TAREAS QUE POTENCIAN EL TALENTO MATEMÁTICO

Trabajo de grado asociado a Grupo de Investigación (Grupo de Álgebra. Línea: Actividades Matemáticas para el Desarrollo de Procesos Lógicos en la Formación de Niños Talentosos en Matemáticas)

IVONNE DANIELA AMAYA OCHOA

GIOVANNY ANDRÉS ÁVILA BOHÓRQUEZ

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

BOGOTÁ D.C.

2014

TAREAS QUE POTENCIAN EL TALENTO MATEMÁTICO

IVONNE DANIELA AMAYA OCHOA

2008140007

GIOVANNY ANDRÉS ÁVILA BOHÓRQUEZ

2008140009

Trabajo de grado como requisito parcial para optar al título de Licenciado en Matemáticas

Asesora de Trabajo de grado

Lyda Constanza Mora Mendieta

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

BOGOTÁ D.C.

2014

DEDICATORIA

Esta tesis se la dedicamos a Dios, Él supo guiarnos por el buen camino, gracias por darnos fuerzas para seguir adelante y no desfallecer ante los problemas que se nos presentaron, enseñándonos a encarar las adversidades sin perder nunca la esperanza pero sobre todo la dignidad.

A nuestras familias porque por ellas somos lo que somos.

Para nuestras madres Albertina Ochoa Toro y Luz Stella Bohórquez Ramos por, sus consejos, su apoyo, comprensión, amor, colaboración en los momentos difíciles, y por ayudarnos con los recursos necesarios para estudiar. Nos han brindado todo lo que somos como personas, nuestros valores, nuestros principios, nuestro carácter, pero sobre todo le debemos nuestro coraje y perseverancia para conseguir nuestros objetivos.

A nuestra asesora Lyda Constanza Mora Mendieta por la orientación y ayuda que nos brindó para la realización de este trabajo de grado, por su apoyo y amistad que nos permitieron aprender mucho más que lo estudiado en el proyecto.

	FORMATO
	RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE

Código: FOR020GIB	**Versión: 01**
Fecha de Aprobación: 10-10-2012	**Página 1 de 4**

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de Grado
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento	Tareas que potencian el Talento Matemático
Autor(es)	Amaya Ochoa Ivonne Daniela Ávila Bohórquez Giovanny Andrés
Director	Mora Mendieta Lyda Constanza
Publicación	Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional, 2014. 82 p.
Unidad Patrocinante	UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
Palabras Claves	Talento, capacidad matemática.

2. Descripción
El trabajo está dirigido a docentes y estudiantes interesados en potenciar el Talento Matemático en estudiantes mayores de 12 años, específicamente se hallan diversas tareas que aportan al desarrollo del talento en matemáticas, organizadas por capacidades. Se presentan inicialmente aspectos generales sobre el talento en matemáticas y su identificación, y una recopilación de diferentes capacidades asociadas con el talento matemático teniendo en cuenta autores como de Guzmán, Greens, Tourón, entre otros, privilegiando las expuestas por Krutetskii ya que se consideraron más generales e incluyen a las descritas por los demás autores. Las tareas que se exponen fueron tomadas de la página Web del sitio español Estímulo al Talento Matemático [ESTALMAT]. También se presenta(n) solución(es) a las tareas presentadas y su respectiva clasificación según la capacidad que potencia y según el tipo de contexto del problema (real, semireal, y matemáticas puras).

3. Fuentes
Para este trabajo se consultaron 26 fuentes, que abarcan artículos de revistas, libros, tesis de maestría y de doctorado, fuentes de internet y los informes de investigación asociados a este trabajo. Las fuentes que nutren en mayor medida este documento se encuentran listadas a continuación: Orton, A. (1990).¿Por qué algunos alumnos rinden más que otros?.*Didáctica de las matemáticas: cuestiones, teoría y práctica en el aula*(pp.135-158). Barcelona: Ediciones Morata. Da Ponte, P. (2004).Problemas e investigaciones en la actividad matemática de los alumnos (Grupo de investigación DIF). Lisboa: Facultad de Ciencias de la Universidad de Lisboa. De Guzmán, M. (2006). El tratamiento educativo del talento especial en matemáticas. Extraído el 20 de febrero de 2013 del sitio web de la cátedra UCM: http://dspace.utpl.edu.ec/jspui/handle/123456789/8581. Fernández, M. y Pérez, A. (2011) Las Altas Capacidades y el Desarrollo del Talento Matemático. El ProyectoEstalmat-Andalucía.*Unión*,27, pp. 89-113. Freiman, V. (2006). Problems to discover and to boost mathematical talent in early grades: A Challenging Situations Approach. The Montana Mathematics Enthusiast (TMME). Krutetskii, V.A. (1969). An Analysis of the Individual Structure of Mathematical Abilities in School children. En J. Kilpatrick e I. Wirszup (Eds.), *Soviet Studies in the Psychology of Learning and Teaching Mathematics,* Vol. II: The Structure of Mathematical Abilities.(pp.87-88) Estados Unidos: University of Chicago Press.

4. Contenidos
El trabajo está compuesto por tres capítulos: El primero comprende los preliminares relacionados con la justificación del trabajo, los objetivos y la metodología. En el segundo capítulo se presenta el marco de referencia en dos partes principales. En la primer parte se describe el Talento Matemático y su identificación así como las

capacidades relacionadas. En el siguiente apartado del capítulo se desarrolla un cuadro donde se expone las capacidades que fomentan el Talento Matemático de acuerdo a los diferentes autores; en comparación a las determinadas por Krutetskii. Además se presenta una breve descripción de cada una de las características propuestas por Krutestkii.

En el tercer capítulo se presentan las tareas clasificadas según la capacidad asociada y se indica el tipo de tarea según el contexto. Posteriormente se incluye la tarea junto con una(s) posible(s) solución(es) mediante las cuales se puede evidenciar la capacidad en la que se clasificó.

5. Metodología

Se realizó una búsqueda de referencias bibliográficas respecto al Talento Matemático y su tratamiento, con el fin de apropiarse del tema y para decidir y concretar bajo qué orientación se iba a hacer la clasificación de las capacidades, de este modo las determinadas por Krutetskii (1979) fueron el referente más influyente para dicha clasificación.

Para el desarrollo del proyecto se utilizaron diferentes tipos de pruebas y actividades publicadas por el proyecto español ESTALMAT en su sitio Web. Se realizó un cuadro comparativo teniendo como base las capacidades matemáticas descritas por Krutetskii con algunas modificaciones que se consideraron con el fin de presentarlas de una manera más precisa.

Finalmente se desarrollaron de las tareas seleccionadas para establecer cuáles características de talento matemático están relacionadas con estas.

6. Conclusiones

Este trabajo nos permitió reflexionar respecto a situaciones que tal vez se presenten en el aula y no estamos preparados, como por ejemplo cuando en el aula de clase se encuentra un estudiante con capacidades superiores en el área de matemáticas en comparación con sus compañeros, lo ideal sería, que en la enseñanza de las matemáticas, tener en cuenta las características de los estudiantes y si se hallan niños con talento, atender a sus necesidades; consideramos que con este trabajo tendremos herramientas para hacer que sus condiciones de excepcionalidad no pasen desapercibidas durante la escuela. La búsqueda bibliográfica nos permitió fortalecer nuestro conocimiento en tanto a la identificación y fortalecimiento del Talento Matemático; la meta como futuros docentes es ser más que un guía para el estudiante, alguien que sirve de intermediario para que se presente más interés en las matemáticas y afianzar las altas capacidades. Capacidades que pueden trabajarse con tareas diversas las cuales no tiene un algoritmo definido para resolver ampliando la creatividad de los estudiantes y haciendo que ellos planteen diferentes estrategias de solución siendo así una ayuda no solamente para hacer cálculos sino para afrontar retos y superarlos y así divertirse.

Elaborado por:	Amaya Ochoa Ivonne Daniela Ávila Bohórquez Giovanny Andrés
Revisado por:	Mora Mendieta Lyda Constanza

Fecha de elaboración del Resumen:	27	08	2014

TABLA DE CONTENIDO

1. PRELIMINARES

1.1. JUSTIFICACIÓN

Los maestros de matemáticas, siempre se encuentran con alumnos (algunos, pocos o muchos) caracterizados por su claridad o creatividad en la resolución de problemas, su habilidad en la ejercitación de algoritmos, en la facilidad para hacer conexiones, por su gusto al desarrollar las actividades propuestas, en general, destacados por sus destrezas en matemáticas que son las perseguidas en la educación en matemáticas, estos estudiantes, al igual que quienes tienen dificultades, requieren atención en las aulas de clases de matemáticas y en general, del sistema educativo. El fallecido español Miguel de Guzmán (2006) en su trabajo expone:

> Con seguridad se encuentran en una comunidad escolar de una de nuestras grandes ciudades 20 niños entre 12 y 14 años con un talento especial para las matemáticas.
>
> ¿Qué sucederá con ellos si no se les presta la debida atención? Muy probablemente transcurrirán sus años escolares inadvertidos, frustrados, sin fruto para la sociedad, por falta de un tratamiento adecuado; posiblemente van al fracaso y a la inadaptación por aburrimiento.
>
> ¿Qué sucedería si se pudiera atender de algún modo a su orientación? Sin duda una gran satisfacción personal para ellos, un gran beneficio para la sociedad, una gran utilidad para el avance de la ciencia y tecnología. (p. 2)

Desde el ámbito social, la atención de los estudiantes con altas capacidades es un tema de interés al que es importante prestarle atención, puesto que, como plantea Freiman (2006), esta población representa un recurso único intelectual de la humanidad para la sociedad que no debe ser desaprovechado.

Las razones anteriores son muestra de la importancia de centrar la atención en los estudiantes que tienen altas capacidades, específicamente, para nuestro caso, en los estudiantes que son considerados talentosos en matemáticas, puesto que:

- ✓ En específico, en esta área se suelen descuidar los estudiantes con talento bajo la hipótesis de que esta población no necesita atención especial y no necesitan ayuda, además porque son más aquellos que tienen dificultades.

- ✓ Las habilidades matemáticas suelen ser evaluadas en los test de coeficiente intelectual, por tanto es necesario revisar qué es lo que se considera tener un buen rendimiento en matemáticas.

- ✓ Las concepciones sobre la evaluación del Talento Matemático ha evolucionado, produciendo un salto de lo cuantitativo hacia lo cualitativo.

- ✓ El National Council of Teachers of Mathematics en el documento An Agenda for Action (1980) establece que “Los estudiantes más olvidados, en términos de alcanzar su potencial, son los estudiantes superdotados de matemáticas”. (p. 18)

De otro lado, ya de manera particular:

1) Uno de los autores de este documento (Daniela Amaya) fue estudiante del Club de Matemáticas de la Universidad durante tres semestres consecutivos en 2006 y 2007.
2) En el ciclo de profundización del Proyecto Curricular Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional se incluye el desarrollo de prácticas pedagógicas, entre las cuales está la “*práctica según modalidad”*. Uno de los autores del presente documento llevó a cabo dicha práctica en la Institución Educativa General Santander (Soacha, Cundinamarca) con estudiantes identificados como talentosos en matemáticas mediante pruebas diagnósticas por parte de los docentes de la institución. En esta práctica se pudo evidenciar que el trabajo que

usualmente se desarrolla con estos estudiantes en el aula de clases regular no es el adecuado, entre otras razones porque estos niños son frecuentemente desatendidos (¡Ya entienden!). Los profesores en general, no los identifican (muchas veces se confunde al estudiante juicioso con el estudiante talentoso) y cuando lo hacen, se encuentran desprovistos de tareas que puedan proponerles para desarrollar sus capacidades. Cuando el maestro en formación está interesado en generar propuestas educativas para estos estudiantes se encuentra también con inconvenientes, uno de ellos es que, aunque hay actividades referidas al desarrollo del talento, estas no están clasificadas según las capacidades que potencian.

Con base en esta experiencia y en lo anteriormente presentado, surge el interés por desarrollar el trabajo de grado que se presenta, recopilando un conjunto de tareas seleccionadas de trabajos ya publicados relacionados con el tema de Talento Matemático que se constituyan en herramienta para la atención a estudiantes considerados talentosos en matemáticas.

La principal idea de esta monografía es proporcionar un documento con un conjunto de tareas matemáticas y una caracterización de las mismas a partir de las capacidades que potencien en pro de aportar en la atención a estudiantes talentosos en matemáticas en las aulas.

1.2. OBJETIVO GENERAL

Recopilar y clasificar, según la capacidad matemática, un conjunto de tareas dirigidas a la atención del talento en matemáticas.

1.2.1. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

1. Determinar los componentes de la capacidad matemática referidos al talento en matemáticas a partir de la revisión bibliográfica.

2. Asignar capacidades matemáticas asociadas a las diferentes tareas propuestas para el tratamiento del Talento Matemático.

3. Clasificar las tareas según su contexto: Matemáticas puras, semirreal, situaciones de la vida real.

4. Proveer al Departamento de Matemáticas un documento dirigido a los maestros en formación que se constituya en una herramienta que contribuya al desarrollo de sus prácticas pedagógicas asociadas al tratamiento del Talento Matemático o en general, a los profesionales interesados en el tema

1.3. METODOLOGÍA

Este trabajo hace parte de la Línea *Actividades Matemáticas para el Desarrollo de Procesos Lógicos en la Formación de Niños Talentosos en Matemáticas* del *Grupo de Álgebra* de la Universidad Pedagógica Nacional y responde a los intereses de ella. Para su desarrollo se utilizaron, fundamentalmente, tareas propias del proyecto de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales (España) Estímulo al Talento Matemático: "ESTALMAT"[1]:

En principio se hizo una búsqueda de referencias bibliográficas respecto al Talento Matemático y su tratamiento, con el fin de apropiarse del tema así como de decidir y concretar bajo qué orientación se iba a hacer la clasificación de las tareas a seleccionar, de este modo las capacidades determinadas por Krutetskii (1979 citado en Orton, 1990) fueron el referente elegido para dicha clasificación.

Para el desarrollo de la parte central del trabajo se realizó un cuadro comparativo de capacidades descritas por diferentes autores teniendo como base las capacidades matemáticas descritas por Krutetskii; para clarificar la interpretación de cada capacidad se tuvieron en cuenta capacidades o características del Talento Matemático según varios autores, construyendo así una base más sólida para utilizar al momento de la clasificación, después se consultaron diferentes tipos de pruebas y actividades propuestas por ESTALMAT.

Luego, se resolvieron cada una de las tareas entre los autores del trabajo, algunos con la asesora, buscando validar si las características asignadas correspondían o no, lo cual llevó de nuevo a precisar qué se comprendía por cada una de ellas, por tanto se revisó el documento original de Krutetskii para saber qué capacidades como tal fueron propuestas por él, teniendo en cuenta esto, ciertas características fueron ligeramente modificadas de nuevo y se resolvió describirlas de manera más concreta para así aclarar a qué se refiere cada una.

[1]Un espacio para estimular el talento precoz en las matemáticas; ESTALMAT comienza en 1998 en la Comunidad de Madrid, el autor de la idea del proyecto fue el Doctor Miguel de Guzmán Ozámiz y la Real Academia de Ciencias lo lleva adelante con el patrocinio de la Fundación Vodafone España. Actualmente se desarrolla no solo en Madrid sino en Andalucia.

Teniendo en cuenta la solución de tareas se clasificaron según las capacidades matemáticas que se supone, potencian. Lo cual se decidía observando el método utilizado para la solución de la tarea, después de resolver las tareas se hacía una retrospección sobre lo que había implicado su solución, revisando cada una de las capacidades listadas y argumentando a favor o en contra.

Posteriormente teniendo en cuenta el enunciado y la solución de las tareas, se propuso otro tipo de clasificación, según el tipo de contexto o referencia (Skovsmose, 2000).

Finalmente, de acuerdo con cada característica propuesta por Krutetskii, se elaboró una tabla en donde aparece la tarea, su clasificación según el tipo de referencia y de qué documento se tomó; la solución de las tareas se encuentra posteriormente y en ocasiones se presenta más de una solución.

2. MARCO DE REFERENCIA

Este capítulo está estructurado de la siguiente manera:

En la primera parte se explican los fundamentos teóricos y planteamientos de varios autores en relación con el Talento Matemático, se da una revisión general de la relación del Talento Matemático y las capacidades asociadas según los diferentes autores estudiados.

En la siguiente parte del capítulo, teniendo en cuenta la revisión teórica, se presenta un cuadro donde se exponen las capacidades anteriormente mencionadas en comparación con las capacidades determinadas por Krutetskii.

Luego, se hace mención al tipo de tarea según la referencia o contexto de la misma, esto es: realidad, semirrealidad o matemáticas puras.

Teniendo en cuenta que se puede presentar variedad de capacidades o talentos nos centraremos en el Talento en matemáticas.

2.1. TALENTO MATEMÁTICO Y CARACTERÍSTICAS

Uno de los exponentes sobre el talento más reconocidos es Howard Gardner. Los tipos de talentos propuestos por este psicólogo, están fundamentados en su modelo de las Inteligencias Múltiples. Entre estos talentos encontramos el talento matemático el cual se puede describir desde esta teoría.

Gardner (1993, citado en Prieto, M., Ferrándiz, C., Ballester, P., López, O., García, A., González, M., 2002), "en su obra titulada "Mentes Creativas", trata de analizar diferentes perfiles de individuos que se han destacado en alguna de las áreas del saber y cuyos aportes al mundo de la cultura han sido extraordinarias y, por tanto, considerados por los expertos como talentos" (p.66). Entre los diferentes talentos y sus características, según lo investigado por este autor, encontramos el Talento matemático. Para Gardner, las personas con talento matemático muestran desde su infancia una buena inteligencia lógico-matemática consistente en realizar cálculos, cuantificar, considerar proporciones, establecer y comprobar hipótesis y llevar a cabo operaciones matemáticas complejas. Científicos, matemáticos, ingenieros, e informáticos son algunas de las personas que demuestran manejar bien los mecanismos implícitos en esta inteligencia.

Freiman (2006) define al alumno con Talento Matemático como aquel que pregunta espontáneamente cuestiones que van más allá de las tareas matemáticas que se le plantean, busca patrones y relaciones, construye nexos, lazos y estructuras matemáticas, localiza la clave de los problemas, produce ideas originales, valiosas y extensas, mantiene bajo control los problemas y su resolución, presta atención a los detalles, desarrolla estrategias eficiente, cambia fácilmente de una estrategia a otra, de una estructura a otra, piensa de modo crítico y persiste en la consecución de los objetivos que se propone

Por otra parte, Sánchez (2006) define a las personas con Talento Matemático como aquellas que:

> Se caracterizan por disponer de elevados recursos de representación y manipulación de informaciones que se muestran en la modalidad cuantitativa o numérica. Suelen representar cuantitativamente todo tipo de información, bien sea matemática o de otro tipo. Las personas que poseen un buen razonamiento matemático disfrutan especialmente con la magia de los números y sus combinaciones, son personas capaces de encontrar y establecer relaciones entre objetos que otros no suelen encontrar. (p.30).

No obstante estos intentos por caracterizar el talento en matemáticas, ha sido difícil de determinar qué se entiende específica y de manera unánime por talento matemático, a pesar de que hay aspectos en común. Autores como Díaz, Feijoo, Pasarín y Rodríguez (2004) consideran que la forma más sencilla de definir el Talento Matemático es la de considerarlo como la capacidad matemática que se sitúa en un nivel intelectual muy superior.

Según Ingvar Wederlin (1958, citado en Díaz, Feijoo, Pasarín y Rodríguez, 2004, p.84) la capacidad matemática está dada por cuatro aspectos esenciales:

- La habilidad para comprender la naturaleza de los problemas, símbolos, métodos y reglas matemáticas.
- La aptitud para aprenderlas, retenerlas en la memoria y producirlas.
- La facilidad para combinarlas con otros problemas, símbolos, métodos y reglas.
- La competencia para emplearlas en la resolución de tareas matemáticas.

Por su parte Krutetskii (1969.Trad. 2013), en el estudio que hizo en un grupo de niños en donde se encontraban algunos con talento en matemáticas observó sus procesos cognitivos mientras trabajaban con un conjunto de problemas, y puso gran atención a la tendencia de preferir formas de pensamiento visuales-espaciales o una forma lógico-analítica de parte de otros. Encontró tres fases en el desarrollo del pensamiento abreviado (generalización, razonamiento abreviado y estructuras generalizadas abreviadas) y descubrió que los estudiantes talentosos parecen pensar sobre las matemáticas de forma cualitativamente diferente, y poseen algunas destrezas de resolución de problemas de los matemáticos adultos.

Krutetskii (1969, Trad. 2013) enumeró algunas características que suelen darse en los niños más dotados para las matemáticas (o en términos actuales, talentosos en matemáticas), las que están relacionadas con la capacidad para:

- Percibir y emplear información matemática y captar la estructura interna de los problemas.
- Pensar con claridad y economía al resolver un problema.
- Emplear símbolos con facilidad y flexibilidad, así como invertir procesos matemáticos fácilmente.
- Recordar información matemática general, métodos de resolución de problemas y principios de planteamiento.

Krutetskii encontró que algunos estudiantes poseen una mente “analítica”, piensan en términos verbales y lógicos; otros una mente “geométrica” esto es, con un enfoque visual o gráfico y por último algunos estudiantes que poseen una mente “armónica” capaces de combinar características de la mente analítica y la geométrica.

Además Krutetskii concibió los componentes de la capacidad matemática así:

- Capacidad para extraer la estructura formal del contenido de un problema matemático y para operar con ella.
- Capacidad para generalizar a partir de resultados matemáticos.
- Capacidad para operar con símbolos, incluyendo números
- Capacidad para conceptos espaciales, exigidos en ciertas ramas de las matemáticas.
- Capacidad de razonamiento lógico.
- Capacidad para abreviar el proceso de razonamiento.
- Capacidad para ser flexible al pasar de un enfoque a otro
- Capacidad para lograr claridad, simplicidad, economía y racionalidad en las argumentaciones y pruebas matemáticas.
- Una buena memoria para el conocimiento y las ideas matemáticas.

Así mismo, de Guzmán (2006), expone las características señaladas por Carole Greenes (1981, citada en de Guzmán, 2006), para ayudar a la identificación del talento en matemáticas; estas son:

- Capacidad especial para la resolución de problemas.
- Formulación espontánea de problemas
- Flexibilidad en el uso de datos
- Habilidad para la organización de datos
- Riqueza de ideas
- Originalidad de interpretación
- Habilidad para la transferencia de ideas
- Capacidad de generalización

Algunos investigadores resaltan que los niños con talento en matemáticas en edades tempranas centran gran atención al conteo, el estudio de las formas y juegos como puzles, rompecabezas, dibujos y diseños (Castro, E., Maz, A., Benavides, M., y Segovia, I., 2006).

Por otro lado Straker (1998, citado en Castro, E., Maz, A., Benavides, M., y Segovia, I., 2006) propuso algunas características del talento en matemáticas para los niños en los primeros años del colegio:

- Un gusto por los números, incluyendo su uso en cuentas y rimas.
- Una habilidad para argumentar, preguntar y razonar, utilizando conectivos lógicos: si entonces, así, porque, uno u otro, o, etc.
- Modelos o esquemas que revelan el equilibrio o simetría.
- Precisión en la colocación de juguetes; por ejemplo, coches ordenados dispuestos en filas, muñecas ordenadas según el tamaño.
- Uso de criterios sofisticados para separar y clasificar.
- Disfrutar con los rompecabezas y otros juguetes en construcción.

Freiman (2006, citado en Díaz, O., Sánchez, T., Pomar, C. y Fernández, M., 2008, pp.2-3) señala diferentes rasgos del Talento Matemático que se pueden prever o sugerir en un niño significativamente adelantado en esta disciplina, sirviendo estas señales para una apropiada identificación y evaluación del posible Talento Matemático. Se puede identificar previamente como Talento Matemático a aquel niño que:

- Pregunta espontáneamente.
- Busca patrones y relaciones
- Construye nexos, lazos y estructuras matemáticas.
- Localiza la clave de los problemas.
- Produce ideas originales, valiosas y extensas.
- Mantiene bajo control los problemas y su resolución.

- Presta atención a los detalles.
- Desarrolla estrategias eficientes.
- Cambia fácilmente de una estrategia a otra, de una estructura a otra.
- Piensa de modo crítico y persiste en la consecución de los objetivos que se propone.

Las características propuestas por Miller (1990 citado en Ramírez, R., 2012) a tener en cuenta en la búsqueda de talento matemático, resalta la habilidad inusual para entender las ideas matemáticas y razonar matemáticamente entre otras cualidades:

- Entusiasmo inusual y una gran curiosidad sobre la información numérica
- Rapidez para aprender, entender y aplicar las ideas matemáticas
- Habilidad especial para trabajar de forma abstracta y ver relaciones entre objetos matemáticos.
- Gran capacidad para pensar y trabajar con problemas matemáticos de una forma flexible y creativa.
- Especial destreza para transferir los conocimientos adquiridos a nuevas situaciones matemáticas.

Por último, Tourón (1998, citado en Díaz, O., Feijoo,M., Pasarín, J., y Rodríguez, L., 2004) incluye nueve características definitorias del talento matemático.

- Rapidez de aprendizaje, captan fácilmente los conceptos matemáticos y la estructura de los problemas.
- Flexibilidad en los procesos mentales requeridos para la actividad matemática. Muestran gran facilidad para encontrar soluciones alternativas y plantear matemáticamente diversas situaciones.
- Generalización y transferencia. Gran capacidad para transferir los aprendizajes a situaciones o contextos nuevos.
- Capacidad de abstracción. Gran facilidad para el pensamiento abstracto y analítico.

- Reducción del proceso de razonamiento matemático. Simplifican el razonamiento matemático para obtener soluciones racionales y económicas.
- Pensamiento lógico. Gran capacidad para establecer conexiones entre los conceptos matemáticos a partir de la reconstrucción de procesos.
- Memoria matemática para las relaciones, las características, los métodos, los principios y los símbolos matemáticos. No se trata de una simple memorización de datos inconexos, sino de recuperación de ideas, principios u operaciones significativas.

Hasta aquí se han presentado distintos listados de características de Talento Matemático, consideradas por diferentes personajes, así que, buscando relacionar las diferentes características de Talento Matemático, se elaboró el siguiente cuadro, tomando como referencia las características presentadas por Krutetskii relacionándolas con algunas de las características mostradas anteriormente, en algunos casos se encontrarán espacios en blanco ya que en la descripción del autor comparativo no había característica relacionada a la presentada de Krutetskii.

KRUTETSKII (1976)	WERDERLIN (1958)
Capacidad para extraer la estructura formal del contenido de un problema matemático y para operar con ella.	W1. La habilidad para comprender la naturaleza de los problemas, símbolos, métodos y reglas matemáticas
Capacidad para generalizar o hacer procesos inductivos, detectando lo que es de mayor importancia, abstrayendo lo irrelevante e identificando lo que es común.	
Capacidad para operar con símbolos, incluyendo números	W3. La facilidad para combinarlas con otros problemas, símbolos, métodos y reglas.
Una capacidad para abreviar el proceso de razonamiento.	W1. La habilidad para comprender la naturaleza de los problemas, símbolos, métodos y reglas matemáticas
Capacidad para conceptos espaciales, exigidos en ciertas ramas de las matemáticas	
Capacidad de razonamiento lógico deductivo.	W4. La competencia para emplearlas matemáticas en la resolución de tareas matemáticas.
Capacidad para ser flexible al pasar de un enfoque a otro, establecer conexione y reconstruir procesos .	W3. La facilidad para combinarlas con otros problemas, símbolos, métodos y reglas.
Capacidad de inversión de procesos.	
Una buena memoria para el conocimiento ylas ideas matemáticas así como una aptitud de aprenderlas	W2. La aptitud para aprender las matemáticas, retenerlas en la memoria y reproducirlas.

Tabla1Krutetskii VS Wenderlin

KRUTETSKII (1976)	GREENES (1981)
Capacidad para extraer la estructura formal del contenido de un problema matemático y para operar con ella.	G3. Habilidad para organizar datos. Cuando a un estudiante talentoso se le proponen problemas que contienen conjuntos de datos, tienden a organizarlos en listas o tablas, con el fin de descubrir pautas o relaciones y estar seguros de agotar todas las posibilidades
Capacidad para generalizar o hacer procesos inductivos, detectando lo que es de mayor importancia, abstrayendo lo irrelevante e identificando lo que es común.	G5. Habilidad para generalizar. Examinan las cosas a conciencia, observan relaciones entre ellas y son capaces de generalizar estas relaciones
Capacidad para operar con símbolos, incluyendo números	
Una capacidad para abreviar el proceso de razonamiento.	G3. Habilidad para organizar datos. Cuando a un estudiante talentoso se le proponen problemas que contienen conjuntos de datos, tienden a organizarlos en listas o tablas, con el fin de descubrir pautas o relaciones y estar seguros de agotar todas las posibilidades
Capacidad para conceptos espaciales, exigidos en ciertas ramas de las matemáticas	
Capacidad de razonamiento lógico deductivo.	

Capacidad para ser flexible al pasar de un enfoque a otro, establecer conexione y reconstruir procesos.	G1. Formulación espontánea de problemas. Cuando a un alumno se le presenta una situación, genera preguntas sobre ella que dan lugar a nuevos. G2. Flexibilidad en el manejo de datos. Tienden a utilizar gran variedad de estrategias para resolver problemas. Con los problemas que corresponden un determinado tipo de algoritmo no se limitan a utilizarlo sino que utilizan estrategias alternativas que permiten una simplificación del problema. G4. Fluidez de ideas. Pueden pesar ideas divergentes y hacer asociaciones únicas. Esto puede manifestarse en clase por un retraso en la respuesta que no estará causado por la imposibilidad de resolver el problema sino porque el alumno ha detectado ambigüedades en el problema o ve que sus soluciones son múltiples, o quizás está considerando estrategias alternativas para resolverlo. G6. Habilidad para la transferencia de ideas. Son capaces de aplicar información aprendida en un contexto a un problema en un contexto diferente. G7. Originalidad de interpretación. Son capaces de salirse de lo obvio y visualizar cosas desde perspectivas diferentes.
Capacidad de inversión de procesos.	
Una buena memoria para el conocimiento ylas ideas matemáticas así como una aptitud de aprenderlas	

Table 2Krutetskii VS Greenes

KRUTETSKII (1976)	**MILLER (1990)**
Capacidad para extraer la estructura formal del contenido de un problema matemático y para operar con ella.	
Capacidad para generalizar o hacer procesos inductivos, detectando lo que es de mayor importancia, abstrayendo lo irrelevante e identificando lo que es común.	M1. Capacidad de ver los patrones y relaciones matemáticas
Capacidad para operar con símbolos, incluyendo números	
Una capacidad para abreviar el proceso de razonamiento.	M1. Capacidad de ver los patrones y relaciones matemáticas
Capacidad para conceptos espaciales, exigidos en ciertas ramas de las matemáticas	M6. Alta capacidad de pensar y trabajar de forma abstracta.
Capacidad de razonamiento lógico deductivo.	
Capacidad para ser flexible al pasar de un enfoque a otro, establecer conexione y reconstruir procesos.	M4. Capacidad de transferir el aprendizaje a las nuevas situaciones matemáticas que no han sido enseñadas. M5. Capacidad de pensar y trabajar de forma abstracta, en forma flexible, creativa
Capacidad de inversión de procesos.	
Una buena memoria para el conocimiento ylas ideas matemáticas así como una aptitud de aprenderlas	M3. La rapidez en el aprendizaje, la comprensión y aplicación de ideas matemáticas

Table3Krutetskii VS Miller

KRUTETSKII (1976)	TOURÓN (1998)
Capacidad para extraer la estructura formal del contenido de un problema matemático y para operar con ella.	T1. (…) Captan fácilmente los conceptos matemáticos y la estructura de los problemas.
Capacidad para generalizar o hacer procesos inductivos, detectando lo que es de mayor importancia, abstrayendo lo irrelevante e identificando lo que es común.	T3. Generalización y transferencia. Gran facilidad para transferir los aprendizajes a situaciones o contextos nuevos.
Capacidad para operar con símbolos, incluyendo números	T6. Pensamiento lógico. Gran capacidad para el pensamiento lógico utilizando símbolos matemáticos.
Una capacidad para abreviar el proceso de razonamiento.	
Capacidad para conceptos espaciales, exigidos en ciertas ramas de las matemáticas	T4.Capacidad de abstracción. Gran facilidad para el pensamiento abstracto y analítico.
Capacidad de razonamiento lógico deductivo.	T5. Reducción del proceso de razonamiento matemático. Simplifican el razonamiento matemático para obtener soluciones racionales y económicas. T6. Pensamiento lógico. Gran capacidad para el pensamiento lógico utilizando símbolos matemáticos.
Capacidad para ser flexible al pasar de un enfoque a otro, establecer conexione y reconstruir procesos.	T2. Flexibilidad en los procesos mentales requeridos para la actividad matemática. Muestran gran facilidad para encontrar soluciones alternativas y plantear matemáticamente diversas situaciones. T3 Generalización y transferencia. Gran facilidad para

	transferir los aprendizajes a situaciones o contextos nuevos. T9. Memoria matemática para las relaciones, las características, los métodos, los principios y los símbolos matemáticos. No se trata de una simple memorización de datos inconexos, sino de recuperación de ideas, principios u operaciones significativas.
Capacidad de inversión de procesos.	T7. Habilidad para la inversión de procesos mentales en el razonamiento matemático. Gran facilidad para establecer conexiones entre los conceptos matemáticos a partir de la reconstrucción de procesos.
Una buena memoria para el conocimiento ylas ideas matemáticas así como una aptitud de aprenderlas	T1. Rapidez de aprendizaje. (…) T8. Memoria matemática para las relaciones, las características, los métodos, los principios y los símbolos matemáticos. No se trata de una simple memorización de datos inconexos, sino de recuperación de ideas, principios u operaciones significativas

Table4Krutetskii VS Tourón

Con lo anterior puede deducirse que la clasificación puede no ser única dada la estrecha relación que existe entre algunas características, por lo que algunas de estas están incluidas en más de un cuadro; se observa en las tablas comparativas las características propuestas por Krutetskii consideran más aspectos, respecto a las de Wenderlin y Greens, y más sintéticas, respecto a las de Tourón, por estas razones, serán estas características, las de Krutetskii las que se utilizarán para el desarrollo de este trabajo.

Así, con el ánimo de presentar qué se entiende por cada una de las características, se expondrá una breve descripción de cada una ellas.

- **Capacidad para extraer la estructura formal del contenido de un problema matemático y para operar con ella:**

Se entiende como la habilidad de comprender los problemas como tal, manipular y entender los conceptos matemáticos necesarios para establecer relaciones, métodos y reglas que aporten a la solución de dicho problema.

La habilidad para comprender los problemas, símbolos, métodos y reglas matemáticas, para organizar datos, establecer pautas o relaciones.
Capacidad de captar los conceptos matemáticos y la estructura de las tareas.

- **Capacidad para generalizar o hacer procesos inductivos, detectando lo que es de mayor importancia, abstrayendo lo irrelevante e identificando lo que es común:**

Esta capacidad se refiere a la habilidad para establecer relaciones, pautas y patrones, pasar de examinar un objeto o conjunto de objetos restringido a examinar un conjunto más extenso que lo incluya. Para empezar con el estudio de una determinada tarea y así llegar a una generalización es necesario particularizar teniendo en cuenta las características de la situación para así hacer una inducción de leyes o reglas y así sistematizar.
Kaput (1999, citado en Merino, E., Cañadas, M. C. y Molina, M., 2012) define la generalización como:

> Extender deliberadamente el rango de razonamiento o comunicación más allá del caso o casos considerados, identificando explícitamente y exponiendo similitud entre casos, o aumentando el razonamiento o comunicación a un nivel donde el foco no son los casos o situación en sí mismos, sino los patrones, procedimientos, estructuras, y las relaciones a lo largo y entre ellos.(pp.3-4)

- **Capacidad para operar con símbolos, incluyendo números:**

Esta capacidad se refiere a la habilidad para manipular símbolos de tal manera que sea relevante para la comprensión y la solución de la tarea, puesto que también puede referirse a la capacidad de expresar dicha tarea apoyándose en la sintaxis matemática.

Según Tolschinsky (1993 citado por Alcalá, 2002) a la actividad de registrar hechos o mensajes se le llama simbolización notacional la cual permite la comunicación de significados.

- **Una capacidad para abreviar el proceso de razonamiento:**

Se refiere a la capacidad para hacer que el proceso de razonamiento sea más simple, es decir, lograr que al enfrentarse a una situación no conlleve a la realización de muchas tareas sino al contrario poder economizar el procedimiento.

- **Capacidad para conceptos espaciales, exigidos en ciertas ramas de las matemáticas**:

Se refiere a la capacidad de reconocer patrones, imágenes, ubicaciones, movimientos o cualidades espaciales de los objetos, así como codificar y decodificar información de estos en contextos concretos (imágenes) y abstractos (descripciones).

Habilidad de abstracción y análisis de conceptos y objetos matemáticos, específicamente necesarios en la comprensión espacial.

- **Capacidad de razonamiento lógico deductivo:**

Permite resolver problemas lógicos, prever y planear, también contribuye a la comprensión de la ciencia y de las matemáticas. El razonamiento lógico deductivo implica la capacidad para extraer de las premisas la conclusión lógica (Vásquez, 2013).

En otras palabras es el modo de pensamiento por el cual se concluye a partir de proposiciones que se toman como premisas, a una proposición que resulta (la tesis), en virtud de las reglas lógicas.

- **Capacidad para ser flexible al pasar de un enfoque a otro, establecer conexiones y reconstruir procesos:**

Habilidad para combinar las matemáticas con situaciones diversas en contextos nuevos.

Csikszentmihalyi (1998, citado por Sequera, E. 2007) dice que la flexibilidad se opone a la rigidez, a la inmovilidad, a la incapacidad de modificar comportamientos, actitudes y puntos de mira, a la imposibilidad de ofrecer otras alternativas o de variar en la ruta y en el método emprendido. Hay flexibilidad en la riqueza de la argumentación cuando una persona, para defender su posición, no usa un solo argumento sino mucho y variados.

Permite la utilización de diversas estrategias y la búsqueda de diferentes resultados en la resolución de un problema es la desarticulación de esquemas rígidos, que consiste en descomponer el todo en sus partes.

- **Capacidad de inversión de procesos:**

Habilidad para revertir un proceso mental. Permite tener una visión completa de un proceso analizando opuestos complementarios. Implica resolver problemas en cualquier presentación, considerando tanto los elementos como la totalidad. Al completar tablas con faltantes en diversas columnas, al resolver operaciones incompletas o al plantear problemas, el alumno puede desarrollar esta habilidad (González, 2011).

- **Una buena memoria para el conocimiento y las ideas matemáticas; así como aptitud para aprenderlas:**

Capacidad de almacenar conocimientos matemáticos (algoritmos, teoremas, leyes, definiciones) y encontrar el momento adecuado para aplicarlas a la solución de cierta tarea. La importancia de la memoria en las matemáticas radica en cómo y en qué momento aplicar los conocimientos en las estrategias.

2.2. TAREAS Y TIPOS DE TAREAS

Para Christiansen y Walther (1986, citado en Da Ponte, 2004), cuando se está implicado en una actividad, se realiza determinada tarea. La tarea puede ser formulada por el profesor y propuesta al estudiante, puede surgir por iniciativa del propio estudiante y hasta puede ser negociada entre el profesor y el estudiante. De este modo cuando un estudiante está inmerso en la actividad matemática, está realizando cierta tarea. El profesor no dispone de medios para intervenir directamente en la actividad al referirse a algo interno, propio o mental del estudiante pero puede y debe preocuparse de la formulación de las tareas, del modo de proponerlas y de dirigir su realización en el aula.

De este modo se presentan ámbitos diferentes en los cuales se involucra el estudiantes para poder enfrentarse a una tarea, inmerso en un proceso de investigación y explicación, en el cual se distinguen tres tipos de referencia (Skovsmose, 2000), referencia a las matemáticas puras, a una semirrealidad y a situaciones de la vida real que se refieren al contexto de la tarea.

Cuando las preguntas y procesos matemáticos se refieren exclusivamente a las matemáticas se refiere a un contexto en las matemáticas puras, si hay una realidad construida, es decir se manejan conceptos de la realidad pero se modifican o crean situaciones alrededor de esta se hace referencia a una semirrealidad y si se trabajan eventos cotidianos se refieren a situaciones de la vida diaria.

De este modo las tareas que se presentan más adelante se clasificarán también según el tipo de referencia o contexto que se distingue.

3. TAREAS QUE POTENCIAN EL TALENTO MATEMÁTICO

Las tareas que se presentan a continuación fueron tomadas de la página Web de ESTALMAT de las pruebas de ingreso, además de las actividades que se desarrollan en los diferentes programas de ESTALMAT. Se presenta una sigla con el fin de especificar el autor y el documento de donde fue tomada cada tarea.

AUTOR	DISPONIBLE EN	SIGLA
Hernández, J. (s.f.) Para abrir boca. EN: ESTALMAT-Madrid	http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/ehernan/Talento/JoaquinHernandez/01inicio.pdf.	(HERN1)
Hernández, J. (s.f.) Empezando a contar. EN: ESTALMAT-Madrid	http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/ehernan/Talento/JoaquinHernandez/03contando.pdf	(HERN2)
Callejo,M.(s.f) Máximos y mínimos geométricos.EN: ESTALMAT-Madrid.	http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/ehernan/Talento/MLuzCallejo/02maxmingeom.pdf	(CALL)
Callejo,M.(s.f)Fichas, bolas, muebles, números y tableros. EN: ESTALMAT-Madrid.	http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/ehernan/Talento/MLuzCallejo/03fichas.pdf	(CALL2)
Hernández, J. (s.f.) Divisibilidad y restos. EN: ESTALMAT-Madrid.	http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/ehernan/Talento/JoaquinHernandez/06divisibilidad.pdf	(HERN3)
Adrián Rodrigo Escudero, Problemas Taller De Talento Matemático Zaragoza	http://www.platea.pntic.mec.es/csanchez/olimprab.htm.	(ADRIÁN)
María Angeles Arroyo Rallye Mathématique Sans Frontières	http://www.unizar.es/ttm/2008-09/EnunciadosRallyTTM2009.doc	(MARÍA)
María Angeles Arroyo, Rallye Mathématique Sans Frontières	http://www.unizar.es/ttm/2010-11/EnunciadosRallyTTM2011.doc	(MARÍA 2)
María Angeles Arroyo, Rallye Mathématique Sans Frontières	http://www.unizar.es/ttm/2006-07/Rally07.doc	(MARÍA 3)

Primero se presentan las tareas clasificadas según la capacidad matemática asociada y se indica el tipo de tarea según el contexto o tipo de referencia.

Posteriormente se incluye la tarea junto con su(s) posible(s) solución(es) mediante lo cual se puede evidenciar la capacidad en la que se clasificó la tarea.

Algunas veces hay más de una solución, en donde se pueden presentar unas más elaboradas y otras más simples.

3.1. CAPACIDAD PARA ABREVIAR EL PROCESO DE RAZONAMIENTO

Tarea	Tipo de referencia	Autor
1. En un estanque hay cierto número de nenúfares de manera que cada hora un nenúfar se divide en dos. Al cabo de 20 horas el estanque está completamente lleno de nenúfares. ¿Cuándo estuvo lleno justamente por la mitad?	Semirealidad	CALL
2. Un gusano va subiendo por una pared de 2 m de alta, partiendo del suelo de forma que en el día sube 50 cm pero en la noche se resbala y baja 10 cm. Si empieza a subir el lunes a las 6 am. ¿Cuándo llega arriba?	Semirrealidad	HERN1
3. Para ir de la ciudad A a la B se puede ir por seis carreteras distintas y para ir de B a C por cuatro carreteras distintas. ¿Cuántos caminos deferentes hay de A a C ?	Semirrealidad	HERN2
4. ¿Cuántas "palabras" de una, dos o tres letras, podemos construir con las letras A, B y C?	Semirrealidad	HERN2
5. En un equipo de 11 jugadores hay que nombrar capitán y 2do capitán. ¿Cuántas elecciones posibles hay?	Semirrealidad	HERN2
6. Con seis colores distintos, ¿Cuántas banderas de 3 franjas - una de cada color- podemos hacer? (podemos distinguir entre la franja de arriba y la de abajo?	Semirrealidad	HERN2
7. Igual que al anterior, pero en lugar de vista, la palabra basta.	Semirrealidad	HERN2
8. ¿Cuántos tramos de carretera son necesarios para unir siete pueblos? (un tramo de carretera sirve para unir dos pueblos).	Semirrealidad	HERN2
9. Calcula de dos formas diferentes, el número de diagonales de un polígono de 24 lados.	Matemáticas puras	HERN2
10. ¿Cuántos números naturales menores de 10.000 tienen todas sus cifras impares?	Matemáticas puras	HERN2

3.1.2. SOLUCIONES

Tarea 1: En un estanque hay cierto número de nenúfares de manera que cada hora un nenúfar se divide en dos. Al cabo de 20 horas el estanque está completamente lleno de nenúfares. ¿Cuándo estuvo lleno justamente por la mitad?

Solución 1:

Ya que independientemente de la cantidad de nenúfares que hay en principio siempre se dividen en dos es decir manejan un crecimiento exponencial siguiendo la siguiente ecuación:

$n2^x$:Número de nenúfares en el estanque a las x horas (1).

Siendo n el número inicial de nenúfares y x las horas, pero el estanque está lleno a las 20 horas es decir:

$n2^{20}$: Número de nenúfares cuando el estanque está lleno.

$1048576n$: Número de nenúfares cuando el estanque está lleno.

Ahora necesitamos saber el cuándo el estanque está a la mitad

$524288n$: Número de nenúfares cuando el estanque está a la mitad (2)

Igualando la ecuación 1 y 2 con el fin de saber en qué tiempo ocurre la situación:

$$n2^x = 524288n$$

Tenemos que:

$$2^x = 524288$$

Ahora queda despejar x

$$x = \log_2 524288 = 19$$

Así que el estanque estará lleno a la mitad de su capacidad en la hora 19.

Solución 2: Por otro lado se pude hacer una tabla para así encontrar un patrón o método de ejemplificar mejor la situación de la siguiente manera:

Hora	Numero de nenúfares
0	$2^0\, n = n$
1	$2^1\, n$
2	$2^2\, n$
3	$2^3\, n$
…	
$\boldsymbol{x}$	$2^x\, n$

De este modo se tiene que el número de nenúfares en el estanque está dado por la expresión

$$2^x\, n$$

Ahora si el estanque esta justamente por la mitad se tendría lo siguiente

$$\frac{2^x\, n}{2} = 2^{x-1}\, n$$

De donde se pude observar que a las $x - 1$ y como está completamente lleno a las 20 horas entonces a las 19 horas está lleno justamente por la mitad.

Solución 3: Si el número de nenúfares del estanque se divide en dos cada hora, es decir se duplica quiere decir que en la hora anterior debe haber justo la mitad de número de nenúfares a las 20 horas, así a las 19 horas es cuando se da esta situación.

Tarea 2: Un gusano va subiendo por una pared de 2 m de alta, pariendo del suelo de forma que en el día sube 50 cm pero en la noche se resbala y baja 10 cm. Si empieza a subir el lunes a las 6 am. ¿Cuándo llega arriba?

Solución 1: El gusano sube como tal 40 cm al día así que al cuarto día; es decir, el jueves, habrá subido 160 cm en la noche, entonces el viernes en la noche llegaría al recorrer los 40 cm faltantes.

Solución 2: La situación se puede abordar gráficamente y teniendo en cuenta el recorrido que hace el gusano por día.

Solución 3: Realizar una tabla

Día	Recorrido	Avance
Lunes	En el día: +50cm En la noche:-10cm	40cm
Martes	En el día: +50; 40cm+50cm = 90cm En la noche -10m; 90cm-10cm = 80cm	80cm
Miércoles	En el día: +50cm; 80cm+50cm = 130cm En la noche: -10cm; 130cm-10cm = 120cm	120cm
Jueves	En el día:+50cm; 120cm+50cm = 170cm En la noche: -10cm; 170cm-10cm = 160cm	160cm
Viernes	En el día: +50; Faltan 40cm así que al terminar el día llegaría	200cm

En la tabla se puede observar que por día avanza solo 40 cm, así que, si son 200 cm por recorrer al quinto día llegaría

$$\frac{200}{4} = 5$$

Es decir, el viernes.

Tarea 3: Para ir de la ciudad A a la B se puede ir por seis carreteras distintas y para ir de B a C por cuatro carreteras distintas. ¿Cuántos caminos deferentes hay de A a C ?

Solución 1: 24 CAMINOS

6 Caminos de A a B.

4 Caminos de B a C.

Teniendo en cuenta el punto de partida A – B hay 6 caminos al ir por el primero hay 4 posibilidades para ir de B – C así que con cada uno de los 6 caminos hay estas 4 carreteras por tanto hay 24 caminos diferentes para ir de A hasta C.

Tarea 4: ¿Cuántas "palabras" de una, dos o tres letras, podemos construir con las letras A,B y C?

Solución 1: 27 PALABRAS

1 Letras 3 “palabras “A-B- C

2 Letras 9 “palabras “AA-AB-AC-BA-BB-BC-CA-CB-CC

3 Letras 27 “palabras “

1 letra 3 palabras, con 2 letras serían las 3 palabras diferentes cada una haciendo pareja con 3 letras así que son 9 palabras (3×3).

Ahora con 3 letras son las 9 palabras anteriores adicionándoles 3 letras a cada una de la palabra así que serían 27 palabras siguiendo la siguiente fórmula:

Forman 3^n palabras $n \leq 3$ siendo n número de letras.

Tarea 5: En un equipo de 11 jugadores hay que nombrar capitán y 2do. capitán. ¿Cuántas elecciones posibles hay?

Solución 1: 110 Posibles elecciones.

Si los 11 jugadores se nombran del número 1 al 11 de la siguiente manera:

Jugador 1, jugador 2, jugador 3,……, jugador 11, y si se elige el jugador 1 como capitán los otros 10 jugadores pueden ocupar el puesto de 2° capitán haciendo 10 posibles elecciones, con el jugador 1 como capitán , de esta manera cada jugador ocupando el puesto de capitán serian 110 posibles elecciones en total (11× 10).

Ahora de otra manera son 11 jugadores y 2 puestos posibles, capitán y 2° capitán así que 11 permutado[2] 2, que es 110.

$$11\boldsymbol{P}2 = 110$$

Tarea 6: Con seis colores distintos, ¿Cuántas banderas de 3 franjas una de cada color se puede hacer? (Se puede distinguir entre la franja de arriba y la de abajo?

Solución 1:

150 Banderas de 3 franjas

Teniendo en cuenta los siguientes colores:

A B C D E

Si A va arriba en el centro pueden estar 5 colores teniendo en cuenta cada una de las franjas del centro de la siguiente manera:

A arriba B en el centro = 5 posibilidades
A B A
A B C
A B D

[2] Permutación: Todas las posibles combinaciones de un conjunto de cosas.

A B E
A B F

Si dejamos fija la franja de arriba cambiando la del centro hay 5 posibilidades, en cada color (y son 5 colores) así que teniendo al color A en la franja de arriba hay 25 banderas de tres franjas.

Ahora como los 6 colores pueden ir en la franja de arriba y cambiar posiciones análogamente al paso anterior hay 150 banderas diferentes.

Tarea 7: .Igual que al anterior, pero en lugar de vista, la palabra basta.

60 Palabras

La palabra basta tiene dos letras repetidas B-A-S-T-A y las palabras a formar difieren en su colocación pero si a las dos "A" que tiene la palabra se les llama A_1y A_2, B $A_1 A_2$ ST Y B$A_2 A_1$ST son la misma palabra asi que es una permutación sin repetición[3] donde el orden importa.

$$\frac{5!}{2!\,1!\,1!\,1!} = 60$$

2! Las veces que se repite A

1! Las veces que se repiten las letras BST

Tarea 8: ¿Cuántos tramos de carretera son necesarios para unir siete pueblos? (un tramo de carretera sirve para unir dos pueblos).

21 Tramos de carretera 1

Teniendo los siete pueblos: A, B, C, D, E, F, G.

[3] Permutaciones sin repetición: se tienen n numero de cosas que se pueden elegir, y $n_1, n_2 \dots n_k$, el numero de repeticiones de cada elemento,(el orden importa). La fórmula es:

$$\frac{n!}{n_1 \times n_2 \times \dots \times n_k!}$$

Hay siete pueblos y se tiene que unir dos pueblos pero el tramo que une por ejemplo a los pueblos A y B es el mismo que una a B y A así que es una combinatoria[4] donde el orden no importa.

$$7\boldsymbol{C}2 = 21$$

Tarea 9: Calcula de dos formas diferentes, el número de diagonales de un polígono de 24 lados.

Son 252 diagonales.

Solución 1: Primer forma: Como son 24 lados, 24 vértices y la diagonal de un polígono es un segmento que une dos vértices no consecutivos; de esta manera serían las diferentes maneras de unir esos 24 vértices entonces:

$$24\,\boldsymbol{C}\,2 = 276$$

Pero en este caso se tendrían en cuenta los lados cuyos vértices son consecutivos y por tanto hay que quitar esos 24 lados.

$$276 - 24 = 252$$

Solución 2: De otra forma se puede decir que de cada vértice salen $n-3$ diagonales ya que no se cuentan los consecutivos ni el mismo vértice, y como hay 24 vértices el número de diagonales serian $n(n-3)$ pero hay que dividir por dos ya que si no se contaría dos veces cada diagonal por tanto el número de diagonales seria:

$$\frac{n(n-3)}{2} = \frac{24(21)}{2} = \frac{504}{2} = 252$$

Tarea 10: ¿Cuántos números naturales menores de 10.000 tienen todas sus cifras impares?

[4] Combinación con repetición: se tienen n numero de cosas que se pueden elegir donde n es el número de cosas que puedes elegir, y eliges r de ellas(Se puede repetir, el orden no importa). La fórmula es:

$$\frac{(n+r-1)!}{r!\,(n-1)!}$$

Solución 1: 780 NÚMEROS

Los de una cifra: 1, 3, 5, 7, 9 son 5 números

Los de dos cifras: 11, 13, 15, 17, 19 / 31, 33, 35, 37, 39 / 51, 53, 55, 57, 59 / 71, 73, 75, 77, 79 / 91, 93, 95, 97, 99 (los de una cifra combinados) 25 números

Los de tres cifras:

Que empiezan con la cifra 1: 111, 113, 115…	25 Números
Que empiezan con la cifra 3:	25 Números
Que empiezan con la cifra 5:	25 Números
Que empiezan con la cifra 7:	25 Números
Que empiezan con la cifra 9:	25 Números

125 de tres cifras (los de dos cifras combinadas con cada uno)

Los de cuatro cifras

Que empiezan con la cifra 1: 1111, 1113, 1115…	125 Números
Que empiezan con la cifra 3:	125 Números
Que empiezan con la cifra 5:	125 Números
Que empiezan con la cifra 7:	125 Números
Que empiezan con la cifra 9:	125 Números

625 de cuatro cifras (los de dos cifras combinadas con cada uno)

Ahora se suman los números de una cifras, de dos, de tres y de cuatro; se cinco no porque 10.000 es numero par.

$$5 + 25 + 125 + 625 = 780$$

Solución 2: Como 10.000 es un número par no cuenta así que se deben contar los números hasta 9999 que es un número de cuatro cifras, así que si tenemos en cuenta las cifras impares: 1 3 5 7 9 es una .. Así que se tienen en cuenta los elementos y las posibilidades

Es decir:

$5^1 = 5$ Cinco cifras posibles y 1 posición (números de 1 cifras)

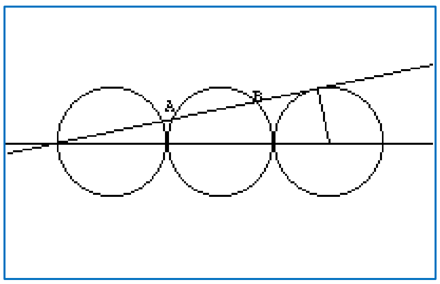
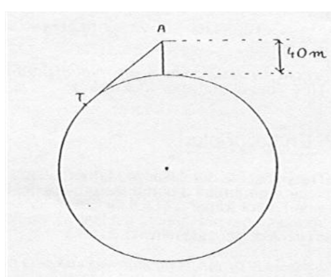
$5^2 = 25$ Cinco cifras posibles y 2 posiciones (números de 2 cifras)

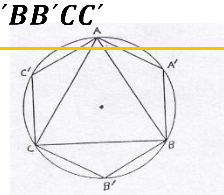
$5^3 = 125$ Cinco cifras posibles y 3 posiciones (números de 3 cifras)

$5^4 = 625$ Cinco cifras posibles y 4 posiciones (números de 4 cifras)

$$5^1 + 5^2 + 5^3 + 5^4 + 5^5 = 5 + 25 + 125 + 625 = 780$$

3.2. CAPACIDAD PARA EXTRAER LA ESTRUCTURA FORMAL DEL CONTENIDO DE UN PROBLEMA MATEMÁTICO Y PARA OPERAR CON ELLA

Tarea	Tipo de referencia	Autor
1. Los tres círculos que aparecen en la figura de la derecha tienen el mismo radio de 5 cm. La recta horizontal pasa por los tres centros y la otra recta que es tangente al tercer círculo, corta al segundo en los puntos A y B. Calcular AB. 	Matemáticas Puras	MARÍA 2
2. Desde el punto más alto A de un faro, situado a 40 metros sobre el nivel del mar, se observa el horizonte. ¿A qué distancia de la punta del faro se encuentra aproximadamente el horizonte? Indicación: Se trata de calcular al distancia AT (siendo T el punto de contacto de una tangente a la Tierra pasando por A). Como sabéis, la Tierra es redonda y la vuelta al mundo es de unos 40000 Km. (En el dibujo de aquí al lado, no se respetan, evidentemente, las proporciones). 	Semirrealidad	MARÍA
3.Consideremos los dos cocientes siguientes: $\boldsymbol{x = \frac{\text{Área del triángulo equilátero } ABC}{\text{Área del hexágono regular } AA'BB'CC'}}$	Matemática pura	MARÍA

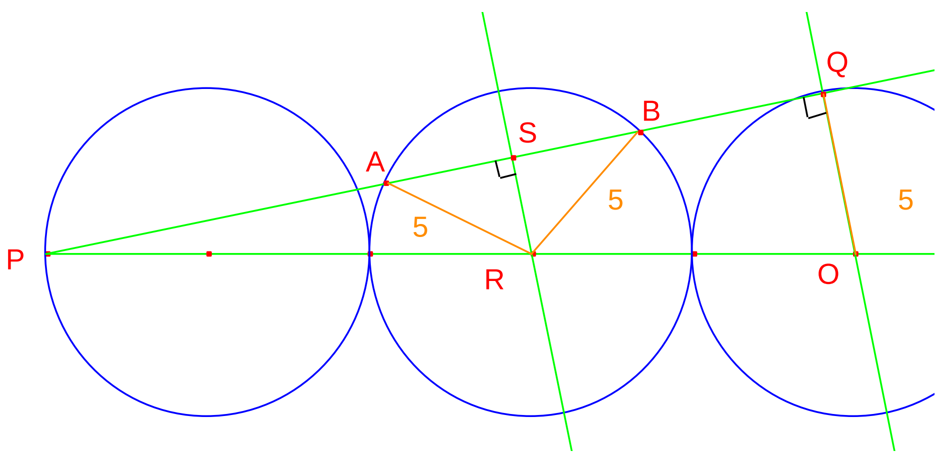


$y = \dfrac{\boldsymbol{Perimetro\ del\ tri\acute{a}ngulo\ ABC}}{\boldsymbol{\acute{A}rea\ del\ hex\acute{a}gono\ \ AA'BB'CC'}}$ Calcula el valor de $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$		
4.Tres adultos y tres niños tienen que atravesar un río en una barca tan pequeña que solo pueden sentarse un adulto o dos niños. ¿Cuál es el número menor de travesías necesarias? (Una ida y vuelta tiene dos travesías)	Semirrealidad	MARÍA

3.2.1. SOLUCIONES

Tarea 1: Los tres círculos que aparecen en la figura de la derecha tienen el mismo radio de 5 cm. La recta horizontal pasa por los tres centros y la otra recta que es tangente al tercer círculo, corta al segundo en los puntos A y B.

Calcular AB.



Solución:

El triángulo OPQ es rectángulo en Q al ser PQ tangente al círculo. Trazamos desde R la recta perpendicular a PQ que corta en S. Como el ángulo PQO es congruente con el ángulo PSR y los triángulos OPQ y RPS comparten el ángulo QPO; Los triángulos OPQ y RPS son semejantes *por el criterio AA.*

Por el teorema de Thales tenemos:

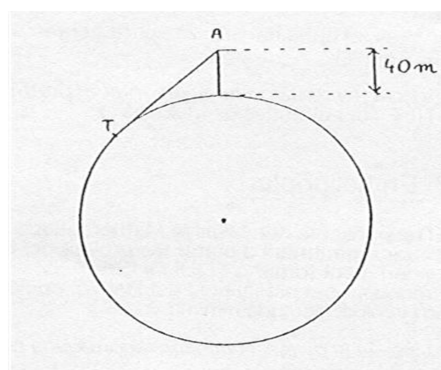
$\frac{PO}{PR} = \frac{5}{SR}$, *Luego:* $\frac{25}{15} = \frac{5}{SR}$ De donde $SR = 3$

En el triángulo ARS la hipotenusa es *5* y SR *3.* Por el teorema de Pitágoras: $AS = 4$

Al ser ABR triángulo isósceles, $AB = 8$

Tarea 2: Desde el punto más alto A de un faro, situado a 40 metros sobre el nivel del mar, se observa el horizonte. ¿A qué distancia de la punta del faro se encuentra aproximadamente el horizonte?

Indicación: Se trata de calcular al distancia AT (siendo T el punto de contacto de una tangente a la Tierra pasando por A). Como sabéis, la Tierra es redonda y la vuelta al mundo es de unos 40000 Km. (En el dibujo de aquí al lado, no se respetan, evidentemente, las proporciones).



Solución:

Llamando x a la distancia desde la punta del faro al horizonte que se quiere calcular, y siendo O el centro de la Tierra, se trata de aplicar el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo OAT.

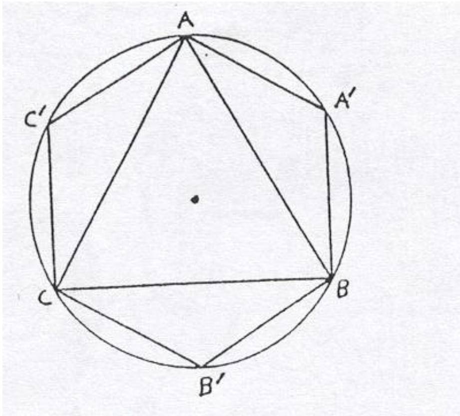
Así se obtiene: $x^2 + R^2 = (0{,}04 + R)^2$ donde R es la longitud del radio de la Tierra. Del enunciado se deduce que $2\pi R = 40.000$ así pues podemos tomar como

$$R = 6366{,}197724\ Km$$

Se tiene la ecuación:

$x^2 = 0{,}08R + 0{,}04^2$, la cual, expresada en km da a x un valor de $22{,}56762\ km$.

Tarea 3: Consideremos los dos cocientes siguientes:



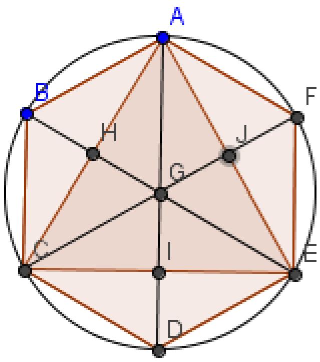
$$x = \frac{\acute{A}rea\ del\ tri\acute{a}ngulo\ equil\acute{a}tero\ ABC}{\acute{A}rea\ del\ hex\acute{a}gono\ regular\ AA'BB'CC'}$$

$$y = \frac{Per\acute{i}metro\ del\ tri\acute{a}ngulo\ ABC}{\acute{A}rea\ del\ hex\acute{a}gono\ \ AA'BB'CC'}$$

Calcula el valor de x e y

Solución:

Trazamos las diagonales del hexágono, las cuales serán a la vez bisectrices del triángulo dado.



El ángulo central del hexágono es 360º ÷ 6 = 60º

Tendremos en cuenta lo siguiente:

Los triángulos ($\Delta ABG, \Delta AGF, \Delta FGE, \Delta EGO, \Delta OGC, \Delta CGB$) formados son isósceles ya que GA y GB son radios de la circunferencia y por tanto son congruentes, ahora utilizando el teorema del triángulo isósceles los ángulos opuestos a estos lados son congruentes, utilizando el Teorema de la suma de los ángulos internos del triángulo es 180º tenemos:

$m\measuredangle A = m\measuredangle B$

$m\measuredangle G = 60°$

$m\measuredangle A + m\measuredangle B + m\measuredangle G = 180°$

$2m\measuredangle A + 60° = 180°$

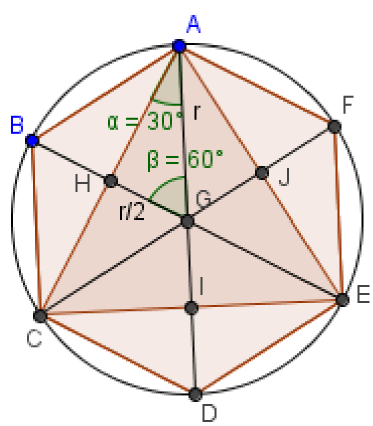
$2m\measuredangle A = 120°$

$m\measuredangle A = 60°$

Como $m\measuredangle A = m\measuredangle B$ entonces $m\measuredangle B = 60°$

Ahora como el triángulo tiene sus ángulos iguales es equilátero.

Trazando las diagonales del hexágono vemos también que el triángulo ΔACE queda dividido en tres triángulos isósceles ($\Delta ACG, \Delta CGE, \Delta EGA$) iguales y el hexágono en seis, como se puede observar en la siguiente ilustración:



Como AB, CG y BC, AG son congruentes y opuestos el cuadrilátero $ABCG$ es un paralelogramo por el Teorema 3 de paralelogramos[5].

[5] Teorema 3.1.1 Todo paralelogramo tiene iguales sus lados opuestos.

Como las diagonales de un paralelogramo se bisecan, GH y HB son congruentes, la distancia de $AG = r$ como AG y BG son radios de la circunferencia son congruentes por tanto $BG = r$, entonces $GH = \frac{r}{2}$

Ahora como las diagonales de un paralelogramo son las bisectrices de los ángulos internos, teniendo en cuenta el $\measuredangle BAG$ la diagonal AC biseca dicho ángulo, entonces la medida de $m\measuredangle HAG = 30°$

Teniendo en cuenta el Teorema de la suma de los ángulos internos de un triángulo se tiene que:

$$m\measuredangle H + m\measuredangle G + m\measuredangle A = 180°$$

$$m\measuredangle H + 60° + 30° = 180°$$

$$m\measuredangle H = 180° - 90°$$

$$m\measuredangle H = 90°$$

Entonces ΔAHG es rectángulo por definición de triangulo rectángulo.

Por el Teorema de Pitágoras $x = \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{4}} = \frac{r}{2}\sqrt{3}$ por lo que la longitud del lado del triángulo ABC es $2x = r\sqrt{3}$ y la longitud del lado del hexágono es r. En consecuencia: $y = \frac{3r\sqrt{3}}{6r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Tarea 4: Tres adultos y tres niños tienen que atravesar un río en una barca tan pequeña que solo pueden sentarse un adulto o dos niños.

¿Cuál es el número menor de travesías necesarias? (Una ida y vuelta tiene dos travesías)

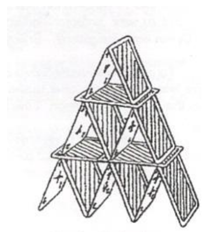
Solución:

Si designamos por O_1 , O_2 y O_3 a los 3 niños y A_1, A_2 y A_3 a los 3 adultos se tiene, por ejemplo, el siguiente esquema:

Orilla 1	Rio	Orilla 2	N de Viaje
$O_3A_1A_2A_3$	O_1O_2		1 (ida)
$O_3A_1A_2A_3$	O_2	O_1	2 (vuelta)
$O_2O_3A_2A_3$	A_1	O_1	3 (ida)
$O_2O_3A_2A_3$	O_1	A_1	4 (vuelta)
$O_3A_2A_3$	O_1O_2	A_1	5 (ida)
$O_3A_2A_3$	O_1	O_2A_1	6 (vuelta)
$O_1O_3A_3$	A_2	O_2A_1	7 (ida)
$O_1O_3A_3$	O_2	A_1A_2	8 (vuelta)
O_3A_3	O_1O_2	A_1A_2	9 (ida)
O_3A_3	O_1	$O_2A_1A_2$	10 (vuelta)
O_1O_3	A_3	$O_2A_1A_2$	11 (ida)
O_1O_3	O_2	$A_1A_2A_3$	12 (vuelta)
O_3	O_1O_2	$A_1A_2A_3$	13 (ida)
O_3	O_1	$O_2A_1A_2A_3$	14 (vuelta)
	O_1O_3	$O_2A_1A_2A_3$	15 (ida)

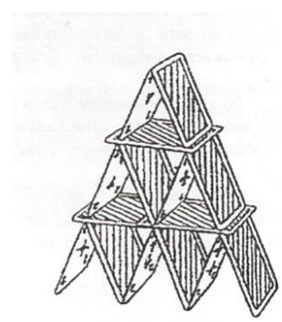
Donde podemos concluir que el menor número de travesías es 15.

3.3. CAPACIDAD PARA GENERALIZAR O HACER PROCESOS INDUCTIVOS, DETECTANDO LO QUE ES DE MAYOR IMPORTANCIA, ABSTRAYENDO LO IRRELEVANTE E IDENTIFICANDO LO QUE ES COMÚN

Tarea	Tipo de referencia	Autor
1. Víctor es un chico paciente y meticuloso. Se dedica a construir castillos de naipes siguiendo el modelo de al lado. Víctor quería construir un gran castillo utilizando todos los naipes pero su castillo se derrumba mucho antes de que esté terminado. No obstante, ha calculado que necesitaría exactamente sus cinco juegos de 52 naipes para realizar su audaz proyecto.  (Castillo de 3 pisos) ¿Cuál es el número de pisos del castillo con el que sueña Víctor?	Semirrealidad	MARÍA 3

3.3.1. SOLUCIONES

Tarea 1: Víctor es un chico paciente y meticuloso. Se dedica a construir castillos de naipes siguiendo el modelo de al lado. Víctor quería construir un gran castillo utilizando todos los naipes pero su castillo se derrumba mucho antes de que esté terminado. No obstante, ha calculado que necesitaría exactamente sus cinco juegos de 52 naipes para realizar su audaz proyecto.



(Castillo de 3 pisos)

¿Cuál es el número de pisos del castillo con el que sueña Víctor?

Solución:

Haciendo una tabla

N° de pisos	Numero de naipes
1	$2 = 2 \times 1$
2	$7 = 2 \times 1 + 2 \times 2 + 1$ $= 2\,(1 + 2) + 1$
3	$15 = (2 \times 1) + (2 \times 2) + (2 \times 3) + 1 + 2$ $= 2\,(1 + 2 + 3) + (1 + 2)$
4	$26 = (2 \times 1) + (2 \times 2) + (2 \times 3) + (2 \times 4) + 1 + 2 + 3$ $= 2\,(1 + 2 + 3 + 4) + (1 + 2 + 3)$
$\boldsymbol{n}$	$2\ \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2}$

Como se observa en la tabla anterior se tiene el número de naipes con n número de pisos siguiendo la expresión:

$$2\ \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = n\ \ n+1\ + \frac{n(n-1)}{2}$$

Operando:

$$\frac{2\ \ n^2+n\ \ + n^2-n}{2} = \frac{2n^2+2n+n^2-n}{2}$$

$$\frac{3n^2-n}{2} = 260$$

$$3n^2 - n - 520 = 0$$

Utilizando fórmula cuadrática

$n = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Donde $a = 3, b = -1$ y $c = -520$

Reemplazando

$$n = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4\ \ 3\ \ (-520)}}{2(3)}$$

$$n = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 6240}}{6}$$

$$n = \frac{1 \pm \sqrt{6241}}{6}$$

$$n = \frac{1 \pm 79}{6}$$

$$n_1 = \frac{1 + 79}{6} = 13.33 \quad n_2 = \frac{1 - 79}{6} = -13$$

$n = 13$, tomando el valor positivo, por tanto el número de pisos del castillo con el que sueña Víctor es 13.

3.4. CAPACIDAD PARA OPERAR CON SÍMBOLOS, INCLUYENDO NÚMEROS

Tarea	Tipo de referencia	Autor
1. Simplifica las expresiones a) $\mathbf{10}! \times \mathbf{11}$, $\boldsymbol{n}! \times (\boldsymbol{n}+\mathbf{1})$. b)Calcula $\frac{\mathbf{100}!}{\mathbf{98}!}$, $\frac{\boldsymbol{n}!}{(\boldsymbol{n}-\mathbf{1})!}$ c) Escribe un argumento que justifique que si *p* es un numero primo ,entonces $(\boldsymbol{p}-\mathbf{1})!$ no es divisible por *p*.	Matemáticas Puras	HERN2
2. Elena tiene una media de 16 puntos sobre 20 a falta de una última nota del curso. Desgraciadamente, acaba de obtener 6 sobre 20 en la última prueba. Su nota media del curso queda finalmente en 15 sobre 20. ¿Cuántas pruebas hizo Elena durante el curso?	Semirrealidad	MARÍA
3. Cuántos números naturales menores de 10.000 tienen números impares?	Matemáticas Puras	HERN2

3.4.1. SOLUCIONES

Tarea 1:

a) Simplifica las expresiones $10! \times 11$, $n! \times (n+1)$.

b) Calcula $\frac{100!}{98!}$, $\frac{n!}{(n-1)!}$.

c) Escribe un argumento que justifique que si *p* es un numero primo, entonces $(p-1)!$ no es divisible por *p*.

a) $11!$.

Utilizando la fórmula factorial

$$11! = 10! \times 11$$

$$n! = n(n-1)(n-2)\dots 1$$

$$n! \times (n+1) = (n+1)n(n-1)(n-2)\dots 1 = (n+1)!$$

b)

$$\frac{100!}{98!} = \frac{100 \times 99!}{98!}$$

Teniendo en cuenta lo anterior

$$\frac{100 \times 99!}{98!} = \frac{100 \times 99 \times 98!}{98!} = 100 \times 99 = 9900$$

$$\frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n \times (n-1)!}{(n-1)!} = n$$

c) Escribe un argumento que justifique que si *p* es un número primo, entonces $(p-1)!$ no es divisible por *p*.

Teniendo en cuenta el Teorema que dice: Si p es primo y $p \mid ab$ entonces $p \mid a$ o $p \mid b$

De este modo se define $p! = p \times (p-1)!$

Se tiene que p es primo y $p \mid p \times (p-1)!$ Entonces $p \mid p$ o $p \mid (p-1)!$

Ahora si p no divide a p entonces $(p, p) = 1$ pero esto es falso ya que al ser p primo es divisible por 1 y por p, por tanto $p \mid p$ de lo que se conclue que $p \nmid (p-1)!$

Tarea 2: Elena tiene una media de 16 puntos sobre 20 a falta de una última nota del curso. Desgraciadamente, acaba de obtener 6 sobre 20 en la última prueba. Su nota media del curso queda finalmente en 15 sobre 20.

¿Cuántas pruebas hizo Elena durante el curso?

Solución:

Elena tiene de media $16/20$ en *n* pruebas. En la prueba $n+1$ obtiene $6/20$. La media del curso es $15/20$ es decir:

$$\frac{n\frac{16}{20}+\frac{6}{20}}{n+1}=\frac{15}{20}$$

De donde $n = 9$. Por tanto el número de pruebas en total es 10.

Tarea 3: Cuántos números naturales menores de 10.000 tienen números impares?

Solución 1:

De una cifra: 1, 3, 5, 7, 9

De dos cifras:

- Que empiezan con la cifra 1: 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19

(Al tener el número 1 se cuentan como números que tienen cifras impares)

10 Números

- Que empiezan con la cifra 2: 21, 23, 25, 27, 29

(Combinado con las cinco cifras impares)

5 Números

- Que empiezan con la cifra 3: 30, 31, 32…

(Al tener el número 3 se cuentan como números que tienen cifras impares)

10 Números

- Que empiezan con la cifra 4: 41, 43, 45, 47, 49

(Combinado con las cinco cifras impares)

5 Números

- Que empiezan con la cifra 5: 50, 51, 52…

(Al tener el número 5 se cuentan como números que tienen cifras impares)

10 Números

- Que empiezan con la cifra 6: 61, 63, 65, 67, 69

(Combinado con las cinco cifras impares)

5 Números

- Que empiezan con la cifra 7: 70, 71, 72…

(Al tener el número 7 se cuentan como números que tienen cifras impares)

10 Números

- Que empiezan con la cifra 8: 81, 83, 85, 87, 89

(Combinado con las cinco cifras impares)

5 Números

- Que empiezan con la cifra 9: 90, 91, 92…

(Al tener el número 9 se cuentan como números que tienen cifras impares)

10 Números

Son 5 cifras impares las cuales general 10 números que contienen alguna cifra impar así que son: $5 \times 10 = 50$

Son 4 cifras pares las cuales cada una genera 4 números que contienen cifras impares así que son: $5 \times 4 = 20$

De dos cifras son 70 números más los de una cifra que son 5 = 75

Ahora los de 3 cifras:

Los que empiezan con el numero 1: 101, 102, 103….199 (al tener el número 1 se cuentan como números que tiene cifras impares) 100 números

Los que empiezan con número impar, es decir 1, 3, 5, 7, 9 al tener el número impar se cuentan como números que tiene cifras impares es decir 100 cada uno, es decir $100 \times 5 = 500$

Ahora los que empiezan con numero par, 2, 4, 6, 8, combinados con los de dos cifras, es decir, $75 \times 4 = 300$

Por tanto de tres cifras hay $300 + 500 = 800$

800 Números de tres cifras, 70 de dos cifras y 5 de una cifra, 875 números hasta 999

Ahora los de 4 cifras:

Los que empiezan con el número 1: 1001, 1002, 1003….1999 (al tener el número 1 se cuentan como números que tiene cifras impares) 1000 números

Los que empiezan con número impar, es decir 1, 3, 5, 7, 9 al tener el número impar se cuentan como números que tiene cifras impares es decir 1000 cada uno, es decir $1000 \times 5 = 5000$

Ahora los que empiezan con número par, 2, 4, 6, 8, combinados con los de tres cifras son $875 \times 4 = 3500$

Por lo tanto de cuatro cifras hay 5000+300=8500.

8500 de cuatro cifras, 800 números de tres cifras, 70 de dos cifras y 5 de una cifra, en total 9375 números hasta 9999, más el 10.000 por lo que tiene al 1 seria en total 9376 números naturales menores de 10.000 tienen números impares.

Haciendo una tabla

Desde-Hasta	Total
1-9	5
1-99	$5 + (10 \times 5) + (4 \times 5) = 75 = 70 + 5$
1-999	$5 + (10 \times 5) + (4 \times 5) + (100 \times 5) + (4 \times 75) = 875$
1-9999	$5 + (10 \times 5) + (4 \times 5) + (100 \times 5) + (4 \times 75) + (1000 \times 5) + (4 \times 875) = 9375$
10.000	$9375 + 1 = 9376$

Solución 2: Si se piensan los números naturales como conjunto, si hallamos la cantidad de números tales que todas sus cifras sean pares, al hallar el complemento tendríamos la respuesta, de este modo

Números con todas sus cifras pares:

De una cifra: 2, 4, 6, 8 4 números

De dos cifras:

Que empiezan con la cifra 2: 20, 22, 24, 26, 28 5 números

Que empiezan con la cifra 4: 40, 42, 44, 46, 48 5 números

Que empiezan con la cifra 6: 60, 62, 64, 66, 68 5 números

Que empiezan con la cifra 8: 80, 82, 84, 86, 88 5 números

Son cuatro cifras que se pueden combinar con las de una cifra más el 0 así que cada uno hace 5 números, $5 \times 4 = 20$

20 números de dos cifras más 4 de una cifra son 24 números hasta 99

De tres cifras:

Que empiezan con la cifra 2: 200, 202, 204, 206, 208, 220, 222, 224, 226, 228, 240, 242, 244, 246, 248, 260, 262, 264, 266, 268, 280, 282, 284, 286, 288 25 números

Son cuatro cifras que se pueden combinar con las de dos cifras así que cada uno hace 25 números, $25 \times 4 = 100$

100 números de tres cifras, 20 números de dos cifras más 4 de una cifra son 124 números hasta 999

De cuatro cifras:

Que empiezan con la cifra 2: 2000, 2002, 2004, 2006, 2008, 2020, 2022, 2024, 2026, 2028, 2040, 2042, 2044… 2200, 2202, 2204, 2206, 2208, 2220, 2222 100 números

Son cuatro cifras que se pueden combinar con las de tres cifras así que cada uno hace 100 números, $100\ \times 4 = 400$

400 números de cuatro, 100 números de 3 cifras, 20 números de dos cifras más 4 de una cifra son 624 números hasta 9999

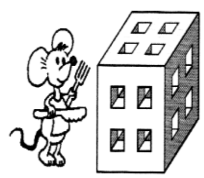
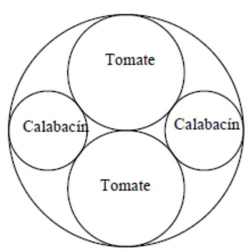
Si llamamos A al conjunto de los números naturales menores que 10.000 que tiene todas sus cifras pares, A^c es el conjunto de números naturales menores que 10.000 que tienen alguna cifra impar.

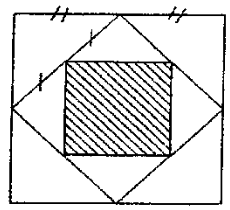
$$A^c + A = 10.000$$

Por lo tanto, $A = 10.000 - A^c = 10.000 - 624 = 9376$

Por lo tanto hay 9376 números menores que 10.000 que tienen cifras impares.

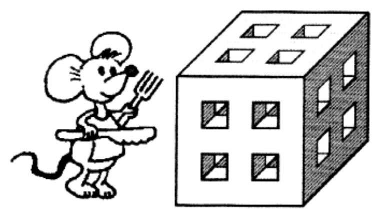
3.5. CAPACIDAD PARA CONCEPTOS ESPACIALES, EXIGIDOS EN CIERTAS RAMAS DE LAS MATEMÁTICAS

Tarea	Tipo de referencia	Autor
1. Un cubo tiene aristas de 5 cm. Se perfora de parte a parte de manera que cada agujero tiene la forma de un paralelepípedo rectángulo cuya sección es un cuadrado de 1 cm de lado. Los doce agujeros están dispuestos “regularmente” como se indica en la figura. Calcula el volumen total del cubo así perforado. 	Semirrealidad	MARÍA 3
2. Para acompañar un medallón de pollo con pasas, el chef Andrés ha preparado un plato de verduras rellenas. En un plato de 10 centímetros de diámetro ha colocado dos rodajas de tomate y dos rodajas de calabacín.  Como se muestra en la figura, los círculos interiores son iguales dos a dos. ¿Cuál es el diámetro T de un tomate y el diámetro C de un calabacín?	Semirrealidad	MARÍA 2

3. Los tres cuadriláteros dibujados en la figura son cuadrados. Designamos $\boldsymbol{a}$ el área del cuadrado pequeño (rayado) y $\boldsymbol{A}$ el área del cuadrado grande. Calcular $\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{A}}$ 	Matemáticas puras	MARIA 3

3.5.1. SOLUCIONES

Tarea 1: Un cubo tiene aristas de 5 cm. Se perfora de parte a parte de manera que cada agujero tiene la forma de un paralelepípedo rectángulo cuya sección es un cuadrado de 1 cm de lado. Los doce agujeros están dispuestos “regularmente” como se indica en la figura.



Calcula el volumen total del cubo así perforado.

Solución 1:

$V_{Paralepipedo} = a \times b \times c$

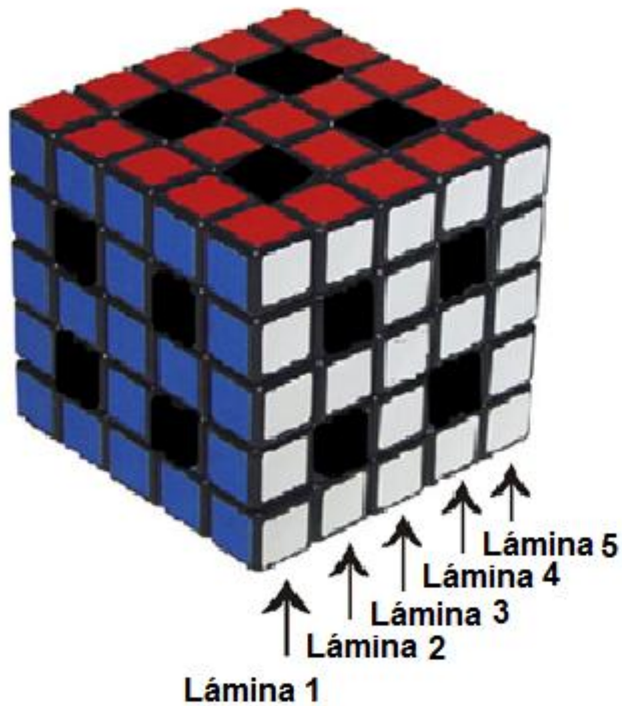
$V_{Cubo} = \ a^3$

Al volumen del cubo le quitamos el volumen de los 12 paralelepípedos y le añadimos dos veces el área de los 8 cubos de 1cm de lado que hemos quitado de más (la hemos quitado 3 veces) debido a las intersecciones de los paralelepípedos tres a tres:

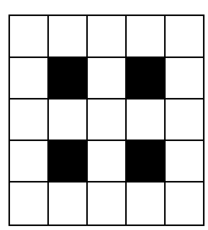
$v = 125 - 60 + 16 = 81\ cm^3$

Solución 2:

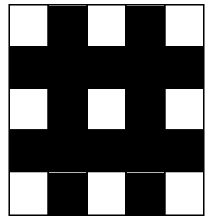
Si se divide o corta el cubo en láminas de volumen $5cm \times 1cm$ quedan 3 láminas de la siguiente manera:



Láminas 1, 3 y 5, quedan de la siguiente manera, quitando cada una $4cm^2$, y un volumen de $12cm^2$ al ser tres laminas



Láminas 2 y 4, quedan de la siguiente manera, quitando cada una 16cm^2, y un volumen de $32cm^2$ al ser dos laminas



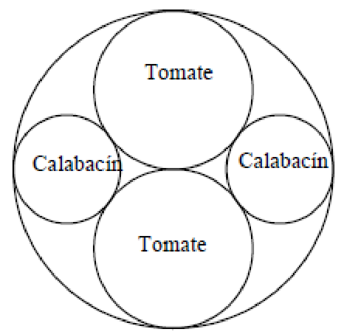
Quitando en total $44cm^2$

Si le quitamos esto al volumen del cubo que es $125cm^2$

$$125cm^2 - 44cm^2 = 81cm^2$$

Es decir el volumen del cubo perforado es de $81cm^2$

Tarea 2: Para acompañar un medallón de pollo con pasas, el chef Andrés ha preparado un plato de verduras rellenas. En un plato de 10 centímetros de diámetro ha colocado dos rodajas de tomate y dos rodajas de calabacín.

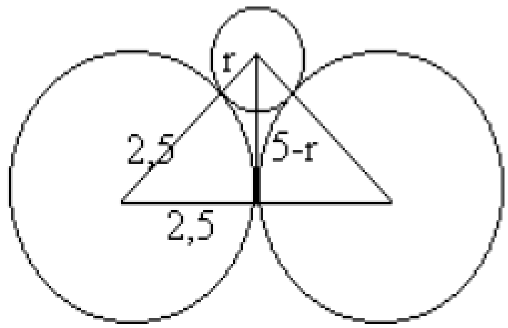


Como se muestra en la figura, los círculos interiores son iguales dos a dos.

¿Cuál es el diámetro T de un tomate y el diámetro C de un calabacín?

Solución:

Los tomates tienen como diámetro $\frac{10}{2} = 5\ cm$. Para obtener el diámetro de los calabacines, llamamos *r* a su radio y obtenemos: Los catetos son: $2{,}5$ y $5 - r$ y la hipotenusa es $r + 2{,}5$. Como se muestra en la figura.



Ahora aplicamos el teorema de Pitágoras

$$2{,}5^2 + \ 5 \ - r \ ^2 = \ 2{,}5 \ + r \ ^2$$

$6{,}25 \ + 25 \ - 10r \ + \ r^2 = 6{,}25 \ + 5r \ + r^2$

$25 \ - 10r \ = 5r$

$25 \ - 10r \ = 5r$

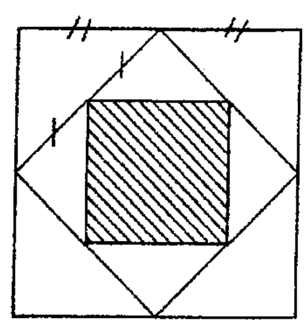
$r \ = \dfrac{5}{3}$

Donde el diámetro del calabacín es $\frac{10}{3}$ cm.

Tarea 3:

Los tres cuadriláteros dibujados en la figura son cuadrados. Designamos a el área del cuadrado pequeño (rayado) y A el área del cuadrado grande.

Calcular $^{a}\ _{A}$



Solución 1:

Si llamamos B al área del cuadrado mediano se tiene que:

$$B = 2A$$

$$A = 2B$$

De donde $A = 4a$por lo que se tiene que:

$$\frac{a}{A} = \frac{a}{4a} = \frac{1}{4}$$

Solución 2:

Llamamos l al lado del cuadrado grande, m al lado del cuadrado mediano y n al lado del cuadrado pequeño. Aplicando el teorema de Pitágoras:

$$\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 = m^2$$

$$m = \sqrt{\frac{2l^2}{4}} = \frac{l\sqrt{2}}{2}$$

$$n = \frac{m\sqrt{2}}{2}$$

$$n = \frac{l\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}$$

Si llamamos a al área del cuadrado pequeño y A al área del cuadrado grande tenemos:

$$\frac{a}{A} = \frac{n^2}{l^2} = \frac{l^2/4}{l^2} = \frac{1}{4}$$

3.6. CAPACIDAD DE RAZONAMIENTO LÓGICO DEDUCTIVO

Tarea	Tipo de referencia	Autor
1. Sean $\boldsymbol{a, b, c}$ tres números reales. Probar que:$\boldsymbol{a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca}$. ¿Cuándo se da la igualdad?	Matemáticas puras	ADRIÁN
2. Demostrar que en un conjunto de $\boldsymbol{n}$ personas hay al menos dos que tienen el mismo número de amigos. La amistad es simétrica (si $\boldsymbol{a}$ es amigo de $\boldsymbol{b}$, entonces $\boldsymbol{b}$ es amigo de $\boldsymbol{a}$).	Matemáticas puras	ADRIÁN
3. Sean tres números reales tales que el polinomio$\boldsymbol{x^3 + ax^2 + bx + c}$ tiene tres raíces reales. Probar que:$\boldsymbol{3b \leq a^2}$¿Cuándo se da la igualdad?	Matemáticas puras	ADRIÁN

3.6.1. SOLUCIONES

Tarea 1: Sean tres números reales a, b, c. Probar que:$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$. ¿Cuándo se da la igualdad?

Solución:

Tenemos que $\frac{a^2+b^2}{2} \geq ab$, ya que esto es equivalente a escribir $a^2 + b^2 - 2ab \geq 0$, y a su vez esto es lo mismo que $a - b\ {}^{2} \geq 0$. Tenemos que la igualdad se da si $a - b = 0 \iff a = b$.

Análogamente tenemos que:

$\frac{b^2+c^2}{2} \geq bc$ Y $\frac{c^2+a^2}{2} \geq ca$

$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} + \frac{b^2 + c^2}{2} + \frac{c^2 + a^2}{2} \geq ab + bc + ca$$

Y la igualdad se da si $a = b,\ b = c,\ c = a \iff a = b = c$.

Tarea 2: Demostrar que en un conjunto de n personas hay al menos dos que tienen el mismo número de amigos. La amistad es simétrica (si a es amigo de b, entonces b es amigo de a).

Solución:

Para la solución de este ejercicio vamos a suponer que existe una persona que no es amigo de nadie.

Según lo anterior entonces cada persona puede tener $0, 1, 2, 3,. . .$o $n-2$ amigos; esto es, $n-1$ posibilidades. Como hay n personas, al menos dos deben tener el mismo número de amigos. “Principio del palomar”[6]

Por otro lado. Vemos que cada persona puede tener $0, 1, 2, 3,. . .$ o $n-1$ amigos; esto es, $n-1$ posibilidades. Como hay n personas, al menos dos deben tener el mismo número de amigos.

Tarea 3: Sean tres números reales tales que el polinomio $x^3 + ax^2 + bx + c$ tiene tres raíces reales. Probar que: $3b \leq a^2$ ¿Cuándo se da la igualdad?

Solución:

Sean $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ las tres raíces reales. Se tiene:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)$$

Y de aquí:

$$a = -\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3$$

$$b = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_1$$

Luego lo que nos piden es equivalente a probar que:

$$3\alpha_1\alpha_2 + 3\alpha_2\alpha_3 + 3\alpha_3\alpha_1 \leq -\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_2 \ ^2$$

Operando:

[6] Principio de Dirichlet o principio de las cajas, establece que si n palomas se distribuyen en m palomares, y si n > m, entonces al menos habrá un palomar con más de una paloma.

$$-\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3\ {}^2 = {\alpha_1}^2 + {\alpha_2}^2 + {\alpha_3}^2 + 2\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_2\alpha_3 + 2\alpha_3\alpha_1$$

Y nos queda:

$$\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_1 \leq {\alpha_1}^2 + {\alpha_2}^2 + {\alpha_3}^2$$

Desigualdad que ya probamos en la tarea 1. La igualdad se da si $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$ (las tres raíces son iguales)

3.7. CAPACIDAD PARA SER FLEXIBLE AL PASAR DE UN ENFOQUE A OTRO, ESTABLECER CONEXIONES Y RECONSTRUIR PROCESOS

Tarea	Tipo de referencia	Autor
1. Un mensaje codificado decía: cada letra es un número y números distintos están asociados a letras también distintas. Intenta decodificar el mensaje $\begin{array}{ccccc} B & L & A & S & E \\ + & L & B & S & A \\ \hline B & A & S & E & S \end{array}$	Matemáticas Puras	HERN1

3.7.1. SOLUCIONES

Tarea1: .Un mensaje codificado decía: cada letra es un número y números distintos están asociados a letras también distintas. Intenta decodificar el mensaje

$$\begin{array}{ccccc} B & L & A & S & E \\ + & L & B & S & A \\ \hline B & A & S & E & S \end{array}$$

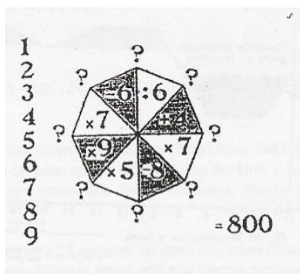
Solución 1:

$$A = 2, B = 5, S = 8, L = 1, E = 6$$

$$\begin{array}{r} 5\,1\,2\,8\,6 \\ +\,1\,5\,8\,2 \\ \hline 5\,2\,8\,6\,8 \end{array}$$

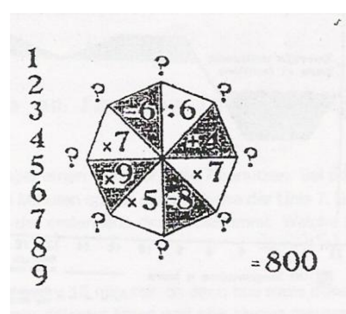
Como tal se deben tener en cuenta las letras repetidas y de ahí partir para poder descifrar el código en este caso la letra S es de gran importancia ya que no puede tener valores entre 1 y 5 así que se puede hacer uso de la prueba y ensayo para llegar a la respuesta correcta.

3.8. CAPACIDAD DE INVERSIÓN DE PROCESOS

Tarea	Tipo de referencia	Autor
1.Ángela ha elegido un número entero comprendido entre 1 y 9. Partiendo de este número ha efectuado sucesivamente y en orden las ocho operaciones de la figura obteniendo como resultado el número 800.  ¿Qué número ha elegido Ángela? ¿Por qué operación ha comenzado? ¿En qué sentido ha dado la vuelta?	Semirrealidad	MARÍA 3

3.8.1. SOLUCIONES

Tarea 1: Ángela ha elegido un número entero comprendido entre 1 y 9. Partiendo de este número ha efectuado sucesivamente y en orden las ocho operaciones de la figura obteniendo como resultado el número 800.



¿Qué número ha elegido Ángela?

¿Por qué operación ha comenzado?

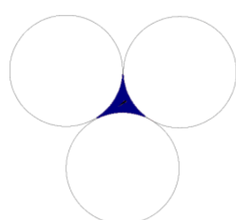
¿En qué sentido ha dado la vuelta?

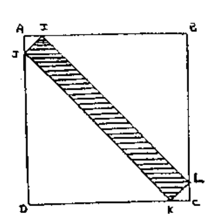
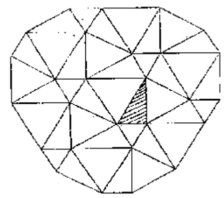
Solución:

Se elige una casilla como inicio y un sentido de giro y se empieza por el final con el dato conocido (800) y se efectúan las operaciones inversas y en el sentido de giro contrario. La única solución posible es:

- ✓ Ángela ha elegido el número 2
- ✓ Comienza por la operación ×9
- ✓ El sentido de giro es el de las agujas del reloj.

3.9. UNA BUENA MEMORIA PARA EL CONOCIMIENTO Y LAS IDEAS MATEMÁTICAS; ASÍ COMO APTITUD PARA APRENDERLAS

Tarea	Tipo de referencia	Autor
1. Calcula de dos formas diferentes, el número de diagonales de un polígono de 24 lados.	Matemáticas Puras	HERN2
2. A los números como el 12321, que se leen lo mismo de derecha a izquierda que de izquierda a derecha, se le llama capicúas. Tengo un amigo que asegura que todos los números capicúas de cuatro cifras son divisibles por 11.¿es cierto?	Matemáticas puras	CALL2
3. Considerad tres círculos tangentes del mismo radio r=3. Calcula el área exacta de la parte del plano comprendida entre estos tres círculos. 	Matemática pura	MARÍA 2
4. Elena tiene una media de 16 puntos sobre 20 a falta de una última nota del curso. Desgraciadamente, acaba de obtener 6 sobre 20 en la última prueba. Su nota media del curso queda finalmente en 15 sobre 20.¿Cuántas pruebas hizo Elena durante el curso?	Semirrealidad	MARÍA
5. ABCD es un cuadrado; AI = AJ = CK = CL = 10 cm. El área de la banda rayada es igual a 1 m^{2}. Calculad el valor exacto de	Matemática pura	MARÍA

lado de este cuadrado. 		
6. La figura adjunta está formada por triángulos de cuatro tipos: Tres triángulos equiláteros (uno pequeño, otro mediano y otro grande) y un triángulo rectángulo (como el que está rayado) que tiene un ángulo de 60º y una hipotenusa de 4 cm.  Calculad el valor exacto del área total de esta figura.	Matemáticas puras	María

3.9.1. SOLUCIONES

Tarea 1: Calcula de dos formas diferentes, el número de diagonales de un polígono de 24 lados.

Solución 2**:** Segunda forma: para trazar la diagonal se tiene en cuenta que los vértices que la conforman no deben ser consecutivos, así que si empezamos del punto A es consecutivo por un lado con B por tanto quedarían 21 posibilidades de unir al vértice A con los demás vértices, ahora el vértice B es consecutivo con A y con C asi que quedarían 21 posibilidades de unir a B con los demás vértices.

Ahora C es consecutivo a B por un lado y a D por el otro pero al tener la diagonal CA sería la misma AC así que serían 20 posibilidades de unir C con los demás vértices.

Análogamente con los demás vértices se tienen en cuenta las repeticiones anteriores haciendo que al pasar de vértice en vértice va disminuyendo el número de diagonales que le corresponden así llegando a la diagonal UW ya que la

UA ya existe. De este modo, se tiene la suma de los primeros 21 números naturales más 21.

Teniendo en cuenta la formula $\frac{n(n+1)}{2}$ que es la suma de los primeros n números naturales se obtiene lo siguiente,

$$\frac{21(21+1)}{2} = 231$$

Y a esto le sumamos 21, teniendo como resultado 252.

Tarea 2: A los números como el 12321,_que se leen lo mismo de derecha a izquierda que de izquierda a derecha ,se le llama capicúas. Tengo un amigo que asegura que todos los números capicúas de cuatro cifras son divisibles por 11. ¿Es cierto?

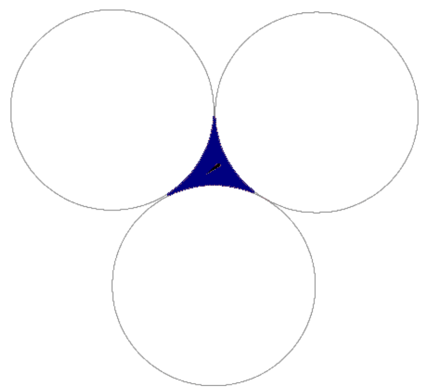
Divisibilidad por 11

La regla de divisibilidad por 11 es la siguiente: $\boldsymbol{N}$ es divisible por 11 si y solo si al sumar los dígitos en posición impar y luego restar los dígitos en posición par, obtenemos un número divisible por 11. Por ejemplo, el número 20 482 es divisible por 11 porque $2-0+4-8+2=0$, y 0 es divisible por 11.

Ahora si tenemos la capicúa $abba$ donde a y b son cifras, aplicamos la regla $a, b \, \epsilon / N a-b+b-a \; = \; 0$ y 0 es divisible por 11.

Así que todos los números capicúas de cuatro cifras son divisibles por 11.

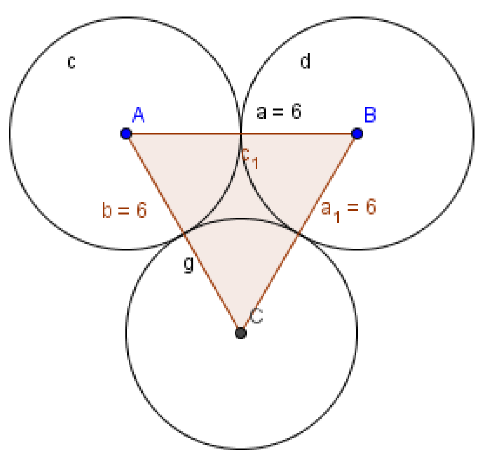
Tarea 3: Considerad tres círculos tangentes del mismo radio $r = 3$.



Calculad el área exacta de la parte del plano comprendida entre estos tres círculos.

Solución:

Uniendo los centros de los tres círculos se obtiene un triángulo equilátero de lado 6cm (cada lado es dos radios) y altura $3\sqrt{3}$ cm (Teorema Pitágoras)



Ahora El área de la región sombreada en azul será la diferencia entre el área del triángulo delimitado por las rectas que unen los centros de las tres circunferencias y el área de los sectores de las circunferencias que quedan dentro de dicho triángulo.

En el interior del triángulo hay tres sectores de 60º (triángulo equilátero) que juntos dan un área igual a la mitad del círculo. Por tanto:

$$A = \frac{18\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi 9}{2} = 9\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right)\ cm^2$$

Tarea 4: Elena tiene una media de 16 puntos sobre 20 a falta de una última nota del curso. Desgraciadamente, acaba de obtener 6 sobre 20 en la última prueba. Su nota media del curso queda finalmente en 15 sobre 20.

¿Cuántas pruebas hizo Elena durante el curso?

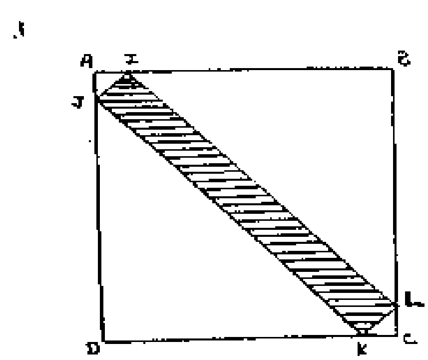
Solución:

Tiene de media $\frac{16}{20}$ en n pruebas. En la prueba $n+1$ obtiene $\frac{6}{20}$. La media del curso es $\frac{15}{20}$ es decir:

$$\frac{n\frac{16}{20} + \frac{6}{20}}{n+1} = \frac{15}{20}$$

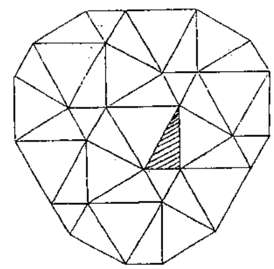
De donde $n = 9$. Por tanto el número de pruebas en total es 10.

Tarea 5: $ABCD$ es un cuadrado; $AI = AJ = CK = CL = 10\,cm$. El área de la banda rayada es igual a $1\,m^2$. Calcula el valor exacto de lado de este cuadrado.



Solución: Por el teorema de Pitágoras obtenemos la longitud $IJ = KL = 0{,}1\sqrt{2}$. Como conocemos el área de la banda sombreada, se obtiene que esta sea de longitud $5\sqrt{2}$. Aplicando otra vez el teorema de Pitágoras se obtiene $DI = 5$, por lo que la longitud del cuadrado es $5{,}1\ m$.

Tarea 5: La figura adjunta está formada por triángulos de cuatro tipos: Tres triángulos equiláteros (uno pequeño, otro mediano y otro grande) y un triángulo rectángulo (como el que está rayado) que tiene un ángulo de 60º y una hipotenusa de 4 cm.



Calculad el valor exacto del área total de esta figura.

Solución:

Aplicando las definiciones de razones trigonométricas se obtiene que

$$sen\ 30 = \frac{x}{4}$$

$$sen\ 30 \times 4 = x$$

$$x = 2$$

Donde tenemos que el triángulo rectángulo rayado tiene 2 cm de base. Aplicando la misma función trigonométrica pero esta vez utilizando como valor del ángulo 60º obtenemos que el valor de la altura es $2\sqrt{3}cm$.

Conociendo la altura de un triángulo equilátero se puede calcular la longitud de su lado: $l = \frac{2\sqrt{3}}{3}h$. Teniendo en cuenta que la altura del triángulo grande es el cateto vertical del triángulo rectángulo rayado, se obtiene que el triángulo grande tiene una longitud de lado de $4\ cm$. Además, el lado del triángulo pequeño coincide con el cateta horizontal del triángulo rectángulo rayado que valía $2\ cm$. Finalmente, el triángulo mediano tiene por lado el cateto vertical del triángulo rectángulo rayado que vale $2\sqrt{3}$. Por tanto, cada uno de los tres triángulos equiláteros: grande, mediano y pequeño tienen de longitudes de sus lados 2, $2\sqrt{3}$ y $4\ cm$.

Para calcular las áreas aplicamos que en un triángulo rectángulo, conocido el lado, el área es: $\frac{l^2\sqrt{3}}{4}$. Así, las áreas respectivas son: $\sqrt{3}, 3\sqrt{3}, y\ 4\sqrt{3}$.

Por otro lado, el área del triángulo rectángulo es $2\sqrt{3}$..

Teniendo en cuenta que hay 6 triángulos equiláteros pequeños, 6 medianos y 7 grandes y 18 triángulos rectángulos, se obtiene un área total de la figura de 88 $\sqrt{3}$ cm^2 $(6\sqrt{3} + 18\sqrt{3} + 28\sqrt{3} + 18.2\sqrt{3})$.

Una vez hecho lo anterior se tiene en cuenta las relaciones que pueden apreciarse entre las tareas que desarrollan una misma capacidad:

- **Una capacidad para abreviar el proceso de razonamiento:**

Son tareas en las cuales no se requiere un procedimiento extenso u operar teniendo en cuenta varios símbolos, son simples y se evidencia el uso de conteo y probabilidad (permutación y combinación).

- **Capacidad para extraer la estructura formal del contenido de un problema matemático y para operar con ella:**

Son tareas en las cuales se requiere justificar cada paso, aparte de tener un buen conocimiento de los contenidos matemáticos que se pueden involucrar en el desarrollo de dicha tareas, por ejemplo el uso de teoremas, definiciones y axiomas

- **Capacidad para generalizar o hacer procesos inductivos, detectando lo que es de mayor importancia, abstrayendo lo irrelevante e identificando lo que es común:**

A pesar de tener una sola tarea asociada a esta capacidad se puede decir que al generalizar lo que se evidencia en la tarea es la búsqueda de patrones, que se da un conjunto en el cual la idea es llegar a particularizar teniendo en cuenta características de la situación.

- **Capacidad para operar con símbolos, incluyendo números:**

Son tareas en las cuales utilizar los diferentes símbolos es lo más importante, es decir no hay necesidad de hacer un estudio exhaustivo de la situación sino manipular o manejar los símbolos dados para llegar a la respuesta.

- **Capacidad para conceptos espaciales, exigidos en ciertas ramas de las matemáticas**:

Tareas en las cuales hay que reconocer imágenes y encontrar patrones mediante la visualización cuando están dentro de un contenido concreto, es decir imágenes y poder recopilar información cuando es de tipo abstracto es decir, descripciones.

- **Capacidad de razonamiento lógico deductivo:**

Son tareas en las cuales se utilizan proposiciones las cuales se convierten en premisas para dar solución a dicha tarea, se pide demostrar de manera formal y el contexto en el que se desarrollan son las matemáticas puras.

- **Una buena memoria para el conocimiento y las ideas matemáticas; así como aptitud para aprenderlas:**

Se hace uso de conocimientos matemáticos específicos como algoritmos, teoremas, definiciones y del uso adecuado de estos.

CONCLUSIONES

Este trabajo nos permitió reflexionar respecto a situaciones que tal vez se presenten en el aula y no estamos preparados, como por ejemplo cuando en el aula de clase se encuentra un estudiante con capacidades superiores en el área de matemáticas en comparación con sus compañeros, lo ideal sería, que en la enseñanza de las matemáticas, tener en cuenta las características de los estudiantes y si se hallan niños con talento atender a sus necesidades; consideramos que con este trabajo tendremos herramientas para hacer que sus condiciones de excepcionalidad no pasen desapercibidas durante la escuela. La búsqueda bibliográfica nos permitió fortalecer nuestro conocimiento en tanto a la identificación y fortalecimiento del Talento Matemático; la meta como futuros docentes es ser más que un guía para el estudiante, alguien que sirve de intermediario para que se presente más interés en las matemáticas y afianzar las altas capacidades. Capacidades que pueden trabajarse con tareas diversas las cuales no tiene un algoritmo definido para resolver ampliando la creatividad de los estudiantes y haciendo que ellos planteen diferentes estrategias de solución siendo así una ayuda no solamente para hacer cálculos sino para afrontar retos y superarlos y así divertirse.

Por tanto es importante el tratamiento y estudio del diagnóstico de niños talentosos en matemáticas, este es un tema de suprema atención en nuestro medio y sobre todo, de atención en los programas de formación de profesores, aún más cuando actualmente se habla de diversidad. Los estudiantes que tienen talento en matemáticas requieren oportunidades diferentes para resolver sus necesidades, necesitarían desarrollar al máximo sus habilidades, de modo que puedan realizar actividades de aprendizaje con nivel y ritmo adecuados y para ello en principio es necesario identificarlos.

Ahora, cuando el maestro en formación está interesado en generar propuestas educativas para estos estudiantes se encuentra también con inconvenientes, uno de ellos es que, aunque hay actividades referidas al desarrollo del talento, estas no están clasificadas según las capacidades que potencian.

Si bien es cierto que hay tareas que no requieren conocimiento matemático especializado, en particular las que potencian la capacidad para extraer la estructura formal del contenido de un problema matemático y para operar con ella al momento de dar solución es necesario tener diferentes conocimientos, algunos son: criterios de congruencia y semejanza de triángulos, el Teorema de Thales, Teoremas de paralelogramo y el Teorema de Pitágoras.

Las capacidades de abreviar el proceso de razonamiento y de generalizar están relacionadas a una buena memoria para el conocimiento y las ideas matemáticas ya que se utilizan diferentes conocimientos matemáticos y se refleja la aptitud tanto de aprenderlos como de aplicarlos correctamente.

Teniendo en cuenta el contexto de las tareas se puede observar que la mayoría trabaja medios semireales o de matemáticas puras, siendo estos una herramienta para despertar interés y creatividad en los estudiantes con Talento Matemático.

El tipo de tareas es parte fundamental del fortalecimiento del talento en matemáticas ya que con estas se espera potenciar bien sea una capacidad en específico o varias al tiempo, teniendo en cuenta que estas tareas no son de única solución sino que se pueden presentar varios puntos de vista y por tanto diversas soluciones. Por consiguiente es necesario clasificar estas tareas para tener claro qué capacidad se potenciarán y tener claro qué tarea es más adecuada en un caso en específico pues que hay una estrecha relación entre algunas capacidades se convierten en un instrumento eficaz para el tratamiento del Talento Matemático.

El trabajo presentado es un instrumento de apoyo a los docentes en formación en la realización de sus prácticas educativas puesto que muestra no solamente tareas sino especifica las capacidades que potencian.

Una cuestión que queda abierta es la clasificación de tareas para el estímulo del talento en matemáticas según edades.

BIBLIOGRAFÍA

Alcalá, M. (2002).La matemática interpretada como lenguaje. *La construcción del lenguaje Matemático* (pp.19-28). España: Graó.

Apóstol, T. (1984). *Introducción a la teoría analítica de números.* España: Editorial Reverté.

Orton, A. (1990).¿Por qué algunos alumnos rinden más que otros?.*Didáctica de las matemáticas: cuestiones, teoría y práctica en el aula* (pp.135-158). Barcelona: Ediciones Morata.

Benavides, M. y Maz-Machado, A (2012, Octubre). *¿Qué deben conocer los profesores y padres sobre el talento matemático?* Trabajo presentado en el IX congreso iberoamericano. Superdotación Talento y Creatividad, Buenos Aires, Argentina

Da Ponte, P. (2004). Problemas e investigaciones en la actividad matemática de los alumnos (Grupo de investigación DIF). Lisboa: Facultad de Ciencias de la Universidad de Lisboa.

De Guzmán, M. (2006). El tratamiento educativo del talento especial en matemáticas. Extraído el 20 de febrero de 2013 del sitio web de la cátedra UCM: http://dspace.utpl.edu.ec/jspui/handle/123456789/8581.

De Zubiria, J. (2002).La educación y el desarrollo intelectual.*Teorías contemporáneas de la inteligencia y la excepcionalidad.*(pp. 125-160) Bogotá: Cooperativa Editorial magisterio

Díaz, O., Feijoo, M., Pasarín, J., y Rodríguez, L. (2004). Evaluación del Talento Matemático en educación secundaria. *Faisca*, *11,pp*. 83-11.

Díaz, O., Sánchez, T., Pomar, C. y Fernández, M. (2008). Talentos matemáticos: Análisis de una muestra. *Faisca*, *15*, pp. 30-39.

Fernández, M. y Pérez, A. (2011) Las Altas Capacidades y el Desarrollo del Talento Matemático. El ProyectoEstalmat-Andalucía.*Unión*,27, pp. 89-113.

Freiman, V. (2006). Problems to discover and to boost mathematical talent in early grades: A Challenging Situations Approach. The Montana Mathematics Enthusiast (TMME).

Espinoza, J. (2011).*Invención de problemas aritméticos por estudiantes con talento matemático: Un estudio exploratorio.* Tesis Doctoral para optar por el título de Masteren didáctica de las matemáticas, Facultad de ciencias de la educación, Universidad de Granada, Granada.

Espinoza, J., Lupiañez, J. (2013).*La Invención de Problemas en el estudio del Talento Matemático.* Trabajo presentado en el IV Encuentro de enseñanza de la matemática UNED 2013.

González, E. (2011).*Experiencia Formativa: Estrategias para favorecer el pensamiento matematico*. Recuperado el 20 de marzo de 2014 del Sitio web del Instituto Consorcio Clavijero de la Universidad Pedagogica Veracruzana: http://upvv.clavijero.edu.mx/cursos/estrategias_pensamiento_matematico/programa/presentacion.html.

Greens, C. (1981).Identifying the Gifted Student in Mathematics. *Arithmetics Teachers* (pp. 14-17).

Jiménez, W. y Rojas, S.(2010*).Características de talento matemático asociadas a la visualización en contextos algebraicos,* Tesis de Maestría.Facultad de ciencia y tecnología, Universidad Pedagógica Nacional, BogotáD.C.

Krutetskii, V.A. (1969). An Analysis of the Individual Structure of Mathematical Abilities in School children. En J. Kilpatrick e I. Wirszup (Eds.), *Soviet Studies in the Psychology of Learning and Teaching Mathematics,* Vol. II: The Structure of Mathematical Abilities.(pp.87-88)Estados Unidos: University of Chicago Press.

Ministerio de Educación Nacional (2006). *Orientaciones para la atención educativa a estudiantes con capacidades o talentos excepcionales*. Bogotá D.C.

Merino, E., Cañadas, M. C. y Molina, M. (2012). *Estrategias y representaciones usadas por un grupo de alumnos de quinto de educación primaria en una tarea de generalización.* Trabajo presentado en el grupo de Pensamiento Numérico y Algebraico del XVI Simposio de la SEIEM, Jaén, España.

National Council of Teachers of Mathematics. (1980). An Agenda for Action: Recommendations for School Mathematics of the 1980s. Reston, VA: El autor.

Prieto, M., Ferrándiz, C., Ballester, P., López, O., García, A., González, Mª Elena. (2002).Perfiles de alumnos con talentos específicos. *Educar en el 2000*, pp.66-71

Ramírez, R. (2012). Habilidades de visualización de los alumnos con talento matemático, Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada, Granada.

Sánchez, C. (2006). *Configuración cognitivo-emocional en alumnos de altas capacidades*. Tesis Doctoral, Universidad de Murcia, Murcia.

Sequera, E. (2007). *Creatividad y desarrollo profesional docente en matemáticas para la educación docente.* Tesis Doctoral, Departamento de Didáctica de las ciencias experimentales y de las matemáticas, Universidad de Barcelona, Barcelona.

Skovsmose, O. (2000). Escenarios de Investigación. *EMA,1*,pp. 3-26.

Vásquez, M. (2013). *Identificación de Talento Matemático en niños y niñas de sexto y séptimo año de educación básica en edades de 10 a 12 años de edad en una escuela pública del sector urbano de la ciudad de Latacunga durante el año lectivo 2012-2013*. Tesis de Pregrado, Universidad técnica particular de Loja, Loja.

Valadez, M., Betancourt J., Zavala M. (2006) Talento matemático: Diagnóstico e intervención. En Castro, E., Maz, A., Benavides, M., y Segovia, I. (Comp.) *Alumnos superdotados y talentosos. Identificación, evaluación e* *intervención. Una perspectiva para docentes*.(pp.453-474) México: Manual Moderno.