cómo mover un punto $\boldsymbol{X}$ hacia un punto fijo $\boldsymbol{P}$.

El punto de referencia $\boldsymbol{X}$ puede ser elegido en la ventana de diseño al presionar la tecla Ctrl y hacer clic derecho, se dibujarán líneas mostrando el efecto de cada movimiento en el juego de cómo el punto $\boldsymbol{X}$ es rotado, escalado o reflejado con base en un línea horizontal o vertical. Un punto representará la ubicación final del punto $\boldsymbol{X}$ después de las transformaciones. Se puede mover el punto $\boldsymbol{X}$ a otro lugar haciendo clic sobre él y moviéndolo con el mouse.

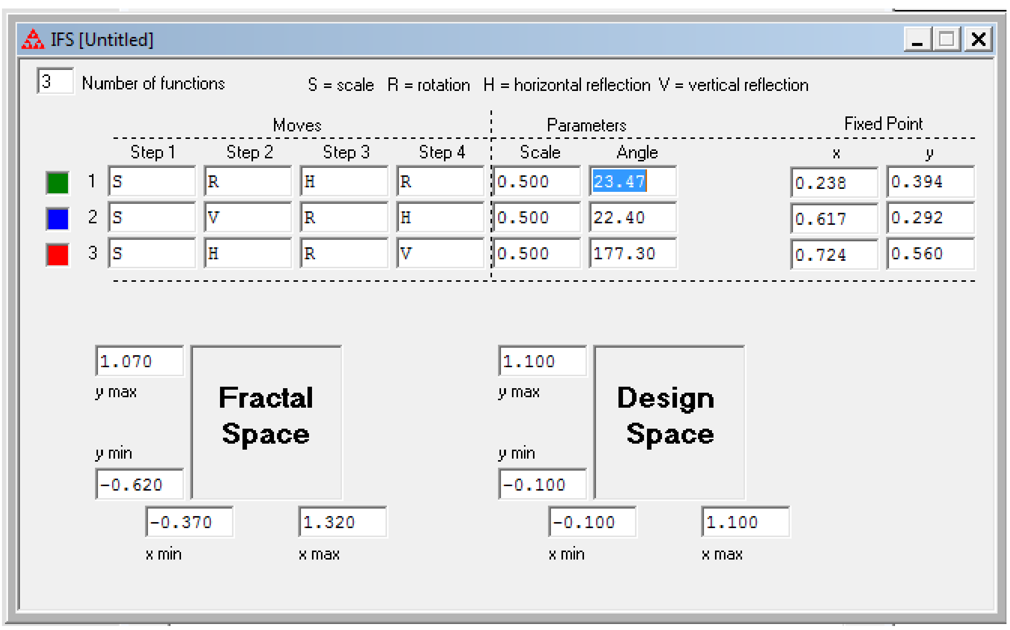


Figura 14. Ventana SFI para el juego del caos

Un Nuevo punto fijo se crea presionando la tecla Ctrl y haciendo clic sobre la ventana de diseño. Si la grilla está activa, el punto fijo se ubicará en las intersecciones de la grilla manteniendo presionada la tecla Ctrl. Para activar la grilla se usa el botón de la barra inferior en la ventana de diseño, o presionando simultáneamente en el teclado Ctrl+Alt+G para especificar un tamaño de grilla personalizado.

Se pueden especificar los movimientos ingresándolos directamente en la ventana IFS o usando el cuadro de diálogo de movimientos del juego del caos (presionando simultáneamente las teclas Ctrl M), o usando la barra de herramientas de la parte inferior.

La Figura15. Figura15. Ventana de diseño de movimientos del juego del caos, muestra la ventana de diseño del juego del caos, donde se observan las diferentes opciones que tiene el usuario para crear movimientos del juego del caos.

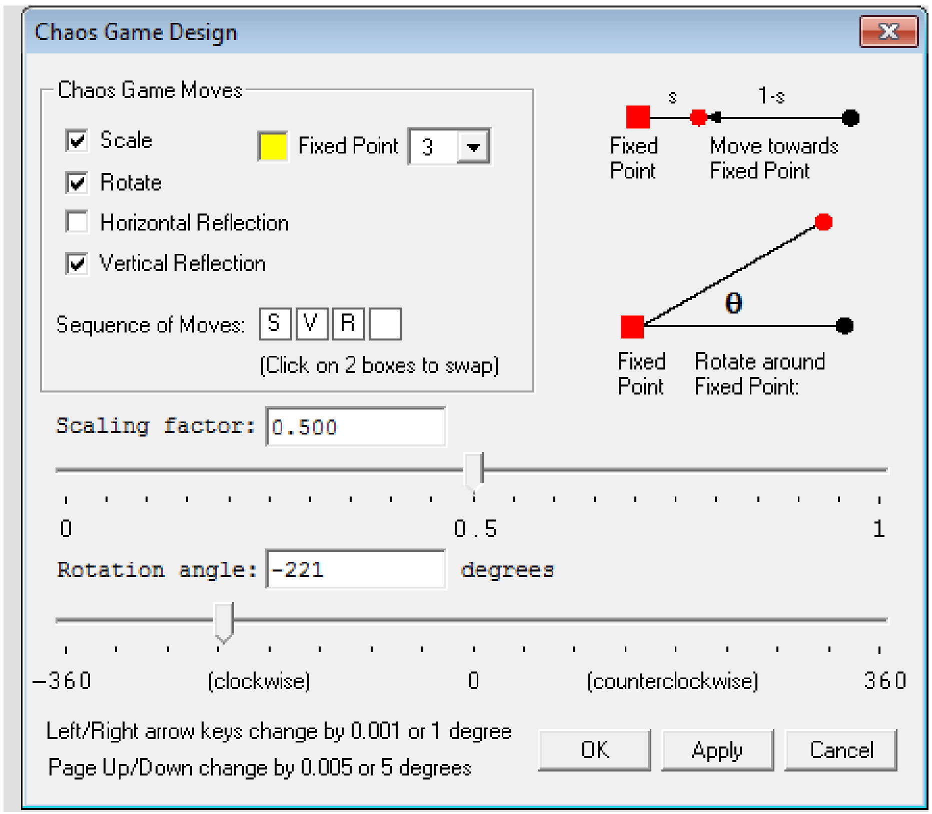


Figura15. Ventana de diseño de movimientos del juego del caos

La barra de herramientas contiene comandos propios de esta ventana y se muestran en la Figura16. Tales comandos se detallarán en la sección 4.5.El menú de diseño (Design).

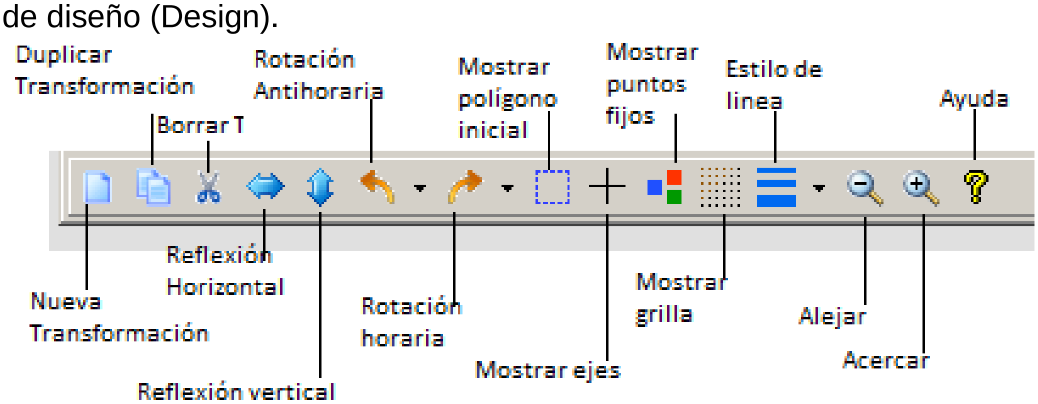


Figura16. Detalle de la barra de herramientas de la ventana diseño del SFI

4.1.3. La ventana fractal.

Es el lugar donde se dibuja el fractal obtenido al iterar las transformaciones de la ventana SFI, ya sea usando el algoritmo aleatorio o el algoritmo determinista.

El algoritmo aleatorio (F7) consiste en elegir un punto(x, y) y aleatoriamente una de las transformaciones del SFI y aplicarla sobre este; la imagen de este punto será el punto inicial la nueva iteración, y el proceso continua de forma automática, hasta que el usuario presione el botón de parada, o el comando Q (en el teclado). En este algoritmo, la probabilidad asociada a cada SFI, es el factor de peso para elegir una u otra transformación.
En la Figura 17. Algoritmo aleatorio para el helecho de Barnsley, se muestra el efecto del algoritmo aleatorio sobre el SFI conocido como helecho de Barnsley

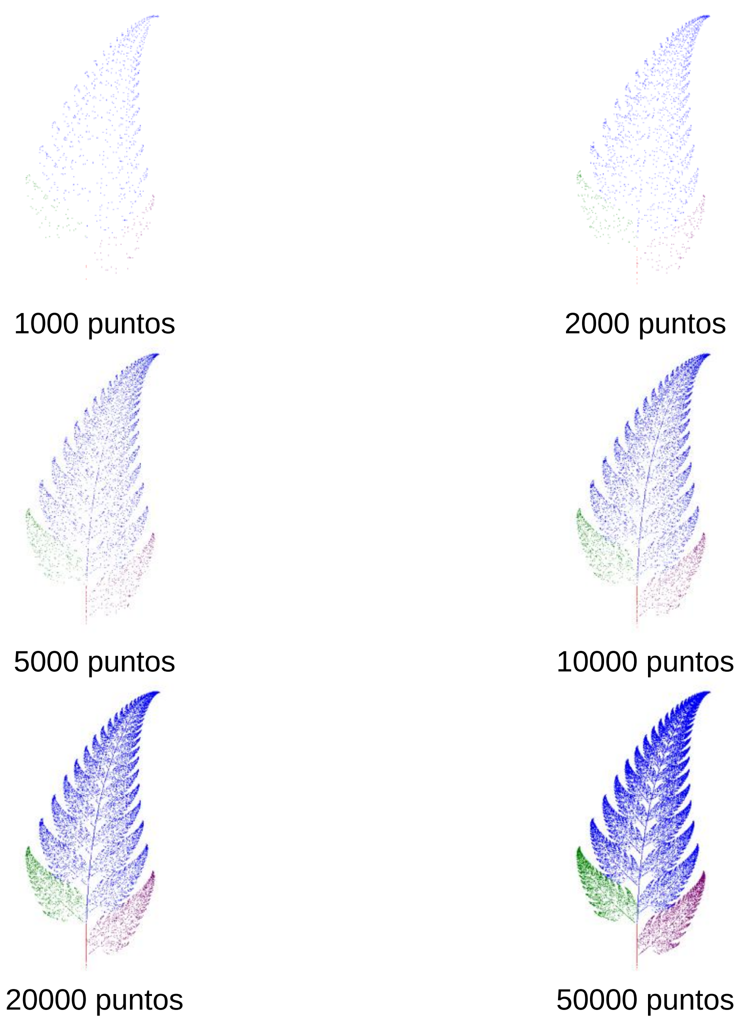


Figura 17. Algoritmo aleatorio para el helecho de Barnsley

El algoritmo determinista (F8)aplica todo el SFIa un compacto inicial(polígono inicial, imagen) para obtener la primera imagen (primera iteración) que ha de ser iterada con todas las funciones del SFI cada vez que el usuario presione el botón dibujar, o el comando Ctrl+D.

En la Figura18. Algoritmo determinista para el helecho de Barnsley se muestra el efecto del algoritmo determinista para el fractal conocido como helecho de Barnsley

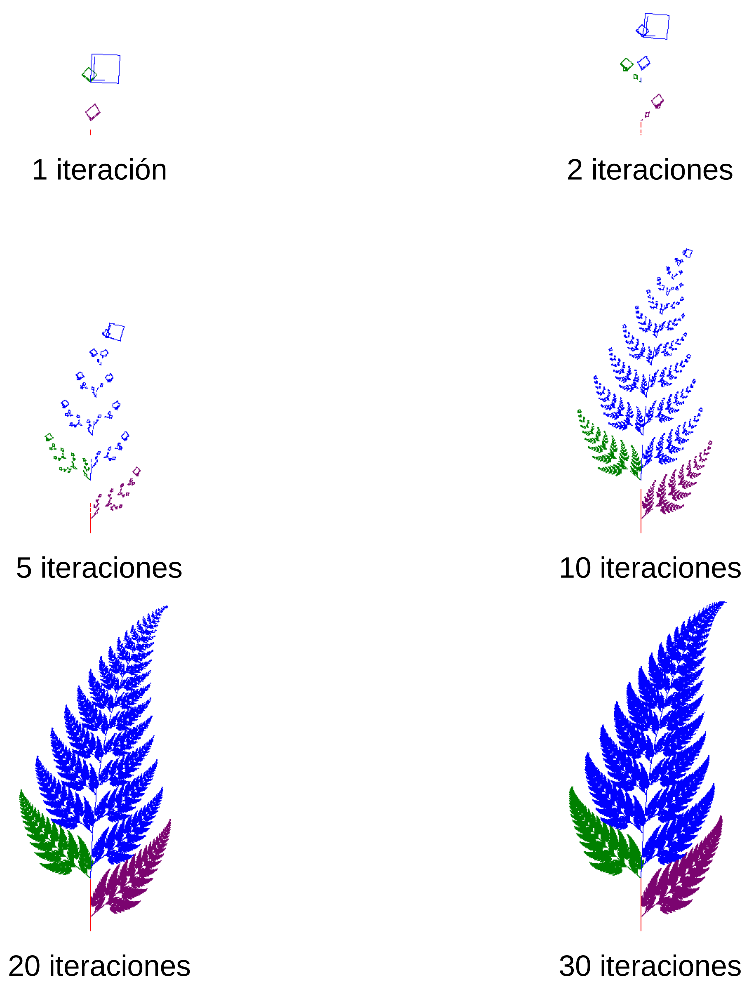


Figura18. Algoritmo determinista para el helecho de Barnsley

4.2. El menú archivo (File)

En la Figura19. Menú Archivo se muestran las opciones del menú archivo

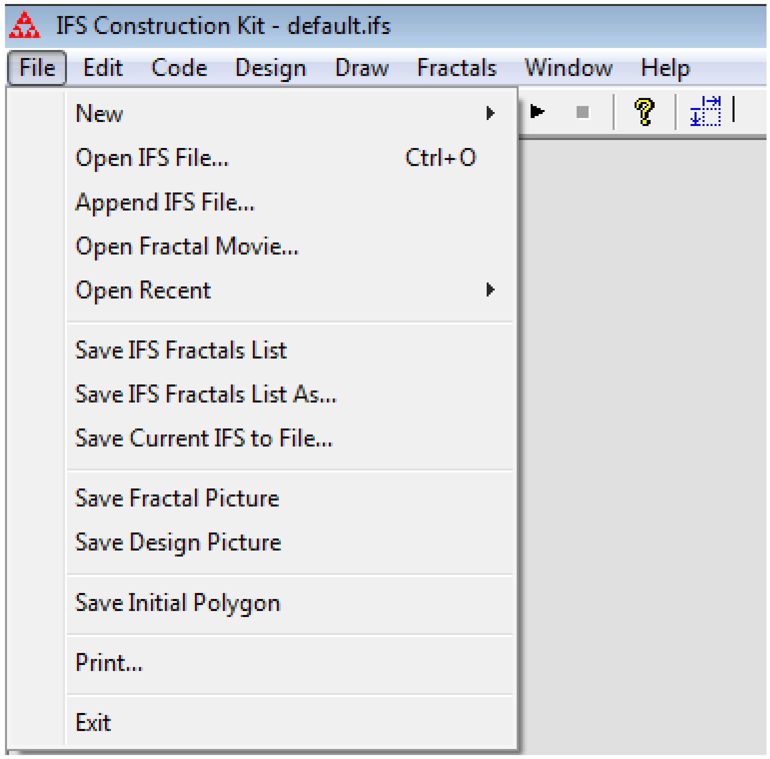


Figura19. Menú Archivo

En este menú se encuentran las opciones de manejo de archivos incluida la de impresión. A continuación se detallan cada una de las opciones disponibles:

4.2.1. Archivo>> nuevo

Despliega un menú con las opciones que se muestran en la Figura20. Submenú del menú archivo>>nuevo

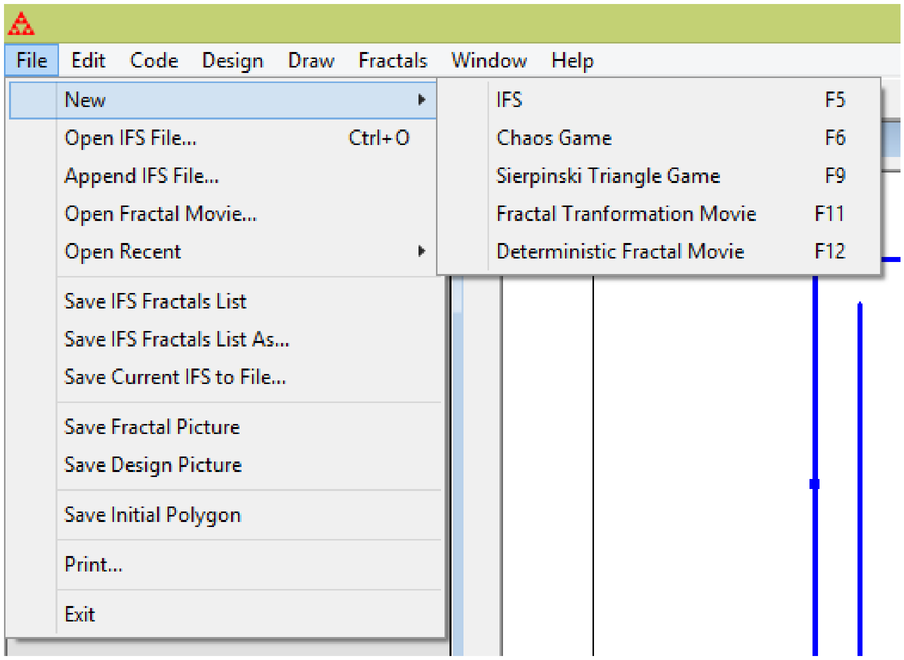


Figura20. Submenú del menú archivo>>nuevo

4.2.1.1. SFI (F5)

Al elegir esta opción, se accede a una vista de un sistema de funciones iteradas dado en términos de una transformación afín de la forma $f(x) = A \cdot x + b$ donde A es una matriz 2×2 y b es el vector de traslación (en la ventana SFI). La transformación por defecto es un sistema de funciones iteradas con un factor de escala igual a ½.

4.2.1.2. JUEGO DEL CAOS (F6)

Esta opción permite diseñar un sistema de funciones iteradas basado en las reglas del JUEGO DEL CAOS. En esta vista el usuario elige la localización de los puntos fijos, luego se describen los movimientos de un punto con respecto a cada punto fijo. Estos movimientos consisten en escalados (S) hacia el punto fijo que es un valor entre 0 y 1; rotaciones(R) que se ingresan como ángulos positivos, reflexiones horizontales (H) o verticales (V), con respecto al punto fijo.

Las transformaciones anteriores pueden ser ingresadas por el usuario en cajas de texto en la ventana IFS o moviendo los puntos fijos en la ventana de diseño.

4.2.1.3. JUEGO DEL TRIANGULO DE SIERSPINSKI (F9)

El juego del triángulo de Sierspinski está basado en el juego del caos[4]. Es presentado inicialmente con la segunda iteración del triángulo de Sierspinski y consiste en 9 subtriángulos, uno de ellos pintado de rojo y es el triángulo objetivo. También se muestra un punto azul en uno de los tres vértices del

[4]http://math.bu.edu/DYSYS/applets/chaos-game.html.

triángulo más grande.
La meta del juego es mover el punto azul al interior del triángulo objetivo (rojo), no sobre la frontera.Otras versiones del juego permiten una o tres rotaciones con el sistema de funciones iteradas del triángulo de Sierspinski.

4.2.1.4. PELICULA DE TRANSFORMACION FRACTAL (F11)

Al elegir esta opción, se abre el creador de películas fractales para construir una sucesión de cuadros de película que desarrolla desde el fractal para un sistema de funciones iteradas inicial (primer cuadro) al fractal para un sistema de funciones iteradas final (último cuadro).
La transformación de un fractal a otro, se hace o por una interpolación lineal entre los mapeos afines en cada sistema de funciones iteradas, o entre los valores de escalado y rotacióncorrespondientes a los mapeos afines de cada sistema de funciones iteradas.
Si el mismo sistema de funciones iteradas es elegido para los cuadros inicial y final, entonces, la transformación es obtenida seleccionando uno de los mapeos y rotar este mapeo 360° mientras que se mantienen los otros mapeos sin cambios.

4.2.1.5. PELICULA DE FRACTAL DETERMINISTICO (F12)

Al elegir esta opción, se abre un cuadro de diálogo donde se usa el algoritmo determinístico para construir una sucesión de cuadros de película que pasa a través de una sucesión de iteraciones. Esto es guardado en un archivo animado (.gif) y puede visualizarse en al visor de películas fractales.

4.2.2. Archivo>>abrir archivo .ifs (Ctrl + O)

Esta opción abre las definiciones de un SFI desde un archivo (.ifs). Si se está en el modo del juego del caos, entonces, el comando carga los movimientos del juego del caos desde un archivo. Al abrir un archivo .ifs se crea una nueva lista de fractales en el menú fractal.

4.2.3. Archivo>>añadir archivo .ifs

Al elegir este comando, se añade las definiciones de un SFI o los movimientos de un juego del caos desde un archivo a la lista actual de fractales del menú fractal. Un archivo .ifs es un archivo de texto[5] con la siguiente estructura:

```
Heighway {; Heighway Dragon
; Edgar, "Measure, Topology, and Fractal Geometry"
; Page 19
  0.5 -0.5  0.5  0.5  0  0  0.5
 -0.5 -0.5  0.5 -0.5  1  0  0.5
}
```

[5] Se puede crear y guardar en un editor de texto plano como el block de notas, o notepad++

Donde la primera línea es el nombre que aparecerá en el menú fractal una vez cargado el archivo, seguida de una llave abierta seguida de comentarios que pueden ser máximo 20,con un tamaño inferior a 70 caracteres cada uno.
Cada renglón de siete números corresponde a una transformación del SFI $\boldsymbol{f_i}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{t}$ donde $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a_i} & \boldsymbol{b_i} \\ \boldsymbol{c_i} & \boldsymbol{d_i} \end{bmatrix}$ y $\boldsymbol{t} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e_i} \\ \boldsymbol{f_i} \end{bmatrix}$ son la matriz de transformación lineal y el vector de traslación respectivamente y $\boldsymbol{p_i}$ la probabilidad de la transformación $\boldsymbol{f_i}(\boldsymbol{x})$. Dichas líneas están escritas de la forma $\boldsymbol{a_i b_i c_i d_i e_i f_i p_i}$ generalmente se separan los anteriores números con tabulaciones, espacios o comas. Finalmente se cierra el archivo con la llave.
Cada archivo soporta un máximo de 30 SFI, más de ello son ignorados aligual que archivos del juego del caos. Se pueden añadir archivos hasta que la lista tenga un total de 30 SFI.
Los archivos del juego del caos se guardan con la extensión .chg, y es un archivo de texto plano que puede tener la siguiente estructura:

```
Sierpinski Triangle { "Chaos Rules"
;Math Horizons, Nov. 2004
;Bob Devaney
S  0.500000  0.000000  0.333333  0.000000  0.000000
S  0.500000  0.000000  0.333333  1.000000  0.000000
S  0.500000  0.000000  0.333333  0.500000  0.866025
}
```

Inicia con el nombre del fractal seguido de llave abierta y luego comentarios. Cada línea de SFI muestra 6 valores: el primero corresponde a cuatro posibles movimientos y se simbolizan con una letra: S para Escalar, R para Rotar, H para reflexión horizontal y V para reflexión vertical. Seguidamente se muestran el factor de escala, el ángulo de rotación en grados, la probabilidad de la transformación y las coordenadas del puntofijo. Los valores anteriores se separan con tabulaciones, espacios o comas.

4.2.4. Archivo >> Abrir película fractal

Este comando abre una película fractal guardada como un gif animado en el visor de películas fractales. El visor puede reproducir la película por una vez, o puede hacer un espiral continuamente. Se puede modificar la velocidad a la cual la película es reproducida; así como la cantidad de marcos (iteraciones) durante la transición

4.2.5. Archivo>>abrir reciente

Los 6 más recientes archivos .ifs o .chg que han sido abiertos. Están disponibles en esta lista en orden cronológico. Esta lista es guardada en el archivo ifskit.ini. Se puede limpiar la lista con el comando borrar lista. Si se intenta abrir un archivo no disponible, se dispone de la opción borrar el archivo de la lista.

4.2.6. Archivo >> Guardar lista fractal .ifs

Guarda una lista de sistemas de funciones iteradas en el menú fractal a un archivo de texto, usando su nombre original.

4.2.7. Archivo >> Guardar lista fractal .ifs como

Guarda una lista de sistemas de funciones iteradas en el menú fractal a un archivo de texto, permitiendo cambiar o renombrar el archivo.

4.2.8. Archivo >> Guardar actual .ifs a un archivo

Este comando guarda solamente el sistema de funciones iteradas que se encuentra abierto en un único archivo de texto con extensión .ifs y con una estructura como la descrita en la sección 4.2.3.Archivo>>añadir archivo .ifs.

4.2.9. Archivo >> Guardar imagen fractal

Permite guardar la imagen de un fractal visualizada en la ventana fractal en los formatos de imagen más comunes como .jpg, .png, .bmp .gif.
Es importante tener en cuenta que al guardar en formatos jpg, gif o png, se requiere que el archivo FreeImage.dll esté en la misma carpeta que el programa principal IFS construction kit, o en la carpeta windows / system.

4.2.10. Archivo>>guardar imagen de diseño

Permite guardar la imagen de un diseño creada en la ventana de diseño en los formatos de imagen más comunes como .jpg, .png, .bmp .gif. Para guardar en tales formatos se requiere la librería FreeImage.dll dentro de la carpeta del software.

4.2.11. Archivo >> Guardar polígono inicial

Este comando guarda el polígono inicial usado en la ventana de diseño como un archivo de texto donde las posiciones de los vértices se guardan como una lista de coordenadasx, y. La extensión del archivo es .gon. Por ejemplo para el polígono mostrado en laFigura21. Ejemplo de polígono de diseño, el archivo de texto correspondiente es:

0.1445578 , 0.3091837
0.2867347 , 0.7731292
0.7506802 , 0.6883219
0.922789 , 0.4164399
0.7232426 , 0.1495465
0.5436507 , 0.3939909
0.4463719 , 0.1295918
0.3765306 , 0.4563492
0.1445578 , 0.3091837

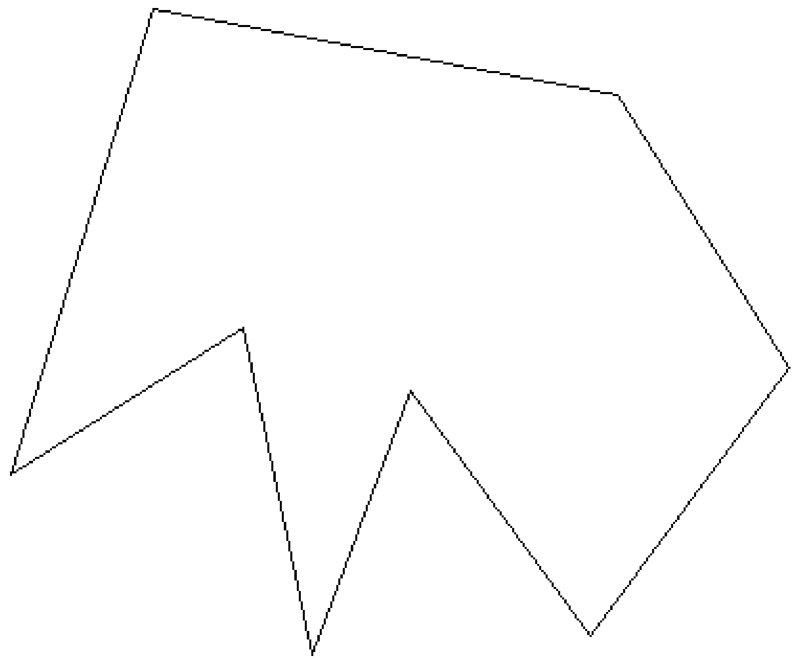


Figura21. Ejemplo de polígono de diseño

4.2.12. Archivo >> imprimir

El cuadro de diálogo de impresión, permite al usuario imprimir las imágenes de la ventana fractal o de la ventana de diseño, el código del sistema de funciones iteradas del formulario matriz escalado/rotación, y las reglas del juego del caos.
Hay varias opciones disponibles para ajustar el diseño de las cosas que se imprimen, como la justificación de la impresión (izquierda, centrado o derecha), las ventanas que se desean imprimir (SFI, Fractal, Diseño), si se desea imprimir una ventana por hoja; o si se desea añadir bordes a las imágenes de las ventanas Fractal y Diseño.
Al elegir esta opción, el usuario no tiene acceso a las preferencias de la impresora. Además, no hay ninguna forma de cambiar el formato del texto. Si se necesita más control sobre el formato, se puede imprimir el código del SFI a un archivo de texto que puede ser abierto con un editor de texto[6]. Es posible copiar y pegar las imágenes en las ventanas fractal y de diseño.
Por defecto, se imprime en el tamaño predeterminado del sistema (generalmente A4 o Carta).

4.2.13. Archivo>> salir

Salir de la aplicación.

[6]Worpad, notepad++, libreoffice writer, Microsoft Word, etc

4.3. El menú editar (edit)

Contiene los comandos más comunes de este menú presentes en la mayoría delsoftware, tales como: repetir, deshacer, copiar y pegar.

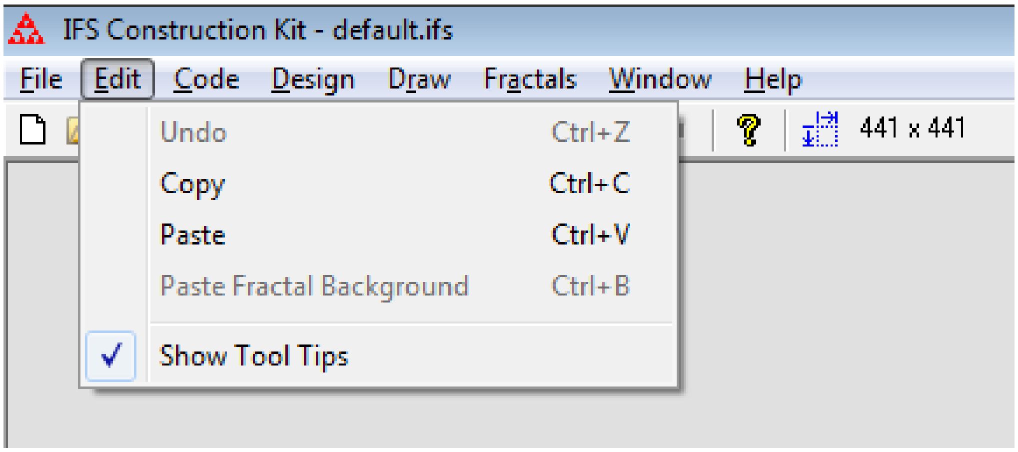


Figura22. Menú Editar

4.3.1. Editar >>deshacer (Ctrl+Z)

Se usa para deshacer los efectos de comandos usados con anterioridad. El menú cambia mostrando el último comando que se puede deshacer. En algunos casos el menú permite rehacer un comando que ha sido deshecho, pulsando Ctrl+Z.

4.3.2. Editar >>copiar (Ctrl+C)

Permite copiar imágenes en el portapapeles desde las ventanas de fractales y de diseño, dependiendo cuál es la ventana activa. Para copiar solamente parte de una imagen en la ventana fractal, se usa el mouse para seleccionarla con un rectángulo de selección.

4.3.3. Editar >>pegar (Ctrl+V)

Permite pegar una imagen desde el portapapeles a las ventanas fractal o diseño, dependiendo de cuál de ellas es la ventana activa. La imagen se pega centrada en la ventana. Si la imagen es más grande que la ventana, se escala para ajustarse a la ventana. La imagen será centrada en la ventana y rodeada por una frontera rectangular de bordes punteados. Haciendo clic sobre ella, y manteniendo el clic izquierdo, la imagen puede ser reposicionada donde el usuario lo desee.
Haciendo clic en una parte externa de la ventana, o presionando la tecla Esc se fija permanentemente la posición de la imagen en la ventana. Los bordes punteados desaparecerán. Otras acciones como empezar a dibujar el fractal, pueden bloquear automáticamente la posición de la imagen.

4.3.4. Editar >>pegar fondo fractal (Ctrl+B)

(Solamente disponible cuando la ventana fractal es la ventana activa).
En el modo de dibujo determinista, (Ctrl+V) pegará una imagen en el portapapeles como el conjunto inicial. Al usar Ctrl+B para pegar la imagen como una imagen de fondo (Solo funciona si la imagen no se está usando como conjunto inicial). Para el modo de dibujo de algoritmo aleatorio, Ctrl+V y Ctrl+B son equivalentes.

4.3.5. Editar >>mostrar consejos de herramientas

Al chequear esta opción, se muestran consejos para la barra principal y las barras de herramientas en las ventanas fractal y de diseño, se desmarca esta opción para ocultarlos. Esta selección puede guardarse en el archivo de inicio .ini.

4.4. El menú código (code)

Este es el uno de los menús más importantes pues es ahí donde se escribe el código del SFI

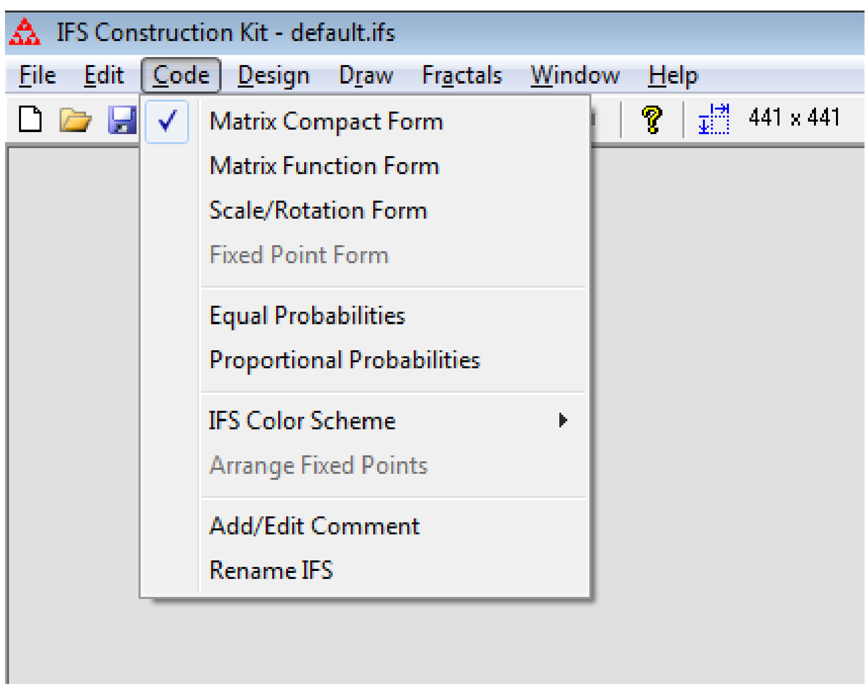


Figura23. Menú Código

4.4.1. Código >>Formulario de Matriz compacta

La matriz de forma compacta es el formulario por defecto en el cual se visualizan los parámetros de la transformación afín $f(x) = A \cdot x + b$ donde A es la matriz de transformación y b es el vector de traslación.

Los elementos de A y $b$se muestran en una fila con los coeficientes de A seguidos por los coeficientes de b. Esto es: $a \quad b \quad c \quad d \quad e \quad f \quad p$, donde p es la probabilidad asociada a cada matriz de transformación.

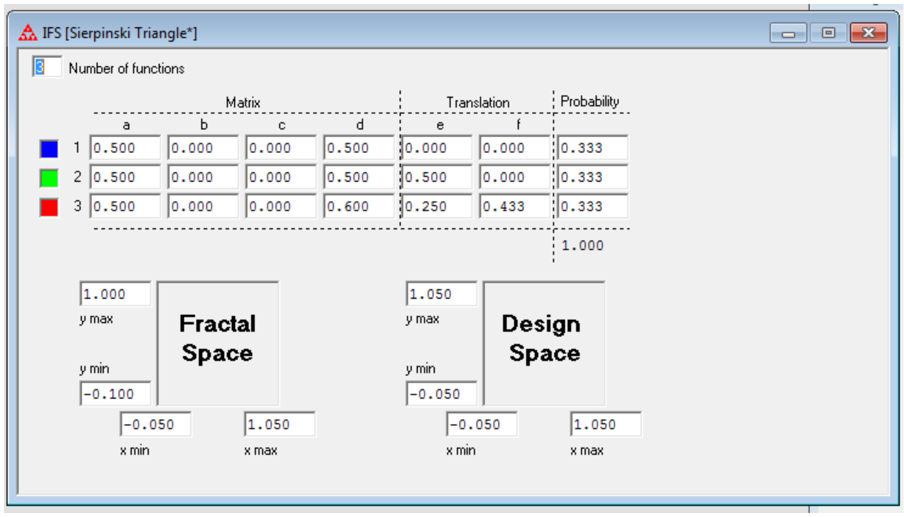


Figura24. Ejemplo del formulario de matriz compacta para el triángulo de Sierspinski

4.4.2. Código >>Formulario de Matriz funcional

El formulario de matriz funcional, da los coeficientes de la forma

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

Una desventaja es que ocupa mucho más espacio vertical en la ventana, y por lo tanto no es muy apropiado para un SFI con un gran número de transformaciones, pues la lista se hace muy larga; sin embargo, puede visualizarse la estructura de las transformaciones lineales (en forma de matrices), y las traslaciones (en forma de vectores).

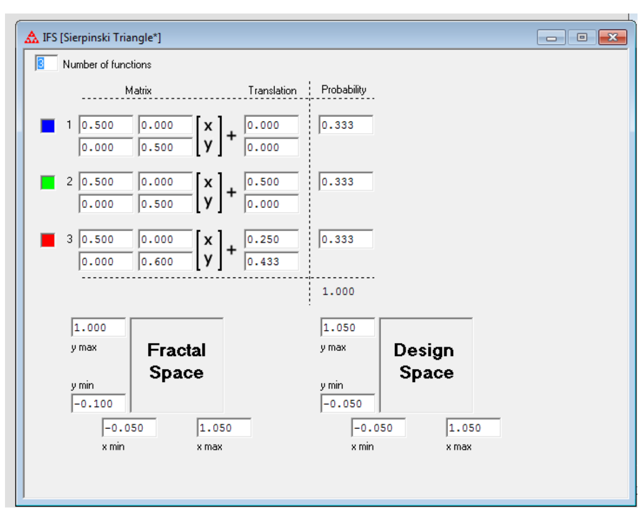


Figura25. Ejemplo del formulario de matriz funcional para el triángulo de Sierspinski

4.4.3. Código >>Formulario de Escalado/Rotación

El formulario de escalado y rotación muestra los parámetros de la matriz A en términos de los escalados y rotaciones equivalentes.

Sea la matriz de transformación

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

La equivalencia en términos de factores de escala y giros está dada por

$$a = S_x \cos(\theta_x) \quad b = -S_y \sin(\theta_y) \quad c = S_x \sin(\theta_x) \quad d = S_y \cos(\theta_y)$$

Donde S_x, S_y son los factores de escala en x e y; y θ_x, θ_y los ángulos de rotación con res pecto a x e y respectivamente.

En la Figura26. Ejemplo del formulario de rotación/escalado para el triángulo de Sierspinski, se muestra el ejemplo de este formulario para el triángulo de Sierspinski, en donde los dos primeros campos corresponden al escalado en x e y respectivamente. Los siguientes dos corresponden al ángulo de rotación en posición normal (ángulo medido con respecto al eje positivo de las x), que es positivo si se mide en sentido anti horario y negativo si es medido en sentido horario.

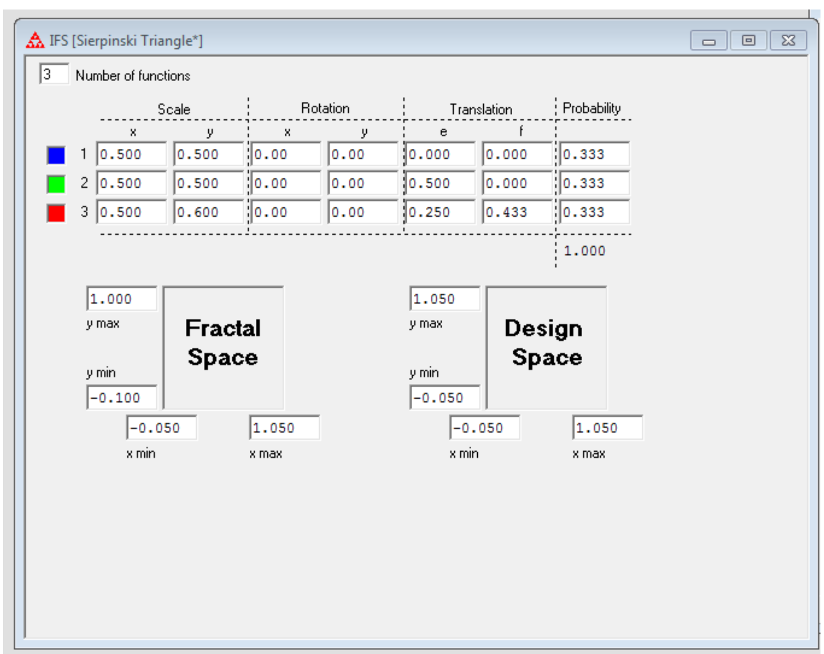


Figura26. Ejemplo del formulario de rotación/escalado para el triángulo de Sierspinski

4.4.4. Código >>Formulario de punto fijo

El formulario de punto fijo solamente se usa si se ha elegido previamente la creación de un nuevo juego del caos. Este formulario muestra los cuatro posibles movimientos con respecto a cada punto fijo. Mientras se esté en el modo de Juego del caos es posible visualizar los formularios anteriormente descritos, pero no es posibles editarlos. Las reglas del SFI pueden ser dadas solamente en el formulario de punto fijo.

La Figura27. Ejemplo de formulario de punto fijo para un juego del caos y su representación gráfica para 9 iteraciones, muestra este tipo de formulario para un juego del caos.

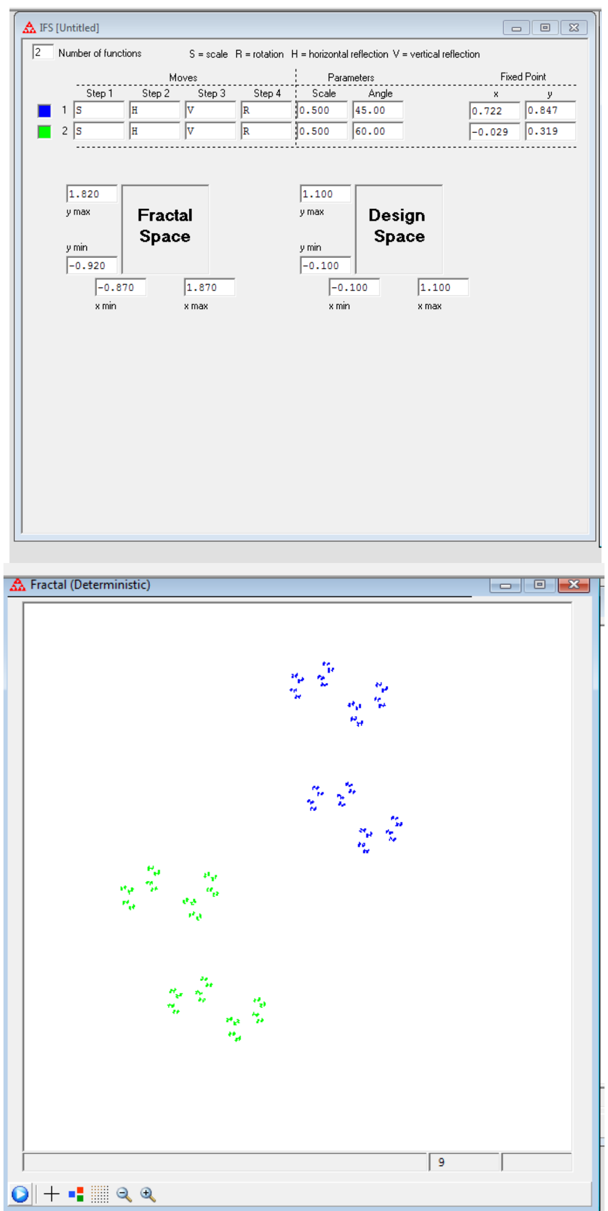


Figura27. Ejemplo de formulario de punto fijo para un juego del caos y su representación gráfica para 9 iteraciones

4.4.5. Código >> Probabilidad igual

Al elegir probabilidad igual, se le asigna la misma probabilidad a cada función en el SFI. Esto es equivalente al asignar el mismo número como probabilidad en la ventana SFI. Su utilidad radica en que al dibujar con el algoritmo aleatorio, se obtiene una densidad de puntos (en el dibujo), igual en todas las áreas; lo que no ocurre si las probabilidades son distintas.

4.4.6. Código >> Probabilidad proporcional

Al elegir probabilidad proporcional, se asigna un valor de probabilidad a una función en el SFI, basado en el valor del determinante de la matriz para esta transformación. Si el determinante es igual a cero (0), entonces se le asigna un valor de probabilidad de 0.01. Según (Barnsley, Fractals everywhere, 1993) una forma de asignar la probabilidad p_i a cada transformación f_i del SFI es de la siguiente forma:

$$p_i \approx \frac{|\det A_i|}{\sum_{i=1}^{N} |\det A_i|} \text{Donde} \sum_{i=1}^{N} p_i = 1$$

En el modo de juego del caos, todas las funciones del SFI tienen la misma probabilidad.
Las probabilidades solamente son usadas si el fractal se dibuja usando el algoritmo aleatorio. Cuando se usa el algoritmo determinista, todas las funciones del SFI tienen la misma probabilidad.
También es posible asignar cualquier valor de probabilidad $p_i \in (0,1)$ tal que la suma de todas las probabilidades es igual 1. Un mensaje de advertencia aparecerá cuando la suma de las probabilidades no sea igual a 1.

4.4.7. Código >>Esquema de colores

Los fractales generados por SFI pueden ser dibujados usando tres posibles esquemas de color. Al elegir esta opción aparece un menú emergente como el que se muestra en la figura 16.

Al usar colores del SFI se da a cada función en el SFI un color que puede ser usado para mostrar cuáles colores aparecen con cada función. El usuario puede cambiar el color para una función particular haciendo clic sobre el cuadro de la función. Esto hace emerger una ventana con la tabla de coloresestándar. La última elección de colores es guardada en archivo de inicio IFSkit.ini, cuando el usuario sale del programa, y lo reinicia. El archivo de inicio anterior guarda los valores de color como enteros largos (longint) de Visual Basic.

El usuario puede guardar la paleta en uso o cargar una previamente guardada. La extensión del archivo es .map[7], y es básicamente un archivo de texto con líneas de tres números cada una en las que se guarda el código RGB de cada color. Es posible añadir comentarios de los tres valores con mensajes tan largos como se quiera siempre que este mensaje no inicie con un dígito.

También es posible editar la paleta de colores al elegir Editar paleta SFI. El cuadro de diálogo de edición muestra al usuario la paleta completa, no solo los colores para las funciones en el SFI actual. Este cuadro de diálogo, también muestra al usuario los valores RGB para cada color. Al hacer doble clic sobre sobre un color, aparece la tabla de colores estándar de Windows. También se puede hacer clic sobre un color, y teclear Ctrl+C para copiar el color, luego hacer clic sobre otro cuadro y teclear Ctrl+V para pegar el primer color (copiado) al cuadro seleccionado.

Hay también seis botones disponibles para manipular la paleta. Estos pueden: rotar la paleta a la izquierda(en el sentido de la manecillas del reloj) haciendo que la primera fila sea la primera columna, rotar la paleta a la derecha (sentido anti horario); voltear horizontalmente (la columna izquierda pasa a la derecha); voltear verticalmente (la fila de arriba pasa a ser la de abajo); revertir cambia la paleta de colores a los valores antes de abrir el cuadro de diálogo; re arreglar muestra una paleta en blanco sobre la cual el usuario puede arrastrar colores desde la paleta original. Los cuadros sin usar de la nueva paleta tienen color negro, mientras que los colores ya usados de la paleta original tienen una diagonal. Después de que todos los cambios se hayan hecho, se hace clic en el botón aceptar (OK) para aplicar los cambios a la nueva paleta.

El usuario puede seleccionar Selección de colores SFI para función 1, para que todos los colores sean iguales al color de la primera función. Al seleccionar la opción restaurar colores por defecto del SFI deshace la opción anterior.

Si se desea cambiar el color para una funciónn, y simultáneamente cambiar el color de todas las otras funciones después de ella, con el mismo color de la función n, se debe hacer clic derecho sobre el cuadro de color correspondiente a la función y seleccionar un color para las funciones a partir de la función *n-ésima*.

Otra forma de colorear SFI es eligiendo la opción usar gradiente de color. Para modificar los colores del gradiente se elige opciones de gradiente de color. El rango del gradiente usa entre 2 y 7 colores base. Los colores base por defecto están basados en los colores del arco iris.

La opción de gradiente vertical se basa en la coordenada y de cada punto. La opción gradiente horizontal se basa en la coordenada x de cada punto.

La opción gradiente radial usa la distancia de un punto hasta el centro aproximado del fractal.

[7] La extensión .map corresponde a archivos visual basic de tipo linkerAddressMap

El gradiente de puntos fijos, compara la distancia desde el punto fijo más cercano, hasta el más lejano.
La opción aleatoria, escoge aleatoriamente colores del rango del gradiente.
La opción de gradiente de conteo de pixel traza el color de un punto en el fractal dependiendo del número de veces en que el pixel correspondiente al punto ha sido “golpeado” durante los pasos de la iteración. Este método es una aproximación, pues muchos puntos cercanos pueden corresponder a un mismo pixel. Cuando esta opción se elige, el cuadro de diálogo muestra cajas de texto en las cuales el usuario puede ingresar el conteo de pixeles para los colores base.

Los valores RGB de los colores base y el conteo de pixeles pueden ser guardados como un archivo de texto que puede ser cargado después y tiene la siguiente estructura

N	Cantidad de colores base
R, G, B, 0	Rojo, Verde, Azul, 0 conteo de pixeles color 1
R, G, B, n2	Rojo, Verde, Azul, n2 conteo de pixeles color 2
R, G, B, n3	Rojo, Verde, Azul, n3 conteo de pixeles color 3
.	
.	
.	
R, G, B, nN	Rojo, Verde, Azul, 0 conteo de pixeles color N

El esquema final de colores está basado en la idea de “robar color” de Michael Barnsley. Con este método un SFI coloreado y una imagen a todo color son usados para determinar los colores para la imagen principal del SFI. Los puntos de la ventana fractal son pintados con el mismo color de puntos correspondientes de la imagen de la que “se roba” color.

La opción de “robo de color” solo está disponible cuando se usa el algoritmo aleatorio para dibujar el fractal.

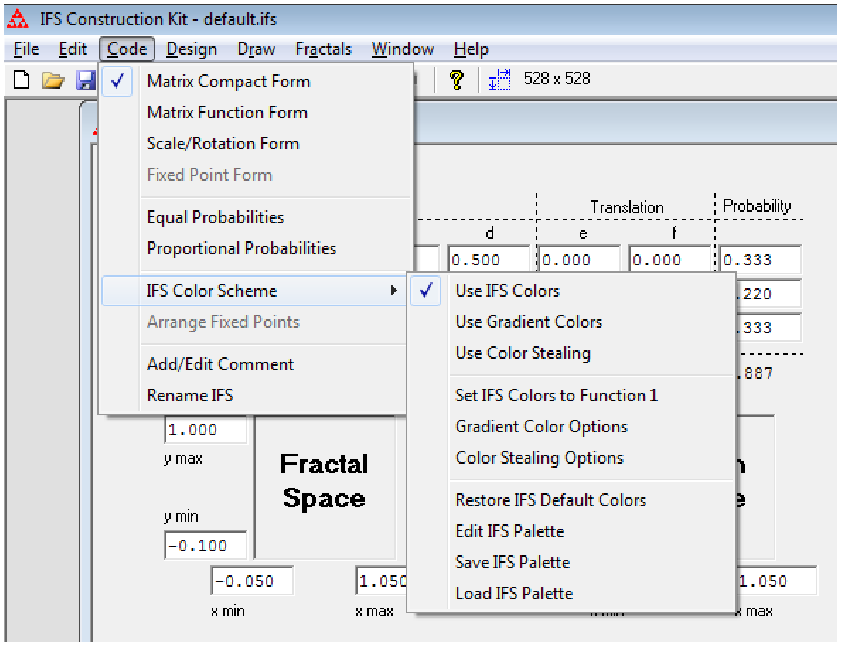


Figura28. Menú emergente en la opción esquema de color.

4.4.8. Código >> Organizar puntos fijos.

Opción disponible solo en el modo Juego del caos. Los puntos fijos del juego del caos se organizarán igualmente espaciados alrededor de un círculo con centro en el origen. En la ventana de diseño, el espacio se ajustará, para que todos los puntos sean visibles.

4.4.9. Código >> Añadir/ Editar comentarios

Esta opción muestra una ventana de edición de texto en la cual, el usuario puede ingresar comentarios sobre el actual SFI. Estos comentarios pueden ser guardados en el archivo .ifs. Es posible copiar y pegar texto desde el portapapeles, ya sea por teclado (Ctrl+C, Ctrl+V) o por clic derecho con menú contextual.

4.4.10. Código >> Renombrar un SFI

Esta opción abre un cuadro de diálogo en el cuál, el usuario ingresa el nuevo nombre para el SFI.

4.5. El menú de diseño (Design)

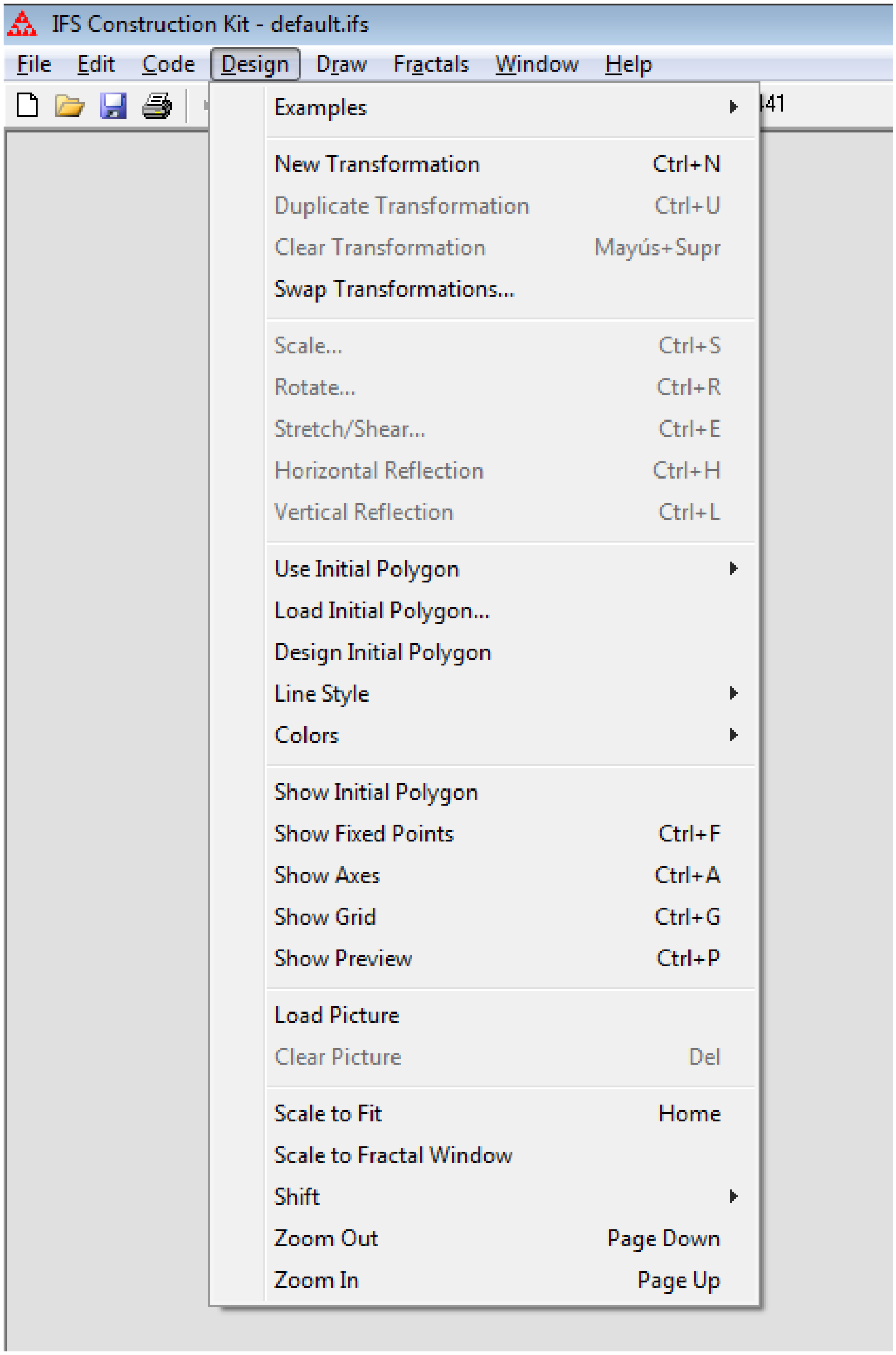


Figura29. Menú Diseño

4.5.1. Diseño >> Ejemplos

En este menú, se abre otro submenú que contiene las opciones que pueden verse en la Figura30. Menú emergente del menú Diseño>>ejemplos.

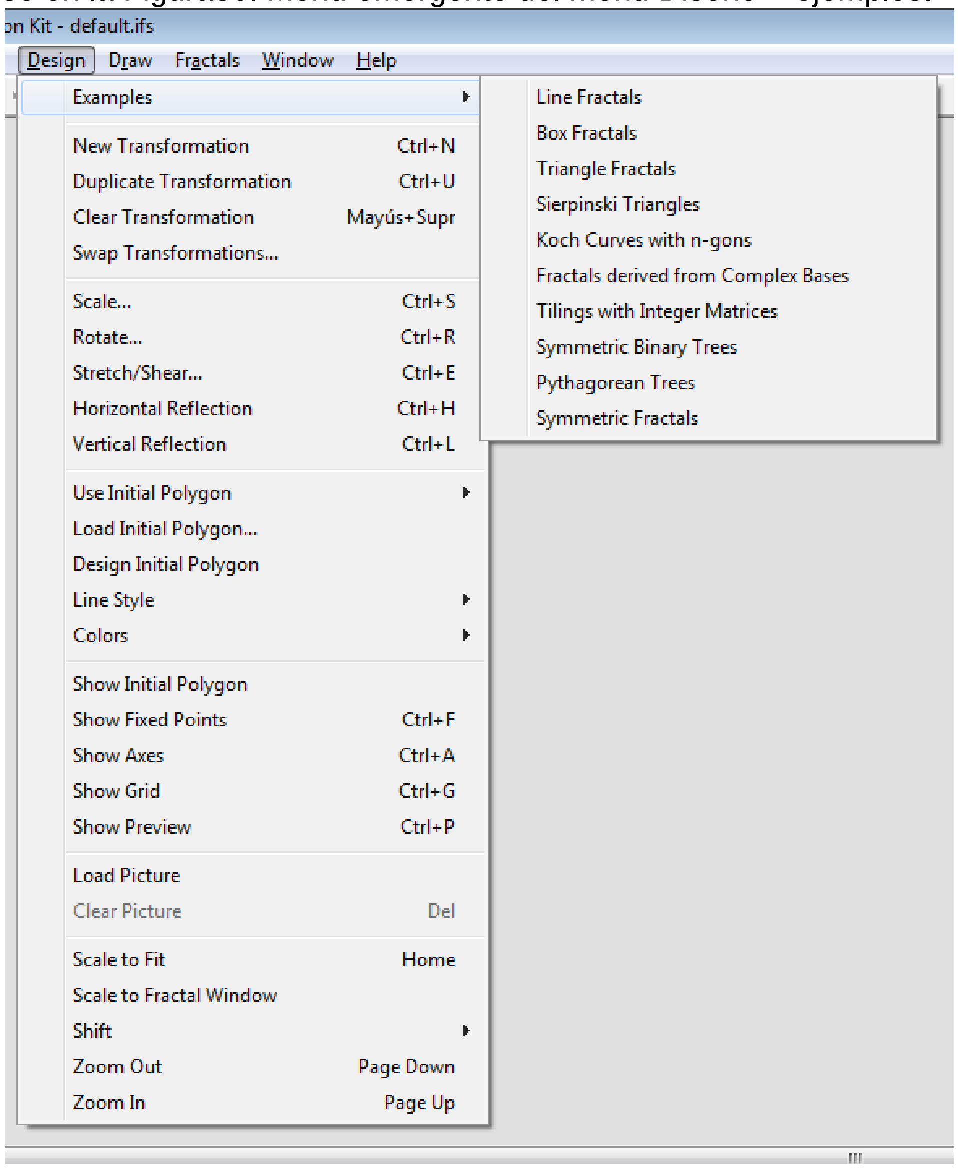


Figura30. Menú emergente del menú Diseño>>ejemplos

4.5.1.1. Fractales de línea

Un fractal de línea se genera a partir de un segmento de longitud unitaria (1) que ha de ser dividido en hasta 15 segmentos más cortos conectados entre sí (línea poligonal). Cada vértice de la poligonal puede ser manipulado por el usuario usando el mouse, excepto los extremos.
El sistema de funciones iteradas se genera al hacer clic sobre el botón crear SFI y cada función, corresponde a cada segmento de la poligonal.
El fractal es obtenido por reemplazar iterativamente cada segmento con una

copia escalada del generador.Este es un ejemplo de un L – sistema
Se puede elegir entre 2 y 15 segmentos y se usa el mouse en la ventana de diseño para cambiar de lugar los extremos de los segmentos.A esta poligonal se le llama el generador del fractal de línea.
Si se selecciona la opción para segmentos orientados, el usuario tiene la opción de especificar como están siendo orientados cada uno de los segmentos individuales, en dirección adelante o atrás. En cada iteración, los segmentos son reemplazados con una copia escalada del generador,tal que esta copia aparece a la izquierda del segmento orientado que es reemplazado. La recursión no puede ser usada con segmentos orientados.

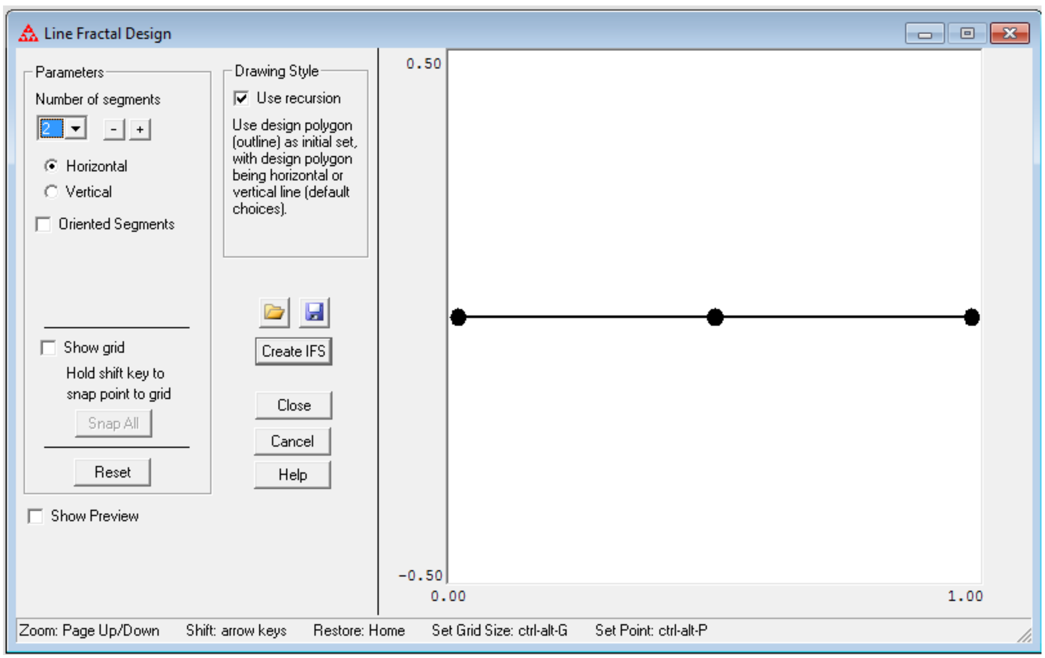


Figura31. Formulario para el diseño de fractales de línea

El laFigura32. Curva de Koch generada mediante fractal de línea, se muestra la poligonal que genera el SFI para la curva de Koch.

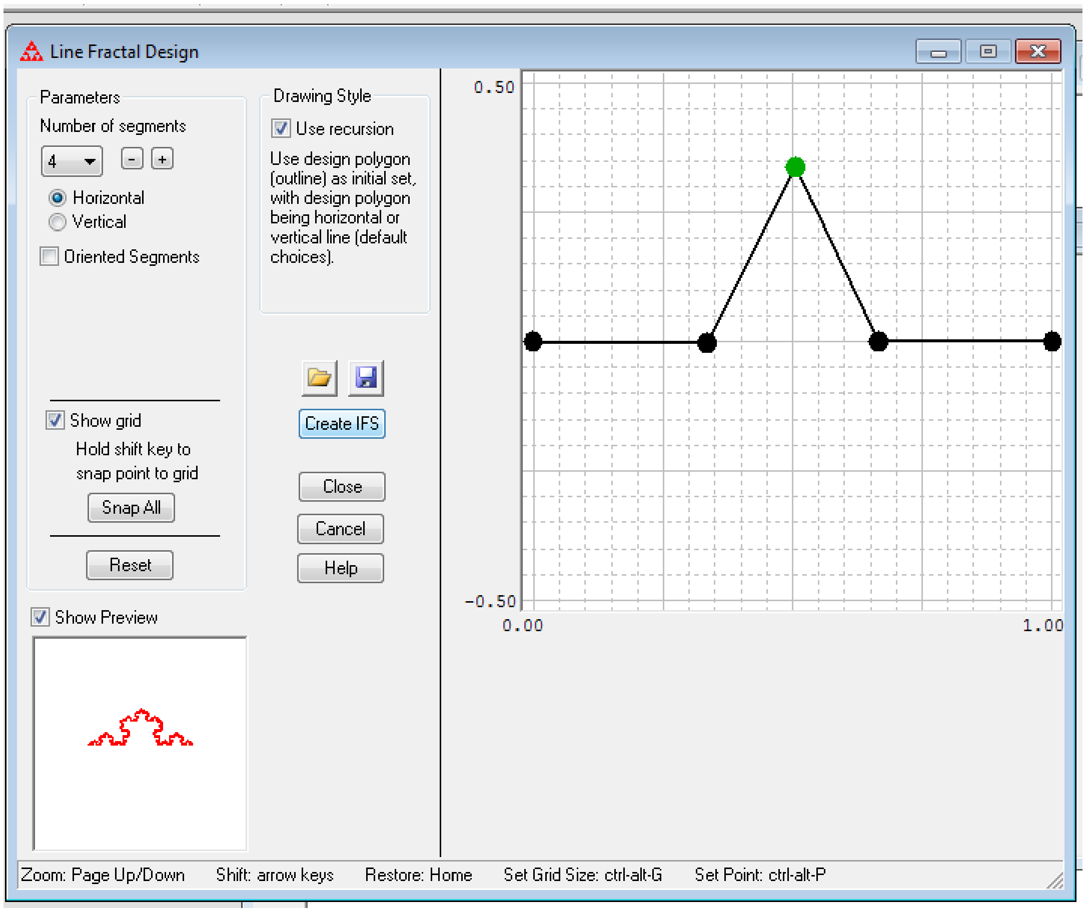


Figura32. Curva de Koch generada mediante fractal de línea

4.5.1.2. Fractales de cajas

Un fractal de caja es obtenido dividiendo un cuadrado en sub – cuadrados iguales, luego se quitan aquellos que no harán parte del diseño. Cada cuadro no removido, corresponde a una transformación dentro del SFI. Cada transformación del SFI será un escalado y una traslación.

Este menú visualiza un cuadro de diálogo en el cual el usuario puede elegir usar una grilla entre 2×2 y 10×10. Se hace clic sobre un cuadrado para removerlo (el color cambia de rojo a blanco); si se hace nuevamente clic sobre el mismo cuadrado, este volverá a hacer parte del diseño (el color cambia de blanco a rojo). Después de haber seleccionado el diseño apropiado, se oprime el botón crear SFI para generar el sistema de funciones iteradas asociado al diseño. Puede generar hasta 100 funciones en el SFI.

En la Figura33. Formulario para el diseño de fractales de caja, se muestera el formulario para que el usuario diseñe su propio esquema de fractales de caja, y generar un SFI sin tener que digitar uno a uno las matrices de transformación.

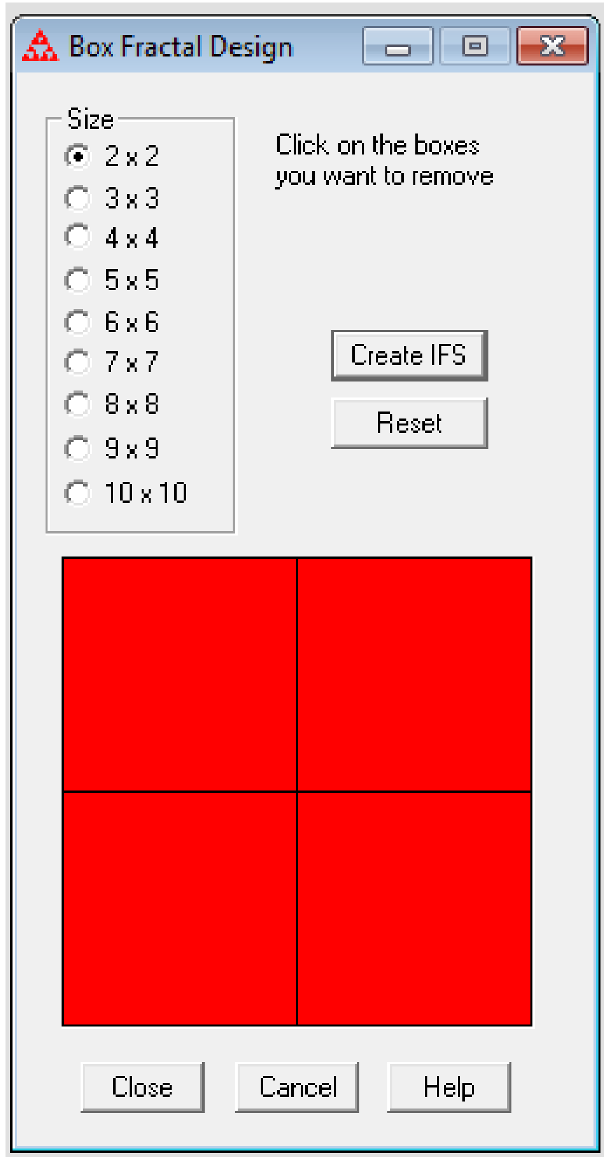


Figura33. Formulario para el diseño de fractales de caja

Un muy buen ejemplo de un fractal que se pueda generar fácilmente mediante los fractales de caja es la alfombra de Sierspinski que se muestra en la Figura34. La alfombra de Sierspinski generada a partir de los fractales de caja.

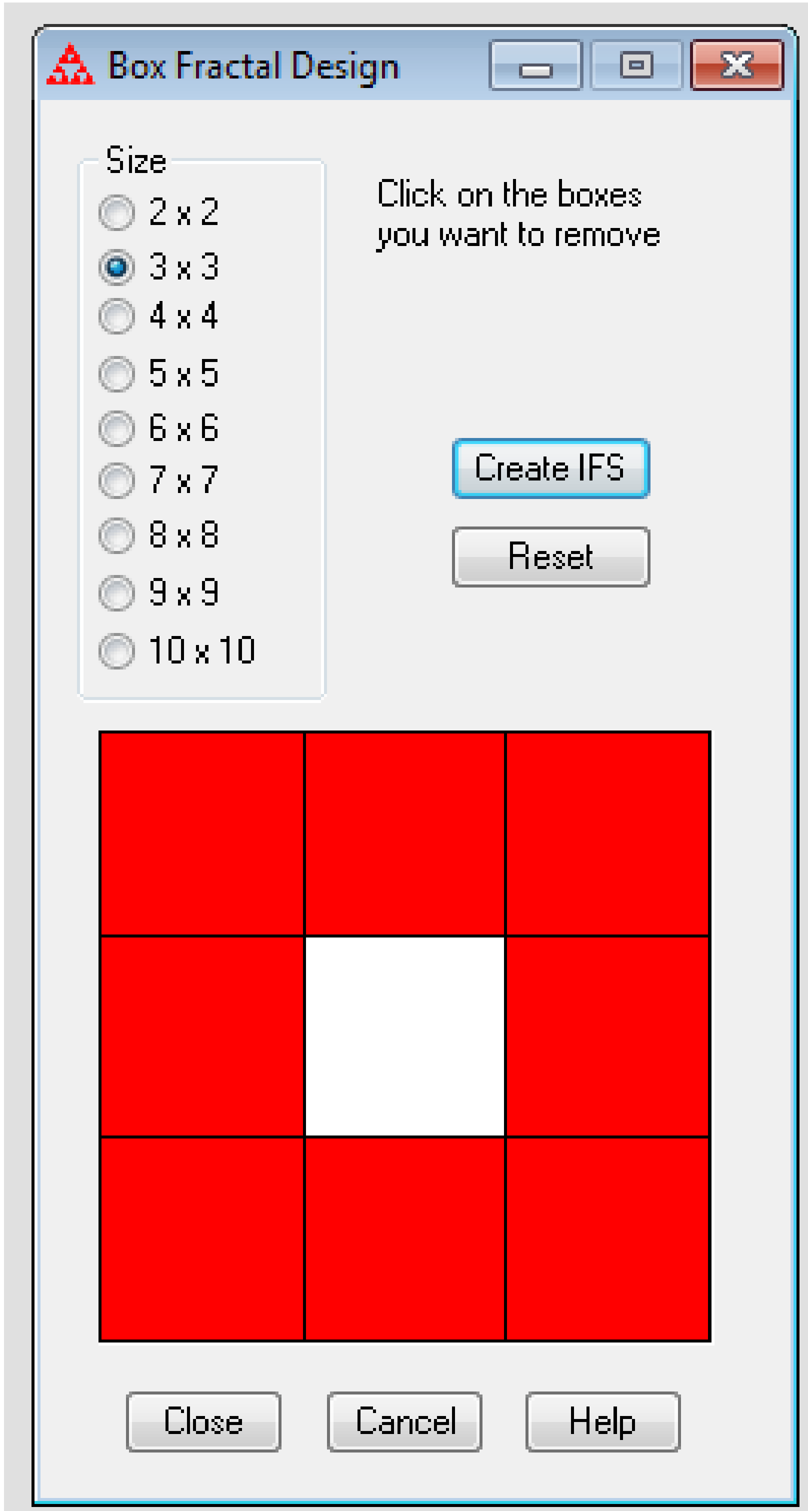


Figura34. La alfombra de Sierspinski generada a partir de los fractales de caja

4.5.1.3. *Fractales de triángulos*

Un fractal de triángulos se obtiene al dividir un triángulo equilátero en subtriángulos iguales. Al igual que el diseño de fractales de caja se da clic en los subtriángulos que no hacen parte del diseño. Cada subtriángulo corresponde a una función del SFI. Cada función consiste en escalados, traslación, y rotaciones de 180°. Por defecto, el triángulo equilátero original es dividido en 4 subtriángulos. El triángulo central queda invertido.

Esta opción abre un cuadro de diálogo en el cual, el usuario elige dividir el triángulo equilátero en un arreglo que contiene entre 2 y 10 filas de subtriángulos, es decir un cuadrado perfecto de subtriángulos en cada elección4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81 0 100 subtriángulos. Se hace clic sobre un subtriángulo (rojo) para removerlo (cambia a blanco). Se hace clic en un subtriángulo en blanco para incluirlo en el diseño (cambia a rojo). Después de terminar el diseño, el usuario da clic en el botón crear SFI para generar las diferentes funciones del SFI.

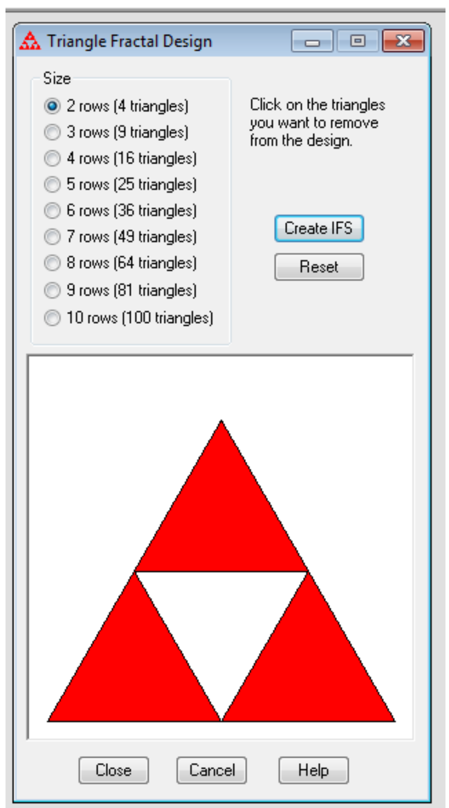


Figura35. Formulario para el diseño de fractales de triángulo

El más clásico de los fractales de triángulo es el triángulo de Sierspinski que se obtiene de remover el triángulo central como se muestra en la Figura35. Formulario para el diseño de fractales de triángulo.

4.5.1.4. *Fractales de Triángulo de Sierspinski*

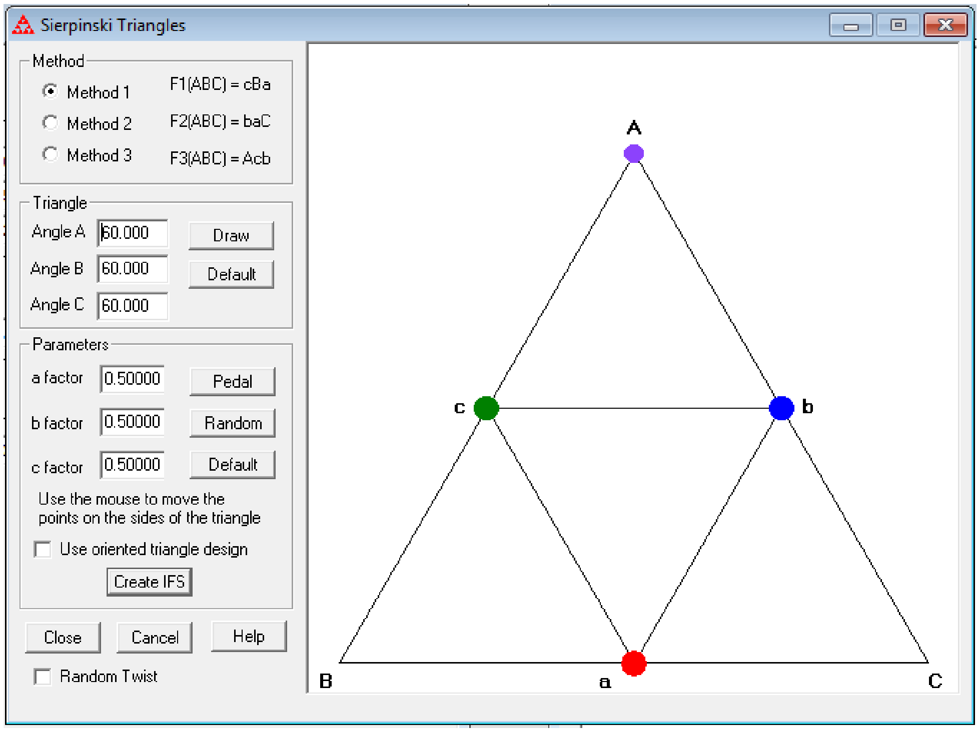


Figura36. Cuadro de diálogo al seleccionar la opción diseño>>ejemplos>>triángulo de Sierspinski

El triángulo estándar de Sierspinski, consiste en tres funciones del SFI que son homotecias de razón 1/3 y ángulo de rotación 0 grados y traslaciones $(0,0)$, $\left(\frac{1}{2},0\right)$y $\left(\frac{1}{4},\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$. En esta ventana el usuario puede alterar estas transformaciones, permitiendo escalados no uniformes y rotaciones no uniformes, variando la posición de los vértices que generan cada transformación.Básicamente, el usuario está decidiendo la posición de dos de los vértices de tres triángulos más pequeños que el original, lo que genera un SFI formado por tres funciones. En otras palabras el usuario está definiendo las coordenadas de los vértices de tres triángulos, lo que genera un SFI como se describió en la sección 3.2.2.Transformación de un triángulo en otro mediante una transformación afín.

Otra opción es hacerclicen el botón aleatorio, lo que moverá de forma aleatoria los puntos a, b, c sobre los lados del triángulo. También es posible mover el vértice A arrastrándolo con el mouse. Al hacer clic en el botón por defecto, regresa el vértice A, a su posición original en el campo de triángulo y los puntos a, b, c a los respectivos puntos medios de cada lado en el campo de parámetros.

Al hacer clic en el botón pedal, se crea un triángulo pedal de Sierspinski. Esto se refiere a que los puntos a, b, c son los puntos de corte de la altura con respecto a cada lado, por lo que el triángulo debe ser acutángulo o rectángulo. Cuando se construye un triángulo obtusángulo y se da clic en crear el SFI se muestra un cuadro de mensaje de error indicando que los factores deben ser valores entre 0 y 1, pues el ortocentro del triángulo está en el exterior del mismo. En la Figura37. Triángulo pedal se muestra el efecto estas transformaciones.

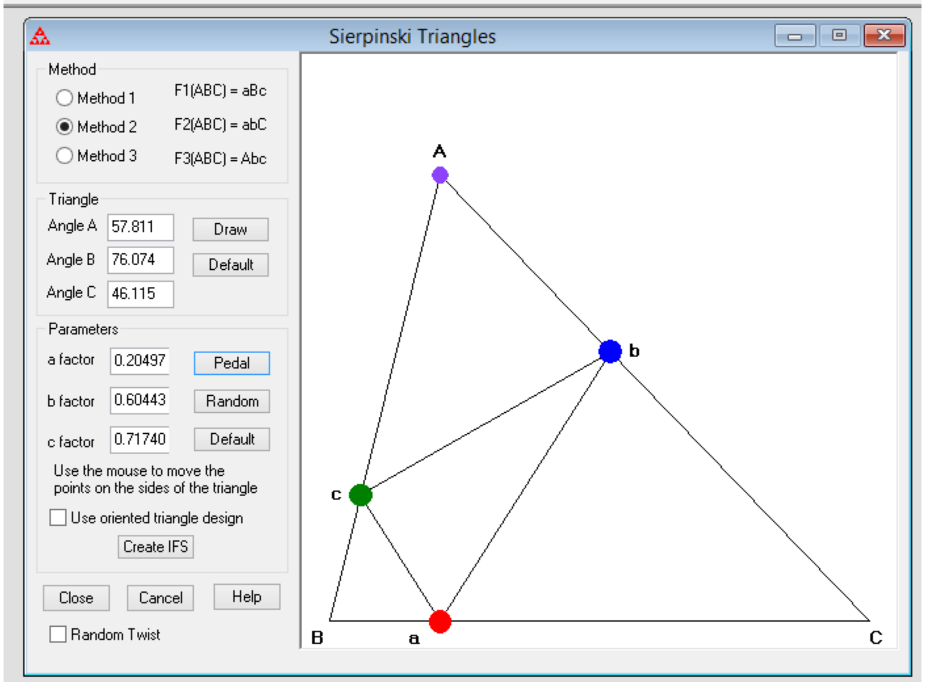


Figura37. Triángulo pedal

Al chequear la caja giro aleatorio (random twist) se crea un triángulo de Sierspinski girado.Esta construcción inicia igual que la del triángulo de Sierspinski. En cada iteración, sin embargo, cada uno de los puntos a, b y c es movido una pequeña distancia en una dirección aleatoria como se muestra en la Figura38.Figura38. Rotación aleatoria del triángulo de Sierspinski.

El ejemplo a la derecha muestra un triángulo de Sierspinski girado después de 5 iteraciones. La imagen entera no es estrictamente un fractal auto – similar debido a las variaciones aleatorias.

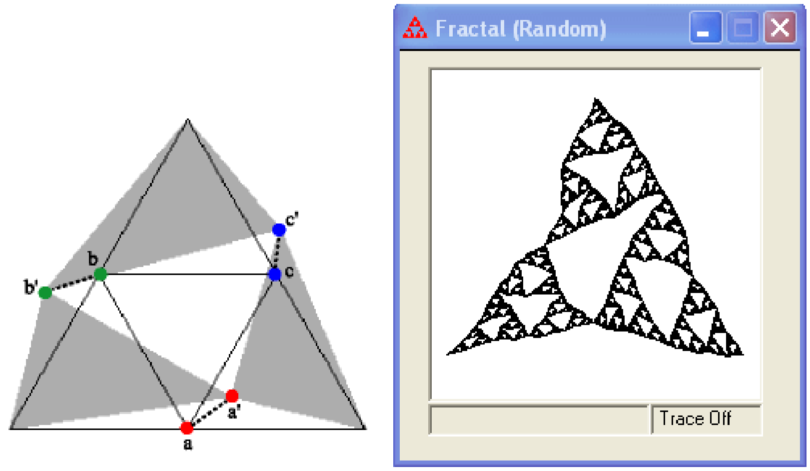


Figura38. Rotación aleatoria del triángulo de Sierspinski

El usuario puede ajustar la cantidad de giro usando el deslizador inferior. Hay 10 posiciones disponibles, desde no girado hasta gran giro. Esto significa que los vértices de los triángulos no quedan sobre los lados del triángulo inicial, sino fuera y dentro de él; lo que se traduce en un nuevo SFI en el que el fractal se visualiza como un triángulo deformado.

Las teclas Re Pág y AvPág moverán el deslizador entre las cuatro posiciones básicas, mientras que las flechas de cursor (izquierda y derecha) moverán el deslizador con pequeños incrementos. La imagen puede ser dibujada en un solo color, o usando los colores del SFI. Es posible dibujar los triángulos rellenos o vacíos.Las teclas de cursor (arriba y abajo) se usan para incrementar o reducir el número de iteraciones. También es posible cambiarlo al elegir el número en la caja de selección ubicada en la parte inferior izquierda (entre 1 y 8).

Al hacer clic en el botón dibujar, también se crea el código del SFI subrayado sin el giro aleatorio en la ventana SFI. Los comandos de teclado Ctrl+A, Ctrl+F y Ctrl+G alterna los ejes, puntos fijos y grilla respectivamente en la ventana Fractal.

4.5.1.5. Curvas de Koch con n – ágonos

La curva estándar de Koch tiene asociado el SFI descrito en la Tabla 15. Sistema iterado de funciones para la curva de Koch en la página 35.Lo que se hace con esta clase de fractales, es agregar otras funciones como formando polígonos regulares de más de tres lados, lo que implica agregar una función por cada lado del polígono (menos 1). En la Figura39. Cuadro de diálogo al seleccionar la opción diseño>>ejemplos>>Curva Koch con n - ágonos, se muestra el cuadro de diálogo que aparece cuando se elige esta opción.

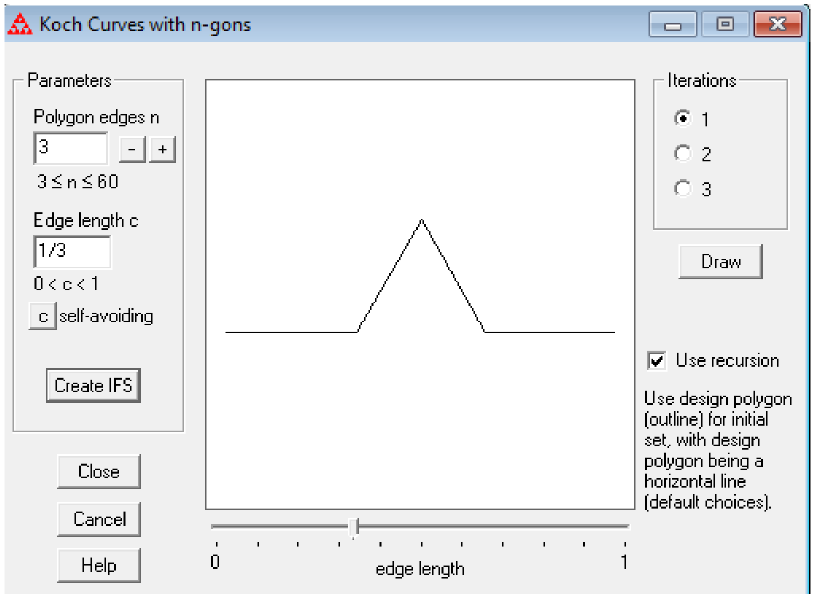


Figura39. Cuadro de diálogo al seleccionar la opción diseño>>ejemplos>>Curva Koch con n - ágonos

Esto produce una curva $(n, c) - Kock$. El cuadro de diálogo permite al usuario especificar los valores de c y n. Es posible ajustar el valor de n haciendo clic en los botones + o –, donde $3 \leq n \leq 60$. Al seleccionar algún valor en iteraciones (1, 2 o 3) se puede obtener una vista previa con 1, 2 o 3 iteraciones respectivamente.

El valor de c también puede ajustarse moviendo el deslizador ubicado en la parte inferior del cuadro de diálogo, permitiendo un mejor control cuando los polígonos que reemplazan al segmento, se cruzan.

Al hacer clic en el botón auto – evitar,calcula un valor de c para el cual la curva de Koch no se cruza para todos los valores menores que este valor.

4.5.1.6. Fractalesderivados de bases complejas

Sea z un número complejo tal que $|z| < 1$. Es ´posible usar a z como la base de un sistema de números con los dígitos 0 y 1. El conjunto de números que pueden ser escritos en esta base con dígitos 0 y 1 está dado por $\{\sum z^n \therefore n \in A, y, A \subset Z^+\}$. Se elige esta opción para dibujar este conjunto.

El usuario elige la forma de entrada del número imaginario $a + bi$ o en la forma Re^{Ai}. Al hacer clic en el botón crear SFI se definen las dos funciones que forman el SFI: $f_1 = zw$ y $f_1 = zw + z$.

La imagen asociada con este SFI puede ser dibujada de dos maneras. Una es usando los métodos usuales del SFI (aleatorio o determinístico). La otra es usar la idea de la representación de la base para calcular y dibujar puntos de la forma $\{\sum z^n \therefore n \in A, A \subset \{1,2,3,\dots,22\}\}$. Si se quiere usar este método para dibujar la imagen, se debe tener el cuadro de diálogo abierto mientras se dibuja.

Si el método de SFI es elegido, los colores usados son los mismos de la ventana SFI. Si el método de representación de la base es elegido, la imagen es dibujada con un color sólido (el mismo de la primera función en la ventana SFI). Alternativamente, se puede elegir cambio de color de acuerdo al número de veces que cada uno es dibujado como una de las sumas finitas. El coloreado se basa en el rango de gradiente y conteo de pixeles especificado en el menú código>>esquema de colores del SFI>>opciones de gradiente de color. (Ver sección4.4.7. Código >>Esquema de colores)

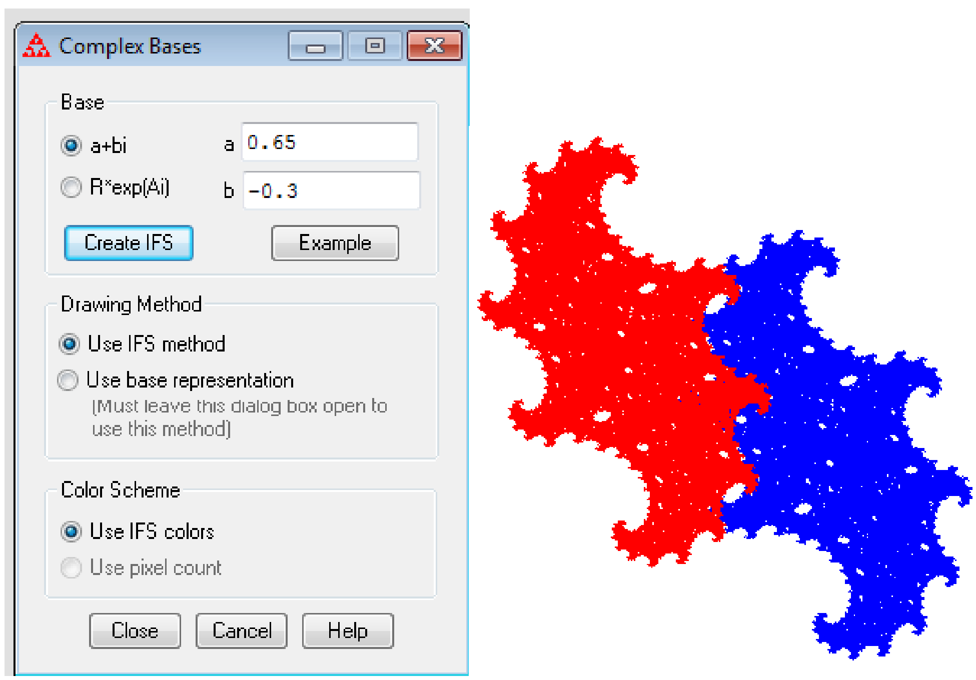


Figura40. Fractales basados en bases complejas

4.5.1.7. Mosaicos con matrices enteras

Un mosaico en el plano, es una familia de conjuntos con interiores disyuntos que cubren el plano. Este método para generar mosaicos desde SFI se basa en matrices de coeficientes enteros.La matriz entera M debe ser elegida de manera que los valores propios tengan un módulo mayor que 1.
Los vectores columna de M forman un paralelogramo con área $m = |\det(M)|$. El espacio de estos vectores, divide al plano en paralelogramos, cada uno contiene A puntos de malla con coeficientes enteros dentro del paralelogramo o sobre dos de los vértices. Al hacer clic en el botón dibujar

enrejado se dibujan estos paralelogramos. Al usar las teclas Re Pág y AvPág puede acercarse o alejarse la ventana de dibujo respectivamente.

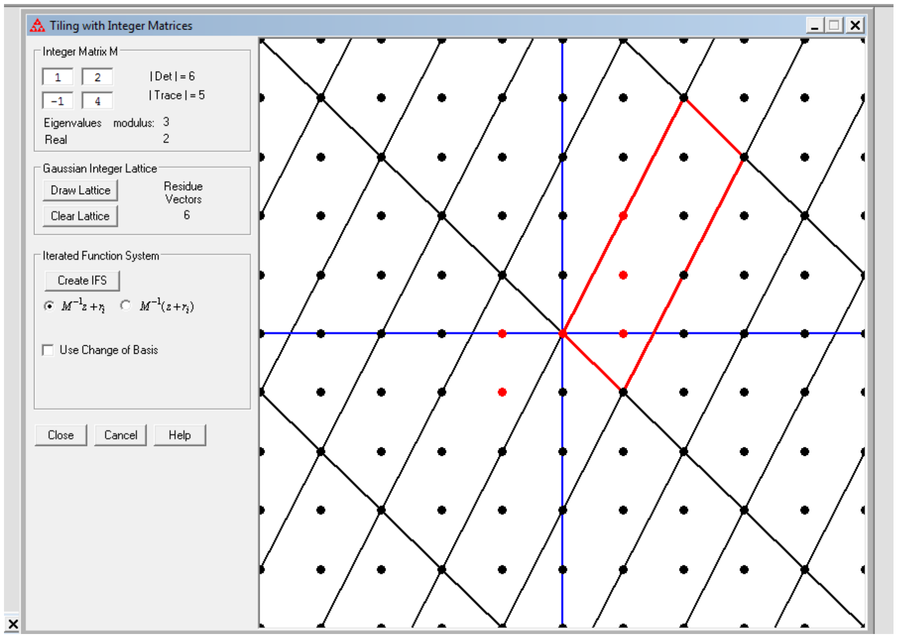


Figura41. Cuadro de diálogo de mosaicos de matrices enteras

Para la anterior elección de vectores residuales, se obtiene un fractal como el que se muestra en la Figura42. Fractal generado con matrices enteras de la figura 41

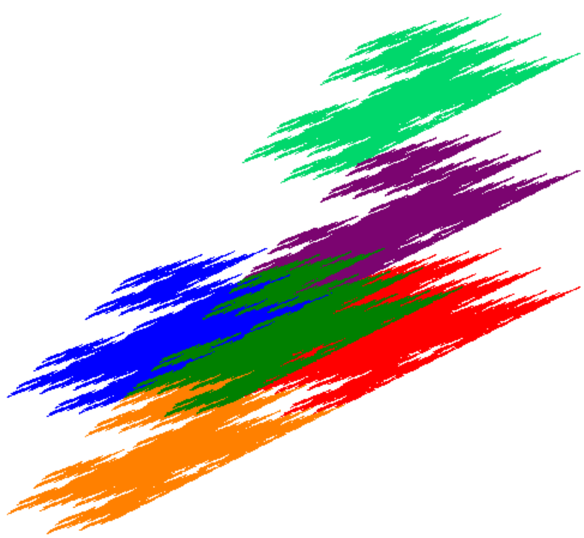


Figura42. Fractal generado con matrices enteras de la figura 41

La tecla inicio (home) retorna la ventana a los valores por defecto.

El conjunto de todos los puntos de la malla en el plano forman un sistema completo de residuos para M que consta de m clases de equivalencia. Dos puntos de enrejado son equivalentes si ellos ocurren en puntos equivalentes de paralelogramos diferentes. Al hacer clic sobre los puntos de enrejado mostrados, se elige un punto de cada clase de equivalencia (o para deseleccionarlo). Estos puntos al ser seleccionados se muestran en rojo. No es posible seleccionar más de un punto para cada clase de equivalencia.

4.5.1.8. Árboles simétricos binarios

Un árbol simétrico binario $T(r,\theta)$ está definido por dos parámetros, la razón de escala $0 < r < 1$, y el ángulo de bifurcación $0° < \theta < 180$ °. El tronco se divide en dos ramas, una a la izquierda y otra a la derecha. Ambas ramas tienen longitud igual a r multiplicado por la longitud del tronco y formando un ángulo θ con el tronco. Cada rama se subdivide siguiendo la misma regla.

Un árbol simétrico binario de auto contacto, tiene auto intersección pero las ramas no se entrecruzan. Al hacer clic en el botón R, el software calcula una única razón de escala r que genera un árbol simétrico binario de auto – contacto.[8]
Al chequear el cuadro Hacer árbol no simétrico, es posible elegir diferentes ángulos y razones de escala para cada rama.

En la Figura 43. Ventana para modificar parámetros de árbol binario simétrico, puede verse la ventana que se despliega para que el usuario pueda ingresar los parámetros que han de generar las dos funciones[9] iteradas asociadas al árbol.

[8] En otras palabras, al usar el botón R, se evita que las ramas se entrecrucen.
[9] Por ello se llama binario

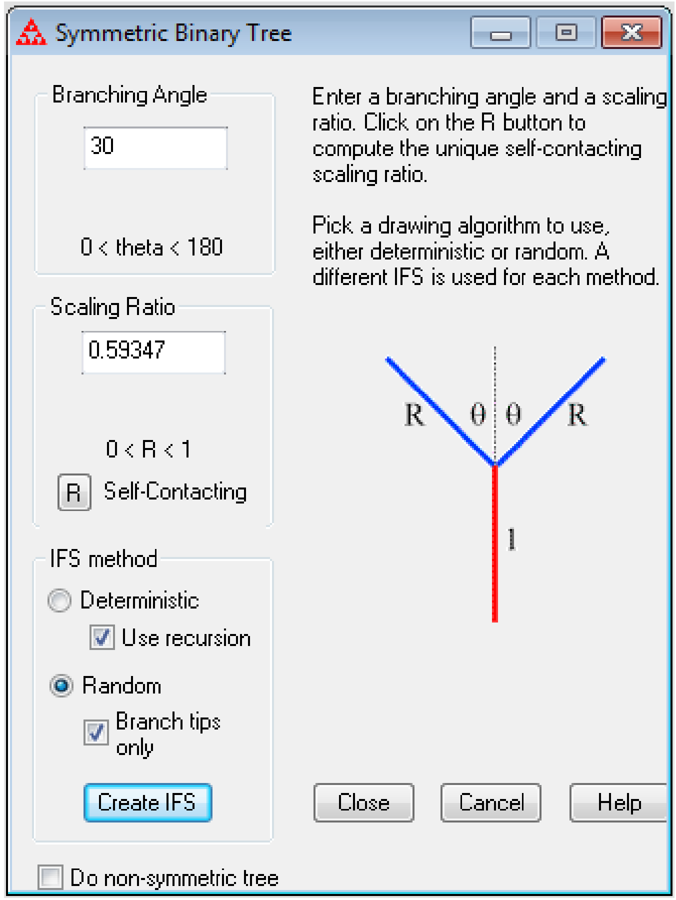


Figura 43. Ventana para modificar parámetros de árbol binario simétrico

La anterior configuración genera el sistema de funciones iteradas que se muestra en laFigura 43. Ventana para modificar parámetros de árbol binario simétrico.

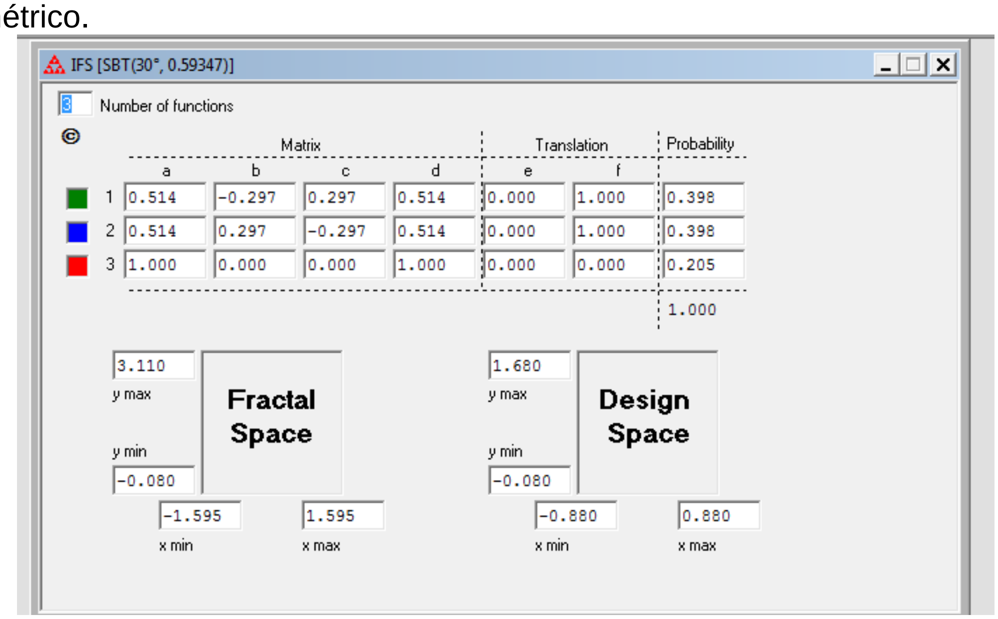


Figura44. Sistema de funciones iteradas para un árbol simétrico binario de la figura 43

El árbol generado se muestra en la Figura45. Árbol simétrico binario generado a partir del SFI de la figura 44

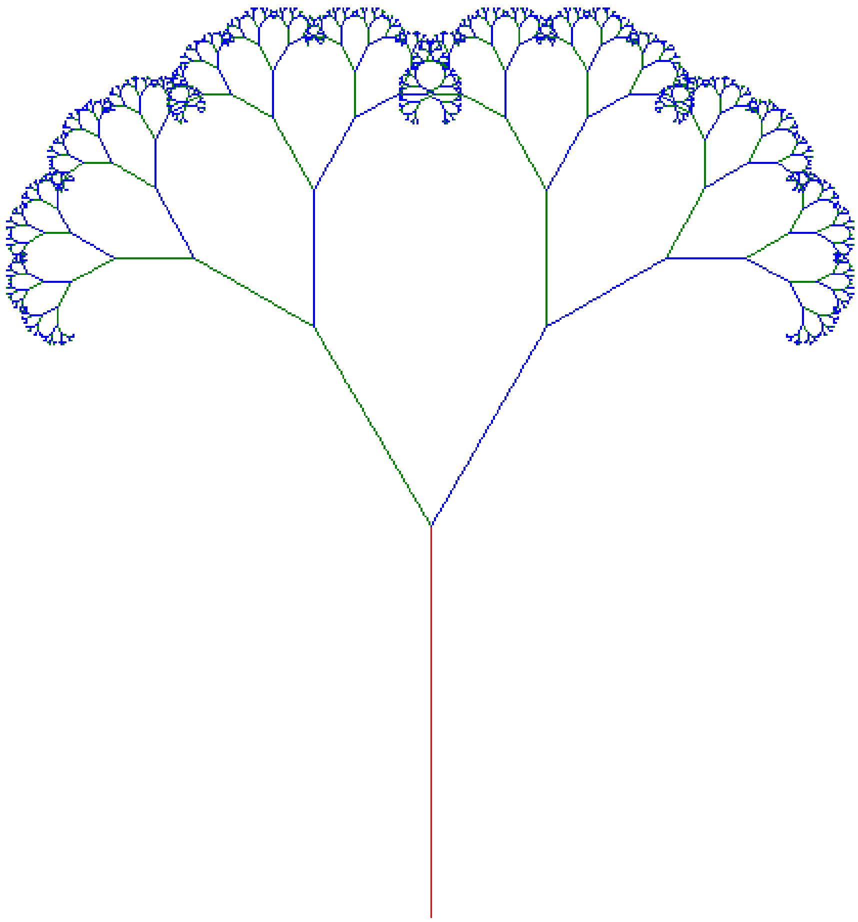


Figura45. Árbol simétrico binario generado a partir del SFI de la figura 44

4.5.1.9. Árboles pitagóricos

Un árbol Pitagórico fractal se construye a partir de tres cuadrados. Es llamado así, porque los tres cuadrados encierran un triángulo rectángulo y por lo tanto, los lados satisfacen el teorema de Pitágoras. El diseño está determinado eligiendo el ángulo entre los cuadrados rojo y negro. La construcción inicia con el cuadrado negro. Se agrega un triángulo rectángulo sobre el lado superior del cuadrado negro cuya longitud va a ser la medida de la hipotenusa. Se agregan dos cuadrados (el rojo y el negro) cuyos lados miden la longitud de los catetos del triángulo rectángulo. El ángulo entre los cuadrados rojo y negro es el elegido con anticipación por el usuario, al ser ingresado en el cuadro de texto (parte superior izquierda). El mismo procedimiento es aplicado para cada uno de los cuadrados más pequeños con el triángulo rectángulo siempre agregado en la misma orientación.

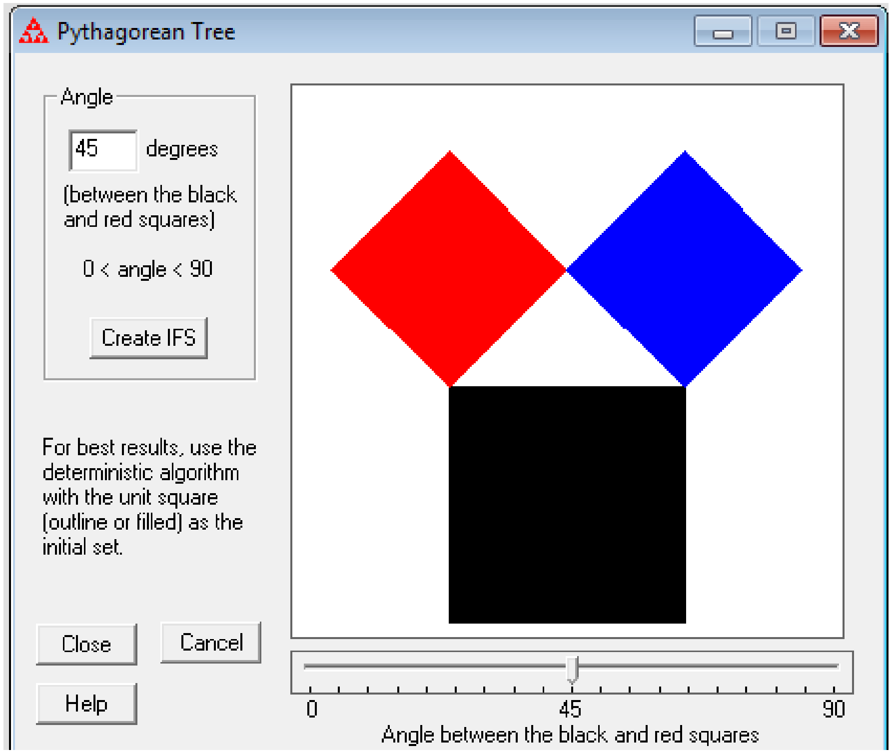


Figura46. Formulario para el diseño de árboles Pitagóricos

4.5.1.10. Fractalessimétricos

Los fractales simétricos son creados usando el grupo cíclico Z_n de orden n o el grupo diedro D_n de orden $2n$. Estos son ambos grupos simétricos. El grupo cíclico Z_n consiste en rotaciones en el sentido de las mancillas del reloj con ángulos que son múltiplos de $360/n$. El grupo D_n consiste en simetrías de un polígono regular de n lados, incluyendo ambos las mismas rotaciones de Z_n y también reflexiones.

Para el diseño de un fractal simétrico, el usuario define una transformación afín contractiva para usar como base, o elegir un SFI de la lista de fractales del menú fractal. En el primer caso, suponga que f es la transformación afín. Sea G cualquier grupo cíclico o diedro. Sea g_k los elementos del grupo G para $1 \leq k \leq orden(G)$, el órden del grupo G (n o $2n$).Entonces se toma como SFI el conjunto de funciones $\{g_k\, o\, f : 1 \leq k \leq orden(G)\}$, donde $g_k\, o\, f$ es la composición de la simetría g_k con la transformación f. El atractor para este SFI tendrá la simetría correspondiente al grupo G. Si en su lugar se selecciona un SFI en el menú fractal para ser usado en la construcción, entonces el nuevo SFI se obtiene aplicando la multiplicación del grupo de simetría solo para cada una de las funciones del SFI seleccionado.

4.5.2. Diseño >> Nueva Transformación (Ctrl + N)

Añade una nueva transformación a la ventana de diseño y la correspondiente fila en la ventana SFI. Los valores iniciales para la nueva transformación corresponden a un factor de escala de 1/2. Si se trabaja en la ventana SFI, la nueva transformación asignará una traslación aleatoria. En el modo Juego del Caos, la nueva transformación tendrá un punto fijo en el origen. A cada transformación es ´posible asignarle un valor de probabilidad en la ventana SFI.

4.5.3. Diseño >> Duplicar Transformación (Ctrl + U)

En la ventana de SFI, se crea un duplicado de la transformación seleccionada con un vector de traslación aleatorio. Esposibleasignarunaprobabilidad para la nuevatransformación.
En el juego del Caos, crea un duplicado exacto de los movimientos para el punto fijo seleccionado (incluyendo la localización del punto fijo).

4.5.4. Diseño >> Borrar Transformación (May + Supr)

Borra la transformación seleccionada en la ventana de diseño y remueve la fila correspondiente de la ventana SFI. En la ventana de SFI las probabilidades de las funciones restantes no sumarán 1 al remover una transformación, y por lo tanto se deben ingresar nuevos valores para las mismas, para que la condición de la suma se cumpla.

4.5.5. Diseño >> Intercambiar transformación…

Abre un cuadro de diálogo en el cual es posible elegir dos transformaciones e intercambiarlas posiciones de la ventana SFI. Esto puede ser útil cuando se construye una película fractal de un fractal desarrollado en otro, ya que la película es construida por combinación de transformaciones en la misma posición. Si se requiere intercambiar solamente los colores para dos transformaciones, se debe chequear el cuadro para hacer esto.

4.5.6. Diseño >> Escalar… (Ctrl + S)

Esta opción está disponible solo para la ventana SFI y asigna un factor de escala para la transformación seleccionada. Este valor se especifica en un cuadro de diálogo. El escalado es aplicado de manera uniforme tanto en x como en y.

4.5.7. Diseño >> Rotar… (Ctrl + R)

Esta opción está disponible solo para la ventana SFI y rota la transformación seleccionada alrededor del centro de un rectángulo limitado cierto ángulo en grados especificado en un cuadro de diálogo (los triángulos equiláteros son rotados alrededor de su centroide). Valores positivos para el ángulo, hacen el giro en sentido contrario a las manecillas del reloj, mientras que valores negativos lo hacen en el sentido de las manecillas.

4.5.8. Diseño >>Estirar / Cizallar… (Ctrl + E)

Es posible estirarla transformación seleccionada en cualquier dirección vertical u horizontal modificando un porcentaje en cada dirección. También se tiene la opción para aplicar un corte (cizallado) horizontal o vertical (medido en grados). Un ángulo positivo corresponde a un corte horizontal a la izquierda y un corte vertical en dirección hacia arriba.

4.5.9. Diseño >> Reflexión horizontal (Ctrl + H)

Refleja horizontalmente la transformación seleccionada a lo largo de una línea horizontal que pasa por el centro del rectángulo. Este comando, junto con la reflexión vertical está disponible también como botón en la ventana de diseño.

4.5.10. Diseño >> Reflexión vertical (Ctrl + L)

Refleja verticalmente la transformación seleccionada a lo largo de una línea vertical que pasa por el centro del rectángulo.

4.5.11. Diseño >> Usar polígono inicial

Abre un nuevo menú con un listado de polígonos iniciales (abiertos de R^2)que se pueden usar en la ventana de diseño para dibujar el fractal. Los polígonos iniciales disponibles se muestran en la Figura47. Listado de polígonos iniciales disponibles.

El polígono inicial por defecto es un cuadrado con una letra L en su interior (aquí llamado cuadrado orientado unitario).

La opción definido por el usuario, está disponible cuando el usuario ha diseñado un polígono inicial como se describe en la sección 4.5.13. Diseño >> Diseñar polígono inicial

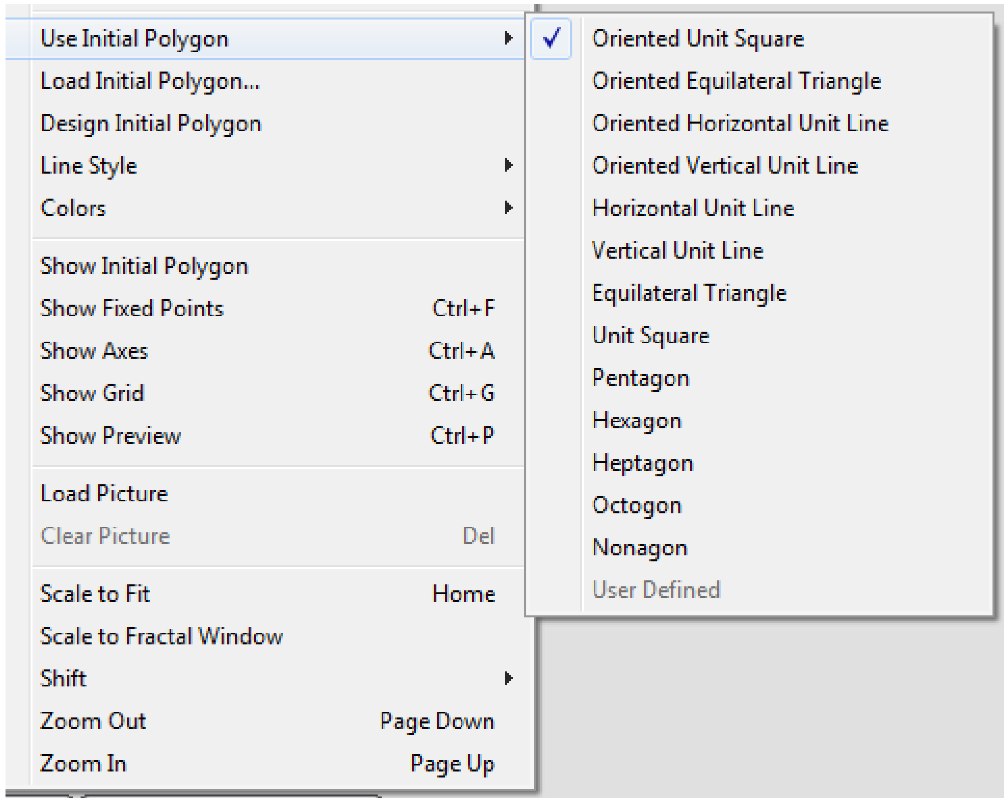


Figura47. Listado de polígonos iniciales disponibles

4.5.12. Diseño >> Cargar polígono inicial…

Es posible cargar un polígono inicial desde un archivo de texto con la extensión ".Gon". El archivo debe constar de una lista de coordenadas x, y de los vértices del polígono que ha sido previamente diseñado y guardado como se describe en la sección 4.5.13.Diseño >> Diseñar polígono inicial

4.5.13. Diseño >> Diseñar polígono inicial.

Al elegir esta opción, se abre la ventana de diseño en blanco y se hace clic en el recuadro de diseño para ubicar el primer vértice del polígono. Cada clic posterior crea un nuevo punto que ha de ser un nuevo vértice para el polígono. Al presionar la tecla D se borra el último vértice creado. Al presionar la tecla L mientras se dibuja, se libera el lápiz y se puede iniciar un nuevo polígono. Para finalizar la construcción del polígono inicial se presiona Q después de construir el último vértice, o haciendo doble clic en la ventana de diseño. Si el usuario muestra la grilla mientras dibuja el polígono (Comando de teclado Ctrl G), manteniendo presionada la tecla Shift mientras se hace clic, se dibujará el vértice en puntos sobre la grilla. Usar +/- para aumentar/disminuir la grilla en custro tamaños distintos (0.05, 0.1, 0.125 y 0.25).

4.5.14. Diseño >> estilo de línea

Al acceder a esta opción, se elige el grosor de las líneas que se han de mostrar en pantalla. Las opciones son: delgada(1 pixel), media(2 pixeles), densa (5 pixeles)

4.5.15. Diseño >> Color

El usuario puede elegir el color de fondo de la ventana de diseño o el color de los ejes en la misma ventana. Estos colores son guardados en el archivo IFSkit.ini.

4.5.16. Diseño >> Mostrar polígono inicial

Comando disponible para la ventana de diseño y muestra/oculta el polígono inicial.

4.5.17. Diseño >> Mostrar puntos fijos (Ctrl + F)

Muestra los puntos fijos del SFI ya sea de color negro, o usando el color de cada transformación del SFI. Este comando está disponible tanto para la ventana de diseño como para la ventana fractal.

4.5.18. Diseño >> Mostrar ejes (Ctrl + A)

Este comando está disponible tanto para la ventana de diseño como para la ventana fractal, y muestra los ejes coordenados en la ventana seleccionada.

4.5.19. Diseño >>Mostrar grilla (Ctrl + G)

Este comando está disponible tanto para la ventana de diseño como para la ventana fractal. El tamaño de la grilla por defecto es 0.1. Usando las teclas + o – es posible cambiar a cuatro tamaños de grilla como se describió en la sección 4.5.13. Es posible elegir un tamaño de grilla presionando al tiempo las teclas Ctrl+Alt+G. Se tiene además la opción de definir el tamaño de grilla para cada eje. Si se desea hacer esto, se debe presionar las teclas + o – para aumentar o disminuir respectivamente el tamaño de la grilla.

4.5.20. Diseño >> Mostrar pre visualización (Ctrl + P)

Esta opción se usa para mostrar una ventana previa que muestra una aproximación al límite del fractal para el SFI. El número por defecto de puntos a dibujar es 2000, pero este valor se puede cambiar pulsando la teclas + o – para incrementarlo o disminuirlo en 500 puntos respectivamente. Esta vista previa se actualiza automáticamente cada que el usuario modifica el SFI ya sea en la ventana de diseño o en la del SFI.

Para obtener una imagen más detallada del fractal asociado al SFI, se usa la ventana fractal. Sobre un computador antiguo, se puede observar cierta demora al recalcular los puntos que serán dibujados, por lo que no es aconsejable usar la vista previa; en caso de usarse se debe disminuir la cantidad de puntos que serán dibujados. Al presionar simultáneamente las teclas Ctrl+W, la ventana fractal se ajustará a una escala apropiada, usando la misma escala de la ventana de vista previa.Esto puede hacerse mientras se mueve el mouse para editar la vista de diseño, si la imagen previa inicia y se extiende fuera de la ventana de vista previa.

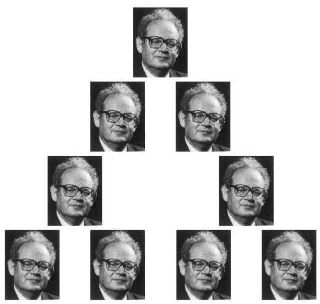
El número mínimo de puntos a ser dibujados es 500 y el máximo es de 10000 y el tamaño de incremento es de 500 puntos.

4.5.21. Diseño >> Cargar imagen

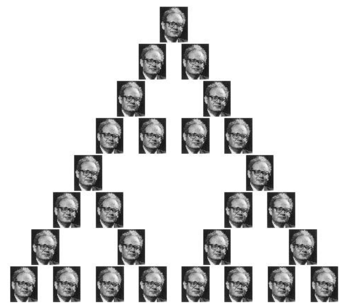
Es posible cargar una imagen en la ventana de diseño desde un archivo existente o pegarla desde el portapapeles. La imagen puede tener formato .bmp, .gif o .jpeg.Cuando se carga o pega una imagen, esta aparece con los bordes punteados; mientras esté así, es posible mover la imagen en la ventana de diseño a una ubicación deseada. Se puede mostrar ejes o grilla como se describió anteriormente para ayudar a ubicar la imagen (presionando Ctrl+A o Ctrl+G respectivamente).
Si se hace clic derecho sobre la imagen cuando está con los bordes punteados, un menú emergente aparecerá que permite la ubicación exacta de la imagen (basada en las cuatro esquinas) y ajustar su tamaño (con factores de escala horizontal y vertical).
También se puede elegir de este menú, cambiar manualmente el tamaño de la imagen. Cuando la imagen se encuentre en la posición y con el tamaño deseados se fija presionando la tecla **esc**, haciendo clic fuera de la imagen o haciendo clic en la opción finalizar posición del menú emergente al hacer clic derecho; esto fijará la posición final y borrará los bordes punteados de la imagen. Para volver a seleccionar la imagen, se presiona la tecla esc.
Por ejemplo para el triángulo de Sierspinski se puede cargar una imagen inicial y empezar a iterarla. En la Figura 48. Ejemplo de imagen arbitraria como compacto inicial muestra ese proceso para las 5 primeras iteraciones de este fractal; en ella se ha usado una fotografía de BenoitMandelbrot.

Ventana fractal imagen inicial

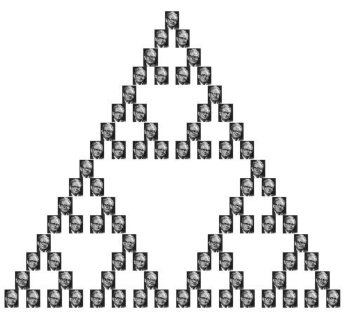
Ventana fractal iteración 1



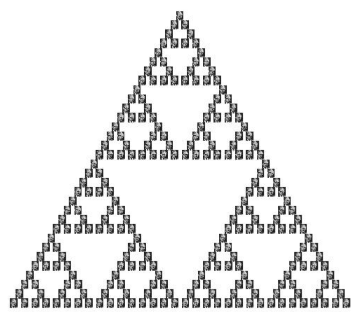
Ventana fractal iteración 2



Ventana fractal iteración 3



Ventana fractal iteración 4



Ventana fractal iteración 5

Figura 48. Ejemplo de imagen arbitraria como compacto inicial

4.5.22. Diseño >> Borrar imagen (Del)

Esta opción borra la imagen de la ventana de diseño.

4.5.23. Diseño >> Escala apropiada (Inicio)

Esta opción se elige para escalar la ventana de diseño tal que todas las transformaciones del polígono inicial sean visibles.

4.5.24. Diseño >> Escala según ventana fractal

Al elegir escalar según ventana fractal, la escala de la ventana de diseño y la de la ventana fractal quedan iguales.

4.5.25. Diseño >> Cambiar

Al elegir esta opción se cambia la posición del diseño a la izquierda, derecha, arriba, abajo; también se accede de manera más rápida con las teclas de cursor (flechas)

4.5.26. Diseño >> Zoom de alejamiento (AvPág)

Con esta opción se disminuye la escala en un 5% cada vez que se elija; también se obtiene el mismo efecto al presionar la tecla Av Pág.

4.5.27. Diseño >> Zoom de acercamiento (Re Pág)

Con esta opción se aumenta la escala en un 5% cada vez que se elija; también se obtiene el mismo efecto al presionar la tecla Re Pág.
Para restaurar la ventana original se elige escala apropiada o escala según ventana fractal

4.6. El menú de dibujo

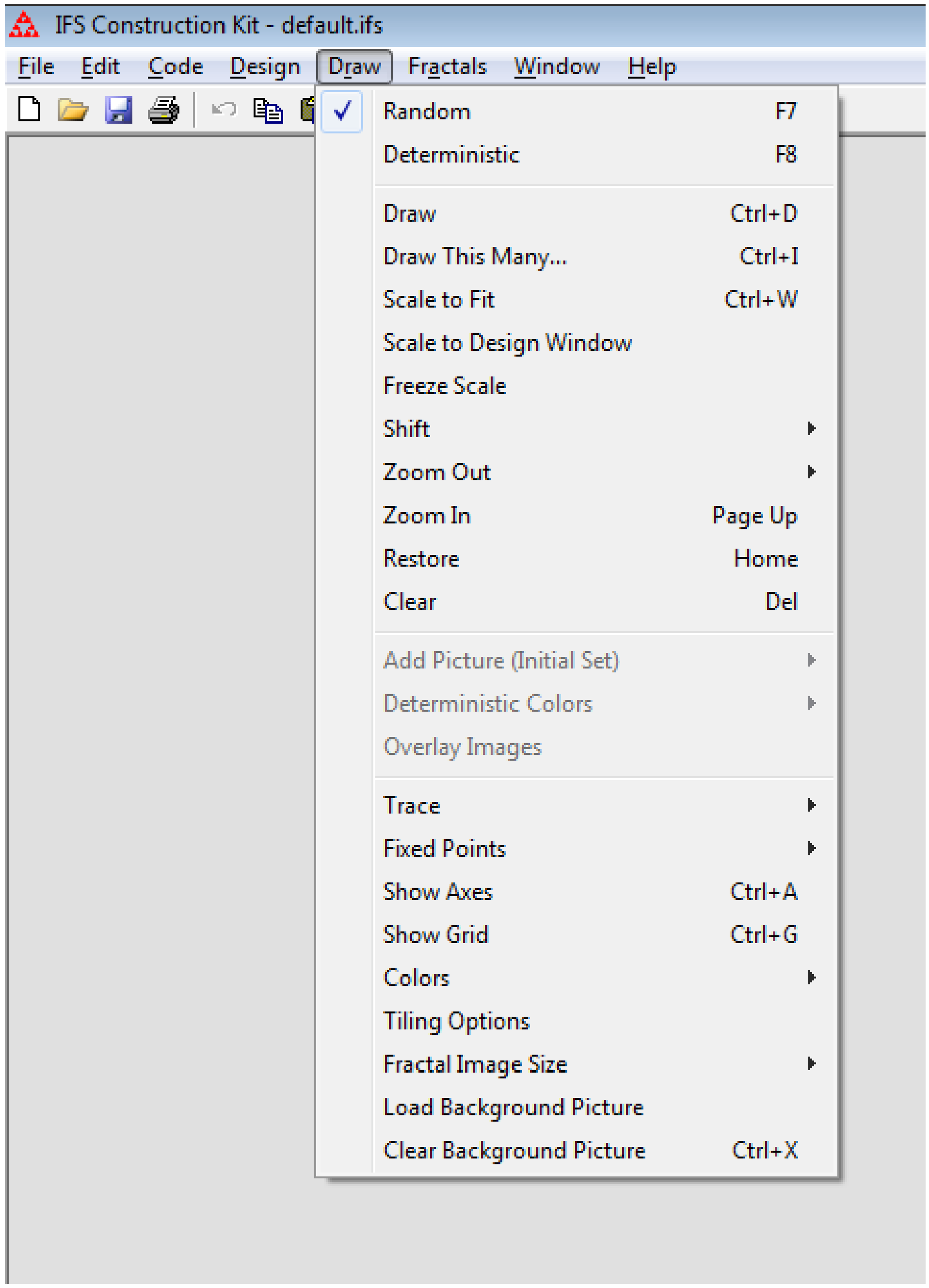


Figura49. Menú Dibujar

4.6.1. Dibujo >>Aleatorio (Ctrl + F7)

Dibuja el fractal usando el algoritmo aleatorio, en donde se tienen en cuenta las probabilidades de cada transformación del SFI.

4.6.2. Dibujo >> Determinista (Ctrl + F8)

Dibuja el fractal usando el algoritmo determinista, en donde no se tienen en cuenta las probabilidades de cada transformación del SFI. Este algoritmo es llamado en algunos textos (Flake, 1988)Máquina de copiado de reducción múltiple.

4.6.3. Dibujo >>dibujar (Ctrl + D)

Si el algoritmo aleatorio está siendo usado, se elige Dibujar para trazar las iteraciones hasta que el usuario presione la tecla Q.
Si se usa el algoritmo determinista, se elige Dibujar para dibujar la siguiente iteración del SFI.
El mismo efecto se tiene si se presiona el botón correspondiente en la barra de herramientas de la ventana principal o el de la ventana fractal.

4.6.4. Dibujo >> Dibujar esto (Ctrl + I)

Al elegir esta opción, aparecerá un cuadro de diálogo como el que se muestra en la Figura50. Cuadro de diálogo para especificar cuántos puntos dibujar

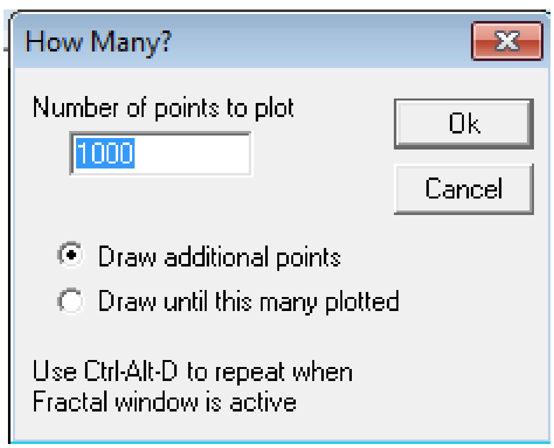


Figura50. Cuadro de diálogo para especificar cuántos puntos dibujar

Usando el algoritmo aleatorio permite especificar cuantos puntos se van a dibujar. El dibujo iniciará cuando se presione el botón OK del cuadro de diálogo.
Al presionar al tiempo las teclas Ctrl+D para continuar dibujando una vez que el número es ingresado y la ventana fractal es la activa. El valor por defecto es 10000 puntos

Hay dos opciones, la primera (por defecto) es dibujar un número adicional y específico de puntos. Cada vez que se presione Ctrl+D, el programa dibujará esta cantidad de puntos.La segunda opción es dibujar puntos hasta que haya sido alcanzado el número ingresado. En cuanto se llegue a ese número, el programa no dibujará más puntos, a menos que se abra de Nuevo el cuadro de diálogo y se incremente el valor.

4.6.5. Dibujo >> Congelar escala

Al seleccionar esta opción la escala de la ventana fractal se mantiene invariante, y no pueden hacerse cambios de escala. Esto es útil si se requiere dibujar diferentes tipos de fractales usando siempre la misma escala (por ejemplo cuando se prepara una animación).
Al usar la opción de escala apropiada, escala la ventana fractal al tamaño de la ventana de diseño, y varias opciones de acercamiento/alejamiento y cambios, estarán deshabilitadas mientras el congelado de escala esté habilitado; estarán nuevamente disponibles cuando se deshabilite esta opción.

4.6.6. Dibujo >> añadir imagen (conjunto inicial)

Cuando se usa el algoritmo determinista, es posible usar una imagen como conjunto inicialpara iterar el SFI. Hay 9 opciones distintas de añadir una imagen como se muestra en la Figura51. La opción elegida por el usuario será el compacto de R^2

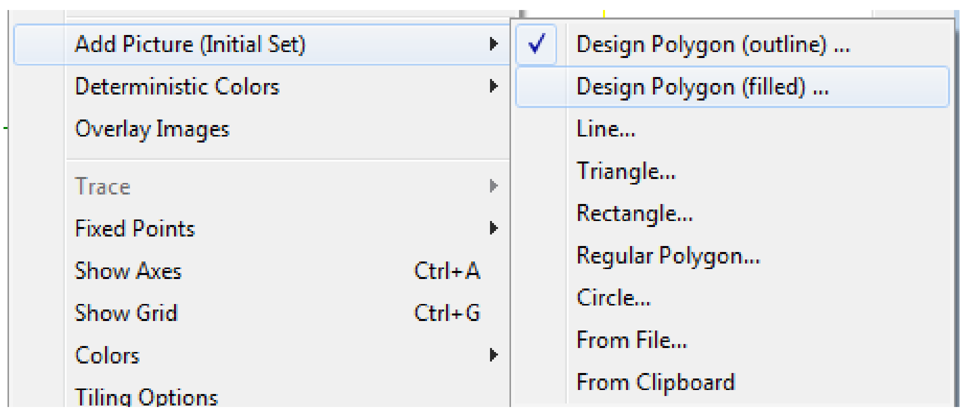


Figura51. Opciones disponibles para añadir imagen

Se puede usar el polígono actual (como contorno o relleno), un segmento de línea, un triángulo (equilátero, rectángulo, o arbitrario donde se dan los vértices), un rectángulo, un polígono regular (de hasta 9 lados), un círculo, o una imagen cargada desde archivos con formatos .bmp, .gif, o .jpeg; también es posible pegar una imagen desde el portapapeles.
Cuando se usa el polígono de diseño, un cuadro de diálogo permitirá elegir el espesor de la línea y su color.
Al elegir el polígono de diseño relleno, un cuadro de diálogo permitirá además elegir el color de relleno del polígono. La frontera del polígono puede ser visible o invisible.

Eligiendo la línea se abre un cuadro de diálogo en el que se puede especificar los puntos inicial y final del segmento a usar, así como elegir el color y el espesor de dicho segmento.

Al elegir el rectángulo, triángulo, polígono regular o círculo, aparecerá un cuadro de diálogo en el cual se elige el tamaño, el espesor de línea, el estilo (relleno o vacío) y los colores de línea (frontera) y de relleno. En todos los casos, se puede elegir dibujar usando los colores de la imagen inicial o usando el esquema de colores del SFI.

Cuando se carga una imagen desde un archivo, o es pegada desde el portapapeles se siguen los mismos procesos descritos en la sección 4.5.21.Diseño >> Cargar imagen. Al cargar la imagen, aparecerá una ventana de navegador de archivos que permitirá seleccionar la imagen deseada por el usuario y aceptar su elección para que esta sea colocada en la ventana fractal y sea el compacto inicial.

4.6.7. Dibujo >> Colores determinísticos

Esta opción está solo disponible cuando se usa el algoritmo determinista. Al elegir **Usar colores del SFI** para dibujar cada iteración basada en el color de la función usado en la ventana SFI.
Al elegir el comando**Usar colores de imagen,**se dibuja cada iteración basada en los colores originales de la imagen inicial (polígono de diseño). Cuando se carga una imagen desde un archivo, como se describió en la sección anterior.

4.6.8. Dibujo >> Cubrir imágenes

Esta opción está disponible solo cuando se usa el algoritmo determinista, y dibujará el resultado de cada nueva iteración cubriendo la imagen obtenida de la iteración anterior

4.6.9. Dibujo >>Rastro

Esta opción está disponible solo cuando se usa el algoritmo aleatorio. Si el rastro es activado, entonces al presionar la teclaCtrl y hacer clic derecho con el mouse sobre la ventana fractal, se creará un punto en esta ventana que sirve como una semilla inicial para trazar una órbita.
También es posible elegir el **punto inicial,**e ingresar las coordenadas (x, y)de la semilla inicial. Presionando la barra espaciadora, se elige al azar una de las funciones del SFI, se puede especificar exactamente cuál función será ejecutada en el paso siguiente de la órbita presionando el número correspondiente a la función en el SFI. Si el número de funciones es mayor que 9 se debe mantener presionada la tecla Ctrl y luego el dígito final del número. Por ejemplo:Ctrl+2 corresponde a la función 12. Con este procedimiento solo se pueden usar 19 funciones.
Al elegir **puntos en color**o **puntos en negro** para especificar cómo van a ser coloreados en la órbita. Si se elige **puntos en color,** se usará el esquema de colores del SFI
Si se mantiene presionado el clic izquierdo donde el cursor está sobre el

cuadro de mensaje de rastro en la parte inferior derecha de la ventana fractal, una ventana aparecerá resumiendo las instrucciones sobre cómo usar el rastro.
Esta opción es útil para SFI con menos de 10 funciones.

4.6.10. Dibujo >>Puntos fijos

Muestra los puntos fijos para cada función del SFI en la ventana fractal. El comando también está disponible como botón en la barra inferior de la misma ventana.

4.6.11. Dibujo >> Colores

Al elegir Puntos en color o puntos en negro, como se colorean los puntos fijos en la ventana fractal. Si se usa puntos de color, se usará el esquema de colores del SFI

4.6.12. Dibujo >> Opciones de mosaico

Permiteelegir el color de fondo o el color de los ejes de la ventana fractal. Estos colores serán guardados en el archive IFSkit.ini

4.6.13. Dibujo >> Tamaño de imagen fractal

Al elegir **Tamaño de imagen** para elegir un tamaño específico para el campo donde va a ser dibujada la imagen fractal (ancho/alto). Este tamaño puede ser dado en términos de pixeles, pulgadas o centímetros. El tamaño máximo en pulgadas es de 22×22. Si el tamaño de la imagen es demasiado grande para que se ajuste a la ventana fractal, entonces aparecen barras de desplazamiento. Esto ocurre en imágenes de gran tamaño y se usa primordialmente si se desea guardar una imagen fractal en un archivo, o copiarla a un programa de edición de imágenes[10].

Se debe tener cuidado en no elegir tamaños muy grandes para la cantidad de memoria disponible para el programa, pues hará que éste deje de funcionar.

4.6.14. Dibujo >> Cargar imagen de fondo

Permite elegir un archivo de imagen para ser usado como fondo en la ventana fractal cuando se usa el algoritmo aleatorio y cuando se usa el algoritmo determinista sin imágenes como compacto inicial.
Cuando se carga una imagen (o se pega desde el portapapeles) la imagen aparecerá con bordes punteados. Mientras permanezca de esa forma, es posible mover la imagen y ajustar su tamaño en la ventana. Pueden activarse ejes y grilla para ayudar a la localización de la imagen. En general se siguen

[10] Como Photoshop, MS Paint, Corel Draw, GIMP, etc.

los mismos procedimientos descritos en la sección 4.6.6.Dibujo >> añadir imagen (conjunto inicial).
Cuando se dibuja con cualquiera de los algoritmos, la imagen del fractal será dibujada sobre la imagen de fondo.

4.6.15. Dibujo >> Borrar imagen de fondo (Ctrl + x)

Esta opción borrará la imagen de fondo de la ventana fractal. Si se usa el algoritmo aleatorio, se reinicia el dibujo sin el fondo; si se usa elalgoritmodeterminista, el programa reiniciala ventana fractal a la iteración 0 y remueve la imagen de fondo. Si se mantiene presionada la tecla Del, se borrará la imagen fractal, pero no la de fondo.

4.7. El menú Fractales

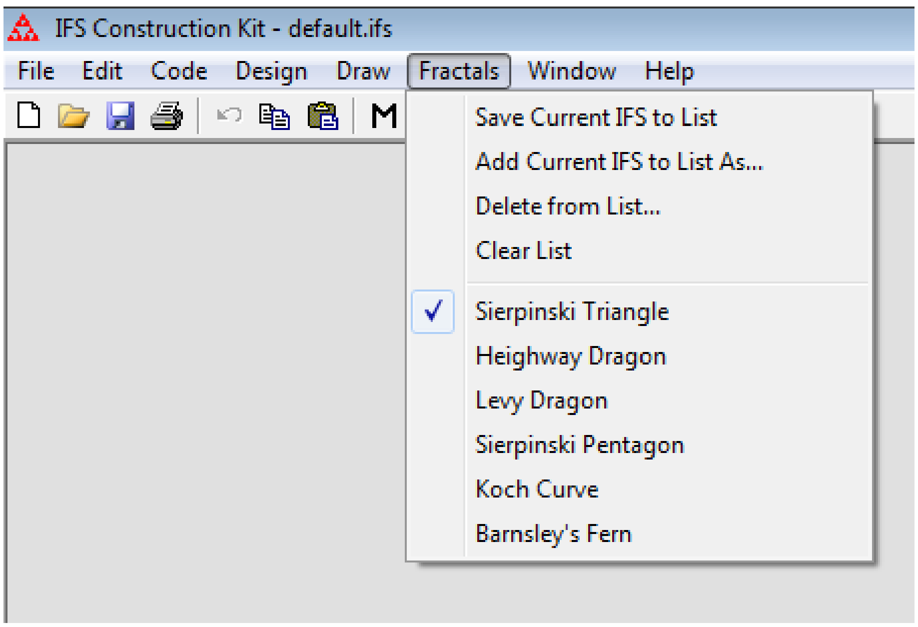


Figura52. Menú Fractales

4.7.1. Fractales >> Guardar actual SFI a la lista

Guarda el SFI en uso dentro de la lista, y estará disponible mientras no se cambie de archivo .ifs. Para agregarlo en el archivo .ifsse selecciona la opción guardar de la barra de herramientas de la ventana principal o en el menú archivo guardar.

4.7.2. Fractales >> Añadir actual SFI a la lista como…

Permite hacer lo mismo que el comando anterior, pero permite renombrar el SFI cuyo nombre aparecerá en el menú fractal en la parte inferior, en donde se muestra una lista de hasta 30 SFI en un mismo archivo .ifs

4.7.3. Fractales >> Borrar desde la lista…

Borra un SFI de la lista

4.7.4. Fractales >> Borrar la lista

Borra totalmente la lista de un SFI

4.8. El menú Ventanas

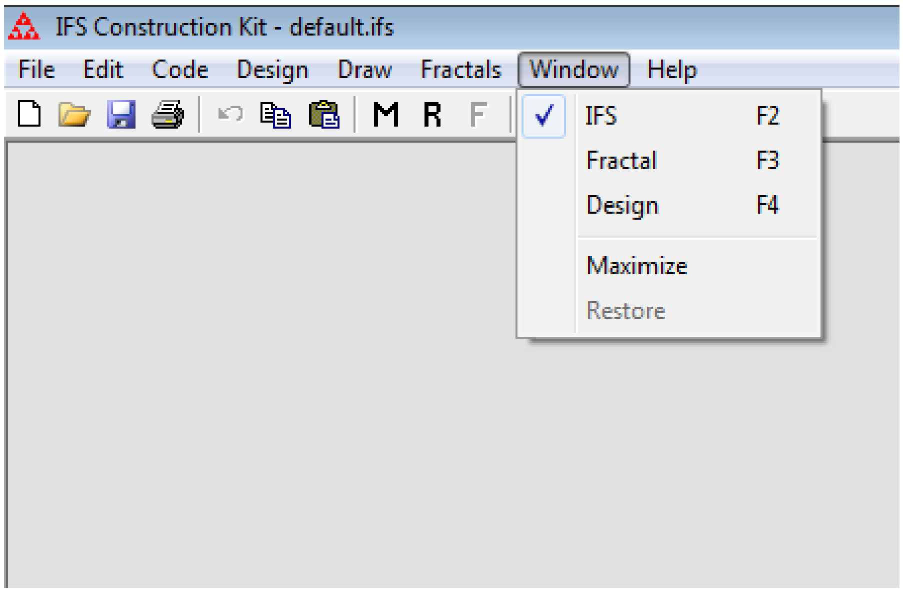


Figura53. Menú ventanas

4.8.1. Ventanas >>SFI (Ctrl + F2)

Al elegir esta opción, se activa la ventana SFI que se describió en las secciones 4.1.1.La ventana SFI y 4.4. El menú código (code)

4.8.2. Ventanas >>Fractal (Ctrl + F3)

Al elegir esta opción, se activa la ventana Fractal que se describió en las secciones 4.1.3. La ventana fractal y 4.6. El menú de diseño (Design)

4.8.3. Ventanas >>Diseño (Ctrl + F4)

Al elegir esta opción, se activa la ventana de diseño que se describió en las secciones 4.1.2 y 4.5

4.8.4. Ventanas >> Maximizar

Al elegir esta opción, se maximiza la ventana que está activa, permitiendo al usuario trabajar en un área con mayor visibilidad de la ventana activa. Está disponible para las tres ventanas: SFI, diseño y fractal.

4.8.5. Ventanas >> Restaurar

Al elegir esta opción, se restaura el tamaño de la ventana activa si se requiere comparar entre ventanas los cambios efectuados.

4.9. El menú de Ayuda

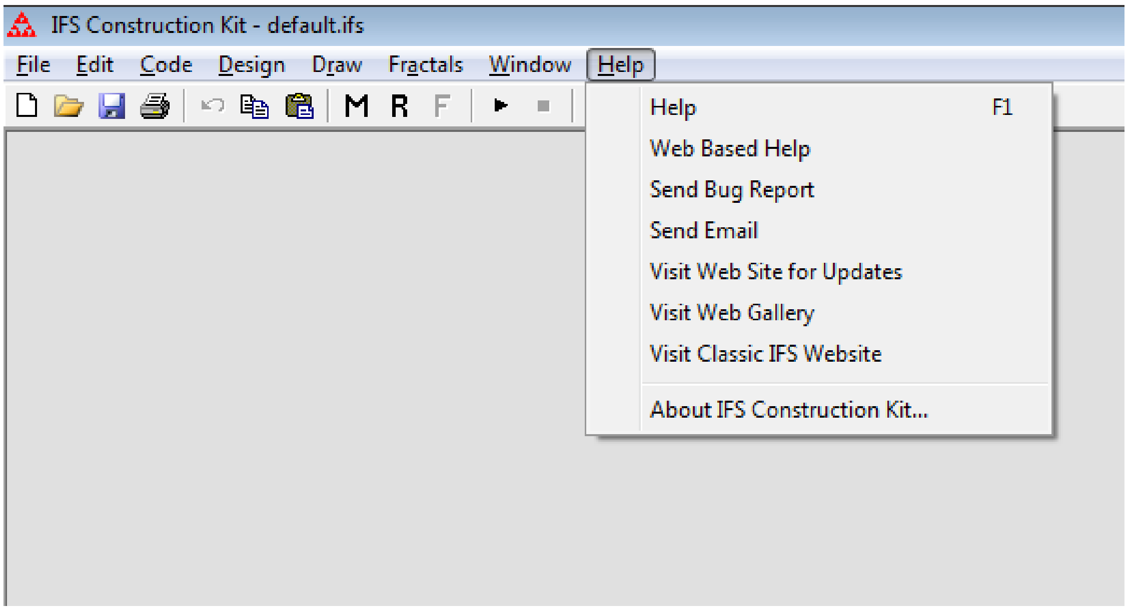


Figura54. Menú ayuda

4.9.1. Ayuda>>Ayuda (F1)

Remite al usuario a un archivo de ayuda clásico del software y es el archivo base para la producción del presente manual

4.9.2. Ayuda >> Ayuda basada en web

Remite al usuario a http://ecademy.agnesscott.edu/~lriddle/ifskit/IFShelp/index.htm que es el sitio web de ayuda del software. Básicamente los contenidos son los mismos que el archivo de ayuda de la sección 4.9.1. Ayuda>>Ayuda (F1)

4.9.3. Ayuda >> Enviar correo electrónico

Permite al usuario enviar un correo electrónico a los autores del software.

4.9.4. Ayuda >> Visitar sitio web para actualizaciones

Remite al usuario ahttp://ecademy.agnesscott.edu/~lriddle/ifskit/index.htm que es el sitio web del software.

4.9.5. Ayuda >> Visitar galería web

Remite al usuario a la dirección web: http://ecademy.agnesscott.edu/~lriddle/ifskit/gallery/gallery.htm que es la galería de fractales SFI, desde donde también pueden descargarse archivos .ifs de los fractales allí mostrados.

4.9.6. Ayuda >>Visitar sitio web de SFI clásicos

Remite a http://ecademy.agnesscott.edu/~lriddle/ifs/ifs.htmque es una página del autor sobre fractales clásicos hechos con SFI

4.9.7. Ayuda >> Acerca de IFS Construction Kit

Muestra una ventana en la que se exhiben los créditos del autor, algunas librerías de código abierto (opensource) usadas en el software, así como la fecha de compilación de la aplicación.

Hasta este momento se ha hecho una descripción pormenorizada del software y su funcionamiento acompañada de ejemplos que aclaran y permiten visualizar los comandos y funciones que se describen.

5. Conclusiones

- Los sistemas de funciones iteradas son una forma de representar y generar una gran variedad de fractales.
- Las transformaciones en el plano cartesiano no son solo un constructo geométrico, sino una aplicación práctica del algebra lineal.
- La representación gráfica de los fractales de forma iterativa ayuda a comprender lo que hace cada transformación con un compacto, en donde el software actúa como un mediador entre la estructura matemática y la representación gráfica.
- Los sistemas de funciones iteradas han sido usados ampliamente en diversos campos de estudio, pero principalmente en la compresión de imágenes digitales (compresión fractal) y en la creación de realidades virtuales (paisajismo artístico para cine y tv).
- Se ha hecho un manual del software IFS Construction Kit, junto con una descripción y relación entre transformaciones afines en el plano cartesiano y su representación matricial, el cual ha de ser útil para una mejor apropiación de conceptos como las transformaciones afines en el plano y su aplicación iterada para obtener representaciones gráficas de fractales.
- Los fractales generados con sistemas de funciones iteradas en $\mathbb{R}^2$, se basan en transformaciones lineales y afines en el plano, cuya representación gráfica precisa de software especializado y enfocado para tal fin.
- El estudio de los sistemas de funciones iteradas, le sirve a docentes en formación y en ejercicio para una mejor comprensión del concepto de sistemas de funciones iteradas, y para ver las transformaciones lineales y afines en el plano cartesiano desde un punto de vista matricial.
- A nivel personal, el estudio de los sistemas de funciones iteradas me ha permitido tener una visión más amplia de las transformaciones lineales y afines en el plano cartesiano, ya que estas están asociadas a matrices cuadradas 2x2, que transforman un compacto de R^2 en otro compacto.
- Los sistemas de funciones iteradas no son las únicas maneras de generar fractales existen otras, pero estas son de vital importancia porque son el sustento matemático de una teoría geométrica que aún se encuentra en su etapa de descubrimiento y formalización.

- Al seleccionar un determinado software, se encuentra que después de escribir algo sobre este, hay otros paquetes enfocados a otras características de los fractales que requiere una gran profundización y elevados conocimientos en matemáticas para nada elementales y no tan al alcance de todos.
- En la elaboración de este trabajo se encuentran dificultades especialmente de acceso a determinada literatura de nivel investigativo

- Como tema de profundización para un estudio posterior es:¿cómo se generan fractales basados en bases numéricas complejas?.

Bibliografía

Adame Sarmiento, E. a. (s.f.). *Sistemas de funciones iteradas y los fractales.* Recuperado el 22 de 10 de 2013, de Fundación Universitaria Konrad Lorenz: http://www.konradlorenz.edu.co/images/stories/suma_digital_matematicas/SFI%20y%20los%20Fractales.pdf

Azofeifa, C. E. (1995). Punto fijo una teoría interdisciplinaria. *Ciencia y Tecnología*, 1-9.

Barnsley, M. (1993). *Fractals everywhere.* San Francisco: Morgan Kaufmann.

Barnsley, M., & Demko, S. (8 de Junio de 1985). *Iterated Function Systems and the Global Construction of Fractals.*Recuperado el 11 de noviembre de 2012, de http://www.jstor.org/stable/2397690?origin=JSTOR-pdf

Barrallo, J. (2005). Arte fractal. Las matemáticas más hermosas. *Revista SIGMA 26*, 99 - 115.

Braña, J. P. (s.f.). *Resumen del curso de “Introducción a la Geometría Fractal”.* Recuperado el 11 de Julio de 2012, de http://www.docentes.unal.edu.co/cibermudezs/docs/CursoGeometriaFractal.pdf

Encyclopedia Britannica Inc. (s.f.). *Encyclopedia britannica*. Recuperado el 20 de abril de 2014, de global.britannica.com

Falconer, K. (2003). *Fractal geometry, Mathematical foundations and aplications.* England: WILEY.

Flake, G. W. (1988). *The computational beauty of nature:computer explorations of fractals, Chaos, complex systems and adaptations.* MIT Press.

Hutchinson, J. E. (1981). Fractals and sel similarity. *Indiana University Mathematics Journal*, 713 - 747.

Mandelbrot, B. (1997). *La geometría fractal de la naturaleza.*Madrid: Tusquets.

Mathematics Department - Yale University. (01 de Junio de 2012). *Benoit B. Mandelbrot*. Recuperado el 01 de Junio de 2012, de http://users.math.yale.edu/mandelbrot/

Muñoz Quevedo, J. M. (1983). *Introducción a la teoría de conjuntos.* Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.

Neira U, C. M. (2003). *Notas de topología.*

Palomino, P., & González, N. (1994). *La geometría fractal en el diseño textil.* Recuperado el 13 de 02 de 2012, de Revistes i congressos UPC: http://upcommons.upc.edu/revistes/bitstream/2099/6383/1/Article06.pdf

Pérez Urquidi, J. M. (29 de Febrero de 2008). *Teoremas de punto fijo y la existencia de equilibrios de Nash en juegos cooperativos.* Recuperado el 20 de Diciembre de 2012, de 146TesisUrquidi.pdf: http://lic.mat.uson.mx/tesis/146TesisUrquidi.pdf

Real Academia Española. (2010). *Diccionario de la lengua española - Vigésimo segunda edición*. Recuperado el 7 de Noviembre de 2012, de http://lema.rae.es/drae/?val=fractal

Rubiano Ortegón, G. N. (2000). *Fractales para profanos.* Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.

Sorando, J. M. (s.f.). *Fractales, geometría del caos.* Recuperado el 11 de Julio de 2012, de http://www.unizar.es/ttm/2009-10/FractalesSorando.pdf