PENSAMIENTO ALEATORIO DE ESTUDIANTES DE PRIMEROS SEMESTRES DE LA LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS SOBRE NOCIONES BÁSICAS DE PROBABILIDAD

LUDY ROCÍO BARRERA VARGAS
JERSSON IVÁN MORENO PARRA

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ D.C.
2014

PENSAMIENTO ALEATORIO DE ESTUDIANTES DE PRIMEROS SEMESTRES DE LA LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS SOBRE NOCIONES BÁSICAS DE PROBABILIDAD

LUDY ROCÍO BARRERA VARGAS
CC. 1030555986 – CÓD.: 2009140009
JERSSON IVÁN MORENO PARRA
CC 1022959434- CÓD.: 2009140088

ASESOR: FELIPE JORGE FERNÁNDEZ HERNÁNDEZ
MAGISTER EN ESTADÍSTICA

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ D.C.
2014

Dedicatoria

Dedico este trabajo de grado a mis padres quienes me apoyaron todo el tiempo de estudio. A mi hermano Edwin Fabian Moreno quien me apoyo y alentó para continuar, cuando parecía que me iba a rendir. A mis maestros quienes nunca desistieron al enseñarme, aun sin importar las muchas dificultades que tuve en clase, a ellos que continuaron depositando su esperanza en mí. A todos los que me apoyaron para escribir y concluir este trabajo. A mi amigo Miguel Hurtado quien fue un gran apoyo en mi trayecto de estudio en la Universidad Pedagógica Nacional.

Para ellos es esta dedicatoria de trabajo de grado, pues es a ellos a es a quienes se las debo por su apoyo incondicional

Jersson Moreno Parra

RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de Grado
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento	PENSAMIENTO ALEATORIO DE ESTUDIANTES DE PRIMEROS SEMESTRES DE LA LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS SOBRE NOCIONES BÁSICAS DE PROBABILIDAD
Autor(es)	MORENO PARRA, Jersson Iván; BARRERA VARGAS, Ludy Rocío
Director	FERNÁNDEZ HERNÁNDEZ, Felipe Jorge
Publicación	Bogotá, Universidad Pedagógica Nacional, 2014. 95 p.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional.
Palabras Claves	Pensamiento Aleatorio, Estándares, Espacio Muestral Original, Espacio Muestral Adoptado, Modelos Gráficos, Métodos Gráficos, hacer conjeturas, hacer predicciones, Conteo, Probabilidad.

2. Descripción

Este trabajo responde al propósito de dar significado del pensamiento aleatorio y de describir este en un grupo de estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad. Para ello, en este documento se da cuenta del proceso de diseño, adaptación, análisis, mejora e implementación de un instrumento que se pone a prueba en un grupo de estudiantes del ciclo de fundamentación de la Licenciatura de Matemáticas que no han tomado el curso de probabilidad del programa.

3. Fuentes

Las principales fuentes de consulta fueron las siguientes:

Andrade, L., Fernández, F. y Sarmiento, B. (2013). La búsqueda del espacio muestral ‘original’: Una necesidad para la enseñanza. En Salcedo, A. (Ed.), *Educación estadística en América Latina: Tendencias y Perspectivas* (81-94) Caracas.

Batanero, C., Gómez, E., Serrano, L. y Contreras, J. (2012, Octubre). Comprensión de la Aleatoriedad por Futuros Profesores de Educación Primaria. *Revista de Investigación en Didáctica de las Matemáticas REDIMAT*.

Fernández, F., Andrade, L. y Sarmiento, B (2009). *Experimentos de enseñanza para el desarrollo* *de razonamiento estadístico con estudiantes de secundaria* (Informe de investigación). Bogotá D.C, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Fernández, F., Sarmiento, B. y Soler, N (2008). Estadística y probabilidad en la escuela secundaria. *Un estudio acerca del contexto, actitudes y conocimiento estocástico del profesor de matemáticas*, pág. 41. Bogotá D.C, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

MEN, (1998). *Lineamientos curriculares, Matemáticas*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

MEN, (2008). *Estándares Curriculares para la excelencia en la educación*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Soler (2013), Notas de clase realizadas por los estudiantes de Especialización en Educación Matemática, *Indicadores definitivos de razonamiento Estándares.*

4. Contenidos

En relación con el contenido de este documento, en el primer capítulo, se hace la presentación del trabajo, en la que se define la problemática de estudio y se da cuenta de los objetivos del trabajo; en el segundo capítulo, se describe la postura conceptual acerca del pensamiento aleatorio con base en la revisión de literatura consultada; en el tercer capítulo, se presenta las acciones realizadas para el diseño de una prueba piloto; en el cuarto capítulo se analizan los resultados de la implementación de la prueba piloto y se sugieren los cambios necesarios para consolidar la versión final de la prueba; en el quinto capítulo, se presenta el análisis de la prueba final; posteriormente y en el sexto capítulo, se muestran las conclusiones de los resultados obtenidos; y finalmente, se presentan las referencias consultadas en el trabajo.

5. Objetivos

Los objetivos previstos para el desarrollo de este trabajo son:

Objetivo general

Describir el "pensamiento aleatorio" de un grupo de estudiantes del ciclo de fundamentación de la Licenciatura de Matemáticas que no han tomado el curso de probabilidad del programa.

Objetivos específicos

- Conceptualizar lo que significa "pensamiento aleatorio" en el currículo escolar de matemáticas acerca de contenidos básicos de probabilidad.

- Diseñar y/o adaptar un cuestionario que permita caracterizar el "pensamiento aleatorio" del grupo de estudiantes seleccionado.
- Implementar el cuestionario y analizar los resultados obtenidos.
- Elaborar conclusiones sobre los resultados obtenidos.

6. Metodología

Este trabajo se elaboró con base en la conceptualización del pensamiento aleatorio que presenta un grupo de estudiantes del ciclo de fundamentación de la Licenciatura de Matemáticas que no han tomado el curso de probabilidad del programa. Para formular dicha conceptualización se tuvo en cuenta literatura sobre el tema tal como los estándares básicos de competencias en Matemáticas, establecidos por el Ministerio de Educación Nacional, seleccionando de éstos, principalmente los que hacen referencia a la parte de probabilidad. El proceso de diseño se desarrolló en dos fases. En la primera fase se trabajó en la selección de indicadores que tomados y adaptados de los estándares, en donde para cada uno de ellos, se propuso de uno a tres ítems que describieran situaciones de tipo probabilístico; para cada ítem propuesto se realiza una descripción y se presenta una posible solución formal, y además, se describen otros posibles procedimientos correctos o errados, con el ánimo de describir la comprensión de las preguntas y valorar la dificultad de los ítems para la población objeto de estudio. Posteriormente en una segunda fase se implementó el cuestionario, y se analiza y presenta por cada ítem ejemplos de respuesta que incluyen descripciones y comentarios sobre lo observado; además, la información analizada se sistematiza u organiza en tablas de frecuencias donde se caracterizan los tipos de respuestas, tanto los previamente considerados en el diseño del instrumento como otros que surgieron como resultado de los análisis. Este proceso condujo a la propuesta de mejoras a los ítems para consolidar una prueba definitiva que se vuelve a aplicar y analizar.

7. Conclusiones

Las conclusiones que se presenta se organizaron de acuerdo a los siguientes aspectos:

Respecto a los estudiantes se destacan:

- En las respuestas emplean las mismas palabras utilizadas en los ítems que se consideran como indicadoras para hacer alusión a eventos aleatorios.
- Son muy pocos los estudiantes que predicen de antemano probabilidades asociadas a los eventos.

- La mayoría de los estudiantes primero realizan las conjeturas, luego las comprueban mediante la elaboración total o parcial de los espacios muestrales, otros tienden simplemente a conjeturar, pero no las verifican.
- Comparan la probabilidad clásica con la probabilidad frecuencial, en donde la probabilidad clásica tiene una mayor utilización.
- Se dificulta plantear o expresar probabilidades de manera apropiada, ya que las confunden con razones de proporcionalidad en donde no se establece relaciones de la parte sobre el todo, sino del todo sobre la parte.
- En algunas ocasiones se confunde el referente de población que define el espacio muestral con sub poblaciones del mismo, lo que genera asignaciones erradas de probabilidad.
- Se presenta confusión con el uso de los conectores “y” y “o”.
- No se tiene en cuenta las especificaciones de los ítems, lo que conlleva a describir un procedimiento no valido para determinar la probabilidad.
- Para los ítems donde se presenta la información en tablas, algunos intentan determinar la probabilidad a partir de lo que infieren de estas, presentando argumentos en base a algunas proporciones con las cantidades dadas en las tablas.

Respecto al diseño del instrumento se tiene que:

- La redacción e interpretación de los diferentes ítems propició el desarrollo de poco claras o con un desarrollo incompleto, y en otras no se justifica, a pesar de los ajustes realizados a la prueba piloto se reconoce que se deben hacer mejoras en la redacción de algunos ítems.
- En los ítems de la prueba piloto se esperaba que conjeturaran de acuerdo a cada situación haciendo uso de algún modelo gráfico, pero estos no fueron muy utilizados.

Elaborado por:	MORENO PARRA, Jersson Iván; BARRERA VARGAS, Ludy Rocío
Revisado por:	FERNÁNDEZ HERNÁNDEZ, Felipe Jorge

Fecha de elaboración del Resumen:	21	07	2014

TABLA DE CONTENIDO

RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN 4

I. Presentación del trabajo 9

1. Introducción 9

2. Justificación 9

3. Problema de estudio 10

4. Objetivos 11

Objetivo general 11

Objetivos específicos 11

II. Marco Conceptual 12

III. Diseño del Instrumento 19

Propuesta Piloto 19

IV. Análisis de los Resultados de la Prueba Piloto 30

V. Análisis de los Resultados Versión Final 61

Parte 1: La Prueba definitiva 62

Parte 2: Análisis Cualitativo 65

Parte 3: Análisis Cuantitativo 84

VI. Conclusiones 90

VII. Referencias 94

I. PRESENTACIÓN DEL TRABAJO

1. INTRODUCCIÓN

Este trabajo se ubica en la modalidad de trabajo de grado asociado a un grupo de investigación o estudio. Tiene el propósito de indagar sobre el conocimiento que tienen estudiantes de primeros semestres de la Licenciatura, acerca de conceptos y procesos asociados al pensamiento aleatorio.

El pensamiento probabilístico o aleatorio es uno de los pensamientos que comúnmente es olvidado en la enseñanza obligatoria, aunque figura en el currículo de matemáticas es una de las primeras fuentes donde los futuros licenciados en matemáticas tienen la oportunidad de construir muchos de sus conocimientos; pero en muchas ocasiones en los cursos que son incluidos en la formación como profesionales, se carece de elementos que permita la integración de las nociones de los conceptos que son adquiridos en la escuela con los que se presentan en la Universidad, para que a partir de estos se permitan la construcción, revisión y modificación se sus ideas y conceptos como parte un proceso (Fonseca, 2009).

En relación con el contenido de este documento, en el primer capítulo, se hace la presentación del trabajo, en la que se define la problemática de estudio y se da cuenta de los objetivos del trabajo; en el segundo capítulo, se describe la postura conceptual acerca del pensamiento aleatorio con base en la revisión de literatura consultada; en el tercer capítulo, se presentan las acciones realizadas para el diseño de una prueba piloto; en el cuarto capítulo se analizan los resultados de la implementación de la prueba piloto y se sugieren los cambios necesarios para consolidar la versión final de la prueba; en el quinto capítulo, se presenta el análisis de la prueba final; posteriormente y en el sexto capítulo, se muestran las conclusiones de los resultados obtenidos; y finalmente, se presentan las referencias consultadas en el trabajo.

2. JUSTIFICACIÓN

La siguiente propuesta considera relevante indagar acerca de la formación de futuros profesores de matemáticas respecto a su fundamentación en probabilidad. En este sentido, se pretende estudiar acerca del "pensamiento aleatorio" de futuros profesores de matemáticas respecto a conceptos básicos de probabilidad, lo que puede constituir en un pequeño aporte que ayude a dilucidar competencias que se deberían desarrollar en un profesor de matemáticas y en consecuencia que ayuden a fundamentar el diseño curricular al respecto.

Los currículos escolares tienen como contenido obligatorio los temas relacionados con la probabilidad, donde se propone de alguna manera hacerla más experimental y que se brinde a los estudiantes una experiencia más directa desde su infancia, esto implica que muchos de los profesores quieran reforzar su conocimiento didáctico con respecto a lo relacionado con la enseñanza de probabilidad, sin embargo, algunos no han tenido la formación necesaria para la enseñanza de la probabilidad y otros ni siquiera han continuado un curso completo de probabilidad durante su formación como maestros (Batanero y otros, 2011), generando actitudes negativas hacia la dificultad de su contenido y asumiendo que no debe incluirse en la formación básica de sus alumnos (Estrada, 2002), pensando que hay temas más importantes sobre las que hay que preparar a los estudiantes para las evaluaciones finales, sin ser conscientes de sus propias dificultades en los temas (Estrada y Díaz, 2007); de tal forma que si un profesor va a instruir dichos temas debe tener claro los conceptos y un dominio más amplio de estos que no esté restringido a un conocimiento puramente instrumental de la probabilidad, que no sólo enfatice en procedimientos, sino que preste más atención a la comprensión conceptual cuando los estudiantes se vean enfrentados a situaciones que involucren el "pensamiento aleatorio", en los que hay diversos casos de aplicación de probabilidad; es importante que ellos sepan utilizar de manera asertiva su "conocimiento al respecto", ya que la probabilidad tiene aplicación en diferentes contextos de estudio, como la física, la medicina y la ingeniería, entre otros, e incluso en la vida diaria.

Por otra parte, Fernández, Andrade y Sarmiento (2009) distinguen tres tipos de contextos relativos al conocimiento estadístico y probabilístico llamadas situaciones de: Conjunto de datos, de Muestreo y de Probabilidad. Sin embargo, en las conclusiones que presentan en su trabajo, reconocen que la parte de situaciones de Probabilidad se trabajó con menos profundidad, y por ello este trabajo puede contribuir a darle más peso al tipo de indicadores que se requiere considerar para describir conocimientos de los estudiantes en torno a Situaciones de Probabilidad.

3. PROBLEMA DE ESTUDIO

En la formación de estudiantes para desempeñarse como profesores de matemáticas es pertinente abordar el desarrollo de pensamiento aleatorio, desde una mirada en la que se considere los lineamientos y estándares sugeridos por las disposiciones curriculares emanadas del Ministerio de Educación Nacional y de las recomendaciones de expertos en didáctica de la probabilidad. En particular, los conceptos básicos de probabilidad, pueden ser objeto de estudio desde una mirada amplia al “pensamiento aleatorio” que considere lo disciplinar y también lo didáctico y pedagógico. Este trabajo parte del supuesto que de que el “pensamiento aleatorio” respecto a la temática sugerida puede tener muchas falencias en los estudiantes del programa de Licenciatura en Matemáticas. Nuestro interés es confirmar este supuesto a través de precisar un poco más el sentido que se da al pensamiento aleatorio de futuros profesores de matemáticas y diseñar un instrumento para caracterizar este tipo de conocimiento en estudiantes del ciclo de fundamentación de la Licenciatura de Matemáticas que no han tomado el curso de probabilidad del programa.

4. OBJETIVOS

Objetivo general

Describir el “pensamiento aleatorio” de un grupo de estudiantes del ciclo de fundamentación de la Licenciatura de Matemáticas que no han tomado el curso de probabilidad del programa.

Objetivos específicos

- Conceptualizar lo que significa “pensamiento aleatorio” en el currículo escolar de matemáticas acerca de contenidos básicos de probabilidad.
- Diseñar y/o adaptar un cuestionario que permita caracterizar el “pensamiento aleatorio” del grupo de estudiantes seleccionado.
- Implementar el cuestionario y analizar los resultados obtenidos.
- Elaborar conclusiones sobre los resultados obtenidos.

II. MARCO CONCEPTUAL

Al comenzar la enseñanza de la probabilidad es fundamental e importante analizar los razonamientos de los jóvenes, debido a que este es un proceso de aprendizaje gradual, construido a partir de los errores y dificultades del estudiante, donde el profesor no es consciente de esto y difícilmente llega a entender que estos también se presentaron durante el desarrollo histórico de los conceptos (Batanero, 2005), debido a que en dichas materias se trata con ideas abstractas y no tan ligadas a la experiencia directa del joven como pudieran ser los conceptos numéricos. Desde muy pequeño el joven debe aprender a estimar, discriminar y diferenciar formas, distancias y cantidades.

Muchos de los trabajos de investigación y artículos que se han realizado en el área de estadística y probabilidad se han concentrado en estudiar cómo se comprenden o mal comprenden ideas particulares del “pensamiento probabilístico y estadístico”; por ejemplo, Fernández, Sarmiento y Soler (2008, p. 41) consideran que "El razonamiento estadístico combina ideas acerca de datos y probabilidades, que llevan a realizar inferencias e interpretaciones de resultados estadísticos.”; en dicho documento hacen referencia a razonamientos estocásticos correctos que se consideran pertinentes a tener en cuenta para este trabajo. En este documento se evidencia que el razonamiento estadístico implica dos componentes que se pueden diferenciar, una componente de análisis de datos y una probabilística. De lo probabilístico, que es el foco de este trabajo mencionamos los siguientes:

- Razonamiento acerca de la incertidumbre, encierra el correcto uso de las ideas de aleatoriedad, posibilidad y probabilidad; muestra las conclusiones de los eventos inciertos y así comprender porque los resultados que se asocian estos eventos pueden ser o no igualmente probables, o porque la probabilidad asociada a diferentes eventos se puede determinar utilizando diferentes métodos;
- Razonamiento acerca de muestras, se incluyen los conocimientos de relación de la muestra con su población, o se infiere en base a una muestra; también, se presentan maneras de seleccionar muestras que generan errores que hacen que estas no sean representativas de una población y como seleccionar una buena muestra de tal manera que esta represente de una manera más segura una población;

Por otra parte, en la propuesta de los lineamientos curriculares del MEN (1998) se plantea que uno de los pensamientos que se debe desarrollar en los estudiantes es el llamado Pensamiento aleatorio y sistemas de datos. Esta sugerencia lleva implícito una especie de amalgama entre lo probabilístico, connotado por el término ‘aleatorio’, y lo estadístico sugerido por el término ‘sistemas de datos’. En este trabajo se pretende enfocar más la atención en lo que atañe al significado de lo probabilístico o aleatorio, que a lo de carácter más estadístico inherente al término ‘sistemas de datos’. En este sentido, se considera que el pensamiento aleatorio se asocia directamente a conceptos y procedimientos de la teoría de probabilidades y a su vez le da sustento a la estadística inferencial, mientras que la estadística descriptiva se asocia a lo relativo a los sistemas de datos. Además, los temas referentes a conteo combinatorio, se posicionan como métodos que ayudan al cálculo de probabilidades sobre todo desde su interpretación clásica. No obstante, la combinatoria también se puede ubicar como tema transversal que ayuda a desarrollos de otros pensamientos como el numérico. De todas maneras, lo probabilístico, debe enmarcarse en situaciones en las que se debe buscar soluciones razonables a problemas en los que no haya soluciones claras, únicas o seguras, y que estén infundidos de un espíritu de exploración y de investigación mediante la construcción de modelos de fenómenos físicos, sociales o de juegos de azar y la utilización de estrategias como la simulación de experimentos.

Para considerar el pensamiento aleatorio se definirá aleatoriedad; una manera de definirla es como lo hacen Batanero y otros (2012, Octubre), ellos presentan la propuesta de von Mises, quien parte de la idea que, en una secuencia aleatoria es imposible encontrar sus reglas o patrones, por lo que, no se podrán predecir sus resultados; por ejemplo, apostar sobre ellos y ganar en un juego de azar, esto implica que la frecuencia relativa de cada uno de los resultados se conserva invariante en cualquiera de sus subsucesiones.

El pensamiento aleatorio es considerado algo confuso porque se trata de situaciones donde se requiere que el estudiante haga un análisis de los métodos estadísticos, desarrolle y ponga a prueba las nociones de probabilidad, haga una recolección ordenada de datos, presente una información, use gráficos y haga su interpretación, relacione la aleatoriedad con el azar y la noción del azar como opuesto a lo deducible como un patrón que explica los sucesos que no son predecibles en ejemplos en situaciones reales; para lograr desarrollar este pensamiento es necesario hacer uso de los cinco procesos generales de la actividad matemática que se establecen en los estándares curriculares para el desarrollo de las competencias matemáticas.

En este trabajo se pretende abordar la parte probabilística del razonamiento estadístico, y para iniciar esta tarea, se hace inicialmente una identificación en los Estándares del Currículo de

Matemáticas del Pensamiento Aleatorio y Sistemas de Datos establecidos por el Ministerio de Educación Nacional (MEN), en los que se evidencia el uso de palabras propias del lenguaje probabilístico (probabilidad, conjeturo, predigo, eventos, diagramas, posibilidad, y experimentos), las cuales son muy frecuentemente usadas en la probabilidad. Además, analizando estos estándares curriculares y a Fernández, Sarmiento y Soler (2008, p. 41), se puede evidenciar que en los estándares es posible realizar una clasificación y una composición de elementos del pensamiento aleatorio y sistemas de datos, permitiendo distinguir cuales son prescindibles en el pensamiento aleatorio, sin embargo, al considerar la clasificación usando el método que distingue palabras claves se evidencia una clasificación no considerada en un principio y es la de 'estadística y probabilidad'.

Al seguir este criterio para examinar por grados los estándares del MEN (2006), se obtiene la clasificación donde encontramos estándares de tipo probabilístico, estándares que se pueden interpretar tanto de probabilidad como de estadística y estándares de tipo estadístico, se presentan en la siguiente tabla:

Grado	**Tipo de estándar**	**Estándares**
Primero a Tercero	Probabilístico	• Explico –desde mi experiencia la posibilidad o imposibilidad de ocurrencia de eventos cotidianos.
		• Predigo si la posibilidad de ocurrencia de un evento es mayor que la de otro.
	Probabilidad y Estadística	• Describo situaciones o eventos a partir de un conjunto de datos.
	Estadísticos	• Clasifico y organizo datos de acuerdo a cualidades y atributos y los presento en tablas.
		• Interpreto cualitativamente datos referidos a situaciones del entorno escolar.
		• Represento datos relativos a mi entorno usando objetos concretos, pictogramas y diagramas de barras.
		• Identifico regularidades y tendencias en un conjunto de datos.
		• Resuelvo y formulo preguntas que requieran para su solución coleccionar y analizar datos del entorno próximo.
Cuarto a Quinto	Probabilístico	• Conjeturo y pongo a prueba predicciones acerca de la posibilidad de ocurrencia de eventos.
	Probabilidad y Estadística	• Resuelvo y formulo problemas a partir de un conjunto de datos provenientes de observaciones, consultas o experimentos.
	Estadísticos	• Represento datos usando tablas y gráficas (pictogramas, gráficas de barras, diagramas de líneas, diagramas circulares).
		• Comparo diferentes representaciones del mismo conjunto de datos.

		• Interpreto información presentada en tablas y gráficas. (Pictogramas, gráficas de barras, diagramas de líneas, diagramas circulares).
		• Describo la manera como parecen distribuirse los distintos datos de un conjunto de ellos y la comparo con la manera como se distribuyen en otros conjuntos de datos.
		• Uso e interpreto la media (o promedio) y la mediana y comparo lo que indican.
Sexto a Séptimo	Probabilístico	• Uso modelos (diagramas de árbol, por ejemplo) para discutir y predecir posibilidad de ocurrencia de un evento.
		• Conjeturo acerca del resultado de un experimento aleatorio usando proporcionalidad y nociones básicas de probabilidad.
	Probabilidad y Estadística	• Predigo y justifico razonamientos y conclusiones usando información estadística.
		• Comparo e interpreto datos provenientes de diversas fuentes (prensa, revistas, televisión, experimentos, consultas, entrevistas).
	Estadísticos	• Reconozco la relación entre un conjunto de datos y su representación.
		• Interpreto, produzco y comparo representaciones gráficas adecuadas para presentar diversos tipos de datos. (Diagramas de barras, diagramas circulares.)
		• Uso medidas de tendencia central (media, mediana, moda) para interpretar comportamiento de un conjunto de datos.
		• Resuelvo y formulo problemas a partir de un conjunto de datos presentados en tablas, diagramas de barras, diagramas circulares.
Octavo a Noveno	Probabilístico	• Comparo resultados de experimentos aleatorios con los resultados previstos por un modelo matemático probabilístico.
		• Calculo probabilidad de eventos simples usando métodos diversos (listados, diagramas de árbol, técnicas de conteo).
		• Uso conceptos básicos de probabilidad (espacio muestral, evento, independencia, etc.).
	Probabilidad y Estadística	• Reconozco cómo diferentes maneras de presentación de información pueden originar distintas interpretaciones.
		• Interpreto analítica y críticamente información estadística proveniente de diversas fuentes (prensa, revistas, televisión, experimentos, consultas, entrevistas.
		• Resuelvo y formulo problemas seleccionando información relevante en conjuntos de datos provenientes de fuentes diversas. (Prensa, revistas, televisión, experimentos, consultas, entrevistas).
	Estadísticos	• Interpreto y utilizo conceptos de media, mediana y moda y explicito sus diferencias en distribuciones de distinta dispersión y asimetría.
		• Selecciono y uso algunos métodos estadísticos adecuados al tipo de problema, de información y al nivel de la escala en la que esta se representa (nominal, ordinal, de intervalo o de razón).
		• Reconozco tendencias que se presentan en conjuntos de

		variables relacionadas.
Decimo a Undécimo	Probabilístico	• Interpreto conceptos de probabilidad condicional e independencia de eventos.
		• Resuelvo y planteo problemas usando conceptos básicos de conteo y probabilidad (combinaciones, permutaciones, espacio muestral, muestreo aleatorio, muestreo con remplazo).
	Probabilidad y Estadística	• Diseño experimentos aleatorios (de las ciencias físicas, naturales o sociales) para estudiar un problema o pregunta.
		• Describo tendencias que se observan en conjuntos de variables relacionadas.
		• Uso comprensivamente algunas medidas de centralización, localización, dispersión y correlación (percentiles, cuartiles, centralidad, distancia, rango, varianza, covarianza y normalidad).
		• Propongo inferencias a partir del estudio de muestras probabilísticas.
		• Interpreto nociones básicas relacionadas con el manejo de información como población, muestra, variable aleatoria, distribución de frecuencias, parámetros y estadígrafos).
		• Justifico o refuto inferencias basadas en razonamientos estadísticos a partir de resultados de estudios publicados en los medios o diseñados en el ámbito escolar.
	Estadísticos	• Interpreto y comparo resultados de estudios con información estadística provenientes de medios de comunicación.

Teniendo en cuenta la anterior clasificación se tomarán los siguientes estándares que se relacionan sólo con probabilidad:

1. Explico –desde mi experiencia la posibilidad o imposibilidad de ocurrencia de eventos cotidianos.
2. Predigo si la posibilidad de ocurrencia de un evento es mayor que la de otro.
3. Conjeturo y pongo a prueba predicciones acerca de la posibilidad de ocurrencia de eventos.
4. Uso modelos (diagramas de árbol, por ejemplo) para discutir y predecir posibilidad de ocurrencia de un evento.
5. Conjeturo acerca del resultado de un experimento aleatorio usando proporcionalidad y nociones básicas de probabilidad.
6. Comparo resultados de experimentos aleatorios con los resultados previstos por un modelo matemático probabilístico.
7. Calculo probabilidad de eventos simples usando métodos diversos (listados, diagramas de árbol, técnicas de conteo).
8. Uso conceptos básicos de probabilidad (espacio muestral, evento, independencia, etc.).

9. Interpreto conceptos de probabilidad condicional e independencia de eventos.
10. Resuelvo y planteo problemas usando conceptos básicos de conteo y probabilidad (combinaciones, permutaciones, espacio muestral, muestreo aleatorio, muestreo con remplazo).

Al realizarse una lectura detenida de los estándares se considera pertinente efectuar una reorganización y modificación de estos, de tal manera que den cuenta de los diferentes elementos al momento de diseñar las preguntas y analizar las respuestas propuestas por los estudiantes, por lo que en el último estándar sólo se tendrá en cuenta la resolución de problemas y se omitirá el planteamiento de problemas, debido a que se pueden presentar dificultades para plantear con relación al pensamiento aleatorio; por lo tanto, los indicadores que se consideraran serán los siguientes:

a. Explica desde su experiencia la posibilidad o imposibilidad de ocurrencia de eventos cotidianos.
b. Predice si la posibilidad de ocurrencia de un evento es mayor que la de otro.
c. Usa modelos gráficos para hacer conjeturas o pronósticos sobre la posibilidad de ocurrencia de un evento.
d. Conjetura y pone a prueba predicciones acerca de la posibilidad de ocurrencia de eventos.
e. Compara resultados de experimentos aleatorios con los resultados previstos por un modelo matemático.
f. Conjetura acerca del resultado de un experimento aleatorio usando proporcionalidad y nociones básicas de probabilidad.
g. Interpreta conceptos básicos de conteo y probabilidad
h. Interpreta conceptos de probabilidad condicional e independencia de eventos.
i. Calcula la probabilidad de eventos usando métodos diversos.
j. Resuelve problemas usando conceptos básicos de conteo y probabilidad.

A continuación se pretende dar una agrupación de palabras que se consideran claves con el fin de poder identificar mejor cada estándar a seleccionar, y así presentar los diferentes ítems a trabajar, como un conjunto de preguntas más preciso y claro frente al análisis de las posibles respuestas propuestas por los estudiantes.

Según Soler (2013)[1], se entenderá por "Hacer Predicciones" a la acción de anticipar resultados coherentes basados en la percepción de regularidades, sin haber comprobados anticipadamente; y a "Hacer Conjeturas" a elaborar de manera precisa enunciados que pueden llegar a ser comprobados o refutados. Además, se entenderá por Modelos gráficos a los diagramas de árbol, listas y tablas, por Métodos a la agrupación de listados y técnicas de conteo que se empleen para resolver un ejercicio o situación; y por Conceptos básicos de conteo y probabilidad serán las conceptos de combinaciones, permutaciones, espacio muestral, muestreo aleatorio, muestreo con remplazo, experimento, evento, suceso.

Por otra parte, atendiendo a la distinción que hacen Andrade y otros (2013), se distinguirán al menos dos tipos de espacio muestrales. En efecto se entenderá por espacio muestral 'original' al conjunto que surge de explicitar directamente todos los posibles resultados de un experimento aleatorio, y además, se identifica la equiprobabilidad; y como espacio muestral 'adoptado' a la recopilación de todos los eventos simples del espacio muestral original que se interesan identificar o que suceden al momento de realizar el experimento según la observación, además en este no siempre se presenta la equiprobabilidad.

[1] Notas de clase realizadas por los estudiantes de Especialización en Educación Matemática, Indicadores definitivos de razonamiento Estándares.

III. DISEÑO DEL INSTRUMENTO

En el siguiente apartado se presentará la propuesta piloto, cuya finalidad es verificar la comprensión de las preguntas y valorar su dificultad respecto a la población objeto de estudio, es decir, de un grupo de estudiantes del ciclo de fundamentación de la Licenciatura de Matemáticas que no han tomado el curso de probabilidad del programa; también se pretende comprobar si los estudiantes proporcionan respuestas suficientemente claras y completas para poder afinar la prueba definitiva. El orden de presentación de la propuesta es: el indicador, los ítems asociados a este indicador y la intencionalidad o supuestos del mismo con respecto a la situación presentada en el ítem.

PROPUESTA PILOTO

Indicador 1. *Explica desde su experiencia la posibilidad o imposibilidad de ocurrencia de eventos cotidianos.*
Ítem 1.1 *¿Qué es más posible que tome mañana en el desayuno: café o chocolate? Explique su respuesta.*
Ítem 1.2 *Suponga que está en la estación de Transmilenio de la 72 a la 1 pm. ¿Qué es más probable, que se vaya de pie o sentado?*
Explique su respuesta.

Ambos ítems exponen situaciones cotidianas en la que se pide al estudiante que exprese de acuerdo a su vivencia, el tipo de evento que caracteriza su respuesta.

En el primer caso, puede ser un evento seguro si dice que siempre toma café o siempre toma chocolate de acuerdo a su gusto o a la rutina de su quehacer diario, puede ser un evento aleatorio si no está seguro qué va a tomar al día siguiente ya que hay factores no conocidos que determinen la respuesta; y puede ser un evento imposible si no le gusta o no acostumbra a tomar este tipo de alimentos en el desayuno.

En el segundo caso, puede ser un evento seguro si dice que siempre usa el servicio de Transmilenio a esa hora y que lo más probable es que vaya sentado o de pie, mientras que puede ser un evento aleatorio si no está seguro de la respuesta ya que usa el servicio de Transmilenio pero debido a sus experiencias no puede decir con seguridad si se puede ir sentado o de pie; y en este ítem no existen los eventos imposibles pues al viajar en Transmilenio se debe de presentar una de estas dos situaciones. En este ejercicio se ve la influencia de las rutas ya, que unas de éstas son más libres en ciertas horas del día, y el estudiante tiende a considerar todos estos factores.

Para resolver este problema, el alumno debe solo analizar los sucesos en los cuales está involucrado, y en caso de no tener experiencia en el suceso, el estudiante puede partir de una suposición dando una respuesta sin tener conciencia de que la respuesta que da es posible o no, también puede usar ideas que haya conversado con otras personas.

Indicador 2. *Predice si la posibilidad de ocurrencia de un evento es mayor que la de otro.* ***Ítem 2.1*** *Julián dice que en el juego de la pirinola (cuyas opciones son: pon 1, pon 2, toma 1, toma 2, toma todo y todos ponen) lo más probables es perder, Luis afirma que es más probable tomar uno y ganar todo. ¿Quién tiene la razón?* *¿Por qué?*

El alumno debe analizar los sucesos involucrados, en caso de no tener experiencia debe hacer el análisis con cada suceso y la posibilidad de ocurrencia de cada uno; en este sentido, el estudiante puede partir de una suposición proporcionando una respuesta o analizar una situación semejante conocida como es la de los dados. Además, puede considerar la idea de probabilidad clásica en donde sugiera la razón $\frac{\text{casos particulares}}{\text{total casos}}$; de esta manera, si se realiza una comparación entre las probabilidades de ganar y perder, el estudiante podría decir que Julián está equivocado ya que hay tres elementos de pérdida y tres de ganancia, es decir una razón de $\frac{\text{casos de pérdida}}{\text{total casos}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$; para el caso de Luis, el estudiante puede presentar una argumentación similar con la que se determina que también estaría errado ya que la probabilidad de tomar uno o ganar todo es de $\frac{2}{6}$. En resumen, al comparar las probabilidades se evidencia que Julián tiene menos chance de perder. Otra posible respuesta es considerar equiprobables los dos eventos considerados en el ítem.

Indicador 3. *Usa modelos gráficos para hacer conjeturas o pronósticos sobre la posibilidad de ocurrencia de un evento.* ***Ítem 3.1 (v1)*** *Se lanzan dos dados equilibrados, sea X el valor absoluto de la diferencia de los dos números obtenidos. Ilustre utilizando algún medio de representación los posibles resultados asociados al valor de X. ¿Qué resultado es más probable y cual es menos probable?* ***Ítem 3.1 (v2)*** *Se lanzan dos dados equilibrados, sea X el valor absoluto de la diferencia de los dos números obtenidos. ¿Qué resultado es más probable y cual es menos probable? Justifique su respuesta utilizando algún medio de representación de los posibles resultados de X.* ***Ítem 3.2****Se lanzan una moneda equilibrada cuatro veces. Si se definen los sucesos:* A = *"al menos salen dos caras"* B = *"el último resultado es sello"* *Represente los posibles resultados asociados a los sucesos* A *ó* B*, utilizando métodos gráficos, listas o tablas. ¿Cuál es más probable que ocurra?*

La finalidad de tener dos versiones del ítem *3.1* muy semejantes en esta prueba piloto, es ver en primer lugar la influencia del lenguaje, ya que el estudiante a partir de algunos cambios en las palabras puede llegar a inducir deferentes interpretaciones del problema; un segundo elemento es ver cuál de las preguntas lleva más al estudiante a crear o construir representaciones gráficas, necesarias para el ítem. Ambos ítems exponen situaciones en la que se pide al estudiante una representación gráfica de dicha situación para hacer conjeturas o pronósticos, de lo que sucede en el evento.

En el primer caso, en cualesquiera de las dos versiones, el estudiante sólo debe analizar los sucesos en los cuales se cumple la diferencia en valor absoluto entre los números obtenidos en el lanzamiento de dos dados, y ver cuáles son los posibles resultados, para este caso los resultados son: $0, 1, 2, 3, 4$ y 5; luego el estudiante puede partir de las posibles combinatorias para formar los conjuntos y luego formar la representación.

Una posible representación seria:

Cuando el estudiante presenta diagramas de árbol indica que quiere evidenciar todos los diferentes sucesos y construir de manera visual todo el espacio muestral. Otro método de representación es el de construir por completo el espacio muestral, sin embargo este tipo de representación en situaciones en donde el espacio muestral sea muy grande, no es eficiente ya que se dificulta su posible representación, por ello se espera que este tipo de representación sea la menos dominante en esta situación. Otro sistema de representación es el tabular donde se evidencia la diferencia entre dos números; en éste se ubica al estudiante en algún tipo de argumento analítico, en el que exprésalos resultados posibles y totales, y posiciona así, una representación que evidencia un argumento visualmente organizado.

		Dado 1					
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Dado 2	**1**	0	1	2	3	4	5
	2	1	0	1	2	3	4
	3	2	1	0	1	2	3
	4	3	2	1	0	1	2
	5	4	3	2	1	0	1
	6	5	4	3	2	1	0

X	P(x)
0	6
1	10
2	8
3	6
4	4
5	2

Estos tipos de representación son elementos válidos para representar los posibles resultados de la diferencia en valor absoluto entre los números obtenidos en el lanzamiento de dos dados, la implementación de estos sistemas de representación serán todos válidos, sin embargo, para este ejercicio el uso de cada representación sugerirá un nivel diferenciado de análisis y comprensión de la situación.

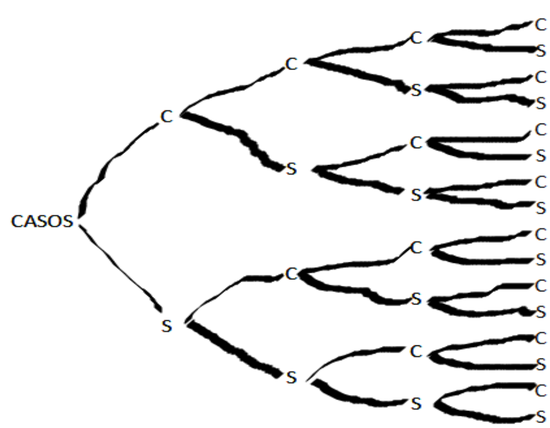
En el segundo caso (ítem 3.2), para resolver este problema el estudiante sólo debe analizar los sucesos posibles de lanzar una moneda cuatro veces, se espera que se distingan y separen los dos eventos A y B; en caso que el estudiante no tenga la experiencia de lanzar cuatro monedas sólo debe comprender las condiciones de la situación planteada.

Una posible representación del evento A; donde se indica que: C es cara y S es sello, es

$$A: \left\{ \begin{matrix} (C,C,S,S); (S,S,C,C); (S,C,C,S); (C,S,S,C); (C,S,C,S); (S,C,C,S); (C,C,S,C); \\ (C,C,C,S); (S,C,C,C); (C,S,C,C), (C,C,C,C) \end{matrix} \right\}$$

Se puede utilizar una representación semejante para el evento B.

Otra representación para el evento A, puede ser la siguiente:



Indicador 4. *Conjetura y pone a prueba predicciones acerca de la posibilidad de ocurrencia de eventos.*
Ítem 4.1 *Si se lanzan dos dados y se suman los números que se encuentran en la parte superior. ¿Cuál resultado piensa que tiene más y cual resultado tiene menos chance de ocurrir? Explique sus respuestas.*

Para resolver este problema, el estudiante debe analizar los sucesos que involucran la suma de los números que salgan del lanzamiento de dos dados, y ver cuáles son los posibles resultados de las sumas $(2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 \text{ y } 12)$ para que él vea cual tiene más facilidad de construirse a partir de la combinación de dos números resultantes en los dados.

Al presentarse al profesor en formación este enunciado, él puede considerar algunas de las posibles combinatorias pero no todas, y luego decir intuitivamente o solo a partir de su experiencia, cual suma puede ser más fácil de formar para llegar a una conclusión; en casos así el estudiante puede formar sumas por parejas, para decir que, por ejemplo, el número 6, el 7 o el 8tiene más facilidad de ocurrir y el 2 y 12 que tienen menos chance de ocurrir. Si el estudiante considera todas las posibilidades de combinaciones que originan las sumas posibles, se espera que produzca una respuesta correcta (el 7 como la de más posibilidad, y 2 y 12 como las de menor posibilidad). Por otra parte, hay situaciones en la cuales el joven puede proponer uno de los casos en forma impulsiva, sin hacer una reflexión cuidadosa de las posibilidades ni recordar situaciones de su vida cotidiana en juegos como el parqués y dar una explicación defectuosa.

Indicador 5. *Compara resultados de experimentos aleatorios con los resultados previstos por un modelo matemático.*
Ítem 5.1 *Se lanza un dado 200 veces y se observa que el "5" ocurre 40 veces. Señale la afirmación con la que esté más de acuerdo:*

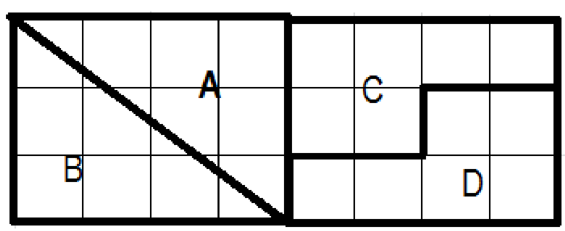
a) El resultado si es factible pues la probabilidad de ocurrencia del "5" es de $^1/_3$
b) El resultado no es factible pues la probabilidad de ocurrencia del "5" es de $^1/_6$
c) El resultado no es factible pues la probabilidad de ocurrencia del "5" es de $^1/_5$
d) El resultado si es factible pues la probabilidad de ocurrencia del "5" es de $^1/_6$

Este ítem, de opción múltiple, fue ajustado por nosotros con ayuda del asesor, su finalidad es evidenciar inclinaciones de los estudiantes respecto a dos posibles interpretaciones de la probabilidad, la clásica o la frecuencial.

Si un estudiante selecciona la opción *(a)* se interpreta que no reconoce las definiciones clásica ni frecuencial, ya que no se estable ningún tipo de probabilidad en la cual la probabilidad sea igual 1/3; si selecciona la opción *(b)*, puede ser que reconozca la probabilidad clásica; además puede creer que la diferencia entre los valores del resultado experimental (la razón de 40 a 200 o de 1 a 5) respecto a la de 1 a 6, es muy grande, a pesar de que por azar podría presentarse una diferencia de esta magnitud; por lo tanto no concilia la visión frecuencial con la clásica; en el caso que se considere la opción *(c)*, se puede pensar que el estudiante ve como más natural una asignación frecuencial y posiciona esta asignación antes que la clásica, ya que al establecer la probabilidad frecuencias se obtiene un 40/200 que es igual a 1/5; cuando se da la selección de la opción *(d)* el estudiantes está aceptando que a pesar de que hay una leve diferencia entre lo que arroja el resultado experimental (40 a 200) y la probabilidad clásica de 1/6, reconoce que la situación presentada es posible, por lo tanto adopta una postura en que puede aceptar ambas formas de asignación de la probabilidad.

Indicador 6. *Conjetura acerca del resultado de un experimento aleatorio usando proporcionalidad y nociones básicas de probabilidad.*

Ítem 6.1 *Luis es un lazador de flechas que se ve enfrentado a un tablero de tiro al blanco de la siguiente forma:*



Si se lanza una flecha en dirección al blanco, y tiene el mismo chance de impactar la flecha en cualquiera de los 24 recuadros pequeños, ¿en cuál de las cuatro áreas (A, B, C o D) hay más posibilidad de que la flecha caiga?

Ítem 6.2 *Al lanzar una moneda equilibrada SEIS veces ¿cuál de las siguientes secuencias tiene mayor probabilidad de ocurrencia?*

a) CCCSSS

b) SCCSCS

c) SCSSSS

d) CSCSCC

e) Todas las secuencias son igualmente probables

Ítem 6.3 *Selecciona con cuales de las siguientes explicaciones estás de acuerdo. Cada una de ellas se refiere a los posibles resultados de lanzamientos de monedas en el ítem anterior.*

a) Como la moneda es equilibrada, la cantidad de caras y sellos debería ser aproximadamente *igual.*

b) Debido a que el lanzamiento de una moneda es aleatorio, su resultado debería alternar frecuentemente entre caras y sellos.

c) Si repetidamente se lanza una moneda 6 veces, cada una de las secuencias podría ocurrir casi tan frecuentemente como cualquier otra secuencia.

d) Si en una secuencia se consiguen dos caras seguidas, aumenta la probabilidad de obtener sello en el siguiente lanzamiento.

e) Cualquier secuencia de 6 lanzamientos tiene exactamente la misma probabilidad de ocurrencia.

En el primer caso, se espera que la respuesta dada sea similar a: 'En las cuatro áreas hay la misma posibilidad de que la flecha caiga, ya que las áreas son iguales'. Además con los distractores se pretende evaluar las siguientes dificultades: si contesta (*A*), (*C*) o (*D*) puede pensar que la posición de las zonas influye (es decir, creer que dar en el blanco, requiere que la zona debe contener más superficie cercana al centro); además, si contesta (*B*) no tienen en cuenta la equiprobabilidad de las zonas de acuerdo a una asignación proporcional geométrica.

El segundo caso, el ítem fue tomado de Fernández, Sarmiento y Soler (2008, p. 76) y allí se hace el siguiente análisis, se pretende que el licenciado en formación conjeture acerca del resultado de un experimento aleatorio usando nociones básicas de probabilidad, calculando la probabilidad de un evento simple y se espera que concluya la respuesta (*e*): todas las secuencias son igualmente probables. El experimento aleatorio se repite en seis ocasiones donde la probabilidad permanece constante e igual a½; y como cada resultado corresponde a una muestra de un evento simple del experimento, entonces cada secuencia tienen la misma probabilidad de ocurrir (equiprobabilidad). Además, con los distractores se pretende evaluar las siguientes dificultades: si contesta (*a*), (*b*) o (*d*) puede estar pensando, asumiendo que la moneda está equilibrada, que la cantidad de caras y sellos es aproximadamente igual, pero no tendría en cuenta que cada secuencia es un evento simple de un espacio muestral equiprobable, ni tampoco que los seis elementos de cada secuencia son el resultado de seis pruebas independientes de Bernoulli. Finalmente, si contesta *(c)* se puede estar pensando que la probabilidad de la secuencia es proporcional a la mayor cantidad de uno de los resultados, en este caso particular del sello.

El ítem del tercer caso fue tomado de Fernández, Sarmiento y Soler (2008, p. 76) y allí se pretende hacer un seguimiento al posible razonamiento que consideró el licenciado en formación en el ítem anterior, analizando con más fundamento la razón por la que eligió dicha respuesta. Las respuestas que se consideran correctas son las opciones (*c*) y (*e*), siempre y cuando se correspondan con la respuesta que se considera correcta en el ítem anterior. Las demás opciones son consideradas incorrectas, y como se supone que se pueden establecer en este ítem, con respecto a las del ítem anterior, pueden surgir elecciones como: la opción (*a*), que se asocia con las elecciones (*a*), (*b*) o (*d*) del ítem anterior; se supondrá que posiblemente la persona no se fija en el proceso de obtención de resultados sino en la cantidad total de caras o de sellos obtenidos; la opción (*b*), que se relaciona con la elecciones (*b*) o (*d*) del ítem anterior, se piensa que el profesor en formación se fija en el orden de obtención de los resultados más que en la cantidad total de caras o de sellos obtenidas, y la opción (*d*), que se relaciona con las elecciones (*b*) o (*d*) del ítem anterior, su elección podría indicar un razonamiento errado acorde con la falacia del jugador.

Indicador 7. *Interpreta conceptos básicos de conteo y probabilidad.*
Ítem 7.1*Una clase está formada por 10 chicos y 10 chicas; la mitad de las chicas y la mitad de los chicos han elegido francés como asignatura optativa. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona elegida al azar sea chica o estudie francés?*

Se espera que al calcular la probabilidad se concluya la siguiente respuesta: 'la probabilidad de que una persona elegida al azar sea chica o estudie francés es de 75%'.

Para mostrar las probabilidades anteriores el estudiante pueda hacer uso de la siguiente tabla de datos, donde clasifica los elementos a utilizar:

	Hombre	Mujer	Total
Estudia francés	5	5	10
No estudia francés	5	5	10
Total	10	10	20

Se reconoce que cada celda subrayada tiene un 25% de la población total, que para este caso serían 20 personas entre hombres y mujeres. Consideramos que si contesta otra respuesta no está teniendo en cuenta los diferentes tipos de probabilidad. Un posible caso que se puede evidenciar es que el estudiante considere el problema como un proceso lógico y exprese respuestas como 50%, esta puede surgir de la interpretación del '**o**' como exclusivo, de tal forma que el estudiante descarte la posibilidad de que surjan los dos casos. Otro puede ser cuando el maestro en formación piense que se enfatiza en el momento en que suceden las dos situaciones al tiempo, es decir una probabilidad del 25%.

.**Indicador 8.** *Interpreta conceptos de probabilidad condicional e independencia de eventos.*
Ítem 8.1 *De cien estudiantes que presentaron el examen de diagnóstico, cuarenta eran hombres y sesenta pasaron el examen porque alcanzaron el nivel predeterminado. La clasificación de hombres y mujeres fue la siguiente:*

	Hombres (H)	*Mujeres (M)*
Pasaron (P)	*24*	*36*
No Pasaron (N)	*16*	*24*

a) Determine la probabilidad de que sea hombre y haya pasado.
b) Determine la probabilidad de que sea hombre.
c) ¿Influye el género para que el estudiante pase?

En este ítem[2], se plantean preguntas de forma abierta que pretenden hacer que el estudiante pueda evidenciar e interpretar situaciones a partir del conector '**y**' para el caso de la parte *a)*, como un elemento que sugiere la ocurrencia de las dos situaciones al mismo tiempo (que sea hombre y haya pasado el examen) y lo diferencia del literal *b)* en donde no hay conectores; y luego, en el literal *c)*, se plantea una pregunta que invita a explorar si el género es independiente del hecho de pasar el examen.

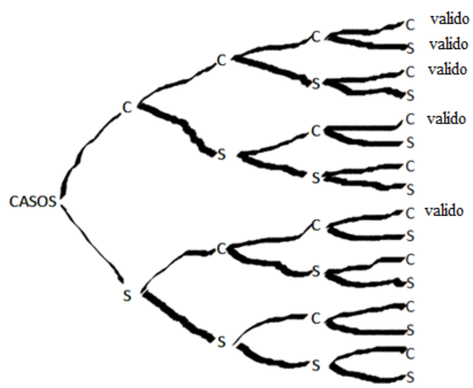
La solución de la primera probabilidad se realiza identificando la información de la casilla de la tabla en donde se consigna el género hombre y el evento pasar el examen, y luego se divide este valor por el total de personas, es decir $P(H \cap P) = \frac{24}{100} = 0{,}24$; otra forma de determinar la probabilidad es por medio de propiedad $P(H \cap P) = P(H)P(P) = \left(\frac{40}{100}\right)\left(\frac{60}{100}\right) = 0{,}24$. Ahora para solucionar la segunda pregunta, se debe considerar en la tabla el total de hombres, es decir, la suma de los casos, ser hombre y haber pasado, y ser hombre y no haber pasado, y luego se divide este valor por el total de personas, con lo cual se tiene que $P(H) = \frac{40}{100} = 0{,}4$. Finalmente, en la última pregunta se evidencia la independencia de los eventos, si el estudiante puede establecer que para cada población en cada género, las cantidades correspondientes de los que pasan son proporcionales. En otras palabras, para calcular la probabilidad de la mujer se tiene que en total hay 60 mujeres, y que de esas, sólo pasaron 36, por lo cual $P(M) = \frac{36}{60}$; de la misma forma, se tiene que

[2]El enunciado de este ítem fue tomado de http://colposfesz.galeon.com/est501/probabi/testtodo.htm pero las preguntas fueron ideadas por los autores.

para hombres hay un total de 40, de los cuales sólo 24 pasaron, entonces $P(H) = \frac{24}{40}$, como $P(H) = P(M)$, se concluye que el género no afecta en este prueba.

Indicador 9. *Calcula la probabilidad de eventos usando métodos diversos.* ***Ítem 9.1*** *Se lanzan cuatro monedas equilibradas, Si se definen los sucesos:* $A = \text{“al menos dos sean caras”}$ $B = \text{“al menos dos sean sellos”}$ *¿Cuál es la probabilidad de que suceda A y no suceda B en el experimento?*

Se espera que los métodos empleados por los estudiantes sean gráficos. Por ejemplo se cree que pueden usar un diagrama de árbol; en cuyo caso deberían seleccionar los resultados que le sirvan a partir de las ramas de la representación y luego decidir cuál es válido para obtener la probabilidad. Esto se ilustra en el siguiente gráfico en donde se puede ver que la probabilidad de que suceda A y no suceda B es de $5/16$.



Otra estrategia a la que pueden recurrir los estudiantes es contar cuántos elementos puede tener el espacio muestral, y determinar con éxito que son 16, para enseguida presentar el evento A y seleccionar de éste, cuáles de los elementos no son válidos según el evento B, como se ilustra a continuación.

$$A: \left\{ \begin{matrix} \cancel{(C,C,S,S);(S,S,C,C);(S,C,C,S);(C,S,S,C);(C,S,C,S);(S,C,C,S)};(C,C,S,C); \\ (C,C,C,S);(S,C,C,C);(C,S,C,C),(C,C,C,C) \end{matrix} \right\}$$

En consecuencia se debía deducir que la probabilidad de que suceda A y no suceda B es de $5/16$, debido a que hay 5 posibles resultados favorables y hay 16 situaciones al lanzar cuatro monedas, y observar sus resultados. Un posible error que pueden cometer los estudiantes al usar esta estrategia es no identificar acertadamente el total de elementos del espacio muestral. Por ejemplo, puede concluir que la probabilidad es de $5/11$, si el estudiante piensa en el evento A, como si fuera el espacio muestral.

Indicador 10. *Resuelve problemas usando conceptos básicos de conteo y probabilidad.*
Ítem 10.1 *En dos cajas A y B se introducen canicas rojas y azules en las siguientes cantidades*

Caja	*Rojas*	*Azules*
A	*12*	*8*
B	*90*	*59*

Cada caja se revuelve vigorosamente. Se elige una de las cajas y sin mirar, una persona saca una canica. Si la canica es azul gana $120.000 ¿cuál de las cajas da la mayor probabilidad de elegir una canica azul?

a) La caja A (con 12 rojas y 8 azules)
b) La caja B (con 90 rojas y 59 azules)
c) Las dos cajas tienen la misma probabilidad
d) No es posible determinar las probabilidades

En este ítem se espera que el estudiante realice la comparación de los eventos de interés, para lo cual se deberá apoyar en elementos de probabilidad clásica que relacionen la posibilidad de sacar una canica azul de cada caja, para que pueda evidenciar cual caja es más favorable. Para este ítem se considera que la respuesta correcta es la opción *(a)*. En efecto, la probabilidad de escoger una canica azul en la caja A es 8/20, mientras que la probabilidad de escoger una canica azul en la caja B es 59/149; es decir, que en la caja A por cada 3 rojas hay 2 azules y en contraste en la caja B hay una relación no simplificable de 149 rojas por 59 azules.

Si el estudiante selecciona la opción *(b)*, probablemente no establece una comparación entre las cajas A y Bdado que la probabilidad de la caja A es un poco mayor a la de la caja B.Si escoge la opción*(c)*, puede estar realizando cálculos aproximados en los que no detecta la diferencia. Si el estudiante piensa en la opción *(d)*, puede ser que no reconoce como calcular probabilidades en eventos simples, es decir no reconoce la probabilidad clásica de eventos.

IV. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS DE LA PRUEBA PILOTO

La aplicación de esta prueba se realizó el 6 de Septiembre en las horas de la tarde. Para aplicar la fue necesario realizar un replanteamiento del cuestionario para una duración de 30 minutos, para ello se dividió el cuestionario en tres partes, dando equilibrio a la cantidad de ítems que se plantearon en ellas.

Los 30 minutos se trabajaron en el espacio de la clase de Lenguajes de Programación, cedidos amablemente por el profesor encargado; en el salón había un total de 23 estudiantes que se organizaron en ocho grupos, siete de ellos constituidos por tres estudiantes y uno de dos estudiantes; por tal motivo se tomó la decisión de que a cada grupo se le dieran los tres cuestionarios diferentes, con el fin de que trabajarán en forma individual.

El total de ítems que se aplicaron y los porcentajes de cobertura de su implementación respecto al total de estudiantes se muestran en el siguiente cuadro.

Ítems	*Cobertura*
1.1	34,8%
1.2	30,4%
2.1	34,8%
3.1 (v1)	30,4%
3.1 (v2)	34,8%
3.2	34,8%
4.1	34,8%
5.1	30,4%
6.1	30,4%
6.2	34,8%
6.3	34,8%
7.1	30,4%
8.1	34,8%
9.1	100,0%
10.1	70,0%

En el desarrollo de la actividad, se evidencia que hay dos estudiantes que desarrollan el cuestionario en un tiempo aproximado de 10 a 15 minutos, el resto de estudiantes concluyen el cuestionario en un tiempo de 20 a 30 minutos.

Análisis sobre los resultados

En el análisis que sigue se identifican algunas de las respuestas dadas por los estudiantes a los diferentes ítems, para los ítems donde sólo se pide marcar una respuesta se hacen comentarios con respecto a los porcentajes obtenidos en relación a la respuesta marcada con respecto a lo planteado en el Diseño del Instrumento, para las demás se ilustran y comentan los ejemplos; en general, el orden de presentación va desde las respuestas esperadas hasta las repuestas en donde se evidencia errores y mayores dificultades. Después se presenta una tabla con algunos de los tipos de respuesta previamente considerados en el diseño del instrumento, y las que emergieron como resultado de los análisis. Y por último se presentan las aclaraciones correspondientes para los cambios de acuerdo a los resultados conseguidos.

Ítem 1.1 *¿Qué es más posible que tome mañana en el desayuno: café o chocolate? Explique su respuesta.*

Comentarios. Este ítem fue ideado para analizar las respuestas que se refieren a un evento seguro, aleatorio e imposible a partir del uso de algunas palabras que hacen referencia a estos, teniendo en cuenta la experiencia de los estudiantes en la posibilidad o imposibilidad de ocurrencia de eventos cotidianos.

Ejemplo 1.1.1

Chocolate por que es la bebida "Favorita" en mi familia
Chocolate. Todos los días. desayuno lo mismo.

Los dos ejemplos de respuestas anteriores ilustran casos en donde se evidencia un evento seguro, ya que no consideran otra bebida como posible; en el primer caso porque el término "Favorita" excluye otro tipo de bebida, y el segundo caso porque el cuantificador "Todos los días" hace referencia a tomar siempre lo mismo.

Ejemplo 1.1.2

LO MÁS POSIBLE ES QUE TOME CAFÉ, PORQUE ES LO QUE SE PREPARA FRECUENTEMENTE EN CASA.

Se reconoce que es un evento aleatorio, ya que el estudiante esta algo inseguro acerca de qué va a tomar al día siguiente porque usa la expresión 'lo más posible'.

Ejemplo 1.1.3

¿usted o yo?
A mi me gusta más el cafe.
Como no se que le gusta a usted hay la misma posibilidad ~~se~~ que tome cafe o chocolate.

En esta respuesta se plantea dos tipos de respuesta, una es desde su propia perspectiva donde es más probable que tome café pero no se considera un evento seguro y desde la perspectiva de otra persona manifiesta una incertidumbre con lo cual supone que existe en este caso la misma probabilidad dado que no conoce el resultado.

El consolidado de los resultados obtenidos se resume en la siguiente tabla:

Tipo de Respuesta	*Descripción*	*Ejemplos*	*Frecuencia*
R1.1.1	Representa un evento seguro.	*1.1.1*	75,0%
R1.1.2	Representa un evento aleatorio.	*1.1.2*	25,0%

Dados los resultados obtenidos se considera conveniente reformular el ítem encaminándolo a la misma situación cotidiana, pero donde se preste para categorizar un evento imposible; además, considerando el ejemplo *1.1.3* se decide centrar el ítem sólo para que el estudiante de una respuesta de forma personal.

Ítem 1.2 *Suponga que está en la estación de Transmilenio de la 72 a la 1 pm. ¿Qué es más probable, que se vaya de pie o sentado?*
Explique su respuesta.

Comentarios. A diferencia del ítem anterior, en este se pretende eliminar el evento imposible, y a la vez ver como los estudiantes comprenden las dos situaciones posibles a partir de los eventos seguro y aleatorio.

Ejemplo 1.2.1

Sentado, porqué a esa hora no hay tantas personas usando el servicio.

Sentado ya que uno se sienta en el suelo.

Que me vaya de pie, pues aunque no es hora pico mucha gente sale a su hora de almuerzo y utilizan el TM como medio de transporte para dirigirse a alguna parte...

Se puede evidenciar que son eventos seguros porque tienen en cuenta lo siguiente: siempre han usado el servicio de Transmilenio a esa hora, consideran otros factores como la hora de almuerzo, la cantidad de personas que usa el servicio en ese horario o la influencia de las rutas y lo que frecuentemente hace para ir sentado o de pie.

Ejemplo 1.2.2

Es más probable irse sentado a causa de que la mayor parte de las personas se encuentran en sus sitios de labor.

Se refiere a un evento aleatorio ya que no está seguro de la respuesta debido a sus experiencias, por tal motivo no sabe con seguridad si es posible ir sentado o de pie; además la expresión 'es más probable' implica que no es siempre va a suceder lo mismo.

El consolidado de los resultados obtenidos se resume en la siguiente tabla:

Tipo de Respuesta	*Descripción*	*Ejemplos*	*Frecuencia*
R1.2.1	Representa un evento seguro.	*1.2.1*	85,7%
R1.2.2	Representa un evento aleatorio.	*1.2.2*	14,3%

Dado que en este ítem se observa que la mayoría de los estudiantes se inclinan por el primer tipo de respuesta, se considera que el uso de términos de eventos aleatorios no es tan usual en los estudiantes, por lo que consideramos que la redacción del ítem se puede mejorar para que los estudiantes puedan usar terminología de este estilo.

Ítem 2.1 *Julián dice que en el juego de la pirinola (cuyas opciones son: pon 1, pon 2, toma 1, toma 2, toma todo y todos ponen) lo más probables es perder, Luis afirma que es más probable tomar uno y ganar todo. ¿Quién tiene la razón?*
¿Por qué?

Comentarios. Con este ítem se pretende ver como el estudiante comprende el arreglo de la probabilidad clásica a partir de los eventos ganar o perder, y con ello que se prediga si la posibilidad de ocurrencia de una situación es mayor que la de otra a partir de la situación dada.

Ejemplo 2.1.1

Ninguno las posibilidades son las mismas porque los dos tienen igual cantidad de opciones a su conveniencia.

En este ejemplo se reconoce los eventos ganar o perder, que son los componentes claves para responder al ítem donde se reconoce pero no se evidencia cómo analiza la equiprobabilidad de los eventos considerados.

Ejemplo 2.1.2

ninguno, todo tiene lamisma probabilidad

Se reconoce que en este caso da una respuesta semejante al ejemplo anterior, sin embargo, no justifica y reconoce la equiprobabilidad de todos los sucesos.

Ejemplo 2.1.3

Julian, porqué la Probabilidad de ganar es mucho más Poquita que la de ganar en el juego

Se reconoce que no se analiza los eventos ganar o perder, sino que se inclina más por uno de los dos sucesos del ítem, se cree que reconoce la equiprobabilidad de los elementos del espacio muestral de la pirinola, y con ello hace un conteo de elementos de los casos posibles para ver qué situación tiene más posibilidad; pero al parecer tuvo un lapsus al momento de justificar la respuesta por lo que confundió la palabra perder por la de ganar.

Ejemplo 2.1.4

La misma probabilidad ya que los 2 tienen la misma condicion.
Gana todo 1 de 6
Es mas probable ganar ya que 3/6 y la otra a 2/6.

Se realiza una doble solución a este ítem, primero compara las situaciones ganar o perder y establece la equiprobabilidad entre ellas; luego trata las situación de quien tiene la razón si Julián o Luis, en donde presenta una confusión en las situaciones ya que en el ítem se presenta la relación entre perder y ganar (3 a 2), y el estudiante hace la relación opuesta entre ganar y perder (3 a 2).

Ejemplo 2.1.5

Julian tiene la razon porque no es logico que consiga tomar una y tomar todo

No se admite la posibilidad de tomar uno y ganar todo debido a la interpretación literal que hace de *'y'*, considerándolo como un operador lógico en donde deben suceder las dos situaciones al mismo tiempo.

El consolidado de los resultados obtenidos se resume en la siguiente tabla:

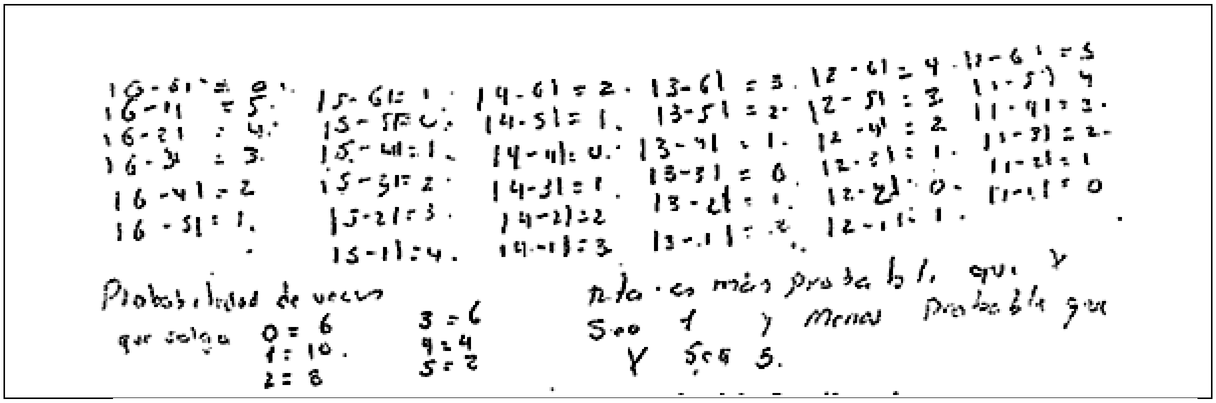
Tipo de Respuesta	*Descripción*	*Ejemplos*	*Frecuencia*
R2.1.1	Reconoce la equiprobabilidad de los eventos ganar y perder, y justifica.	*2.1.1*	25,0%
R2.1.2	Reconoce la equiprobabilidad de todos los sucesos, y no justifica.	*2.1.2*	25,0%
R2.1.3	Compara la probabilidad de las posturas de la situación y explica como las compara.	*2.1.3* y *2.1.5*	25,0%
R2.1.4	Reconoce la equiprobabilidad de ganar y perder, y adicionalmente compara las posturas de los problemas, justifica las dos posturas.	*2.1.4*	12,5%
R2.1.5	No da respuesta al ítem.		12,5%

Las palabras que más se usan para describir la situación probabilística por parte de los estudiantes son 'posibilidad' y 'probabilidad'. Se decide cambiar la redacción de una parte al ítem debido a que un porcentaje considerable no reconoce la equiprobabilidad de los eventos ganar y perder, y se cambia la afirmación de Luis por *'tomar uno <u>o</u> ganar todo'*.

Ítem 3.1 (v1) *Se lanzan dos dados equilibrados, sea X el valor absoluto de la diferencia de los dos números obtenidos. Ilustre utilizando algún medio de representación los posibles resultados asociados al valor de X. ¿Qué resultado es más probable y cual es menos probable?*

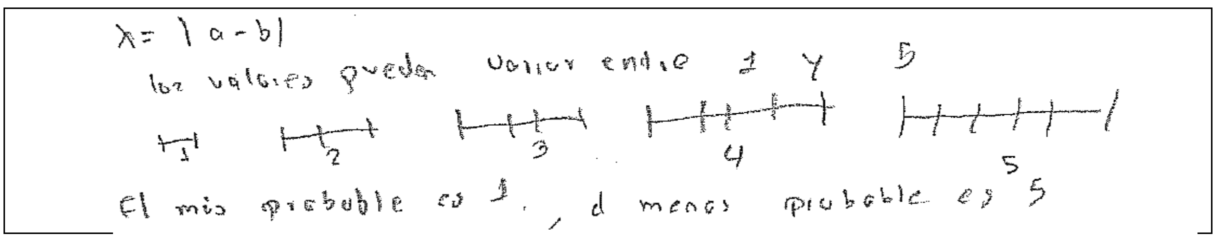
Comentarios. Con este ítem se busca que los estudiantes usen modelos gráficos para hacer conjeturas o pronósticos sobre la situación.

Ejemplo 3.1.1



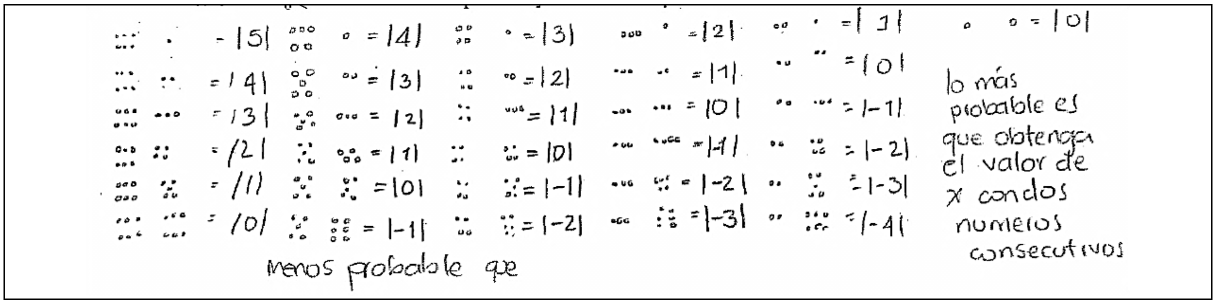
En este ejemplo se puede ver que en primera instancia se realizan todas las posibles diferencias con los números de los dados, que permite un conteo de cada uno de los casos.

Ejemplo 3.1.2



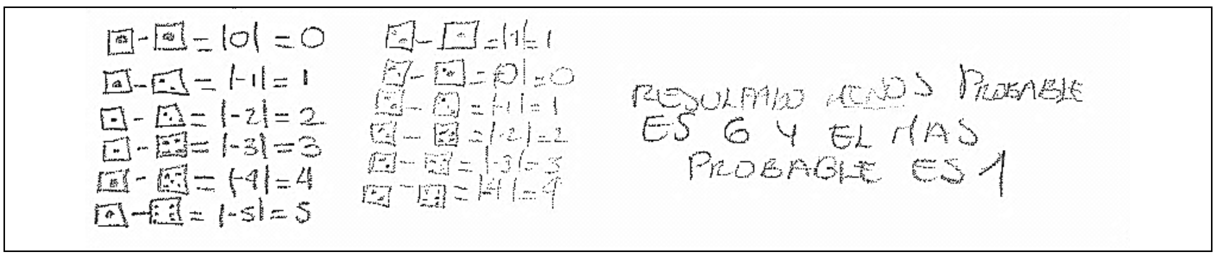
Esta respuesta considera sólo la diferencia desde el 1 hasta el 5, omitiendo el 0; no se evidencia algún tipo de sistema de conteo para reconocer el 1 como el más probable de suceder y el 5 como el menos probable. Se resalta que este estudiante presenta una gráfica algo diferente e inusual para mostrar el resultado, pues muestra segmentos que representan los números del 1 al 5.

Ejemplo 3.1.3



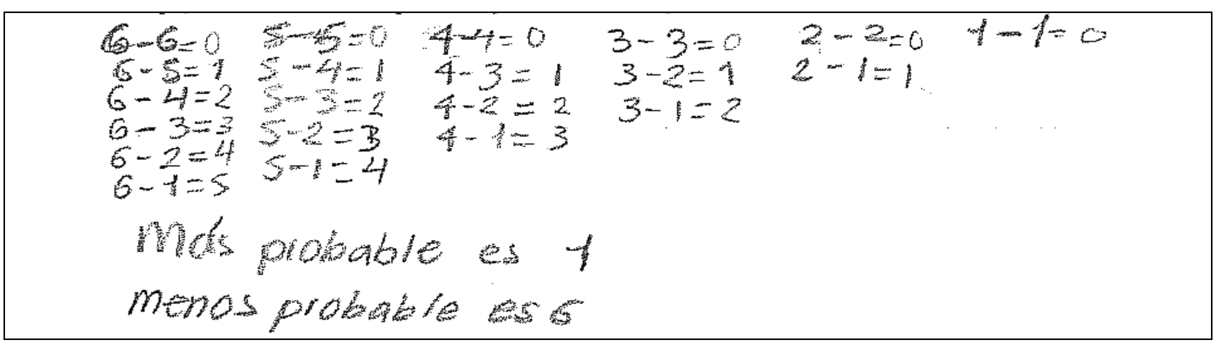
En este ejemplo se presentan algunas de las combinaciones del espacio muestral y reconoce una parte de la solución al hacer una descripción para el caso más probable y no describir cuando sucede el evento con menor probabilidad.

Ejemplo 3.1.4



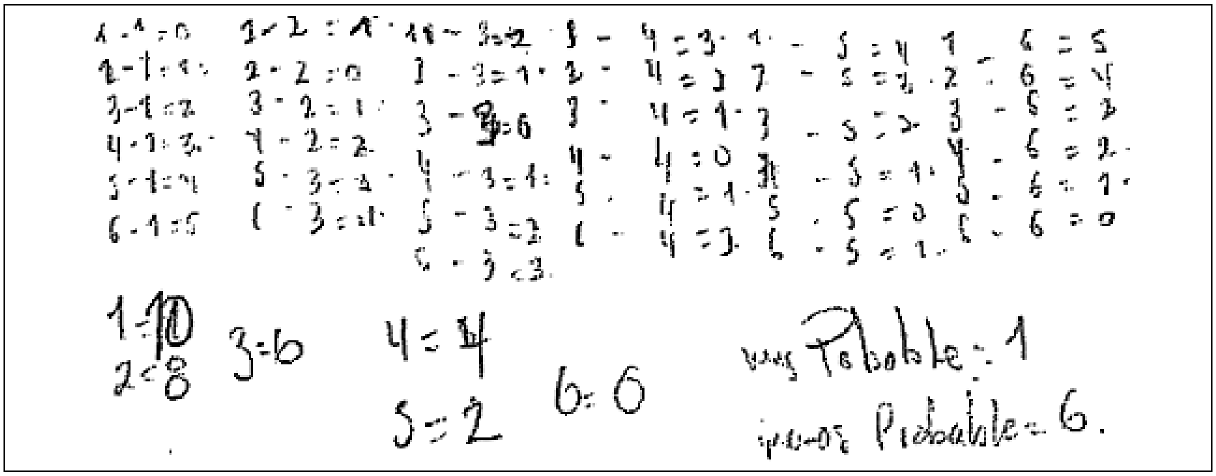
Se evidencia que sólo se realiza una parte del espacio muestral y se infiere que a partir de la representación presentada da su respuesta, pues expresa que el resultado menos probable es el 6–sin haberlo considerado en las diferencias– y que el resultado más probable es el 1, debido a que es el más frecuente en la representación (aparece tres veces).

Ejemplo 3.1.5



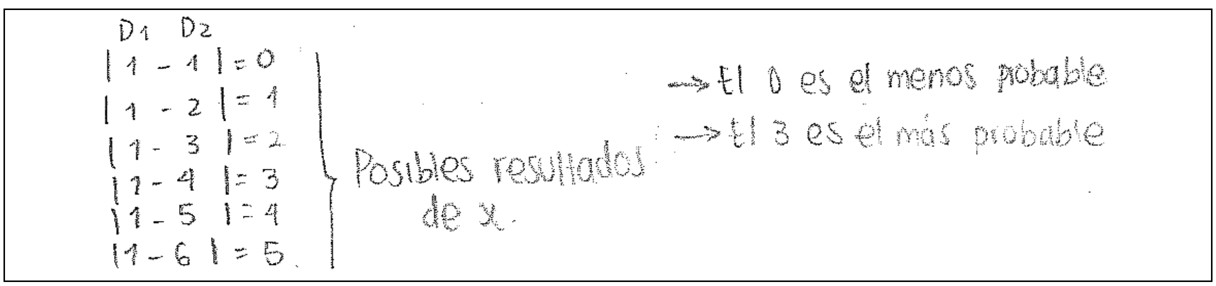
Este es un caso peculiar, en el que se intenta representar todo el espacio muestral; no obstante, no tiene en cuenta diferencias negativas como: $(3-4), (4-6)$, etc. En este caso, como en otros, se considera el número “6” como menos probable.

Ejemplo 3.1.6



En este ejemplo se reconoce todo el espacio muestral, pero considera el número 6 como un posible resultado, y omite la ocurrencia de la diferencia 0 ya que no expresa la frecuencia que hay para este número. Se concluye que sólo se usa como resultado los números que aparecen en las caras del dado.

Ejemplo 3.1.7



En este ejemplo sólo se reconoce una parte del espacio muestral ya que el dado 1 se fija mientras el dado 2 se pone a variar. Se supone que este hecho es el causante de las respuestas presentadas.

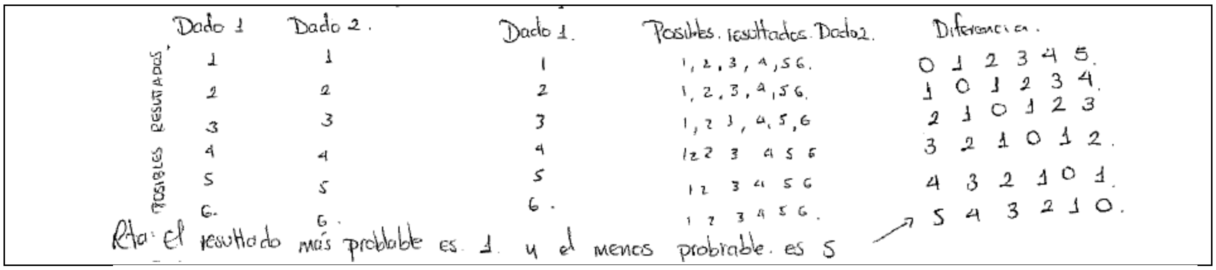
El consolidado de los resultados obtenidos se resume en la siguiente tabla:

Tipo de Respuesta	*Descripción*	*Ejemplo*	*Frecuencia*
R3.1.1	Hace conjeturas y representa todo el espacio muestral, pero no usa modelos gráficos.	*3.1.1* y *3.1.6*	28,6%
R3.1.2	Hace conjeturas, pero no representa el espacio muestral, ni usa modelos gráficos.	*3.1.2*	14,3%
R3.1.3	Hace conjeturas, representa parcialmente el espacio muestral y no usa modelos gráficos.	*3.1.3*, *3.1.4*,*3.1.5* y *3.1.7*	57,1%

Ítem 3.1 (v2) *Se lanzan dos dados equilibrados, sea X el valor absoluto de la diferencia de los dos números obtenidos. ¿Qué resultado es más probable y cual es menos probable? Justifique su respuesta utilizando algún medio de representación de los posibles resultados de X.*

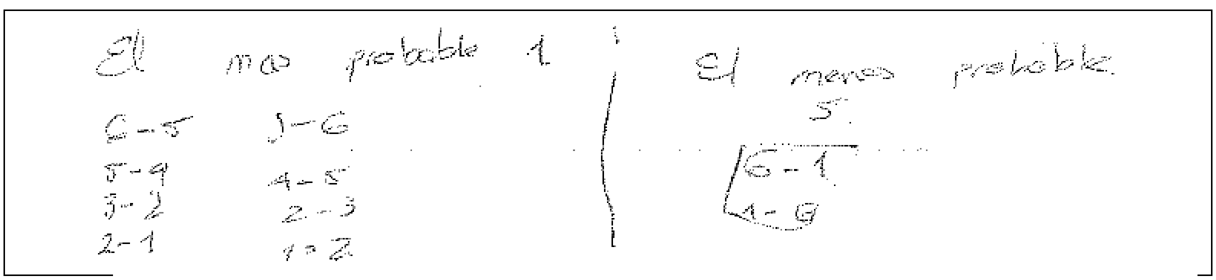
Comentarios. Este ítem es semejante al anterior ya que se presenta la misma situación, pero con algunos cambios en la redacción, se espera que se presenten los mismos resultados que en la primera versión y no se vean afectados por el enunciado.

Ejemplo 3.1.8



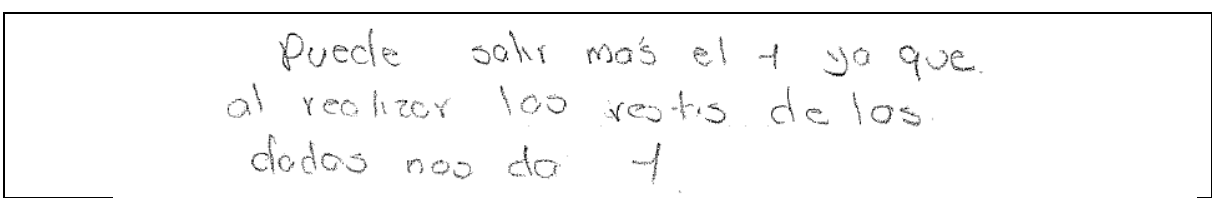
Elabora todo el espacio muestral a partir de una organización tabular de la situación, hecho previsto en el análisis del ítem; es un ejemplo que hace evidente el uso de un modelo esquemático para mostrar al 1 como el elemento más probable, al 5 como el elemento menos probable y 0 como un valor que puede ocurrir.

Ejemplo 3.1.9



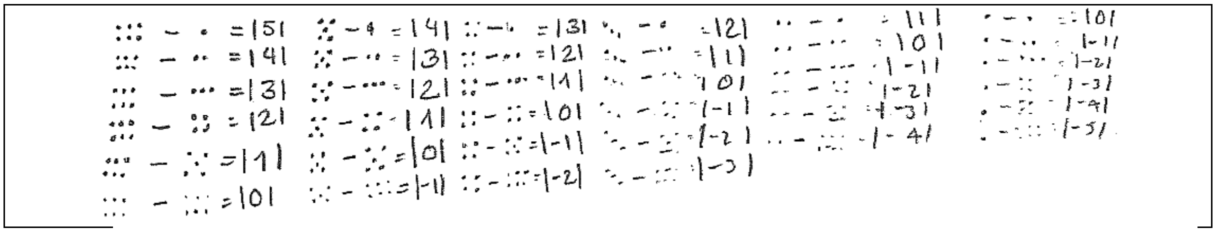
Presenta respuesta al evento más y menos probable, dando algunos casos, no todos, donde se cumplen las respuestas proporcionadas.

Ejemplo 3.1.10



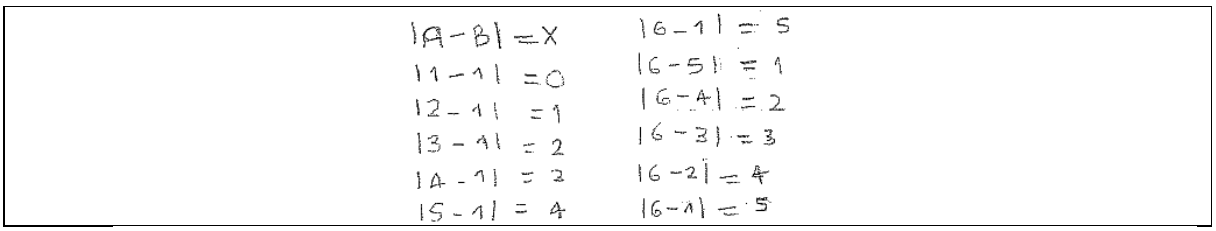
Responde sólo al evento más probable, sin justificar ejemplificar la menor frecuencia de otras diferencias

Ejemplo 3.1.11



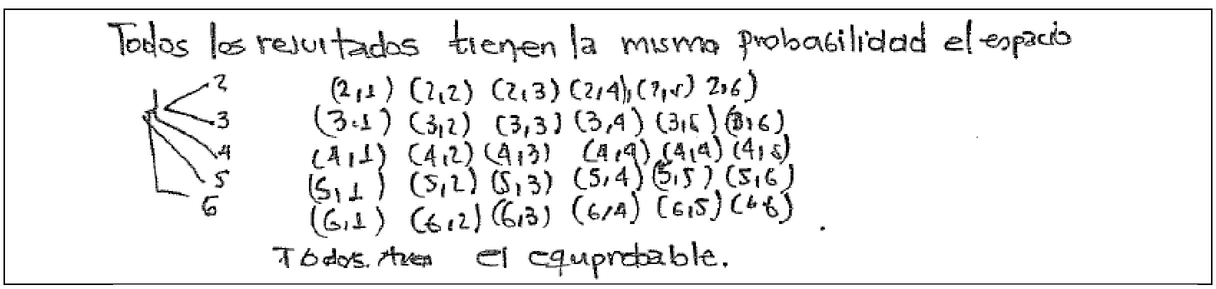
Aunque realiza todo el espacio muestral, no presenta la respuesta concreta a la pregunta del ítem.

Ejemplo 3.1.12



Presenta parcialmente el espacio muestral, sin embargo, no da respuesta a la pregunta del ítem, se evidencia que reconoce la idea de diferencia de dos dados al usar la expresión $|\mathrm{A} - \mathrm{B}| = \mathrm{X}$.

Ejemplo 3.1.13



Presenta casi todo el espacio muestral–al comienzo en forma de árbol para la parejas asociadas a 1, excepto el 1 con el 1, y luego usando notación de parejas– pero no muestra las diferencias que genera la variable implicada (valor absoluto de diferencia de resultados). Por lo tanto no se identifica que el estudiante reconozca el evento con más y menos probabilidad de suceder. Por último, alude a la equiprobabilidad de algo que no concreta.

El consolidado de los resultados obtenidos se resume en la siguiente tabla:

Tipo de Respuesta	*Descripción*	*Ejemplo*	*Frecuencia*
R3.1.4	Hace conjeturas, representa todo el espacio muestral, y usa modelos gráficos.	*3.1.8*	25,0%
R3.1.5	Hace conjeturas y representa parcialmente el espacio muestral, pero no usa modelos gráficos.	*3.1.9*	25,0%
R3.1.6	Hace conjeturas, no representa el espacio muestral y no usa modelos gráficos.	*3.1.10*	12,5%
R3.1.7	No hace conjeturas, representa todo el espacio muestral, pero no usa modelos gráficos.	*3.1.11*	12,5%
R3.1.8	No hace conjeturas, representa parcialmente el espacio muestral, pero no usa modelos gráficos.	*3.1.12*	12,5%
R3.1.9	No hace conjeturas, representa parcialmente el espacio muestral y trata de usar modelos gráficos.	*3.1.13*	12,5%

En el desarrollo de las dos versiones del ítem*3.1* los estudiantes presentan gran variedad de resultados; lo que más se identifica es que se centran en presentar el espacio muestral de manera completa o parcial, por tal motivo no siempre llegan a los mismos resultados. En varias de las respuestas presentadas por los estudiantes, se considera el caso del número "6" aunque no sea posible tal diferencia; quizás los estudiantes en esta situación están considerando este número debido a que los dados tienen el número '6' en una de sus caras.

Debido a que sólo el 25,0% de la población utiliza un sistema de representación en las respuestas de las dos versiones del ítem; se decide proponer una modificación al ítem, donde el estudiante debe seleccionar una representación que considere como más adecuada para dar solución al ítem.

Ítem 3.2 *Se lanza una moneda equilibrada cuatro veces. Si se definen los sucesos:*

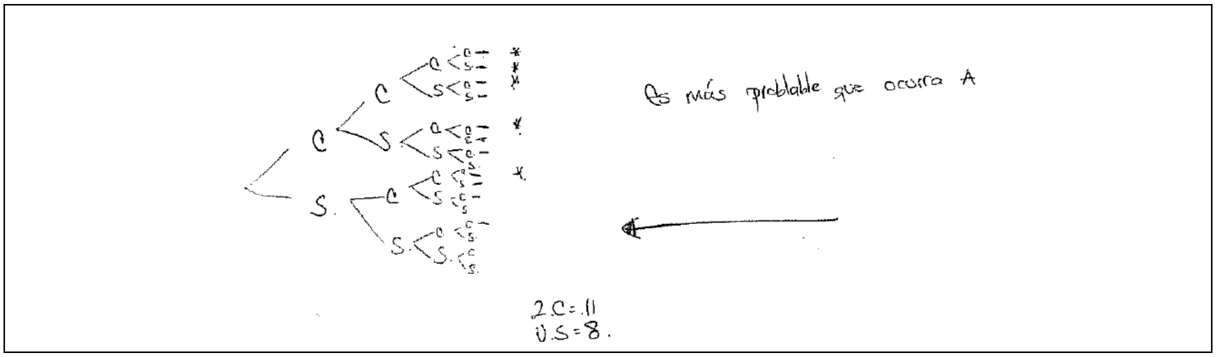
A = *"al menos salen dos caras"*

B = *"el último resultado es sello"*

Represente los posibles resultados asociados a los sucesos A ó B, utilizando métodos gráficos, listas o tablas. ¿Cuál es más probable que ocurra?

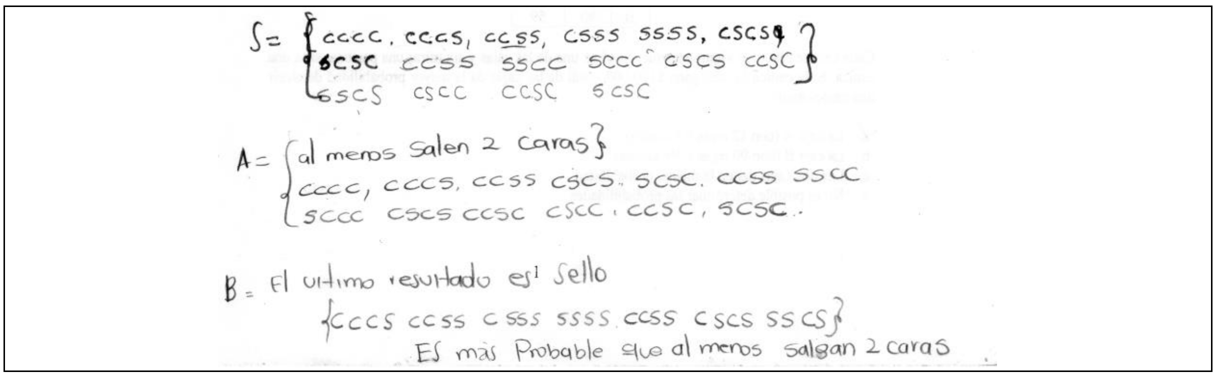
Comentarios. Se espera que los estudiantes empleen métodos gráficos para dar solución al ítem utilizando algunos de los que se habían considerado en el diseño del instrumento u otros no previstos.

Ejemplo 3.2.1



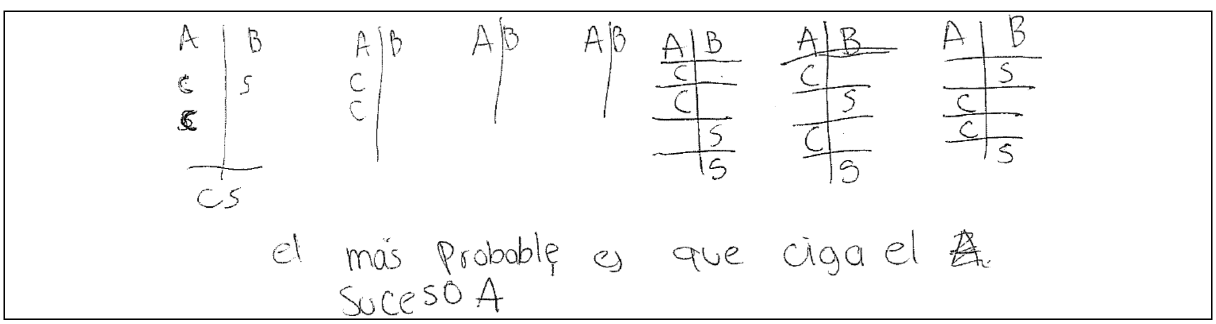
Usa un diagrama de árbol, que permite identificar la ocurrencia delos dos sucesos en cuestión, para luego concluir cual suceso es más probable.

Ejemplo 3.2.2



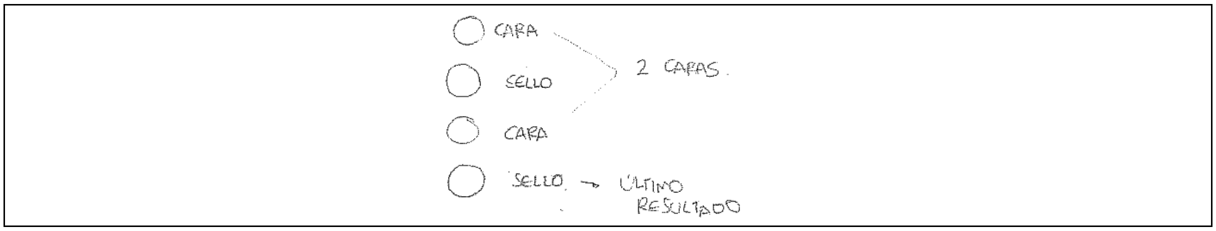
Construye todo el espacio muestral de lanzar cuatro veces una moneda, y muestra los elementos de los sucesos *A* y *B*, conjuntos claves para reconocer la solución del ítem; y concluye cual es el suceso más probable.

Ejemplo 3.2.3



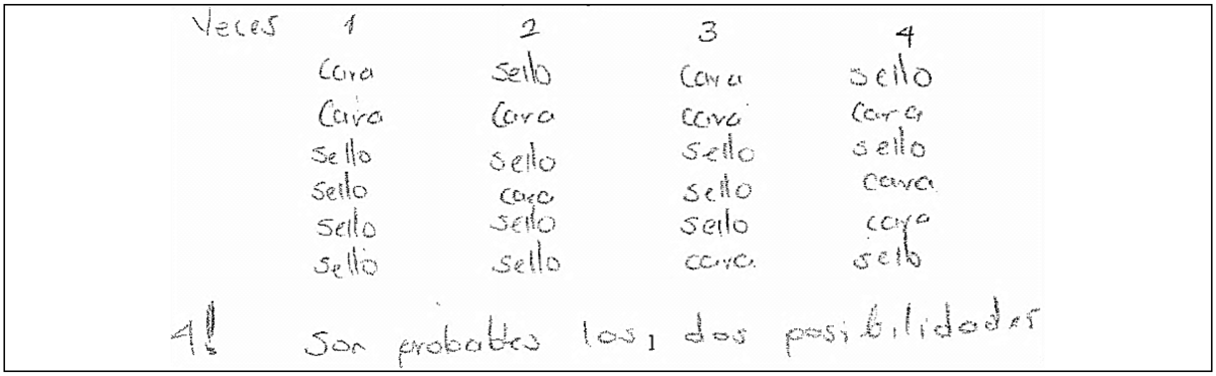
Responde con un diagrama no previsto en el diseño del ítem, que aparentemente genera listados de posibilidades. Con esta representación construye algunos de los elementos del espacio muestral que parecen sugerir que el suceso *A* tiene más probabilidad de ocurrir.

Ejemplo 3.2.4



Sólo se presenta un elemento del espacio muestral donde ocurren los dos sucesos simultáneamente, es decir, donde salen dos caras y dos sellos y el último lanzamiento es sello. Además no alude respecto a cuál evento es el más probable.

Ejemplo 3.2.5



Intenta producir una lista incompleta de elementos del espacio muestral donde se identifican elementos que satisfacen la condición de uno o del otro evento, o de ninguno de ellos. No se identifica conexión alguna entre el listado producido, el número 4! y la afirmación de que los dos eventos sean igualmente probables.

El consolidado de los resultados obtenidos se resume en la siguiente tabla:

Tipo de Respuesta	*Descripción*	*Ejemplo*	*Frecuencia*
R3.2.1	Hace conjeturas, representa todo el espacio muestral, y usa modelos gráficos.	*3.2.1*y *3.2.2*	25,0%
R3.2.2	Hace conjeturas, representa parcialmente el espacio muestral, y usa modelos gráficos.	*3.2.3*y*3.2.5*	37,5%
R3.2.3	No hace conjeturas y representa casos del espacio muestral, pero no usa modelos gráficos.	*3.2.4*	25,0%
R3.2.5	No da respuesta al ítem.		12,5%

El ítem no se modifica debido a que los resultados obtenidos reflejan en buena cantidad de respuestas (62,5%) la explicitación de conjeturas y el uso de modelos gráficos.

Ítem 4.1 *Si se lanzan dos dados y se suman los números que se encuentran en la parte superior. ¿Cuál resultado piensa que tiene más y cual resultado tiene menos chance de ocurrir? Explique sus respuestas.*

Comentarios. Se espera que los estudiantes conjeturen sobre resultados que tienen más y menos chance de ocurrir para luego poner a prueba las predicciones mediante el análisis del espacio muestral.

Ejemplo 4.1.1

1+1=2 1+2=3 1+3 4 1+4 5 1+5 6 1+6 7
2+1 3 2+2 4 2+3 5 2+4 6 2+5 7 2+6 8
3+1 4 3+2 5 3+3 6 3+4 7 3+5 8 3+6 9
4+1 5 4+2 6 4+3 7 4+4 8 4+5 9 4+6 10
5+1 6 5+2 7 5+3 8 5+4 9 5+5 10 5+6 11
6+1 7 6+2 8 6+3 9 6+4 10 6+5 11 6+6 12

el que tiene más es el 7 y el 2 y el 12 tienen menos probabilidad

Plantea todo el espacio muestral, explicitando que el número 7 es el resultado más probable, y que los números2 y12 son los resultados menos probables de ocurrir.

Ejemplo 4.1.2

la suma o resultado de ella que menos posibilidades tiene de salir es 12, 11, 2 y 3 ya que en los números solo se pueden tener con una posibilidad de suma. Considero que las otras sumas o sea, de 4 a 10 tienen más posibilidades en salir.

Reconoce que los resultados varían entre los números 2 y el 12, sin embargo, a diferencia del ejemplo anterior en este se genera una partición de menos probables son el 12, 11, 2 y 3, que contrasta con el resto de posibilidades (del 4 al 10) calificándolas de más probables.

Ejemplo 4.1.3

7 es más problable ya que se puede formar

dado 1 dado 2 ó dado 1 - dado 2
4 - 3 3 - 4
5 - 2 2 - 5
1 - 6 6 - 1

Sólo seda respuesta sobre el evento simple más probable; el argumento empleado es mostrar cuales son las parejas de números que al sumar dan como resultado el número 7. No alude a eventos menos probables.

Ejemplo 4.1.4

lo que tiene menos resultado es 12 por que para que salga 12, tiene que salir
seis 2 veces en el mismo dado, en cambio 6 tiene más posibilidades (3,3) (2,4) (5,1)

Argumenta que el número 12 es el que tiene menos probabilidad de ocurrir, debido a que sólo hay una pareja para formarlo, pero no está teniendo en cuenta que el número 2 tiene la misma probabilidad de ocurrir por el mismo argumento; considera el número 6 como el más probable, debido al número de parejas como se puede formar, pero no menciona al número 7 que tiene más posibilidades de ocurrir que el número 6.

Ejemplo 4.1.5

el 12 tiene más posibilidades porqe tiene mayor numeros
antecesores y al que tene menos es el 2
Porque solo da si los dados son 1 y 1

Considera que los números 12 y 2 tienen diferente posibilidad de ocurrencia, argumentando que el resultado que tiene más chance de ocurrir es el 12; menciona como justificación para ello que la cantidad de antecesores que le corresponde al 12 es mayor que la del 2.

El consolidado de los resultados obtenidos se resume en la siguiente tabla:

Tipo de Respuesta	*Descripción*	*Ejemplo*	*Frecuencia*
R4.1.1	Conjetura y pone a prueba las predicciones mediante el análisis de todo el espacio muestral.	*4.1.1*	12,5%
R4.1.2	Conjetura y pone a prueba las predicciones mediante el análisis de una parte del espacio muestral.	*4.1.2* y *4.1.4*	25,0%
R4.1.3	Conjetura y no pone a prueba las predicciones mediante el espacio muestral.	*4.1.5*	50,0%
R4.1.4	Hace una parte de la conjetura y prueba las predicciones mediante el análisis de casos del espacio muestral.	*4.1.3*	12,5%

El ítem no se cambia debido a que más del 50,0% de los estudiantes conjeturan y utilizan parcial o totalmente como referencia el espacio muestral normativo. Además, se observa diversidad de respuestas que pueden llegar a ser reproducidas nuevamente en la aplicación final.

Ítem 5.1 *Se lanza un dado 200 veces y se observa que el "5" ocurre 40 veces. Señale la afirmación con la que esté más de acuerdo:*

a) El resultado si es factible pues la probabilidad de ocurrencia del "5" es de $^1/_3$

b) El resultado no es factible pues la probabilidad de ocurrencia del "5" es de $^1/_6$

c) El resultado no es factible pues la probabilidad de ocurrencia del "5" es de $^1/_5$

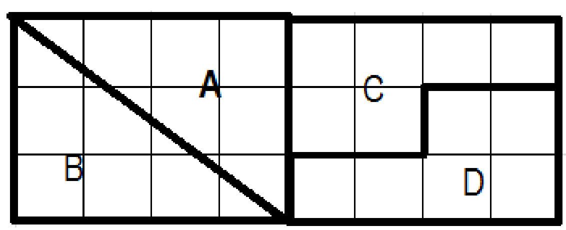
d) El resultado si es factible pues la probabilidad de ocurrencia del "5" es de $^1/_6$

Comentarios. Se espera que se comparen los resultados del experimento lanzar un dado 200 veces con los resultados previstos por la probabilidad clásica o frecuencial. Cuando se presenta el ítem en la aplicación hubo un error en la digitación, donde en vez de escribir 200 se escribió 20, por lo tanto los resultados que se presentan se limitan a reportar frecuencias y no interpretaciones.

Se observa que aproximadamente el 85,7% de la población percibe el resultado como no factible, es decir respuestas de *(b)* o *(c)*, y el resto, un 14,3%, lo percibe como factible respondiendo sólo la opción *(d)*. Del 85,7% de la población que considera los resultados como no factibles el 83,3% selecciona la opción *(b)* y el resto de la población la opción *(c)*.

El ítem no se modifica debido al error de redacción nombrado anteriormente.

Ítem 6.1 *Luis es un lazador de flechas que se ve enfrentado a un tablero de tiro al blanco de la siguiente forma:*



Si se lanza una flecha en dirección al blanco, y tiene el mismo chance de impactar la flecha en cualquiera de los 24 recuadros pequeños, ¿en cuál de las cuatro áreas (A, B, C o D) hay más posibilidad de que la flecha caiga?

Comentarios. Se espera que los estudiantes realicen conjeturas acerca de una situación aleatoria en la cual debe comparar proporciones de áreas y nociones básicas de probabilidad para expresar los resultados.

Ejemplo 6.1.1

Es la misma posibilidad, ya que las áreas de las figuras son iguales

Argumentan que las áreas de las zonas son iguales, y en consecuencia reconoce la equiprobabilidad geométrica de las áreas.

Ejemplo 6.1.2

Seria en A y B la región total fuera un rectángulo por lo tanto la franja A y B es de mayor área que de C y D

Reconoce la influencia que tiene la imagen sobre el ítem, ya que para el estudiante las áreas son diferentes por lo que las probabilidades también lo son.

Ejemplo 6.1.3

Hay más posibilidad que la flecha caiga en el área B.

Por algún motivo que no se identifica concluye que la zona *B* es más probable, a pesar de la equivalencia de áreas.

Ejemplo 6.1.4

en la C ó la D.

Considera que en las zonas *C* ó *D* son igualmente probables y descarta las zonas *A* y *B* que visualmente son diferentes, aun cuando tienen la misma área.

El consolidado de los resultados obtenidos se resume en la siguiente tabla:

Tipo de Respuesta	*Descripción*	*Ejemplo*	*Frecuencia*
R6.1.1	Conjetura que todas las zonas son equiprobables.	*6.1.1*	42,9%
R6.1.2	Conjetura que una o dos zonas son más probables que otras.	*6.1.2*, *6.1.3* y *6.1.4*	57,1%

Se concluye que las formas diferentes con áreas iguales generan conflicto para el reconocimiento de la equiprobabilidad de las zonas de acuerdo a la proporción geométrica. Por lo tanto, como el 57,1% de la población no consideran la equiprobabilidad, se decide mejorar la imagen del ítem de tal manera que las imprecisiones visuales den una idea más apropiada acerca de las áreas que se deben comparar y no se encuentren desniveles en la figura; además, se pedirá que justifiquen la respuesta para reunir más información sobre lo que ellos conjeturen.

Ítem 6.2 *Al lanzar una moneda equilibrada SEIS veces ¿cuál de las siguientes secuencias tiene mayor probabilidad de ocurrencia?*

a) CCCSSS
b) SCCSCS
c) SCSSSS
d) CSCSCC
e) Todas las secuencias son igualmente probables

Comentarios. Se espera que los estudiantes conjeturen acerca de posibles resultados de un experimento aleatorio consistente en lanzar una moneda, usando nociones básicas de probabilidad.

De la aplicación se obtienen los siguientes resultados, el 87,5% de la población selecciona la opción (*e*), reconociendo la equiprobabilidad entre los eventos cara o sello al lanzar una moneda, e igualmente la equiprobabilidad de cualquier combinación entre los resultados de lanzar la moneda seis veces; los demás, el 12,5%, de la población elige la opción (*b*), lo que indica que no se tiene en cuenta que cada secuencia es un evento simple de un espacio muestral equiprobable, ni tampoco que los seis elementos de cada secuencia son el resultado de seis pruebas independientes.

El consolidado de los resultados obtenidos se resume en la siguiente tabla:

Tipo de Respuesta	*Descripción*	*Frecuencia*
R6.2.1	Reconoce la equiprobabilidad de cualquier secuencia de resultados.	87,5%
R6.2.2	No reconoce la equiprobabilidad de cualquier secuencia de resultados.	12,5%

Se decide no cambiar este ítem debido a que los estudiantes conjeturan acerca del resultado del experimento aleatorio de lanzar una moneda utilizando nociones básicas de probabilidad; además, más del 50% reconoce la equiprobabilidad de los eventos por lo que esta respuesta puede repetirse o ser semejante en la aplicación final.

Ítem 6.3 *Selecciona con cuales de las siguientes explicaciones estás de acuerdo. Cada una de ellas se refiere a los posibles resultados de lanzamientos de monedas en el ítem anterior.*

a) Como la moneda es equilibrada, la cantidad de caras y sellos debería ser aproximadamente igual.
b) Debido a que el lanzamiento de una moneda es aleatorio, su resultado debería alternar frecuentemente entre caras y sellos.
c) Si repetidamente se lanza una moneda 6 veces, cada una de las secuencias podría ocurrir casi tan frecuentemente como cualquier otra secuencia.
d) Si en una secuencia se consiguen dos caras seguidas, aumenta la probabilidad de obtener sello en el siguiente lanzamiento.
e) Cualquier secuencia de 6 lanzamientos tiene exactamente la misma probabilidad de ocurrencia.

Comentarios. A diferencia delos ítems anteriores, en este se pretende hacer un seguimiento al posible razonamiento que se utilizó para elegir la respuesta en el ítem *6.2*, y además, observar si las ideas seleccionadas están ligadas de manera apropiada.

Para el siguiente análisis se tendrán como base los resultados obtenidos en el análisis del ítem *6.2*; del 87,5% de los estudiantes que seleccionaron la opción (*e*), reconociendo la equiprobabilidad de cualquier combinación, se obtuvieron los siguientes resultados:

- el 28,6% de la población seleccionó la opción (*a*), considerando que debe existir un equilibrio entre sellos y caras,
- el 14,3% de la población selecciono la opción (*c*), donde cada una de las secuencias puede ocurrir casi tan frecuentemente como cualquier otra secuencia,
- el 28,6% seleccionó la opción (*e*), considerando que la secuencia tiene exactamente la misma probabilidad de ocurrencia entre las secuencias,
- otro14,3% selecciona simultáneamente las opciones (*b*), (*d*) y (*e*); de manera que con las opciones (*b*) y (*d*) considera que en las secuencias siempre deben existir los eventos cara y sello, y dado que no tuvo en cuenta las secuencias en las que sólo existen caras ó sellos selecciona también la opción (*e*) para abarcar todas las posibilidades; se identifica que no reconoce que todos estos casos se encuentran implícitos en la opción (*e*),
- y el último 14,3% considera las opciones (*a*) y (*e*), lo que en cierto modo se puede considerar como una situación semejante a la anterior.

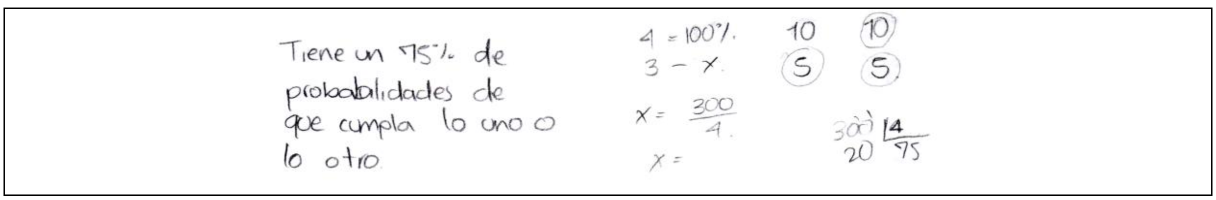
Por último, del 12,5% que había seleccionado la opción (*b*) en el ítem anterior, al no reconocer la equiprobabilidad de cualquier combinación responde la opción (*d*), lo que parece mostrar que se ve influenciado por la experiencia debido a que se fija en el orden de la obtención de los resultados más que en la cantidad total de caras o de sellos obtenidas, con lo cual se supone que si se repite un suceso es más probable que el siguiente cambie.

Este ítem no cambia debido a que permite hacer un seguimiento al posible razonamiento que se considera en el ítem anterior, analizando porque eligieron dicha respuesta; y además, observar si las ideas seleccionadas en este están sujetas de forma apropiada con lo que se responden en ítem anterior, por lo que estas respuestas puede repetirse o ser semejante en la aplicación final.

Ítem 7.1*Una clase está formada por 10 chicos y 10 chicas; la mitad de las chicas y la mitad de los chicos han elegido francés como asignatura optativa. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona elegida al azar sea chica o estudie francés?*

Comentarios. En este ítem, se espera que se interpreten conceptos básicos de conteo y probabilidad en una situación en la cual puedan hacer uso de una representación tabular para observar los datos a partir de las condiciones establecidas.

Ejemplo 7.1.1


Tiene un 75% de probabilidades de que cumpla lo uno o lo otro

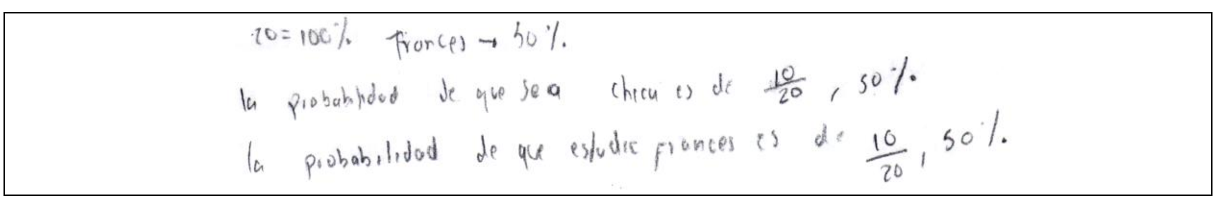
$4 = 100\%$
$3 - x$
$x = \frac{300}{4}$
$x =$

10 10
5 5

300 | 4
20 75

Define al parecer un espacio muestral, donde los elementos son cada uno de los cuatro eventos (ser mujer y estudiar francés, ser mujer y no estudiar francés, ser hombre y estudiar francés, y ser hombre y no estudiar francés), y sólo se interesa en formar cuatro grupos para cada uno de los elementos sin importar las cantidades de personas que los conforman, estableciéndose una probabilidad de $\frac{3}{4}$ para el evento en cuestión.

Ejemplo 7.1.2


20 = 100% frances → 50%.
la probabilidad de que sea chica es de $\frac{10}{20}$, 50%.
la probabilidad de que estudie frances es de $\frac{10}{20}$, 50%.

No calcula probabilidad de la unión, sólo plantea la probabilidad de los eventos ser mujer y estudiar francés de manera independiente, con lo que se llega a que cada evento tiene un 50% de probabilidad de suceder.

Ejemplo 7.1.3

$$\left(\frac{10}{20} + \frac{10}{20}\right) \qquad \frac{\text{casos fav}}{\text{casos pos.}}$$

Este es un ejemplo semejante al anterior en donde se establecen las probabilidades de los eventos ser mujer y estudiar francés, pero en este ejemplo se suman por lo que se puede presentar confusión debido al resultado (1), esto se debe a que no se identifica que el evento ser mujer y estudiar francés se repite, ya que se encuentra inmerso en los eventos ser mujer y estudiar francés al mismo tiempo.

Ejemplo 7.1.4

La probabilidad es $\frac{20}{5}$

Más que la unión plantea la intersección de los eventos ya que considera que ser mujer y estudiar francés deben suceder al mismo tiempo. Cabe señalar que establece la relación de probabilidad como $\frac{\text{casos totales}}{\text{casos favorables}} = \frac{20}{5}$ en vez de $\frac{\text{casos favorables}}{\text{casos totales}}$.

Ejemplo 7.1.5

$$\frac{1}{10}$$

Más que la probabilidad expresa la razón del número de mujeres que estudiaría francés al seleccionarla entre 10.

El consolidado de los resultados obtenidos se resume en la siguiente tabla:

Tipo de Respuesta	*Descripción*	*Ejemplo*	*Frecuencia*
R7.1.1	No realiza adecuadamente el conteo y no plantea asignaciones de probabilidad.	*7.1.1*	14,3%
R7.1.2	Realiza adecuadamente el conteo y plantea algunas asignaciones de probabilidad.	*7.1.2* y *7.1.3*	57,1%
R7.1.3	Realiza adecuadamente el conteo pero plantea un cociente “inverso” de probabilidad.	*7.1.4*	14,3%
R7.1.4	Expresa una razón que no se reconoce propiamente como asignación de probabilidad.	*7.1.5*	14,3%

Debido a que no se interpretaron conceptos básicos de conteo y probabilidad para la situación que se presentó, se decide agregar más preguntas para procurar que se llegue a reconocer el suceso compatible.

Ítem 8.1 *De cien estudiantes que presentaron el examen de diagnóstico, cuarenta eran hombres y sesenta pasaron el examen porque alcanzaron el nivel predeterminado. La clasificación de hombres y mujeres fue la siguiente:*

	Hombres (H)	*Mujeres (M)*
Pasaron (P)	*24*	*36*
No Pasaron (N)	*16*	*24*

d) Determine la probabilidad de que sea hombre y haya pasado.
e) Determine la probabilidad de que sea hombre.
f) ¿Influye el género para que el estudiante pase?

Comentarios. Se espera que se interpreten conceptos de probabilidad condicional a partir de los eventos género y haber pasado la prueba, para que se reconozca la independencia de los eventos.

Las siguientes respuestas corresponden a la parte *a)* del ítem.

Ejemplo 8.1.1

$$\frac{24}{100} = \frac{6}{25} = \frac{3}{10}$$

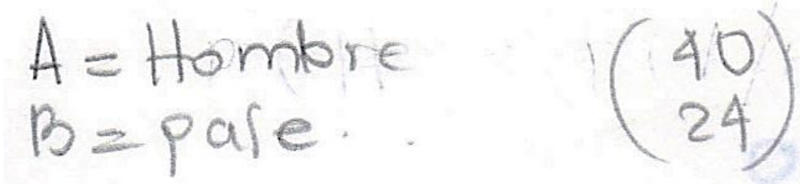
Reconoce la población total y la cantidad de hombres que pasaron el examen, y con ellos plantea la probabilidad.

Ejemplo 8.1.2

como son 90 Personas. 40/90 y Pasaron 24/60. entonces.
Solo vamos el 24/60 ej de 24/60.

Reconoce una población total de 90 personas, y compara la probabilidad de que sea hombre$\left(\frac{40}{90}\right)$ junto con la probabilidad donde en total hay 60 estudiantes que pasaron, y que de ellos, sólo pasaron 24 hombres $\left(\frac{24}{60}\right)$; se selecciona la segunda probabilidad, ya que se relaciona de alguna manera los eventos ser hombre y pasar el examen.

Ejemplo 8.1.3

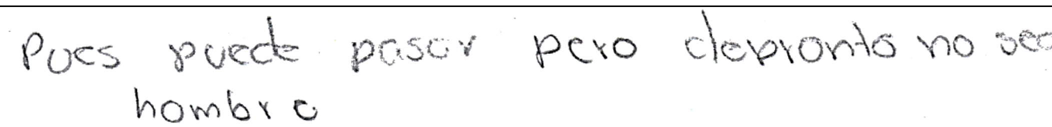


No establece una probabilidad, pero reconoce los eventos ser hombre (40), y ser hombre y haber pasado (24).

Ejemplo 8.1.4

Presenta un porcentaje sin hacer alusión a una justificación.

Ejemplo 8.1.5



No reconoce el conector 'y', que indica que los eventos ser hombre y pasar deben ocurrir al mismo tiempo; por lo que afirma que no necesariamente es hombre, dando la posibilidad de que sea mujer al momento de pasar.

El consolidado de los resultados obtenidos se resume en la siguiente tabla:

Tipo de Respuesta	*Descripción*	*Ejemplo*	*Frecuencia*
R8.1.1	Reconoce la población total, la cantidad de hombres que pasaron el examen y establece una probabilidad.	*8.1.1*	25,0%
R8.1.2	No reconoce la población total, pero si la cantidad de hombres que pasaron el examen y establece una probabilidad.	*8.1.2*	12,5%
R8.1.3	No reconoce la población total ni establece una probabilidad, pero sí reconoce la cantidad de hombres que pasaron el examen.	*8.1.3*	12,5%
R8.1.4	No reconoce la población total ni la cantidad de hombres que pasaron el examen, pero establece una probabilidad.	*8.1.4*	25,0%
R8.1.5	No reconoce la población total ni la cantidad de hombres que pasaron el examen, y tampoco establece una probabilidad.	*8.1.5*	12,5%
R8.1.6	No da respuesta al ítem.		12,5%

Los siguientes ejemplos dan respuesta a la parte *b)* del ítem:

Ejemplo 8.1.6

$$\frac{40}{100} = \frac{4}{10}$$

Reconoce la población total y la cantidad de hombres, y establece la probabilidad.

Ejemplo 8.1.7

40/90 Porque son 40 hombes de 90 totales.

Este ejemplo, como en su repuesta a la opción *a)*, considera la población total como de 90 personas.

Ejemplo 8.1.8

$$\left(\frac{40}{100}\right)$$

No establece una probabilidad, pero reconoce la cantidad de población total y la de hombres.

Ejemplo 8.1.9

15%

Presenta un porcentaje sin una justificación.

Ejemplo 8.1.10

no se sabrió

No reconoce la población total, ni la cantidad de hombres, y por ello no plantea la probabilidad.

El consolidado de los resultados obtenidos se resume en la siguiente tabla:

Tipo de Respuesta	*Descripción*	*Ejemplo*	*Frecuencia*
R8.1.7	Reconoce la población total, la cantidad de hombres y establece una probabilidad.	*8.1.6*	25,0%
R8.1.8	No reconoce la población total, pero si la cantidad de	*8.1.7*	12,5%

	hombres y establece una probabilidad.		
R8.1.9	Reconoce la población total y la cantidad de hombres, pero no establece una probabilidad.	*8.1.8*	12,5%
R8.1.10	No reconoce la población total ni la cantidad de hombres, pero establece una probabilidad.	*8.1.9*	25,0%
R8.1.11	No reconoce la población total ni la cantidad de hombres, y tampoco establece una probabilidad.	*8.1.10*	12,5%
R8.1.12	No da respuesta al ítem.		12,5%

Los siguientes ejemplos dan respuesta a la parte *c)* del ítem:

Ejemplo 8.1.11

40 : 16.
60 : 24.

$\frac{40}{16} = \frac{60}{24}$ Luego no influye.

Establece las razones de proporcionalidad relativas a los eventos ser hombre y ser mujer, respecto al evento no pasar, y luego compara y reconoce que la razón de cambio es igual.

Ejemplo 8.1.12

No pora $\frac{24}{16} = 1.5$

$\frac{36}{24} = 1.5.$

Establece dos razones de proporcionalidad, una para el evento pasar y la otra para el evento no pasar con respecto al género, y concluye que el género no influye en los resultados debido a que las razones obtenidas son iguales.

Ejemplo 8.1.13

Si

Responde sin justificación.

El consolidado de los resultados obtenidos se resume en la siguiente tabla:

Tipo de Respuesta	*Descripción*	*Ejemplo*	*Frecuencia*
R8.1.7	Establece las razones de proporcionalidad y reconoce la independencia de los eventos.	*8.1.11* y *8.1.12*	75,0%
R8.1.8	No establece las razones de proporcionalidad ni reconoce la independencia de los eventos.	*8.1.13*	12,5%
R8.1.9	No da respuesta al ítem.		12,5%

Se decide cambiar el enunciado del ítem por una situación similar donde no se repitan los datos que aparecen en la tabla, debido a que pueden generar confusión; también se invierte el estilo de lo preguntado en las opciones *a)* y *b),* y se cambia el evento marginal "ser hombre" por "pasar el examen". Además en la opción *c)* ahora se pide que explique si el género influye en que el estudiante pase o no pase.

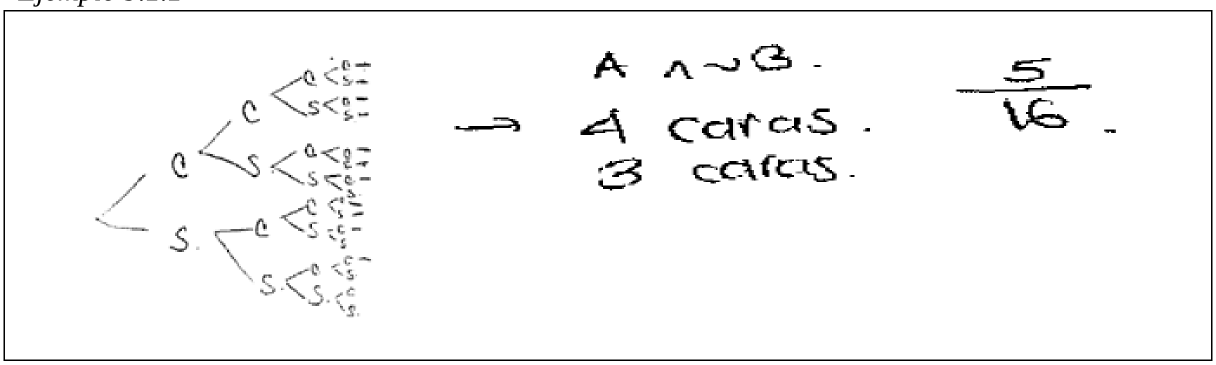
Ítem 9.1 *Se lanzan cuatro monedas equilibradas, Si se definen los sucesos:*

$$A = \text{"al menos dos sean cara"}$$
$$B = \text{"al menos dos sean sellos"}$$

¿Cuál es la probabilidad de que suceda A y no suceda B en el experimento?

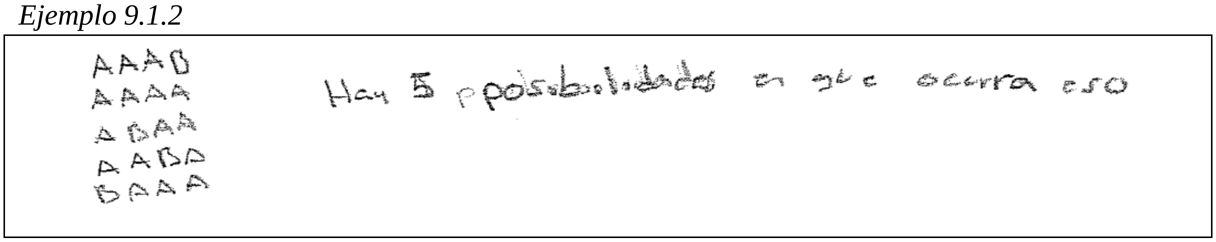
Comentarios. Se espera que se calcule la probabilidad usando métodos diversos, incluidos algunos de los que se habían considerado en el diseño del instrumento u otros no previstos.

Ejemplo 9.1.1



Considera el diagrama de árbol que elabora en ítem *3.2 (v2)*, para identificar la ocurrencia de suceso *A* y la no ocurrencia del suceso *B*; además, especifica que con 3 y 4 caras se cumple las condiciones de ambos eventos y hace el conteo de posibilidades para establecer el cociente de probabilidad.

Ejemplo 9.1.2



Aunque no establece la probabilidad pedida si identifica los cinco casos posibles asociados al evento en cuestión.

Ejemplo 9.1.3

$A = \binom{13}{16} \quad \binom{10}{16} = \qquad P(A-B) = P(A) - P(B)$

$P(A) = \binom{13}{16} - \binom{10}{16}$

Identifica la cantidad de elementos del espacio muestral y establece que para el suceso *A* hay 13 casos, y 10 casos para el *B*; considera indirectamente la condición de que no ocurra el suceso *B* al plantear la probabilidad del evento ‘A – B’ utilizando una supuesta propiedad de la probabilidad, acerca de la diferencia de eventos, cuyo cálculo no lo finaliza.

Ejemplo 9.1.4

la probabilidad es 1 de 4 porque
las cuatro Veces Puede caer Cara.

Considera un espacio muestral de cuatro elementos en el cual el caso CCCC es el único caso donde ocurre el suceso *A* pero no ocurre el suceso *B*, que sugiere la razón de 1 a 4 establecida.

Ejemplo 9.1.5

Cómo hay 4 monedas hay 3 posibilidades, que todos sean
cara, q 3 veces sean cara y une sello, que sean 2 cara y 2
sello, ó lo mismo pero invertido (en vez de cara sello)

la probabilidad de q' suceda A y no B es de $\frac{3}{4}$

Describe los elementos del espacio muestral enunciando varios casos y sugiriendo otros similares al hablar de “lo mismo pero invertido”; considerar que hay en total cinco casos sin tener en cuenta las posibles combinaciones que se forman a partir de los casos que describe, con lo que se representa parcialmente el espacio muestral; con ello al usar la razón $\frac{casos\,favorables}{casos\,totales}$, identifica como probabilidad el valor $\frac{3}{4}$.

Ejemplo 9.1.6

X —
X X
— —
— X

La probabilidad es de un 50%

Enuncia que la probabilidad es de 50%, posiblemente porque sólo considera que el espacio muestral es: CCSS y CSCS, donde se cumplen los sucesos *A* y *B*.

Ejemplo 9.1.7

La probabilidad de que caiga A y B es igual ya que si cae A dice por lo menos 2 sean cara puede ser que sean 2,3,4 y pasa en lo mismo con B 2,3,4

Responde que la probabilidad de que caiga *A* y *B* es igual, lo que evidencia que reconoce que los elementos del espacio muestral ocurren en igual cantidad para ambos sucesos *A* y *B*, sin embargo, no comenta acerca del suceso B^c.

Ejemplo 9.1.8

Porque vimos en el ítem 3 que era más factible $\underbrace{SCCS}_{\text{dos caras}}CS$

Se hacen grupos de 4 monedas

$S\underbrace{CCS}_{\text{más de dos caras, 1 solo sello.}}CS$

$SC\underbrace{CSCS}_{\text{dos caras.}}$

Usa la secuencia seleccionada en el ítem *6.2* (SCCSCS) como ejemplo, para formar grupos de cuatro monedas sin alterar el orden de la secuencia. Entonces, se evidencia que relaciona este ítem con la respuesta que presenta en el ítem *6.3*, y se infiere que piensa que si se resultan dos caras seguidas la siguiente es más probable que sea sello.

Ejemplo 9.1.9

A

$P(x \geq 2) = 1 - P(x=0) - P(x=1)$

$= 1 - 1/16 - 1/4$

$= 11/16$

$P(B) =$

Determina la probabilidad del evento *A* mediante la ley de la probabilidad del complemento de un evento.

Ejemplo 9.1.10

50%

Se considera que el suceso A y el suceso B son similares en relación, debido a la cantidad de elementos que los conforman, y por ello concluye que la probabilidad es del 50% sin considerar la no ocurrencia del suceso *B*, además, no justifica la respuesta.

Ejemplo 9.1.11

1/24

Considera un espacio muestral de 24 elementos y establece la razón de 1 a 24, sin hacer alusión a una justificación.

El consolidado de los resultados obtenidos se resume en la siguiente tabla:

Tipo de Respuesta	*Descripción*	*Ejemplo*	*Frecuencia*
R9.1.1	Representa todo el espacio muestral, considera la ocurrencia del suceso *A*, considera la ocurrencia del suceso B^c y calcula la probabilidad.	*9.1.1*	4,3%
R9.1.2	Representa parcialmente el espacio muestral, considera la ocurrencia del suceso *A*, considera la ocurrencia del suceso B^c, pero no calcula la probabilidad.	*9.1.2*, *9.1.4* y *9.1.8*	17,4%
R9.1.3	Representa todo el espacio muestral, considera la ocurrencia del suceso *A*, pero no considera explícitamente la ocurrencia del suceso B^c para calcular probabilidades.	9.*1.3*	4,3%
R9.1.4	Representa parcialmente el espacio muestral, considera la ocurrencia del suceso *A* y calcula la probabilidad, pero no considera la ocurrencia del suceso B^c.	*9.1.5* y *9.1.6*	8,7%
R9.1.5	Representa parcialmente el espacio muestral y considera la ocurrencia del suceso *A*, pero no considera la ocurrencia del suceso B^c ni calcula la probabilidad.	*9.1.7*	4,3%
R9.1.6	Representa todo el espacio muestral y considera la ocurrencia del suceso *A*, pero no considera la ocurrencia del suceso B^c ni calcula la probabilidad.	*9.1.9*	4,3%
R9.1.7	No representa el espacio muestral, considera la ocurrencia del suceso *A*, no considera la ocurrencia del suceso B^c y calcula la probabilidad.	*9.1.10*	30,4%
R9.1.8	Presenta respuestas que no se pueden clasificar.	*9.1.11*	26,1%

La mayoría de respuestas no tienen en cuenta las posibles combinaciones en el lanzamiento de las monedas y no consideran el suceso B^c; por lo que se decide cambiar en el ítem la cantidad de monedas, para facilitar el conteo de elementos de los eventos asociados; se contextualiza la situación en la cual cada moneda es diferente para que se reconozcan las posibles combinaciones a partir de su posición; y se señalará la palabra NO (en mayúsculas), para que no se considere el suceso *B*.

Ítem 10.1 *En dos cajas A y B se introducen canicas rojas y azules en las siguientes cantidades*

Caja	*Rojas*	*Azules*
A	*12*	*8*
B	*90*	*59*

Cada caja se revuelve vigorosamente. Se elige una de las cajas y, sin mirar, una persona saca una canica. Si la canica es azul gana $120.000 ¿cuál de las cajas da la mayor probabilidad de elegir una canica azul?

a) La caja A (con 12 rojas y 8 azules)

b) La caja B (con 90 rojas y 59 azules)

c) Las dos cajas tienen la misma probabilidad

d) No es posible determinar las probabilidades

Comentarios. Con este ítem se busca que los estudiantes usen conceptos básicos de conteo y probabilidad.

Se obtuvieron los siguientes resultados, el 62,5% de la población selecciona la opción (*a*), donde la probabilidad de escoger una canica azul en la caja B es 59/149; es decir, posiblemente identifican que en la caja A por cada 3 rojas hay 2 azules y con esto diferencian la caja Ben donde hay una relación no simplificable de 149 rojas por 59 azules; el 31,25% de la población selecciona la opción (*b*), probablemente no establece una comparación entre las cajas A y B, esto debido a que la probabilidad de la caja A es un poco mayor a la de la caja B; y por último el 6,25% de la población selecciona la opción (*c*),en donde seguramente realizan cálculos aproximados en los que no notan la diferencia entre las probabilidades.

Del 62,5% de la población que seleccionó la opción (*a*), sólo el 40,0% planteó un proceso similar al siguiente:

$0,6 = \frac{12}{20}$ $\quad$ $\frac{8}{20}$ $0,4$

$0,604 = \frac{90}{149}$ $\quad$ $\frac{59}{149} = 0,39.5$

En donde se establece la probabilidad de las dos cajas. El resto de estudiantes sólo se limitaron a señalar la opción que pensaban que era correcta sin dar explicaciones.

Aunque más del 50,0% de la población reconoce que la caja A da mayor probabilidad de elegir una canica azul, se decide cambiar en el enunciado del ítem de tal manera que se tenga que establecer la menor probabilidad y se cambia la cantidad de canicas azules en la caja B con el fin de mostrar una mayor diferencia entre las probabilidades de las dos cajas.

V. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS VERSIÓN FINAL

Descripción:

La aplicación de esta prueba se realizó el 15 de Octubre en las horas de la mañana. Para aplicar esta prueba fue necesario realizar un replanteamiento del cuestionario para una duración de 40 minutos, para ello se dividió el cuestionario en dos partes, dando equilibrio a la cantidad de ítems que se plantearon en ellas.

Los 40 minutos se trabajaron en el espacio de la clase de Precálculo, cedidos amablemente por la profesora encargada; el salón se organizó de manera individual tipo parcial, debido a que el cuestionario fue diseñado para analizar los indicadores de manera individual; en total había 29 estudiantes.

El total de ítems que se aplicaron y los porcentajes de cobertura de su implementación respecto al total de estudiantes se muestran en el siguiente cuadro.

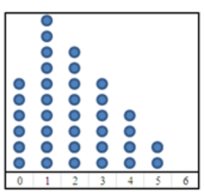
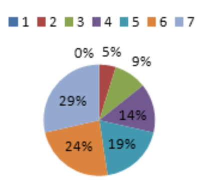
Ítems	*Cobertura*
1.1	48,3%
1.2	51,7%
2.1	48,3%
3.1	51,7%
3.2	48,3%
4.1	51,7%
5.1	48,3%
6.1	51,7%
6.2	48,3%
6.3	48,3%
7.1	51,7%
8.1	48,3%
9.1	51,7%
10.1	51,7%

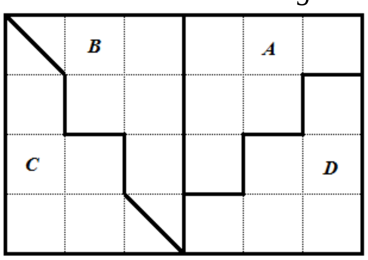
Análisis sobre los resultados

En el análisis que sigue se presentan los resultados de la implementación de la Prueba definitiva. Primero, se organiza la información de los ítems definitivos así como el respectivo indicador de lo que se quiere que el estudiante ponga en juego.

PARTE 1: LA PRUEBA DEFINITIVA

<table>
<tr><th>Ítems definitivos</th><th>Indicador asociado</th></tr>
<tr><td>1.1 ¿Es más posible que usted tome mañana café en el desayuno que otra bebida?
Explique su respuesta.</td><td rowspan="2">Se espera analizar respuestas que se refieran a situaciones aleatorias a partir de la vida cotidiana de cada estudiante, en donde se pueden diferenciar los eventos seguro, aleatorio e imposible.</td></tr>
<tr><td>1.2 Suponga que está en la estación de Transmilenio de la calle de 72 a las 9 a.m. esperando abordar un articulado. ¿Qué tan probable es que se vaya sentado?
Explique su respuesta.</td></tr>
<tr><td>2.1 Julián dice que en el juego de la pirinola (cuyas opciones son: pon 1, pon 2, toma 1, toma 2, toma todo y todos ponen) lo más probables es perder, mientras que Luis afirma que es más probable tomar uno o ganar todo. Explique si alguno de los dos tiene la razón.</td><td>Se pretende que los estudiantes predigan si la posibilidad de ocurrencia de una situación es mayor que la de otra, a partir de una situación dada, mediante la comprensión del arreglo de probabilidad clásica a partir de los eventos ganar o perder, o si estos son igualmente probables.</td></tr>
<tr><td>3.1 En los siguientes cuadros se ilustra los resultados que se obtienen cuando se determina el valor absoluto de la diferencia de los dos números obtenidos al lanzar dos dados equilibrados. Seleccione una de las cuatro ilustraciones presentadas y explica a partir de ésta ¿cuál es el resultado más y menos probable?

a)

b)
<table><tr><th>X</th><th>f(X)</th></tr><tr><td>0</td><td>6</td></tr><tr><td>1</td><td>10</td></tr><tr><td>2</td><td>8</td></tr><tr><td>3</td><td>6</td></tr><tr><td>4</td><td>4</td></tr><tr><td>5</td><td>2</td></tr><tr><td>6</td><td>0</td></tr></table>
c)
<table><tr><th></th><th></th><th colspan="6">Dado 1</th></tr><tr><td></td><td></td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td rowspan="6">Dado 2</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr><tr><td>2</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>3</td><td>2</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>4</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>5</td><td>4</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>6</td><td>5</td><td>4</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td><td>0</td></tr></table>
d)
</td><td rowspan="2">Se busca que se empleen métodos gráficos para hacer conjeturas o pronósticos sobre la situación, utilizando algunos de los que se habían considerado en el diseño del instrumento u otros no previstos.</td></tr>
<tr><td>3.2 Se lanza una moneda equilibrada cuatro veces.
Si se definen los sucesos:
A = “al menos salen dos caras”
B = “el último resultado es sello”
Represente los posibles resultados asociados a cada suceso, utilizando métodos gráficos, listas o tablas. ¿Cuál evento es más probable que ocurra?</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>4.1 Si se lanzan dos dados y se suman los números que se encuentran en la parte superior. ¿Cuál resultado piensa que tiene más y cual resultado tiene menos chance de ocurrir?
Explique sus respuestas.</td><td>Se pretende que se conjeture a partir de los resultados cual tiene más y cuales menos chance de ocurrir, para luego poner a prueba las predicciones mediante el análisis del espacio muestral.</td></tr>
<tr><td>5.1 Se lanza un dado 200 veces y se observa que el “5” ocurre 40 veces. Señale la afirmación con la que esté más de acuerdo:
a) El resultado si es factible pues la probabilidad de ocurrencia del “5” es de $^1/_3$
b) El resultado no es factible pues la probabilidad de ocurrencia del “5” es de $^1/_6$
c) El resultado no es factible pues la probabilidad de ocurrencia del “5” es de $^1/_5$
d) El resultado si es factible pues la probabilidad de ocurrencia del “5” es de $^1/_6$</td><td>Se espera que se comparen los resultados del experimento lanzar un dado 200 veces con los resultados previstos por la probabilidad clásica o frecuencial.</td></tr>
<tr><td>6.1 Luis es un lazador de flechas que se ve enfrentado a un tablero de tiro al blanco de la siguiente forma:


Si se lanza una flecha en dirección al blanco, y tiene el mismo chance de impactar la flecha en cualquiera de los 24 recuadros pequeños, ¿en cuál de las cuatro áreas (A, B, C o D) hay más posibilidad de que la flecha caiga?
Justifique su respuesta.</td><td rowspan="3">Se busca que se realicen conjeturas acerca de una situación aleatoria comparando proporciones de áreas, o en el lanzamiento de una moneda; empleando nociones básicas de probabilidad para expresar los resultados.</td></tr>
<tr><td>6.2 Al lanzar una moneda equilibrada SEIS veces ¿cuál de las siguientes secuencias tiene mayor probabilidad de ocurrencia?
a) CCCSSS
b) SCCSCS
c) SCSSSS
d) CSCSCC
e) Todas las secuencias son igualmente probables</td></tr>
<tr><td>6.3 Selecciona con cuales de las siguientes explicaciones estás de acuerdo. Cada una de ellas se refiere a los posibles resultados de lanzamientos de</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>monedas en el ítem anterior.
a) Como la moneda es equilibrada, la cantidad de caras y sellos debería ser aproximadamente igual.
b) Debido a que el lanzamiento de una moneda es aleatorio, su resultado debería alternar frecuentemente entre caras y sellos.
c) Si repetidamente se lanza una moneda 6 veces, cada una de las secuencias podría ocurrir casi tan frecuentemente como cualquier otra secuencia.
d) Si en una secuencia se consiguen dos caras seguidas, aumenta la probabilidad de obtener sello en el siguiente lanzamiento.
e) Cualquier secuencia de 6 lanzamientos tiene exactamente la misma probabilidad de ocurrencia.</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>7.1Una clase está formada por 10 chicos y 10 chicas; la mitad de las chicas y la mitad de los chicos han elegido francés como asignatura optativa
a) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona elegida al azar sea chica?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona elegida al azar estudie francés?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona elegida al azar sea chica y estudie francés?
d) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona elegida al azar sea chica o estudie francés?</td>
<td>Se pretende que se interpreten conceptos básicos de conteo y probabilidad, en una situación en la cual se puede hacer uso de una representación tabular para observarlos datos, y reconocer las condiciones establecidas.</td>
</tr>
<tr>
<td>8.1 Cien estudiantes presentaron un examen de admisión para ingresar a estudiar matemáticas en una universidad, los resultados se presentan en la siguiente tabla:
<table>
<tr><td></td><td>Hombres (H)</td><td>Mujeres (M)</td></tr>
<tr><td>Pasaron (P)</td><td>24</td><td>36</td></tr>
<tr><td>No Pasaron (N)</td><td>16</td><td>24</td></tr>
</table>
Si se elige a uno de estos cien estudiantes al azar:
a) Determine la probabilidad de que el estudiante pase el examen
b) Determine la probabilidad de que el estudiante sea hombre y pase el examen
c) Explique si el género influye en que el estudiante pase o no pase.</td>
<td>Se busca que se interpreten conceptos de probabilidad condicional a partir de los eventos género y haber pasado la prueba, para que se reconozca la independencia de los eventos.</td>
</tr>
<tr>
<td>9.1 Se lanzan tres monedas equilibradas una de $50, una de $100 y otra de $200. Si se definen los sucesos:
$A = \text{“al menos sale una cara”}$</td>
<td>Se pretende que se calcule la probabilidad usando métodos diversos, incluidos algunos de los que se habían considerado</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><td>B = “al menos salen dos sellos”
Explique cómo calcular la probabilidad de que suceda A y NO suceda B en el experimento</td><td>en el diseño del instrumento u otros no previstos.</td></tr>
<tr><td>10.1 En dos cajas A y B se introducen canicas rojas y azules en las siguientes cantidades
<table>
<tr><th>Caja</th><th>Rojas</th><th>Azules</th></tr>
<tr><td>A</td><td>12</td><td>8</td></tr>
<tr><td>B</td><td>90</td><td>59</td></tr>
</table>
Cada caja se revuelve vigorosamente. Se elige una de las cajas y sin mirar una persona saca una canica. Si la canica es azul gana $120.000 ¿cuál de las cajas da la menor probabilidad de elegir una canica azul?
a) La caja A (con 12 rojas y 8 azules)
b) La caja B (con 90 rojas y 59 azules)
c) Las dos cajas tienen la misma probabilidad
d) No es posible determinar las probabilidades</td><td>Se espera que se usen conceptos básicos de conteo y probabilidad.</td></tr>
</table>

PARTE 2: ANÁLISIS CUALITATIVO

Ítem 1.1

Ejemplo	*Imagen*
1.1.1	Si, porque mi padre es vendedor de cafe y tenemos mucho
1.1.2	Si es posible dado que o es chocolate o es Café, existe una posibilidad entre varias, aunque por lo general para mi son dos opciones
1.1.3	No es mas posible ya que el numero de bebidas es n entonces n > 1 entonces no es lo mas posible.
1.1.4	No, ya que es más posible Tomar en mi casa Jugo de Naranja ya que consumimos mas jugo que Café
1.1.5	No porque no desayuno.
1.1.6	$\frac{1}{a}$ → café → cualquier bebida

En el *ejemplo 1.1.1* se refiere a un evento seguro, pues no consideran otra bebida como posible, aludiendo a tomar siempre lo mismo. En los *ejemplos 1.1.2*, *1.1.3* y *1.1.4* se representa el evento aleatorio mediante el uso del término ‘posible’; en el *ejemplo 1.1.2* se está dando la opción de poder tomar dos bebidas; en el *ejemplo 1.1.3* se intenta responder de una manera formal, definiendo a m como el número de bebidas posibles, y como m tiene más de una opción, entonces no es posible tomar una única bebida en la mañana, como lo es el café en el desayuno; en el *ejemplo 1.1.4* se hace referencia a otra bebida, sin embargo, el término ‘no es posible’ permite pensar que si se puede tomar café. En el *ejemplo 1.1.5* se reconoce un evento imposible, dado que presenta una situación en la cual no toma ningún tipo de bebida en el desayuno, con lo que se tiene una imposibilidad de los eventos anteriormente mencionados; y, en el *ejemplo 1.1.6* se considera como un evento aleatorio, debido a que se está considerando la posibilidad de tomar una bebida entre un grupo incierto, adicionalmente, insinúa la definición de probabilidad clásica por lo que establece la relación $\frac{\text{casos favorables}}{\text{casos totales}} = \frac{1}{a}$; sin embargo, no da una respuesta específica frente a la posibilidad de tomar café.

Ítem 1.2

Ejemplo	*Imagen*
1.2.1	Hinguna. Porqué todos los buses en ambos sentidos vienen llenos
1.2.2	Depende del articulado que vaya a abordar. Si aborda un Ruta facil a esa hora, lo más probable es que vaya sentado. Si es un expreso, lo más probable es que vaya de pie.
1.2.3	Depende el día, porque un fin de semana la proba-bilidad va a ser mayor y entre semana menor aunque en ese horario la cantidad de gente va a ser menor porque ya han entrado a estudiar o trabajar y sería tal vez de un 50%
1.2.4	Para definir la probabilidad faltan datos, pero segun lo experimentado es probable ir sentado.
1.2.5	– No es posible calcular o estimar la probabilidad pues en este caso son muchos los factores que pueden incidir. Como destino, origen frecuencia de la ruta

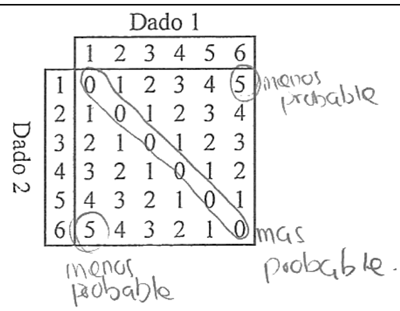
En el *ejemplo 1.2.1* se refiere a un evento seguro, pues considera que la cantidad de personas que usan el servicio en ambos costados, no permite el chance de ir sentados. En los *ejemplos 1.2.2, 1.2.3*, y *1.2.4* se hace referencia a eventos aleatorios, ya que emplean palabras como ‘probabilidad’ o ‘probable’, que son empleadas a partir del análisis de la experiencia de cada uno, y que expresan incertidumbre sobre el evento “ir sentado”; así pues la mayoría considera factores como el día, la ruta, el origen de la ruta y la frecuencia con la que pasan los buses. En el *ejemplo 1.2.5*, a diferencia de los ejemplos anteriores, se menciona la imposibilidad de dar un valor numérico, achacando este hecho a que en esa incertidumbre convergen diversos factores.

Ítem 2.1

Ejemplo	*Imagen*
2.1.1	Ninguno tiene la razon ya que en total son 6 opcines 3 de ganar y 3 de perder entonces esto daría un 50% para cada una y decir que es mas probable ganar todo o tomar uno es a un mas improbable.
2.1.2	Ninguno tiene razón la probabilidad de que salga cualquier opción es $\frac{1}{6}$
2.1.3	$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ hAy una posibilidade de 50% que se gane o pierda $\frac{\cancel{3}}{\cancel{6}} = \frac{1}{2}$
2.1.4	Julian = $\frac{6}{3} = 2$ $\boxed{\text{Luis} = \frac{6}{2} = 3}$ es mas probable tomar 1 o ganar todo

En el *ejemplo 2.1.1*se evidencia que se reconoce los eventos ganar o perder como elementos independientes, con lo que identifica su equiprobabilidad, y se considera la imposibilidad de que ocurra la situación que plantea Luis. En el *ejemplo 2.1.2* reconoce la equiprobabilidad entre los elementos del espacio muestral, por lo que responde ‘ninguno tiene la razón’, con lo que se supone que se identifica la equiprobabilidad entre ganar y perder. En el *ejemplo 2.1.3* se comparan los eventos ganar o perder, y se establece la equiprobabilidad entre ellos a partir de la probabilidad clásica, sin embargo, no responde a quien tiene la razón. Finalmente, en el *ejemplo 2.1.4* se compara las situaciones de quien tiene la razón si Julián o Luis y se presenta cada razón de cambio mediante la relación $\frac{casos\,totales}{casos\,favorables}$, con lo que se concluye que Luis tiene la razón.

Ítem 3.1

Ejemplo	*Imagen*	
3.1.1	El resultado más probable va a ser 1 y el menos probable va a ser 5	
3.1.2		más probable 0 de diferencia. menos probable 5 de diferencia. 1 - 6
3.1.3	Porque por una cara que salga saldian 6 combinaciones con esta	
3.1.4	(D) la más probable ya que relaciona cada uno de los valores. (B) la menos probable.	
3.1.5	La (c) porque representa todas las posibilidades de combinación de los dos dados al encontrar la diferencia Para la (a). da # de respuestas posibles	

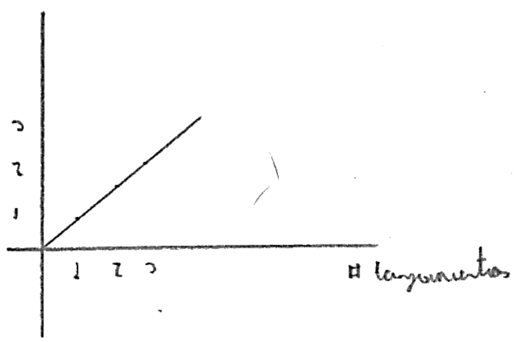
En el *ejemplo 3.1.1*se considera como respuesta la ilustración (*c*), que permite hacer el conteo de cada uno de los elementos del espacio muestral, donde se identifica fácilmente que el elemento más probable es el número 1 y el menos probable es el número 5. En el *ejemplo 3.1.2* se selecciona la ilustración (*c*) como respuesta, y se identifica el número 0 como el resultado más probable y el número 5 como el menos probable, es decir que entre más cercanos estén los elementos a la diagonal, mayor será la probabilidad de que sucedan, y entre más alejados estén de ésta, tendrán menos probabilidad de ocurrir. En el *ejemplo 3.1.3* también se selecciona la ilustración (*c*) como respuesta, y se trata de explicar que en ella se ven las posibles combinaciones de lanzar los dos dados, pero no considera los resultados de la diferencia en valor absoluto que se observan allí. En el *ejemplo 3.1.4* se considera dos respuestas, una con la ilustración (*d*) en la que se relacionan cada uno de los elementos del espacio muestral a partir de porcentajes, y la otra, la ilustración (*b*), que es contraria, ya que no se evidencian porcentajes sino frecuencia de datos, sin tener en cuenta que representan la misma situación. Por último, en el *ejemplo 3.1.5*, también eligieron dos respuestas: la ilustración (*c*) donde se representa mejor todo el espacio muestral, ya que muestra todas las posibles combinaciones de los dados junto con sus diferencias; y la ilustración (*a*) en donde, por contraste, se evidencia visualmente la frecuencia en que aparecen los elementos del espacio muestral, pero no se observa cómo se obtuvieron.

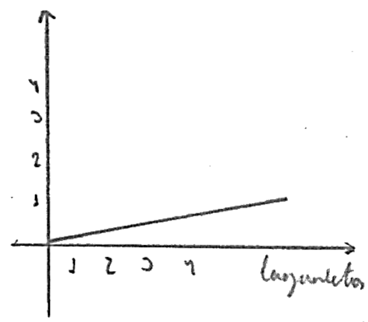
Ítem 3.2

Ejemplo	*Imagen*
3.2.1	1 Cara 2 Cara 3 Cara 4 Cara 1 Cara 2 Sello 3 Cara 4 Sello 1 Cara 2 Cara 3 Sello 4 Sello 1 Sello 2 Sello 3 Sello 4 Sello 1 Sello 2 Cara 3 Sello 4 Cara 1 Sello 2 Sello 3 Cara 4 Cara Es más probable el A pues se puede dar entre las cuatro. Mientras que el B es poco probable, dado que puede caer cara.
3.2.2	Lanzamiento – Resultado Primero – Cara Primero – Sello Segundo – Sello Segundo – Cara Tercero – Sello Tercero – Cara Cuarto – Cara Cuarto – Sello R//: Que salga cara en cualquiera de los casos tiene la misma probabilidad de que salga sello

<table>
<tr><td>3.2.3</td><td>A = 4 Resultados si decimos que al menos 2 sean cuan caras seria = 50%.

B = Solo el un resultado pero hay 2 posibilidades esta seria = 30%.

• Las dos son igualmente probables</td></tr>
<tr><td>3.2.4</td><td>A


B.

</td></tr>
<tr><td>3.2.5</td><td>LANZAMIENTOS 4 →
así EL PRIMER LANZAMIENTO SALE CARA TIENE 3 POSIBILIDADES MAS PARA QUE SALGA OTRA VEZ CARA $\frac{1}{3}$
x SI ES SELLO TIENE DOS POSIBILIDADES MAS PARA QUE SEA CARA $\frac{1}{2}$
x SI ES CARA TIENE POSIBILIDAD QUE EL ULTIMO SEA SELLO. $\frac{1}{1}$</td></tr>
<tr><td>3.2.6</td><td>lanzam cós
1 C
2 S
3 C
4 S
2 caras
de lanzamiento
Cual fue su resultado.

B
1 C
2 C
3 C
4 S →

lo más probable es el B ya que es solo un sello, encambio A son 2 caras,</td></tr>
</table>

En el *ejemplo 3.2.1* se establece algunos casos del espacio muestral por medio de una lista, donde se puede identificar los sucesos; se concluye que el suceso *A*es más probable, ya que se puede dar por lo menos en dos de los cuatro lanzamientos, a diferencia del suceso *B* que sólo se presenta en el último lanzamiento. En el *ejemplo 3.2.2* se realiza una tabla, donde se relaciona el número del lanzamiento con los eventos del lanzamiento de una moneda (Cara y Sello); con lo que se identifica la equiprobabilidad de los eventos al lanzar la moneda, pero no se identifica la probabilidad para los sucesos *A* y *B*. En el *ejemplo 3.2.3* se analiza el suceso *A*, donde se considera que en cualquiera de los cuatro lanzamientos puede caer Cara, pero para dicho suceso se dice que la probabilidad es de 50,0%, por considerar que hay igual cantidad de Caras que de Sellos; respecto al suceso *B* sólo se consideró el último lanzamiento, y como se dice que existen solo las posibilidades de que sea Cara ó Sello, la probabilidad sugerida es de 50,0%; con lo que se concluye que los dos sucesos son igualmente probables. En el *ejemplo 3.2.4* se observa el uso de un modelo gráfico de líneas no previsto en el Diseño del Instrumento, en donde se relaciona el número de lanzamientos con los sucesos *A* y *B* respectivamente, donde la pendiente del suceso *A* es mayor que la del suceso *B*; no se presenta alguna conjetura en cuanto a que suceso es más probable. En el *ejemplo 3.2.5* se analizan los cuatro lanzamientos de la moneda, en donde se supone que el primer lanzamiento es Cara, por lo que establece la razón $\frac{caso\ buscado}{lanzamientos\ que\ quedan}$, es decir, si el segundo lanzamiento es Sello, entonces el tercer lanzamiento puede ser Cara, por lo que el cuarto lanzamiento no se tendría en cuenta ya que el último será sello para que se cumpla el suceso *B*; por lo tanto, con cada lanzamiento que se considera, establece cuantos elementos quedan para que se cumplan los sucesos; en esta situación no se presenta ninguna postura frente a cual suceso tiene mayor probabilidad. Por último, en el *ejemplo 3.2.6* se consideran los casos CSCS y CCCS donde se cumplen los dos sucesos, se concluye que el evento más probable es el suceso *B*, debido a que es más fácil que suceda sólo un elemento a que éste se repita.

Ítem 4.1

Ejemplo	*Imagen*
4.1.1	El resultado que tiene mas chance de salir es el 7 pues es el que tiene mayor cantidad de parejas que lo pueden formar, mientras que el 12 y el 2 solo lo pueden formar una pareja en cada caso (6,6) y (1,1)

4.1.2	Los resultodos pueden ser: 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 Y pueden suceden en estas ocaciones: 1 1 2 2 3 3 3 2 2 1 1 Los resultodós q' tienen menos chance de ocurrir son que la suma de 2, 3, 11 y 12. Y los que más tienen chance 6, 7, 8.
4.1.3	El resultado que es probable que salga mas es 6. y el menos probable es 12.
4.1.4	menos 1. porque no tiene Chance de Salir mas 6: se puede formar con todos nos numéros del dado.
4.1.5	6 más probable 3 menos chance
4.1.6	Ninguno porque es el mismo número posible de combinaciones entre los dos dados
4.1.7	$\frac{1}{6}$ y $\frac{1}{5}$ y $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{1}$

En el *ejemplo 4.1.1* se considera que se representa todo el espacio muestral original, porque argumenta haciendo mención a la cantidad de parejas que forman los resultados: el que tiene más chance de ocurrir, y los que tienen menos posibilidades, es decir, se realiza un proceso de conteo para finalmente dar respuesta al ítem. En el *ejemplo 4.1.2* se representa todo el espacio muestral adoptado a partir de una lista de frecuencias, pero no se considera el espacio muestral original, teniendo en cuenta que los números 6, 7 y 8 son los resultados más probables, y que los números 2, 3, 11 y12 son los resultados menos probables de ocurrir. En el *ejemplo 4.1.3* se menciona que el número 6 es el resultado más probable; además, se considera al número 12 como el único elemento con menos probabilidad de ocurrir, es decir, no reconoce que el número 2, que tiene la misma probabilidad de ocurrencia. En el *ejemplo 4.1.4* se reconoce parcialmente el espacio muestral adoptado, por lo que se considera al número 6 como el caso más probable; además, reconoce al número 1 como un elemento de dicho espacio muestral, y como no se presentan parejas que formen dicho número, se distingue como el menos probable. En el *ejemplo 4.1.5* se responde a los resultados que piensa que tiene más y menos chance de ocurrir sin justificar, no se reconoce un proceso de conteo o de análisis del espacio muestral empleado. En el *ejemplo 4.1.6* se reconoce la equiprobabilidad del espacio muestral original, debido a que cada elemento del primer dado se puede combinar con los seis elementos del segundo dado; pero no está utilizando como referencia el espacio muestral adoptado; con lo que supone que ningún elemento tiene más y menos chance de ocurrir. Finalmente, en el *ejemplo 4.1.7* se representan proporciones a partir de algunos de los elementos del espacio muestral original, además, no se reconoce algún análisis sobre el espacio muestral adoptado; por lo que no se logra hacer una interpretación más detallada.

Ítem 5.1

Se observa que aproximadamente el 50,0% de la población percibe el resultado como no factible, es decir selecciona la opción *(b)* o *(c)*, y el resto, un 50,0%, lo percibe como factible respondiendo sólo la opción *(d)*. Del 50,0% de la población que considera los resultados como no factibles, el 42,8% selecciona la opción *(b)*, por lo que se cree que se está considerando que la probabilidad de que salga 5 es de 1/6 desde una mirada clásica, al momento de lanzar un dado, sin embargo, parece ser que lo consideran como no factible debido a que suponen que la probabilidad frecuencial debe ser la misma que la clásica; el resto de la población, un 57,2%, que considera que el resultado no es factible escogió la opción *(c)*, se puede pensar que el estudiante ve con más naturalidad una probabilidad desde una mirada frecuencia tal que al momento de lanzar un dado se obtiene el número‘5’40 veces, se supone que usan la probabilidad frecuencial 40/200 que es igual a 1/5, y nuevamente al contrastar estas dos se evidencia que son diferentes, por lo cual lo consideran como no factible. Finalmente, el 50,0% de la población que consideran que el resultado es factible selecciona la opción *(d)*, debido a que acepta que la diferencia que hay entre lo que arroja la probabilidad frecuencial (1/5) y la probabilidad clásica (1/6) no tienen una relación y con ello ambas son igualmente fiables.

Ítem 6.1

Ejemplo	*Imagen*
6.1.1	A = 6 cuadros B = 6 cuadros C = 6 cuadros D = 6 cuadros Lo probabilidad es lo mismo en todos los casos puesto que el área de cada espacio es igual.
6.1.2	hay la misma cantida de posibilidad que calga en la 4 areas. Porque Tienen la misma distancia o rango
6.1.3	En la area B por qre se apunta al centro y tendria mas posibilidad ya qre ocupa mas silueta apuntando en el centro
6.1.4	B y A Son mas centrales del blanco
6.1.5	En el B porque tiene mayor área ó también el C...
6.1.6	$\frac{1}{24}$ $\frac{1}{6} = \frac{1}{2} + 4 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \frac{1}{2}$ B se utiliza 7 cuadros $\frac{1}{6} = \frac{1}{2} + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \frac{1}{2}$ C $\frac{1}{6} = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$ A $\frac{1}{6} = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$. D.
6.1.7	Si as diestro es muy probable que impacte en A o D. Si es zurdo es muy problable que impacte en B o C.
6.1.8	A y D porque la distribución de los cuadros esta mejor que B y C

En el *ejemplo 6.1.1* se argumenta que las áreas de las zonas son iguales, debido al conteo de los 6 recuadros que conforman cada zona; en consecuencia se reconoce la equiprobabilidad geométrica entre ellas. En el *ejemplo 6.1.2,* que es parecido al anterior, se observa que se distingue la igualdad de las áreas empleando palabras como distancia o el rango, y no se reconocen procesos de conteo. En el *ejemplo 6.1.3* se considera que la flecha está dirigida al centro del tablero, y la zona que contiene la mayor parte del centro verticalmente es la *B*, con lo cual deduce que ésta tiene mayor probabilidad. En el *ejemplo 6.1.4* al igual que el anterior, se reconoce que la flecha se dirige al centro del tablero, con lo cual reconoce que las zonas que cubren este espacio en su totalidad son *A* y *B*. En el *ejemplo 6.1.5* se considera que se deja llevar por la parte visual, en donde aparentemente las zonas *B* y *C* son más grandes debido a la distribución que hay en los recuadros, con lo que se cree que estas zonas son las más probables. En el *ejemplo 6.1.6* se identifican los recuadros que están contenidos en cada área, sin embargo, se realiza un proceso de conteo con respecto a la cantidad de elementos mencionados en cada zona, identificándose que las áreas *B* y *C* son las que más elementos tienen, por lo que se concluye que tienen mayor posibilidad. En el *ejemplo 6.1.7* se considera que el área puede variar dependiendo de si el lazador es diestro o zurdo, es decir, se consideran otros factores no mencionados en el enunciado del ítem que pueden llegar a intervenir en el resultado. Por último, en el *ejemplo 6.1.8* se considera que la distribución de los recuadros que conforman las áreas *A* y *D* están mejor distribuidos que los de las áreas *B* y *C.*

Ítem 6.2

De la aplicación se obtienen los siguientes resultados, el 78,6% de la población selecciona la opción (*e*), por lo que reconoce la equiprobabilidad tanto de los eventos cara y sello, como la de cualquier combinación entre los resultados de lanzar una moneda seis veces. El 14,3%, de la población elige las opciones (*b*) y (*e*), que indica que no sólo considera la distribución con la que ocurre cada suceso, sino también la equiprobabilidad de cada secuencia. Finalmente, un 7,1% de la población elige la opción (*a*) con lo que puede estar suponiendo la existencia de un equilibrio entre la cantidad de caras y de sellos.

Ítem 6.3

Este análisis se realizará considerando los resultados obtenidos en el ítem *6.2*; del 78,6% de los estudiantes que seleccionaron la opción (*e*), se puede analizar que:

- el 36,4% de la población selecciona la opción (*b*); se interpreta que es un proceso constante donde se alternan los resultados del lanzamiento de una moneda de manera no tan consecutiva, por lo que los resultados CCCCCC y SSSSSS no se considerarían,
- el 18,2% de la población selecciona la opción (*c*); así pues, se consideran las frecuencias como elementos que pueden repetirse en varias ocasiones, centrándose la idea en la probabilidad frecuencial y no clásica,
- el 27,3% selecciona la opción (*e*);se considera el análisis en la probabilidad clásica donde se tiene equiprobabilidad para las secuencias del lanzamiento de una moneda 6 veces,
- el 9,1% selecciona simultáneamente las opciones (*a*) y (*c*); por lo tanto, se presentan situaciones en donde se evidencian los sucesos caras y sellos, y además, se considera que estos resultados tienen igual probabilidad que cualquier otra secuencia que cumpla la idea inicial,
- y el último 9,1% no da respuesta al ítem.

Del 14,3% de los estudiantes que seleccionaron la opción (*b*) y (*e*) en el ítem anterior, se puede analizar que:

- el 50,0% de la población selecciona la opción (*c*); se considera que siempre deben estar presentes los eventos cara y sello, por lo que se alternan cada una de las secuencias, siendo más probable que se omitían los eventos CCCCCC y SSSSSS,
- y el otro 50,0% selecciona la opción (*d*); se considera que en las secuencias debe haber un patrón de repetición para cada lanzamiento, de tal manera que siempre se presenten los eventos cara y sello en la secuencia.

Por último, el mismo 7,1% de la población que selecciona la opción (*a*) en el ítem anterior, para este ítem responde la opción (*b*), pareciendo que reconoce desde su experiencia que debe existir la misma cantidad de los eventos cara y sello en cada secuencia.

Ítem 7.1

Se considerará el mismo análisis para las respuestas de las opciones *a)* y *b)* debido a que se presenta la misma clasificación por la similitud en las preguntas, en donde la población total es igual y lo único que cambia es el evento; y las respuesta de las opciones *c)* y *d)* se analizaran en relación a los conectores "*o*" e "*y*" al verificar si identificaron alguna diferencia propia de estos.

El siguiente análisis corresponde a las opciones *a)* y *b)*:

Ejemplo	*Imagen*
7.1.1	a) La probabilidad es del 50% b) La probabilidad es del 50%
7.1.2	a) $\frac{20}{10} = 2$ b) $\frac{20}{10} = 2$
7.1.3	a) 1 de 9 b) 1 de 9

En el *ejemplo 7.1.1* responde que cada evento tiene un 50% de probabilidad de ocurrir al calcular probabilidad clásica $\frac{\text{casos favorables}}{\text{casos totales}}$. En el *ejemplo 7.1.2* más que probabilidades se establecen dos razones donde se identifica $\frac{\text{casos totales}}{\text{casos favorables}}$. En el *ejemplo 7.1.3* se insinúa la situación donde se escoge a una persona al azar de un grupo de nueve que es la población del evento en cuestión.

El siguiente análisis corresponde a las opciones *c)* y *d)*:

Ejemplo	*Imagen*
7.1.4	c) 25% d) 75%
7.1.5	c) La probabilidad es de un 25% d) La probabilidad es de un 25%
7.1.6	c) $\frac{20}{10} = 2$ chica $\frac{10}{5} = 0{,}2$ frances d) $\frac{20}{10} = 2$.
7.1.7	c) 1 de 5 d) 1 de 10

En el *ejemplo 7.1.4* identifica la cantidad de personas que le corresponde a cada uno de los eventos, y reconoce la diferencia entre los conectores 'y' y 'o', planteando las probabilidad para cada uno de los eventos en cuestión. En el *ejemplo 7.1.5* reconoce la cantidad de personas que corresponde al evento de la opción *c)*, pero no diferencia el conector 'o' como un elemento que permite varios sucesos al mismo tiempo, por lo que concluye que las probabilidades de los eventos en cuestión son la misma. En el *ejemplo 7.1.6* no se presenta alguna probabilidad, sino que establece razones donde se identifican $\frac{\text{casos totales}}{\text{casos favorables}}$, para la opción *c)* tiene en cuenta la población total, la cantidad de chicas y la cantidad de chicas que estudian francés; para la opción *d)* tiene en cuenta la población total y la cantidad de chicas, pero no tiene en cuenta el conector. Finalmente, en el *ejemplo 7.1.7* en las dos opciones se escoge a una persona al azar de un grupo que se considera como población del evento en cuestión.

Ítem 8.1

Las siguientes respuestas corresponden a la parte *a)* de este ítem.

Ejemplo	*Imagen*
8.1.1	a. En total son 100 estudiante Pasan 60 No pasan 40 la probabilidad de que elija un estudiante y pase es de un 60% = 3/5
8.1.2	d) $P = \frac{100}{60}$ $P = 1,6'$ $N = \frac{100}{40}$ $N = 2,5$ $P = 1.6'$ $\boxed{N = 2.5}$
8.1.3	a. La probabilidad de que un estudiante pase el examen es mayor al 50% de la posibilidad de perder el examen.

8.1.4	a. la probabilidad de que un hombre pase es del 60% y el de una mujer tambien
8.1.5	$a = \frac{1}{100}$ probabilidad de pasar

En el *ejemplo 8.1.1* reconoce la población total y la cantidad de estudiantes que pasaron el examen, y con ello plantea la probabilidad. En el *ejemplo 8.1.2*, identifica las cantidades de la población total y las de cada género, además establece dos razones como relaciones de probabilidad, una para cuando el estudiante pasa el examen y otra para cuando no pasa, presentando las razones como $\frac{\text{casos totales}}{\text{casos favorables}}$ en vez de $\frac{\text{casos favorables}}{\text{casos totales}}$. En el *ejemplo 8.1.3* no calcula probabilidad, sólo interpreta de la información proporcionada la probabilidad de que un estudiante pase el examen, y concluye que es mayor con respecto a la probabilidad de perderlo. En el *ejemplo 8.1.4* no calcula probabilidad sobre el grupo total, sin embargo concluye que la probabilidad de que un estudiante hombre pase el examen es igual a la probabilidad de que una mujer pase, y la asocia a un 60%. Por último, en el *ejemplo 8.1.5* se establece la probabilidad escogiéndose a una persona al azar del grupo de estudiantes que se presentaron para el examen.

Los siguientes ejemplos dan respuesta a la parte *b)* del ítem:

Ejemplo	*Imagen*
8.1.6	b) $100 = 100\% = x = \frac{1\cancel{00}\cdot 24}{1\cancel{00}}$ $24 = x$ posibilidad 24%
8.1.7	$1) = \frac{24}{40} = \frac{12}{20} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ sea hombre y pase el examen.
8.1.8	b) $\frac{40}{24} = 1.\hat{6}$ $\boxed{P(H) = 1.\hat{6}}$

8.1.9	b H → $\frac{1}{40}$
8.1.10	b) Hay Posibilidad de que este entre los 24. que pasaron el examen.
8.1.11	b. RESPECTO Al RESULTADO OBTENIDO SEGÚN lAS TABLAS SE PUEDE INFERIR Q'' lA PROBABILIDAD DE Q'' El ESTUDIANTE SEA HOMBRE Y PASE el EXAMEN EXISTE, PERO ES MAS PROBABLE Q'' lA elección SEA UNA MUJER.

En el *ejemplo 8.1.6* reconoce la población total y la cantidad de estudiantes que son hombres y pasaron el examen, con los que plantea la probabilidad. En el *ejemplo 8.1.7* establece la probabilidad a partir de la población total de hombres que presentaron el examen, es decir 40 y toma de estos los que logran pasar. En el *ejemplo 8.1.8* en consonancia con lo respondido en la parte *a)* establece una razón como $\frac{\text{casos totales}}{\text{casos favorables}} = \frac{40}{24}$. En el *ejemplo 8.1.9* se establece la probabilidad relacionada al escoger a una persona al azar del grupo total de hombres que se presentaron para el examen. En el *ejemplo 8.1.10* al igual que en el ejemplo anterior, se establece la probabilidad escogiéndose a una persona al azar pero del grupo de hombres que pasaron el examen. Finalmente, en el *ejemplo 8.1.11* no calcula probabilidad, sólo infiere respecto a lo que se observa de la tabla.

Los siguientes ejemplos dan respuesta a la parte *c)* del ítem:

Ejemplo	*Imagen*
8.1.12	?ves en nivel.. $\frac{4}{5}$ $\frac{36}{60}$ os pasaron ron mujeres es hombre o mujer no influye

8.1.13	c) hombres $P = \frac{40}{24} = 1.6'$ $N = \frac{40}{16} = 2,5$ Mujeres $P = \frac{60}{36} = 1.6'$ $N = \frac{40}{24} = 2.5$ $P_h = 1.6'$ $P_m = 1.6'$ $N_h = 2,5$ $N_h = 2,5$ No influye en Nada
8.1.14	c) $\frac{60 = 100}{24 \quad x} = x = \frac{100 \cdot 24}{60} =$ 40% hombres pasarón $\frac{60 = 100}{36 \quad x} = x = \frac{100 \cdot 36}{60} =$ 60% mujeres pasaron $\frac{40 = 100}{16 \quad x} = x = \frac{100 \cdot 16}{40} =$ 40% hombres no pasaron $\frac{40 = 100}{24 - x} = x = \frac{100 \cdot 24}{40} =$ 60% mujeres no pasaron las mujeres tienen un 60% de pasar o no los hombres tienen un 40% de pasar o no
8.1.15	C H M $\frac{1}{40}$ $\frac{1}{60}$

En el *ejemplo 8.1.12* determina las probabilidades de los eventos ser hombre y ser mujer, reconociendo la igualdad en la proporción, concluyendo que el género no influye. En el *ejemplo 8.1.13,* a diferencia del ejemplo anterior, presenta una razón entre los eventos ser hombre y ser mujer, tanto para los que pasan y los que no pasan, identificando que la razón entre ellos es igual. En el *ejemplo 8.1.14* enfatiza en la cantidad de personas de los eventos pasar y no pasar, con lo que realiza un análisis respecto a la proporción de hombres y mujeres, reconociendo que existe más probabilidad de que las mujeres pasen o no pasen; es decir, hace énfasis en la cantidad de mujeres y hombres. Por último, en el *ejemplo 8.1.15* plantean las probabilidades para los eventos ser hombre y ser mujer respectivamente, sin embargo, no responde si el género influye en que el estudiante pase o no pase.

Ítem 9.1

Ejemplo	*Imagen*
9.1.1	150 C C C S S C S S C C S S C S CCC CCS CSC CSS SCC SSC SCS SSS CCC CCS CSC SCC SSC CSS SCS ~~CSS~~ ~~SSC~~ ~~SCS~~ SSS $P(A \cap \neg B) = 7/8$
9.1.2	$\frac{1\ 2\ 3}{C}$ $\frac{1\ 2\ 3}{S}$ $\frac{1}{2} > S$, 3 - C $\frac{1}{2} > C$, 3 - S $\frac{1}{4}$ posibilidad
9.1.3	50 100 200 ¡No se C S C S C S C C C C S C S C C C C S
9.1.4	hay más probavilidad de que suceda A por que de 3 monedas puede salir aunque sea 1 cara; y menos probavilidades de que suceda B por que de 3 monedas es mas dificil sacar 2 caras. Pero si sucede A, tambien puede suseder B. y si susede B tambien puede suseder A.
9.1.5	$\frac{n!}{(n-1)!}$ $\frac{(50+100+200)!}{(350-1)!} = \frac{350!}{349!} = \frac{350 \cdot \cancel{349} \cdot \cancel{348} \ldots}{\cancel{349} \cdot \cancel{348} \cdot 347} \boxed{= 350}$

En el *ejemplo 9.1.1* se hace uso de un diagrama de árbol y se establece todos los elementos del espacio muestral mediante listas, donde se señala algunos de los elementos que cumplen con el suceso *B*, verificándose la no ocurrencia de este; concluyendo que $P(A \cap \neg B) = \frac{7}{8}$. En el *ejemplo 9.1.2* diferencia la cantidad de Caras y Sellos que pueden salir al lanzar una moneda tres veces, presentando sólo los casos SSC y CCS donde ocurre el suceso A, determinando la probabilidad. En el *ejemplo 9.1.3* se considera algunos casos del espacio muestral, distinguiéndose el lanzamiento de cada moneda de manera independiente; no presenta la probabilidad haciendo alusión a que 'no sabe'. En el *ejemplo 9.1.4* considera la idea de que hay mayor probabilidad que ocurra el suceso *A*, debido a que al lanzar una moneda tres veces es favorable sacar por lo menos una Cara, en comparación con la de tener que sacar dos Caras; no se hace alusión a alguna probabilidad. Finalmente, en el *ejemplo 9.1.5* considera los valores de las monedas como elementos imprescindibles del lanzamiento de una moneda, con lo cual trata de establecer una combinatoria para buscar la probabilidad.

Ítem 10.1

En general se presentan argumentos en términos de establecer proporcionalidades de manera implícita; sólo en algunos casos se establecieron razones numéricas para sustentar el literal elegido.

En este ítem se presentaron los siguientes resultados, el 53,3% de la población selecciona la opción (*a*), argumentándose en términos de la cantidad de canicas azules en cada caja, como se muestra en el siguiente ejemplo de respuesta de un estudiante

> Pienzo que hay más probavilidades de sacar vna canica azul en la caja A por que en la caja B hay demaciadas canicas rojas y es muy dificil sacar vna azul; encambio en la caja A hay menos canicas rojas y más probavilidades de sacar una canica azul.

El 20,0% de la población selecciona la opción (*b*),determinándose la diferencia entre la cantidades de canicas rojas y las canicas azules de cada caja, como en la caja *B* hay una mayor diferencia, se considera que en esta hay menos probabilidad de elegir una canica azul;

porque tiene mayor diferencia entre # de canicas de un color con respecto al otro.

El 13,3% de la población selecciona la opción (*c*), en esta no se presentaron argumentaciones escritas pero, seguramente piensan así porque las razones de proporcionalidad son muy cercanas, con lo cual no se nota la diferencia entre las probabilidades; y por último el 13,3% de la población no da respuesta al ítem.

PARTE 3: ANÁLISIS CUANTITATIVO

El consolidado de los resultados obtenidos se resume en las siguientes tablas:

Ítem 1.1

Tipo de Respuesta	*Descripción*	*Ejemplos*	*Frecuencia*
R1.1.1	Representa un evento seguro.	*1.1.1*	14,3%
R1.1.2	Representa un evento aleatorio.	*1.1.2* y *1.1.4*	64,3%
R1.1.3	Representa un evento imposible.	*1.1.3*	7,1%
R1.1.4	No da respuesta al ítem.		14,3%

Ítem 1.2

Tipo de Respuesta	*Descripción*	*Ejemplos*	*Frecuencia*
R1.2.1	Representa un evento seguro.	*1.2.1*	6,7%
R1.2.2	Representa un evento aleatorio.	*1.2.2* y *1.2.3*	73,3%
R1.2.3	No da respuesta al ítem.		20,0%

Ítem 2.1

Tipo de Respuesta	*Descripción*	*Ejemplos*	*Frecuencia*
R2.1.1	Reconoce la equiprobabilidad de los eventos ganar y perder, y justifica tomando una postura.	*2.1.1* y *2.1.2*	35,7%
R2.1.2	Reconoce la equiprobabilidad de los eventos ganar y perder, y justifica sin tomar una postura.	*2.1.3*	28,6%
R2.1.3	Compara las posturas de la situación y explica como las compara.	*2.1.4*	21,4%
R2.1.5	No da respuesta al ítem.		14,3%

Ítem 3.1

En la siguiente tabla se presenta la información general del ítem en relación a los resultados, al momento de seleccionar la gráfica que usarían para este:

<table>
<tr><th>Nº de Opciones Seleccionadas</th><th>Ilustración</th><th>Descripción</th><th colspan="2">Frecuencia</th></tr>
<tr><td rowspan="5">Una</td><td rowspan="2">(b)</td><td>Dan respuesta a una parte de la pregunta.</td><td>6,7%</td><td rowspan="2">26,7%</td></tr>
<tr><td>No dan respuesta a la pregunta.</td><td>20,0%</td></tr>
<tr><td rowspan="3">(c)</td><td>Dan respuesta a la pregunta.</td><td>20,0%</td><td rowspan="3">40,0%</td></tr>
<tr><td>No dan respuesta a la pregunta.</td><td>13,3%</td></tr>
<tr><td>Justifica porque selecciona la ilustración, pero no da respuesta al ítem.</td><td>6,7%</td></tr>
<tr><td rowspan="5">Dos</td><td rowspan="2">(b) y (c)</td><td>Considera la representación (b) como la menos probable.</td><td rowspan="2">13,3%</td><td rowspan="5">26,7%</td></tr>
<tr><td>Considera la representación (c) como la más probable.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">(b) y (d)</td><td>Considera la representación (b) como la menos probable.</td><td rowspan="2">6,7%</td></tr>
<tr><td>Considera la representación (d) como la más probable.</td></tr>
<tr><td>(a) y (c)</td><td>Considera ambas representaciones como más descriptivas de la situación.</td><td>6,7%</td></tr>
<tr><td>Ninguna</td><td colspan="2"></td><td colspan="2">6,7%</td></tr>
</table>

En la siguiente tabla se presentan los tipos de respuesta del ítem en relación al indicador correspondiente a este:

Tipo de Respuesta	*Descripción*	*Ejemplo*	*Frecuencia*
R3.1.1	Usa modelos gráficos, y hace conjeturas.	*3.1.1* y *3.1.2*	27,6%
R3.1.2	Usa modelos gráficos, pero no hace conjeturas.		33,3%
R3.1.3	Justifica la selección de la ilustración, pero no hace conjeturas.	*3.1.3*	6,6%
R3.1.4	Usa modelos gráficos, considera las representaciones como la más y menos probable, pero no conjetura.	*3.1.4*	20,0%
R3.1.5	Usa modelos gráficos, considera las representaciones más descriptivas de la situación, pero no conjetura.	*3.1.5*	6,6%
R3.1.6	No da respuesta al ítem.		6,6%

Ítem 3.2

Tipo de Respuesta	*Descripción*	*Ejemplo*	*Frecuencia*
R3.2.1	Hace conjeturas y usa modelos gráficos.	*3.2.1* y *3.2.2*	14,3%
R3.2.2	Hace conjeturas, pero no usa modelos gráficos.	*3.2.3* y *3.2.6*	42,9%
R3.2.3	No hace conjeturas, pero usa modelos gráficos.	*3.2.4*	7,1%
R3.2.4	No hace conjeturas y no usa modelos gráficos.	*3.2.5*	21,4%
R3.2.5	No da respuesta al ítem.		14,3%

Ítem 4.1

Tipo de Respuesta	*Descripción*	*Ejemplo*	*Frecuencia*
R4.1.1	Conjetura y pone a prueba las predicciones mediante el análisis de todo el espacio muestral adoptado.	*4.1.1*	6,7%
R4.1.2	Conjetura y pone a prueba las predicciones mediante el análisis de casos del espacio muestral original.	*4.1.2*	13,3%
R4.1.3	Conjetura y no pone a prueba las predicciones mediante el análisis del espacio muestral adoptado.	*4.1.3*, *4.1.5* y *4.1.6*	26,7%
R4.1.4	Conjetura y pone a prueba las predicciones mediante el análisis de casos del espacio muestral adoptado.	*4.1.4*	13,3%
R4.1.5	No hace conjeturas y no pone a prueba las predicciones mediante el análisis del espacio muestral adoptado.	*4.1.7*	6,7%
R4.1.6	No da respuesta al ítem.		33,3%

Ítem 6.1

Tipo de Respuesta	*Descripción*	*Ejemplo*	*Frecuencia*
R6.1.1	Conjetura que todas las áreas son equiprobables.	*6.1.1*y *6.1.2*	46,7%
R6.1.2	Conjetura que una o dos áreas son más probables que otras.	*6.1.3* al *6.1.8*	53,3%

Ítems 6.2 y 6.3

Tipo de Respuesta	*Descripción*	*Frecuencia*
R6.2.1	Reconoce la equiprobabilidad de cualquier combinación.	78,6%
R6.2.2	Reconoce la equiprobabilidad de cualquier combinación y tiene en cuenta elementos adicionales.	14,3%
R6.2.3	No reconoce la equiprobabilidad de cualquier combinación.	7,1%

Ítem 7.1

El siguiente análisis corresponde a las opciones *a)* y *b)*:

Tipo de Respuesta	*Descripción*	*Ejemplo*	*Frecuencia*
R7.1.1	Reconoce la cantidad de personas para cada evento, la población total y plantea la probabilidad.	*7.1.1*	53,3%
R7.1.2	Reconoce la cantidad de personas para cada evento, la población total, pero no plantea la probabilidad.	*7.1.2*	6,7%
R7.1.3	No reconoce la población total, pero se estima una cantidad de personas para cada evento y trata de plantear la probabilidad.	*7.1.3*	26,7%
R7.1.4	No da respuesta al ítem.		13,3%

El siguiente análisis corresponde a las opciones *c)* y *d)*:

Tipo de Respuesta	*Descripción*	*Ejemplo*	*Frecuencia*
R7.1.5	Reconoce la cantidad de personas para cada evento, distingue el uso de cada conector y plantea la probabilidad.	*7.1.4*	13,3%
R7.1.6	Estima la cantidad de personas para cada evento y plantea la probabilidad, pero no distingue el uso de cada conector.	*7.1.5*	33,3%
R7.1.7	Estima la cantidad de personas para cada evento, no distingue el uso de cada conector y no plantea la probabilidad.	*7.1.*6 y *7.1.7*	33,3%
R7.1.8	No da respuesta al ítem.		20,0%

Ítem 8.1

Las siguientes respuestas corresponden a la parte *a)* del ítem.

Tipo de Respuesta	*Descripción*	*Ejemplo*	*Frecuencia*
R8.1.1	Reconoce la cantidad de personas que pasaron el examen, la población total y plantea la probabilidad.	*8.1.1*	42,8%
R8.1.2	Reconoce la cantidad de personas que pasaron el examen y la población total, pero no plantea la probabilidad.	*8.1.2*	14,3%
R8.1.3	Reconoce la cantidad de personas que pasaron el examen y plantea la probabilidad, pero no reconoce la población total.	*8.1.3*	7,1%
R8.1.4	Reconoce la población total y plantea la probabilidad, pero no reconoce la cantidad de personas que pasaron el examen.	*8.1.*4 y 8.*1.5*	21,4%
R8.1.5	No da respuesta al ítem.		14,3%

Los siguientes ejemplos dan respuesta a la parte *b)* del ítem:

Tipo de Respuesta	*Descripción*	*Ejemplo*	*Frecuencia*
R8.1.6	Reconoce la cantidad de hombres que pasaron el examen, la población total y plantea la probabilidad.	*8.1.6*	28,6%
R8.1.7	Reconoce la cantidad de hombres que pasaron el examen y plantea la probabilidad, pero no reconoce la población total.	*8.1.7*	14,3%
R8.1.8	Reconoce la cantidad de personas que pasaron el examen, pero no reconoce la población total ni plantea la probabilidad	*8.1.8*	7,1%
R8.1.9	Plantea la probabilidad, pero no reconoce la cantidad de personas que pasaron el examen ni la población total.	*8.1.9*	7,1%
R8.1.9	Plantea la probabilidad, aunque reconoce la cantidad de personas que pasaron supone que esta es la población total, mas no reconoce la población total real.	*8.1.10*	7,1%
R8.1.10	No reconoce la cantidad de hombres que pasaron el examen, tampoco la población total y no plantea la probabilidad.	*8.1.11*	7,1%
R8.1.11	No da respuesta al ítem.		28,6%

Los siguientes ejemplos dan respuesta a la parte *c)* del ítem:

Tipo de Respuesta	*Descripción*	*Ejemplo*	*Frecuencia*
R8.1.12	Determina las probabilidades asociadas y reconoce la independencia de los eventos.	*8.1.11*	7,1%
R8.1.13	Reconoce la independencia de los eventos, pero no determina las probabilidades asociadas.	*8.1.12*	57,1%
R8.1.14	Determina probabilidades pero no las asociadas, no reconoce la independencia de los eventos.	*8.1.13* y *8.1.14*	21,4%
R8.1.15	No da respuesta al ítem.		14,3%

Ítem 9.1

Tipo de Respuesta	*Descripción*	*Ejemplo*	*Frecuencia*
R9.1.1	Representa todo el espacio muestral, considera la ocurrencia del suceso *A* y algunos de los elementos del suceso B^c, calcula la probabilidad.	*9.1.1*	13,3%
R9.1.2	Representa parcialmente el espacio muestral, considera la ocurrencia del suceso *A* y calcula la probabilidad, pero no considera la ocurrencia del suceso B^c.	*9.1.2*	6,7%
R9.1.3	Representa parcialmente el espacio muestral, considera la ocurrencia del suceso *A*, pero no considera la ocurrencia del suceso B^c ni calcula la probabilidad	*9.1.3*	20,0%
R9.1. 4	Representa parcialmente el espacio muestral, considera la ocurrencia del suceso *A*, pero no considera la ocurrencia del suceso B^c ni calcula la probabilidad.	*9.1.4*	6,7%
R9.1.5	No representa el espacio muestral, no considera la ocurrencia del suceso *A* ni la ocurrencia del suceso B^c, no calcula la probabilidad.	*9.1.5*	6,7%
R9.1.6	No da respuesta al ítem.		46,7%

En la siguiente tabla se presenta una posible caracterización del pensamiento aleatorio de un grupo de estudiantes de la Licenciatura:

Indicador	*Caracterización*
Explica desde su experiencia la posibilidad o imposibilidad de ocurrencia de eventos cotidianos.	Se explica desde la experiencia la posibilidad o imposibilidad de ocurrencia de eventos cotidianos, y se hace uso de las palabras utilizadas en los enunciados de los ítems.
Predice si la posibilidad de ocurrencia de un evento es mayor que la de otro.	Se presenta una serie de procedimientos para determinar las probabilidades, posteriormente se comparan los eventos asociados a las situaciones propuestas para presentar una postura.
Usa modelos gráficos para hacer conjeturas o pronósticos sobre la posibilidad de ocurrencia de un evento.	Los modelos gráficos no son tan empleados y utilizado para hacer conjeturas o pronósticos; hay preferencia por en el uso de tablas de datos y listas.
Conjetura y pone a prueba predicciones acerca de la posibilidad de ocurrencia de eventos.	Se realizan las conjeturas en base a la elaboración total o parcial del espacio muestral.
Compara resultados de experimentos aleatorios con los resultados previstos por un modelo matemático.	Se identifica una comparación entre la probabilidad clásica con la probabilidad frecuencial, en donde la probabilidad clásica tiene una mayor utilización y aceptación.
Conjetura acerca del resultado de un experimento aleatorio usando proporcionalidad y nociones básicas de probabilidad.	Se realizan conjeturas para cada experimento aleatorio, sin embargo, no siempre se reconoce la equiprobabilidad de estos.
Interpreta conceptos básicos de conteo y probabilidad.	Se presenta dificultad para plantear o expresar probabilidades de manera apropiada, ya que las confunden con razones de proporcionalidad en donde no se establece relaciones de la parte sobre el todo, sino del todo sobre la parte; también se confunde el referente de población que define el espacio muestral con sub poblaciones del mismo, lo que genera asignaciones erradas de probabilidad.
Interpreta conceptos de probabilidad condicional e independencia de eventos.	Se presentan argumentos según lo inferido en los datos de las tablas presentadas, pero no se identifica el uso de la propiedad de independencia.
Calcula la probabilidad de eventos usando métodos diversos.	Se identifica el uso de métodos gráficos como son los diagramas de árbol o las listas realizando se de forma total o parcial el espacio muestral, también se trata de usar conceptos básicos de conteo como la combinatoria para determinar la probabilidad.
Resuelve problemas usando conceptos básicos de conteo y probabilidad.	La redacción y la interpretación de los diferentes ítems propiciaron el desarrollo de soluciones poco claras, con un desarrollo incompleto o sin justificación. Se debe reconocer que se deben hacer mejoras en la redacción de algunos.

VI. CONCLUSIONES

Las conclusiones que se obtienen para este trabajo son:

- ✓ Respecto al indicador que propone que el estudiante explique desde su experiencia la posibilidad o imposibilidad de ocurrencia de eventos cotidianos; buena parte de los ellos pueden explicar desde su experiencia la posibilidad o imposibilidad de ocurrencia de eventos cotidianos, sin embargo, se nota que en las respuestas emplean las mismas palabras utilizadas en los ítems que se consideran como indicadoras para hacer alusión a eventos aleatorios como “posible” y “probable”; además se presentan respuestas donde se generaliza la situación.
- ✓ En relación al indicador que plantea que el estudiante prediga si la posibilidad de ocurrencia de un evento es mayor que la de otro, la gran mayoría de los estudiantes presentan una serie de procedimientos con lo cual comparan eventos asociados a las situaciones de análisis propuestas, como por ejemplo el juego de la pirinola, e identifican la equiprobabilidad de los eventos involucrados; sin embargo, son muy pocos los que predicen de antemano probabilidades asociadas a los eventos, sino que más bien intentaban directamente determinar probabilidades.
- ✓ Teniendo en cuenta el indicador que propone el uso de modelos gráficos para hacer conjeturas o pronósticos sobre la posibilidad de ocurrencia de un evento; en los ítems de la prueba piloto se esperaba que conjeturaran de acuerdo a cada situación haciendo uso de algún modelo gráfico, y aunque estos no fueron muy utilizados, hay preferencia en el uso de tablas de datos y listas. Esta situación se intentó remediar en la prueba definitiva al fomentar el uso de modelos gráficos, con base en la presentación de varios modelos gráficos para que seleccionaran y conjeturaran, sin embargo, algunos eligieron dos opciones de acuerdo a cual modelo consideraban que se evidenciaba mejor la información, y cual representaba de forma menos adecuada la información. Además, algunos seleccionaron pero no conjeturaron. Por lo tanto el planeado intento de remedio no surtió el efecto esperado.
- ✓ Considerando el indicador que propone que se conjeture y se ponga a prueba predicciones acerca de la posibilidad de ocurrencia de eventos; se reconoce que la mayoría de los estudiantes primero realizan las conjeturas, luego las comprueban mediante la elaboración total o parcial del espacio muestral. En términos de la distinción que hacen Andrade y otros

(2013), se observa que en la explicitación del espacio muestral original no se reconoce con propiedad, es decir no se tiene conciencia plena de la equiprobabilidad; por ejemplo, algunos estudiantes sólo consideran las parejas (x, y) y no las parejas (y, x), además, por este mismo motivo en el espacio muestral adoptado se reduce la cantidad de elementos que conforman los conjuntos. Otros tienden simplemente a conjeturar, pero no las verifican.

- ✓ En relación al indicador que propone que se comparen resultados de experimentos aleatorios con los resultados previstos por un modelo matemático; se identifica una comparación entre la probabilidad clásica con la probabilidad frecuencial, en donde la probabilidad clásica tiene un mayor utilización.
- ✓ Teniendo en cuenta el indicador que propone que se conjeture acerca del resultado de un experimento aleatorio usando proporcionalidad y nociones básicas de probabilidad; se conjetura de acuerdo a cada experimento aleatorio, aunque en la situación se solicite el uso de la proporcionalidad, basada en comparación de áreas, se genera conflicto para el reconocimiento de la equiprobabilidad de las zonas de acuerdo a la proporción geométrica; por otra parte, en situaciones de tipo discreto, como la del lanzamiento repetido cierto número de veces de una moneda, se reconoce la equiprobabilidad de las diferentes secuencias de caras y sellos.
- ✓ Considerando el indicador que propone que se interpreten conceptos básicos de conteo y probabilidad; se evidencia dificultad para plantear o expresar probabilidades de manera apropiada, ya que las confunden con razones de proporcionalidad en donde no se establece relaciones de la parte sobre el todo, sino del todo sobre la parte; en algunos ocasiones se confunde el referente de población que define el espacio muestral con sub poblaciones del mismo, lo que genera asignaciones erradas de probabilidad. Así mismo, también se detecta la realización de conteos incompletos respecto a los referentes de espacios muestrales propuestos. También, se presenta confusión con el uso de los conectores “y” y “o”.
- ✓ Respecto al indicador que propone que se interpreten conceptos de probabilidad condicional e independencia de eventos; para los ítems donde se presenta la información en tablas, algunos intentan determinar la probabilidad a partir de lo que infieren de estas, presentando argumentos en base a algunas proporciones con las cantidades dadas en las tablas, sin embargo, no se usa la propiedad de independencia de eventos, sólo se centran en dar uso de probabilidades clásicas de lo inferido en los datos.

- ✓ En relación al indicador que propone que se calcule la probabilidad de eventos usando métodos diversos, para ello se tomará como ejemplo el ítem del lanzamiento de las tres monedas, donde se hace uso de modelos gráficos como diagramas de árbol o listas realizando se de forma total o parcial el espacio muestral, también se trata de usar conceptos básicos de conteo como la combinatoria para determinar la probabilidad; sin embargo no se tuvieron en cuenta las especificaciones de los ítems, lo que conllevó a describir un procedimiento no valido para determinar la probabilidad.
- ✓ Teniendo en cuenta el indicador que propone que se resuelvan problemas usando conceptos básicos de conteo y probabilidad; la redacción e interpretación de los diferentes ítems propició el desarrollo de soluciones no previstas a priori en el Diseño del Instrumento, algunas de ellas son poco claras o presentan un desarrollo incompleto, y en otras no se hace alusión a una justificación, por lo que la clasificación de las mismas en categorías propuestas se dificultaba; a pesar de los ajustes realizados a la prueba piloto se debe reconocer que se deben hacer mejoras en la redacción de algunos ítems, como por ejemplo para el ítem de las canicas se debe pedir la justificación la respuesta proporcionada debido a que no es posible verificar el uso de conceptos básicos de conteo y probabilidad.
- ✓ Fue un tanto sorprendente que el número de respuesta en blanco aumentara en la prueba definitiva, respecto a la prueba piloto, lo cual explica cambios observados en los porcentajes de respuestas en las categorías de análisis propuestas. Quizás esto se puede explicar en términos de los sujetos que respondieron la prueba, ya que en el primer caso los estudiantes se encontraban en una clase propuesta para estudiantes de segundo semestre, donde podían haber estudiantes de segundo hasta de sexto semestre; y en el segundo caso los estudiantes estaban en una clase propuesta para estudiantes de primer semestre, donde podían haber estudiantes de primero y segundo semestre; esto puede influir en los resultados, debido a que hay un mayor conocimiento el algunos contenidos matemáticos.
- ✓ El documento logró consolidar la conceptualización de lo que significa “pensamiento aleatorio” en el currículo escolar de matemáticas a partir de los contenidos básicos de probabilidad establecidos por el MEN, a través del diseño y/o adaptación de un cuestionario para su posterior implementación; permitiendo describir el “pensamiento aleatorio” de un grupo de estudiantes del ciclo de fundamentación de la Licenciatura de Matemáticas que no han tomado el curso de probabilidad del programa, y así analizar los resultados obtenidos.

- ✓ En el presente trabajo se aporta a la comunidad educativa con una descripción del pensamiento aleatorio, en términos de una discriminación de los estándares básicos de matemáticas relacionados con el pensamiento aleatorio, en la que se pretende establecer aquellos estándares que enfatizan en lo probabilístico de aquellos que se centran en lo estadístico; sin embargo, cuando esta discriminación no era transparente se decidió catalogar el estándar como de estadística y probabilidad. Además, concretó el diseño de un cuestionario con sugerencias de posibles soluciones que permiten servir de referencia para la identificación del cumplimiento de los indicadores que fueron propuestos para el pensamiento aleatorio. Así, en consonancia con esta labor, el trabajo permitió establecer algunas de las nociones básicas que traen los futuros profesores de matemáticas de la escuela.
- ✓ Por otra parte, los resultados de este trabajo se pueden ver como una primera etapa de un proyecto para el que se sugiere definir y establecer un seguimiento a los efectos que tiene la instrucción que se está impartiendo en la Universidad respecto a las nociones estocásticas, con el fin de señalar errores y dificultades que se presentan a los maestros en formación en lo que atañe al pensamiento aleatorio, para establecer referentes de cómo mejorar y cambiar metodologías de enseñanza. En particular se cree conveniente utilizar estos o algunos de los ítems mencionados en el cuestionario presentado como referentes para un futuro trabajo en este sentido.

VII. REFERENCIAS

Andrade, L., Fernández, F. y Sarmiento, B. (2013). La búsqueda del espacio muestral 'original': Una necesidad para la enseñanza. En Salcedo, A. (Ed.), *Educación estadística en América Latina: Tendencias y Perspectivas* (81-94) Caracas.

Batanero, C. (2005, Noviembre). Significados de la probabilidad en la Educación Secundaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa RELIME*, *8* (3), 247-263.

Batanero, C., Contreras, J. y Díaz, C. (2011). *Experiencias y sugerencias para la formación probabilística de los profesores.* Paradigma, 32(2).

Batanero, C., Gómez, E., Serrano, L. y Contreras, J. (2012, Octubre). Comprensión de la Aleatoriedad por Futuros Profesores de Educación Primaria. *Revista de Investigación en Didáctica de las Matemáticas REDIMAT*.

Estrada, A. (2002). *Análisis de las actitudes y conocimientos estadísticos elementales en la formación del profesorado*. Tesis Doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona. Directores: C. Batanero y J. M. Fortuny.

Estrada, A. y Díaz, A. (2007). Errores en el cálculo de probabilidades en tablas de doble entrada en profesores en formación. *UNO* 44, 48-58.

Fernández, F., Andrade, L. y Sarmiento, B (2009). *Experimentos de enseñanza para el desarrollo de razonamiento estadístico con estudiantes de secundaria* (Informe de investigación). Bogotá D.C, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Fernández, F., Sarmiento, B. y Soler, N (2008). Estadística y probabilidad en la escuela secundaria. *Un estudio acerca del contexto, actitudes y conocimiento estocástico del profesor de matemáticas*, pág. 41. Bogotá D.C, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Fernández, F., Soler, N. y Sarmiento, B. (2008). *Pensamiento aleatorio y Probabilístico de Profesores de Educación Básica y Media* (informe de investigación DMA 014-06). Bogotá, Colombia: Centro de Investigaciones de la Universidad Pedagógica Nacional.

Fonseca, J. (2009). Conocimiento Pedagógico del Contenido en la Formación de Docentes de Matemática. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática* (5), 11-27.

MEN, (1998). *Lineamientos curriculares, Matemáticas*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

MEN, (2006). *Estándares Curriculares para la excelencia en la educación*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Soler (2013), Notas de clase realizadas por los estudiantes de Especialización en Educación Matemática, *Indicadores definitivos de razonamiento Estándares.*