LA ARGUMENTACIÓN COMO NÚCLEO DE LA ACTIVIDAD DEMOSTRATIVA

BIBIANA PATRICIA FRANCO AVENDAÑO

GIOVANNI ALBERTO MORENO CÁRDENAS

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA

Bogotá, Octubre 2011

LA ARGUMENTACIÓN COMO NÚCLEO DE LA ACTIVIDAD DEMOSTRATIVA

BIBIANA PATRICIA FRANCO AVENDAÑO

GIOVANNI ALBERTO MORENO CÁRDENAS

REPORTE DE INVESTIGACIÓN PARA OPTAR POR EL TÍTULO DE MAGÍSTER EN DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA

ASESOR: LEONOR CAMARGO URIBE

DOCTORA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA

Bogotá, Octubre 2011

RESUMEN ANALÍTICO EDUCATIVO R.A.E
TIPO DE DOCUMENTO: Trabajo de Grado.
ACCESO AL DOCUMENTO: Universidad Pedagógica Nacional.
TÍTULO DEL DOCUMENTO: LA ARGUMENTACIÓN COMO NUCLEO DE LA ACTIVIDAD DEMOSTRATIVA.
AUTORES: FRANCO AVENDAÑO BIBIANA PATRICIA MORENO CÁRDENAS GIOVANNI ALBERTO
PUBLICACIÓN: Bogotá D. C., Universidad Pedagógica Nacional, 2011, (94 páginas)
UNIDAD PATROCINANTE: Universidad Pedagógica Nacional, Facultad de Ciencia y Tecnología, Departamento de Matemáticas.
PALABRAS CLAVE: Argumentación, Actividad demostrativa, Tipos de argumentos, Dato, Justificación, Conclusión.
DESCRIPCIÓN: En esta investigación se presenta un estudio realizado en un curso de grado octavo de básica secundaria que tuvo lugar en año 2010 de una institución privada de la ciudad de Bogotá. El propósito es presentar evidencias de que las acciones de la actividad demostrativa promueven procesos argumentativos en los estudiantes, además de tipificar los argumentos que utilizan los estudiantes cuando quieren justificar sus

afirmaciones, construcciones o estrategias de solución. En este sentido el objetivo general del estudio **es** construir e implementar situaciones problema que favorezcan la práctica argumentativa en estudiantes de grado octavo en un marco de actividad demostrativa y analizar los argumentos producidos por ellos. La investigación se desarrolló en varios momentos; en primer lugar se planeó y se puso en marcha el experimento de enseñanza, en segundo lugar se tomó registro de la actividad desarrollada por los estudiantes durante los dos últimos problemas del experimento y por último se analizaron los datos recogidos en las transcripciones de los diálogos de los estudiantes.
FUENTES: **Bibliografía:** Camargo, L., Samper, C., Perry, P. Una visión de la actividad demostrativa en geometría plana para la educación matemática con el uso de programas de geometría dinámica. Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá, Colombia, 2006. Douek, N. 1998, Some Remarks about Argumentation and Mathematical Proof and their Educational Implications, Proceedings of the CERME-I Conference, Osnabrueck. Franco, B & Moreno, G. (2010). La verificación y la interpretación de enunciados en la actividad demostrativa. Ponencia presentada al 20º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones, Bogotá, Colombia. Franco, B & Moreno, G. (2011). La argumentación como núcleo de la actividad demostrativa. Ponencia presentada al I Encuentro de Estudiantes de Maestría y Doctorado en Educación Matemática, Armenia, Colombia. Marrades, R. y Gutiérrez, A. (2001). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. Educational Studies in Mathematics, 44, 87-125.

Moreno, G. & Franco, B. (2011). Disposición del profesor frente a la actividad demostrativa de estudiantes de secundaria. Ponencia presentada al 12º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa, Armenia, Colombia.

Trabajo de Campo:

La fuente inicial de datos corresponde a las grabación en audio y video de los dos últimos problemas del experimento de enseñanza y de sus respectivas transcripciones las cuales fueron realizadas por los autores de la presente investigación quienes son miembros del grupo de investigación *Æ·G* de la Universidad Pedagógica Nacional.

CONTENIDOS:

1. **Delimitación del problema:** En esta sección, se hizo una justificación y formulación del problema, una presentación de los objetivos y una revisión de antecedentes que plasman los referentes teóricos necesarios para el estudio.
2. **Marco teórico:** Se consolidaron los tres aspectos que fundamentan el marco teórico que son: acercamiento a una noción de actividad demostrativa, acercamiento a una noción de argumentación y la tipificación de argumentos.
3. **Metodología:** Se hizo una presentación del proceso llevado a cabo durante la investigación. Se describió la perspectiva investigativa; la contextualización del estudio en el cual se describen quienes eran los estudiantes y la clase de geometría; el diseño experimental y el dispositivo analítico.
4. **Análisis y Resultados:** Se presentó el informe de cada una de las actividades mencionadas en el dispositivo analítico del capítulo de la metodología y que permitieron analizar los datos obtenidos durante la puesta en marcha del experimento de enseñanza.
5. **Conclusiones:** En este capítulo se enuncian algunas reflexiones finales que tienen en cuenta aspectos como: la fiabilidad de las transcripciones, el diseño e implementación del experimento de enseñanza, las categorías de tipificación de los argumentos y los resultados de la tipificación.

METODOLOGÍA:

De acuerdo con el problema descrito en el primer capítulo del trabajo, la investigación se llevó a cabo a partir de la construcción e implementación del experimento de enseñanza.

De las 11 situaciones problema que se implementaron, solamente se grabaron en audio

y video las dos últimas situaciones y con tan solo dos grupos de estudiantes, esto con el fin de evitar interferencias auditivas. El experimento de enseñanza buscaba favorecer las acciones de la actividad demostrativa y a partir de los datos obtenidos en su desarrollo se procedió al proceso de análisis. El análisis tuvo en cuenta la caracterización de las acciones de la actividad demostrativa y la tipificación de los argumentos que construimos a partir de la revisión de diferentes estudios concernientes a la categorización de los argumentos utilizados por los estudiantes.
CONCLUSIONES: Como reflexión final podemos resaltar los siguientes aspectos: Es importante contar con unas transcripciones que reflejen fielmente las intervenciones de los estudiantes cuando se enfrentan a una situación problema que promueva la actividad demostrativa. El diseño e implementación del experimento de enseñanza fue exitoso en la medida que las intervenciones de los estudiantes recurrían al uso de propiedades y relaciones entre los objetos geométricos involucrados en el problema. Las categorías que construimos para tipificar los argumentos de los estudiantes son emergentes de la actividad de investigación realizada, la cual centra su atención en los desarrollos de los estudiantes desde la revisión bibliográfica realizada. Los resultados de la tipificación de argumentos fueron sorpresivos debido a que pensábamos que los estudiantes iban a utilizar elementos empíricos para validar sus argumentos, pero en los hallazgos encontrados, los argumentos obedecen en su mayoría al uso de elementos conceptuales, es decir recurren al uso de propiedades y además establecen un razonamiento en sus propuestas.
Fecha Elaboración resumen: 14 – 10 – 2011

Para todos los efectos, declaro que el presente trabajo es original y de mi total autoría; en aquellos casos en los cuales he requerido del trabajo de otros autores o investigadores, he dado los respectivos créditos.

TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN

El presente estudio hace referencia a un experimento de enseñanza desarrollado con estudiantes de grado octavo enfrentados a distintos problemas de geometría que favorecen la *actividad demostrativa.* Está centrado en resaltar la práctica argumental de los estudiantes para identificar y clasificar los distintos argumentos utilizados en el proceso de solución de los problemas. De esta manera proponemos a la argumentación como núcleo de la actividad demostrativa y a esta última como una vía favorable al aprendizaje de las matemáticas.

El reporte está estructurado en seis capítulos que describimos a continuación.

En el primer capítulo damos cuenta de la delimitación del problema que pretendemos resolver con esta investigación, que incluye tanto la justificación como la formulación del problema. También enunciamos el objetivo general y los objetivos específicos que nos permiten dar respuesta a nuestras preguntas de investigación. Para concluir este capítulo se hace una revisión de los antecedentes que nos permitió estudiar diferentes miradas que hacen algunos autores al área problema que nos concierne.

En el segundo capítulo caracterizamos el marco teórico que da soporte a la investigación; éste se compone de los siguientes aspectos: acercamiento a la noción de actividad demostrativa, acercamiento a una noción de argumentación y la tipificación de argumentos.

En el tercer capítulo describimos la metodología implementada para dar algunas respuestas a las preguntas de investigación y dar cumplimiento a los objetivos propuestos. Dicha metodología está estructurada a partir de los siguientes aspectos: la perspectiva investigativa; la contextualización del estudio en la cual se caracterizan los estudiantes y la clase de geometría; el diseño experimental que encierra el experimento de enseñanza y las fuentes de recolección de la información; y por último el dispositivo analítico que enuncia la manera como se analizan los datos recogidos en el desarrollo del dispositivo experimental.

El cuarto capítulo corresponde a los análisis y resultados obtenidos con la información de los episodios de las interacciones de los estudiantes en la clase de geometría. En este capítulo se ejemplifican aspectos como: La descripción de episodios; las actuaciones esperadas versus las actuaciones observadas en los estudiantes en los problema 10 y 11 del experimento de enseñanza; la identificación de las acciones de la actividad demostrativa por episodio; la identificación, esquematización y caracterización de los argumentos que utilizan los estudiantes para justificar sus afirmaciones; la tipificación de argumentos; y por último la identificación de regularidades y correlaciones en el estudio.

En el quinto capítulo se hace una reflexión general de los resultados encontrados en el desarrollo de la investigación en busca de responder a los propósitos de este estudio.

El sexto capítulo presenta los referentes bibliográficos en los cuales se basa la investigación.

1. DELIMITACIÓN DEL PROBLEMA

En el presente capítulo se tratan los aspectos que nos permitieron delimitar el problema de investigación, ellos son: la justificación de porqué es viable hacer el presente estudio; la descripción del problema que pretendemos afrontar; los propósitos que nos fijamos para dar respuesta a las preguntas de investigación; y por último, la revisión de algunas investigaciones que han hecho otros autores con respecto al problema en cuestión. Estos aspectos componen el *diagrama 1* que se muestra a continuación.

Diagrama 1. Delimitación del problema

1.1 Justificación del problema

Al estudiar los Lineamientos Curriculares, propuestos por el Ministerio de Educación Nacional para el área de matemáticas, encontramos como sugerencia que las situaciones-problema que proponga el profesor deben permitir al estudiante "explorar, construir estructuras, plantear preguntas y reflexionar sobre modelos; estimular representaciones informales y múltiples, y al mismo tiempo, propiciar gradualmente la adquisición de niveles superiores de formalización y abstracción del conocimiento" (MEN, 2006, p. 16); por tanto, se propone el diseño y la implementación de situaciones que sean un reto para el estudiante, sin obviar las posibles dificultades a las cuales se pueda enfrentar.

Las acciones que proponen los lineamientos curriculares, en cuanto a las actividades que realizan los estudiantes, guardan íntima relación con el aprendizaje de la demostración en el ámbito educativo, si ésta se ve en un sentido amplio; pues la demostración no se presenta únicamente desde la formalidad matemática sino que se puede desarrollar a través de cada una de las acciones anteriormente mencionadas.

Desde nuestro punto de vista, la demostración es un proceso matemático que debe ser abordado en la educación básica de los centros educativos, pues se busca que los estudiantes a nivel escolar prueben la veracidad o falsedad de enunciados matemáticos utilizando y encadenando argumentos. En el caso particular de la geometría, esta es concebida en los lineamientos como una "herramienta para interpretar, entender y apreciar un mundo que es eminentemente geométrico", en donde los estudiantes pueden "reconocer propiedades, relaciones e invariantes a partir de la observación de regularidades que los conduzca al establecimiento de conjeturas y generalizaciones", (MEN, 2006, p. 17) para lograr justificarlas dependiendo del nivel cognitivo en que se encuentren.

Para lograr una enseñanza efectiva de la demostración, en los Lineamientos Curriculares se plantea la necesidad de impulsar el razonamiento geométrico de los estudiantes teniendo en cuenta los niveles de Van Hiele. Aunque a nivel escolar no necesariamente se desarrolla un proceso formal en geometría, creemos que los estudiantes están en capacidad de: Visualizar, explorar y conjeturar en torno a la solución de un problema geométrico; verificar desde un enunciado hasta una conjetura consecuencia del proceso de solución de un problema; probar conjeturas encontradas a partir del uso de hechos geométricos que sean de su dominio; y proponer argumentos a favor o en contra de una conjetura para utilizarlos en la construcción de una demostración, aunque no sea en un formato lógico-deductivo.

Por otra parte, al revisar los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006, p. 51), encontramos que se precisan algunos procesos generales en toda actividad matemática. En particular se busca: "Usar la argumentación, la prueba y la refutación, el ejemplo y el contraejemplo, como medios de validar y rechazar conjeturas, y avanzar en el camino hacia la demostración". El desarrollo de estos procesos de forma adecuada contribuye a la adquisición de competencias matemáticas en el estudiante, de esta manera la demostración hace parte de los procesos fundamentales que conllevan la construcción del conocimiento matemático.

Teniendo en cuenta los referentes expresados en los documentos oficiales del Ministerio de Educación, nos damos cuenta de la necesidad de abordar con sentido investigativo la enseñanza y el aprendizaje de demostración en el ámbito escolar. Ésta aparece en estos documentos como un componente básico del aprendizaje de las matemáticas, el cual debe ser desarrollado no necesariamente desde la formalidad. En este sentido, vemos factible fundamentar nuestro estudio en los avances de los profesores de la línea de investigación Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría (Æ • G) de la Universidad Pedagógica Nacional, debido a que en los últimos años el núcleo de investigación de esta línea ha estado enmarcado en el mismo aspecto, aunque a nivel universitario.

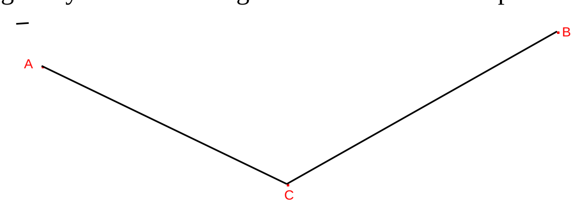
Al vincularnos a la línea de investigación como estudiantes de Maestría, el presente trabajo brinda aportes en cuanto a la enseñanza y aprendizaje de la demostración a nivel escolar, dado que este es el nivel en el cual nos desempeñamos profesionalmente; por tal motivo, se hace posible implementar y desarrollar los propósitos de la presente investigación, ya que se cuenta con el espacio propicio para su ejecución y desarrollo. Por esta vía, se busca ampliar los horizontes investigativos de la línea de investigación Æ • G y lograr un mayor impacto social.

1.2 Formulación del problema

En la actualidad, la clase de geometría que desarrollamos como profesores de secundaria, no responde a las expectativas que plantean los Lineamientos Curriculares y los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas, debido a que el ambiente en el que se desarrolla la clase usualmente no permite que los estudiantes realicen una práctica argumentativa en donde se fomente la discusión para la construcción del saber. Por el contrario, se presentan los contenidos de manera informativa como algo que hay que saber. Evidencia de ello son algunas reflexiones sobre el desarrollo de contenidos, realizadas entre profesores de las instituciones donde laboramos, de las cuales concluimos que el ambiente de la clase de geometría no favorece en los estudiantes procesos de justificación que les permitan dar su opinión a favor o en contra de una estrategia de solución desarrollada en la clase.

Para indagar cómo se enfrentan los estudiantes a una tarea de construcción en la cual se pide justificar su proceso de solución, realizamos un estudio exploratorio informal con un grupo de estudiantes de secundaria de grado octavo; el problema fue:

> A partir del triángulo *ABC*, construye el triángulo *OPQ*, que tenga sus ángulos y lados congruentes a los ángulos y lados del triángulo inicial. Describa el proceso que usó.



1. Explique por qué puedes asegurar que los triángulos son congruentes
2. ¿Puedes asegurar que con el procedimiento que realizaste lograrás construir un triángulo congruente a cualquier triángulo dado? Justifica tu respuesta.
3. Formula un enunciado que sea estrategia para construir un triángulo congruente a un triángulo dado.

Los procesos de solución a la tarea fueron correctos, es decir, los estudiantes lograron construir un triángulo congruente al dado. Pero los argumentos que utilizaron para justificar la validez de la construcción, en su mayoría eran empíricos, es decir, obedecían a la comparación perceptual de las figuras o a repetir los pasos de construcción sin justificarlos; algunos pocos identificaron propiedades generales como algún criterio de congruencia, pero no tenían herramientas teóricas para dotar de formalidad su procedimiento. Es decir, aunque encontraron propiedades geométricas presentes en los criterios de congruencia de triángulos, no los podían identificar como tal en su procedimiento.

Con el estudio exploratorio logramos evidenciar que aunque los estudiantes no son rigurosos a la hora de argumentar sus estrategias de solución, los argumentos que utilizan son intuitivos e informales. Los estudiantes están acostumbrados a una clase donde las preguntas son cerradas y con única respuesta, y en su mayoría numéricas; no es usual que en la clase se les pida dar una justificación acerca del cómo o del por qué de una estrategia de solución o de una afirmación de un compañero.

Los resultados de las investigaciones que ha desarrollado la línea Æ • G, con estudiantes que se forman para profesores, insinúan que es posible desarrollar en las clases de geometría, de nivel escolar, una actividad matemática más significativa que pueda enriquecer la formación de los aprendices, y que permita que ellos sean partícipes de la construcción de conocimiento. Por ello consideramos que los estudios que han desarrollado los profesores de la línea, específicamente el constructo actividad demostrativa, puede ser una alternativa para intentar solucionar la problemática presente en la clase usual de geometría.

Las investigaciones de la línea se han desarrollado con profesores en formación, es decir, a nivel superior o universitario, y se han centrado en analizar el conjunto de acciones que componen la actividad demostrativa. Por lo tanto, los profesores de la línea no se han centrado en caracterizar la práctica argumentativa que se debe favorecer en la escuela para impulsar en estudiantes de colegio la actividad demostrativa. Es aquí donde está el foco de interés de la presente investigación, pues está orientada a caracterizar la argumentación que se promueve cuando estudiantes de básica secundaria se enfrentan a una tarea geométrica de construcción en un ambiente propio de actividad demostrativa.

Gracias a las reflexiones establecidas anteriormente y al estudio exploratorio informal nos surgieron las siguientes inquietudes que adoptamos como preguntas de investigación:

- ¿Qué evidencias hay de que las acciones de la actividad demostrativa pueden promover procesos de argumentación en estudiantes de grado octavo?

- ¿Qué características tienen los argumentos utilizados por estudiantes de grado octavo al enfrentarse a una tarea geométrica que promueve la actividad demostrativa?

1.3 Objetivos

En consonancia con el problema, nos proponemos los siguientes objetivos, que consideramos son el eje articulador de la presente investigación:

Objetivos Generales

- Construir e implementar situaciones propias de la actividad demostrativa y evaluar si favorece la práctica argumental de estudiantes de grado octavo.

- Caracterizar y tipificar los argumentos producidos por estudiantes de grado octavo al enfrentarse a un problema enmarcado en la actividad demostrativa.

Objetivos Específicos

- Diseñar e implementar un conjunto de situaciones problema para grado octavo que promuevan en los estudiantes la realización de acciones propias de la actividad demostrativa.

- Describir la producción de los estudiantes en términos de los procesos de la actividad demostrativa.

- Identificar, clasificar y analizar los argumentos propuestos por estudiantes de grado octavo al enfrentarse a una situación problema.

- Establecer una relación entre los tipos de argumentos y las acciones de la actividad demostrativa.

- Describir y analizar la práctica argumental desplegada por los estudiantes de grado octavo inmersos en un problema propio de la actividad demostrativa.

1.4 Revisión de antecedentes

Para el desarrollo de la investigación se hizo necesario la revisión de distintos referentes con respecto al constructo actividad demostrativa y a la noción de argumentación, debido a que estos aspectos son el foco de interés. A continuación se presenta una síntesis de algunos referentes estudiados para la construcción de la investigación, señalando para qué nos fueron útiles.

- ✓ Perry, P., Camargo, L., Samper, C., Rojas, C. (2006) *Actividad demostrativa en la formación inicial del profesor de matemáticas*. Bogotá: Fondo Editorial, Universidad Pedagógica Nacional.

Este libro es el resultado del proyecto de investigación *Geometría dinámica en la formación del profesor de matemáticas*, realizado por un grupo de profesoras de la Universidad Pedagógica Nacional en Bogotá, Colombia durante los años 2003 y 2004. El proyecto fue desarrollado en un curso de geometría plana de la licenciatura en matemáticas. Las investigadoras indagaron acerca de las experiencias y elementos conceptuales que aporta la incorporación de la geometría dinámica al aprendizaje de la demostración, inmersos en un ambiente de actividad demostrativa. El estudio consistía en la construcción autónoma y creativa por parte de los estudiantes y de la profesora del sistema axiomático deductivo de una unidad temática concerniente al curso. Al finalizar el curso las investigadoras lograron ampliar su visión acerca de la actividad demostrativa, y mostraron a los estudiantes que aprender a demostrar es un proceso colectivo, que es posible desarrollar si se asume una posición crítica frente a las justificaciones propias o producidas por sus compañeros. Al comparar el estado inicial del grupo con el final, los estudiantes lograron producir teoremas y definiciones de manera autónoma.

La lectura de este libro nos sirvió para entender el constructo actividad demostrativa, pues se definen las diferentes acciones que lo componen y se ejemplifican a partir de diversas soluciones de problemas de geometría por estudiantes para profesores. Sin embargo, este constructo se ha venido modificando a partir de los resultados de investigaciones posteriores que han sido desarrolladas por la línea de investigación Æ • G; ejemplo de ello, puede ser la ampliación de la acción de verificar propuesta como uno de los resultados de este estudio.

- ✓ Samper, C., Camargo, L., Molina, O., Echeverry A., Perry, P. (2010), *Geometría dinámica: medio para el establecimiento de condicionalidad lógica*. Informe de investigación. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

En esta investigación, los profesores de la línea Æ • G, se interesaron por caracterizar la actividad demostrativa, indagar cuál es la actividad argumentativa desplegada por los estudiantes, y encontrar evidencias en los diálogos sostenidos por los estudiantes de que la geometría dinámica posibilita generar ideas que reconozcan que una conjetura es consecuencia lógica de una teoría. La investigación se realizó con ocho estudiantes de tercer semestre de la licenciatura, por tanto habían tomado dos cursos previos de geometría; a estos estudiantes se les propuso un problema que permitía descubrir un nuevo teorema. En los resultados de la investigación los autores afirman que los estudiantes desarrollan una rica actividad demostrativa, adoptan la inducción, abducción y deducción como tipos de argumentación, y se genera interacción entre ellos, gracias a que el uso del software de geometría dinámica Cabri los hace sentirse confiados en sus diferentes procesos de solución. También hacen relevancia al papel que la geometría dinámica juega en la actividad demostrativa para la construcción de conocimiento.

Esta revisión nos condujo a reafirmar la importancia de un instrumento de mediación para la enseñanza y aprendizaje de la geometría. Debido a que la institución donde desarrollamos la investigación, no contaba con estos recursos, decidimos utilizar la regla y el compás como herramienta para la clase, aún con la consciencia de que la mediación con este instrumento es diferente.

- ✓ Camargo, L., Samper, C. y Perry, P. (2006). Una visión de la actividad demostrativa en geometría plana para la educación matemática con el uso de programas de geometría dinámica. *Lecturas Matemáticas*. S. C. M. Matemáticas, XV Congreso Nacional de Matemáticas. Volumen Especial, 371–383.

En este artículo, los investigadores de la línea de investigación Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría de la Universidad Pedagógica Nacional, presentan la conceptualización de actividad demostrativa, con la cual han venido orientando sus investigaciones. Con algunos ejemplos, evidencian cómo un software de geometría dinámica aporta herramientas potentes en el aula y permite involucrar a los estudiantes en la práctica de validación. De esta manera, el software no sólo permite modelar la situación, sino encontrar regularidades y propiedades que permitan encontrar un hecho geométrico. Sin embargo, los investigadores consideran que la actividad de los estudiantes no termina con la elaboración de la conjetura, sino que se interesan en que los estudiantes indaguen el por qué se cumple y qué puede servir para validarla, es decir, en construir la demostración de la conjetura. Además se enuncia que la geometría dinámica por sí sola no provee un ambiente propicio para el aprendizaje de la demostración; es necesario que el profesor diseñe e implemente situaciones propicias de aprendizaje, que permitan construir colectivamente un sistema teórico y constituir una comunidad de práctica de indagación.

La lectura de este artículo nos sirvió para resaltar la importancia de las intervenciones del profesor en la solución de una situación problema, pues éstas permiten que el estudiante crea necesario reflexionar acerca de cuestiones que a simple vista considera irrelevantes, pero que le podrían permitir solucionar el problema satisfactoriamente o establecer relaciones que conlleven a una posible solución. Aunque el papel del profesor no es el objeto de estudio de nuestra investigación, consideramos de vital importancia sus intervenciones en los procesos argumentativos desplegados por los estudiantes, pues el profesor puede indagar acerca del porqué de una estrategia, afirmación, procedimiento o conjetura que sea relevante en el proceso de solución de un problema.

- ✓ Perry, P., C. Samper, et al. (2006). Dos Episodios que plasman rasgos de una comunidad de práctica en la que Cabri juega un papel clave. Memorias del *III Congreso Iberoamericano de Cabri*, Bogotá, versión digital disponible en www.iberocabri.org.

En este artículo los autores plasman, ilustrando con dos episodios de una clase de geometría, el papel que juega la geometría dinámica, como instrumento de mediación y comunicación en la conformación de lo que denominan una comunidad de práctica. Los episodios corresponden a una clase de geometría plana de la licenciatura en matemáticas, cuyo objetivo principal es desarrollar competencia demostrativa. En este artículo se describe la comunidad de práctica que se logró constituir en la clase. Ésta es aquella en la que *"*profesor y estudiantes conforman una comunidad de validadores que cuestionan las explicaciones que describen simplemente la manipulación de símbolos, y en cambio aceptan aquellas en las que pareciera que se estuviera actuando sobre objetos matemáticos que les son comunes a las partes que se comunican" (Perry, 2006).

La revisión de este artículo nos fue útil para orientar las posibles actuaciones de nosotros como profesores investigadores, tanto en el desarrollo del experimento de enseñanza como en las institucionalizaciones de cada una de las situaciones problema.

- ✓ Boero, P., Garuti, R. y Lemus, E. (2007). Tackling theorems in eighth grade. Some mental processes underlying producing and proving conjectures, and conditions suitable to enhance them. En P. Boero (Ed.), *Theorems in school. From history, epistemology and cognition to classroom practice* (pp. 249-264). The Netherlands: Sense Publishers. Italia.

Este estudio fue desarrollado durante el año 2007 y pretendía estudiar el papel que juega la actividad exploratoria en la solución de una situación problema, en donde se pide a estudiantes de básica secundaria encontrar una o más estrategias adecuadas para proponer conjeturas que den solución a un problema y posteriormente demostrarlas. En este estudio los estudiantes debían explorar la relación entre la posición de dos palos ubicados verticalmente y sus respectivas sombras producidas por el sol. Se formulaba a los estudiantes preguntas tales como: ¿Cuándo sus sombras son paralelas y cuándo no? Al finalizar la investigación, debido al interés de argumentar, los estudiantes lograron explorar y discutir todas las posibilidades para finalmente establecer con ayuda del profesor, un enunciado (conjetura) válido. Posteriormente, al demostrar la conjetura los estudiantes retoman el proceso de conjeturación, es decir los pasos que los llevan a establecer la conjetura en pro de construir colectivamente la demostración. Por tal razón si al momento de generar la conjetura no justifican correctamente entonces no tienen los argumentos suficientes para construir la demostración.

La lectura de este artículo nos aportó un ejemplo del tipo de problema que se puede proponer a los estudiantes. No necesariamente con geometría dinámica, los estudiantes pueden establecer conjeturas en donde la actividad exploratoria juega un papel fundamental en la búsqueda de ideas para la demostración de la conjetura. A partir de los resultados mencionados por el autor, decidimos tener en cuenta el proceso exploratorio de los estudiantes, que para nuestro caso se realizó con regla y compás, en el instante en que se enfrentaban a validar sus conjeturas, que aunque no se escribieron en forma condicional, si se generaron. Situaciones como la ejemplificada por Boero (2007), generan riqueza en los procesos argumentativos en los estudiantes, los cuales son el núcleo de análisis de nuestra investigación.

- ✓ Douek, N. 1998, Some Remarks about Argumentation and Mathematical Proof and their Educational Implications, *Proceedings of the CERME-I* Conference, Osnabrueck. (pp. 125-139).

En este artículo la autora propone una diferencia epistemológica y cognitiva entre la prueba matemática y la argumentación cotidiana; esta es una de las razones por las cuales a los estudiantes les causa dificultad el aprendizaje de la demostración en la escuela. En el estudio, la autora hace una revisión de lo que se entiende por argumento y argumentación, pues no todo discurso puede aceptarse como un argumento.

La revisión de este artículo nos permitió conceptualizar lo que entendemos por argumentación: conjunto de argumentos conectados coherentemente para justificar la validez de un enunciado. Esta acepción es la adoptada en el presente estudio aunque estamos conscientes que no es la única definición ni la más estructurada.

- ✓ Rodríguez, F. (2006). Análisis de demostraciones en entornos de lápiz y papel y de Cabri, por estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas. Proyecto de investigación perteneciente a los cursos del Doctorado en Didáctica de las Matemáticas de la Universitat de València. Dirigido por el Dr. Ángel Gutiérrez Rodríguez.

El propósito de esta investigación es mostrar las diferencias entre los procesos de demostración utilizados por estudiantes de matemáticas en un entorno de lápiz y papel, y en uno de geometría dinámica. Para ello, se hizo una revisión bibliográfica en busca de los tipos de demostraciones más relevantes, citando a diferentes autores (Bell, Balacheff, Harel y Sowder, Marrades y Gutiérrez e Ibáñez). La información de la investigación fue recogida a través de “auto-protocolos” realizados por los mismos estudiantes y de notas de campo del investigador. Las resoluciones de los problemas de demostración, realizadas por los estudiantes, fueron analizadas principalmente a partir de: la clasificación de las demostraciones en las diferentes categorías de demostración propuestas por el autor; ejemplos de fases ascendentes y descendentes en la demostración de los estudiantes; y una muestra de cómo se complementa la información arrojada por los diferentes datos. Por último, se propone como resultados algunos aspectos como: la elaboración de una clasificación de las demostraciones propia del autor, pero basada en la revisión bibliográfica; introducir el “auto-protocolo” como una nueva herramienta metodológica; y clasificar y analizar las demostraciones de los estudiantes a partir de la clasificación propuesta.

El estudio de esta investigación nos fue de gran ayuda, pues a partir de la revisión bibliográfica hecha por el autor, logramos construir nuestra clasificación o tipología de argumentos, aclarando que principalmente tomaremos argumentos empíricos, basados en algunos autores de la revisión. Ellos también realizan una clasificación de los argumentos deductivos, pero es de nuestro interés únicamente mencionar la clasificación de los argumentos empíricos, pues creemos que son los más utilizados por los estudiantes de secundaria.

Los tres autores y propuestas de clasificaciones de argumentos que revisamos en la investigación de Rodríguez (2006), son:

Categorías propuestas por Balacheff (1988)

Las categorías de argumentos empíricos propuestas por este autor se refieren a que los estudiantes recurren a la acción real o a la ostensión. Los tipos de argumentos son: ´empirismo naif `, que consiste en afirmar la veracidad de un resultado tras verificarla en unos cuantos casos elegidos sin ningún criterio específico; ´empirismo crucial`, que consiste en verificar la proposición en un ejemplo elegido cuidadosamente de forma que "si funciona aquí, funcionará siempre"; ´ejemplo genérico`, que involucra hacer explícitas las razones de la veracidad de una conjetura mediante operaciones o transformaciones de un objeto que se considera representante de su clase.

Categorías propuestas por Harel y Sowder (1998)

Las categorías de argumentos propuestas por este autor se clasifican en dos: de convicción externa y empíricos. Los primeros se subclasifican en: ´autoritarios` si la persona sitúa su convicción en lo que dice el profesor, un libro, etc.; ´rituales`, si la persona fundamenta su convicción en función del aspecto o apariencia del argumento; y en ´simbólicos`, si la persona basa su convicción en la manipulación simbólica de expresiones. Los empíricos se subclasifican en: ´inductivos`, en los que la convicción consiste en la comparación de uno o varios casos concretos; y en ´perceptivos`, en los que la convicción está fundamentada en experiencias físicas o sensitivas.

Categorías propuestas por Marrades y Gutiérrez (2000)

Las categorías propuestas por este autor tienen como elemento de convicción la verificación de la propiedad en ejemplos y su clasificación depende de cómo se elijan dichos ejemplos. Los tipos de argumentos son retomados de la clasificación hecha por Balacheff (1988). Los tipos son: ´empirismo naif `, que puede ser de tipo inductivo, en los que la convicción consiste en la comparación de uno o varios casos concretos, o de tipo ´perceptivo`, en los que la convicción está fundamentada en experiencias físicas o sensitivas; ´experimento crucial`, en los que se escoge cuidadosamente un ejemplo que sea lo menos particular posible; ´ejemplo genérico`, en las que se escoge un ejemplo genérico al que se le da carácter de representante de su clase. Dependiendo de cómo se utilizan los ejemplos, las categorías de experimento crucial y ejemplo genérico se subdividen en las siguientes categorías: de ´ejemplificación`, en las que inicialmente se muestra la existencia de un ejemplo o la ausencia de contraejemplos; ´constructivas`, en las que la justificación se basa en la forma de obtener un ejemplo; ´analíticas`, en las que se utilizan propiedades observadas empíricamente en el ejemplo; ´intelectuales`, en las que a pesar de estar basadas en la observación empírica del ejemplo, principalmente se utilizan propiedades y relaciones aceptadas sobre los elementos del ejemplo.

2. MARCO TEÓRICO

Nuestro marco teórico está organizado bajo tres aspectos que se relacionan inclusivamente: la noción de actividad demostrativa, la noción de argumentación y la caracterización de los tipos de argumentos que utilizan los estudiantes para justificar sus construcciones y afirmaciones que dan solución a una situación problema. Estas relaciones establecidas entre los tres aspectos que componen el marco teórico, se pretenden ilustrar con el *diagrama 2.*

Diagrama 2. Marco teórico

2.1 Acercamiento a la noción de Actividad Demostrativa

A continuación se presenta la noción de actividad demostrativa, sugerida, por el grupo Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría de la UPN, bajo nuestra interpretación a partir de algunos documentos que hacen referencia a este constructo (Perry, Camargo, Samper, Rojas, 2006; Samper, Camargo, Molina, Echeverry, Perry, 2010; Camargo, et al. 2006; Perry, et al. 2006). Además precisamos que la acción de verificar ha sido ampliada con respecto a lo que proponen los anteriores autores, esto es debido al contexto en el cual desarrollamos la presente propuesta; mas adelante aclaramos esta ampliación con más detalle.

El constructo actividad demostrativa en el ámbito educativo incluye dos procesos: el proceso de conjeturación y el proceso de justificación. En el proceso de conjeturación, se realizan acciones que conducen a la formulación de una conjetura que da solución a una situación problema, tales como visualizar, explorar, generalizar y verificar; esas acciones posibilitan la creatividad de los estudiantes, pues no existen reglas para llevarlas a cabo. En el proceso de justificación, las acciones de explicar, probar y demostrar conducen a la búsqueda y organización de ideas para conformar la demostración de la conjetura, es decir, que justifiquen la conjetura encontrada.

Los procesos de conjeturación y de justificación no se desarrollan por separado. Si bien es cierto que generalmente el proceso de conjeturación aparece en primera instancia, esto no es un impedimento para que cuando se llegue al proceso de justificación se puedan retomar acciones del proceso de construcción de la conjetura o viceversa.

Para presentar una idea contextualizada de lo que entendemos por el constructo actividad demostrativa, a continuación presentamos las descripciones de las acciones de la actividad demostrativa y proponemos ejemplos de las acciones propias de este constructo a partir de la siguiente situación problema (ver figura 2.1) particular que se propuso a los estudiantes de nuestra investigación. En los casos en los que no tenemos ejemplos sacados de los datos ponemos respuestas hipotéticas.

Construya un rectángulo a partir de dos segmentos: uno como lado y el otro como diagonal.

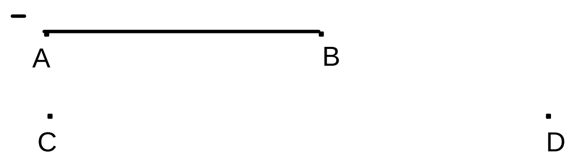


Figura 2.1

Esta tarea puede ser abordada con regla y compás o geometría dinámica, a partir de dos segmentos (un lado y una diagonal) de diferente medida. A continuación se presenta la descripción de las acciones del proceso de conjeturación:

Visualizar: Entendemos la acción de visualizar como la de hacer una mirada sobre la representación gráfica, imaginada, dada, o construida, que enfoca elementos de ésta para detectar, percibir o evocar propiedades geométricas. Un ejemplo de visualizar se evidencia en la intervención de Sergio cuando comienza a resolver el problema y menciona: “Este [segmento *CD*] podría ser un lado, pero este [segmento *AB*] no podría ser la diagonal porque no alcanza hasta la otra esquina, entonces… […] entonces yo sugeriría que esta sería la base [segmento *AB*] […] La diagonal tiene que ser larga”.

Explorar: Entendemos explorar como hacer una investigación empírica sobre una representación gráfica, a través de acciones como medir, calcular y construir, en las que se consideran uno o más casos. Un ejemplo de explorar se evidencia en la intervención de Nicolás, cuando se enfrenta al problema indagando mediante construcciones una vía para solucionar el problema: “A partir de dos segmentos… [Toma el compás y copia la medida del segmento *AB* a otra parte de la hoja. Lo nombra] […] ¡Listo!, préstame la regla [con centro en A traza un arco de radio *CD*] […] [Traza dos perpendiculares por los extremos del segmento *AB*. Traza un arco a partir de *B* con radio *CD*] […] [Marca las intersecciones de los arcos con las perpendiculares usando las letras *E* y *F*]”.

Generalizar: “Establecer enunciados, de los que se tiene seguridad, expresados en forma general. Hace referencia al acto de postular una afirmación –fruto del convencimiento personal logrado a través de la acciones de visualizar y explorar-” (Perry et al., 2006, p.10). Un ejemplo hipotético de generalizar, sería una intervención como la siguiente: “Después de mirar varias opciones para ubicar los segmentos, me di cuenta que para formar el rectángulo los segmentos deben compartir un extremo”.

Verificar: Entendemos verificar, como medir, construir y calcular, con el propósito de poner a prueba una idea, estrategia, enunciado, afirmación, conjetura establecida, cuando un cuestionamiento suscita una duda frente a ésta. De esta manera proponemos una ampliación a la definición de esta acción propuesta por Æ • G, pues no solo se verifica la conjetura, sino que por ejemplo se puede verificar cualquier enunciado que se presente en el problema. Un ejemplo de verificar, se evidencia en la intervención de Sergio cuando resuelve el problema: “Voy a construir. [Construye las mediatrices de todos los lados del cuadrilátero] Voy a ver [si es un rectángulo]; sí, si es. Si logro descubrir el centro y veo que todos son… que el punto medio del rectángulo, equidista de sus vértices es porque sí es… [Un rectángulo]”.

A continuación se presenta la descripción de las acciones del proceso de justificación:

Explicar: “Justificar empíricamente basados en la figura para mostrar lo que en ella se ve y hacer señalamientos de resultados empíricos obtenidos en la exploración o de información proveniente de otras fuentes, como por ejemplo de una autoridad externa al grupo” (Perry et al., 2006, p.10). Un ejemplo de explicar se evidencia en la intervención de Julián, cuando justifica a sus compañeros cómo resuelve el problema: “Bueno, tomamos el segmento más pequeño y lo nombramos *AB*, lo copiamos aquí. Al punto *A* y al punto *B* le sacamos sus perpendiculares. [La profesora pregunta por qué perpendiculares] Porque la construcción que toca hacer es un rectángulo; entonces toca hacer perpendiculares para que den ángulos de 90 grados. O sea, como el rectángulo tiene que tener todos sus ángulos internos de 90 grados”

Probar: “Justificar parcialmente afirmaciones y razones, referidas a propiedades geométricas generales, sacadas del conjunto de posibilidades estudiadas y de nuevas relaciones de dependencia encontradas en las acciones realizadas sobre la figura". (Perry et al., 2006, p.10). Un ejemplo de probar se evidencia en la intervención de Felipe, cuando resuelve el problema: "Como dice Sergio, el rectángulo [*ABEF*] se divide en dos triángulos rectos [rectángulos] iguales [congruentes]; entonces si este [*ABF*] tiene la misma medida [congruencia de lados y ángulos] que este [*EFB*], entonces el otro [*EFB*] triángulo igual [congruente] va a tener la misma medida de este [señala el ángulo *A* y se refiere a que el ángulo *E* es recto porque es congruente con el ángulo *A* que se construyó a partir de una perpendicular]".

Demostrar matemáticamente: "Justificar deductivamente lo que explicita y encadenar, en forma exhaustiva, afirmaciones y sus respectivas razones, referidas a un sistema axiomático y que lleva desde la información dada hasta aquella que se desea demostrar" (Perry et al., 2006, p.10). No presentamos un ejemplo ilustrativo, pues no tenemos como expectativa que nuestros estudiantes realicen una demostración del hecho descubierto.

2.2 Acercamiento a una noción de argumentación

El constructo actividad demostrativa se circunscribe a la perspectiva sociocultural, enfoque de referencia del grupo de investigación Æ • G, en donde las interacciones estudiante–estudiante y estudiante– profesor son de vital importancia. Gracias a esta perspectiva, los profesores de la línea de investigación dan relevancia a la argumentación, pues este proceso comúnmente aparece en las distintas interacciones; es el telón de fondo de la actividad demostrativa y foco de interés de nuestra investigación. También es importante mencionar que en los Lineamientos Curriculares y Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006), la argumentación es uno de los procesos que debe ser desarrollado en la escuela, tal como lo mencionamos en el apartado *2.1*, motivo por el cual se hace pertinente el desarrollo de situaciones problema propias de la actividad demostrativa.

En busca de una noción de argumentación, revisamos algunos documentos y estamos de acuerdo con Douek (1999) cuando afirma que la argumentación indica tanto el proceso que produce un discurso coherentemente conectado (aunque no necesariamente deductivo) sobre un determinado tema y el texto elaborado por ese proceso. A partir de este estudio precisamos lo que entendemos por argumento y por argumentación con base en el planteamiento de Douek (1999).

Un argumento es una razón que se utiliza para expresar el punto de vista con respecto a un hecho cotidiano, es decir, es un enunciado en contra o a favor de una idea u opinión de otro. Matemáticamente un argumento puede ser verbal, numérico ó gráfico. Por ejemplo, cuando Camilo afirmó: "*La siguiente figura es un rectángulo"* [ver figura 2.2],

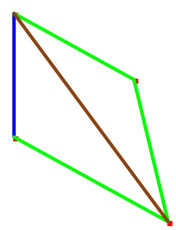


Figura 2.2

Andrés argumentó en contra de tal afirmación "no es un rectángulo, pues sus ángulos internos no son rectos"; Daniela dijo "no es un rectángulo porque sus lados opuestos no son iguales". Consideramos que estos enunciados son ejemplos de argumentos, porque los estudiantes toman una posición frente a la afirmación dada, a partir de propiedades o relaciones que reconocen en la figura.

La argumentación "consta de uno o más argumentos conectados coherentemente, aunque no necesariamente de manera deductiva" (Douek, 1999). Cuando se requieren varios argumentos para justificar a favor o en contra de un enunciado se está construyendo una argumentación. Por ejemplo, para la tarea de justificar si la anterior figura es un rectángulo, los estudiantes podrían haber planteado los siguientes argumentos:

> La figura tiene dos ángulos agudos y dos ángulos obtusos; los ángulos no son rectos; los lados opuestos de la figura no son de igual medida; como la figura no tiene ni los lados opuestos de igual medida ni los ángulos internos rectos, entonces no es un rectángulo.

Los cuatro argumentos anteriores forman la argumentación presente en esa situación problema. Aunque por la naturaleza de la argumentación sea discursiva, los argumentos pueden ser también visuales o gestuales.

La enseñanza ha atribuido al profesor la tarea de enseñar los “teoremas” a los estudiantes, quienes tienen la misión de organizarlos para presentar la “prueba” como resultado final. Este punto de vista es un poco autoritario, pues el profesor impone prácticamente cómo se debe demostrar, sin permitir a los estudiantes pensar en encontrar la conjetura. Esta visión un poco lineal de la demostración puede hacer ver a los argumentos y a la prueba como dos aspectos diferentes, los primeros como procesos y la prueba como producto. En nuestro caso particular aunque no pretendemos construir una demostración formal con los estudiantes, estamos seguros que precisamente son las acciones del proceso de conjeturación las que permiten al estudiante construir una argumentación deductiva para validar sus construcciones, procedimientos, afirmaciones y posibles conjeturas de la situación problema desarrollada.

2.3 Tipificación de argumentos

Para realizar la clasificación de los argumentos, nos basamos en la investigación realizada por Rodríguez (2006), quien como mencionamos en el apartado 1.4, hace un análisis de las investigaciones previas sobre la demostración a partir de una revisión bibliográfica de diferentes autores y establece su propia clasificación de categorías de demostración. Basados en los diferentes tipos de categorías de demostración planteadas en la investigación, realizamos una adaptación de las mismas, para la construcción de una tipología de argumentos que nos permite clasificar la práctica argumental que despliegan los estudiantes enfrentados a una situación problema.

Para tipificar los argumentos establecimos tres criterios de clasificación basados en Rodríguez (2006). En este sentido, todo argumento identificado en la actividad demostrativa de los estudiantes, debe ser clasificado a partir de cada uno de estos criterios para lograr su ubicación en un tipo específico de argumento.

Los criterios de clasificación son:

Criterio 1: La naturaleza de las ideas en las que se basa el argumento.

Criterio 2: La forma de escoger los ejemplos que se incluyen en el argumento.

Criterio 3: El tratamiento que se le da a los ejemplos en el argumento.

En cuanto al criterio1, distinguimos los argumentos de manera jerárquica en:

Informal, caracterizado por el uso de analogías o comparaciones.

Pragmático, caracterizado por convicción propia o acciones reales sobre construcciones.

Intelectual, caracterizado por la presencia de un razonamiento lógico para establecer el argumento.

En cuanto al criterio 2, los argumentos informales se clasifican de manera jerárquica en:

No geométricos, en los que se utilizan ejemplos ajenos a la geometría.

De convicción externa, en los que se justifica por argumentos de individuos u objetos (libro, software, internet) ajenos a la situación.

Los argumentos pragmáticos se clasifican en:

Empírico-naif, en los que se utilizan ejemplos sin ningún criterio específico de elección.

Empírico-crucial, en los que se utiliza un ejemplo con características especiales.

Empírico-genérico, en los que se utiliza un ejemplo como representante de su clase.

Los argumentos intelectuales solo tienen un tipo:

Conceptual, en los que se utiliza ejemplos basados en definiciones, propiedades o relaciones.

En cuanto al criterio 3, los argumentos Empíricos- naif se clasifican de manera jerárquica en:

De ejemplificación: en los que con un solo ejemplo se valida el argumento.

Inductivo: en el que con dos o más ejemplos se valida el argumento.

Los argumentos Empírico- crucial y Empírico-genérico se clasifican en:

De ejemplificación: en los que con un solo ejemplo se valida el argumento.

Constructivo: en los que se valida a partir de la construcción del ejemplo.

Analítico: en los que se valida a partir de propiedades observadas en el ejemplo.

Los argumentos conceptuales se clasifican en:

No analíticos: en los que se nombra una definición, teorema, etc.

Analíticos: en los que valida el argumento a partir de una definición, teorema, etc.

Basados en los tres criterios descritos anteriormente, obtenemos 12 tipos de argumentos que caracterizamos así:

1. *Informal-no geométrico:* argumento que parte de analogías o comparaciones basadas en ejemplos ajenos del contexto geométrico.
2. *Informal-de convicción externa:* El argumento parte de analogías o comparaciones basadas en el contexto geométrico que justifican pero que son ajenas al problema.
3. *Pragmático-empírico-naif-de ejemplificación:* El argumento está basado en la convicción personal, tomando como referente un ejemplo sin criterio específico de elección.

4. *Pragmático-empírico-naif-inductivo:* El argumento está basado en la convicción personal, tomando como referente dos o más ejemplos sin criterio específico de elección.
5. *Pragmático-empírico-crucial-de ejemplificación:* El argumento está basado en la convicción personal, tomando como referente un solo ejemplo con características especiales.
6. *Pragmático-empírico-crucial-constructivo:* El argumento está basado en la convicción personal, tomando como referente un ejemplo con características especiales que valida el argumento desde la construcción geométrica del mismo.
7. *Pragmático-empírico-crucial-analítico:* El argumento está basado en la convicción personal, tomando como referente un ejemplo con características especiales que da validez al argumento desde propiedades observadas en el mismo.
8. *Pragmático-empírico-genérico-de ejemplificación:* El argumento está basado en la convicción personal, tomando como referente un ejemplo representante de una clase para modelar el argumento.
9. *Pragmático-empírico-genérico-constructivo:* El argumento está basado en la convicción personal, tomando como referente un ejemplo representante de una clase que valida el argumento desde la construcción geométrica del mismo.
10. *Pragmático-empírico-genérico-analítico:* El argumento está basado en la convicción personal, tomando como referente un ejemplo representante de una clase que da validez al argumento desde propiedades observadas en el ejemplo.
11. *Intelectual-conceptual-no analítico:* El argumento está basado en un razonamiento en el que se mencionan elementos teóricos involucrados.
12. *Intelectual-conceptual-analítico:* El argumento está basado en un razonamiento en el que se valida con elementos teóricos involucrados.

Para ilustrar la tipología de argumentos descrita anteriormente, proponemos el *diagrama 2.3.*

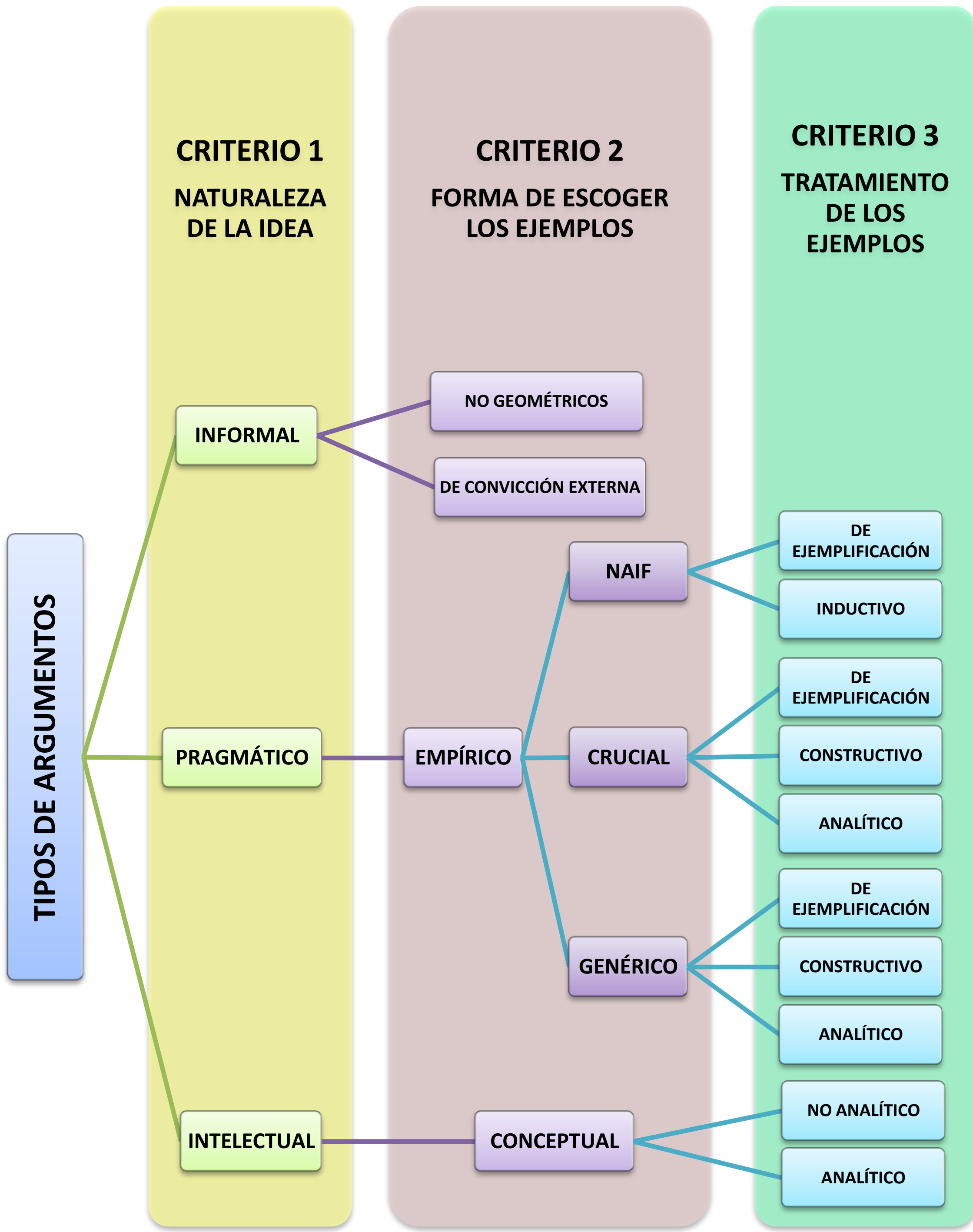


Diagrama 2.3, Tipificación de argumentos

3. METODOLOGÍA

En este capítulo describimos el proceso metodológico desarrollado en la investigación *La argumentación como núcleo de la actividad demostrativa.* Para ello, en primera instancia sintetizamos la perspectiva en la cual se enmarca las acciones investigativas desarrolladas. Luego, contextualizamos el estudio, para lo cual hacemos referencia a los estudiantes, sus experiencias escolares previas y la clase de geometría usual. En tercera instancia, mencionamos y caracterizamos el dispositivo experimental y las técnicas que utilizamos para recolectar la información. En última instancia, describimos el dispositivo analítico que nos fue útil para analizar los datos recogidos. En este dispositivo se enuncia, por medio de fases, los procedimientos que realizamos para analizar los resultados. En el *diagrama 3* se ilustran los aspectos que componen la metodología.

Diagrama 3. Metodología

3.1 Perspectiva investigativa

Esta investigación se enmarca dentro de un enfoque metodológico denominado *Experimento de enseñanza* (Cobb, 2000; Steffe 2000). Este enfoque permite comprender la actividad matemática de los estudiantes en el contexto real del aula, y así es posible dar evidencia del efecto en el aprendizaje de una implementación particular en el aula. En nuestro caso, queremos identificar los procesos argumentativos que despliegan estudiantes cuando se involucran en un ambiente de actividad demostrativa. La investigación se enmarca dentro de un paradigma naturalista; es decir, observamos estudiantes en el espacio usual del aula interactuando en pro de solucionar un problema, tomamos registros de su actividad matemática y la analizamos buscando indicadores del efecto de la experiencia.

Un experimento de enseñanza, se realiza en tres fases. En una primera fase se planea el experimento con base en algún marco de referencia o algunas hipótesis de aprendizaje de los estudiantes de algún contenido matemático. En una segunda fase se implementa el experimento de tal manera que al tiempo que la secuencia se lleva a cabo, se hacen análisis posteriores a cada clase para realizar ajustes y adaptaciones. En una tercera fase, una vez finalizado el experimento, se hace un análisis retrospectivo. El desarrollo de nuestra investigación atiende a las tres fases de un experimento de enseñanza, descritas anteriormente.

Para el análisis de los resultados del experimento hicimos una triangulación de la información basada en tres aspectos: Interpretaciones individuales de los dos profesores-investigadores; discusiones entre ellos; y finalmente discusiones de los tres investigadores para establecer los acuerdos finales propuestos en la investigación. Gracias a estas interpretaciones, podemos dotar de validez los resultados de los análisis y resaltamos que aunque ésta sea una vía factible para la interpretación de la información, no es la única posible.

3.2 Contextualización del estudio

3.2.1 Los estudiantes

La investigación se desarrolló con veintiocho estudiantes de grado octavo de educación básica secundaria de un colegio privado en la ciudad de Bogotá de nivel socio-económico medio. Estos estudiantes tenían edades entre 12 y 14 años y su estrato económico oscilaba entre 2 y 3. Los estudiantes, en los dos grados inmediatamente anteriores, es decir en sexto y séptimo, estudiaron en geometría la identificación de figuras geométricas y sus partes. También habían hecho un curso básico de dibujo técnico, por lo que suponíamos que manejaban la regla y el compás y conocían algunos procedimientos para construir rectas perpendiculares y ángulos congruentes. Sin embargo, como lo pudimos ver en el estudio exploratorio informal (Ver apartado *1.2*), en las construcciones hechas no reconocían los objetos geométricos involucrados. Probablemente en esa asignatura lo importante era seguir cuidadosamente una serie de pasos para obtener la construcción deseada, pero no fundamentarlos geométricamente.

Los criterios tenidos en cuenta para escoger el grupo de estudiantes fueron los siguientes: los estudiantes tenían como profesora titular del curso a uno de los investigadores, tenían experiencia previa con los instrumentos de trazo (y queríamos aprovechar estas habilidades), tenían un bagaje geométrico que nos permitía pensar que podrían hacer justificaciones utilizando el conocimiento geométrico precedente, y la cantidad de estudiantes en el curso era factible para obtener buenos registros de la información.

Este experimento no pretende generalizar los resultados que se obtienen particularmente en este curso, sino mostrar que es factible desarrollar un estudio del mismo tipo en cualquier contexto escolar.

3.2.2 La clase de geometría

En los dos años anteriores (6º y 7º), la clase de geometría había sido impartida por un profesor cuya metodología era diferente a la que pusimos en marcha en el experimento.

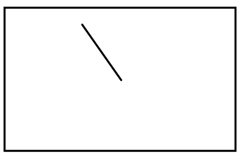
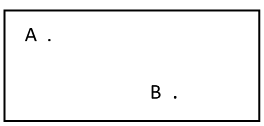
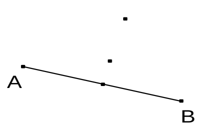
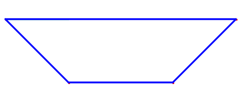
Allí, se explicaban los contenidos geométricos de acuerdo a la planeación curricular pero no se utilizaban instrumentos de trazo ni tampoco se incentivaba el trabajo colectivo. En grado octavo, en el cual se desarrolló la investigación, la asignatura de geometría se abordó solamente en el último bimestre del año escolar. La planeación y desarrollo del experimento estaba en consonancia con los contenidos de geometría propuestos para el curso en la planeación curricular. Este experimento se describe en la siguiente sección.

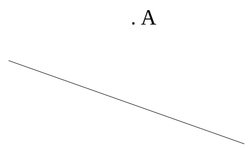
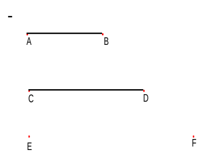
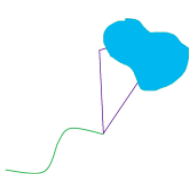
3.3 Diseño experimental

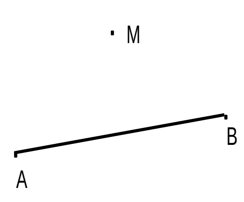
3.3.1 Experimento de Enseñanza

El experimento de enseñanza tuvo una duración de dos meses y se basó en una propuesta de 11 situaciones problema que se propusieron a los estudiantes con el objetivo de desarrollar el contenido del curso e introducirlos en la actividad demostrativa. Como ya se mencionó, la profesora titular era uno de los investigadores y en este rol procuró desarrollar estrategias para promover las acciones de la *actividad demostrativa*. Sin embargo, como profesora, su interés era también desarrollar los contenidos geométricos propuestos para el curso en el plan de área.

En el siguiente cuadro (Ver tabla 3.3.1) presentamos las situaciones problema que componen la secuencia que implementamos en la clase de geometría. En cada situación describimos tres aspectos: El respectivo contenido geométrico que se buscaba desarrollar; el posible uso del instrumento de mediación, que se esperaba de los estudiantes cuando enfrentaran la tarea y las relaciones o propiedades que se pretendía que los estudiantes establecieran al darle solución a la situación. Las situaciones fueron resultado de la planeación previa a la puesta en marcha del experimento y a los ajustes que se iban haciendo sobre la implementación del mismo.

SITUACIONES PROBLEMA	CONTENIDO Y LENGUAJE GEOMÉTRICO	USO DEL INSTRUMENTO (REGLA Y COMPÁS)	PROPIEDAD QUE PUEDE SER USADA PARA JUSTIFICAR
Problema 1: En la hoja aparece una figura geométrica. Dibuja dos figuras congruentes a ella en dos partes diferentes de la hoja. 	Definición y notación de segmento. Definición y notación de segmentos congruentes.	Uso del compás o de la regla sin medidas para construir segmentos congruentes o verificar si dos segmentos son congruentes. El compás permite construir un segmento congruente a otro, siempre y cuando no se modifique su abertura.	<u>Teorema:</u> Todos los radios de una misma circunferencia son congruentes. <u>Definición de segmentos congruentes:</u> Dos segmentos son congruentes si tienen la misma medida.
Problema 2: ***Parte a)*** En la hoja aparecen dos puntos *A* y *B*. Encuentra 5 puntos diferentes que equidisten de los puntos *A* y *B*. 	Definición de punto medio de un segmento. Definición de equidistancia.	Construcción de puntos equidistantes, trazando dos pares de arcos de igual medida con centros en A y en B, pero con radio arbitrario. Estos arcos se intersecan en dos lugares diferentes de la hoja.	<u>Definición de equidistancia:</u> Un punto P equidista de A y de B si $AP = PB$. <u>Definición de mediatriz:</u> El conjunto de puntos que equidistan de los extremos de un segmento determinan la mediatriz. <u>Teorema:</u> Un punto P está en la mediatriz de $\overline{AB}$ si $AP = PB$. <u>Definición de punto medio:</u> Si un punto P de un segmento AB cumple que $\overline{AP} \cong \overline{PB}$ se puede afirmar que P es el punto medio del segmento AB y viceversa.
Parte b) Encontraste más de un punto que equidista de los extremos. Ellos están ubicados en un lugar especial. Describe ese lugar. 	Definición de mediatriz.	Construcción con la regla de una recta que une los cinco puntos trazados en el problema anterior.	
Problema 3: Construye el mástil en el centro del barco que se muestra en la siguiente figura. 	Aplicación de: Definición de punto medio. Definición de mediatriz.	Construcción de la mediatriz del segmento que representa la base o la cubierta del barco.	<u>Teorema:</u> La mediatriz de un segmento pasa por el punto medio. Los puntos sobre la mediatriz equidistan de los extremos del segmento.

Problema 4: Tenemos una recta y un punto *A*. Construir el segmento $\overline{AB}$ tal que la recta sea la mediatriz. 	Definición y notación de rectas o segmentos perpendiculares. Definición y notación de ángulo recto. Aplicación de la definición de mediatriz.	Construcción de un segmento perpendicular a una recta por un punto externo. Construcción con el compás de segmentos congruentes.	<u>Teorema:</u> La mediatriz de un segmento es perpendicular al mismo. <u>Definición rectas perpendiculares:</u> Dos rectas son perpendiculares si determinan ángulos rectos. Cualquier punto de una mediatriz equidista de los extremos del segmento.
Problema 5: Dados los siguientes tres segmentos, construya un triángulo cuyos lados sean congruentes a los segmentos dados. 	Definición y notación de triángulo. Criterio de congruencia Lado-Lado-Lado (*LLL*) entre triángulos. Definición y notación de triángulos congruentes.	Construcción de tres segmentos congruentes a los dados, de tal forma que compartan solamente los extremos, y formar el triángulo.	<u>Criterio de congruencia *LLL* entre triángulos:</u> Dos triángulos son congruentes si tienen lados correspondientes congruentes y viceversa.
Problema 6: Construya dos ángulos que sean congruentes.	Definición y notación de ángulo. Definición y notación de ángulos congruentes.	Construcción de un ángulo congruente a otro, utilizando el criterio de congruencia *LLL* entre triángulos (copia usual de ángulos). Construcción de rectas perpendiculares. Construcción de triángulo equilátero o isósceles.	<u>Definición de ángulos congruentes:</u> Dos ángulos tienen la misma medida si son congruentes. <u>Definición triángulos congruentes:</u> Si dos triángulos son congruentes entonces sus ángulos respectivamente son congruentes. <u>Teorema:</u> Los ángulos formados por dos rectas perpendiculares son congruentes.
Problema 7: Completa la siguiente cometa de la cual solo se observa un pedazo, pues el resto se ocultó por una mancha. 	Definición de bisectriz	Construcción de la bisectriz de uno de los ángulos visibles de la cometa. La bisectriz puede representar uno de los palos internos de una cometa.	<u>Definición de bisectriz:</u> La bisectriz de un ángulo es un rayo que está en el interior del ángulo y determina dos ángulos congruentes.

Problema 8: Construye un $\overline{AC}$ y su mediatriz; nombra con *D* al punto medio del $\overline{AC}$; ubica un punto *B* en la mediatriz. Encuentra una característica común de los triángulos ΔABD y ΔCBD. Justifica esa característica.	Aplicación de: Definición de mediatriz. Propiedades de la mediatriz, pasar por el punto medio del segmento y ser perpendicular al segmento. Definición triángulos congruentes.	Construcción con el compás de la mediatriz de un segmento. Utilizan el compás para comparar las medidas de los lados respectivos entre los triángulos.	<u>Aplicación teorema de la mediatriz, ser perpendicular:</u> Los dos triángulos son rectángulos pues la mediatriz determina dos ángulos rectos con el segmento. El punto medio de un segmento determina segmentos congruentes, por tanto $\overline{AD} \cong \overline{DC}$. Por la definición de mediatriz el punto *B* equidista del segmento *AC*, por tanto $\overline{AB} \cong \overline{CB}$. Los triángulos ΔABD *y* ΔCBD tienen un lado *DB* común. Los triángulos ΔABD *y* ΔCBD son congruentes por el criterio de congruencia *LLL* entre triángulos.
Problema 9: Construye un ΔABC y las mediatrices de los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$. Nombra con el punto *P* el corte de las mediatrices ¿Qué lugar describe las posiciones de *P* al cambiar de posición al vértice *B*? Justifica la respuesta.	Definición del circuncentro de un triángulo. Aplicación de la definición de mediatriz.	Construcción de distintos triángulos que cumplan las condiciones de la situación.	El punto *P* describe el lugar geométrico mediatriz de *AC* porque *AC* es el único lado del triángulo que mantiene su medida y posición cuando cambia de posición el vértice *B*. La intersección de las tres mediatrices es un punto solamente.
Problema 10: En la figura, el punto *M* es el punto donde se cortan las mediatrices del triángulo ΔABC y $\overline{AB}$ es un lado del triángulo. Construye un triángulo tal que *M* sea corte de las mediatrices. 	Problema de aplicación.	Construcción de la mediatriz de $\overline{AB}$ Trazar una circunferencia (lugar geométrico de *C*) con centro en *M* y radio *MA*, para utilizar el hecho que *A*, *B* y *C* equidistan de *M*.	*M* pertenece a las tres mediatrices de los lados del triángulo, entonces equidista de sus vértices. <u>Definición de circuncentro:</u> El punto de intersección de las mediatrices de un triángulo se llama circuncentro. Debido a que es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo.

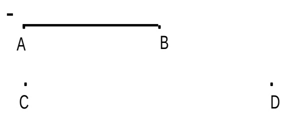
Problema 11: Construye un rectángulo, a partir de dos segmentos: uno como lado y el otro como diagonal. 	Definición y notación de rectángulo. Definición de diagonal de un rectángulo.	Construcción con el compás de segmentos congruentes. Construcción de rectas perpendiculares. Uso del compás para verificar si dos segmentos son congruentes.	<u>Teorema lados desiguales - ángulos desiguales:</u> En un rectángulo la longitud de una diagonal siempre es mayor que cualquiera de sus lados. <u>Definición de rectángulo:</u> Un rectángulo tiene cuatro ángulos rectos. <u>Teorema:</u> La diagonal de un rectángulo determina dos triángulos rectángulos congruentes. En algunos rectángulos un par de lados congruentes es de mayor longitud que el otro par de lados congruentes.

Tabla 3.3.1 Experimento de enseñanza

En todas las clases los estudiantes debían traer compás, regla sin medidas, lápices y borrador. La profesora formaba grupos de trabajo (cuatro personas en cada grupo), entregaba a cada grupo una hoja que contenía la situación problema y hojas blancas para trabajar. Los estudiantes debían leer el enunciado y discutir acerca de las estrategias que proponían para darle solución al problema. Durante el trabajo la profesora pasaba por cada uno de los grupos observando la actividad de los estudiantes y haciendo preguntas para promover la argumentación y el uso de las propiedades geométricas ya conocidas. Una vez los estudiantes solucionaban los problemas, la profesora recogía las hojas de trabajo que contenían las construcciones hechas con regla y compás, la explicación del procedimiento finalmente utilizado, y un posible enunciado que diera solución al problema.

Adicionalmente el profesor pedía a los estudiantes que se organizaran en mesa redonda para hacer la institucionalización. En este espacio se construía con los estudiantes algunas definiciones y teoremas que emergían en la solución del problema y además se introducía la notación y el lenguaje geométrico que requerían los objetos presentes en las situaciones. Cada definición, teorema o procedimiento que se introducía, debía escribirse en unas fichas, que cada estudiante tenía dentro de los materiales de la siguiente clase para usarlos como herramientas de justificación.

Aunque el experimento de enseñanza incluyó en la secuencia de 11 situaciones problema, por cuestiones de tiempo, los análisis se restringen al proceso de solución de dos grupos en las dos últimas situaciones, pues en ellas se resume los contenidos geométricos de casi toda la secuencia; por tanto, no es de nuestro interés caracterizar el estado de los estudiantes enfrentados a la secuencia ni evaluar los avances de los estudiantes en el trascurso de la misma. La interacción llevada a cabo por los estudiantes de ambos grupos ejemplifica el trabajo realizado durante todas las clases de geometría. Cualquier grupo estaba en capacidad de enfrentarse a las distintas situaciones; además, los estudiantes abordaron las dos últimas situaciones de manera similar como enfrentaron las nueve iniciales.

3.3.2 Fuentes y técnicas de recolección de la información

Las dos últimas situaciones problema del experimento de enseñanza se grabaron en audio y video. Para evitar interferencias auditivas, dispusimos a los estudiantes en dos aulas diferentes; en el aula de clase los dos grupos participantes en este estudio y en la biblioteca los demás grupos. El desarrollo de las dos situaciones se realizó con todos los grupos de manera simultánea y en condiciones similares, salvo que la profesora se concentró principalmente en los grupos que estaban en el aula.

Durante la grabación, dos camarógrafos capturaron las acciones que desarrollaron los dos grupos durante la solución de toda la situación problema. Los investigadores autores de este estudio actuaron como observadores participantes; es decir, en ocasiones hacían las veces de profesores, cuando realizaban preguntas referidas al desarrollo del problema, y en ocasiones como investigadores, cuando pedían a los estudiantes claridad o especificidad en sus diálogos.

Otros mecanismos para la recolección de la información que complementaron las grabaciones de las dos situaciones fueron las hojas de trabajo de los dos grupos y el diario de campo del profesor. A partir de ellos se logró clarificar algunos detalles en los desarrollos realizados por los estudiantes.

3.4 Dispositivo analítico

El procedimiento para el análisis de la información incluye siete aspectos que describimos en las siguientes secciones de este apartado. Los primeros cuatro hacen parte del trabajo metodológico correspondiente a la depuración de la información para la obtención de los datos a analizar; y los tres últimos aspectos describen el proceso de análisis a implementar con los datos obtenidos para la construcción del capítulo de análisis. Estos aspectos se ilustran con el *diagrama 3.4.*

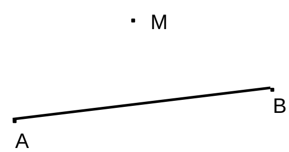
Diagrama 3.4. Dispositivo analítico

En la primera, se hace una descripción hipotética de la actividad demostrativa esperada en los estudiantes. Las otras actividades evidencian el tratamiento realizado a los datos obtenidos en la solución de los problemas 10 y 11.

3.4.1 Actividad demostrativa esperada

Con el objeto de tener un referente para contrastar la actividad demostrativa desarrollada por los estudiantes al enfrentar los dos últimos problemas (10 y 11), antes de implementar estos dos problemas, planteamos algunas actuaciones hipotéticas de lo que esperábamos que ellos hicieran y las posibles conjeturas que podrían utilizar para justificar sus distintas estrategias de solución. A continuación presentamos dicho planteamiento.

Problema 10: *En la figura, el punto M es el punto donde se cortan las mediatrices de* ΔABC *y* $\overline{AB}$ *es un lado del triángulo. Construya un triángulo tal que M sea corte de las mediatrices.*



Algunas actuaciones de los estudiantes pueden ser:

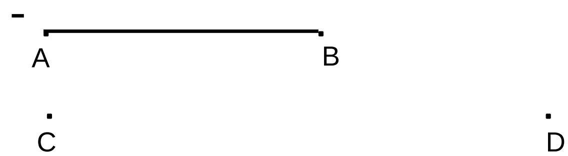
- Recurrir al hecho que como *M* está en las tres mediatices del triángulo, entonces equidista de sus vértices.
- Trazar una circunferencia con centro en *M* y que pase por los puntos *A* y *B.*
- Conjeturar que cualquier punto sobre la circunferencia con centro en *M* y radio *MA* podrá ser el vértice *C* del triángulo.
- Justificar que *C* está en la circunferencia mencionada debido a que *M* equidista de los extremos de los vértices del triángulo.
- Concluir que los puntos que pertenecen al lugar geométrico que satisface la condición del problema es la circunferencia con centro en *M* y radio *MA.*

Algunas conjeturas que esperamos formulen los estudiantes son:

- La mediatrices de todo triángulo se cortan en un solo punto.

- En vértice *C* del triángulo *ABC* está en la circunferencia con centro en *M* y radio *MA*.

Problema 11: *Construya un rectángulo, a partir de dos segmentos: uno como lado y el otro como diagonal.*



Algunas actuaciones hipotéticas de los estudiantes pueden ser:

- Comparar perceptualmente los segmentos dados.
- Recurrir al hecho que la diagonal debe ser el segmento de mayor medida (*CD*).
- Verificar que no se puede construir un rectángulo si la diagonal es el segmento de menor medida (*AB*).
- Elegir el segmento *CD* como diagonal y el segmento *AB* como lado del rectángulo.
- Trazar un arco con centro en *A* y radio *CD*, que corte la perpendicular al segmento *AB* que pasa por *B* y hallar el tercer vértice del rectángulo.
- Trazar dos perpendiculares, una por *A* y la otra por el tercer vértice, para hallar el cuarto vértice en su intersección.
- Concluir que la construcción soluciona el problema porque la figura construida satisface las propiedades de rectángulo y tiene al segmento *AB* como lado y al segmento *CD* como diagonal.

Las conjeturas que esperamos formulen los estudiantes son:

- La longitud de la diagonal del rectángulo siempre es mayor que la longitud de cualquiera de sus lados.
- La diagonal y el lado del rectángulo tienen un extremo común.
- La perpendicular al segmento tomado como lado que pasa por el extremo libre, pasa por el extremo libre de la diagonal.
- Los lados opuestos de un rectángulo son congruentes.

3.4.2 Transcripción de los registros de audio y video

Las grabaciones de las cuatro sesiones correspondientes a los problemas 10 y 11 del experimento de enseñanza se transcribieron en su totalidad, atendiendo al orden cronológico de los sucesos, y fueron objeto de varias correcciones a partir de una versión inicial. Buscábamos reconstruir lo más fielmente posible lo sucedido en la interacción. Adicionalmente, las transcripciones se alimentaron con información proveniente de las hojas de trabajo de los estudiantes, con aclaraciones (puestas entre paréntesis cuadrados) hechas por los investigadores a algunas intervenciones de los estudiantes que no resultaban lo suficientemente comprensibles por sí solas o con narraciones de acciones de los estudiantes que no iban acompañadas de un diálogo, pero que se apreciaban en el video. Las figuras observadas en el video se modelaron utilizando un software de geometría dinámica para mejorar la calidad de la imagen y evitar problemas en el desarrollo del análisis.

3.4.3 Construcción de episodios

Con la transcripción completa del proceso de solución de cada problema, realizamos una división de ésta en episodios. Entendemos por episodio un fragmento de la transcripción donde los estudiantes están desarrollando una idea para solucionar el problema. Por ejemplo, en la transcripción del proceso realizado por el grupo 1 en el problema 10, propusimos, entre otros, los siguientes episodios: (i) Interpretan el enunciado y hacen un primer intento de comprobación de que M está en la mediatriz; (ii) Comprueban que M está en la mediatriz; (iii) Proponen una forma para ubicar C sobre la mediatriz de AB, para lo cual hacen un triángulo equilátero; (iv) Identifican en la figura construida características asociadas a la mediatriz. Para cada episodio escribimos una breve descripción que permitiera comprenderlo rápidamente cuando se trajera a colación de manera no secuencial.

Adicionalmente, seleccionamos de forma aleatoria varios episodios, para leer la descripción y comprobar que fuera lo suficientemente comprensibles, sin necesidad de leer episodios anteriores para su contextualización en el problema.

3.4.4 Identificación de las acciones de la actividad demostrativa por episodio.

Para identificar las acciones de la actividad demostrativa llevamos a cabo tres acciones: primero, repartimos los episodios entre los dos autores de esta investigación, cada uno tomó las intervenciones de un grupo (grupo 1 o grupo 2), para hacer una revisión minuciosa de cada episodio. Cada uno señalaba las intervenciones que a su criterio desarrollaban una acción específica de la actividad demostrativa y escribía sus notas al margen de las trascripciones. Segundo, se hicieron reuniones entre los dos investigadores para discutir acerca de sus interpretaciones en el proceso de identificación de las acciones de la actividad demostrativa. Tercero, se hicieron reuniones con un tercer investigador para presentar el trabajo realizado, discutirlo y llegar a un consenso final. Cuando los tres investigadores llegaban a un acuerdo, se daba por identificada la acción; si persistían las diferencias, se revisaba cuidadosamente el episodio en forma grupal o se contrastaba con una acción del mismo tipo ya identificada en un episodio anterior para poder tomar una determinación.

De esta manera logramos identificar en cada episodio qué acciones de la actividad demostrativa desarrollan los estudiantes y en qué líneas de la transcripción aparecían dichas acciones.

3.4.5 Identificación, esquematización y codificación de los argumentos que utilizan los estudiantes para justificar sus afirmaciones.

En cada episodio identificamos las intervenciones de los estudiantes en las cuales estuvieran haciendo una argumentación. Para identificar estas intervenciones, buscamos en las discusiones de los estudiantes expresiones alusivas a dar una razón acerca de un *porqué* frente a una construcción, una afirmación, un procedimiento, una conjetura o una conclusión. Organizamos cada uno de los argumentos extraídos literalmente del episodio, atendiendo a las preguntas ¿Qué tienen? ¿Qué dicen? ¿Qué creemos que dicen? y ¿Por qué creemos que lo dicen?, por sugerencia de la doctora Nadia Douek (comunicación personal) experta en estudios acerca de la argumentación, para darle una interpretación a la intervención y construir un esquema del argumento que nos permitiera comprenderlo. De esta manera logramos identificar en cada uno de los argumentos tres componentes para el esquema: los datos, la justificación y la expresión condicional que resume el argumento, los cuales fueron nombrados con 1, 2 y 3 dependiendo del orden en que aparecían cuando los estudiantes argumentaban.

Los argumentos se codificaron teniendo en cuenta cuatro aspectos, el número del argumento, el problema que estaban desarrollando, el grupo de estudiantes y el número de episodio. Por ejemplo, A29P1G2E4 corresponde al argumento 29 del problema 10 desarrollado por el grupo 2 en el episodio 4.

3.4.6 Tipificación de argumentos

Con los esquemas de los argumentos realizados, como se indica en el apartado anterior, procedimos a tipificarlos a partir de las 12 categorías que propusimos en el marco teórico en el apartado *2.3*:

- Informal-no geométrico
- Informal-de convicción externa
- Pragmático-empírico-naif-de ejemplificación
- Pragmático-empírico-naif-inductivo
- Pragmático-empírico-crucial-de ejemplificación
- Pragmático-empírico-crucial-constructivo
- Pragmático-empírico-crucial-analítico
- Pragmático-empírico-genérico-de ejemplificación
- Pragmático-empírico-genérico-constructivo
- Pragmático-empírico-genérico-analítico
- Intelectual-conceptual-no analítico
- Intelectual-conceptual-analítico

3.4.7 Identificación de regularidades y correlaciones en el estudio

Con los argumentos analizados nos concentramos en la tarea de sintetizar los resultados de diferentes maneras con el fin de visualizar los hallazgos para poder dar respuesta a las preguntas de investigación.

Para evidenciar las regularidades y relaciones identificadas en el análisis construimos tres tablas que se describen como se muestra a continuación:

1. Tabla que contiene las veces que aparece cada una de las acciones de la actividad demostrativa en todos los episodios, para poder inferir sobre la recurrencia de las diferentes acciones en el proceso de solución del problema.
2. Tabla que contiene los 68 argumentos utilizados por los estudiantes y la acción de la actividad demostrativa en que se desarrolla, para identificar en qué acciones de la actividad demostrativa se favorece la argumentación.
3. Tabla que contiene los 68 argumentos utilizados por los estudiantes y el tipo de argumento identificado en cada uno de ellos, para identificar cuales tipos argumentos son los más utilizados por los estudiantes en el desarrollo de los dos problemas.

4. ANÁLISIS Y RESULTADOS

En este capítulo describimos la implementación del dispositivo analítico planteado en el apartado *3.4* del capítulo de metodología y damos cuenta de los hallazgos más significativos del estudio. Resaltamos los aspectos que desde nuestro punto de vista son relevantes para la obtención de unos resultados objetivos, coherentes y confiables. Los apartados de este capítulo no corresponden textualmente a los apartados de la metodología, pero desarrollan a cabalidad el plan previsto en el dispositivo analítico.

4.1 Descripción de episodios

En el apartado *3.4.3* del capítulo correspondiente a la metodología, se enunció que las transcripciones fueron divididas en episodios. En este proceso inicial de análisis de la información, la información recogida en las transcripciones se fragmentó en 48 episodios distribuidos como se muestra en la *Tabla 5.1*, de acuerdo al problema y el grupo que lo desarrolló.

	Problema 10		**Problema 11**		**TOTAL**
	Grupo 1	**Grupo 2**	**Grupo 1**	**Grupo 2**	
Número de Episodios	19	13	9	7	48

Tabla 5.1. Total de episodios

A continuación se presenta una tabla (*Tabla 5.2*) que describe en forma resumida las ideas que están desarrollando los estudiantes del grupo 2 en el problema 1 en cada episodio. La descripción del resto de episodios se encuentra en el anexo 1.

Número de episodio	**Descripción de episodios problema 1 grupo 2**
1	Hacen una primera interpretación del enunciado comentando que deben construir un triángulo. Para ello, construyen la mediatriz del segmento *AB*, usando regla y compás, identifican el segmento *AB* como un lado del triángulo y caracterizan el tipo de triángulo que piensan construir (equilátero).
2	Proponen y desarrollan una primera estrategia para abordar el problema, es decir, construyen un triángulo equilátero trazando un arco con centro en el punto A y radio el segmento *AB* para ubicar el vértice *C* en el corte de dicho arco con la mediatriz.
3	Construyen las mediatrices de los lados del triángulo equilátero construido en el episodio 2, pero como éstas no se intersecan en *M*, inicialmente afirman que la construcción de las mediatrices está mal hecha; después de repetir la construcción varias veces aceptan que las mediatrices no se intersecan en *M*. Descartan la estrategia.
4	Proponen que *C* este en la mediatriz del segmento *AB* pero que el lado *BC* tiene que ser más largo que el lado *AB* para que *M* sea el corte de las mediatrices; reubican al punto *C* como vértice de un triángulo isósceles con altura congruente a la base del triángulo (segmento *AB*) y verifican si cumple el enunciado construyendo las mediatrices de los lados *BC y AC*, pero se dan cuenta que éstas no se intersecan en *M*.
5	Proponen otra estrategia para encontrar *C*, ubicando el punto medio del segmento AB, el cual denominan *D* y haciendo que *DM=MC*. Abandonan la idea porque el profesor hace un cuestionamiento sobre las condiciones que debe tener el triángulo para que cumpla el enunciado del problema y esto genera que la exploración quede inconclusa. Al final, verifican que en el triángulo isósceles construido en el episodio 4 *AC=CB* y *AD=DB*.
6	Encuentran un punto *C* sobre la mediatriz del lado *AB*, utilizando otra estrategia: hacen circunferencias perceptualmente tangentes a los rayos *AM* y *BM* con centros en *A* y en *B*; haciendo centro sobre los puntos de "tangencia" (*G* y *H*) hacen arcos con radio igual a la distancia del vértice al punto de "tangencia" respectivo; ubican a *C* en el corte de ambos arcos, el cual se encuentra sobre la mediatriz del lado *AB*; así, los "puntos de tangencia parecen ser los puntos medios de los lados *AC* y *BC*.
7	Al revisar la construcción del episodio 6 encuentran un error pues los puntos de "tangencia" no son respectivamente colineales con los vértices del triángulo. Repiten la construcción tomando como puntos de "tangencia" los cortes de los rayos *AM* y *BM* con los arcos con centro en *A* y en *B* y radio *AM* y *BM* respectivamente. Verifican que de esta forma tampoco consiguen que los puntos de "tangencia" sean colineales con *A y C* y *B y C* respectivamente.
8	Comentan que *C* debe estar en la mediatriz del lado *AB* porque es necesario que *AC* y *BC* sean iguales; a pesar de ello, deciden encontrar *C* en la perpendicular al segmento *AB* que pasa por *A* de tal forma que *AB* = *AC;* de esta forma, construyen un triángulo rectángulo isósceles con *AC* = *AB* y ángulo *A* recto. Descartan la estrategia de construcción, pues al trazar las mediatrices no se intersecan en *M*, debido a que la abertura del compás se alteró al construir los arcos que determinan las mediatrices de cada lado del triángulo.
9	Por sugerencia del profesor, discuten las condiciones necesarias de la ubicación del punto *C* de modo que se logre que la mediatriz del segmento *AC* pase por *M*. Proponen ubicar *C* en la perpendicular del segmento *AB* que pasa por *A* a una distancia de *A* igual a dos veces la distancia de *DM* (*D* punto medio del segmento *AB*), pero descartan la estrategia al darse cuenta que de esta forma *C*, *M* y *B* no son colineales; esto ocurre porque al ubicar *C* se altera la abertura del compás (AC ≠ 2*DM*). Según los estudiantes, esta colinealidad debe ser condición necesaria de la construcción. Nuevamente por sugerencia del profesor, discuten cuál es el objetivo del problema.
10	Proponen construir un triángulo isósceles cuyos lados congruentes sean tangentes a una circunferencia con centro en *M* y radio *MD*, (*D*, punto medio del segmento *AB*). Prolongan

	AM y *BM* y las toman como mediatrices. Para ubicar a C trazan rayos a partir de los vértices *A* y *B* que perceptualmente se vean tangentes a la circunferencia y ubican a *C* en el corte de dichos rayos con la mediatriz del segmento *AB*. Por sugerencia del profesor, discuten si las mediatrices tienen que pasar por los vértices del triangulo. Construyen correctamente las mediatrices del triángulo *ABC* y observan que se cortan en un sólo punto que no es *M*.
11	Ubican a *C* sobre la recta perpendicular de *AB* que pasa por *A*, de forma que *AC* es el doble de la distancia *DM* (*D* es el punto medio del segmento *AB*) y *BC* pasa por *M*. El triángulo construido es rectángulo (con el ángulo *A* recto). La forma de determinar a *C* hace que la longitud del segmento *DM* sea la mitad de la longitud del segmento *AC* por lo que la mediatriz del lado *AC*, pasa por *M*. De esta forma, encuentran un *C* solución al problema.
12	El profesor hace diferentes preguntas acerca de las construcciones realizadas en los episodios en los que se hicieron triángulos isósceles y triángulos rectángulos, con el fin de que los estudiantes puedan justificar la solución del problema. Al responder las preguntas del profesor, los estudiantes establecen relaciones entre un triángulo y sus mediatrices.
13	Continúan caracterizando las construcciones del triángulo rectángulo en el cual las mediatrices pasan por *M* (episodio 11) y del triángulo isósceles cuyas mediatrices no lo hacen (episodio 10). Concluyen que las mediatrices de cualquier triángulo siempre se cortan en un solo punto. Lo aseguran basados en las dos construcciones realizadas y adicionalmente hacen otro triángulo más y trazan las mediatrices; a partir de esto, se percibe que justifican la conjetura de que las mediatrices se cortan en un solo punto, basados en varios ejemplos, pues intentan mostrar que si se cumple en algunos, se cumple en cualquiera.

Tabla 5.2. Descripción de Episodios

4.2 Actuaciones esperadas versus actuaciones observadas

En este apartado presentamos un contraste entre lo que esperábamos que hicieran los estudiantes y lo sucedido durante el desarrollo de los problemas 10 y 11.

4.2.1 Contraste problema 10

Los dos grupos deciden en primera instancia verificar el enunciado, es decir, construir la mediatriz de *AB* y comprobar que *M* pertenezca a dicha mediatriz. Luego, deciden construir distintos tipos de triángulos; construyen triángulos equiláteros, isósceles, rectángulos y escalenos. Los intentos iniciales son fallidos, pues piensan que las mediatrices deben pasar por los vértices y se cortan en *M* punto que pretenden quede en el centro del interior del triángulo. De esta forma ignoran o confunden la definición y las propiedades de la mediatriz.

Cuando los estudiantes argumentan sus diferentes estrategias de solución, se generan discusiones en cada grupo, pues los estudiantes se niegan a aceptar las estrategias de sus compañeros**; s**e ponen en evidencia algunos errores, tanto en las construcciones como en la teoría utilizada. Estos intercambios permiten reestructurar o cambiar las estrategias, o adoptarlas como solución del problema.

Esperábamos que los estudiantes encontraran el lugar geométrico para ubicar *C* y darle solución al problema, es decir, lograran identificar y caracterizar la circunferencia con centro en *M* y radio *MA*. En el grupo 1 los estudiantes trazan la circunferencia esperada. Sergio, integrante de este grupo, está seguro que si *M* equidista de *A* y de *B* también debe "cuadrar" *C*. Según nuestra interpretación, él quiere decir que *M* también debe estar a la misma distancia de *C*. Sergio trata de convencer a sus compañeros, pero un error de trazo en la construcción de las mediatrices de un triángulo cuyo vértice *C* pertenece a la circunferencia, impide que su "teoría" se acepte. Además, Felipe integrante del grupo 1 tiene una concepción diferente acerca de *M*, pues piensa que *M* es el circuncentro y el incentro al mismo tiempo; esto, de una u otra forma, presiona a Sergio a no seguir argumentando su propuesta de ubicar a *C* en cualquier punto de la circunferencia de radio *MA* y centro en *M*.

En el grupo 2 los estudiantes encuentran una soluciona al problema a partir de un triángulo rectángulo con el vértice *C* sobre la perpendicular al $\overline{AB}$ que pasa por el punto *A* y el lado *AC* con medida dos veces la distancia de *D* (punto medio de $\overline{AB}$) a *M*. Para encontrar este triángulo, inicialmente Leydi construye un triángulo rectángulo isósceles con $\overline{AB}$ congruente a $\overline{AC}$, pero al trazar las mediatrices se da cuenta que estas no pasan por *M*. Nicolás hace un triángulo del mismo tipo pero por errores de construcción las mediatrices no se cortan en un solo punto. Al final, Leydi establece que para que la mediatriz de $\overline{AC}$ pase por *M*, $\overline{AC}$ debe ser el doble de $\overline{MD}$ y de esta manera logra una solución al problema. Julián por su parte, hace una circunferencia con centro en *M* y radio *MD*, para trazar tangentes a ésta circunferencia desde *A* y *B*, y encontrar *C* en la intersección con la mediatriz de *AB*. Es decir, construye un triángulo isósceles para lo cual, en un primer momento, traza las medianas del triángulo y luego corrige y traza las mediatrices que no se cortaban en *M*.

Con estas dos construcciones, los estudiantes del grupo 2 logran establecer un enunciado general, pues identifican una regularidad en los dos triángulos y concluyen que en todo triángulo las mediatrices siempre se cortan en un solo punto.

Los estudiantes de ambos grupos no logran identificar ni caracterizar el lugar geométrico al cuál debe pertenecer el punto *C*, pero sí logran establecer una conjetura y construir un triángulo que cumple las condiciones del problema. En el proceso de solución desarrollado por los dos grupos podemos identificar dos conjeturas presentes en los argumentos descritos en los esquemas del anexo 2. La conjetura que logra establecer el grupo 1 corresponde a la descrita en el argumento *A16P1G1E11* y dice "Si *M* es el centro del triángulo entonces equidista de *A*, *B* y *C*". En cuanto al grupo 2, la conjetura se formula cuando los estudiantes establecen los argumentos *A37P1G2E13 / A38P1G2E13 / A39P1G2E13*[1] a partir de varios ejemplos y dicen "Si se trazan las mediatrices de un triángulo entonces siempre se cortan en un punto".

4.2.2 Contraste problema 11

En cuanto a las acciones, descritas en el dispositivo analítico del apartado *3.4.1*, que esperábamos realizaran los estudiantes, podemos afirmar que los dos grupos las desarrollan en su totalidad, pues efectivamente solucionan el problema tomando el segmento *AB* como lado y afirmando que el segmento *CD* debe ser la diagonal para que "alcanzara a atravesar el rectángulo", es decir, para que sus extremos sean los dos vértices no consecutivos. Las estrategias para construir el rectángulo son similares en los dos grupos pero no iguales. Sin embargo, ambos logran construir el rectángulo que cumple las condiciones del problema.

El primer grupo encuentra el tercer vértice a partir de la intersección de un arco con centro en el vértice *B* y radio cuya medida es el segmento que será la diagonal con una recta perpendicular al segmento que será un lado del rectángulo trazada por el extremo *A*. En cuanto al cuarto vértice lo encuentran utilizando el hecho que un rectángulo tiene dos pares

[1] La totalidad de argumentos se encuentran en el anexo 2

de lados congruentes; por tanto buscan la intersección de los arcos con centro en los extremos de la diagonal y distancias iguales a los lados del rectángulo, respectivamente.

El segundo grupo, traza perpendiculares por los extremos del lado *AB* y con centro en cada extremo marcan dos arcos que se intersecan con las rectas respectivamente, con radio igual a la medida del segmento *CD*. De esta forma, encuentran simultáneamente el tercer y cuarto vértice del rectángulo.

Esta última situación problema de nuestro experimento de enseñanza, descrito en el apartado *3.3.1*, no generó mayor dificultad en los estudiantes. Esto lo podemos argumentar pues todas las actuaciones que creíamos los estudiantes podían desarrollar, efectivamente se cumplieron. Además, asumimos que luego de la experiencia de los estudiantes al enfrentarse al problema 10, ya contaban con un bagaje teórico que les permitió argumentar sus afirmaciones, conjeturas y procedimientos de solución.

El grupo 2 tuvo algunos tropiezos cuando desarrolló el problema: el primero, al explicar una construcción hecha, como sus diálogos no corresponden a la figura que han construido, (por ejemplo cuando dicen que el rectángulo construido no soluciona el problema porque la diagonal no tiene la misma medida del segmento mayor $\overline{CD}$ y en la construcción hecha si se cumple ésta condición) se presenta confusión en la interpretación de la solución. El segundo, cuando construyen un paralelogramo cuya diagonal es el segmento mayor y el lado el segmento menor $\overline{AB}$, pero no es un rectángulo. El tercero, cuando confunden la diagonal del rectángulo con un segmento interior paralelo al segmento *CD* y que pasa por el punto medio del segmento *AB*. Sin embargo, creemos que estos ensayos y errores son parte del proceso de interpretación del problema y de la construcción significativa de las propiedades de un rectángulo y de sus diagonales.

En síntesis, en el proceso de solución desarrollado por los dos grupos, podemos identificar que las cuatro conjeturas que anticipamos en el apartado *3.3.1* fueron formuladas por los dos grupos. También logramos relacionar estas conjeturas con los argumentos descritos en los esquemas del anexo 2. Las conjeturas que lograron establecer los grupos 1 y 2 corresponde a la descrita en los argumentos *A42P2G1E1 / A64P2G2E7*: "no podría ser la diagonal porque no alcanza hasta la otra esquina" […] "el segmento es muy pequeño y no alcanza hacer como de diagonal… a atravesar el rectángulo" respectivamente. La conjetura "los ángulos internos de un rectángulo son de 90º y los lados opuestos de un rectángulo son congruentes" se puede evidenciar en los argumentos *A47P2G1E5 /A63P2G2E7/ A53P2G1E8 / A55P2G1E9 / A61P2G2E5*. En cuanto a la tercera conjetura esperada, los dos grupos la presentan como una serie de pasos para dar solución al problema, pero no la presentan como un hecho descubierto, es decir como una conjetura.

4.3 Identificación de las acciones de la actividad demostrativa por episodio

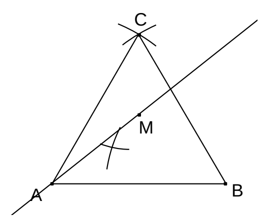
Como se enunció en el apartado *3.4.5* del capítulo de metodología, en cada episodio se identificaron las acciones de la actividad demostrativa, que a nuestro criterio, utilizaron los estudiantes cuando resolvieron los problemas 10 y 11. A continuación, presentamos dos ejemplos de análisis que corresponden al episodio 8 del grupo 1 en el desarrollo del problema 10 y al episodio 10 del grupo 2 en el problema 10. Los demás análisis se encuentran en el anexo 1.

4.3.1 Episodio 8 - Grupo 1- Problema 1

En este episodio los estudiantes sugieren cómo hacer las otras dos mediatrices del triángulo equilátero *ABC*, el cual han construido con *C* en la mediatriz de $\overline{AB}$. Pero en lugar de mediatrices hacen medianas. Anticipan que la estrategia no va a funcionar y lo comprueban trazando una de las "mediatrices". Para construir la "mediatriz" de $\overline{CB}$ construyen el rayo AM y encuentran el punto medio de $\overline{CB}$.

193	Cristian:	Toca sacar la mitad de estas líneas [se refiere al punto medio de $\overline{AC}$ y $\overline{CB}$]
194	Felipe:	Para hacer congruencia, [se refiere a que son congruentes las partes del segmento en que queda dividido por el punto medio] pero… ¿para qué?
195	Cristian:	Para sacar las demás mediatrices
196	Profesor:	Escuchen a Cristian
197	Cristian:	Bueno, yo entiendo que para sacar las demás mediatrices pues toca sacar la mitad de los otros…
198	Sergio:	Lados

199	Cristian	de los otros lados
200	Felipe	¿Para qué?
201	Daniel	Para que sean congruentes
207	Sergio	[…] las tres mediatrices del triángulo tienen que cortarse en un punto y este punto que tiene que cortar es *M*, y tienen que unirse acá…
208	Felipe	¿Acá cierto? Pun y pun ¿no? [señala el punto *M* y con los dedos describe los segmentos que se forman desde el vértice *A* hasta el punto medio del lado *BC* y desde el vértice *B* hasta el punto medio de *AC*]
209	Sergio	Sí
210	Felipe	Entonces ya lo tenemos
211	Sergio	Pero el problema aquí es que de pronto, no se unan porque este punto es muy abajo [señala a *M*] entonces [las mediatrices] van a pasar por encima [de *M*]
212	Felipe	[…]
215	Sergio	¿Por encima? ¡No! Por ahí [se refiere a que el corte de las medianas va a pasar por encima de *M* y no por *M*]
216	Daniel	[…]
224	Sergio	[Con una abertura arbitraria hace centro en *B* y en *C* y hace dos arcos que se corten en el interior del triángulo. Se refiere a que no da, pues el corte de los arcos no pasa por *M*] ¿Si ve que no da?
225	Profesor	¡Háganla!, construya la mediatriz que está haciendo… del segmento *CB*, ¡constrúyanla!
226	Felipe	*CB*… bueno saquémosle la mitad de *CB*. La mitad de *CB* no sería esta. Muestre la regla.
227	Sergio	Mire, se lo dije [comprueban que las medianas no pasan por *M*]
228	Felipe	¿No sería lo mismo hacer esto? [con la regla une a *A* con *M* y traza una recta] Y ahí ya tenemos el punto [se refiere al punto medio de *CB*]



En cuanto a la *actividad demostrativa* desarrollada por los estudiantes durante el episodio, podemos encontrar que:

Visualizan, cuando hacen una mirada sobre la figura e imaginan como quedan lo que ellos creen que son las mediatrices; utilizan los dedos para trazar los segmentos que unen cada vértice con el punto medio del lado opuesto, respectivamente. Anticipan que las mediatrices no pasan por *M*, sino por debajo [208, 211].

Exploran, cuando investigan empíricamente la manera de encontrar el punto medio de *CB*, para esto proponen trazar el rayo *AM*. El punto medio del segmento *CB* es la intersección del rayo *AM* con el segmento *CB* [228].

Verifican, cuando ponen a prueba la idea que lo que ellos consideran son las mediatrices del triángulo construido pasan por *M*. Para comprobarlo, trazan arcos arbitrarios con centro en *C* y en *B*, como estos arcos no pasan por *M* entonces aseguran que no funciona la estrategia [224].

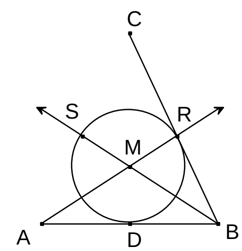
Explican, cuando justifican basados en la figura, que las tres mediatrices del triángulo tienen que cortarse en un solo punto [207].

Prueban, cuando justifican basados en la definición de punto medio y en la propiedad de la mediatriz (pasar por el punto medio) que para construir las mediatrices deben encontrar el punto medio de los lados del triángulo, porque él determina segmentos congruentes [197-201].

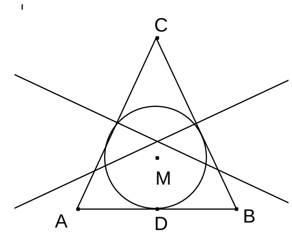
4.3.2 Episodio 10 - Grupo 2 - Problema 1

En este episodio Julián construye un triángulo isósceles cuyos lados congruentes parecen ser tangentes a una circunferencia con centro en *M* y radio *MD* (*D* punto medio de $\overline{AB}$). Para construir el triángulo, traza rayos *AM* y *BM*, y usa los puntos de corte con la circunferencia como puntos medios de los lados *AC* y *BC*. Asume los rayos *AM* y *AM* como mediatrices. Cuando termina, por sugerencia del profesor, discuten si las mediatrices de un triángulo deben pasar por los vértices. Con el vértice *C* construido como sugiere Julián, construyen correctamente las mediatrices del triángulo y observan que se cortan en un solo punto, pero éste no es *M*.

380	Profesor:	¿Me puedes describir que acabaste de hacer? [habla con Julián que está haciendo otra construcción]
381	Julián:	Pues estaba intentando hacer una circunferencia a partir del punto *M*, con la medida *MD*… sí [el punto medio de *AB* lo denota con *D*], y pues intentar trazar las mediatrices, pues… como arbitrarias. O sea, prolongar la recta *AM*, cierto, y pues intentar hacer unas tangentes aquí [*R*] al lado de la circunferencia



382	Profesor:	¿Por qué siempre que trazas las mediatrices pasan por el punto *A* o por el punto *B*?
383	Julián:	Porque cuando… es que no sé. O sea, tocaría… es que pensé, me imagino que si pasa por el punto *B*… tendría que ser el triángulo equilátero, ¿No? Pues en este caso no es equilátero, entonces está mal. Pues entonces estas mediatrices… [señala el rayo *BM*]
384	Profesor:	Y si no es equilátero, ¿qué pasa con las mediatrices?
385	Julián:	Las mediatrices no pasan por los puntos *B* o *A*, o sea, digamos la mediatriz de…
386	Profesor:	¿Podrías darme un ejemplo donde las mediatrices no pasen por el punto *B* o por el punto *A*?
387	Julián:	Claro [Borra los rayos *AM* y *BM*]
388	Profesor:	Utilizando el proceso que tú sabes para hacer mediatrices, trata, en ese triángulo que tienes ahí, de trazar las mediatrices de $\overline{BC}$ y de $\overline{AC}$
389	Julián:	De $\overline{BC}$ [señala *C*]
394	Profesor:	[…] Y vas, y vas a mirar qué pasa.
395	Julián:	El [arco] que había sacado antes [Con centros *B* y *C* y abertura igual, traza dos arcos de circunferencia que se cortan en dos puntos; une estos dos puntos y traza la mediatriz de $\overline{BC}$; luego, con centros *A* y *C* y abertura igual, traza dos arcos de circunferencia que se cortan en dos puntos; une estos dos puntos y traza la mediatriz de $\overline{AC}$]



396	Profesor:	¿Me puedes describir qué pasa con las mediatrices del triángulo que acabaste de realizar?
397	Julián:	Pues en este caso las mediatrices de $\overline{BC}$ y de $\overline{AC}$, no pasan por encima del punto *A* o *B*, ¿sí? Pero, pues, tienen acá un punto todos en común [señala el circuncentro].

En cuanto a la *actividad demostrativa* desarrollada por los estudiantes durante el episodio, podemos encontrar que los estudiantes:

Exploran, cuando realizan una investigación empírica para construir un triángulo isósceles, con algunas condiciones tales como: los lados congruentes del triángulo deben ser tangentes a la circunferencia de centro en *M* y radio *MD*; las rectas *AM* y *BM* deben ser las mediatrices del triángulo [381].

Verifican, cuando comprueban si en el triángulo isósceles construido, las mediatrices pasan por los vértices. Al trazar correctamente las mediatrices de los lados *AC* y *BC* evidencian en la figura que las mediatrices no pasan ni por *A* ni por *B* [386-397].

Visualizan, cuando perciben en la figura construida que las mediatrices de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ tienen un solo punto en común [397].

Generalizan, cuando establecen un enunciado en el cual aseguran que si las mediatrices pasan por los vértices, entonces el triángulo es equilátero. Utilizan este hecho para afirmar que el triángulo construido por Julián [381] no sirve para resolver el problema; esto es, porque aunque las mediatrices pasan por los vértices *A* y *B* el triángulo no es equilátero [382-385].

4.4 Identificación, esquematización y caracterización de los argumentos que utilizan los estudiantes para justificar sus afirmaciones.

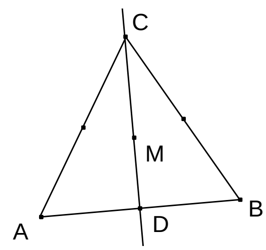
En total, identificamos 68 argumentos. Cada uno de ellos fue esquematizado como lo señalamos en el apartado *3.4.5.* Es decir, primero establecimos de qué información disponían los estudiantes al momento de argumentar; luego escribimos qué decían, y después hicimos una interpretación de aquello que decían, al igual que una justificación de tal interpretación. Con esta primera interpretación de cada uno de los argumentos, procedimos a esquematizarlo teniendo en cuenta los tres componentes: dato, justificación y conclusión. Para ejemplificar este proceso, presentamos 2 argumentos. Los demás se encuentran en el anexo 2.

La práctica argumental desplegada por los estudiantes en el *episodio 8 del grupo 1, Problema 1* (ver apartado *4.3.1*), la podemos enfocar en dos argumentos utilizados por los estudiantes. El primero de ellos sucede cuando los estudiantes *prueban* que el punto medio de un segmento lo divide en segmentos congruentes [197-201]. El segundo argumento se evidencia mientras los estudiantes observan que el corte de las mediatrices queda por debajo de *M* y por tanto no funciona la estrategia de construcción [211]. A continuación, presentamos un análisis más detallado de estos dos argumentos.

4.4.1 Argumento 1 del episodio 8, grupo 1, problema 1

A9P1G1E8

¿Qué tienen? Triángulo equilátero *ABC* con *C* en la mediatriz del segmento *AB.*

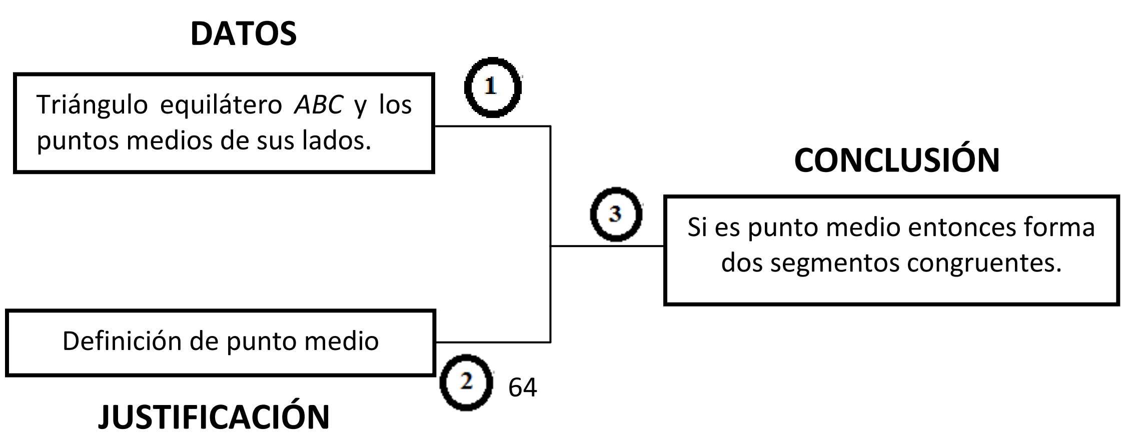


¿Qué dicen?

[197-201]	Cristian	Bueno, yo entiendo que para sacar las demás mediatrices pues toca sacar la mitad de los otros...
	Sergio	Lados.
	Cristian	…de los otros lados
	Felipe	¿Para qué?
	Daniel	Para que sean congruentes [se refiere a que son congruentes las partes del segmento en que queda dividido por el punto medio]

¿Qué creemos que dicen? Para construir las mediatrices primero se deben encontrar los puntos medios de los lados, que los dividen en segmentos congruentes.

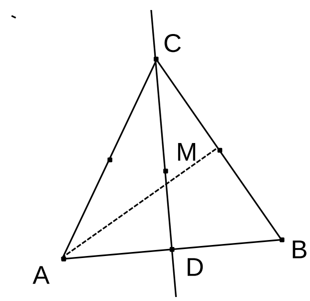
¿Por qué creemos que lo dicen? Porque el punto medio de un segmento pertenece a la mediatriz entonces equidista de los extremos.



4.4.2 Argumento 2 del episodio 8, grupo 1, problema 1

A10P1G1E8

¿Qué tienen? Triángulo equilátero *ABC* con *C* en la mediatriz del segmento *AB.*

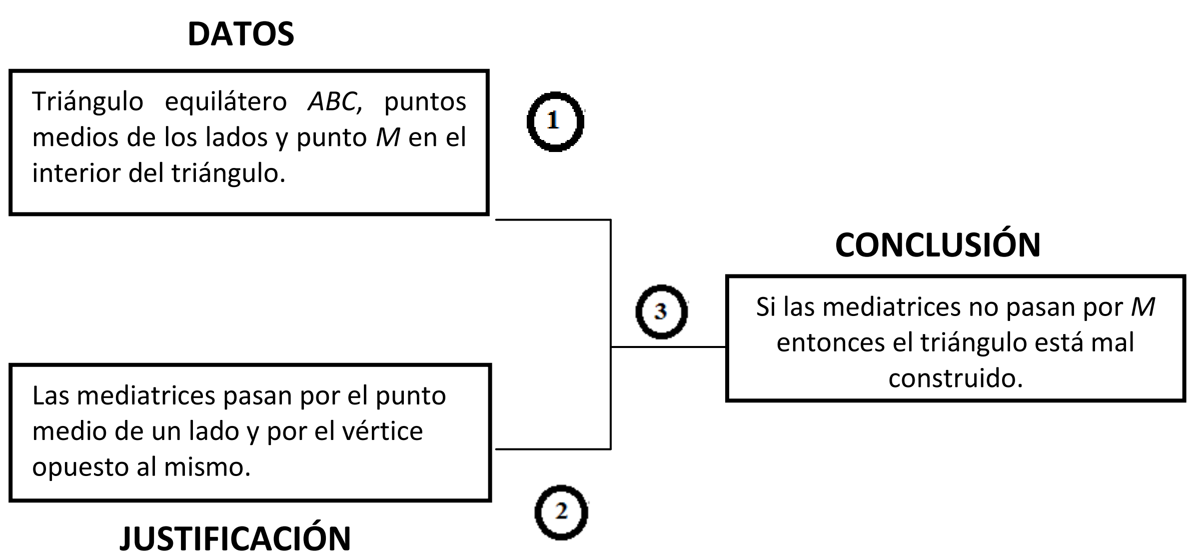


¿Qué dicen?

[208-211]	Felipe	¿Acá cierto? Pun y pun ¿no? [señala el punto *M* y con los dedos describe los segmentos que se forman desde el vértice *A* hasta el punto medio del lado *BC* y desde el vértice *B* hasta el punto medio de *AC*]
	Sergio	Sí
	Felipe	Entonces ya lo tenemos
	Sergio	Pero el problema aquí es que de pronto, no se unan porque este punto es muy abajo [señala el corte de los segmentos trazados con los dedos] entonces va a pasar por debajo [de *M*]

¿Qué creemos que dicen? Sin construir las mediatrices anticipan que no se intersecan en *M*.

¿Por qué creemos que lo dicen? Porque al simular el trazo con la mano no cortan en *M*.



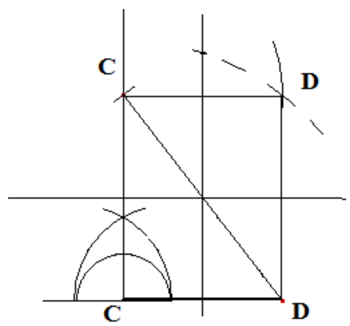
4.5 Tipificación de argumentos

En este apartado mostramos 12 ejemplos de la tipificación de los 68 argumentos que utilizaron los estudiantes para justificar sus afirmaciones en los problemas 10 y 11. Los primeros dos de ellos corresponden a los episodios 8 y 10 descritos en el apartado *4.4.1* y *4.4.2* del presente capítulo.

4.5.1 Ejemplo Argumento Informal-no geométrico

A59P2G1E9

¿Qué tienen? Un dado y la siguiente construcción

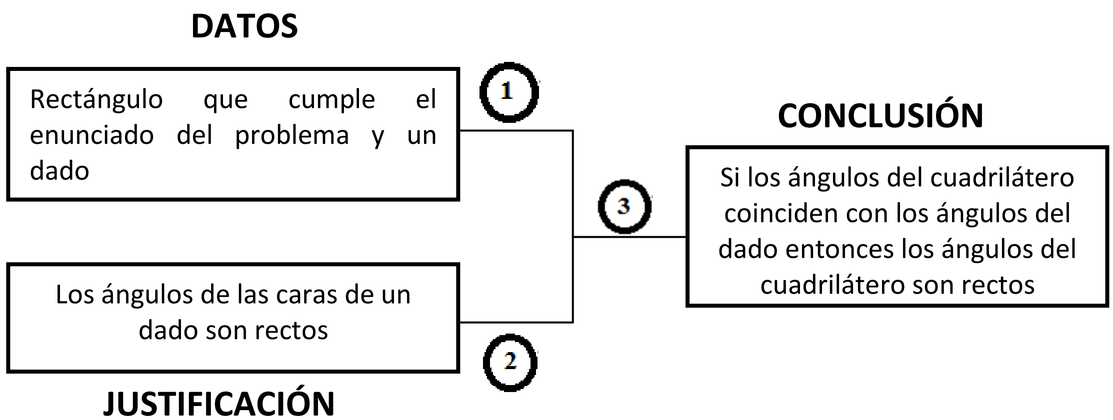


¿Qué dicen?

[335-340]	Sergio	Fácil profe, mire [toma dos dados que habían en el escritorio. Coloca uno sobre el ángulo recto que ya se había justificado, y el otro lo coloca sobre uno de los ángulos que no se sabía su medida] ¿Dio o no dio? Mire
	Profesor	¿Qué?
	Sergio	90 grados, 90 grados [señala los ángulos que forman los dados]
	Profesor	O sea que ese ángulo de los daditos ¿es de 90?
	Todos	Si claro
	Sergio	Sí, porque es un cubo, y un cubo tiene que tener todos sus ángulos de 90 grados

¿Qué creemos que dicen? Los ángulos del rectángulo son de 90º

¿Por qué creemos que lo dicen? Porque al colocar sobre los ángulos un dado que tiene todos los ángulos de las caras rectos, coinciden exactamente con los ángulos.



Este argumento es **Informal** porque es a partir de una comparación entre los ángulos del cuadrilátero construido y los ángulos de las caras de un dado, que los estudiantes afirman que el cuadrilátero es un rectángulo porque sus ángulos son rectos, y Es **no-geométrico** porque se basan en objeto ajeno al problema para establecer el argumento. De esta manera el argumento *A59P2G1E9* es de tipo **Informal-no geométrico.**

4.5.2 Ejemplo Argumento Informal-de convicción externa

A40P1G2E13

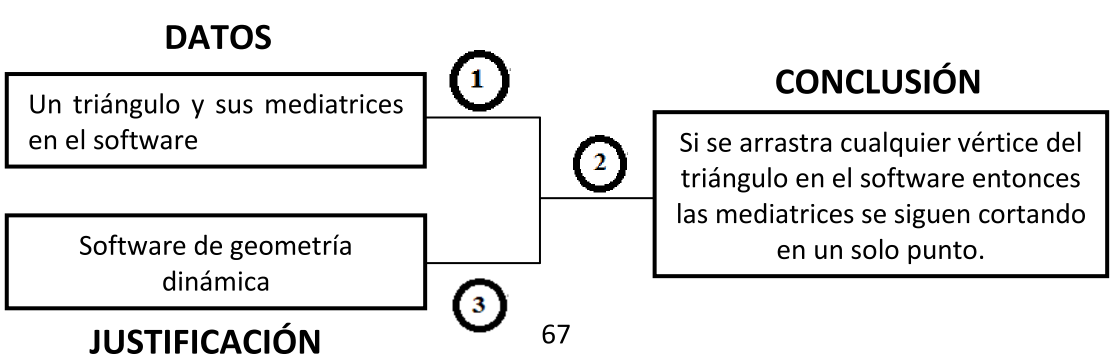
¿Qué tienen? Experiencia con **s**oftware de geometría dinámica

¿Qué dicen?

[584]	Julián	O sea, me acordé porque la vez pasada la profe nos mostró un programa que ella tiene en el computador, ella hizo un triángulo todas con sus mediatrices y ella movía nada más este punto [señala un vértice], ¿sí?; para cualquier lado que lo moviera las mediatrices siempre se cruzaban en un punto cualquiera

¿Qué creemos que dicen? Las mediatrices se cortan en un punto

¿Por qué creemos que lo dicen? Porque lo vieron en un software de geometría dinámica

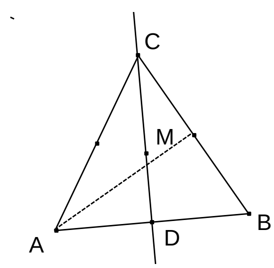


Este argumento es **Informal** porque a partir de una comparación con una experiencia previa en un software de geometría dinámica, Julián afirma que al modificar los lados de un triángulo, las mediatrices de un triángulo siempre se intersecan en un solo punto, y es de **convicción externa** porque el software es un objeto ajeno a la situación y a partir de éste es que Julián establece el argumento. De esta manera el argumento *A40P1G2E13* es de tipo **Informal-de convicción externa.**

4.5.3 Ejemplo Argumento Pragmático-empírico-naif-de ejemplificación

A10P1G1E8

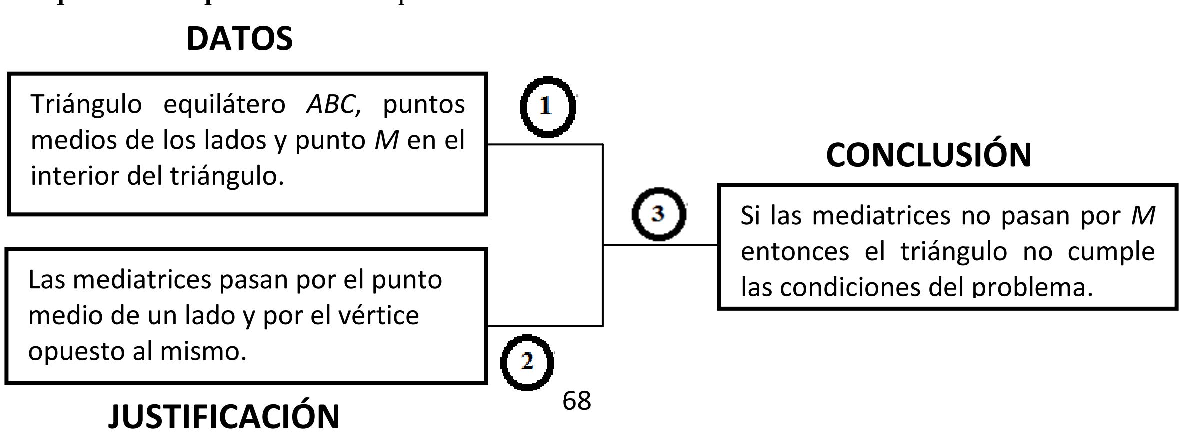
¿Qué tienen? Triángulo equilátero *ABC* con *C* en la mediatriz del segmento *AB.*



¿Qué dicen?	Felipe:	¿Acá cierto? Pun y pun ¿no? [señala el punto *M* y con los dedos describe los segmentos que se forman desde el vértice *A* hasta el punto medio del lado *BC* y desde el vértice *B* hasta el punto medio de *AC*]
[208-211]	Sergio:	Sí
	Felipe:	Entonces ya lo tenemos
	Sergio:	Pero el problema aquí es que de pronto, no se unan porque este punto es muy abajo [señala a *M*] entonces va a pasar por encima [de *M*]

¿Qué creemos que dicen? Sin construir las mediatrices anticipan que no se cortarán en *M*.

¿Por qué creemos que lo dicen? Porque al simular el trazo con la mano no cortan en *M*.

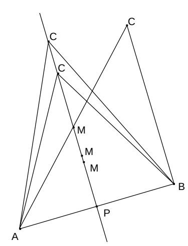


Este argumento es P**ragmático** porque Felipe cree que las mediatrices deben construirse desde un vértice al punto medio del lado opuesto, es **empírico** porque es a partir de lo que ve en la construcción que afirma que las mediatrices no se cortarán por *M*, es **naif** porque tanto el triángulo como la forma de construir las mediatrices se realizó sin algún criterio específico y es **de ejemplificación** porque hace uso de lo que percibe en un ejemplo para afirmar que el corte de las mediatrices no pasa por *M* sino por debajo. De esta manera el argumento *A10P1G1E8* es de tipo **Pragmático-empírico-naif-de ejemplificación.**

4.5.4 Ejemplo Argumento Pragmático-empírico-naif-inductivo

A17P1G1E12

¿Qué tienen? Imaginan la variación del corte de las mediatrices en diferentes tipos de triángulos:



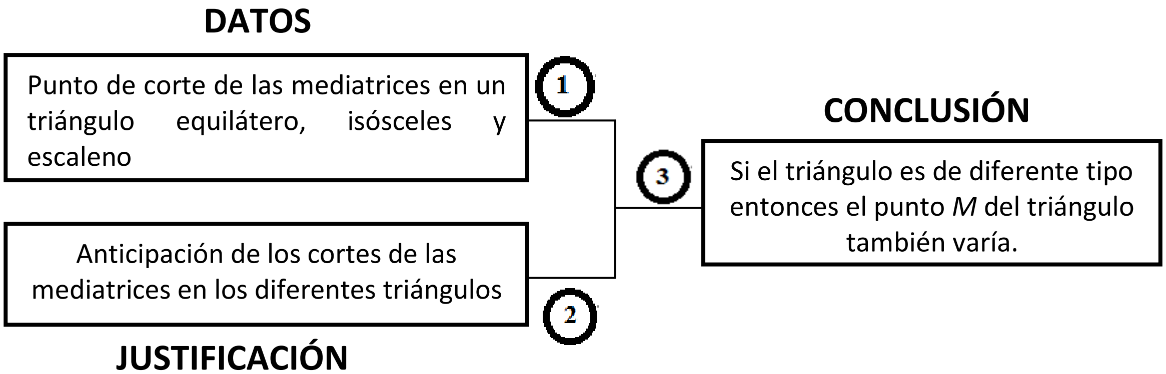
¿Qué dicen?

[343-350]

Felipe:	Es que *M* no necesariamente tienen que ser el punto medio, ¿cierto profe?
Profesor:	Del triángulo
Felipe:	Podemos hacer nosotros las mediatrices de acuerdo como salgan y *M* es otra mediatriz que es la mediatriz que va acá arriba, no siempre tiene que pasar por acá
Cristian:	¿No puede ser también en un triángulo equilátero? ¿Podría ser también un isósceles? o ¿un escaleno?
Sergio:	[…]
Cristian:	*M* podría ser punto medio de un segmento [se refiere un lado del triángulo]
Felipe:	No necesariamente tiene que cortar por *M*, eso es lo que les trato de decir

¿Qué creemos que dicen? Depende del tipo de triángulo M varía, y no necesariamente debe ser el centro del triángulo.

¿Por qué creemos que lo dicen? Anticipan los movimientos de M al pensar en diferentes tipos de triángulos.



Este argumento es P**ragmático** porque los estudiantes creen que el punto de corte de las mediatrices *M*, no necesariamente es el centro del triángulo; es **empírico** porque a partir de lo que ven en la construcción es que afirman que *M* no debe ser el centro del triángulo; es **naif** porque los diferentes tipos de triángulos que construyen, son escogidos sin algún criterio específico; y es **inductivo** porque utilizan más de un ejemplo. De esta manera el argumento *A17P1G1E12* es de tipo **Pragmático-empírico-naif-inductivo.**

4.5.5 Ejemplo Argumento Pragmático-empírico-crucial-de ejemplificación

A41P2G1E1

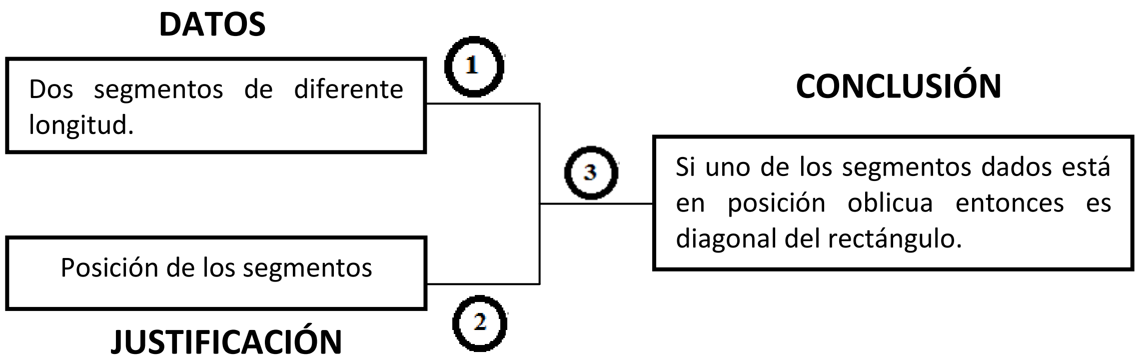
¿Qué tienen?

Problema 2: *Construya un rectángulo a partir de dos segmentos: uno como lado y el otro como diagonal.*

¿Qué dicen?	Profesor	Uno de esos segmentos que hay ahí, es uno de los lados del rectángulo.
	Felipe	Sí.
[5-9]	Profesor	Y el otro, es una diagonal.
	Sergio	O sea diagonal así [con la mano traza una línea oblicua en el espacio].
	Felipe	¡Ah! ya, pero ahí no tiene cara de diagonal ninguno [se refiere a la posición del segmento].

¿Qué creemos que dicen? No identifican a ningún segmento dado como diagonal.

¿Por qué creemos que lo dicen? Porque su posición es horizontal y no oblicua.

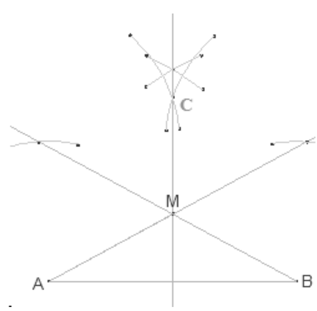


Este argumento es P**ragmático** porque es a partir de lo que creen los estudiantes, aseguran que ningún segmento es una diagonal; es **empírico** porque es sobre la figura que proporciona el problema que los estudiantes establecen alguna relación entre los segmentos; es **crucial** porque toman un ejemplo con características especiales para que un segmento sea diagonal, es decir estar en posición oblicua; y es **de ejemplificación** porque con un solo ejemplo concluyen que ningún segmento es diagonal. De esta manera el argumento *A41P2G1E1* es de tipo **Pragmático-empírico-naif-de ejemplificación.**

4.5.6 Ejemplo Argumento Pragmático-empírico-crucial-constructivo

A31P1G2E7

¿Qué tienen?

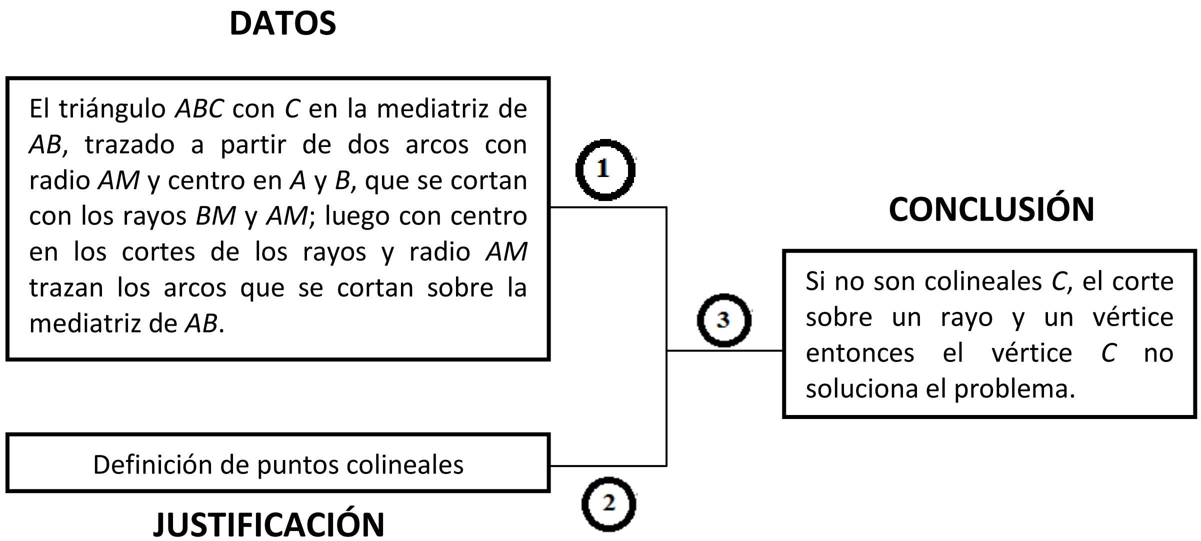


¿Qué dicen?

[269] Leydi: Si vez, ya sé por qué eso no nos funcionó **[**C, porque A, C y el corte con el rayo BM, no son colineales], porque como no pasaba por ésta [señala un nuevo corte en el rayo BM colineal con A y C], pues la mediatriz… eh la ésta va cambiar [lado del triángulo]

¿Qué creemos que dicen? C no cumple las condiciones del problema.

¿Por qué creemos que lo dicen? Porque *A*, el corte en el rayo *BM* y *C* no son colineales; y *B*, el corte en el rayo *AM* y *C* tampoco lo son.

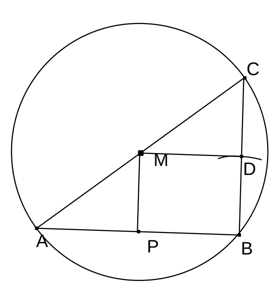


Este argumento es P**ragmático** porque es a partir de la convicción propia que asegura que los puntos de corte en los rayos *AM* y *BM*, debían ser colineales con los vértices del triángulo; es **empírico** porque con base en la construcción se afirma que no se soluciona el problema porque no hay colinealidad entre los puntos; es **crucial** porque el triángulo tiene características particulares de construcción; y es **constructivo** porque es la construcción del ejemplo la que valida el argumento. De esta manera el argumento *A31P1G2E7* es de tipo **Pragmático-empírico-crucial-constructivo.**

4.5.7 Ejemplo Argumento Pragmático-empírico-crucial-analítico

A22P1G1E16

¿Qué tienen?



¿Qué dicen?

[453-455]

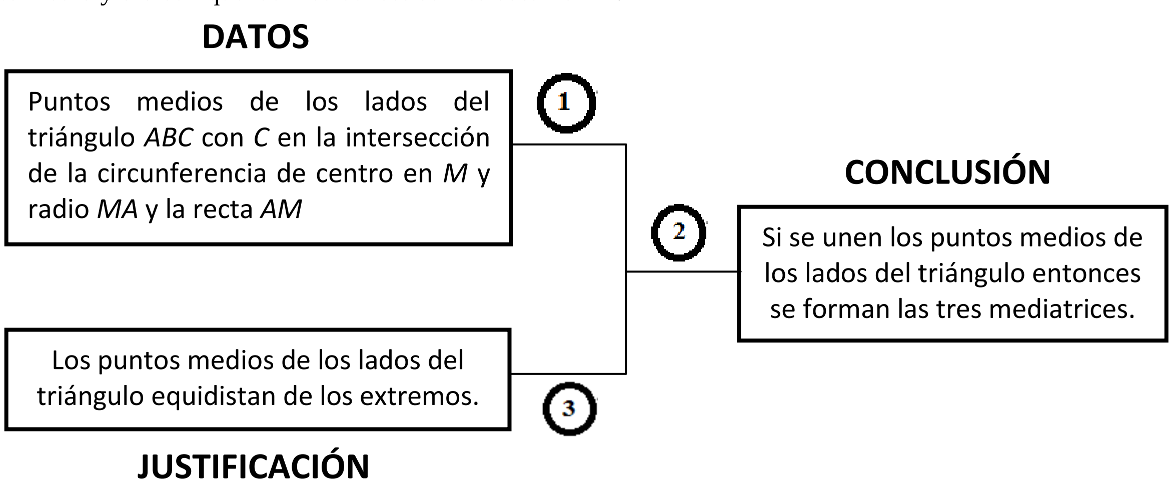
Felipe: Porque tendría que dar en el punto medio de acá, ¿si me entiende? [se refiere al punto medio del lado *BC*] Yo, mi teoría es la siguiente: como dice que una mediatriz es una equidistancia del segmento *AB* entonces esta distancia que hay entre *AP* es la misma que hay entre *BP* entonces esta distancia tendría que ser igual acá [*MP*] entonces este sería un punto equidistante [*M*] y este también [*D*] [compara la distancia de *MP* con *PB* y como son iguales entonces *M* y *D* son puntos equidistantes]

Profesor: Bueno esta distancia es igual a esta [se refiere a *AP* y *PB*] entonces bueno este [*P*] es punto medio

Felipe Esta [*AM*] es igual a esta [*MC*] y esta [*CD*] es igual a esta [*DB*] y esta [*AP*] es igual a esta [*PB*]…o sea que sería un punto equidistante o sea que ya tendríamos las tres mediatrices.

¿Qué creemos que dicen? Al trazar un triángulo inscrito al triángulo inicial a partir de los puntos medios (*C* en la intersección de la circunferencia de centro en *M* y radio *MA* y la recta *AM*), se encuentran las mediatrices del triángulo.

¿Por qué creemos que lo dicen? Porque solo tienen en cuenta la propiedad de la mediatriz de pasar por el punto medio y olvidan que las mediatrices se intersecan en *M*.

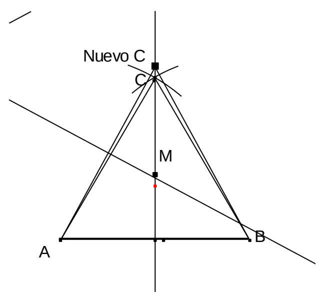


Este argumento es P**ragmático** porque Felipe cree que las mediatrices se trazan uniendo los puntos medios de los lados del triángulo; es **empírico** porque actúa teniendo en cuenta solamente una de las propiedades de la mediatriz; es **crucial** porque la forma como construye las mediatrices posee características especiales; y es **analítico** porque el argumento se valida a partir de una propiedad observada en el ejemplo, intersecar al lado en el punto medio. De esta manera el argumento *A22P1G1E16* es de tipo **Pragmático-empírico-crucial-analítico.**

4.5.8 Ejemplo Argumento Pragmático- empírico-genérico-de ejemplificación

A24P1G1E19

¿Qué tienen?



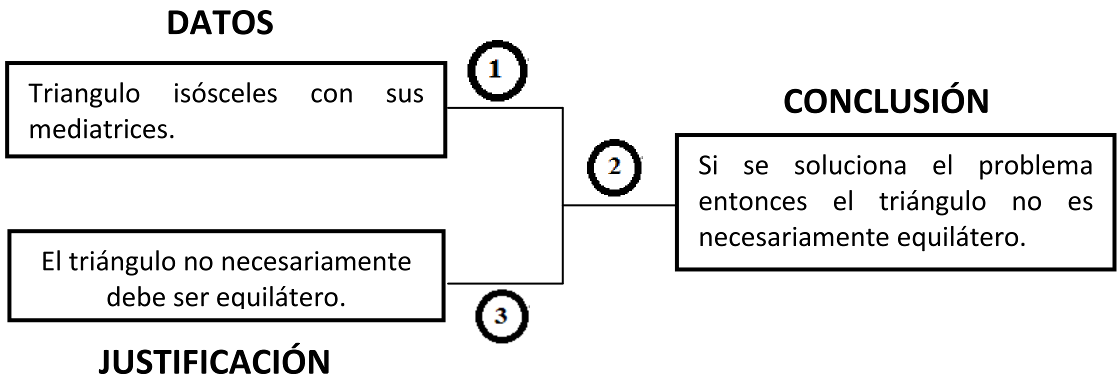
¿Qué dicen?

[609-611]

Profesor:	Pero justifique, hagámoslo acá nuevamente y justifiquemos por qué ese poquito que subía acá era lo que tenía que subir ese vértice para que me diera
Sergio:	Porque no necesariamente tiene que ser un triángulo equilátero. Porque como *M*…
Felipe:	Podría ser cualquier triángulo no necesariamente tiene que ser… [equilátero]

¿Qué creemos que dicen? Intentan justificar que la distancia que sube el vértice C es la misma que sube el corte de las mediatrices del triángulo.

¿Por qué creemos que lo dicen? Porque el triángulo no tiene que ser equilátero, puede ser isósceles.

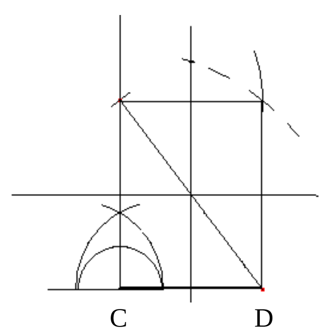


Este argumento es **Pragmático** porque descartan el tipo de triángulo a partir de los intentos que han realizado anteriormente; es **empírico** porque es a partir de la gráfica es que proponen que el triángulo no puede ser equilátero si se da solución al problema; **es genérico** porque afirman que para cualquier otro tipo de triángulo diferente al equilátero podría cumplir el enunciado del problema; es **de ejemplificación** porque solo con el ejemplo del triángulo isósceles es que validan el argumento. De esta manera el argumento *A24P1G1E19* es de tipo **Pragmático-empírico-genérico-de ejemplificación.**

4.5.9 Ejemplo Argumento Pragmático- empírico-genérico-constructivo

A51P2G1E7

¿Qué tienen?



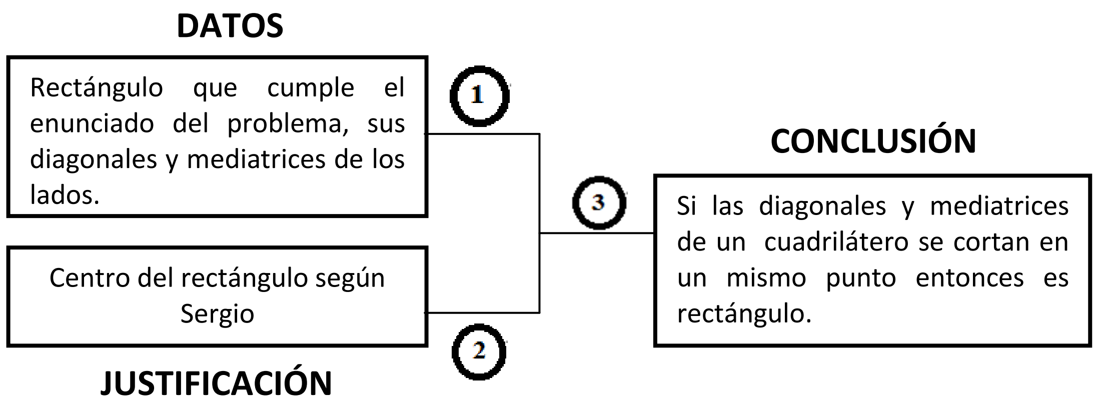
¿Qué dicen?

[193-195]

Sergio	Y este sería el punto centro [marca el corte de las mediatrices] y el punto centro de un cuadrilátero es cuando todas sus…
Profesor	Ahí se cortan ¿quiénes?
Sergio	Se cortan las diagonales, las diagonales cortan en un punto, que el punto es el centro del rectángulo. Entonces ahí también sabría si me quedo bien el rectángulo, y ahí cortaron todos en un punto [cuando dice todos pareciera que tanto las diagonales como la mediatrices]

¿Qué creemos que dicen? Caracterizan el centro del rectángulo como el lugar donde las diagonales y las mediatrices de los lados se cortan.

¿Por qué creemos que lo dicen? Porque intentan mostrar que la construcción corresponde a un rectángulo.

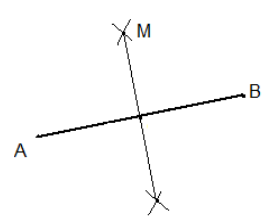


Este argumento es **Pragmático** porque Sergio formula la propiedad de que mediatrices y diagonales se cortan en punto, de algunos cuadriláteros, como exclusiva del rectángulo; es **empírico** porque cree que el corte de mediatrices y diagonales es el centro del rectángulo, **es genérico** porque asegura que en el rectángulo siempre sucede el hecho que las mediatrices y las diagonales se cortan en un solo punto; es **constructivo** porque con la construcción de las mediatrices validan el argumento y muestran el corte de mediatrices y diagonales en un mismo punto. De esta manera el argumento *A51P2G1E7* es de tipo **Pragmático-empírico-genérico-constructivo.**

4.5.10 Ejemplo Argumento Pragmático- empírico-genérico-analítico

A2P1G1E2

¿Qué tienen?

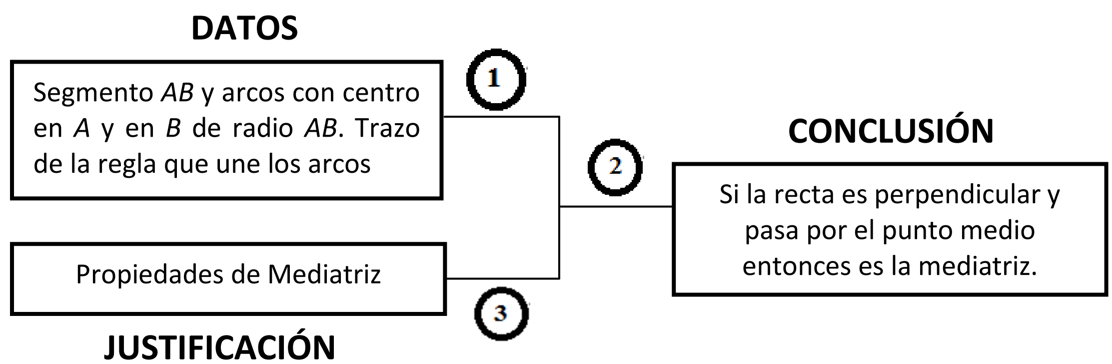


¿Qué dicen?

[40-43]	Sergio:	Sí, si es la mediatriz. [Ubica la regla para que una las intersecciones de los arcos]
	Daniel:	Si porque sube por toda la…
	Profesora:	¿Qué comprobaron Sergio?
	Felipe:	Que era la mediatriz. [con la regla traza la mediatriz del segmento *AB* uniendo el corte de los arcos con *M*]

¿Qué creemos que dicen? Tratan de caracterizar el lugar geométrico de la mediatriz colocando una regla en posición perpendicular al segmento y que pase por el punto medio.

¿Por qué creemos que lo dicen? Porque M pertenece a la recta perpendicular al segmento y pasa por la mitad del segmento.

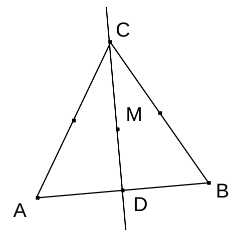


Este argumento es P**ragmático** porque afirman que la mediatriz sube por toda la mitad del segmento y es perpendicular, es **empírico** porque se basan en lo que ven en la construcción, es **genérico** porque identifican las propiedades de la mediatriz en cualquier lado y es **analítico** porque utiliza las propiedades de la mediatriz de ser perpendicular y pasar por el punto medio del segmento. De esta manera el argumento *A2P1G1E2* es de tipo **Pragmático-empírico-genérico-analítico.**

4.5.11 Ejemplo Argumento Intelectual-Conceptual-no analítico

A9P1G1E8

¿Qué tienen? Triángulo equilátero *ABC* con *C* en la mediatriz del segmento *AB.*

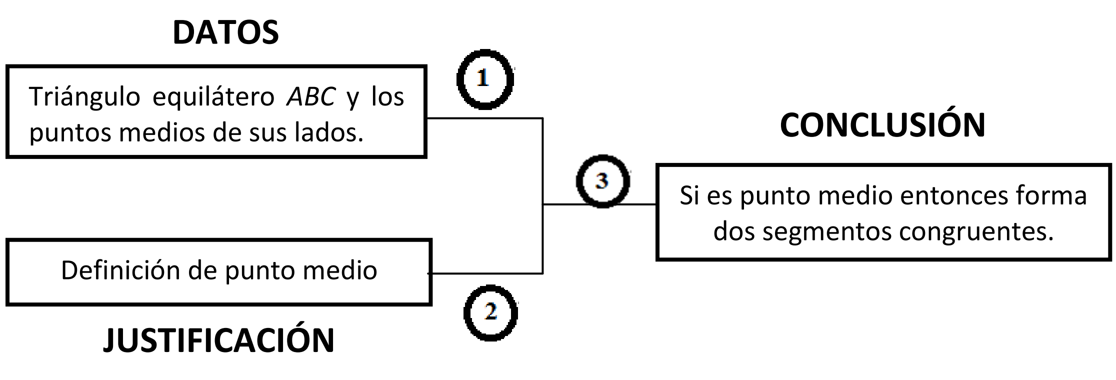


¿Qué dicen?

[197-201]	Cristian:	Bueno, yo entiendo que para sacar las demás mediatrices pues toca sacar la mitad de los otros...
	Sergio:	Lados.
	Cristian:	…de los otros lados
	Felipe:	¿Para qué?
	Daniel:	Para que sean congruentes [se refiere a que son congruentes las partes del segmento en que queda dividido por el punto medio]

¿Qué creemos que dicen? Para construir las mediatrices primero se deben encontrar los puntos medios de todos los lados, que los dividen en segmentos congruentes.

¿Por qué creemos que lo dicen? Porque el punto medio de un segmento pertenece a la mediatriz entonces equidista de los extremos.



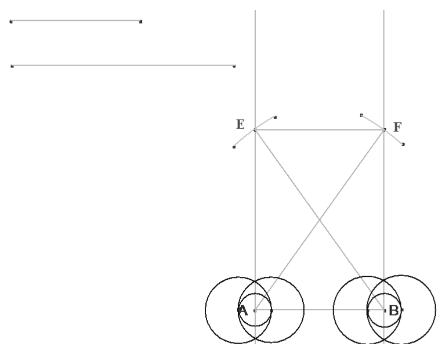
Este argumento es **Intelectual** porque saben que la mediatriz del lado de un triángulo lo interseca en el punto medio y a partir del punto medio se determinan dos segmentos congruentes; es **conceptual** porque hacen uso de conceptos que ya conoce; y es **no**

analítico porque no está haciendo algún razonamiento en sus intervenciones, debido a que no es suficiente con encontrar los puntos medios de los lados para construir las mediatrices del triángulo. De esta manera el argumento *A9P1G1E8* es de tipo **Intelectual-conceptual-no analítico.**

4.5.12 Ejemplo Argumento Intelectual-Conceptual-analítico

A65P2G2E7

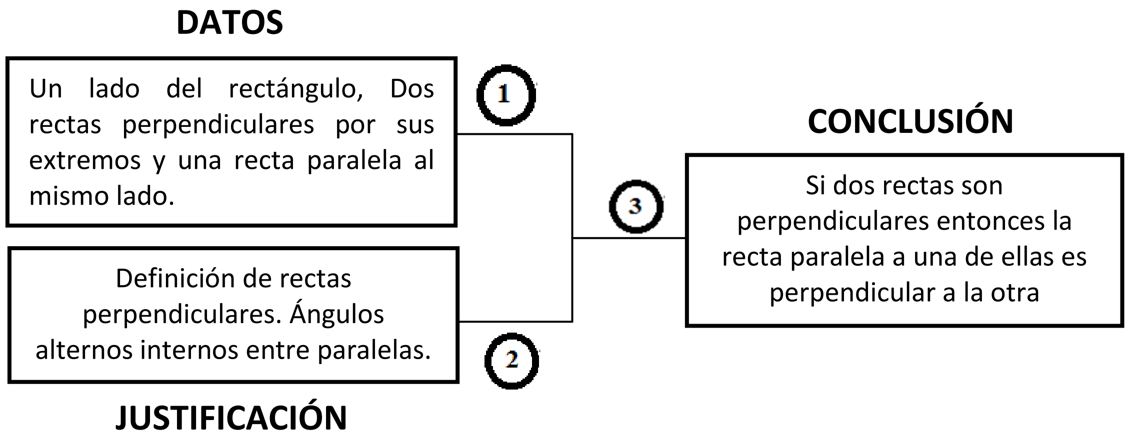
¿Qué tienen?



¿Qué dicen? [212-216]	Profesor:	[…]¿Ya puedo decir que es un rectángulo?
	Mafe:	Si porque sus ángulos son de 90 grados
	Profesor:	Pero por ahora solo hay dos ángulos de 90, que son los ángulos de abajo [ángulos A y B] que construyeron con perpendiculares. Pero ¿Cómo puedo saber que los dos de arriba también son rectos? [ángulos *E* y *F*]
	Leydi:	Porque en un rectángulo tiene las mismas medidas…
	Julián:	Lo que a mí se me ocurre es pues, porque digamos estas dos rectas son paralelas [señala las rectas *AE* y *BF*]. Entonces por eso siempre va a ver acá 90 [señala ángulo *A*]. Y cuando se cierren siempre va a quedar un rectángulo.

¿Qué creemos que dicen? Los cuatro ángulos del cuadrilátero son de 90 grados

¿Por qué creemos que lo dicen? Los ángulos *E* y *F* son rectos porque están formados en medio de dos rectas paralelas y dos perpendiculares a ellas.



Este argumento es **Intelectual** porque saben de la relación que hay entre los ángulos de dos rectas paralelas; es **conceptual** porque hacen uso de las propiedades de rectas paralelas y rectas perpendiculares; y es **analítico** porque hacen un razonamiento entre los lados del rectángulo que determinan rectas perpendiculares y paralelas. De esta manera el argumento *A65P2G2E7* es de tipo **Intelectual-conceptual- analítico.**

4.6 Identificación de regularidades y correlaciones en el estudio

En el apartado *3.4.7* se enunció que para sintetizar los resultados e identificar regularidades en el estudio, se utilizarían tablas. En la primera de ellas (Tabla 4.6.1) se relacionan las veces que aparece una acción de la actividad demostrativa dependiendo el episodio en que ocurre, el grupo que la desarrolla y el problema que enfrenta; en la segunda, (Tabla 4.6.2), se identifica la cantidad de argumentos por cada acción dependiendo el grupo que los propone y el problema en que aparecen; y en la última, (Tabla 4.6.3), se relaciona el número de argumentos de cada tipo dependiendo el grupo que los propone y el problema en que aparecen.

A continuación se realiza una interpretación analítica de cada una de las tablas descritas anteriormente, con el fin de establecer vínculos entre los elementos que las componen; a partir de estos, presentamos una visión panorámica de los desarrollos de los estudiantes frente a los problemas 10 y 11.

IDENTIFICACIÓN DE ACCIONES DE LA ACTIVIDAD DEMOSTRATIVA					
Acciones de la Actividad Demostrativa	**Problema 1**		**Problema 2**		**TOTAL**
	Grupo 1	**Grupo 2**	**Grupo 1**	**Grupo 2**	
Visualizar	E1; E4; E7; E8	E1; E10; E11; E12; E12	E1; E1; E1; E3; E3: E3; E5; E9; E9; E9	E7; E7	21
Explorar	E3; E8; E10; E10; E11; E14; E15; E15; E19	E1; E5; E6; E7; E8; E9; E10	E2; E4; E5; E6; E7	E1; E3; E4; E5	25
Verificar	E2; E5; E8; E9; E11; E14; E15 E18; E19	E2; E3; E4; E8; E9; E10; E11; E13	E4; E6; E7; E7; E9; E9	E3; E4; E4	25
Generalizar	E10; E11; E11; E11; E14	E2; E4; E11; E12; E12; E12; E13		E6	13
Explicar	E1; E5; E6; E7; E8; E11; E13; E16; E16; E19	E2; E3; E4; E7; E8; E11	E1; E3; E5; E5; E8	E2; E6; E7	24
Probar	E4; E8	E5	E9		4

Tabla 4.6.1. Identificación de acciones de la actividad demostrativa

En la *Tabla 4.6.1* se puede evidenciar que los estudiantes desarrollan acciones de *Explorar, Verificar y Explicar* con mayor frecuencia; esto ocurre debido a que los estudiantes proponen diferentes estrategias para abordar el problema basados en sus concepciones perceptuales. Nos dimos cuenta que los estudiantes abordan los problemas sin basarse en algún hecho geométrico; por el contrario, recurren al ensayo y error como estrategia para solucionar el problema. Adicionalmente, olvidan relacionar las propiedades y relaciones identificadas en cada estrategia utilizada o se les dificulta relacionar las estrategias entre sí, hecho que generó que los estudiantes no lograran dar solución al problema en su totalidad.

Los estudiantes, en el desarrollo de los problemas, trataron de explicar las estrategias adoptadas para dar solución al problema, haciendo intervenciones para establecer conjeturas, pero basadas principalmente en casos particulares en los cuales se ha verificado, caracterizado y extraído información relevante de la construcción, para identificar dichas generalidades. De esta manera la acción de E*xplicar* se hace necesaria para cada estudiante e indispensable para intentar convencer a sus compañeros que su estrategia es correcta y darle solución al problema planteado.

La acción de *Visualizar* presentó un alto número de repeticiones, debido a que los estudiantes intentan establecer propiedades y relaciones a partir de las construcciones realizadas, en busca de algún hecho geométrico. En este sentido hacemos relevancia al arraigamiento que muestran los estudiantes por ir de situaciones específicas o particulares a situaciones generales que les permitan generalizar.

En cuanto a la acción de *Generalizar*, podemos interpretar que los estudiantes tienen una gran dificultad para utilizar elementos teóricos conocidos a sus estrategias y de la misma forma es muy difícil que cuando la utilicen puedan establecer sus argumentos como una cadena deductiva; por tanto, esta acción aparece con menor frecuencia que las anteriores y corresponde a los intentos de los estudiantes por establecer un enunciado general que representara algún hecho geométrico identificado en el desarrollo del problema.

Respondiendo a estas interpretaciones, la acción que aparece con menor frecuencia es la de *Probar,* pues observamos que los estudiantes no contrastan las propiedades y relaciones establecidas en sus estrategias de solución con hechos geométricos de su dominio; de esta manera, los estudiantes alcanzan a presentar enunciados generales que identifican en su trabajo, pero no presentan una justificación basada en argumentos teóricos para validar dichas generalidades.

A pesar de las dificultades que observamos en los desarrollos de los estudiantes en cuanto a las acciones de la actividad demostrativa, consideramos que la experiencia fue exitosa para impulsar dicha actividad, pues evidenciamos la presencia de cada una de las acciones a lo largo del proceso de solución del problema. Además resaltamos que en tanto se desarrollen problemas en los cuales el estudiante pueda explotar diferentes caminos de solución, poniendo en práctica habilidades y destrezas a través de las diferentes acciones de la actividad demostrativa, entonces podremos superar muchas de las dificultades percibidas en el desarrollo de este estudio.

Al encontrar una solución al problema, es importante pedir al estudiante que se encamine en un proceso de justificación de la misma, buscando establecer propiedades o relaciones generales, identificar hechos geométricos y posiblemente probar o demostrar la solución encontrada, así sea desde un nivel perceptual.

IDENTIFICACIÓN DE ARGUMENTOS EN ACCIONES DE LA ACTIVIDAD DEMOSTRATIVA					
Acciones de la Actividad Demostrativa	**Problema 1**		**Problema 2**		**TOTAL**
	Grupo 1	**Grupo 2**	**Grupo 1**	**Grupo 2**	
Visualizar	A8, A10	A40	A41, A42, A44, A46, A53, A55, A54, A56, A57	A67, A68	14
Explorar		A28, A31			2
Verificar	A1, A2, A3, A6, A11, A15, A19,	A26, A27, A29, A33	A45, A48, A49, A50, A51, A59	A60	18
Generalizar	A12, A13, A14, A16, A17	A35, A36, A37, A38, A39			10
Explicar	A5, A7, A8, A15, A18, A20, A21, A22, A23, A24,	A25, A32, A34	A43, A47, A52, A61	A62, A63, A64, A65, A66	22
Probar	A4, A9,	A30	A58		4

Tabla 4.6.2. Identificación de argumentos

En cuanto a la *Tabla 4.6.2* podemos inferir que el mayor número de argumentos se presenta cuando los estudiantes están desarrollando la acción de *Explicar*. Interpretamos que la actividad argumental se centra en esta acción porque, además de ser una de las de mayor frecuencia en el desarrollo de los problemas, es en la acción en que los estudiantes muestran el desarrollo de sus diferentes estrategias e intentan defender su posición frente al problema; de esta manera los argumentos deben aparecer en forma natural y son de vital importancia para que la posición personal de cada estudiante sea aceptada o rechazada.

El segundo lugar en la frecuencia de argumentos aparece en la acción de *Verificar*. Percibimos que este hecho ocurre debido a la constante necesidad que tienen los estudiantes por comprobar que una estrategia da solución al problema o constatar si la estrategia de algún compañero es correcta, pues dentro de los grupos identificamos una constante competencia entre los estudiantes que impulsa a formular estrategias en el menor tiempo posible y que den solución al problema; de esta manera, someten a revisión cada posible solución planteada.

Otro aspecto relevante en cuanto a la acción de verificar es que los estudiantes tienen la necesidad de verificar propiedades señaladas en el enunciado del problema, quizás para interpretarlas mejor. Este aspecto nos condujo a revisar la definición que tenía la línea Æ • G y complementarla para la educación secundaria. En Franco & Moreno (2011) comentamos este hallazgo, señalando que los estudiantes no aceptan lo dado en el enunciado sino que para ellos es necesario comprobar que las relaciones propuestas en el mismo sean correctas; por tanto, la acción de verificar no se reduce solo a comprobar la conjetura encontrada, sino que se hace presente desde la interpretación del enunciado del problema.

La actividad argumental desplegada en las acciones de *Visualizar* y *Generalizar* se encuentra en un nivel intermedio, pues inferimos que los estudiantes no ven tanta necesidad de responder a un por qué, cuando identifican relaciones y propiedades en una figura o cuando tratan de establecer una generalidad de presente en ellas. Sin embargo, en algunas ocasiones los estudiantes intentan argumentar las relaciones y propiedades identificadas, cuando intentan dar solución a cuestionamientos de sus compañeros y docentes, o porque identifican la superación de algún error presente en estrategias anteriormente abordadas.

En cuanto a la acción de *Probar*, aunque el número de argumentos sea bastante bajo, hay que resaltar que por cada vez que se presenta una prueba en el desarrollo de los problemas ese presenta una argumentación. Este hecho nos permite inferir que se hace evidente la actividad argumental cuando se establece cualquier tipo de prueba, pues es necesario dar una justificación, ya sea empírica o teórica, si se pretende dar validez a una solución establecida. A pesar de ser un número bajo de argumentos, consideramos que este número es un indicio del éxito de nuestro experimento pues podemos afirmar que los estudiantes de grado octavo, sí pueden involucrarse de manera auténtica en la actividad demostrativa argumentando cada uno de sus hallazgos; de esta manera, evidenciamos cómo las acciones de la actividad demostrativa promueven la actividad argumental en los estudiantes.

La actividad que menor cantidad de argumentos presenta es la de *Explorar*; aunque sea una de las acciones con mayor frecuencia en el desarrollo de los problemas, en esta acción era de esperarse este resultado, pues aquí el estudiante enfrenta libremente el problema y casi nunca se pregunta el porqué de su proceder.

En términos generales es importante hacer alusión al notable desempeño de los estudiantes en cuanto a la actividad argumental desplegada a través de las diferentes acciones de la actividad demostrativa, pues como se evidencia en la *Tabla 4.6.2* los argumentos están distribuidos, aunque con frecuencias diferentes, en la totalidad de la acciones. De esta manera inferimos que la argumentación hace presencia de manera sustancial en el desarrollo de un problema propio de la actividad demostrativa.

TIPIFICACIÓN DE ARGUMENTOS						
TIPO DE ARGUMENTO		**Problema 1**		**Problema 2**		**TOTAL**
		Grupo 1	**Grupo 2**	**Grupo 1**	**Grupo 2**	
1	**Informal-no geométrico**			A59		1
2	**Informal-de convicción externa**	A16; A18	A27; A40			4
3	**Pragmático-empírico-naif-de ejemplificación**	A10; A19	A28	A57		4
4	**Pragmático-empírico-naif-inductivo**	A17				1
5	**Pragmático-empírico-crucial-de ejemplificación**	A20; A23	A34	A41		4
6	**Pragmático-empírico-crucial-constructivo**	A1; A11; A21;	A31			4
7	**Pragmático-empírico-crucial-analítico**	A14; A22	A32			3
8	**Pragmático-empírico-genérico-de ejemplificación**	A24				1
9	**Pragmático-empírico-genérico-constructivo**	A13; A15	A25; A26	A46; A50; A51; A56	A67	9

10	**Pragmático-empírico-genérico-analítico**	A2; A7	A35; A36; A37; A38; A39			7
11	**Intelectual-conceptual-no analítico**	A9; A12				2
12	**Intelectual-conceptual- analítico**	A3; A4; A5; A6; A8	A29; A30; A33	A42; A43; A44; A45; A47; A48; A49; A52; A53; A54; A55; A58;	A60; A61; A62; A63; A64; A65; A66; A68	28

Tabla 4.6.3. Tipificación de argumentos

En cuanto a la *Tabla 4.6.3* podemos inferir que el mayor número de argumentos corresponde a los de tipo *Intelectual-conceptual- analítico*. Interpretamos que los estudiantes, en su mayoría, cuando establecen un argumento para justificar una estrategia de solución a un problema, utilizan un razonamiento para construir la idea en que se basa el argumento, luego identifican propiedades, relaciones, definiciones o conceptos en la estrategia de solución que pretenden justificar, y por último, intentan dar cuenta de esas propiedades, relaciones, definiciones o conceptos utilizando algún elemento teórico, aunque no formalmente, para dar validez a su estrategia. Este hecho nos sorprendió gratamente, pues nosotros pensábamos que los estudiantes lograrían construir tan solo algunos pocos argumentos de este tipo o que tal vez ni siquiera uno; pero al elaborar esta tabla, identificar 28 de los 68 argumentos y evidenciar que la mayor concentración de la actividad argumental responde a esta estructura, nos cambió positivamente todas las expectativas de resultados y la percepción del trabajo desarrollado por los estudiantes.

El tipo de argumento *Pragmático-empírico-genérico-constructivo*, corresponde a la segunda frecuencia más alta de argumentos propuestos por los estudiantes en el desarrollo de los dos problemas. En este sentido, podemos inferir que gran parte de los argumentos propuestos por los estudiantes están basados en sus concepciones, las cuales identifican aspectos generales de un ejemplo que es un representante de muchos otros, pero basándose principalmente en las construcciones realizadas en el proceso de las diferentes estrategias de solución. Pasa algo muy similar con los argumentos de tipo *Pragmático-empírico-genérico-analítico*, correspondiente a la tercera frecuencia, en donde también se identifican aspectos generales de un ejemplo que es un representante de muchos otros, pero basados en propiedades o relaciones identificadas en la construcción realizada.

Los tipos de argumento *Informal-de convicción externa, Pragmático-empírico-naif-de ejemplificación, Pragmático-empírico-crucial-de ejemplificación, Pragmático-empírico-crucial-.constructivo* y *Pragmático-empírico-crucial-analítico,* corresponden a las siguientes dos frecuencias. De estas frecuencias inferimos que los estudiantes establecen argumentos basados en lo que ellos creen o perciben; en ocasiones, hacen comparaciones con objetos, personas o cosas que les aporte una vía de solución; en otras, escogen ejemplos muy particulares provenientes de estrategias de solución, sin ningún criterio de elección o especiales, establecidas como posibles soluciones de los problemas.

Por último, los tipos de argumento *Informal-no geométrico, Pragmático-empírico-naif-inductivo, Pragmático-empírico-genérico-de ejemplificación* e *Intelectual-conceptual-no analítico*, corresponden a las dos frecuencias más bajas o casi nulas. Inferimos que estos argumentos son casos particulares en los cuales los estudiantes establecieron una estructura de argumento muy similar a la definición de cada tipo, pero que no se vuelve a evidenciar en el proceso de solución del problema.

En síntesis, queremos resaltar que la caracterización realizada en este apartado responde cómo las acciones de la actividad demostrativa promueven la argumentación en los estudiantes, pues a partir de las evidencias presentadas en cada tabla podemos observar la presencia de diferentes tipos de argumento a través de todas y cada una de la acciones de la actividad demostrativa realizada por los estudiantes en el desarrollo de los problemas. Adicionalmente, hacemos referencia al marco teórico en donde planteamos que la argumentación, a nuestro criterio, se concibe como el vínculo entre el proceso de conjeturación y el proceso de justificación de la actividad demostrativa; pues a partir de estos resultados, se evidencia que nuestra interpretación responde a lo encontrado en los desarrollos de los estudiantes. En este sentido creemos que podemos aportar a la línea Æ • G en la caracterización del constructo actividad demostrativa.

5. CONCLUSIONES

La presente investigación se realizó con el propósito de buscar evidencias de cómo la actividad demostrativa promueve procesos argumentativos en los estudiantes cuando se enfrentan a un problema enmarcado en este constructo. En el desarrollo de este estudio, evidenciamos en una clase de geometría de grado octavo que los estudiantes descubrieron diferentes propiedades y relaciones de hechos geométricos, para dar solución al problema desde diferentes perspectivas; de esta manera, los estudiantes son los principales actores de la clase y como tales, sus intervenciones son de vital importancia para el desarrollo de la misma, en especial aquellas en las cuales argumentan a sus compañeros la validez de las diferentes estrategias puestas en juego cuando se enfrentan a un problema. Sin embargo, somos conscientes que el papel del profesor es de vital importancia en el desarrollo de la clase para la obtención de los objetivos propuestos en la misma.

Los desarrollos por parte de los estudiantes enfrentados a cada uno de los problemas, en un ambiente de actividad demostrativa fueron, a nuestro criterio, muy favorables y exitosos, pues ellos no estaban acostumbrados a una clase de geometría donde se les insinuara la exploración libre de un problema con el fin de realizar una construcción que cumpliera unas condiciones específicas. Por lo general, la clase de geometría consistía simplemente en el reconocimiento de propiedades en objetos geométricos impartidas por el profesor, sin la posibilidad de que fueran descubiertas a partir de la interacción entre los actores de la clase; por ello, creemos que el constructo permite un acercamiento al aprendizaje de la geometría de manera mucho más práctica y significativa en el proceso del estudiante.

En el desarrollo de las diferentes situaciones problema, identificamos que los estudiantes progresivamente adquirieron autonomía en la formulación y justificación de estrategias, pues el profesor nunca fue esencial para generarlas o validarlas, sino que fueron generadas gracias a la interacción entre los integrantes de cada grupo. Este hecho, lo consideramos muy importante en el proceso de aprendizaje de cada estudiante, debido a que cada uno debe hacer uso de sus dominios conceptuales, verificarlos, contrastarlos con los de sus compañeros, modificarlos o reestructurarlos y por último reformularlos.

Sin embargo, con la idea anterior no pretendemos afirmar que una clase de geometría que promueve la actividad demostrativa, pueda desarrollarse sin la presencia del profesor, pues aunque no sea el generador de las producciones de los estudiantes, sí permite que el estudiante oriente sus estrategias de solución y resuelva cuestionamientos fundamentales, los cuales solo la experiencia y bagaje conceptual del profesor permiten que sean identificados por él y que por lo general son ignorados por el estudiante. En este sentido, creemos que sin importar que las interacciones que se entretejen en la actividad demostrativa son responsabilidad de los estudiantes, se hace necesaria la participación de profesor, no para definirlas ni dominar las acciones de los estudiantes sino para promover procesos argumentativos en cada uno de sus desarrollos. Algunas de estas reflexiones se evidencian en Franco & Moreno (2011).

Consideramos que el experimento de enseñanza es un aporte a la comunidad de educadores matemáticos, pues puede implementarse en otra clase de geometría pensada desde la actividad demostrativa y creemos que sus resultados pueden ser iguales o tal vez más productivos que los encontrados en esta investigación. Este experimento de enseñanza está diseñado con el fin que cualquier profesor que esté interesado en promover procesos argumentativos a través de la actividad demostrativa a nivel de secundaria, pueda implementarlo con éxito.

Nuestros resultados no pretenden generalizar que la actividad demostrativa promueve procesos argumentativos en los estudiantes, sino que a partir de la investigación queremos mostrar que es posible impulsar en los estudiantes la práctica argumental como herramienta fundamental en la clase de geometría, pero a nivel escolar. Por tanto tenemos pruebas de existencias mas no de generalidades; hecho que nos permite asegurar que a nivel de secundaria se puede impulsar a los estudiantes al desarrollo de actividades propias de su actividad matemática, en las cuales explique, pruebe o demuestre sus soluciones, dependiendo el nivel conceptual y argumental en que se encuentre.

Otro aporte que consideramos importante con el desarrollo de esta investigación, es la manera como analizamos cada uno de los 68 argumentos propuestos por los estudiantes en el desarrollo de los dos últimos problemas del experimento de enseñanza. Consideramos que no es inmediata la interpretación de cada uno de los argumentos, por tanto fue necesario entender qué creemos que dicen los estudiantes, por qué creemos que lo dicen y construir con esta interpretación un esquema que nos permitiera comprender el argumento.

La construcción de los tipos de argumento planteados en el marco teórico, es otro aporte muy importante de esta investigación, ya que a partir de estas categorías emergentes es que logramos caracterizar y tipificar todos los diferentes argumentos utilizados por los estudiantes en el desarrollo de los dos problemas. Adicionalmente, hacemos relevancia en que la propuesta de tipología de argumentos puede ser utilizada por los docentes investigadores interesados en el desarrollo de proyectos en torno a la caracterización de argumentos a nivel de educación secundaria.

Durante el trascurso de la investigación hemos enriquecido nuestra formación investigativa, en la medida en que hemos podido participar en tres eventos de la comunidad de educadores matemáticos, con ponencias que han sido sometidas a un grupo de evaluadores expertos y han sido aprobadas. En estas ponencias comunicamos: en primera instancia en el Encuentro de geometría y sus aplicaciones (2010), la necesidad que tienen los estudiantes de verificar información dada en el enunciado del problema; en el Encuentro de Educación Matemática de ASOCOLME (2011), la disposición del profesor cuando interviene en la actividad desarrollada por los estudiantes cuando surgen propuestas de los estudiantes que no se habían pensado en la planeación; y por último, logramos participar en el I Encuentro de estudiantes de Maestría y Doctorado en el marco de ASOCOLME (2011) cuya experiencia es muy enriquecedora, en tanto los avances de la investigación no solo son comunicados a investigadores con intereses similares, sino pudieron ser socializados con un grupo selecto de doctores cuyas sugerencias han sido muy favorables para la culminación de la presente investigación. Con esta participación hemos ganado competencias analíticas y de escritura que se ven reflejadas en la presente investigación.

Gracias al trabajo realizado para la elaboración de las producciones presentadas en los eventos mencionados anteriormente logramos ampliar el constructo actividad demostrativa en cuanto a la acción de verificar, pues en el contexto que desarrollamos esta investigación los estudiantes no solo verifican conjeturas sino que es una acción que se hace presente durante todo el proceso de conjeturación, en otros términos los estudiantes verifican hasta el mismo enunciado del problema.

Un aspecto muy importante identificado en la elaboración de este estudio, es la importancia de tener unas transcripciones que reflejen lo más fielmente las interacciones de los estudiantes; es decir, con solo dar una lectura se debe lograr reconstruir las acciones desarrolladas por los estudiantes. Este aspecto, permite hacer un mejor análisis de los diálogos que entablan los estudiantes y hacer interpretaciones de sucesos reales sin necesidad de revisar nuevamente los archivos de audio y video; y de esta manera obtener unos resultados confiables y acordes a los objetivos que orientan la investigación.

Para terminar, podemos afirmar que cumplimos a cabalidad el objetivo general de la investigación, pues en el desarrollo de la misma logramos: diseñar e implementar un experimento de enseñanza que promovió en los estudiantes el desarrollo de todas las acciones de la actividad demostrativa; describir e identificar las acciones que componen los dos procesos de la actividad demostrativa, en los desarrollos de los estudiantes enfrentados al problema 10 y 11; Identificar, interpretar y tipificar los argumentos utilizados por los estudiantes en el desarrollo de los problemas; relacionar los 12 tipos de argumento con las diferentes acciones de la actividad demostrativa; y reflexionar acerca de la manera en que la actividad demostrativa favorece la actividad argumental en los estudiantes enfrentados a los problemas propuestos.

6. BIBLIOGRAFÍA

Boero, P., Garuti, R. y Lemus, E. (2007). Abordar teoremas en grado octavo. Some mental processes underlying producing and proving conjectures, and conditions suitable to enhance them. En P. Boero (Ed.), Theorems in school. From history, epistemology and cognition to classroom practice (pp. 249-264). The Netherlands: Sense Publishers. Italia.

Boero, P. (1999). Argumentation and mathematical proof: A complex, productive, unavoidable relationship in mathematics and mathematics education. International Newsletter on the teaching and learning of mathematical proof (Juillet/Août 1999). Traducción realizada por Patricio Herbst. Reacciones y observaciones a la contribución de Paolo Boero fueron publicadas en la carta de Septiembre/Octubre 1999.

Boero, P., Garuti, R. &Lemut, E.(1999), About the Generation of Conditionality of Statements and its Links with Proving, in Proceedings of the 23th PME Conference, Haifa, vol. 2, 137-144.

Camargo, L., Samper, C., Perry, P. Una visión de la actividad demostrativa en geometría plana para la educación matemática con el uso de programas de geometría dinámica. Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá, Colombia, 2006.

Douek, N. 1998, Some Remarks about Argumentation and Mathematical Proof and their Educational Implications, Proceedings of the CERME-I Conference, Osnabrueck.

Franco, B & Moreno, G. (2010). La verificación y la interpretación de enunciados en la actividad demostrativa. Ponencia presentada al 20º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones, Bogotá, Colombia.

Franco, B & Moreno, G. (2011). La argumentación como núcleo de la actividad demostrativa. Ponencia presentada al I Encuentro de Estudiantes de Maestría y Doctorado en Educación Matemática, Armenia, Colombia.

Marrades, R. y Gutiérrez, A. (2001). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. Educational Studies in Mathematics, 44, 87-125.

Moreno, G. & Franco, B. (2011). Disposición del profesor frente a la actividad demostrativa d estudiantes de secundaria. Ponencia presentada al 12º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa, Armenia, Colombia.

Ministerio de Educación Nacional. Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, ciencias y ciudadanas. Bogotá, 2006.

Ministerio de Educación Nacional. Lineamientos curriculares de Matemáticas. Bogotá, 1998.

Perry, P., Camargo, L., Samper, C., Rojas, C. (2006) Actividad demostrativa en la formación inicial del profesor de matemáticas. Bogotá: Editorial de Universidad Pedagógica Nacional.

Perry, P., Samper, C., Camargo, L. (2006). Dos episodios que plasman rasgos de una comunidad de práctica en la que cabri juega un papel clave. Ponencia presentada al III Congreso Iberoamericano de Cabri, Bogotá, Colombia.

Samper, C., Camargo, L., & Leguizamón, C. (2003). Como promover el razonamiento en el aula por medio de la geometría. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Samper, C., Camargo, L., Molina, O., Echeverry A., Perry, P. (2010), Geometría dinámica: medio para el establecimiento de condicionalidad lógica. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

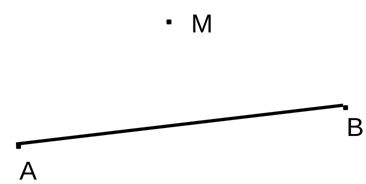
ANEXO 1

TRANSCRIPCIÓN 1º TAREA

GRUPO DE SERGIO

(Sergio, Felipe, Cristian, Daniel)

Tarea 1: En la figura, el punto M es el punto donde se cortan las mediatrices del triángulo $\triangle ABC$ y $\overline{\mathrm{AB}}$ es un lado del triángulo. Construya un triángulo tal que *M* sea corte de las mediatrices.



Episodio 1: interpretan el enunciado y hacen un primer intento de comprobación de que *M* está en la mediatriz.

Aspectos descriptivos:
Leen el enunciado, buscan la definición de mediatriz, relacionan el enunciado con la figura dada, es decir reconocen que el segmento *AB* es un lado del triángulo. Proponen cómo construir la mediatriz y afirman que ésta debe coincidir con *M*, tal vez a lo que hacen referencia es que la mediatriz debe pasar por *M*. Primera estrategia para entender el enunciado.

1	Felipe:	Bueno tarea 1, en la figura, el punto *M* es el punto donde se cortan las mediatrices del triángulo *ABC* y *AB* es un lado del triángulo. Construya un triángulo tal que *M* sea corte de las mediatrices.
2	Sergio:	Bueno muchachos
3	Cristian:	*AB* es el segmento, ¿no?
4	Sergio:	Entonces aquí [señala la hoja] tenemos la recta *AB* ¿Sí? Toca construir el triángulo *ABC.* La recta *AB* es un lado del triángulo. Construya un triángulo tal que *M* sea corte de las mediatrices.
5	Felipe:	¿Qué era una mediatriz? ¿Qué era una mediatriz? Una mediatriz era… [Busca en las fichas bibliográficas la definición de mediatriz].
6	Cristian:	Mediatriz es el conjunto de…
7	Sergio:	…de puntos que equidistan de los dos extremos.
8	Cristian:	¡Eso!

9	Felipe:	Es un punto que equidista… bueno entonces…
10	Sergio:	Entonces tracemos la mediatriz. Ya sabemos cómo. Con radio *AB,* eh… hacemos dos circunferencias y esos dos puntos que corten están formando la mediatriz, muchachos. [Con los dedos describe el procedimiento sobre la hoja]
11	Felipe:	[Toma el compás, hace centro en *A* y lo abre hasta *B*] Pero tiene que coincidir con *M.*
12	Daniel:	Tiene…
13	Sergio:	Con *M*. *M* es la mediatriz
14	Felipe:	Por eso, *M* es el punto…
15	Sergio:	Que *M* sea corte de la mediatriz

Actividad demostrativa:

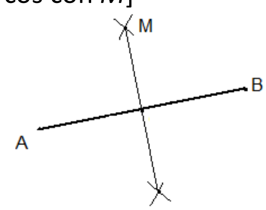
- Visualizar: en nivel perceptivo. Discriminan el lado [4]
- Explicar: Explican cómo hacer la mediatriz, para lo cual hacen arco con centro en A y radio AB, y afirman que el arco debe pasar por *M*. [10-15]

Episodio 2: Comprueban que *M* está en la mediatriz de *AB*

Aspectos descriptivos:

Todavía están interpretando el enunciado, pues dicen que toca sacar *C*. Con la explicación en el episodio anterior que propuso Sergio de cómo construir una mediatriz, comprueban la afirmación "*M* está en la mediatriz" que propone el enunciado. Primera estrategia para abordar el problema. Como el arco *AB* no pasa por *M*, entonces cambian de radio *AB* a *AM* y construyen la mediatriz.

16	Felipe:	[…]
18	Felipe:	con la misma medida de *M* toca hacerlo abajo [Señala la parte de abajo del segmento *AB*]
19	Daniel:	Toca sacar *C*
20	Sergio:	Toca mirar si *M* es... Por eso, haga las dos circunferencias y toca mirar si *M* es la mediatriz
21	Felipe:	¿Qué era?, ¿radio *AM*?
22	Sergio:	[…]
23	Daniel y Sergio:	*AB*
24	Sergio:	[…]
25	Felipe:	No nos da [Se refiere a que *M* no está en el arco con centro en *A* y radio *AB*].
26	Cristian:	Pero no, tocaría sacar entonces *C*.
27	Sergio:	¿*C*?
28	Felipe:	Lo que yo les digo, tocaría hacerlo abajo, tocaría hacer la misma medida

		de *M* abajo.
29	Daniel:	Sí.
30	Sergio:	Pero toca mirar primero si *M* si pasa por la mediatriz o no pasa por la mediatriz.
31	Felipe:	Por eso, primero toca averiguar eso [Felipe hace dos arcos en la parte de abajo del segmento *AB* con radio *AM* y con centro en *A* y *B*]
32	Daniel:	[...]
33	Profesora:	¿Qué van a verificar?
34	Felipe:	Si *M* es la mediatriz [Se refiere a verificar que el punto *M* esté en la mediatriz].
35	Profesora:	[...]
37	Sergio:	Dios mío que sea la mediatriz.
38	Profesora:	[...]
39	Felipe:	Ah, si es la mediatriz… sí, si es la mediatriz. [vuelve a marcar los dos arcos en la parte de abajo del segmento *AB* con radio *AM* y centros en *A* y en *B*]
40	Sergio:	Sí, si es la mediatriz. [La recta que se define con la regla es la porque pasa por *M*]
41	Daniel:	Si porque sube por toda la…
42	Profesora:	¿Qué comprobaron Sergio?
43	Felipe:	Que era la mediatriz. [con la regla traza la mediatriz del segmento AB uniendo el corte de los arcos con *M*] 
44	Sergio:	Que *M* es un punto que equidista en *A* y *B.* O sea que M está formando la mediatriz.

Actividad demostrativa:

- Verificar: comprueban que *M* está en la mediatriz [30-37]

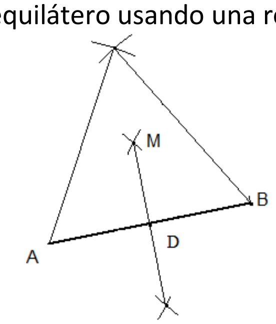
Argumentos:

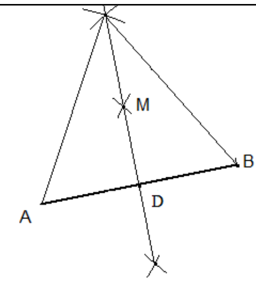
- Argumento [39]
- Argumento [41]
- Argumento [44]

Episodio 3: Definen una estrategia para encontrar *C*: Consideran que *C* está en la mediatriz (triángulo equilátero)

Aspectos descriptivos:

Proponen una segunda estrategia para abordar el problema, construyen un triángulo equilátero y para verificar que el tercer vértice del triángulo está en la mediatriz de AB, prolongan la mediatriz que habían construido en el episodio anterior y se dan cuenta que pasa justo por el vértice.

52	Felipe:	[Nombra el punto medio del segmento *AB* con la letra D]. Bueno, entonces listo. En la figura, el punto *M* es el punto donde se cortan las mediatrices del triángulo *ABC* y *AB* es un lado del triángulo. Entonces éste [señala el segmento *AB*] es un lado del triángulo.
53	Daniel:	Sí.
54	Felipe:	[…]
57	Felipe:	Entonces el segmento *AB* sería la base ¿no? y pues lo sacaríamos a *M* o a otro punto. [con los dedos cierra el triángulo en *M* y luego en otro punto más arriba]
58	Sergio:	[…]
60	Felipe:	Entonces hagámoslo con la medida *AB*.
61	Sergio:	Con radio AB encontramos el otro punto.
62	Felipe:	[…]
66	Felipe:	[Traza los dos arcos en la parte superior del segmento AB con radio AB y centro en A y en B].
67	Daniel:	[…]
69	Sergio:	Sí, equidista en A y equidista en B.
70	Felipe:	[…]
72	Felipe:	[…][traza el triángulo equilátero usando una regla] 
73		Pero entonces tocaría subir la mediatriz [se refiere a prolongar la mediatriz]
74	Felipe:	[…]
75	Cristian:	Tendría que llegar hasta la punta de arriba
76	Sergio:	No mire, hágala
77	Felipe:	Espere y hacemos la misma medida de *M*, *M* tiene que cortar ahí perfecto con… [se refiere a que si prolonga la mediatriz, ésta debe pasar por el vértice del triángulo]
78	Sergio:	Yo diría que ahí dio

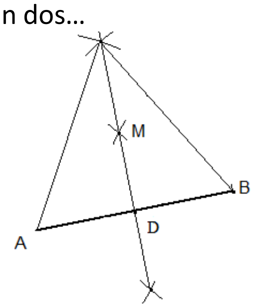
Actividad demostrativa:

- Explorar: cómo construir el triángulo *ABC.* Además la mediatriz del lado AB debe pasar por el vértice del triángulo [57,60, 61, 66, 72] [73-78]

Episodio 4: Identifican en la figura construida propiedades asociadas a la mediatriz *M*

Aspectos descriptivos:

Identificar propiedades de la mediatriz en la construcción. Afirman que la mediatriz del segmento *AB* divide al triángulo equilátero *ABC* en dos triángulos congruentes y lo prueban informalmente por el criterio *LLL*.

79	Daniel:	[…]
80	Felipe:	*M* [se refiere a la mediatriz] es lo que corta a […]
81	Daniel:	[…]
82	Sergio:	Que corta a un triángulo en dos… 
83	Daniel:	En dos lados
84	S	En dos partes iguales
85	Sergio:	Y queda un triángulo…
86	Felipe:	Congruente
87	Sergio:	Eso congruente
88	Felipe:	Porque todos sus ángulos son iguales y sus lados son iguales es un triángulo congruente [en un triángulo equilátero la mediatriz de AB divide al triangulo en dos triángulos congruentes]

Actividad demostrativa:

- Visualizar: observan que la mediatriz divide al triángulo en dos triángulos congruentes [82-84]
- Probar: justifican que los triángulos son congruentes por el criterio LLL y por tanto sus ángulos correspondientes también son congruentes [88]

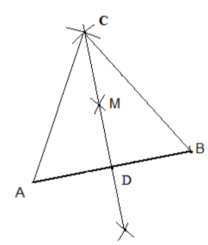
Argumentación:

- Argumento [88]

Episodio 5: Justifican la solución de la tarea, *C* está en la mediatriz, con propiedades de una mediatriz.

Aspectos descriptivos:

Comprueban que cualquier punto arbitrario de la mediatriz equidista de *A* y *B*; para lo cual miden las distancias con el compás. Comprueban características de la mediatriz, que cualquier punto equidista de A y de B.

89	Felipe:	[…]
91	Profesora:	¿Cuál es el triángulo?
92	Felipe:	El triángulo es este [señala el triángulo equilátero que construyó] ah espere *C* [marca el otro vértice de triángulo con la letra *C*] 
93	Profesora:	Listo
94	Felipe:	El triángulo es ABC
95	Profesora:	¿Y ahí en *M* se cortan las tres mediatrices? [...]
96	Todos	[...]
98	Felipe:	Y como las… ¡ahí! ¿Se acuerdan de la perpendicular, que cualquier punto ubicado en la recta perpendicular sería algo que equidiste, que sea una equidistancia con A y B?
99	Daniel:	[…]
104	Sergio:	Si la mediatriz es el conjunto de uniones, de puntos que equidisten de A y de B. Cualquier punto que señalemos arbitrariamente, puede ser este, [señala un punto arbitrario sobre la mediatriz encima de *M*] ya esta equidistando en A y en B, porque ya está sobre la mediatriz.
105	Felipe:	Comprobémoslo con el compás [toma el compás y mide la distancia que hay desde el punto medio de AB hasta el punto arbitrario que hizo Sergio]

106	Sergio:	¿Qué va hacer?
107	Felipe:	Voy a hacer cualquier punto
108	Sergio:	Así no se hace
109	Felipe:	Si vea, ahí salió
110	Profesora:	¿Por qué así no se hace?
111	Sergio:	Porque…profe porque toca… con radio *A* punto arbitrario y *B* punto arbitrario y ahí tiene que dar, no así, ¿por qué así donde más lo va a señalar?
112	Felipe:	[Mide las distancias que hay desde *A* y *B* hasta el punto arbitrario sobre la mediatriz]Por eso, vea [hace centro con el compás en *A* y lo abre hasta el punto arbitrario sobre la mediatriz]

Actividad demostrativa:

- Explicar: identifica que cualquier punto de la mediatriz equidista de los extremos del segmento [104]
- Verificar: comprueban que cualquier punto arbitrario sobre la mediatriz equidista [105-112]

Argumentación:

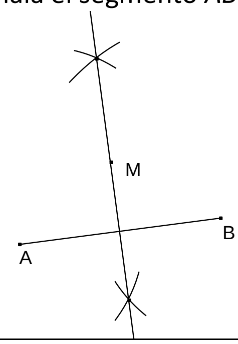
- Argumento [104]
- Argumento [105-111]

Episodio 6: Discuten por qué el segmento *AB* no es una mediatriz

Aspectos descriptivos:

Siguen interpretando el enunciado pues leen nuevamente las condiciones del punto *M* y buscan en sus apuntes la definición de mediatriz. Construyen nuevamente la mediatriz de *AB,* hacen dos arcos en la parte superior de AB con radio AB, es decir estos arcos no se cortan en M, luego en la parte inferior hacen dos arcos con radio AM, finalmente unen las intersecciones de los arcos. Confunden el segmento *AB* con otra mediatriz, pero luego justifican porque no lo es (AB no tiene punto medio entonces no es una mediatriz).

120	Sergio:	[…]
123	Felipe:	Por eso, no entiendo
124	Sergio:	O sea mire
125	Felipe:	Vea, dice… en la figura el punto *M* es el punto donde se corta la mediatriz del triángulo. La mediatriz ¿Qué era una mediatriz? [Busca en las fichas bibliográficas]
126	Profesora:	Donde se cortan las mediatrices
127	Sergio:	La mediatriz es el conjunto de puntos…
128	Daniel:	Es el conjunto de puntos que equidistan de los extremos
129	Felipe:	Una mediatriz es una recta perpendicular al segmento y por el punto medio. ¡Ah! ¿Si ve?

130	Daniel:	Si
131	Sergio:	[Toma una medida arbitraria con el compás y con centro en *A* y en *B* construye dos arcos encima del segmento *AB*. Luego hace centro en *A* y en *B* y toma la medida hasta *M* para construir dos arcos en la parte de abajo del segmento] Es que no hay nada más seguro que hacer las dos circunferencias. Mire, *M* tiene que ser el corte de las mediatrices. Uno. Esta es la mediatriz… [une los cortes anteriores con la regla y construye la recta] y la otra mediatriz sería esta [señala el segmento *AB*] 
132	Daniel:	Tienen que unirse las tres
133	Felipe:	[…]
134	Cristian:	¿Por qué el segmento *AB* seria otra mediatriz según Sergio?
135	Sergio:	[…]
136	Felipe:	No, este [AB] es un segmento Sergio se equivocó, eso no podría ser una mediatriz, porque si no tendría un punto medio
137	Sergio:	Por eso, ya lo tiene
138	Felipe:	Pero antes no lo tenía, no era un punto medio, digo no era una mediatriz

Actividad demostrativa:

- Explicar: aclaran porque *AB* no puede ser otra mediatriz [136-138]

Argumentación:

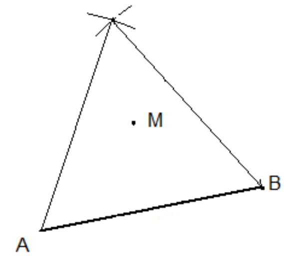
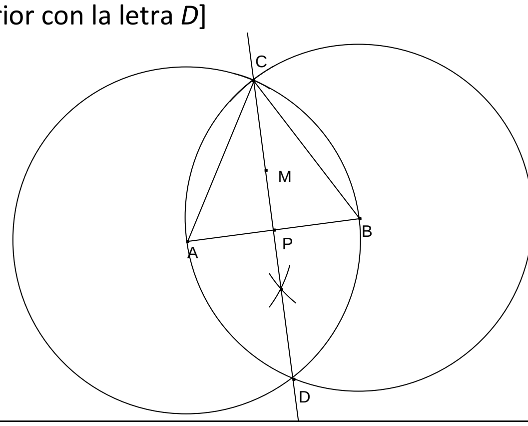
- Argumento [136-138]

Episodio 7: Justifican porque la recta que pasa por *M* es la mediatriz

Aspectos descriptivos:

Caracterizan el punto *M* y la mediatriz (punto medio, perpendicularidad, equidistancia). Proponen construir las otras dos mediatrices en el triángulo equilátero que volvieron a construir. Intentan verificar la conjetura "*C* está en la mediatriz". Continúan interpretando el enunciado pues comprenden que *M* es el corte de las mediatrices.

142	Sergio:	[…]
151	Sergio:	Lo que pasa es que aquí formamos un triángulo equilátero, muchachos

		
152	Felipe:	Construya un triángulo tal que *M* [señala *M* en la hoja] sea corte de las mediatrices ¡Corte! ¡Corte!
153	Sergio:	Corte de las mediatrices
154	Felipe:	Pues ahí ya está bien, ya
155	Sergio:	Es que dice mediatrices no mediatriz, por eso yo deduzco que son dos
156	Felipe:	Vea, mediatriz. Volvemos a leer. Una mediatriz es una recta perpendicular al segmento. Una recta perpendicular, [señala la mediatriz que ya construyó] ahí está bien, al segmento *AB* y por el punto medio
157	Sergio y Felipe:	Entonces este es el punto medio [señalan al corte de la mediatriz con el segmento *AB*]
158	Felipe:	Señalemos el punto medio
159	Sergio:	Venga lo señalamos acá. Pongámosle *P* [nombra al punto medio con la letra *P*]
160	Sergio:	Bueno entonces hagámosle, *P*, *C* y *D* [señala el punto medio *P*, al corte superior de las dos circunferencias lo nombra con *C* y al corte inferior con la letra *D*] 
161	Felipe:	¿Se acuerda? la recta perpendicular, dos rectas o segmentos son perpendiculares si forman un ángulo recto, ya tenemos … [lee en las fichas bibliográficas]
162	Sergio:	Tenemos un, dos, tres, cuatro. [Señala con los dedos los cuatro ángulos rectos que forma la mediatriz con el segmento *AB*. Luego con el lápiz marca los cuatro ángulos rectos]
163	Felipe:	[…]
168	Felipe:	Que forma dos ángulos rectos. ¿Se acuerdan de la clase que hicimos esto, que cualquier punto ubicado en la recta era una

		mediatriz?
169	Daniel:	Sí
170	Profesora:	¿Qué cualquier punto era una mediatriz?
171	Felipe:	Digo era un punto equi…distante a *A* y *B*

Actividad demostrativa:

- Explicar: Felipe introduce la propiedad de la perpendicularidad de la mediatriz y que pasa por el punto medio [156,157]
- Visualizar: reconoce los ángulos rectos que forma la mediatriz [162].
  Identifican el punto medio del segmento [157]

Argumentación:

- Argumento [156-162] [168]

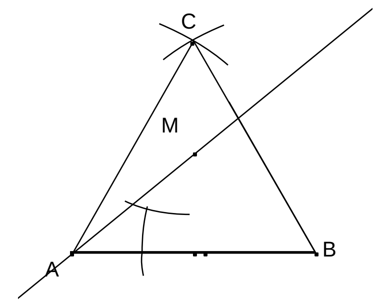
Episodio 8: Sugieren cómo hacer las otras dos mediatrices, pero hacen medianas. Anticipan que la estrategia no va a funcionar y lo comprueban trazando la mediatriz de *BC.*

Aspectos descriptivos:

Los estudiantes habían construido un triángulo *ABC* equilátero como posible solución de la tarea, habían construido la mediatriz del segmento AB que pasaba por el vértice C del triángulo, también habían caracterizado la mediatriz (punto medio, perpendicularidad, equidistancia). En este episodio cuando sugieren construir las otras dos mediatrices, construyen medianas. Anticipan que las mediatrices (medianas) no pasan por *M*. Para construir la mediatriz (mediana) de *CB* unen *A* con *M* para encontrar el punto medio de *CB.*

179	Profesora:	[…]
183	Profesora:	¿De un triángulo cuántas mediatrices puedo hacer?
184	Cristian:	Muchas
185	Felipe:	Tres
186	Sergio:	Tres, ¡ah! ¡Ya entendí!
187	Felipe:	Pues hay que hacer otras dos [mediatrices]
188	Sergio:	[…]
190	Cristian:	Puedo sacar la mitad [Puntos medios] de los… [Lados]
191	Felipe:	Eso
192	Sergio:	Y los tres ¡ah! ¡Ya entendí, profe!
193	Cristian:	Toca sacar la mitad de estas líneas [se refiere al punto medio de los lados]
194	Felipe:	Para hacer congruencia, pero… ¿para qué?
195	Cristian:	Para sacar las demás mediatrices
196	Profesora:	Escuchen a Cristian
197	Cristian:	Bueno, yo entiendo que para sacar las demás mediatrices pues toca sacar la mitad de los otros.

198	Sergio:	Lados.
199	Cristian:	De los otros lados
200	Felipe:	¿Para qué?
201	Daniel:	Para que sean congruentes [se refiere a que son congruentes las partes del segmento en que queda dividido por el punto medio]
202	Felipe:	Lado congruente, todos sus lados son iguales
203	Sergio:	Pero aquí hicimos un error [se refiere a que tal vez las mediatrices no pasen por *M*]
204	Felipe:	[…]
206	Felipe:	¿Cuál?
207	Sergio:	Que la mediatriz de un triángulo, las tres mediatrices del triángulo tienen que cortar en un punto y este punto que tiene que cortar es *M*, y tiene que unirse acá…
208	Felipe:	¿Acá cierto? [señala el punto *M* y con los dedos describe los segmentos que se forman desde el vértice A hasta el punto medio del lado BC y desde el vértice B hasta el punto medio de AC] Pun y pun ¿no?
209	Sergio:	Sí
210	Felipe:	Entonces ya lo tenemos
211	Sergio:	Pero el problema aquí es que de pronto, no se unan porque este punto es muy abajo [señala a *M*] entones va a pasar por encima
212	Felipe:	[…]
215	Sergio:	Por encima no por ahí [se refiere a que el corte de las mediatrices va a pasar por encima de *M* y no sobre *M*]
216	Daniel:	[…]
224	Sergio:	Si ve que no da [con una abertura arbitraria hace centro en *B* y en *C* y hace dos arcos que se corten en el interior del triángulo. Se refiere a que no da, pues el corte de los arcos no pasa por *M*]
225	Profesora:	¡Háganla!, construyan la mediatriz que están haciendo, del segmento *CB*, ¡constrúyanla!
226	Felipe:	*CB*, bueno saquémosle la mitad de *CB*. La mitad de *CB* no sería esta. Muestre la regla.
227	Sergio:	Mire, se lo dije
228	Felipe:	¿No sería lo mismo hacer esto? Y ahí ya tenemos el punto [con la regla une a *A* con *M* y traza una recta. El corte de esta recta con el segmento *CB* es el punto medio]

Actividad demostrativa:

- Visualizar: se imaginan como quedan las mediatrices construidas y anticipan que no pasan por *M*, sino más abajo [208, 211]
- Explorar: para encontrar el punto medio de *CB* proponen unir *A* con *M* [228].
- Verificar: comprueba que la mediatriz de *CB* no pasa por *M,* hacen los arcos con centro en *C* y *B* [224]
- Explicar: aclaran que las tres mediatrices tiene que cortarse en un punto que es *M* [207]
- Probar: comprueban que el punto medio forma dos segmentos congruentes [197-201]

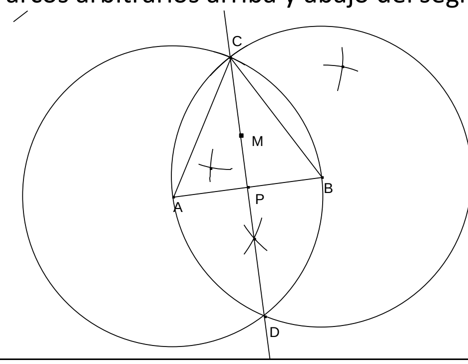
Argumentación:

- Argumento [197-201]
- Argumento [208-211]

Episodio 9: En el triángulo equilátero *ABC* construyen la mediatriz del segmento *BC* y se dan cuenta que no pasa por *M*.

Aspectos descriptivos:
Construido el triángulo equilátero *ABC*, deciden construir la mediatriz de *CB,* con arcos de radio arbitrario (menor que la longitud del segmento AB) y verifican que no pasa por *M.* Afirman que la mediatriz de CB no pasa por M, porque no se construyó con arcos de radio BM, entonces borran la construcción y proponen hacer la mediatriz de CB con radio BM.

229	Profesora:	¿Cómo construían ustedes una mediatriz?
230	Sergio:	[…]
231	Cristian:	¿La mediatriz? ¿Cómo la construíamos?
232	Sergio:	Fácil profe, cogemos el compás
233	Felipe:	A pues se saca la…
234	Sergio:	[…]
235	Cristian:	Se saca la misma medida de la mediatriz y se le pone encima
236	Sergio:	Es que tocaba coger el ancho de *M* [se refiere al radio *BM* para construir la mediatriz]y pun subirle
237	Felipe:	Que… ¿Cómo así?

238	Sergio:	Porque mire, tenía que cortar las tres mediatrices y las tres mediatrices dan un punto medio [se refiere a las tres mediatrices del triángulo]
239	Felipe:	[…]
240	Sergio:	Mire ¿Cuánto quiere perder? [construye la mediatriz de *BC* haciendo arcos arbitrarios arriba y abajo del segmento *BC*] 
241	Daniel:	[…]
244	Cristian:	Si ve que no, [se refiere a que no da, pues la mediatriz se construyo con radios arbitrarios] queda más abajo, pero ¿por qué?
245	Sergio:	Porque tocaba con el ancho de *M*
246	Felipe:	Entonces hagámoslo con el ancho de *M* [borra la mediatriz y las construcciones auxiliares que había hecho Sergio]
247	Sergio:	¿Vamos a ver si sirve?
248	Cristian:	Hágalo con el ancho de *M*
249	Sergio:	Gracias Felipe. Si profe, no dio, estaba en lo cierto.
250	Profesora:	¿No les da? Cuando construyeron la mediatriz de este segmento ¿no pasaba por el punto *M*? [la profe señala el segmento *BC*]
251	Todos	¡No!

Actividad demostrativa:

- **Verificar:** construyen la mediatriz de *CB* para comprobar la conjetura “Si *C* está en la mediatriz y el triángulo *ABC* es equilátero entonces el triángulo resuelve la tarea” [240]

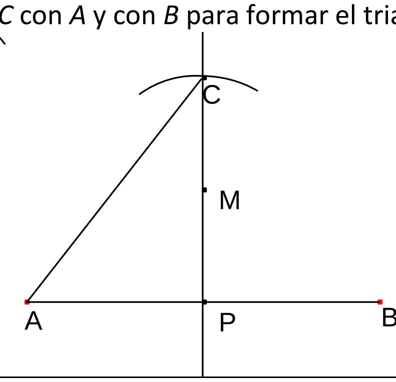
Argumentación:

- Argumento [244-245]
- Argumento [236, 238]

Episodio 10: Reubican un nuevo punto *C* en la mediatriz de *AB*, pero dejan incompleta la construcción de la mediatriz de *BC*.

Aspectos descriptivos:

Proponen una segunda estrategia para encontrar *C*, como vértice de un triángulo isósceles, es decir, una nueva conjetura. Ubican C en la mediatriz de AB de tal forma que sea el punto medio del segmento CP, donde P es el punto medio de AB. Para comprobar la conjetura hacen incompleta la mediatriz de *CB* y anticipan que no pasa por *M.*

252	Profesora:	Entonces ¿qué vas a proponer Sergio?
253	Felipe:	[…]
256	Sergio:	El ancho de *MP* [se refiere a tomar como radio MP]
257	Felipe:	[…]
263	Sergio:	Mire profe, ahora si va a dar, ¿Cuánto quiere perder? ahí todavía se nota la línea, espere la trazamos bien [hace centro en *M* y con radio *MP* traza un arco en la parte superior de *M*. Construye nuevamente la mediatriz del segmento *AB* y nombra el corte de la mediatriz con el arco de radio *MP* con la letra *C*] y ahí se construye [une *C* con *A* y con *B* para formar el triángulo *ABC*] 
264	Profesora:	¿Cómo encontraste el punto *C*?
265	Felipe:	Con la misma medida de la mediatriz
266	Profesora:	Cogieron la medida *MP* y la copiaron por encima para poder…
267	Felipe:	Para poder sacar *C*
268	Sergio:	Bueno digamos que este es C. Dios mío Felipe, donde esto nos llegue a quedar mal [construye los arcos para hacer la mediatriz del nuevo segmento *BC*]
269	Felipe:	[…]
274	Sergio:	No da
275	Profesora:	Háganla
276	Sergio:	No, ya vemos que no da [tiene los arcos para trazar la mediatriz de CB, pero sin trazarla anticipa que no va a pasar por M]
277	Profesora:	¿Para qué copiaban esta medida *MP* arriba?
278	Cristian:	Porque supuestamente…Sergio
279	Profesora:	Es que no trazó el otro arco acá, entonces no sabe hasta dónde va la mediatriz [Sergio con la regla va a trazar la mediatriz del segmento BC, pero aún falta un arco para poderla construir]
280	Sergio:	No da

281	Felipe:	Ya sé, de pronto está construido mal el segmento

Actividad demostrativa:

- **Explorar:**
  Proponen una nueva estrategia para construir el triángulo *ABC* [263]
  Incompleta, pues no tiene todos los elementos para trazar la mediatriz de *CB* para comprobar la conjetura [276]
- **Generalizar:** Si *C* está en la mediatriz y *CM=MP*, entonces el triángulo *ABC* cumple la tarea [256] [263-268]

Argumentación:

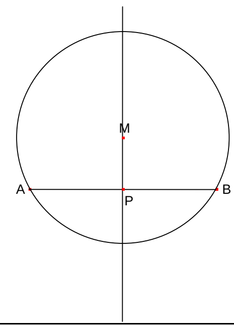
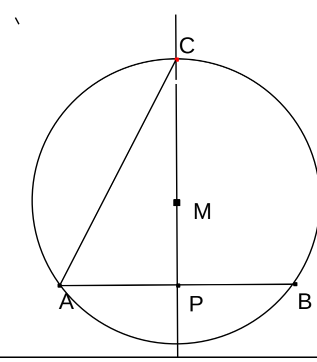
- Argumento [279, 281]

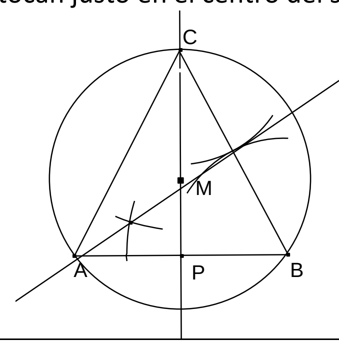
Episodio 11: Construyen *C* para que *M* sea el centro del triángulo *ABC*

Aspectos descriptivos:

Sergio y Felipe consideran que *C* debe quedar en un sitio en el que *M* sea el centro del triángulo. Para lo cual construyen una circunferencia con centro en *M* y radio *MA*. Sergio ubica *C* en la intersección de la mediatriz de *AB* y la circunferencia. Sergio propone que sí funciona pues *M* está en el centro del triángulo porque *MA=MB=MC*. Felipe dice que la forma cómo Sergio encontró el punto *C* hace que *M* no sea el centro del triángulo porque *MP≠M*C. Para comprobar si el triángulo resuelve la tarea, trazan la mediatriz de *CB* pero lo hacen incorrectamente, por lo tanto concluyen que la teoría no funciona. El triángulo construido si cumplía la tarea, pues la circunferencia es el lugar geométrico de todos los posibles C, pero la construcción incorrecta de la mediatriz de BC no les permitió que pasara por M. Felipe afirma que no dio porque M no es el punto medio del triángulo, pues MP debería ser congruente con MC.

283	Sergio:	¡Ah ya sé!, tengo una idea
284	Felipe:	¿Cuál es su idea Sergio?
285	Sergio:	Mi idea, Felipe, es la siguiente [borra todo lo construido]
286	Felipe:	[…]
289	Sergio:	Sí, *M* tiene que ser el punto del triángulo, o sea el centro del triángulo
290	Profesora:	¿Tiene que ser el centro del triángulo?
291	Sergio:	Sí, porque las tres mediatrices cortan en un punto y el punto es el centro del triángulo
292	Profesora:	[…]
294	Profesora:	¿Siempre las tres mediatrices se cortan en el centro del triángulo?
295	Felipe:	No necesariamente ¿No?
296	Profesora:	No tenemos seguridad de eso todavía
297	Sergio:	Bueno, yo si tengo la seguridad
298	Profesora:	¿Qué vas a hacer? Hiciste centro en *M* y construiste la

		circunferencia [Sergio construye una circunferencia con centro en *M* y radio *MA*] 
299	Sergio:	[…]
303	Sergio:	[…]Bueno, ahora sacamos mediatriz y como *M* es el punto medio del círculo [se refiere al centro del triángulo]
304	Felipe:	¿Por qué? Ese no es el punto medio [se refiere al centro del triángulo]
305	Sergio:	¿Cuánto quiere perder que sí?
306	Felipe:	Sí es el punto medio, tendría que tener la misma medida de *M* a *P* y de *M* a *C*
307	Sergio:	De la circunferencia, punto medio de la circunferencia
308	Profesora:	¿O sea el centro?
309	Felipe:	¡Ah!, Sí, sí, si es que no estaba viendo esta parte, [Señala la parte de la circunferencia que queda por debajo del segmento *AB*] Disculpe Sergio
310	Sergio:	[Construye nuevamente la mediatriz del segmento *AB*] aquí donde corta este punto, aquí si da [nombra a *C* como el corte de la mediatriz y la circunferencia] porque *M* es el punto medio del triángulo 
311	Felipe:	De la circunferencia. Del triángulo ahí no es el punto medio
312	Sergio:	¡Ahí! Dios mío, el centro del triángulo, el centro del triángulo, ya ¿de acuerdo? ¿Ya?
313	Felipe:	No, ese no es el centro del triángulo
314	Sergio:	¿Cuánto quiere perder que sí?
315	Felipe:	¿Cuánto que no? ¿Dígame si la misma medida de *P* a *M* es la misma de *C?* porque esto ya no hace parte del triángulo [se

		refiere a la parte del circulo que queda por debajo del segmento *AB*]
316	Sergio:	[…]
317	Cristian:	Vamos a ver qué hace Sergio ahora [Construye la mediatriz de *BC*]
318	Sergio:	¡Uy! sí mire el centro apenas [hace centro en B y en *C* y traza dos arcos que se tocan justo en el centro del segmento *BC*] 
319	Felipe:	No le va a dar. No le da. Vea. Yo sabía que no le iba a dar porque *M* no es el punto medio del triángulo. No le da ni porque le acomode la regla [no le da pues al unir con la regla los arcos que pasan por el segmento y los otros dos arcos en el interior del triángulo; la mediatriz del segmento *BC* no pasa por *M*] [los arcos que construyo al interior del triángulo o los arcos que determinan el punto medio de BC están mal construidos, pues efectivamente el triángulo cumple la tarea]
320	Sergio:	Espere lo hacemos bien
321	Felipe:	Es que *M* nunca va a poder ser el punto medio. Si el punto medio esta acá [señala un punto arbitrario sobre la mediatriz, aproximadamente en el punto medio de PC] Porque tendría que dar lo mismo de aquí [P] a M y de M a C
322	Cristian:	Sergio ¿por qué ese no puede ir abajo?
323	Felipe:	Da lo mismo
324	Sergio:	Mire da aquí y da acá [compara la distancia de *M* a *A* y de *M* a *C*, y resultan iguales]
325	Profesora:	¿Qué estás haciendo ahí?
326	Felipe:	[…]
327	Sergio:	Lo que pasa es que mi teoría era que si *B* y *A* cuadran también *C* tiene que cuadrar
328	Profesora:	¿Qué significa que cuadren?
329	Sergio:	O sea, que *M* sea el punto centro del triángulo, pero veo que no y que me equivoque en mi teoría

Actividad demostrativa:

- **Generalizar:**

  M debe ser el centro del triángulo [289-291].

C es la intersección de la mediatriz de *AB* con la circunferencia con centro en *M* y radio *MA* [310].
Si *M* equidista de *B* y de *A*, entonces también debe equidistar de *C* [327].

- **Explorar:** Para verificar que *M* es el centro del triángulo encuentran *C* [298, 303]
- **Verificar:** Construyen la mediatriz de *AC* para verificar que pasa por *M*, es decir, resuelve la tarea. [317-319]
- **Explicar:** *M* no es el centro del triángulo porque *MP≠ MC* [321]

Argumentación:

- Argumento [289-297]
- Argumento [306-309] [315]
- Argumento [310]
- Argumento [319, 321]
- Argumento [327-329]

Episodio 12: Caracterizan la mediatriz de *AB* como equidistante de *A* y *B* y conjeturan en donde debe estar *M* según el tipo de triángulo.

Aspectos descriptivos:
Habían construido un triángulo isósceles conde C estaba en el corte de la mediatriz de AB con la circunferencia de centro en M y radio MA. Habían construido incorrectamente la mediatriz del lado BC de dicho triángulo, por tanto no pasaba por M. habían discutido si M era o no el centro del triángulo construido. En este episodio por sugerencia de la profesora Felipe retoma la discusión sobre si *M* tiene que estar en el centro del triángulo. Afirman que no necesariamente el corte de las mediatrices debe estar en el centro del triángulo, por ejemplo M puede estar en el punto medio de uno de los lados del triángulo.

330	Profesora:	[…]
343	Felipe:	Es que *M* no necesariamente tienen que ser el punto medio, ¿cierto profe?
344	Profesora:	Del triángulo
345	Felipe:	Podemos hacer nosotros las mediatrices de acuerdo como salgan y *M* es otra mediatriz que es la mediatriz que va acá arriba, no siempre tiene que pasar por acá
346	Cristian:	¿No puede ser también en un triángulo equilátero? ¿Podría ser también un isósceles? o ¿un escaleno?
347	Sergio:	[…]
349	Cristian:	*M* podría ser punto medio de un segmento [se refiere un lado del triángulo]
350	Felipe:	No necesariamente tiene que cortar por *M,* eso es lo que les trato de decir

Actividad demostrativa:

- **Generalizar:** según el tipo de triángulo, M varia. No tiene que ser M el centro del triángulo. [343-350]

Argumentación:

- Argumento [343-350]

Episodio 13: Sergio explica que *M* es el centro de la circunferencia

Aspectos descriptivos:

La profesora ayuda a Sergio a justificar su idea. Es decir que *C* debe estar en un punto tal que *M* es el centro del triángulo. Sergio insiste en que como *M* equidista de *A*, *B* y *C* tiene que ser el punto centro del triángulo, aunque no equidiste de *P* (pensando en el circuncentro), pero Felipe afirma que no, porque *M* no equidista de *P* (es decir tiene una idea diferente de centro del triángulo). Sergio trata de justificar que M sí es el centro del triángulo aunque no equidiste de P.

351	Profesora:	[…]
362	Profesora:	De los extremos de los otros dos lados del triángulo. Utilicemos eso [se refiere a que M debe equidistar de los extremos de los lados del triángulo]
363	Sergio:	Por eso. Es que eso era lo que yo iba a hacer. Si este [M] equidista aquí [A] y equidista acá [B], también tiene que equidistar acá [C], [Con el compás hace centro en *M* y compara las distancias que hay desde *M* hasta *A*, *B* y *C*, y afirma que *M* equidista de *A*, *B* y *C*] esa era mi teoría
364	Felipe:	Pero no le dio
365	Profesora:	Explícales y convéncelos. Pero puede que de pronto fue la construcción la que no te ayudo. Pero eso es válido
366	Felipe:	Eso fue lo que hicimos ahorita
367	Profesora:	Trate de explicarles bien a ellos bien lo que les quieres decir [Sergio repisa la circunferencia con centro en *M* y radio *MA*]
368	Sergio:	[…]
371	Sergio:	Bueno, si *M* es el punto de equidistancia de *B* y de *A*
372	Profesora:	Sí
373	Sergio:	También tendría que ser el punto de equidistancia de *C* para que al sacar las tres mediatrices corten en ese punto que es *M* y *M* tendría que ser el centro. Pero, en la construcción que hice ahorita tratando de probar mi teoría, no me dio… [por errores de construcción]
374	Felipe:	Porque *M* no es el centro, no le dio porque *M* no es el centro
375	Profesora:	Vuelve y hazla, ¿qué era lo que tú estabas haciendo?
376	Sergio:	O sea es que supuestamente, las tres mediatrices de un triángulo no importa el triángulo que sea, isósceles, escaleno o equilátero, cortan en un punto, ese punto tendría que ser *M*,

		pero como *M* no es el punto centro del triángulo, entonces estoy tratando de probar que sí es el punto centro del triángulo, a pesar que aquí no da lo mismo que acá [se refiere a que no son iguales las distancias de *M* a *P* y de *M* a *C*] […]

Actividad demostrativa:

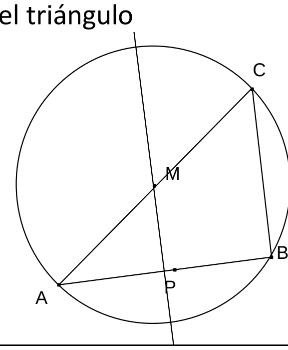
- **Explicar:** Sergio explica su teoría [363, 373, 376]

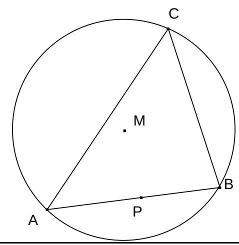
Argumentación:

- Argumento [371-374]

Episodio 14: Proponen otro lugar para ubicar *C*.

Aspectos descriptivos:
Proponen que *C* puede estar en un punto arbitrario de la circunferencia de centro *M* y radio *MA*, pero no comprueban si sirve.

376	Sergio:	[…] Pero, estoy viendo la forma de si esta construcción no es, si toca sacar un triángulo isósceles, o sea meterlo aquí [repisa la circunferencia de radio *MA* señalando un punto en ella, justo encima de *B*] y después coger acá…
377	Felipe:	Pero cortaría por *M* y *M* seria otra mediatriz [con los dedos señala un lado del triángulo que pasa por *M*]
378	Sergio:	Y después hacer el triángulo 
379	Felipe:	¡Ahí sí! Porque aquí daría, vea. Este sería un corte de la mediatriz, [señala el segmento que se forma uniendo *A* con *M* y prolongándolo hasta cortar la circunferencia] Esa sería una mediatriz de un lado. Este sería el corte de la otra mediatriz del otro lado [señala el punto *P*, punto medio de *AB*] y aquí… [Señala a *B*] […]
380	Sergio:	[…]
388	Sergio:	¡Venga hagámoslo así!, hagámoslo punto arbitrio, yo creo que es así, cualquier punto tiene que dar [le quita la hoja a Felipe]

389	Profesora:	¿Cualquier punto en dónde?
390	Sergio:	En la circunferencia [marca un punto arbitrario en la circunferencia de radio *MA*]
391	Profesora:	¿Puedo tomarlo como *C*?
392	Sergio:	Puedo tomarlo como *C*
393	Sergio:	Dios mío a la de Dios Felipe [une *A* con el punto arbitrario *C* y *C* con *B* para formar el triángulo *ABC*] 
394	Profesora:	[…]
398	Profesora:	Dale

Actividad demostrativa:

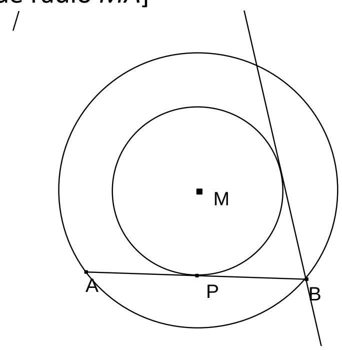
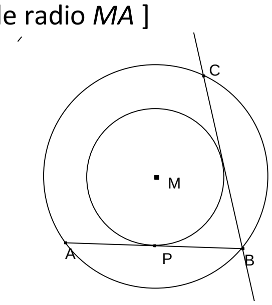
- **Explorar:** hacen una construcción en busca de una solución [376-379]
- **generalizar:** proponen que ubicando a *C* en cualquier punto de la circunferencia con centro en *M* y radio *MA*, debe funcionar [388-390]
- **Verificar:** Dice que va a comprobar si funciona su conjetura pero no lo hace. [393]

Episodio 15: Proponen que *C* esté en el corte de las rectas tangentes a la circunferencia con radio *MP* trazadas por *A* y *B*

Aspectos descriptivos:

Parten de una figura en la que tienen el segmento AB, el punto medio de AB, llamado P, la circunferencia de radio MP. Esta circunferencia la habían trazado para porque M debía ser el centro del triángulo ABC, es decir equidistar de A, B y C. Con tangentes, trazadas a ojo, a la circunferencia de radio *MP* y centro en *M*, intentan construir un triángulo circunscrito para que *M* sea el centro del triángulo. Suponen que dicho punto se encuentra en el corte de las rectas tangentes con la circunferencia de radio MA. Como no les da, cambian de idea y toman solamente la tangente construida desde B. Unen el punto A con el punto de intersección de la tangente con la circunferencia de radio MA, para ubicar el vértice C. trazan la mediatriz de BC, pero como no pasa por el vértice A, dicen que no funciona.

399	Sergio:	[…] lo que pasa es que toca hacer esto. Tiene que cortar por esta circunferencia [de radio *MP*] y cortar en lo que de, por

		ejemplo hacemos esto… [Traza ,a ojo, una recta tangente a la circunferencia de radio *MP* desde *B,* hasta que corte la circunferencia de radio *MA*] tiene que cortar y donde de, dios mío que me dé [al hacer la otra tangente pero desde A no coincide con el corte de la primera tangente con la circunferencia de radio *MA*]  Bueno hágamele ahí donde dio este [como la segunda tangente no funcionó, para cerrar el triángulo traza un segmento desde *A* hasta el corte de la primera tangente con la circunferencia de radio *MA*] 
400	Daniel:	[…]
401	Cristian:	Ahí de pronto si da
402	Sergio:	[Construye arcos de centro B y C y radio cualquiera que se intersecan a un lado del segmento, por fuera del triángulo. Aún le faltan dos arcos para trazar la mediatriz. Une con la regla el corte de los arcos y *M*] Sí dio, sí dio, dios mío…
403	Cristian:	[…]
406	Sergio:	[Mira si la recta trazada pasa por el punto A] No dio Estoy tratando de comprobar si lo que yo digo es cierto ¿ya? [dice que no da porque la mediatriz no pasa por A][borra el triángulo]
		[…]
408	Felipe:	Pero ya lo comprobó y no es cierto
409	Sergio:	De pronto si es cierto
410	Felipe:	Ya van tres de tus teorías que han fallado

Actividad demostrativa:

- **Explorar:** trazan dos tangentes, pero como no se cortan, cambian de idea y construyen solo una tangente, por *B*. [399].
  Trazan una de las tangentes (a partir de B) y luego unen A con el corte de la tangente con la circunferencia de radio MA y centro en M y completan el triángulo ABC. Intentan hacer la mediatriz de *BC*, pero hace solo dos arcos con centro en B y C a un lado del segmento [402].

- **Verificar:** Unen el corte de los arcos trazados para encontrar la mediatriz de BC con M y comprueban que no pasa por A [406]

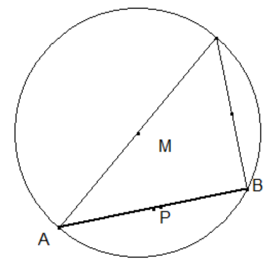
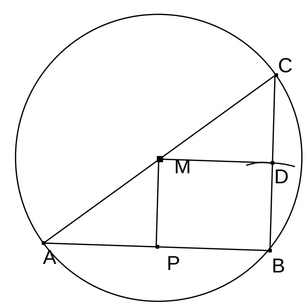
Argumentación:

- Argumento [402, 406]

Episodio 16: Felipe retoma la propuesta para construir *C* sobre la circunferencia con centro en M y radio MA. Justifica porque ese si es el triángulo que resuelve la tarea.

Aspectos descriptivos:
Tenían el segmento AB, el punto M y una circunferencia construida con centro en M y radio MA. Proponen unir *A* con *M* para encontrar a *C* en la intersección de la recta *AM* con la circunferencia de radio *MA* y centro en *M*. Justifica que funciona el triángulo pues *M* es punto medio de *AC*, *D* es punto medio de *CB* y *P* es punto medio de *AB*. El punto medio de CB lo encuentran copiando la medida de MP desde B, sobre el lado BC. No construye mediatrices.

411	Sergio:	[…]
418	Felipe:	Pues como habían dicho que cualquier punto ubi… es que no me sé explicar [en otra hoja Felipe tenia construido una circunferencia de radio *MA* con centro en *M*. Unió *A* con *M* y donde este segmento corte la circunferencia está el otro vértice del triángulo que luego lo une con *B*. No marca el punto *C*. Ahora coge el compás y hace centro en *P* (punto medio del segmento *AB*) y radio *PM*]
419	Profesora:	¿Qué cualquier punto de dónde?
420	Felipe:	El punto *M* un corte en cualquier lado de la mediatriz del triángulo, entonces…
421	Profesora:	O sea que tu ibas hacer un triángulo en el cual *M* estuviera en uno de los lados
422	Felipe:	Aja o sea que esa sería una mediatriz de un lado [Se refiere a que AC es un lado y también su mediatriz]
423	Daniel:	Ese es el medio [se refiere al punto medio de uno de los lados del triángulo]
424	Sergio:	De dos lados, o sea que solo faltaría un lado, eso fue también lo que trate de descubrir
425	Felipe:	Pero es que yo iba a decir esto [mide el segmento *PM* y lo copia

		sobre el lado *BC* del triángulo desde *B*] y ahí ya tendríamos el punto medio [de BC] de todos los… [Se refiere a que en el triángulo que construyó, todos los lados ya tienen el punto medio, *M*, *P* y el nuevo corte que encontró] 
426	Sergio:	Es que *M* tiene que ser el punto medio de todo. ¿Cierto? ¡Sí dio Felipe!, ¡sí dio!
427	Felipe:	¿Qué?
428	Sergio:	Su teoría dio. Ah, no le dio Felipe. ¿Le digo por qué? porque tiene que pasar por *M* a un punto y el contrarío de éste es éste, el contrarío de este punto es éste, el contrarío de éste o sea del punto, no espere [Está comparando cada vértice con el punto medio del lado opuesto] El punto medio es este ¿cierto? Si o pa' que, pero tiene que cortar con… así sí, no da profe, no da
429	Profesora:	[…]
431	Felipe:	[Construye un triángulo en el interior del triángulo *ABC*, uniendo *M*, *P* y el punto medio del lado *BC*] 
432	Sergio:	[…]
433	Felipe:	¡Mucha pepa!, ¡profe! Bueno hicimos un triángulo, ¿Cómo es que se llamaba ese circulito? Bueno hicimos una circunferencia con radio *M*…
434	Sergio:	¡Ah! Pero es que el triángulo tiene que ser *ABC*
435	Felipe:	¡Ah! *MA*
436	Profesora:	¿Dónde está *C*? ¿Cuál sería el triángulo?
437	Felipe:	Acá [señala el corte de la recta *MA* con la circunferencia y lo marca con la letra *C*] entonces hicimos una circunferencia y con… ¿cómo sacamos esto? ¡Ah! para sacar *C* tomamos una línea, una perpendicular que pasara por *A* y por *M,* entonces esa línea que pasara por acá iba a formar un triángulo, iba a formar un punto *C*, y de *B* a *C* se trazaba el otro lado. Entonces *M* ya era

		el punto medio de una... de una recta [señala el lado *AC* del triángulo]
438	Profesora:	[…]
440	Profesora:	¿Y porque sé que es punto medio del lado *AC*? [se refiere al punto M]
441	Felipe:	Porque tiene la misma medida de acá a acá y de acá a acá [señala las distancias *MA* y *MC*] Entonces nosotros antes habíamos hecho un triángulo el cual nos dio y teníamos la mitad que era *P* y con la medida *PM* sacamos la mitad de *BC* y sacamos un triángulo cualquiera que se uniera con punto *M*, *P* y …punto *D* [nombra el punto medio de *BC* con la letra *D*]
442	Sergio:	[…]
453	Felipe:	Porque tendría que dar en el punto medio de acá, ¿si me entiende? [se refiere al punto medio del lado *BC*] Yo, mi teoría es la siguiente: como dice que una mediatriz es una equidistancia del segmento *AB* entonces esta distancia que hay entre *AP* es la misma que hay entre *BP* entonces esta distancia tendría que ser igual acá [*MP*] entonces este sería un punto equidistante [*M*] y este también [*D*] [compara la distancia de *MP* con *PB* y dice que son iguales por eso *M* y *D* son puntos equidistantes]
454	Profesora:	Bueno esta distancia es igual a esta [se refiere a *AP* y *PB*] entonces bueno este [*P*] es punto medio
455	Felipe:	Esta [AM]es igual a esta [MC]y esta [CD]es igual a esta [*DB*]y esta [AP]es igual a esta [PB]…o sea que sería un punto equidistante o sea que ya tendríamos las tres mediatrices

Actividad demostrativa:

- **Explicar:** Describe cómo encontró los puntos medios de los lados del triángulo. [418-425] Describe cómo hace el triángulo en el interior del otro triángulo. [431], [433-437]

Argumentación:

- Argumento [426-428]
- Argumento [440,441]
- Argumento 453-455]

Episodio 17: Construyen, por sugerencia de la profesora, la mediatriz de un segmento cualquiera para comprender como se hace con los lados de un triángulo.

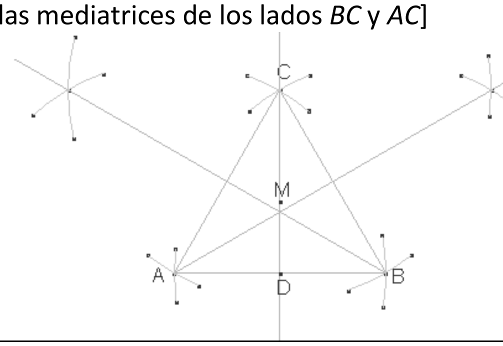
Aspectos descriptivos: Recuerdan con ayuda de la profesora cómo construir la mediatriz de un segmento, pues en los anteriores episodios, no construían correctamente las mediatrices de los lados de los triángulos que proponían como solución de la tarea. Divagan y no comprenden cómo construir las mediatrices de los lados de un triángulo, pues para ellos el triángulo debe tener todos sus lados congruentes para poder construir las mediatrices.

479	Profesora:	Recordemos algo. Si tengo este segmento por acá

		[dibuja un segmento en un borde de la hoja] ¿Cómo le construyo la mediatriz a este segmento *EF*?
480	Sergio:	Pues fácil haciendo esto [toma el compás y hace los arcos]
481	Felipe:	Con radio *EF* se saca una… ¿para qué hace? eso es solo hacer una equis
482	Sergio:	Toca también hacerla abajo o sino con que saldría. Listo
483	Felipe:	Esta sería la mediatriz [une las intersecciones de los arcos construidos]
484	Profesora:	Bueno entonces eso lo hicieron para un segmento, ¿cierto? Entonces ahora aquí tenemos un triángulo que vamos a ver si sí se cumple para ese triángulo. Tengo tres segmentos ¿cierto? Porque no le hallo las mediatrices a ese triángulo para verificar si *M* es el corte de las mediatrices?
485	Felipe:	Pero como lo vamos a hallar profe, si no es un triángulo que tenga sus lados iguales
486	Profesora:	¿Es que tiene que tener todos los lados iguales?
487	Felipe:	No se
488	Profesora:	Entonces verifiquemos para ese que tenemos ahí, a ver si sirve o no sirve

Episodio 18: Construyen las mediatrices de un triángulo equilátero *ABC*.

Aspectos descriptivos: En la hoja de Sergio, él tenía construido un triángulo equilátero. La profesora pide construir las mediatrices del triángulo utilizando el ejemplo de la mediatriz de un segmento. Observan que las mediatrices no se cortan en *M*, sino más abajo.

539	Profesora:	[…]
549	Felipe:	[Tiene construido un triángulo equilátero ABC, y la mediatriz de AB. Luego construyen arcos y unen las intersecciones para construir las mediatrices de los lados *BC* y *AC*] 
550	Felipe:	Pero tienen que pasar por *M*
551	Profesora:	Ahora sí construyeron las mediatrices

552	Felipe:	¿Si ve?
553	Profesora:	Y no pasan por *M,* pero ya las construyeron, es que antes ustedes estaban trazando triángulos y decían que no servía pero en ningún momento estaban las mediatrices construidas, como para decir que no. Acá si puedo decir que no porque mire el triángulo y mire el corte de las mediatrices acá, entonces que proponen para que este corte no sea acá abajito sino sobre *M*. […]

Actividad demostrativa:

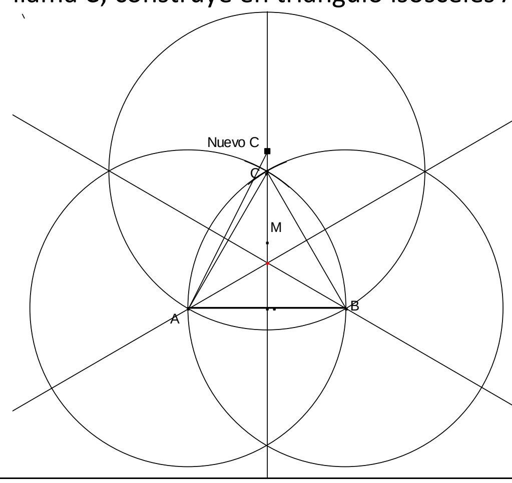
- **Verificar:** La profesora pide verificar si el triángulo equilátero funciona o no, con la construcción de las mediatrices [553]

Episodio 19: Como en el triángulo equilátero *ABC* las mediatrices no se cortan por *M*, entonces, proponen construir un triángulo isósceles diferente al anterior (episodio 18)

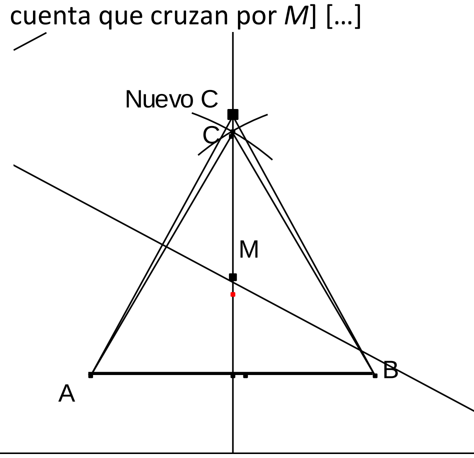
Aspectos descriptivos:

Construyeron un triángulo equilátero y sus mediatrices, el corte de las mediatrices quedó por debajo de *M*. Proponen tomar la longitud del segmento con extremos en *M* y ese corte para ubicar a *C* por encima de vértice del triángulo equilátero. Por casualidad, para este nuevo triángulo, la intersección de las mediatrices sí pasa por *M*. Resuelven así la tarea, pero no justifican por qué funciona.

553	Profesora:	[…]¿Qué proponen?
554	Felipe:	Agrandar más el segmento *AB*
555	Profesora:	¡Ah! bueno lo único que pueden [mover] es a *C;* pero a *A* y a *B* no los pueden mover.
556	Felipe:	Tocaría bajar a *C.*
557	Sergio:	Tocaría subirlo, esa era mi teoría.
558	Felipe:	Y ¿cómo lo vamos a subir? ¿Con una medida arbitraria? ¡No… espere! Tomemos esta medida que hay de acá a acá [se refiere a la distancia que hay de *M* a la intersección de las mediatrices del triángulo equilátero *ABC*].
559	Sergio:	Y la subimos.

560	Felipe:	[…]
563	Profesora:	Entonces *C* quedaría ahí arribita ¿cierto?
564	Sergio:	Prolonguemos ésta [mediatriz de AB] muchachos, préstenme una regla. […] [construye un nuevo punto sobre la mediatriz y lo llama *C*; construye en triángulo isósceles ABC]. 
565	Felipe:	Hagámoslo en una hoja nueva
566	Sergio:	[…]
569	Sergio:	No, espere, guardemos este espacio [mide con el compás la distancia que hay desde *M* hasta el corte de las mediatrices] Hagámoslo acá. [En otra hoja en blanco, calca los puntos *A*, *B*, *C* y *M*] ¡Ya! Mire, lo hice. Dios mío que sirva. [Une los puntos y construye el triángulo *ABC,* isósceles]. Acá vamos a trazar las mediatrices, hagamos las circunferencias completas. [Traza las mediatrices] ¡Felipe dio! Mire, lo que hicimos fue esto. Hicimos las tres circunferencias del punto *C* punto *B* y punto *A*. ¡Profe si dio! Hicimos las tres circunferencias si, como podemos ver *C* corta en *A* y en *B*, *B* corta en *A* y en *C*, bueno *B* no corta en *C*. Bueno acá ya sabemos que la mediatriz de *AB* ya está que es la unión de este y éste, la unión de éste sería éste [Se refiere a la intersección de los arcos para trazar las mediatrices de los lados *CB* y *AC*]. Felipe, necesito ayuda, volvamos a hacerlo porque es que uno se confunde.
570	Cristian:	¿Usted que está intentando hacer?

571	Sergio:	Probar que lo que dice Felipe es cierto [Toma otra hoja en blanco y calca los puntos *A*, *B C* y *M*] Mira profe, me confundí pero ya pase los puntos a esta hoja [traza el triángulo *ABC* y une a *C* con *M* para trazar la mediatriz]
572	Cristian:	[…]
574	Profesora:	¿Ahora van a construir las mediatrices de los otros dos lados?
575	Sergio:	Sí, porque aquí ya tenemos la mediatriz de éste, del lado *AB*
576	Profesora:	[…]
580	Sergio:	[…] [toma la regla y une los cortes de los arcos] ¡ahí si pasa!
581	Cristian:	¿Si dio?
582	Sergio:	Si pasa.
583	Profesora:	Listo ya tienes dos mediatrices, te falta otra mediatriz
584	Sergio:	[…]
594	Sergio:	[traza los otros dos cortes al otro lado de *BC*] ¡Dio Felipe, maestro dio!
595	Felipe:	[…]
598	Felipe:	No, yo le explico que yo fui el inventor. Ya había un punto *AB* [señala el segmento AB] sacamos la mediatriz, después trazamos un triángulo [equilátero]. Antes de este procedimiento habíamos trazado un triángulo, el cual estos cortes que están acá daban acá [se refiere al corte de las mediatrices] daban más abajo.
599	Profesora:	¿Y era por qué? ¿Por qué *C* en dónde estaba ubicado?

600	Felipe:	*C* estaba un poco más abajo.
601	Sergio:	Lo que construimos primero era un triángulo equilátero, y no era un triángulo equilátero, era un triángulo isósceles, entonces lo construimos aquí [señala donde estaba inicialmente el punto *C*].
602	Profesora:	Entonces *C* originalmente estaba aquí abajito, pero ¿cómo sabían que tanto lo iban a correr? Y ¿por qué hacia arriba?
603	Felipe:	Porque los cortes que hicimos nos daban más abajo, entonces de lógica hicimos, *M* estaba ubicado acá entonces nos dio por acá abajo, entonces tomamos la misma medida de este punto a *M* y la subimos, pongámosle *C* antiguo la subimos a donde estaba…entonces tomamos la medida y tomamos otro *C* nuevo…
604	Profesora:	¡Ah! Ya.
605	Felipe:	Y entonces de ahí hicimos el mismo procedimiento de antes, que fue trazar la perpendicular. Eso la mediatriz, los mismos lados y ya, entonces las tres mediatrices cruzan por *M* […]
606	Sergio:	[…]
608	Sergio:	[…] [Construye las mediatrices del triángulo isósceles y se da cuenta que cruzan por *M*] […] 
609	Profesora:	Pero justifique, hagámoslo acá nuevamente y justifiquemos por qué ese poquito que subía acá era lo que tenía que subir ese vértice para que me diera
610	Sergio:	Porque no necesariamente tiene que ser un triángulo equilátero. Porque como *M*…
611	Felipe:	Podría ser cualquier triangulo no necesariamente tiene que ser… [equilátero]

Actividad demostrativa:

- **Explorar:** Proponen subir *C* sobre la mediatriz, la misma distancia que hay desde *M* hasta la intersección de las mediatrices del triángulo equilátero. [557-569]
- **Verificar** Van a comprobar que la estrategia es cierta, construyendo las mediatrices de los lados del nuevo triángulo. [571-575] [592][618]
- **Explicar:** Felipe comenta a sus compañeros y a la profesora como encontró el vértice *C* del triángulo [598-603]

Argumentación:

- Argumento [601-603].
- Argumento [609-611]

TRANSCRIPCIÓN 1º TAREA

GRUPO DE LEYDI

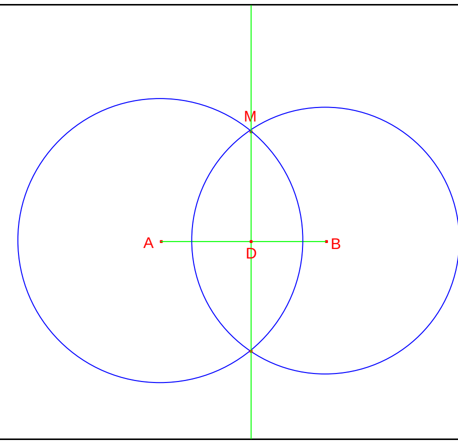
(Leydi, Mafe, Nicolás , Julián)

Los estudiantes hacen dos construcciones a medida que hablan; una, la hacen Leydi y Mafe (Hoja 1) y otra Julián y Nicolás (Hoja 2).

Episodio 1: Construyen la mediatriz del segmento dado e identifican su punto medio. (Por parte de Leydi y María Fernanda (Hoja 1)

Aspectos descriptivos:
Hacen una primera interpretación del enunciado comentando que deben construir un triángulo. Para ello, construyen la mediatriz del segmento *AB*, usando regla y compás, identifican el segmento *AB* como un lado del triángulo y caracterizan el tipo de triángulo que piensan construir (equilátero).

1	Mafe:	Bueno dice: En la figura, el punto M es el punto donde se cortan la mediatrices del triángulo… del triángulo ABC, y AB es un lado del triángulo. Construya un triángulo que tal… que tal que M sea el corte de las mediatrices.
2	Leidy:	Pues…
3	Julián:	[…]
4	Leydi:	Hagamos un triángulo… primero, ¡es que no se! Primero hallemos la mediatriz, ¿no?
5	Julián:	[…]
7	Leydi:	O sea que toca hallar… o sea que si ya tenemos una… hallemos la de abajo…, o sea si ya tenemos la de…. O sea que si ya tenemos la de…
8	Mafe:	De AB, la mediatriz de AB.
9	Leydi:	Sí. Por eso, mira; según esto, M es la mediatriz; o sea que toca hallar la otra [en la hoja 1, traza la mediatriz de AB que pasa por M; para ello hace centro en los puntos A y B, y distancia AM. El corte de la mediatriz con AB lo denotan con D].

		
10	Julián:	[…]
12	Leydi:	No, mira, tienes que darle… o sea… tienes que tomar la distancia de D [punto medio de AB] a M
13	Mafe:	¡Ah ¡ Si, si.
14	Leydi:	Para saber cuál es la de abajo [señala el corte de los arcos de circunferencia], o sino no te va a dar igual.
15	Mafe:	Pero, se supone que ésta... ésta era la mediatriz [señala el punto M] de esto [señala AB]; aquí se sacó la mediatriz.
16	Profesora:	Este es el segmento [señala AB] y este punto está sobre la mediatriz [señala M].
17	Mafe:	[…]
22	Leydi:	Listo… Entonces… eh; ya tenemos la mediatriz del ángulo AB y AB es el lado… entonces…

Actividad demostrativa:

- **Visualizar:** (nivel perceptivo) identifican el segmento AB como un lado del triángulo. [22]
- **Explorar:** En busca del triángulo que necesitan [4-9]
- **Explicar:** cómo trazar los arcos para construir la mediatriz [12, 14]

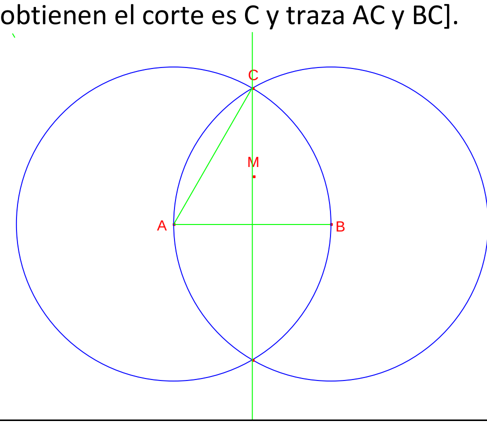
Argumentación:

- **Argumento de explicación:** asegura que para construir la mediatriz se deben hacer arcos iguales debajo del segmento AB [12, 14]

Episodio 2: Construyen la mediatriz del segmento dado, como posible solución. (Por parte de Julián y Nicolás)

Aspectos descriptivos:

Proponen y desarrollan una primera estrategia para abordar el problema, es decir, construyen un triángulo equilátero trazando un arco con centro en el punto A y radio el segmento *AB* para ubicar el vértice *C* en el corte de dicho arco con la mediatriz.

10	Julián:	Uhm, me imagino que tiene que ser equilátero ¿no?
11	Nicolás:	Sí, ¡me imagino!… ¿por qué? Porque
21	Julián:	Espere… a este punto pongámosle C [señala el corte de los arcos con centro en A y B con distancia AM y BM y la mediatriz de AB]… Entonces… [Traza la mediatriz de AB que pasa por M y por C].
23	Profesora:	[…]
26	Leydi:	¡Ah!, ya. Y con solo… si… no… mira, mira lo que hicieron ellos [Jul, NIc]. Como en la mediatriz cualquier punto… ese equidista con los extremos
27	Mafe:	Pues ellos sacaron la mediatriz de AB e hicieron el triángulo. [Señala el triángulo ABM]
28	Julián:	[…]
31	Leydi:	No, pero mira que ahí está mal [Señala que la recta construida como mediatriz no pasa por M; Julián había tomado mal la medida BM]
32	Mafe:	Al sacarle la mediatriz de AB
33	Julián:	Espérate… espérate porque es que tome la medida del compás mal.
34	Leydi:	Y M está sobre la mediatriz.
35	Julián:	[…]
39	Julián:	Tome la medida desde el punto A.
40	Leydi:	Al punto C [corte de los arcos con distancia AB con centros A y B] y B, y listo.
41	Julián:	[…] [En la hoja 2, traza el arco con centro A y distancia AB y centro B distancia AB, obtienen el corte es C y traza AC y BC]. 
42	Leydi:	O sea que lo que hicimos fue tomar la medida del punto A, de la distancia de AB y copiarla, ¿para sacar C?
43	Nicolás:	Para sacar C.
44	Mafe:	Por eso, la mediatriz de AB.

Actividad demostrativa:

- **Generalizar:** Si el triángulo ABC es equilátero entonces se resuelve la tarea [10,41]
- **Explicar:** Comentan como encontraron el vértice C [42-43]
- **Verificar:** construyen la mediatriz de AB para comprobar que pasa por M, pero les queda mal construida, entonces cambian de radio [31-33]

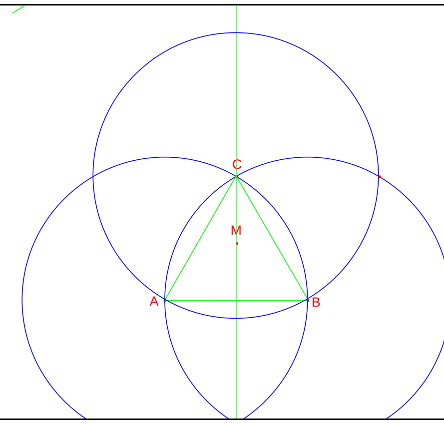
Argumentación:

- Argumento 31-33]

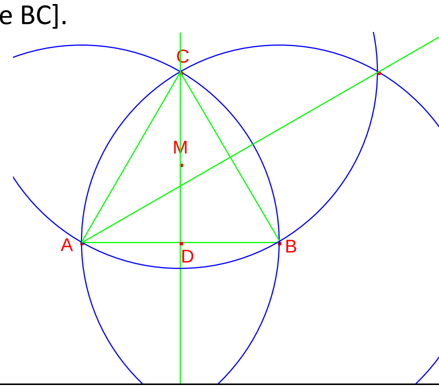
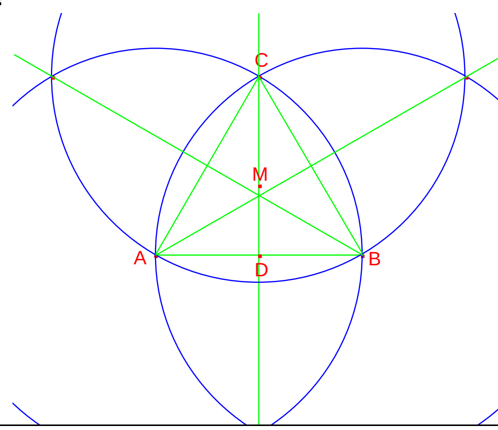
Episodio 3: Construyen las mediatrices del triángulo equilátero construido a partir del segmento dado.

Aspectos descriptivos:
Construyen las mediatrices de los lados del triángulo equilátero construido en el episodio 2, pero como éstas no se intersecan en *M*, inicialmente afirman que la construcción de las mediatrices está mal hecha; después de repetir la construcción varias veces aceptan que las mediatrices no se intersecan en *M.* Descartan la estrategia.

45	Julián:	Ahora saque la mediatriz de CB y de AC.
46	Nicolás:	¡Ah! Ya le entendí.
47	Leydi:	[…]
50	Nicolás:	[…] [En la hoja 2, Traza los arcos con centro en B y C y distancia BC procurando exactitud].
51	Julián:	[…]
53	Nicolás:	Luego, unimos los puntos [se refiere a las dos intersecciones de los arcos trazados y traza la mediatriz de BC].

		
54	Profesora:	¿Cómo hicieron para encontrar C? [Pregunta al grupo en general refiriéndose al punto C de la hoja 2].
55	Mafe:	Sacamos la mediatriz del punto, los puntos AB. [se refiere a la mediatriz del segmento AB]
56	Nicolás:	Sacamos la mediatriz del segmento AB.
57	Leydi:	Después tomamos la dis.., la medida de AB con el compás, y la copiamos en cualquier punto de la mediatriz; eh… hallando C, unimos A con C y B con C, y ahora estamos hallándole la mediatriz a B con C.
58	Julián:	Y luego le sacamos la mediatriz a BC.
59	Profesora:	¿Para comprobar qué?
60	Leydi:	Para comprobar que…
61	Nicolás:	Que… que el punto M es el… es la intersección de todas las mediatrices.
62	Julián:	Del triángulo. [Se refiere al triángulo ABC].
63	Nicolás:	Pero esto quedo mal [las mediatrices no cortan en M]. Uhm…

64	Leydi:	Nos descachamos.
65	Julián:	Es que la tomó mal. Vea [Muestra que no cortan en M] se salió. Por qué no lo hace con un… es que esa mina está muy gruesa, ¿no?
66	Nicolás:	[…]
69	Julián:	Dale, cópialo tú ahí con ese compás a ver cómo te queda [Le habla a Leydi, y ella inicia una nueva construcción con su compás de precisión en la hoja 1]. Espere… pues… intentemos acá [Le habla a Nico y señala hoja 2]. Présteme este borrador [En la hoja 2, tratan de hacer coincidir el corte de las mediatrices en M, modificando algunos milímetros la intersección de los cortes de los arcos].
70	Mafe:	Pero ahí si se cortan [acepta la aproximación]
71	Julián:	Sí, sí, sí, yo digo que sí, es que Nico como que la tomó mal.
72	Nicolás:	Usa el otro compás.
73	Julián:	Espérese y probamos… probemos con el otro lado [Inicia el proceso para trazar la mediatriz de AC].
74	Nicolás:	¡Ah! Vea. [En la hoja 2, No se cortan las mediatrices en M].
75	Mafe:	[…]
77	Leydi:	No, mira que a mí tampoco me da en el punto. [En la hoja 1, las mediatrices no se cortan en M].
78	Julián:	Espérate porque es que Pira tomó la mediatriz aquí mal [se refiere a que no trazo los arcos con exactitud y por eso la mediatriz no pasa por M]. Espera volvamos a hacer ese [repetir el proceso de trazo de la mediatriz].
79	Leydi:	No… mira que no da en el punto M [señala hoja 1].

80	Julián:	Espérate un momento, vamos a volver a tomar [hacer] el proceso.
81	Mafe:	Oye, qué hiciste? [pregunta a Jul]
82	Leydi:	¿Sacaste la mediatriz ahí? [Señala la mediatriz de BC en hoja 2].
83	Julián:	Okey, ¿ahí?..espérate y volvemos a hacer la mediatriz.[en la hoja 2, repiten el proceso de hallar la mediatriz de BC]
84	Leydi:	Pero no, da abajo [la mediatriz de BC pasa más abajo del punto M y no sobre él].
85	Julián:	Es que Nico la tomó mal. [En la hoja 2, Repite el proceso de construcción para la mediatriz de BC]. 
86	Leydi:	[mientras trabajaban Jul y Nic en la hoja 2, Ley trazó la mediatriz de AC en la hoja 1]¡No da! 
87	Nicolás:	No da…

88	Julián:	¡Ah! pues es que le… y… ¿entonces? Nos toca buscar otro proceso.

Actividad demostrativa:

- **Verificar:** comprueban que la conjetura es cierta trazando las mediatrices de los lados del triángulo, varias veces pues no cortan por M. [58-62] [69-71] [73-77] [78-88]
- **Explicar:** comentan como encontraron el vértice C [54-57]

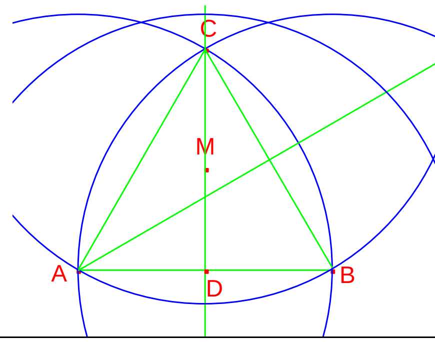
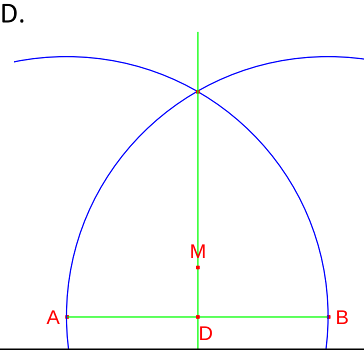
Argumentación:

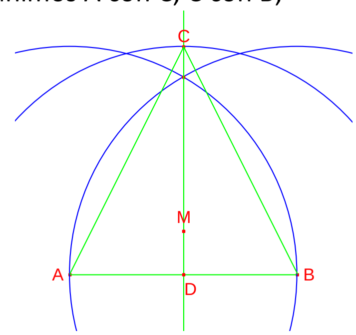
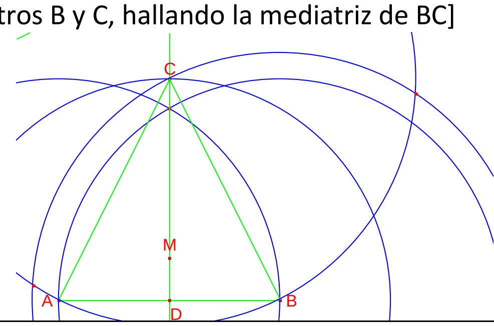
- **Argumento** [63-65] [77-78] [84-85] [88]

Episodio 4: Proponen construir un triángulo isósceles donde la base sea el segmento dado y la altura a partir de la base sea de igual medida de la base.

Aspectos descriptivos:
Proponen que *C* este en la mediatriz del segmento *AB* pero que el lado *BC* tiene que ser más largo que el lado *AB* para que *M* sea el corte de las mediatrices; reubican al punto *C* como vértice de un triángulo isósceles con altura congruente a la base del triángulo (segmento *AB*) y verifican si cumple el enunciado construyendo las mediatrices de los lados *BC y AC*, pero se dan cuenta que éstas no se intersecan en *M*.

89	Leydi:	¡No! entonces… ¡ah!, ¡changos!
90	Mafe:	Hay que hacer algo con el punto M entonces
91	Leydi:	Entonces, el problema ahí es que esto está muy pequeño, o sea... [Señala distancia de M a C].
92	Mafe:	¿C con M no? La mediatriz de estas dos [señala la mediatriz de AB]; porque si no nos da con el punto C y con el punto B… con el A ni con el C
93	Leydi:	Es que, ¡mira! acá lo que nos está… o sea… supongamos no nos da acá [En la hoja 1, señala M], es que BC y AC no tienen la misma medida de AB, o sea ésta es más larga [señala BC], para que nos de este [señala M]… o sea que lo que toca...
94	Mafe:	Saquemos mediatriz de CB, a ver que…
95	Leydi:	¡No! porque al sacar la [tercera] mediatriz no vamos a hacer nada ahí.
96	Mafe:	¡Ah! porque tiene que pasar… si.
97	Nicolás:	Esta medida [en la hoja 2, señala AB] es ésta [señala BC] ¿Cierto?... Entonces, para comprobar bien, nos paramos aquí en el punto medio [D]. ¡Claro! Es que mira; yo tomo la distancia del segmento AB y me paro en el punto medio [de

		AB] y no da [en la hoja 2, toma el compás y con distancia AB y centro D, marca un arco en la mediatriz de AB, mostrando que para que el triángulo sea equilátero debe medir lo mismo AB y DC, por lo cual se debe reubicar C en este corte]. 
98	Leydi:	¡Por eso es que no nos da la mediatriz!, ¡ah! Entonces ahí la embarramos, nos toca borrar.
99	Julián:	Nos toca prolongar la recta AC y la recta BC. [Borran la construcción realizada en la hoja y hoja 2].
100	Mafe:	Y después hacer la medida como tú [Jul] la hiciste con el compás [centro en el punto medio de AB y distancia AB] para saber dónde queda el punto, el punto C.
101	Julián:	[...]
102	Nicolás:	La mediatriz, voy a hacer una mediatriz [...]
103	Julián:	[...]
104	Leydi:	[inicia una nueva construcción en la hoja 1, trazando arcos con distancia AB y centros A y B]Mira... mira... éste [corte de la mediatriz de AB con AB] nombrémoslo el punto D. 
105	Nicolás:	¡Ah! Bueno, ¡listo¡
106	Leydi:	Entonces, toca tomar la medida de AB...
107	Mafe:	Y ponerla [la punta del compás] en el centro [de AB, punto D] para sacar la medida de DC.
108	Leydi:	Ponerla en el centro de D para sacar la medida de DC, entonces
109	Mafe:	AB pones en el punto D y sacas C [Centro en D distancia AB y corte con la mediatriz de AB] punto C.

110	Leydi:	Y ya hallamos C. Ahora unimos A con C, C con B;  ahora sí hallémosle las mediatrices, a C y B [en la hoja 1, traza arcos con distancia BC y centros B y C, hallando la mediatriz de BC] 
111	Julián:	[…]
114	Leydi:	No, tampoco nos da [las mediatrices no cortan en M]

Actividad demostrativa:

- **Anticipar:** Si el triángulo se construye de tal forma que DC=AB entonces se resuelve la tarea. Es decir el segmento BC más largo que el segmento AB [93,97]
- **Generalizar:** C está en la mediatriz de tal forma que DC=AB [100,106,107, 198, 109]
- **Explicar:** de cómo encontrar C [106,107,109]
- **Verificar:** construyen mediatrices para comprobar si pasan por M [110,114]

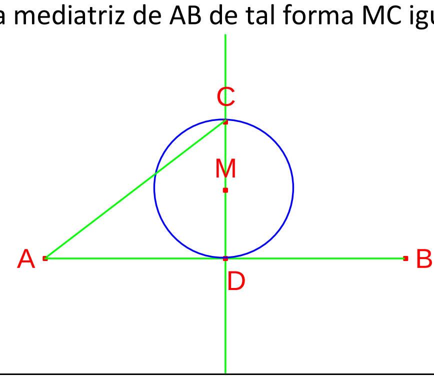
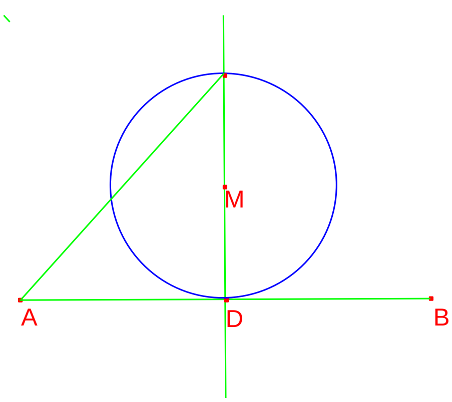
Argumentación:

- **Argumento** [93]

Episodio 5: Exploran en un nuevo triángulo donde C esta sobre la mediatriz y DM es igual que MC. No comprueban si funciona, pero caracterizan la mediatriz de AB y el punto D (punto medio).

Aspectos descriptivos:
Proponen otra estrategia para encontrar *C*, ubicando el punto medio del segmento AB, el cual denominan *D* y haciendo que *DM=MC.* Abandonan la idea porque el profesor hace un cuestionamiento sobre las condiciones que debe tener el triángulo para que cumpla el enunciado

del problema y esto genera que la exploración quede inconclusa. Al final, verifican que en el triángulo isósceles construido en el episodio 4 *AC=CB* y *AD=DB*.

<table>
<tr><td>123</td><td>Julián:</td><td>Vamos a cambiar la mediatriz de AC, este es el punto C</td></tr>
<tr><td>124</td><td>Mafe:</td><td>[…]</td></tr>
<tr><td>132</td><td>Nicolás:</td><td>¿Qué hacemos?</td></tr>
<tr><td>133</td><td>Leydi:</td><td>Pues ahora mira, si tomamos la distancia, si tomamos la distancia de D a M [trabaja sobre la hoja 2]</td></tr>
<tr><td>134</td><td>Julián:</td><td>O sea, esta distancia [En la hoja 2, señala DM]</td></tr>
<tr><td>135</td><td>Mafe:</td><td>Y de M a C</td></tr>
<tr><td>136</td><td>Leydi:</td><td>Y de M a C, tiene que cumplir ¿no?</td></tr>
<tr><td>137</td><td>Julián:</td><td>Pues probemos, présteme un borrador [borra la construcción de la hoja 2 y ubica a C sobre la mediatriz de AB de tal forma MC igual a MD]

</td></tr>
<tr><td>138</td><td>Leydi:</td><td>A ver si de pronto así nos da, no? [borra la construcción de la hoja 1 y copia la distancia MD en la mediatriz de AB, marca el corte y lo une con A y B]

</td></tr>
<tr><td>139</td><td>Mafe:</td><td>Pero aquí ya no sería igual a AB [señala a DC]</td></tr>
<tr><td>140</td><td>Leydi:</td><td>No, no si, si sería igual, espera, ¡ah! No [se refiere a que Ab es diferente de CD]</td></tr>
<tr><td>141</td><td>Mafe:</td><td>No, no sería igual [se refiere que DC diferente de AB]</td></tr>
</table>

142	Profesor:	Podríamos establecer ¿cuáles son las condiciones para que las mediatrices se corten en ese punto M?,¿ cuáles son las condiciones para el triángulo?, para que las mediatrices se corten en un punto M, ¿cuáles serían?
143	Leydi:	[…]
145	Julián:	Equilátero
146	Nicolás:	No, porque ya hicimos uno
147	Profesor:	[…]
149	Julián:	Que sea congruente, el triángulo
150	Leydi:	Pues sí eso es obvio, que este sea congruente con este [señala a CA y CB]
151	Julián:	O sea los segmentos, los segmentos del triángulo sean congruentes, no el triángulo sino segmentos del triángulo sean congruentes
152	Leydi:	[…]
153	Julián:	Por eso entonces aquí no estarían congruentes estos dos [señala CA y CB]
154	Leydi:	Pero mira que...
155	Profesor:	¿Cómo verifico si eso es verdad?[…]
156	Nicolás:	Pues primero porque toca comparar el segmento AD con el segmento DB y yo sé que estos dos segmentos unen un segmento que es el segmento AB, pero el segmento [AB] lo divide la mediatriz que siempre pasa por el punto medio, por eso sé que estos dos segmentos son iguales. Esto, el segmento AC y el segmento BC son iguales porque están... el punto C está ubicado en la mediatriz
157	Leydi:	Y todo punto ubicado en la mediatriz equidista del …
158	Nic	Equidista, del segmento donde está la mediatriz, por eso estos dos son iguales [señala CA y CB]
159	Profesor:	Ahora, ¿cómo hiciera para que el segmento BC o el segmento AC, tuviese una mediatriz la cual pase por el punto M?, ¿cuáles son las condiciones para que eso ocurra?
160	Leydi:	Pues yo creo que al pasar, por eso hice esa.., al pasar ésta medida [señala CD] acá al lado [señala CA], ah no, ya no nos va a dar la mediatriz ahí, nos va a dar como por aquí [señala debajo de M], o sea que este [señala el triángulo construido en la hoja 1] está mal
161	Mafe:	[…]

Actividad demostrativa:

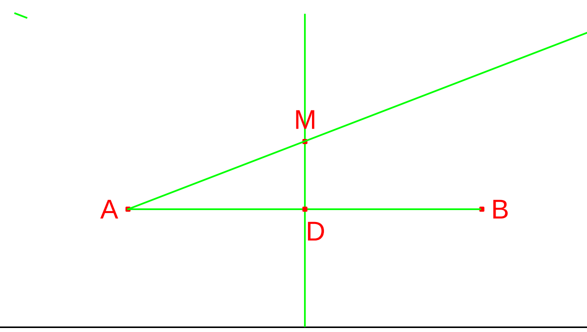
- **Explorar:** Proponen como ubicar C [133-138] [160]
- **Probar:** Justificaciones tipo prueba. Los segmentos AC y BC son congruentes y los segmentos AD y DB también. Lo justifican basados en las propiedades de la mediatriz. [156]

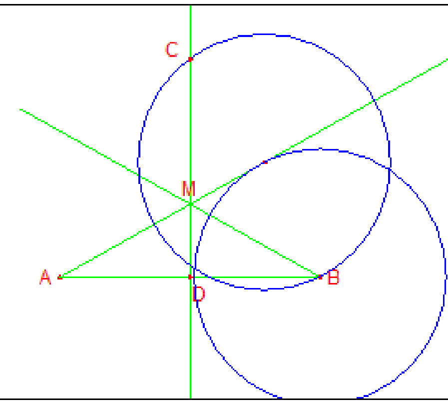
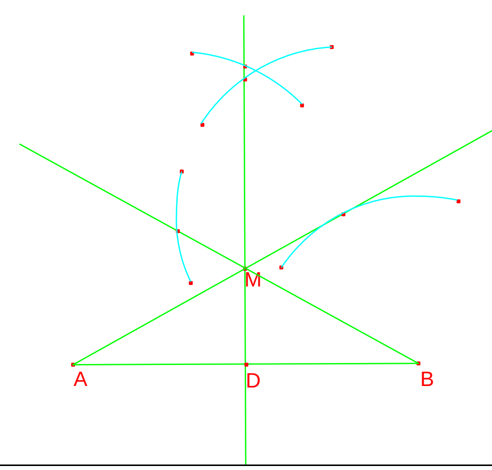
Argumentación:

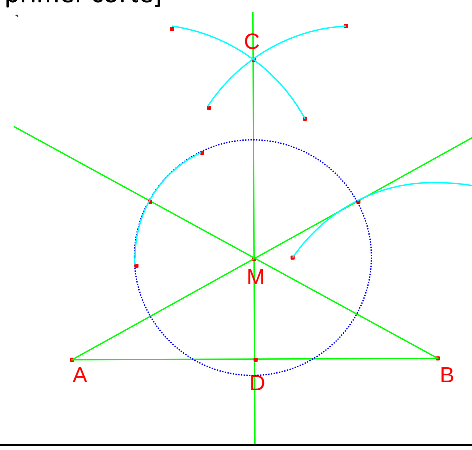
- **Argumento teórico:** [156]

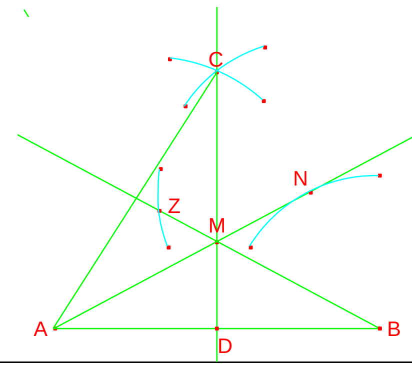
Episodio 6: Realizan una exploración para que en el triángulo ABC, el vértice C quede sobre la mediatriz de AB.

Aspectos Descriptivos:
Encuentran un punto *C* sobre la mediatriz del lado *AB*, utilizando otra estrategia: hacen circunferencias perceptualmente tangentes a los rayos *AM* y *BM* con centros en *A* y en *B*; haciendo centro sobre los puntos de "tangencia" (*G* y *H*) hacen arcos con radio igual a la distancia del vértice al punto de "tangencia" respectivo; ubican a *C* en el corte de ambos arcos, el cual se encuentra sobre la mediatriz del lado *AB*; así, los "puntos de tangencia parecen ser los puntos medios de los lados *AC* y *BC*.

178	Nicolás:	Yo lo que digo es, hacer una línea del punto A al punto M, que pase por el punto M, si, luego tomar de B a donde pasa la línea [señala M] y copiarla [sugiere MC]
179	Leydi:	¡Ah! ya entendí, unir AM y unir BM
180	Julián:	[...]
185	Julián:	No, no espérense ponemos bien esto [En la hoja 2, traza AM y BM y los prolonga] 
186	Leydi:	[...]
190	Nicolás:	[...] [hacen arco con centro en B y tangente al rayo AM a ojo] Entonces yo vengo y me paro acá [en el corte del arco con el rayo]
191	Leydi:	Nos toca escogerlo ahí [usa la misma medida y con centro en el punto de tangencia, hace una circunferencia que corte a la mediatriz de AB]
192	Nicolás:	Y copio el mismo segmento; entonces si quedara el punto acá [señala C]

		
193	Leydi:	Si
194	Nicolás:	[…]
195	Leydi:	No porque no estamos seguros si acá [señala el punto A, el rayo BM y el corte realizado con el proceso anterior] nos da ahí también. Pero que tal que no, toes.. no, si si si, si está bien
196	Maf	[…]
201	Julián:	Voy al otro lado [inicia con centro en A], digamos acá [traza un arco con centro en A y distancia igual que la del anterior proceso, y marca el corte con el rayo BM] y acá [traza otro arco con centro el corte del rayo BM e igual distancia que corte la mediatriz de AB] [repite el procedimiento desde A]
202	Nicolás:	Primero el punto no da en la mediatriz [el corte de los dos arcos en la mediatriz de AB no es el mismo] [otro C]
203	Julián:	[…]
209	Leydi:	Hasta ahí ya vamos bien, ya sabemos que están iguales, ahora [traza un arco con centro en B que sea tangente al rayo AM, con centro en el punto de tangencia, traza un arco con la misma distancia que corte en la mediatriz de AB y en el rayo BM] 
210	Nicolás:	Pero el punto no da en la mediatriz [del segmento AB]
211	Leydi:	Ah si, espera,..

212	Mafe:	y ahora mídelo acá [señala el rayo BM]
213	Julián:	Es que tomaste mal el de acá [el corte del rayo BM. Punto de tangencia]
214	Mafe:	Sí
215	Julián:	Lo tomaste muy hacia allá
216	Leydi:	[Traza un arco con centro en B que sea tangente al rayo AM, con centro en el punto de tangencia, traza un arco con la misma distancia que corte en la mediatriz de AB; luego, con centro en M y distancia el punto de tangencia al rayo AM, traza el arco que corta en el rayo BM. Con centro en el corte del rayo BM y radio igual que el arco tangente, traza un corte con la mediatriz de AB, el cual coincide con el primer corte] 
217	Julián:	[...]
218	Leydi:	Mira que ahí si ya nos dio [los cortes de los arcos que cortan la mediatriz de AB, coinciden en un mismo punto], o sea lo que estábamos...
219	Julián:	[...]
220	Nicolás:	Ese es el punto C [nombran con C al punto de intersección de los arcos con la mediatriz de AB]
221	Leydi:	[...]
225	Julián:	[Nombran con N y Z los cortes con los rayos AM y BM] Deben ser congruentes [AN congruente con NC y AZ congruente con ZC]
226	Leydi:	Espera, únalos
227	Julián:	Lo uno de una vez?
228	Leydi:	Si, con C
229	Julián:	[Jul va a trazar el segmento AZC, pero no puede porque comprueba con su regla que no son colineales] No, no puedo
230	Leydi:	¿No? ¿no da?
231	Julián:	No da
232	Leydi:	Tonces.. ah

233	Julián:	Algo hicimos mal
234	Leydi:	Si, algo hicimos mal, espera, ¿cuál fue el punto que nos dio? [traza los segmentos AC y BC] 
235	Mafe:	Ahora toma las medidas de A y de B a ver si son iguales
236	Julián:	Mira a ver si éstos son iguales [señala BN y NC]
237	Julián:	[Ley compara con el compás BN y NC] si son iguales
238	Leydi:	No, mira acá [muestra que los arcos que trazó con el compás no cortan en los puntos]
239	Mafe:	Ahí son iguales no?
240	Julián:	No, no son iguales
241	Leydi:	[…]

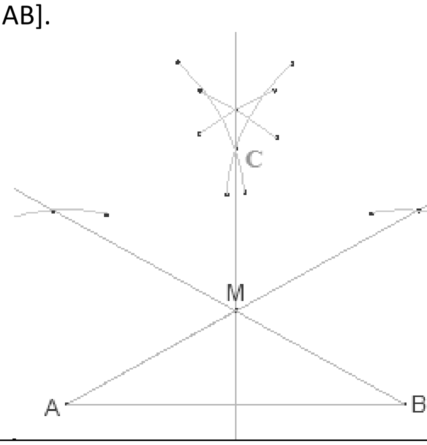
Actividad demostrativa:

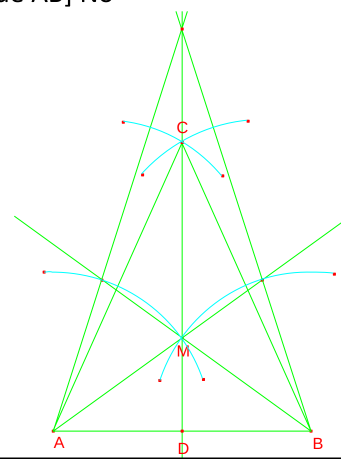
- **Explorar:** Todo el episodio constituye una exploración por parte de los estudiantes.

Episodio 7: Trazan **arcos** con centro en A y B con radio AM que corten los rayos AM y BM, y trazan arcos de igual radio con centro en los cortes para que corten la mediatriz de AB y ubicar C.

Aspectos descriptivos:
Al revisar la construcción del episodio 6 encuentran un error pues los puntos de “tangencia” no son respectivamente colineales con los vértices del triángulo. Repiten la construcción tomando como puntos de “tangencia” los cortes de los rayos *AM* y *BM* con los arcos con centro en *A* y en *B* y radio *AM* y *BM* respectivamente. Verifican que de esta forma tampoco consiguen que los puntos de “tangencia” sean colineales con *A y C* y *B y C* respectivamente.

247	Mafe:	[…]
255	Mafe:	¿Por qué no hallas B primero? [pregunta a Ley que está trabajando en la hoja 1]

256	Nicolás:	Listo, ahora si probamos con un triángulo que no sea isósceles, que no sea equilátero?
257	Leydi:	Que no sea..
258	Maf	Ah, si señor
259	Nicolás:	Porque si ya probamos con un equilátero, ¿por qué no probamos con otro que no sea equilátero?
260	Jul	Isósceles
261	Leydi:	Pero como sabemos, cómo hacemos para saber las medidas del otro?, o sea..
262	Mafe:	[Leydi traza los rayos AM y BM] Yo digo que tomes, o sea acá tiene las misma medida ¿cierto? [señala AM y BM]
263	Leydi:	Hay, sí
264	Mafe:	Toma la medida de MB y AM. Y no se toma de a..
265	Leydi:	No nos queda muy grande, está mal, nos queda muy grande [con centro en B y distancia BM traza un arco que corte en el rayo AM, y con centro en A y distancia AM traza un arco que corta en el rayo BM. Traza dos arcos con centro en los cortes de los rayos y distancia BM; cortan en un mismo punto en la mediatriz de AB]. 
266	Mafe:	Intenta a ver si nos da
267	Leydi:	No nos da en el punto exacto de la…[cortes de los arcos en la mediatriz de AB]
268	Mafe:	Ven, tómala bien [medida con el compás]. ¿Y de donde sacaste las medidas?
269	Leydi:	Si vez, ya sé por qué eso no nos funcionó[se refiere a que A, C y el corte en el rayo BM no son colineales], porque como no pasaba por ésta [señala un nuevo corte en el rayo BM colineal con A y C], pues la mediatriz… eh la ésta va cambiar [lado del triángulo]
270	Mafe:	Eh o sea, estos puntos de donde los sa… de donde los sacas? [señala los cortes en los rayos]
271	Leydi:	¿Estos dos?
272	Mafe:	Si

273	Leydi:	Mira, tomo la distancia de A, de B a A, tomo esa distancia y la copio en A [señala el rayo AM] y hay la llevo, y esto sí es medida arbitraria [las distancias para los cortes en los rayos], eso lo hice con la..creo que es que tuvieran uno de los puntos que cortaban en la línea [se refiere al rayo]
274	Mafe:	Pero si viste que acá cuando tomamos la medida de AM, y la pasamos acá [la mediatriz de AB] pues mira que..
275	Nicolás:	Por qué no unes el B con éste [señala el corte del rayo AM con el arco de centro en B y distancia BM] y haces una línea prolongada
276	Leydi:	[traza dos triángulos: El primero tomando C en el corte de los arcos trazados en 265, y el segundo, prolongando las semirrectas que pasan por A y B con los cortes en los rayos BM y AM, respectivamente, hasta que corten en la mediatriz de AB] No 
277	Julián:	No
278	Mafe:	No da
279	Leydi:	[…]

Actividad demostrativa:

- **Explorar:** compara las medidas de los segmentos AB, AC, MC y BC [265,275,276]
- **Explicar:** [273]

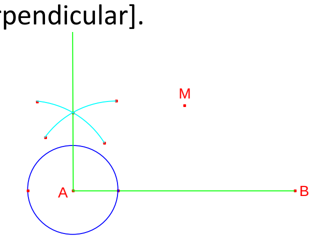
Argumentación:

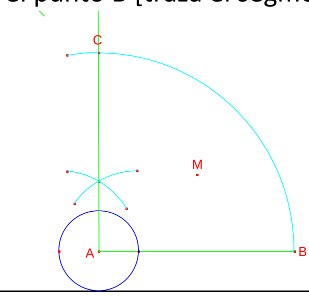
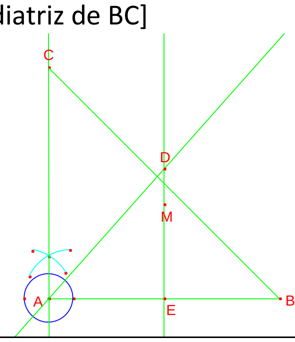
- **Argumento** [269]

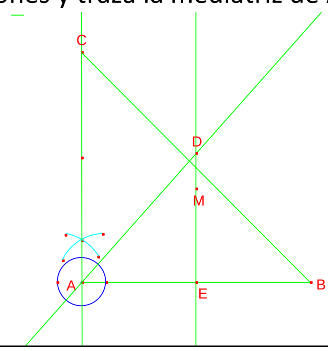
Episodio 8: Discuten acerca de si C debe estar o no en la mediatriz de AB

Aspectos descriptivos:

Comentan que *C* debe estar en la mediatriz del lado *AB* porque es necesario que *AC* y *BC* sean iguales; a pesar de ello, deciden encontrar *C* en la perpendicular al segmento *AB* que pasa por *A* de tal forma que *AB* = *AC;* de esta forma, construyen un triángulo rectángulo isósceles con *AC* = *AB* y ángulo *A* recto. Descartan la estrategia de construcción, pues al trazar las mediatrices no se intersecan en *M*, debido a que la abertura del compás se alteró al construir los arcos que determinan las mediatrices de cada lado del triángulo.

283	Profesor:	¿Es necesario que el punto C este en la mediatriz de AB?	
284	Leydi:	Que el punto C... sí, es necesario	
285	Profesor:	¿Por qué?	
286	Leydi:	porque el punto C es el que une las puntas de… o sea, une los extremos de… o sea, termina de formar el triángulo, al unirlos formamos el triángulo	
287	Profesor:	Pero, ¿Es necesario que pertenezca a la mediatriz de AB?	
288	Leydi:	No se	
289	Mafe:	Sí, es necesario porque están diciendo que M debe estar cortando la mediatriz [M sea el corte de las mediatrices], entonces pues tiene que estar [M] en el medio para poder cortar	
290	Julián:	[…]	
298	Leydi:	Es que AC y BC, deben de medir lo mismo, entonces al ponerlo en otra parte, pues ya no van a medir lo mismo, o AC va medir más o AB va medir más y ya no, o sea ya estaríamos hallando la mediatriz en otra parte	
299	Profesor:	Tu ¿qué piensas Nicolás?	
300	Nicolás:	Pues yo creo uhm.. pienso que no es necesario que el punto C este en la mediatriz	
301	Profesor:	¿Podrías hacer un ejemplo en el cual..	
302	Nicolás:	Sí, estoy, voy a hacer un ejemplo en el cuál C no esté en la mediatriz, a ver si me da las condiciones [Borra la construcción de la hoja 2, e inicia una nueva]	
303	Leydi:	¿Qué es lo que estás haciendo ahí?	
304	Nicolás:	[Inicia una nueva construcción haciendo el proceso para trazar una perpendicular en el punto A] Acá estoy levantando la perpendicular en el punto A [traza la perpendicular]. 	

305	Julián:	¡Ah¡ acá está.. [observa la perpendicular]	
306	Nicolás:	¿Sí?, Antes tome la medida del segmento AB, y con centro en A, puse la marca del punto C [sobre la perpendicular], o sea acá sería el punto C [corte del arco con centro en A y distancia AB con la perpendicular levantada sobre A], luego debo unir el punto C con el punto B [traza el segmento CB] 	
307	Leydi:	No te da	
308	Nicolás:	Espérate a ver, luego le saco la mediatriz del segmento AB [Traza dos arcos con centro en A y en B y distancias iguales AB], que tiene que pasar por M [une las dos intersecciones y traza la mediatriz de AB], luego le saco la mediatriz al punto [se refiere al segmento] BC, [Traza dos arcos con centro en B y en C y distancias iguales BC, une las dos intersecciones y traza la mediatriz de BC] 	
309	Julián:	No, no da	
310	Leydi:	No dio [las mediatrices no cortaron en M]	
311	Profesor:	¿Qué pasa con el corte de la mediatriz del segmento AC que tú tienes dibujado?	
312	Nicolás:	Del punto AC? [segmento AC]	
313	Profesor:	La mediatriz que pasa por el punto M, y corta al segmento AC, ¿en dónde marca?	
314	Leydi:	Uhm... marca... en la.. en la mitad de, donde se encuentran la..[señala el punto de corte de BC y su mediatriz, es decir el punto medio de BC]	
315	Nicolás:	Marca acá, debe marcar acá [señala el corte de la dos	

		mediatrices de AB y BC]	
316	Profesor:	La mediatriz que trazamos, que partía desde el punto B, que partía desde el punto B [señala la mediatriz de BC], y cortaba al segmento AC, ¿en dónde lo corta?	
317	Nicolás:	Ahí [señala el corte de la dos mediatrices de AB y BC), Esto es en el punto D (lo nombra con D]	
318	Leydi:	O sea que lo que está mal es esto [señala el punto C], no pero ahí toca…sí	
319	Julián:	Y esta? [señala el segmento AC]	
320	Leydi:	Ahí vas a sacar.. [Nic traza dos arcos con centro en A y en C y distancias iguales AC, une las dos intersecciones y traza la mediatriz de AC] 	
321	Jul	[…]	
325	Nicolás:	Las medidas están mal	
326	Julián:	[…]	
329	Profesor:	Cuando dices que están mal, ¿a qué te refieres?	
330	Nicolás:	Porque el corte de las mediatrices no dio un punto exacto [el corte de las mediatrices no dio en un punto por errores de precisión en la construcción]	
331	Julián:	No se ve el..[punto de corte de las mediatrices]	

Actividad demostrativa

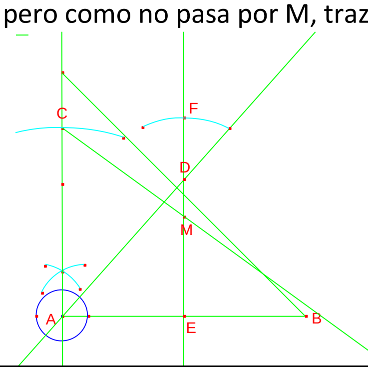
- **Explicar:** Cuando C está en la mediatriz el triángulo ABC es isósceles para cumplir la tarea [298]
- **Explorar:** Nicolás propone hacer un triángulo rectángulo isósceles donde AB=AC [304, 306]
- **Verificar:** Construyen mediatrices para comprobar si pasan por M [308-310, 320, 325]

Argumentación

- **Argumento** [283-289, 298]
- **Argumento** [325,330]

Episodio 9: Discuten las condiciones de un triángulo rectángulo que cumpla las condiciones de la tarea, llegan a un acuerdo pero desechan la estrategia por errores de construcción.

Aspectos descriptivos:
Por sugerencia del profesor, discuten las condiciones necesarias de la ubicación del punto *C* de modo que se logre que la mediatriz del segmento *AC* pase por *M.* Proponen ubicar *C* en la perpendicular del segmento *AB* que pasa por *A* a una distancia de *A* igual a dos veces la distancia de *DM* (*D* punto medio del segmento *AB*), pero descartan la estrategia al darse cuenta que de esta forma *C*, *M* y *B* no son colineales; esto ocurre porque al ubicar *C* se altera la abertura del compás (AC ≠ 2*DM*). Según los estudiantes, esta colinealidad debe ser condición necesaria de la construcción. Nuevamente por sugerencia del profesor, discuten cuál es el objetivo del problema.

332	Profesor:	¿Cómo hago para que ese corte con ese segmento AB, pase por M?, ¿cómo tendría que ser?, si la mediatriz es una perpendicular al segmento AC, y AC es un segmento vertical, ¿cómo haces para que pase por M?, debe ser más corto debe ser más largo [segmento AC], ¿por qué?
333	Leydi:	Pues como… tomando la medida de… de… [señala el punto medio de AB y lo nombra con E], pongámosle E, de EM y de M acá [con sus dedos muestra centro M y distancia EM], que podemos ponerle F [marca con F a la aproximación que hizo con sus dedos], y esa medida la podemos pasar acá, ya estaríamos hallando la..[señala AC]
334	Profesor:	¿Podrías hacerlo?
335	Mafe:	Pues yo creo que tiene que equidistar ¿no?
336	Leydi:	[toma la abertura del compás con centro en E y distancia EM y con centro en M traza un arco que corta la mediatriz de AB en F; luego toma la abertura del compás con centro en E y distancia EF y la copia con centro en A sobre la perpendicular a AB que pasa por A. Marca el nuevo corte como C e intenta trazar BC, pero como no pasa por M, traza CM y lo prolonga] 
337	Profesor:	¿La línea pasa sobre M? [segmento CB]

338	Leydi:	¿La línea pasa sobre M? [le pregunta a Maf]
339	Profesor:	Y si trazas la mediatriz de ese nuevo AC, ¿Qué pasaría?
340	Mafe:	Sí pasa sobre M
341	Leydi:	Sí pasa sobre M
342	Profesor:	Y eso, ¿qué significa?
343	Leydi:	Que ahí.. ya encontramos un punto, pero mira que aquí no me cuadró [muestra que al prolongar CM no pasa por B]
344	Profesor:	Es necesario que M siempre quede dentro del triángulo?
345	Nicolás:	No
346	Leydi:	Sí
347	Profesor:	¿Es necesario? ¿Por qué?
348	Leydi:	Porque es la mitad, o sea, es… la mediatriz es la mitad de…
349	Mafe:	Porque está cortando la mediatriz y la mediatriz es…
350	Profesor:	¿Qué es la mediatriz? Y ¿qué es el corte de la mediatrices?
351	Leydi:	Una mediatriz es...
352	Nicolás:	Es la asociación de puntos que equidistan del segmento
353	Profesor:	Es la asociación de puntos que equidistan del segmento y M es un corte de las mediatrices, es necesario que M esté dentro del triángulo?, ¿sí?, ¿no?, ¿por qué?
354	Profesor:	La tarea que debes hacer, ¿qué es?
355	Leydi:	Es hallar un… eh… la medida C o… que equidisten con M y AB
356	Profesor:	Ese punto C ¿está equidistando con M?
357	Leydi:	En el punto C? uhm… [revisa la construcción], si si si, está equidistando con M
358	Profesor:	¿Estás cumpliendo la tarea?
359	Leydi:	Sí
360	Profesor:	¿Por qué?
361	Ley	Porque… era que.. [revisa y lee] el punto M donde se cortan las mediatrices.. no, no la estoy cumpliendo
362	Profesor:	¿Por qué?
363	Leydi:	Porque… ahí lo que toca hallar es… o sea, que dentro del triángulo la mitad sea M
364	Profesor:	¿Eso dice la tarea?
365	Leydi:	No, la tarea dice que es el punto donde se cortan las mediatrices
366	Profesor:	Tienes que mirar ¿Qué en realidad dice la tarea? Y mirar ¿qué características tiene el punto M? y ¿qué características tienen las

		mediatrices? Para que puedas cumplir la tarea que te dicen
367	Mafe:	El punto M es el punto donde se cortan las mediatrices del triángulo ABC
368	Leydi:	Por eso
369	Mafe:	Entonces M si tiene que estar en... en… en la mitad [revisa la construcción inicial, es decir la del triángulo isósceles]
370	Julián:	En la mediatriz
371	Mafe:	Y AB es un lado del triángulo; construya un triángulo…
372	Profesor:	¿Por qué dices que tiene que estar [M], dentro del triángulo? O ¿por qué crees?
373	Mafe:	Porque… o sea, dice que tiene que el punto M es el punto donde se cortan las mediatrices del triángulo ABC, y pues, M pues, está en la mediatriz y la mediatriz está ya en el punto medio, sí
374	Profesor:	La mediatriz pasa por el punto medio
375	Mafe:	Pasa por el punto medio
376	Leydi:	Si, pasa por el punto medio
377	Mafe:	Pues se tiene que estar también en el punto medio para que, o sea, para que se pueda cortar, ¿si me entiendes? [habla con Leidy]
378	Leydi:	Es que acá [la construcción] hay un problema
379	Profesor:	Podrías mostrarme lo que tú dices con un ejemplo

Actividad demostrativa

- **Explorar:** Leydi ubica C sobre la perpendicular a AB que pasa por A con distancia dos veces ED [333, 336]
- **Verificar:** Ubican un nuevo C y al prolongar CM, comprueban que no se forma un triángulo [343]

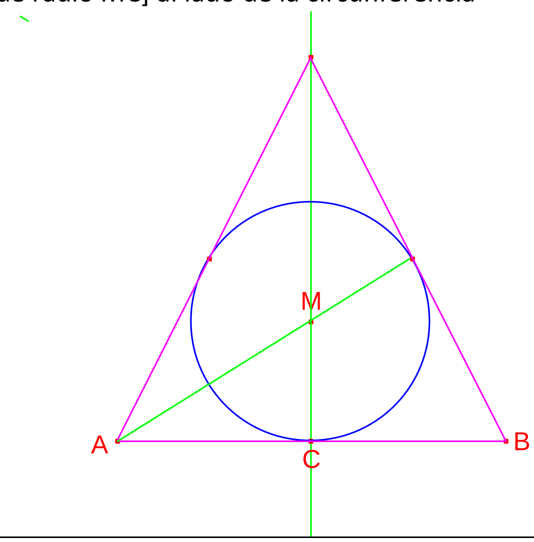
Argumentación

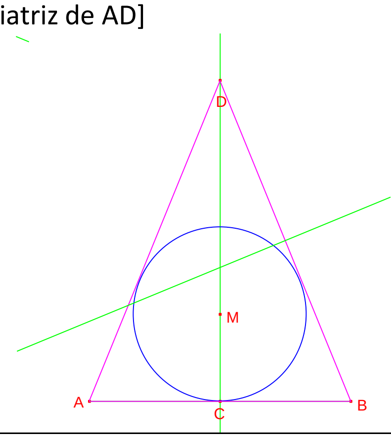
- **Argumento** [372-373, 377]

Episodio 10: Julián propone a C como vértice de un triángulo isósceles donde los lados iguales son tangentes a la circunferencia de centro M y distancia el punto medio de AB

Aspectos Descriptivos:
Proponen construir un triángulo isósceles cuyos lados congruentes sean tangentes a una circunferencia con centro en *M* y radio *MD*, (*D,* punto medio del segmento *AB*). Prolongan *AM* y *BM* y las toman como mediatrices. Para ubicar a C trazan rayos a partir de los vértices *A* y *B* que perceptualmente se vean tangentes a la circunferencia y ubican a *C* en el corte de dichos rayos con

la mediatriz del segmento *AB*. Por sugerencia del profesor, discuten si las mediatrices tienen que pasar por los vértices del triangulo. Construyen correctamente las mediatrices del triángulo *ABC* y observan que se cortan en un sólo punto que no es *M*.

380	Profesor:	¿Me puedes describir que acabaste de hacer? [habla con Jul que estaba haciendo otra construcción en la hoja 3]
381	Julián:	Pues estaba intentando hacer una circunferencia a partir del punto M, con la medida MC, sí [el punto medio de AB lo denotó con C], y pues intentar trazar las mediatrices, pues como arbitrarias, o sea, prolongar la recta AM, cierto, y pues intentar hacer unas tangentes aquí [corte del rayo AM y la circunferencia de radio MC] al lado de la circunferencia 
382	Profesor:	¿Por qué siempre que trazas las mediatrices pasan por el punto A o por el punto B? [vértices opuestos al lado]
383	Julián:	Porque cuando, es que no sé, o sea, tocaría, es que pensé, me imagino que si pasa por el punto B [vértice opuesto al lado] tendría que ser el triángulo equilátero, ¿no?, pues en este caso no es equilátero, entonces está mal; pues entonces estas mediatrices.. [señala el rayo BM]
384	Profesor:	Y si no es equilátero, ¿qué pasa con las mediatrices?
385	Julián:	Las mediatrices no pasan por los puntos B o A, o sea, digamos la mediatriz de…
386	Profesor:	Podrías darme un ejemplo donde las mediatrices no pasen por el punto B o por el punto A?
387	Julián:	Claro [Borra los rayos AM y BM]
388	Profesor:	Utilizando el proceso que tú sabes de hacer mediatrices, trata, de ese triángulo que tienes ahí, trazar las mediatrices de BC y de AC
389	Julián:	De BC [señala C]
390	Profesor:	¿Este punto como la llamas? El punto superior [señala el tercer vértice del triángulo que está sin nombrar]

391	Julián:	Este es el punto D [señala el tercer vértice y lo nombra D]
392	Profesor:	Entonces trata del punto, de las mediatrices de BD y de AD
393	Julián:	De BD y de AD
394	Profesor:	Y va, y vas a mirar que pasa
395	Julián:	El que había sacado antes [con centros B y D y distancias iguales, traza dos arcos de circunferencia que se cortan en dos puntos; une estos dos puntos y traza la mediatriz de BD; luego, con centros A y D y distancias iguales, traza dos arcos de circunferencia que se cortan en dos puntos; une estos dos puntos y traza la mediatriz de AD] 
396	Profesor:	Me puedes describir que pasa con las mediatrices del triángulo que acabaste de realizar
397	Julián:	Pues en este caso las mediatrices de BD y de AD, no pasan por encima del punto A o B, si?, pero, pues tienen acá un punto todos en común [señala el circuncentro]
398	Profesor:	[…]

Actividad Demostrativa:

- **Explorar:** Julián construye un triángulo isósceles con lados iguales tangentes a la circunferencia de centro en M y distancia MC [381]
- **Verificar:** Comprueban que en un triángulo isósceles las mediatrices no pasan por los vértices [386-397]
- **Visualizar:** Encuentran en la figura que las mediatrices de AB y BD tienen un punto en común [397]
- **Generalizar:** según el triángulo, pueden las mediatrices pasar o no por los vértices [382-385]

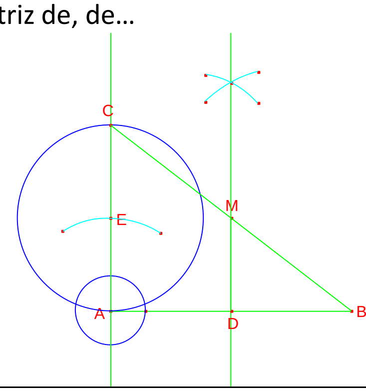
Argumentación:

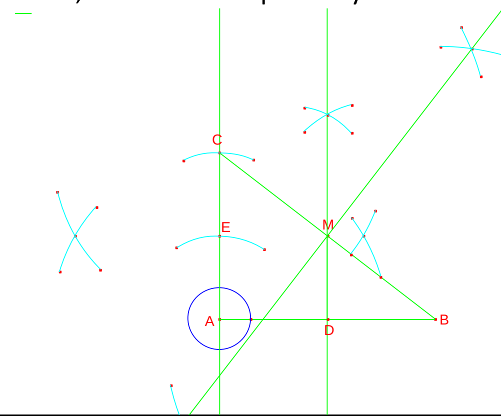
- **Argumento** [382-385].

Episodio 11: Leydi continúa con su estrategia del triángulo rectángulo con AC sobre la perpendicular a AB que pasa por A, la corrige y da solución a la tarea.

Aspectos Descriptivos:

Ubican a *C* sobre la recta perpendicular de *AB* que pasa por *A*, de forma que *AC* es el doble de la distancia *DM* (*D* es el punto medio del segmento *AB*) y *BC* pasa por *M*. El triángulo construido es rectángulo (con el ángulo *A* recto). La forma de determinar a *C* hace que la longitud del segmento *DM* sea la mitad de la longitud del segmento *AC* por lo que la mediatriz del lado *AC*, pasa por *M*. De esta forma, encuentran un *C* solución al problema.

401	Leydi:	[mientras que Julián contaba su estrategia en el episodio 10 Leydi continua con su estrategia en la hoja 1] Yo ya lo pude hacer [interrumpe su trabajo para mostrar su construcción en la hoja 1]
402	Profesor:	Muéstrame
403	Leydi:	Listo, lo primero que hice, una perpendicular
404	Profesor:	¿Perpendicular a?
405	Leydi:	A, eh…
406	Leydi:	El segmento AB y que pasa por el punto A. Luego..
407	Leydi:	Luego, tomo en el punto D [punto medio de AB], tome la medida a M [señala DM]; y la copié [en la perpendicular a AB que pasa por A], y DA [señala DM] encontrando E [punto de corte con la perpendicular con centro en A y distancia DM], después DE, eh… pues yo copié esta medida [DM] y la puse acá [centro en E y distancia DM] y encontré C, al encontrar C, uní A con E y con C [son colineales], uní C, M y B [son colineales] y ahí ya tengo el triángulo. Después halle la mediatriz de, de… 
408	Julián:	B y C [se refiere a BC]
409	Leydi:	No, ah… sí, de B y C [señala el segmento BC]; y la mediatriz de B y C, pasó por M, después..
410	Profesor:	Tienes la mediatriz de AB que pasa por M y tienes la mediatriz de BC que pasa por M, te haría falta cuál?. La mediatriz del segmento BC
411	Leydi:	No, no tengo.. eso me falta la mediatriz del segmento BC
412	Profesor:	¿Podrías trazarla?
413	Leydi:	[con centros B y C y distancias iguales, traza dos arcos de circunferencia que

		se cortan en dos puntos; une estos dos puntos y traza la mediatriz de BC] 
414	Mafe:	Pues no había que pasar por el centro
415	Julián:	Bueno entonces pues en este caso nos dimos cuenta que digamos C no era necesario que tuviera que estar en la mediatriz [de AB]
416	Leydi:	Y nos dimos cuenta que M no era necesario que estuviera en la mitad, sino podía estar en alguno de sus… lados [del triángulo ABC]

Actividad Demostrativa:

- **Explicar:** Muestra como ubico C [403-407]
- **Verificar:** Construye mediatrices para comprobar que se cortan en M [413]
- **Generalizar:** No es necesario que C este en la mediatriz de AB para que las mediatrices del triángulo se corten en M [415]
- **Visualizar:** M debe estar en la mitad del triángulo a sobre uno de sus lados [416]

Episodio 12: Toman las construcciones realizadas (triángulo isósceles y triángulo rectángulo) e intentan argumentar la solución de la tarea

Aspectos descriptivos:

El profesor hace diferentes preguntas acerca de las construcciones realizadas en los episodios en los que se hicieron triángulos isósceles y triángulos rectángulos, con el fin de que los estudiantes puedan justificar la solución del problema. Al responder las preguntas del profesor, los estudiantes establecen relaciones entre un triángulo y sus mediatrices.

417	Profesor:	Hay dos cosas que han dicho importantes, M no es necesario que este en la mitad y la otra es que el punto C tampoco debe estar en la mediatriz necesariamente. A partir de esas dos cosas que acabaron de decir y de estos dos tipos de triángulos que tienen ahí [la construcción del triángulo isósceles y la del triángulo rectángulo], los cuales cumplen la tarea que tenían que hacer, ¿qué pueden decir?

418	Julián:	[…]
421	Julián:	Los… o sea lo, o sea el tri.. las mediatrices del… la intersección de las mediatrices siempre tiene que estar o adentro o en los lados del triángulo, o en los segmentos del triángulo
422	Nicolas: y Julian:	Nunca se va a salir del triángulo
423	Julián:	[…]
424	Profesor:	¿Nunca va a estar por fuera?
425	Julián:	Siempre van a estar sobre los segmentos o, adentro del triángulo
426	Profesor:	Pero, ¿nunca fuera?
427	Julián:	En la intersección de las mediatrices, pero nunca fuera de él [triángulo ABC]
428	Profesor:	Tú, ¿qué podrías decir Mafe? o tú Leydi ¿qué podrías decir a partir del trabajo que hiciste?
429	Leydi:	Yo puedo decir que… o sea, ah… al hacer un triángulo de diferentes medidas las mediatrices son los extremos [pasan por los vértices], mientras que hacerlos con las mismas medidas nos dio en la mitad [el corte de las mediatrices dentro del triángulo], o sea, que eso muestra que, pudimos hallar la mediatriz [el corte de las mediatrices] de las dos formas, pero dio en diferente lado y casi con las mismas medidas
430	Profesor:	¿Qué más?, ¿Qué otra característica pueden ver en las mediatrices, tanto en el triángulo [rectángulo] que hizo Leydi, como en el triángulo [isósceles] que realizó Julián?, ¿qué otra característica podemos ver ahí?
431	Julián:	[…]
433	Julián:	Pues en los dos siempre las otras mediatrices del, digamos en este caso del segmento AD y del segmento BD, siempre se intersecan en el… sobre el segmento M [mediatriz de AB. Señala el circuncentro], sí.
434	Profesor:	[…]
447	Nicolás:	Que las mediatrices de cada uno de los triángulos nunca cruzan por los vértices
448	Profesor:	¿Será que nunca?, ¿cómo podríamos justificar eso?
449	Julián:	Que sí, ahorita se acuerda que..
450	Nicolás:	Ah, pues ahorita, pero según estos triángulos que, que están acá [señala las dos construcciones], no se cruzan en los vértices del segmento AB
451	Profesor:	[…]
453	Profesor:	¿Qué te permite garantizar eso?
454	Mafe:	[…]
457	Profesor:	Si quieren ubiquen los triángulos en la mitad y mírenlos, comparen qué características tienen, y traten de interpretar qué podrían decir a partir de esos dos ejemplos que hay ahí. Traten de ir diciendo características comunes de los dos, sueltas, a ver si llegamos a una conclusión general

459	Julián:	Bueno, pues la primer característica es que todos [mediatrices de los segmentos] se intersecan sobre la mediatriz de AB, sí; en los dos, en los dos triángulos, sí
460	Profesor:	Y so.. y que pasa sobre la mediatriz de A…; lo estas mirando a partir de la mediatriz de AB en el primer triángulo y en el segundo triángulo; ahora, miremos las mediatrices de CB, en los dos triángulos
461	Leydi:	Pues que en la [mediatriz] CB de este triángulo [construcción Ley triángulo rectángulo] si dio en M, mientras que en ésta [construcción Jul triángulo isósceles] no dio en M, ya que, y son.. y tienen la misma medida, o sea, ésta [señala CM triángulo Jul, segmento del punto medio de AB hasta M] es la misma medida y ésta [señala DM triángulo Ley, segmento del punto medio de AB hasta M] es la misma medida, pero no, no cruzaron, o sea este [señala su triángulo] si cruzó y este [señala triángulo Jul] no cruzó, entonces ahí el problema está en el..
462	Nicolás:	los ángulos
463	Leydi:	En AC y en AD [señala los segmentos de los dos triángulos], ¿por qué?, porque acá [segmento AC de su triángulo] la medida es muy distinta a ésta [señala CB en su triángulo] y ésta [segmento AC de su triángulo] medida es muy distinta a ésta [segmento AC del triángulo de Jul]; por eso a nosotras si nos dio y a ellos no, porque nosotras tomamos medidas distintas. Ellos trataron fue de hallar la mediatriz pero que todos fueran igua.., o sea, que estos dos fueran iguales [señala DA y DB en el triángulo de Jul] […]
464	Profesor:	Es decir que AB [hoja 1]es congruente con AB [hoja 2], pero AC [hoja 1] no es congruente con AD [hoja 2] ni DB [hoja 1] congruente con CB [hoja 2]
465	Leydi:	Exacto
466	Julián:	Exacto
467	Leydi:	O sea, éstos dos son congruentes [segmentos AB] eh..
468	Nicolás:	o sea, el segmento AB [hoja 1] es congruente con el segmento AB [hoja 2]
469	Mafe:	[...]
474	Nic	AC [hoja 1] no es congruente con el segmento AD [hoja 2]
475	Leydi:	éstos [señala BD en hoja 2] tampoco son congruentes con éste [señala AB en hoja 2], o sea, si nos damos cuenta, éste [segmento BD en hoja 2] es más grande que éste [AB hoja 2][con los dedos hace centro en B y distancia BD y la compara con BA sin quitar el dedo que está sobre B], o sea, éstos dos [señala BD y DA hoja 2] si son congruentes, o sea lo que ustedes trataron de hacer fue hallar que éstos dos [señala BD y DA hoja 2] fueran congruentes, lo que yo traté de hacer fue que estos dos.., de hallar de que éstos dos [señala AB y CB hoja 1] fueran congruentes, esa fue la diferencia
476	Mafe:	Sí
477	Julián:	Sí
478	Profesor:	¿Qué otra cosa podríamos decir de los extremos?. Estamos caracterizando lados, estamos caracterizando vértices, ¿qué pasa con las mediatrices?

479	Mafe:	[…]
493	Leydi:	Pues lo que pasa con las mediatrices, no tampoco… es que acá [hoja 1], ésta [mediatriz de AB] es la misma mediatriz de acá [mediatriz de AB hoja 2], son las mismas mediatrices; pero acá si ninguna se parece [señala las otras mediatrices de los dos triángulos], o sea..
494	Mafe:	[…]
501	Leydi:	Pues una característica es que para hallar la mediatriz, dos segmentos deben de ser iguales [en los triángulos]
502	Profesor:	[…]
507	Leydi:	CB y A...AB, son iguales [los señala en la hoja 1]
508	Profesor:	¿Por qué en este triángulo [Hoja 1] el segmento AB es igual al segmento BC?, muéstrame ¿por qué?
509	Leydi:	¿Por qué?, por las medidas [con el compás toma centro en B y distancia BA y la pone sobre BC]. Ah no, no son iguales
510	Nicolás:	No son iguales
511	Profesor:	¿Qué pasa? ¿Qué pasaría con eso? ¿es necesario que tengan un par de lados iguales? O no es...
512	Leydi:	[…]
515	Leydi:	Sí, que es necesario, no, no es necesario que sean iguales [lados del triángulo]
516	Profesor:	Todos los lados pueden ser…
517	todos	Diferentes
520	Mafe:	Pues lo que yo veo es que, éstos puntos [puntos medios de los segmentos], o sea, donde están las mediatrices, tienen la misma medida, digamos A con E, E con C; M con D, M con éste y con éste punto [cortes en las mediatrices de AB y CB], o sea, tienen la misma medida
521	Profesor:	Eso ¿es una característica de las mediatrices?
522	Leydi:	¿no?
523	Profesr:	¿cuál es la característica principal de las mediatrices?
524	Nicolás:	Que pasan por el punto medio del segmento
525	Leydi:	[…]

Actividad demostrativa:

- **Generalizar:** Dependiendo el tipo de triángulo, el corte de las mediatrices cambia de posición [429]
  Dada una mediatriz del triángulo, las otras dos mediatrices siempre se cortan sobre ella [433]
  Si el triángulo es escaleno las mediatrices pueden pasar por M, si es isósceles las mediatrices se cortan pero no en M [463]

- **Visualizar:** Las mediatrices del triángulo se cortan dentro o sobre los lados del triángulo pero nunca fuera de él [421-423]
  Las mediatrices de los triángulos nunca pasan por los vértices [447]

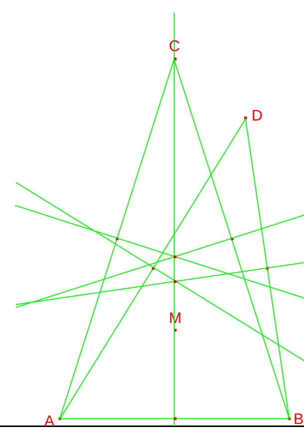
Argumentación:

- **Argumento** [463]

Episodio 13: Concluyen que las mediatrices de cualquier triángulo se cortan en un solo punto y lo justifican a partir de varios ejemplos.

Aspectos descriptivos:
Continúan caracterizando las construcciones del triángulo rectángulo en el cual las mediatrices pasan por *M* (episodio 11) y del triángulo isósceles cuyas mediatrices no lo hacen (episodio 10). Concluyen que las mediatrices de cualquier triángulo siempre se cortan en un solo punto. Lo aseguran basados en las dos construcciones realizadas y adicionalmente hacen otro triángulo más y trazan las mediatrices; a partir de esto, se percibe que justifican la conjetura de que las mediatrices se cortan en un solo punto, basados en varios ejemplos, pues intentan mostrar que si se cumple en algunos, se cumple en cualquiera.

555	Julián:	Bueno, pues una de las características también es que… o sea todas las mediatrices siempre se van como ah… como a encontrar en un punto, sí.
556	Profesor:	¿Eso es una característica general?
557	Julián:	Sí, una característica general
558	Profesor:	Dime ¿por qué?
559	Julián:	Porque, o sea cuando sacamos las... las mediatrices del, del triángulo, todos sus lados, pues las mediatrices se encuentran en un punto, si, ¿cómo lo explico? Eh… uhm… no sé cómo explicarlo
560	Profesor:	[…]
562	Profesor:	¿Qué dices Nicolás?
563	Nicolás:	Pues yo estoy de acuerdo que en tod... que en todas las mediatrices de un triángulo siempre se tienen que cruzar en un punto exacto
564	Profesor:	[…]
572	Julián:	Porque siempre se van a intersecar en un punto, ¿no?
573	Profesor:	¿Por qué?
574	Leydi:	Pues sí eso es cierto, siempre se va a inter… porque la mediatriz... o ¿no?... No, no siempre porque si nos dimos cuenta, en los que hicimos ahorita no no…, o sea en algunas si pasaba pero otras no
575	Profesor:	¿Me puedes dar un ejemplo de cuales no?
576	Leydi:	Eh…
577	Mafe:	Pero es que tomamos las medidas... de acá [señala los vértices A y B], ¿te acuerdas? [habla con Ley]
578	Julián:	y siempre todas se cruzaban en un mismo lado [habla con Nic]

579	Mafe:	o sea, le hacemos acá [señala el punto B y un punto arbitrario C e indica con el dedo su trazo] y le hacemos acá [señala el punto A e indica con el dedo su trazo hasta C]
580	Julián:	No, Leydi
581	Leydi:	No, no porque se acuerda que ustedes dije... [habla con Jul]
582	Julián:	No, siempre todas se cruzan en un lado
583	Nicolás:	siempre se cruzan
584	Julián:	o sea, me acordé porque la vez pasada la profe nos mostró un programa que ella tiene en el computador, ella hizo un triángulo todas con sus mediatrices y ella movía nada más este punto [señala un vértice], sí?; para cualquier lado que lo moviera las mediatrices siempre se cruzaban en un punto cualquiera
585	Profesor:	Puedes tratar de hacer lo que estás diciendo? puedes tratar de mover D?, ahí?; Trata, qué pasa si tu mueves D? qué pasa con ese punto [circuncentro]?
586	Julián:	Pero mover, moverlo en un lado cualquiera?
587	Profesor:	Ponlo en un punto y traza otro triángulo y mira a ver qué pasa
588	Julián:	Entonces por acá... la mediatriz… será… ¿que no me alcanza? [En la hoja 2, ubica un punto arbitrario, lo nombra D y une B con D y A con D. luego con centro en B y D y distancia BD, hace dos arcos y traza la mediatriz de BD; con centro A y D y distancia AB, hace dos arcos y traza la mediatriz de AD]. Jaja, que revuelto.. 
589	Nicolás:	Sí, sí se cortan [las mediatrices del nuevo triángulo en un solo punto]
590	Julián:	Sí, o sea, éste [circuncentro] es, es el otro corte
591	Profesor:	Y sobre ¿qué se cortan?
592	Julián:	Sobre la mediatriz de BC, de
593	Nicolás:	de AB
594	Julián:	de AB, perdón
595	Profesor:	Y a partir de eso, ¿qué podemos decir?
596	Julián:	¡Ah!
597	Leydi:	Pues que no, o sea, no cruzaron todas las mediatrices solo cruzaron dos, o sea que...
598	Julián:	Pero no porque mira, de todos modos la [mediatriz] de AB…

599	Nicolás:	siempre hay un punto de corte
600	Julián:	la de AB ya estaba mira, este es el punto de corte [señala el circuncentro]
601	Leydi:	Sí y ése [señala] es éste y éste el de acá, ¿dónde está? [confunde las mediatrices de los dos triángulos con bases iguales AB]
602	Nicolás:	O sea, éste es el de éste, éste es..[señala el corte de las tres mediatrices del nuevo triángulo]
603	Leydi:	¿Cuál es la medida? Ah sí, sí corta, o sea que la conclusión es que, no importa la medida, o sea las medidas de los lados…
604	Nicolás:	la medida o el, o el ángulo
605	Leydi:	del segmento, siempre la mediatriz eh… va a cruzar de todos los lados del triángulo, siempre la mediatriz va cruzar [cortan en un punto]
606	Mafe:	Si va a cruzar
607	Profesor:	¿Siempre va a cruzar por dónde?
608	Julián:	Siempre va, se van a encontrar todas en un punto
609	Profesor:	Siempre se van a encontrar todas, ¿podrían tratar de escribir eso en un enunciado?
610	Leydi:	Entonces sería
611	Julián:	Por ejemplo, eh… ¿cómo lo escribimos?
612	Leydi:	Escribamos, eh… no importa
613	Nicolás y Leydi:	Sin importar [Jul comienza a escribir el enunciado]
614	Julian y Nicolás:	La medida
615	Leydi:	De los, de los tres segmen… de los tres
616	Nicolás:	de los tres lados del triángulo
617	Leydi:	Las mediatrices
618	Mafe:	Siempre van a tener un punto
619	Leydi:	las mediatrices
620	Mafe:	de corte, siempre van a tener un punto de corte
621	Julián:	¿Es con z?
622	Mafe:	Las mediatrices; sí con z… siempre van a tener un punto de corte. Listo "*sin importar las medidas de los tres lados del triángulo o sus ángulos, las mediatrices siempre van a tener un punto de corte*"
623	Profesor:	Muchas gracias muchachos, muy amables.

Actividad demostrativa:

- **Generalizar:** Sin importar el tipo de triángulo, las mediatrices se cortan en un solo punto. [559, 563, 589, 622]
- **Verificar:** Construyen otro triángulo y sus mediatrices para verificar que se cortan en un solo punto. [588]

Argumentación:

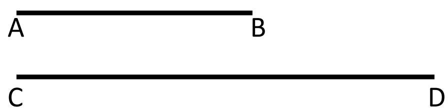
- Argumento [598,600,608]
- Argumento [597,601,603,605]
- Argumento [584]

TRANSCRIPCIÓN 2º TAREA

GRUPO DE SERGIO

(Sergio, Felipe, Cristian, Daniel) siempre profesora

Tarea 2: Construya un rectángulo a partir de dos segmentos: uno como lado y el otro como diagonal.



Episodio 1: Comparan perceptualmente las medidas de los segmentos.

Aspectos descriptivos:
Después de leer el enunciado del problema en donde se pide construir un rectángulo a partir de dos segmentos, uno de los cuales es el lado y el otro es la diagonal, los estudiantes comienzan la actividad: leen el enunciado, comparan visualmente las longitudes de los segmentos y anticipan que el segmento de mayor medida es la diagonal del rectángulo.

1	Sergio:	[…]
4	Felipe:	Vea, [Leyendo] Construya un rectángulo a partir de dos segmentos, uno como lado y el otro como diagonal ¿Cómo así?
5	Profesora:	Uno de esos segmentos que hay ahí, es uno de los lados del rectángulo.
6	Felipe:	Sí.
7	Profesora:	Y el otro, es una diagonal.
8	Sergio:	O sea diagonal así [con la mano traza una línea oblicua en el espacio].
9	Felipe:	¡Ah! ya, pero ahí no tiene cara de diagonal ninguno.
10	Sergio:	Ya sé cuál es la diagonal. Creo, Mire ¿Cuál vamos a partir como base del rectángulo?
11	Felipe:	Cualquiera, con cualquiera debe dar
12	Daniel:	[…]
17	Sergio:	Este podría ser, sí, pero este no alcanza de un lado al otro lado [señala el segmento de mayor medida para tomarlo como base; y se refiere a que el otro segmento no alcanza a cruzar todo el rectángulo]; entonces podríamos hacer esto.
18	Profesora:	Repite lo que dijiste que… ¿qué?

19	Sergio:	Este [segmento más largo], podría ser un lado, pero esta [señala el segmento más corto], no podría ser la diagonal porque no alcanza hasta la otra esquina, Entonces…
20	Profesora:	O sea que ¿ahí que pasa? es muy que…
21	Sergio:	Es muy corta, entonces yo sugeriría que esta sería la base [señala el segmento más corto].
22	Profesora:	¿O sea que ustedes sugieren que la diagonal tiene que ser la más larga?
23	Sergio:	La diagonal tiene que ser larga
24	Profesora:	[…]

Actividad demostrativa:

- **Visualizar:** Para representar una diagonal traza una línea oblicua con las manos [8]
  Compara los segmentos y establecen que la diagonal debe ser el segmento de mayor longitud [17]
  No reconoce a ningún segmento como diagonal porque los dos están trazados horizontalmente [9]

- **Explicar:** Sergio explica por qué el segmento más largo tiene que ser la diagonal [10, 11, 17, 19, 21,23]

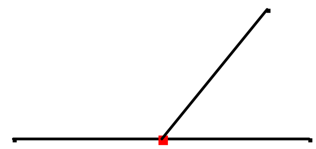
Argumentación:

- Argumento [5-9]
- Argumento [17-23]

Episodio 2: Analizan si el segmento más corto puede ser una diagonal

Aspectos descriptivos:
Cristian no se convence de la propuesta de Sergio de considerar el segmento de mayor longitud como diagonal y el de menor longitud como lado del rectángulo, entonces propone una estrategia para poder tomar el segmento más corto como la diagonal.

26	Cristian:	¿La diagonal no podría ser la mitad del segmento? Digamos, Que partiera la mitad la cortica, y listo nos dio un lado y ya.
27	Felipe:	No entiendo, no eso no es un [no se entiende]
28	Cristian:	O sea, digamos [toma la regla y el lápiz mide el segmento mayor y marca el punto medio] sacamos la mitad, no sé si este bien, que es… cero tres,
29	Daniel:	Cero, cero tres

30	Cristian:	Entonces sacamos esta mitad [mide con la regla el segmento más corto] esa es la diagonal ¿no? [construye un segmento congruente al más corto a partir del punto medio del segmento más largo y en forma oblicua] 
31	Sergio:	[…]
36	Sergio:	Una diagonal ¿Qué es?
37	Felipe:	Algo que traza de vértice a vértice
38	Felipe:	Una diagonal es un segmento que pasa desde un punto cualquiera a un punto cualquiera

Actividad demostrativa:

- **Explorar:** Construye lo que él considera que es la diagonal (usando el segmento más corto) a partir del punto medio del segmento de mayor medida [28-30]
- **Explicar:** que es una diagonal en un rectángulo[36-38]

Argumentación:

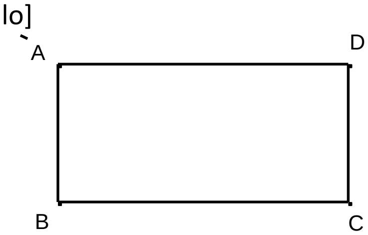
- Argumento [36 -38].

Episodio 3: Identifican las diagonales en un rectángulo imaginario y construido.

Aspectos descriptivos:

Los estudiantes habían identificado al segmento de mayor longitud como diagonal y al otro como lado del rectángulo; Cristian propuso una construcción para que el segmento de menor longitud pudiese ser la diagonal, pero Felipe y Sergio la ponen en duda con la definición de diagonal. En este episodio discuten el significado de diagonal, trazan un rectángulo e identifican en él las diagonales. Además visualizan un rectángulo y sus diagonales.

36	Sergio:	Una diagonal ¿Qué es?
37	Felipe:	Algo que traza de vértice a vértice
38	Felipe:	Una diagonal es un segmento que pasa desde un punto cualquiera a un punto cualquiera
39	Sergio:	[dibuja un rectángulo en el borde de la hoja]
40	Profesora:	¿Punto cualquiera de dónde a un punto cualquiera de dónde?
41	Felipe:	Digamos, si es nombrado *A*, *B*, *C* y *D* [con las manos en el aire sigue el rastro de los vértices de un rectángulo y va nombrando sus vértices]

42	Profesora:	¿Quién es nombrado de esa forma?
43	Felipe:	El rectángulo
44	Profesora:	¡Ah! Ya
45	Felipe:	*A*, *B*, *C*, *D* [nuevamente representa los vértices con las manos] una diagonal seria un segmento cortado en *A* y *C* [con las manos traza la diagonal del rectángulo imaginario que esta describiendo]
46	Profesora:	¿Cortado?
47	Felipe:	No, un segmento trazado de *A* a *C*
48	Profesora:	Um ya. Miremos lo que está haciendo Sergio
49	Daniel:	Un rectángulo normalito
50	Sergio:	[dibujó un rectángulo cualquiera en un extremo de la hoja]
51	Felipe:	Mire [nombra los vértices del rectángulo que hizo Sergio] *A*, *B*, *C* y *D*. Una diagonal es un segmento que vaya desde *A* hasta *C* [señala *A* y *C* en el rectángulo] 
52	Profesora:	Constrúyala ahí
53	Felipe:	o de *B* hasta *D*, constrúyalo
54	Profesora:	¿O sea que cuántas diagonales puede tener un rectángulo?
55	Sergio:	Cuatro
56	Profesora:	¿Cuántas diagonales?
57	Felipe:	Dos
58	Daniel:	Dos, sí
59	Sergio:	Porque hay cuatro vértices […]
60	Felipe:	[…]
63	Felipe y Sergio:	Dos
64	Sergio:	Que cortarían al rectángulo en cuatro partes

Actividad demostrativa:

- **Visualizar:** Traza con las manos un rectángulo, lo nombra e identifica las diagonales. [41,45]
  Construye un rectángulo, lo nombra e identifica las dos diagonales [50,51,53]
  Identifican que las diagonales de un rectángulo lo dividen en cuatro partes [64]
- **Explicar:** cuando le enseña a los demás qué es una diagonal. [36,45]

Argumentación:

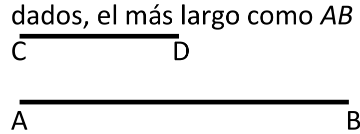
- **Argumento** [54-59]

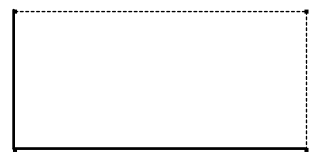
Episodio 4: Proponen construir un rectángulo donde los lados miden igual que los segmentos dados.

Aspectos descriptivos:

Sergio y Felipe habían relacionado la información que daba la tarea con los segmentos dados, el lado de mayor longitud podía ser la diagonal y el de menor longitud el lado. Debido a que Cristian no estaba muy convencido de la propuesta de Sergio y Felipe, entonces este hecho permitió que todos se cuestionaran acerca del significado de diagonal de un rectángulo, para lo cual Sergio tuvo que construir un rectángulo e identificar en él sus diagonales y Felipe opto por visualizar un rectángulo y en él sus diagonales, esto les permitió caracterizar la diagonal.

En este episodio comienza la primera estrategia para resolver la tarea: construyen dos segmentos perpendiculares por uno de sus extremos que tengan respectivamente las medidas de los segmentos dados, luego copian las medidas a sus lados opuestos y cierran el rectángulo. Verifican si la construcción es correcta, comparando la medida de la diagonal del rectángulo construido con la medida del lado más largo, que deberían ser iguales para cumplir la tarea; pero no lo son porque la diagonal debe ser el segmento de mayor longitud.

65	Profesora:	Bueno, entonces ahora tratemos de entender nuevamente que es lo que nos pide la tarea.
66	Sergio:	La tarea nos pide…
67	Felipe:	Construya un rectángulo. Ya lo construimos. A partir de dos segmentos. No porque ahí no dice a partir de estos segmentos [señala los dos segmentos que da la tarea]
68	Profesora:	Sí a partir de esos dos.
69	Felipe:	A listos.
70	Profesora:	[…]
71	Sergio:	Pongámosle *AB* y a este pongámosle *CD* [nombra los segmentos dados, el más largo como *AB* y el más corto como *CD*] 
72	Profesora:	[…]
73	Felipe:	¡Ah! Ya. Este es este lado [Señala el segmento *CD* y lo compara con el lado más corto del rectángulo] y esta es la base, [Señala el segmento *AB* y dice que podría ser la base del rectángulo] entonces ya teniendo este mismo lado y este, entonces se toma la misma medida [se refiere a que los segmentos dados en la tarea podrían ser los lados del rectángulo que construyó Sergio]
74	Profesora:	¿*AB* es un lado del rectángulo?

75	Felipe:	CD
76	Sergio:	Es que mire lo que dice Felipe, uno como lado, podría ser *CD* el lado y el otro como una diagonal
77	Felipe:	Pero primero toca tener la base para sacar el triángulo, sería así y esta se toma así [propone que a partir de uno de los extremos del segmento más largo copie la medida del otro segmento perpendicularmente] y ahí se hace la misma medida de acá acá y se baja [lo que quiere decir es que ya teniendo dos segmentos perpendiculares por sus extremos se copian sus medidas en los lados opuestos y se cierra el rectángulo] 
78	Sergio:	Tengo una pregunta, uno como lado pongamos este como lado [*CD*] y esta tendría que ser la diagonal [señala el segmento *AB*. Escribe encima de los segmentos, cual es la diagonal y cual el lado]
79	Felipe:	¿La diagonal es la misma medida de acá a acá? [pregunta si lado más largo del rectángulo puede tener la misma medida que la diagonal]
80	Profesora:	¿Es la misma?
81	Felipe:	Si claro
82	Profesora:	O sea que para ti ¿*DC* tiene la misma medida que *CB*?
83	Felipe:	Si señora
84	Profesora:	Tomemos la medida con el compás a ver si son iguales
85	Felipe:	[…]
88	Felipe:	[mide el lado mayor del rectángulo con el compás]
89	Sergio:	[…]
90	Felipe:	[compara la medida de la diagonal y la del lado más largo]
91	Sergio:	Si ve que no, porque la diagonal tiene que ser más larga
92	Profesora:	¿No tiene la misma medida?
93	F elipe y Sergio:	No
94	Sergio:	la diagonal tiene que ser la más larga

Actividad demostrativa:

- **Explorar:** Propone construir a partir de uno de los extremos del segmento más largo, una perpendicular y copiar sobre ella la medida del segmento más corto, luego copiar con el compas, las medidas a los lados opuestos y cerrar el rectángulo [77]
- **Verificar:** Comprueban que en el rectángulo construido la diagonal no mide igual que el lado más largo del rectángulo. [88, 90]

Argumentación:

- **Argumento** [90-94]

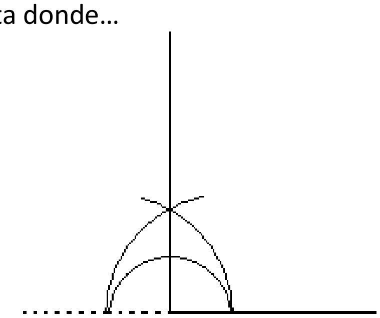
Episodio 5: Proponen encontrar un tercer vértice del rectángulo con el segmento menor (CD) como uno de sus lados

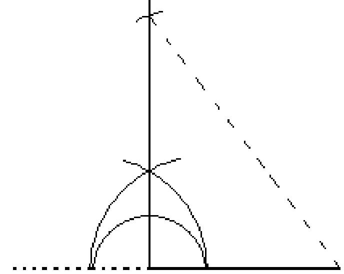
Aspectos descriptivos:

En episodios anteriores los estudiantes habían identificado que el segmento dado de mayor longitud podía ser la diagonal (*AB*) y el de menor longitud uno de los lados (*CD*) del rectángulo, también habían comprendido el significado de una diagonal con la construcción y visualización de un rectángulo y sus diagonales. Después propusieron construir un rectángulo cuyos lados midieran igual que los segmentos dados y que además su diagonal podía medir igual que el segmento de mayor longitud, al hacer la construcción verificaron que esto no ocurría, pues la longitud de la diagonal siempre es mayor que la longitud de los lados del rectángulo.

En este episodio Sergio propone construir un ángulo recto sobre uno de los extremos del segmento *CD*, y con centro en el otro extremo trazar un arco de radio *AB*. El corte del arco con la perpendicular define el tercer vértice del rectángulo. Sergio explica nuevamente cómo encontró el otro vértice del rectángulo, y argumenta por qué construyó una perpendicular a partir de uno de los extremos de un lado del rectángulo para encontrar el tercer vértice.

95	Profesora:	[…]
97	Profesora:	[…]¿qué más características tiene un rectángulo?
98	Sergio:	Que todos sus ángulos son de 90 grados.
99	Profesora:	Utilicemos esa información.
100	Sergio:	Por eso es que tengo una idea: construir un rectángulo que sea… ¿o sea si me hago entender? Un rectángulo que esta sea la base [se refiere al segmento dado que es más corto, *CD*. Toma la medida de *CD* con el compás y la copia en la parte inferior de la hoja]. Entonces pongámoslo acá [copia el segmento *CD* en la parte inferior de la hoja]
101		[…]
102	Daniel:	Si hago un equilátero
103	Sergio:	Podríamos construir un ángulo recto [inicia una construcción a partir de uno de los extremos del segmento que construyó].

104	Profesora:	¿Qué estás haciendo?
105	Sergio:	Construir un ángulo, un triángulo recto, porque un…
106	Felipe:	¿Un triángulo?
107	Sergio:	Un triángulo sí, porque un rectángulo son dos triángulos iguales. [Señala el rectángulo que había construido y muestra en él los dos triángulos que forman el rectángulo]
108	Profesora:	Sí
109	Sergio:	Dos triángulos rectos iguales [se refiere a dos triángulos rectángulos congruentes]
110	Profesora:	[…]
114	Sergio:	[Construye una perpendicular sobre uno de los extremos del segmento que copió: haciendo centro en el extremo, traza media circunferencia que corte al segmento *CD* y a su prolongación, y desde donde lo corta hace dos arcos en la parte superior, luego construye una recta uniendo el extremo del segmento y la intersección de los arcos] Después de eso se traza la recta hasta donde… 
115	Profesora:	O sea estas construyendo un ángulo de 90 en uno de los extremos del segmento que copiaste.
116	Sergio:	Bueno hasta ahí [se refiere a que tan larga construye la perpendicular]
117	Felipe:	podría ser
118	Profesora:	Y ahora ¿Qué van hacer?
119	Sergio:	Luego le tomamos la medida al segmento *AB* [copia con el compás la medida del segmento dado *AB*]
120	Profesora:	Y ¿Qué vas a hacer con esa medida que estas tomando?
121	Sergio:	Esta medida la voy a coger del otro lado [se refiere al otro extremo del segmento CD] del segmento y lo voy a trazar
122	Profesora:	¿De dónde?
123	Sergio:	De este otro lado [señala el extremo del segmento por el cual no está construida la perpendicular]
124	Profesora:	¿Para qué?
125	Sergio:	Para que esa sea la diagonal, o sea aquí y donde corte es la diagonal [con el compás abierto con la medida de *AB*, hace centro en el extremo del segmento que señaló y hace un arco que se corte con la perpendicular. Con las manos representa el segmento que se forma desde el extremo del segmento inicial al corte del arco con la perpendicular]

		
126	Profesora:	[…]
127	Felipe:	Yo no entiendo lo que está haciendo él
128	Profesora:	[…]
130	Profesora:	Construye esa diagonal y le explicas
131	Sergio:	Una diagonal tiene que ser más larga que el lado de la base, porque tiene que pasar en medio de todo el rectángulo, ¡sí! Entonces, si tomamos ésta como diagonal [*AB*] entonces este tendría que ser el lado de la base [*CD*] ¿si me hago entender? O sea si cogemos *CD*, la recta *CD* y la ponemos como base, después construimos una perpendicular y la prolongamos arbitrariamente. Después cogemos el segmento *AB* y lo trazamos del otro punto y ese va hacer el triángulo. Y después uno va a tener que tomar este ángulo y copiarlo acá [se refiere a copiar el ángulo recto en el vértice del rectángulo que resulta del corte de la perpendicular con la diagonal]
132	Profesora:	[…]
138	Profesora:	[…]¿Por qué hiciste perpendicular? ¿Por qué te interesa que ese ángulo sea de 90? El de ahí abajito
139	Sergio:	Porque como un rectángulo tiene cuatro lados de 90 grados, cogí un lado de 90 [se refiere a ángulos de 90 grados]
140	Profesora:	[…]
143	Profesora:	¿Están de acuerdo que un rectángulo tiene ángulos de 90 grados?, ustedes los demás
144	Daniel:	Si
145	Sergio:	Los cuatro de 90 grados

Actividad demostrativa:

- **Visualizar:** Reconoce en un rectángulo que tenia construido, dos triángulos congruentes y que además son rectángulos [107, 109]

- **Explorar:** Sergio propone trazar una perpendicular por *C* y a partir de *D* copiar la medida del *AB* y donde corte este arco con la perpendicular se ubicará el otro vértice del triángulo [103, 114, 116, 119,125]
- **Explicar:** Para copiar la medida de *AB* se debe hacer desde el extremo de *CD* por el cual no se construyó la perpendicular, hasta el corte del arco con la perpendicular que pasa por el otro extremo, porque esa medida corresponde a la diagonal del rectángulo [121-125]
  Cómo encontrar el otro vértice del rectángulo [131]
  Por qué escoger el ángulo de 90° [138-139]

Argumentación:

- Argumento [104-109]
- Argumento [138,139]

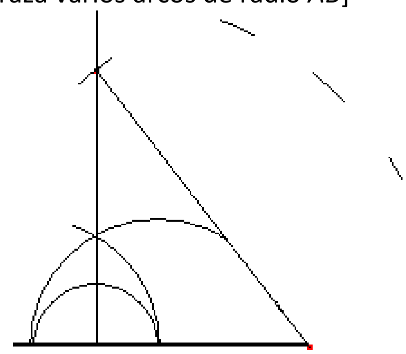
Episodio 6: Por sugerencia de la profesora verifican si se puede construir la diagonal desde *C*.

Aspectos descriptivos:

En episodios anteriores los estudiantes habían relacionado la información que daba la tarea con los segmentos dados (uno como diagonal y el otro como lado); habían identificado una diagonal en un rectángulo construido y en un rectángulo imaginario. Hasta el momento habían desarrollado dos estrategias diferentes para resolver el problema, la primera fue construir un rectángulo con sus lados congruentes a los segmentos dados, y la segunda estrategia fue construir una recta perpendicular por uno de los extremos del segmento *CD* (lado del rectángulo), además por su otro extremo trazar una arco de radio AB que se cortara con la perpendicular para encontrar en esta intersección el tercer vértice del rectángulo.

En este episodio la profesora cuestiona a los estudiantes sobre la posibilidad de trazar la diagonal, pero a partir de *C,* es decir por el extremo del segmento por el cual se construyó la perpendicular. La propuesta de los estudiantes es trazar dos arcos de radio AB con centros en C y en D, el corte de estos dos arcos seria el otro vértice del rectángulo. Se rechaza la propuesta pues un lado del rectángulo no puede ser congruente con su diagonal.

146	Profesora:	A bueno, entonces ¿ustedes están de acuerdo en la estrategia que él utilizó para saber en donde coloca la diagonal? Por ejemplo ¿donde más podría estar la diagonal?
147	Felipe:	Hacia allá [con la mano representa la otra diagonal posible]
148	Profesora:	[…]
153	Sergio:	[señala con el compás la dirección de la otra diagonal que no está trazada, es decir hace centro en el extremo de *CD* por el cual construyó la perpendicular]
154	Profesora:	Aja, pero entonces como sé, borra el otro arco que tenias ahí [se refiere al arco que había construido antes con la medida de *AB* sobre el extremo del segmento], entonces con un solo arco ¿puedo saber en

		dónde puede estar el otro vértice?
155	Sergio:	Si
156	Profesora:	Porque mira que por ejemplo, ese podría ser una diagonal, pero si yo coloco el compás mas abajito, por ejemplo por aquí, esa sería también una diagonal, por aquí también habría una diagonal [toma el compás hace centro en *C* y traza varios arcos de radio *AB*] 
157	Sergio:	Pero tendría que ser un ángulo de 90 grados, porque un rectángulo tiene que tener
158	Profesora:	Por eso, Cómo hago para construir por aquí [señala con las manos el otro vértice que falta por construir del rectángulo] un ángulo de 90 grados, si no se exactamente donde queda el vértice. Entonces. […]
159	Sergio:	Lo que pasa es que la…
160	Profesora:	Entonces si no hiciéramos la diagonal así como tú la hiciste, seria de esta otra forma, pero de esta otra forma podríamos tener la exactitud ¿de dónde queda el vértice?
161	Sergio:	El otro vértice podría quedar, o sea cogemos esto [mide *AB* con el compás] y lo ponemos de un lado, si y lo ponemos, ¿sí? [Se refiere a un arco con la medida de *AB* y centro en *C*. Es decir los posibles arcos que aparecen en la figura anterior] luego cogemos esa misma medida y la ponemos acá [sobre *D* copia la misma medida y traza otro arco] y ahí cortan los dos y sabemos dónde queda y baja [se refiere al corte de los dos arcos anteriores]
162	Profesora:	A bueno hazlo, pero espérame si haces centro ahí [*C*] y trazas el primer arco que ya está hecho, y si ahora haces centro en el otro extremo [Sergio señala el otro extremo de *CD*, es decir *D*] y trazas, estarías haciendo que un lado del rectángulo tiene la misma medida de la diagonal
163	Sergio:	A… si
164	Profesora:	Pero este lado que vas construir acá, no tiene la misma medida de la diagonal. [señala con la mano el lado del rectángulo que se construiría perpendicular a *D*]Entonces no me serviría eso

165	Sergio:	No porque una diagonal tiene que ser más larga
166	Profesora:	Entonces no me serviría eso. Entonces si ven que la única opción es la que hizo Sergio, que es coger centro en el otro extremo [*D*]y trazar esa diagonal así
167	Daniel:	Si
168	Profesora:	Y para él en donde corta con la perpendicular estaría el otro vértice, o sea ahí arribita

Actividad demostrativa:

- **Explorar:** propone encontrar el vértice sobre *D*, copiando dos arcos con medida *AB*, uno desde *C* y el otro desde *D*. Donde se cortan está el otro vértice. [161]
- **Verificar:** no funciona la propuesta [161] pues uno de los lados no puede medir igual que la diagonal, la diagonal debe ser más larga [162-166]

Argumentación:

- Argumento [164-165]

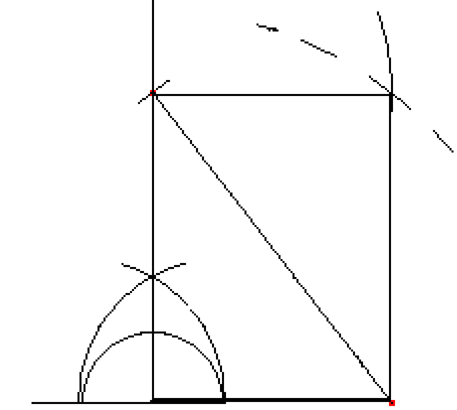
Episodio 7: Construyen un cuadrilátero y verifican que es un rectángulo con las condiciones que pide la tarea.

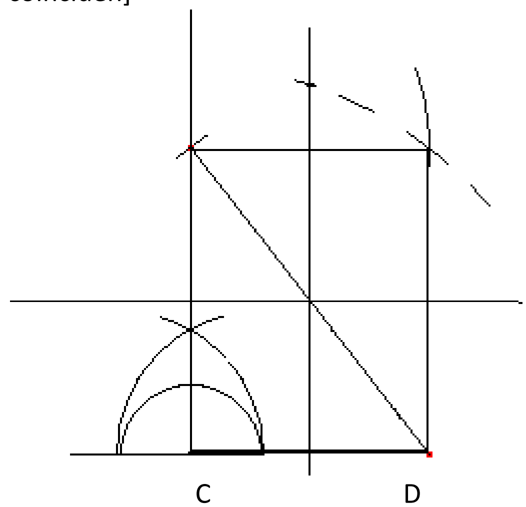
Aspectos descriptivos:

Los estudiantes habían identificado el segmento de mayor longitud con la diagonal y el segmento de menor longitud con el lado el rectángulo, habían caracterizado una diagonal, habían propuesto dos estrategias para construir el rectángulo que pedía la tarea, y en el episodio anterior la profesora había cuestionado la segunda estrategia.

En este episodio proponen cómo encontrar el cuarto vértice, verifican que los lados opuestos y las diagonales son congruentes, y comprueban que el cuadrilátero construido es un rectángulo a partir de sus propias definiciones de rectángulo.

169	Sergio:	Pero para asegurarse, porque hay que asegurarse que si esto está bien o no, podríamos coger y hacer esto [toma la medida de *CD*]. Esto lo ponemos aquí [copia *CD* a partir del corte de la perpendicular con la diagonal] y ahí seria el otro vértice y lo trazaríamos y quedarían los dos [construye los otros dos lados del rectángulo]

		
170	Profesora:	¿Qué hiciste?
171	Sergio:	Cogí el segmento *AB* y lo trace aquí [hizo centro en *C* y con medida de la diagonal, trazo un arco], luego cogí el segmento *CD* y del punto donde se había cortado las dos lo puse [copia el segmento *CD* a partir del corte de la perpendicular con la primera diagonal]
172	Profesora:	O sea estás haciendo que la otra diagonal
173	Sergio:	Quede exactamente
174	Profesora:	se corte con el otro lado
175	Sergio:	Y que quede este lado igual a este [Señala *CD* en el rectángulo y el lado opuesto], para comprobar si sí era cierto lo que había dicho
176	Profesora:	¿Ustedes que dicen niños de los que hizo Sergio?
177	Felipe:	Que está bien
178	Daniel:	Si, si
179	Profesora:	Si ¿seguro?
180	Cristian:	Pa que, pero si
181	Profesora:	Verifica, verifica si hay dos lados que son iguales a *CD* del rectángulo
182	Sergio:	Se puede verificar de esta forma
183	Profesora:	¿Qué estás haciendo?
184	Sergio:	Voy a construir. [construye al parecer las mediatrices de todos los lados] Voy a ver, sí, sí es. Si logro descubrir el centro y veo que todos son, que el punto medio del rectángulo, equidista de sus vértices es porque si es…
185	Profesora:	¿Es un rectángulo?
186	Sergio:	Sí, un rectángulo y tiene los lados
187	Felipe:	Pero está diciendo que si este [*CD*] tiene la misma medida que este [lado del rectángulo] y si este [*AB*] tiene la misma medida que este [diagonal del rectángulo]
188	Sergio:	Pero sí los copie, sí [compara con el compás las medidas de los segmentos dados, con la diagonal y los lados del rectángulo que construyó]

189	Profesora:	¿Si son iguales? Y las dos diagonales ¿tienen que ser iguales?
190	Sergio:	Sí
191	Profesora:	¿Tienen que medir igual?
192	Sergio:	Tienen que medir igual, porque si son diagonales… [Compara la medida de las dos diagonales del rectángulo construido. Luego con los arcos marcados traza las mediatrices de los lados del rectángulo, que para los lados opuestos coinciden] 
193	Sergio:	Y este sería el punto centro [marca el corte de las mediatrices que está en el interior del rectángulo] y el punto centro de un cuadrilátero es cuando todas sus…
194	Profesora:	Ahí se cortan ¿quiénes?
195	Sergio:	Se cortan las diagonales, las diagonales cortan en un punto, que el punto es el centro del rectángulo. Entonces ahí también sabría si me quedo bien el rectángulo, y ahí cortaron todos en un punto [cuando dice todos pareciera que tanto las diagonales como la mediatrices]

Actividad demostrativa:

- **Explorar:** propone como encontrar el cuarto vértice del rectángulo. Con centro en C copia AB y con centro en el tercer vértice copia CD, donde se corten los anteriores arcos se ubica el cuarto vértice. [169]
- **Explicar:** de cómo encontrar el cuarto vértice del rectángulo [171-175]
- **Verificar:** para probar que la figura construida es un rectángulo, propone encontrar el centro, al parecer con la intersección de las mediatrices de los lados. [184-188]

Es un rectángulo porque verifica que las diagonales y las mediatrices se cortan en un solo punto [195]

Argumentación:

- Argumento [170-175]
- Argumento [187-188]
- Argumento [189-192]
- Argumento [193-195]

Episodio 8: Explicación de la construcción del rectángulo y justificación de por qué es un rectángulo.

Aspectos descriptivos:

Antes de este episodio los estudiantes habían identificado al segmento dado de mayor longitud como la diagonal y el otro segmento como un lado. Cristian había propuesto una forma de tomar el lado más corto como diagonal, pero sus compañeros la cuestionaron pues la diagonal trazado no correspondía con la definición de diagonal (de vértice a vértice). Habían comprendido el significado de diagonal con la construcción y visualización de un rectángulo con sus diagonales. Habían propuesto dos estrategias de solución, la primera fue rechazada pues en la construcción, la diagonal no era congruente al segmento dado de mayor longitud. La segunda estrategia les permitió solucionar la tarea de construcción, pues efectivamente el rectángulo construido cumplía con todas las condiciones que pedía la tarea.
En este episodio la profesora hace varias preguntas para que reconstruyan la forma como construyeron el rectángulo y les pide que expliquen porque el cuadrilátero es un rectángulo que tiene las condiciones que pide la tarea.

196	Profesora:	Entonces Daniel, explícanos como fue la construcción que hizo Sergio
197	Daniel:	[…]
199	Daniel:	Hizo una perpendicular, después tomo los lados que nos daban y después con el compás
200	Profesora:	Coge el lápiz y dime en ese dibujo que él hizo, márcame en donde fue que inicialmente copio el segmento *CD*, márcalo ahí en el dibujo, ¿Dónde queda *CD*?
201	Daniel:	[…]
205	Daniel:	Como esta, esta medida acá, la base, este es *CD* y aquí arriba también es *CD*, porque tiene la misma medida [compara los lados opuestos del rectángulo construido]
206	Profesora:	Bueno entonces primero copió este segmento acá abajo y ¿después qué hizo?
207	Daniel:	Después saco primero un ángulo de 90 grados, y saco una perpendicular cualquiera, después ahí si tomó el punto
208	Profesora:	Hizo centro en *D* y con ¿Qué medida?
209	Daniel:	Con la de acá

210	Profesora:	Con la diagonal
211	Daniel:	Y ahí ya se pudieron unir las medidas que nos dieron de *A* y *B*. Y después acá ya se trazaron las diagonales y… aquí…
212	Profesora:	Felipe, explícanos a tus compañeros y a mí, por porqué esta figura que construyó Sergio ¿Por qué es un rectángulo?
213	Felipe:	Bueno, lo Primero porque sus diagonales todas son iguales, tiene ángulos de 90 grados y estos lados son iguales y estos lados son iguales [se refiere a que los lados opuestos del rectángulo son iguales]
214	Profesora:	Y ¿tiene las características de la tarea? ¿Cumple con las características que tenían que haber construido el rectángulo?
215	Felipe:	Construya un rectángulo, a partir de dos segmentos, el segmento *AB* y el segmento *CD*. Entonces a partir de dos segmentos, uno como lado, el lado es *AB*
216	Profesora:	¿*AB* es el lado?, ¿Sergio *AB* es el lado? ¿El segmento *AB* es el lado de ese rectángulo?, ¿*AB* que es del rectángulo?
217	Felipe:	La diagonal. Entonces ¿*AB* no tiene la misma medida de este?
218	Profesora:	No. Como Sergio lo construyó, ¿Cómo fue?
219	Sergio:	O sea basándome que la diagonal tiene que ser más larga
220	Profesora:	O sea que en ese rectángulo que tú construiste, ¿Dónde está el segmento *CD*?
221	Felipe:	Está en dos de los lados
222	Profesora:	A bueno y el segmento *AB* en ¿Dónde está representado?
223	Felipe:	En las dos diagonales que tiene el rectángulo
224	Profesora:	O sea que la única… ¿Qué lado de aquí no tiene la medida de lo que daba la tarea?
225	Felipe:	*DC* y *DB*
226	Profesora:	O sea que surge de la construcción, pero eso no lo daba. O sea que ¿hemos hecho la tarea? ¿Hemos cumplido con tarea?
227	Todos	Si
228	Profesora:	Se construyó un rectángulo
229	Felipe:	con un lado y con su diagonal
230	Profesora:	Bueno Cristian que nos tienes por contar ¿Por qué es un rectángulo?

231	Cristian:	Bueno un rectángulo acá se ve que como la regla lo dice tiene sus ángulos de 90 grados, y pues como dijo Sergio siempre la diagonal tiene que medir un poco más que las líneas de …
232	Profesora:	Más que ¿qué?
233	Cristian:	Mas que las líneas de arriba, o sea
234	Profesora:	O sea que tu también estás de acuerdo en que la diagonal siempre es más larga que los lados
235	Cristian:	Pues claro o sino no daría la medida
236	Profesora:	Listo niños muchas gracias
237	Sergio:	Listo profe, cuando quieras otra vez

Actividad demostrativa:

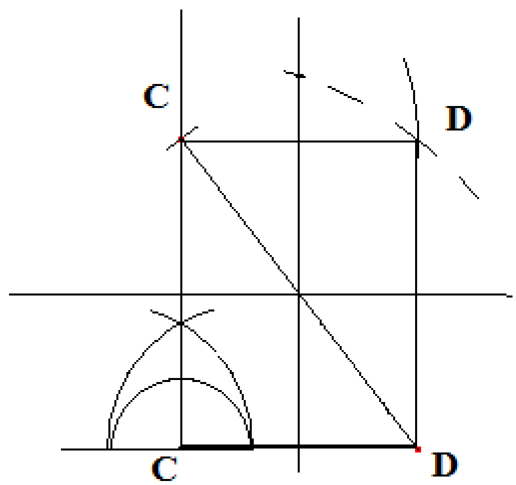
- **Explicar:** de cómo se construyo el rectángulo [199]
- **Visualizar:** a partir de la figura muestra por qué es rectángulo [207-213] [230-235]

Argumentación:

- Argumento [212,213, 230,231]
- Argumento [205]
- Argumento [230,235]

Episodio 9: Justificación de por qué el cuadrilátero construido es un rectángulo.

En una clase posterior la profesora en unión con los cuatro integrantes del grupo realiza una socialización de las construcciones y justificaciones que hicieron los estudiantes durante la solución de la tarea. Al iniciar la socialización con la profesora, reconstruyeron la construcción realizada: Construyen una recta perpendicular por uno de los extremos del segmento *CD* (lado del rectángulo), además por su otro extremo trazan un arco de radio AB que se cortar con la perpendicular para encontrar en esta intersección el tercer vértice del rectángulo. Después proponen para encontrar el cuarto vértice del rectángulo hacer centro en C copiar AB y con centro en el tercer vértice copia CD, donde se corten los anteriores arcos ubican el cuarto vértice. Después la profesora indaga por qué se puede garantizar que el cuadrilátero construido es un rectángulo.

238.	Profesora:	Entonces les pregunto, en esa figura que tengo ahí construida ¿obtengo un rectángulo? 
239.	Todos	Sí, si señora
240.	Profesora:	¿Por qué obtengo un rectángulo?
241.	Cristian:	Porque, este lado es igual a este y este lado es igual a este [señala los lados opuestos del rectángulo] y sus ángulos tiene…
242.	Profesora:	¿Por qué puedo estar segura que los lados son iguales?
243.	Sergio:	Fácil profe, dos lados son iguales y dos lados porque al dar las diagonales cortan en un punto…
244.	Profesora:	¿Por qué son iguales?
245.	Sergio.	Por las medidas y las diagonales que son las mismas
246.	Profesora:	¿O sea que ustedes compararon las medidas?
247.	Sergio:	Si
248.	Profesora:	¿Con que compararon las medidas?
249.	Felipe:	Con el compás
250.	Profesora:	O sea que el compas les permite verificar que son iguales
251.	Todos	Si
252.	Profesora:	A bueno, y cuál es la otra característica de un rectángulo
253.	Felipe:	Que tiene ángulos de 90 grados y sus diagonales cortan en un punto
254.	Profesora:	Que sus ángulos son rectos, a bueno. Con la construcción que hicieron ¿Cuál ángulo es recto?
255.		[…]
258.	Sergio:	Los cuatro
259.	Felipe:	Este [señala el ángulo por el cual construyó la perpendicular]
260.	Profesora:	Porque fue donde hicimos la perpendicular. Y ¿Cómo puedo estar segura que los otros tres ángulos son rectos?
261.	Daniel:	[…]
262.	Felipe:	Porque ahí se ve a pura vista
263.	Profesora:	A vista, pero ustedes no los construyeron, ni nada. El único que estoy segura que es de 90 es el que hicieron porque acá [C] porque construyeron recta

		perpendicular
264.	Sergio:	[…]
300.	Profesora:	Escuchen bien la pregunta, con la construcción, les valgo que el ángulo de abajito es de 90 grados [señala el vértice por el cual se construyó la perpendicular], porque hicieron recta perpendicular. Después de ahí la construcción se basó en copiar segmentos y donde se cortaran los arcos ubicaban los vértices que faltaban. Pero la pregunta es por qué los otros tres ángulos son rectos para poder estar seguro que cumplí la tarea, porque la figura es un rectángulo. Debo justificar porque los otros ángulos son de 90 grados también
306.		[…]
307.	Profesora:	¿Qué relación hay entre el lado de abajo y el de arriba? [señala a CD y el lado opuesto]
308.	Felipe:	Que tienen la misma medida
309.	Sergio:	Que al cortar la mediatriz forman un triangulo
310.		¿Qué más?
311.	Cristian:	Que ambos están en unas paralelas
312.	Profesora:	¿Cuáles son paralelas ahí?
313.	Felipe:	CD y CD ¿no?
314.	Cristian:	¡Ah! Ya
315.	Sergio:	¡Ya sé!
316.	Felipe:	Como dice Sergio el rectángulo se divide en dos triángulos rectos iguales, entonces si este tiene la misma medida que este [compara las medidas de los lados de los triángulos], entonces el otro triangulo igual va a tener la misma medida de este [señala el ángulo opuesto al ángulo recto que construyeron con la perpendicular]
317.	Profesora:	A bueno, si la diagonal divide al rectángulo en dos triángulos iguales, congruentes, entonces podría decir que este [Felipe señala el ángulo recto formado por la perpendicular] ángulo es igual a ¿cuál?
318.	Felipe:	A este [Felipe señala el ángulo opuesto al recto anterior]
319.	Profesora:	Listo o sea que ya sé que el de aquí es de 90. Ya encontré uno de los tres que me faltaban justificar. ¿Y los otros dos?
320.	Sergio:	[…]
335.	Sergio:	Fácil profe, mire [toma dos dados que habían en el escritorio. Coloca uno sobre el ángulo recto que ya se había justificado, y el otro lo coloca sobre uno de los ángulos que no se sabía su medida] ¿Dio o no dio? Mire

336.	Profesora:	¿Qué?
337.	Sergio:	90 grados, 90 grados [señala los ángulos que forman los dados]
338.	Profesora:	O sea que ese ángulo de los daditos ¿es de 90?
339.	Todos	Si claro
340.	Sergio:	Sí, porque es un cubo, y un cubo tiene que tener todos sus ángulos de 90 grados
341.	Profesora:	O sea ahí lo que estás haciendo, es como si estuvieran midiendo esos ángulos
342.	Felipe:	Por eso y ahí ya sabemos que son de 90
343.	Profesora:	O sea que para ustedes una forma de verificar es medir los ángulos
344.	Daniel:	Si claro porque así da todo profe
345.	Profesora:	Y los lados también los midieron
346.	Sergio:	Mire si ve, los dados de la suerte

Actividad demostrativa:

- **Verificar:** el compas permite comprobar que los lados opuestos del triángulo son congruentes [246-251]
  Comprueban que los otros ángulos del rectángulo son de 90 grados, midiéndolos con unos dados [335-346]
- **Visualizar:** extraen información de la figura que para ellos es un rectángulo [240-245], [252-254],[258-259], [260-262]
  Identifican rectas paralelas y lados congruentes en el rectángulo [307-313]
- **Probar:** el ángulo C, por el cual construyeron perpendicular y su opuesto son rectos, porque son ángulos respectivos entre triángulos congruentes [316]

Argumentación:

- **Argumento** [240-241]
- **Argumento** [242-245]
- **Argumento** [260, 262]
- **Argumento** [316]
- **Argumento** [335-340]

TRANSCRIPCIÓN 2º TAREA

GRUPO DE LEYDI

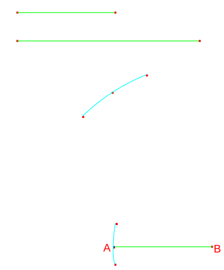
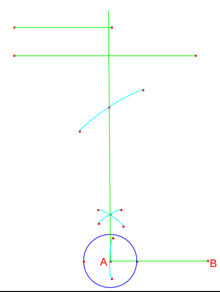
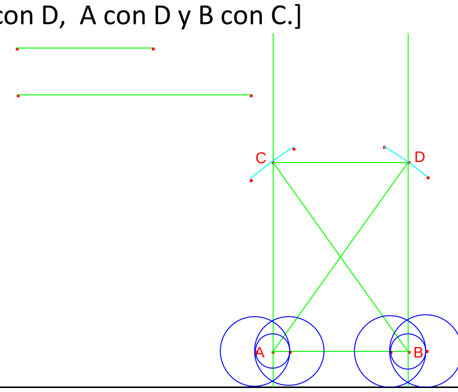
(Leydi, Mafe, Nicolás, Julián)

Los estudiantes hacen dos construcciones a medida que hablan; una, la hacen Leydi y María Fernanda (Hoja 1) y otra Julián y Nicolás (Hoja 2).

Episodio 1: Construyen un rectángulo de lado el segmento menor y diagonal el segmento mayor

Aspectos descriptivos:
Interpretan el enunciado, y proponen una primera estrategia de solución copiando los segmentos y eligiendo al segmento más largo como diagonal del rectángulo; construyen un rectángulo levantando perpendiculares sobre los extremos del segmento menor y cortes con los arcos con centro en un extremo y distancia el segmento mayor que corta la perpendicular que pasa por el otro extremo.

1.	Julián	Bueno… construya un rectángulo a partir de dos segmentos… uno como lado y el otro como diagonal
2.	Leydi:	[…]
8.	Leydi:	Uno como lado y el otro como diagonal, ¿cuál es el diagonal?
9.	Nicolás:	Éste [señala el segmento más largo]
10.	Julián	¡Éste es el lado! [señala el segmento más largo]
11.	Leydi:	[…]
15.	Nicolás	A partir de dos segmentos… [toma el compás y copia la medida del segmento más pequeño y la pasa en otra parte de la hoja 2]
16.	Leydi:	No mira, éste sería un lado [con los dedos toma la medida del segmento más grande y lo copia desde los vértices del segmento más corto que construyo Nicolás] y éste sería un…
17.	Mafe:	Una diagonal
18.	Nicolás	No
19.	Profesor:	Podrías hacer un ejemplo donde dibujes un… donde dibujes un rectángulo y muéstrame un lado y muéstrame una diagonal
20.	Nicolás	¡Listo¡, préstame la regla [En la hoja 2, copia la distancia del segmento más pequeño con el compás y luego en un extremo del segmento copia la medida del segmento más largo]
21.	Profesor:	Acuérdense que marquemos los lados mejor para saber de qué lado estamos hablando
22.	Nicolás	*AB* [marca el centro de los dos arcos con *B* y el extremo del segmento de menor distancia con *A*]

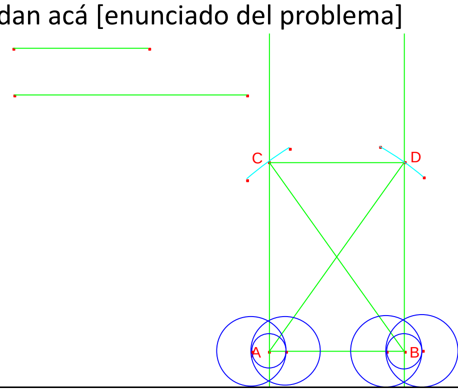
		
23.	Leydi:	[...]
25.	Leydi:	¿Qué vas a hacer?
26.	Nicolás	Levantar la perpendicular [Ubica el compás en el punto *A* y traza los arcos para construir la perpendicular al segmento *AB* que pase por *A*], para hallar el otro lado 
27.	Julián	[...]
30.	Nicolás	[En la hoja 2, Traza dos perpendiculares al segmento AB, una que pase por A y la otra por B, con centro en B y distancia el segmento mayor traza un arco que corte la perpendicular a AB que pasa por A y lo nombra C. Con centro en A y misma distancia traza un arco que corte la perpendicular a AB que pasa por B y lo marca con D. Luego une C con D, A con D y B con C.] 
31.	Leydi:	[...]

Actividad demostrativa:

- **Explorar:** Construye un rectángulo copiando la medida de los segmentos dados con el menor como lado y el mayor como diagonal. [15, 20, 22-30]

Episodio 2: Construcción de un paralelogramo con lado AB igual al segmento menor y diagonal AC igual al segmento

Aspectos descriptivos:
El profesor pide a Nicolás que le explique la construcción y éste interpreta que BD (lado) es igual al segmento mayor, pero en la construcción BC (diagonal) es igual al segmento mayor.

33.	Nicolás	Bueno, aquí construimos un rectángulo según las…las indicaciones que se me dan acá [enunciado del problema] 
34.	Nicolás	[…]
35.	Profesor:	¿Cuáles son las indicaciones?
36.	Nicolás	Construye un rectángulo a partir de dos segmentos, uno como lado y otro como diagonal [relee el enunciado] Entonces tomé el segmento más pequeño que es el segmento AB [señala el segmento menor en la tarea], y lo copié. Luego tome la medida del segmento CD [señala al segmento mayor en la tarea], y lo, y a partir de B lo marqué [muestra con el dedo un arco con centro en B y distancia CD]
37.	Nicolás	[…]
38.	Profesor:	Pero entonces en ese caso de ese rectángulo [BD] ¿es un lado? ó ¿una diagonal?
39.	Julián	Una diagonal
40.	Profesor:	¿Qué es una diagonal en un rectángulo?
41.	Nicolás	Es un, es un segmento que parte el rectángulo en dos partes
42.	Profesor:	Exacto, y el segmento BD es igual al segmento más largo que tienes [interpretación incorrecta de la explicación de Nicolás], entonces ¿está haciendo de lado o de diagonal?
43.	Julián	Es un lado
44.	Profesor:	Estas tomando AB como lado y BD como lado, ¿cómo harías para hacer que ese BD no sea un lado sino sea una diagonal? [pues el profesor interpreta que BD es igual al segmento mayor dado]. Así como la ves, en ése rectángulo que hay ahí ¿cuántas diagonales hay?

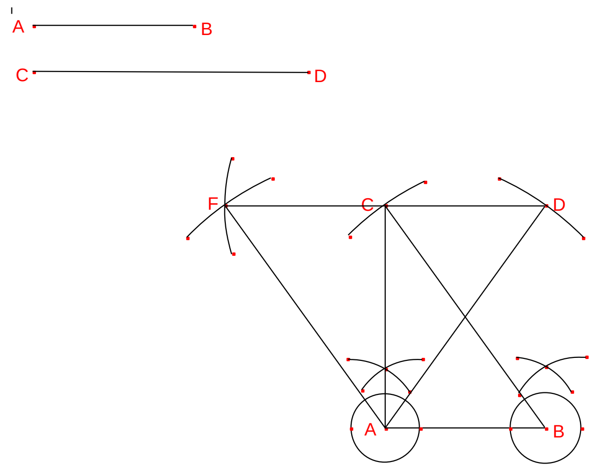
45.	Julián	Dos
46.	Profesor:	¿Cuáles son?
47.	Julián	Eh… DA y CB [las señala con el dedo en la construcción de la hoja 2]
48.	Profesor:	[…]

Actividad demostrativa:

- **Explicar:** describe el proceso realizado para construir el rectángulo

Episodio 3: Construcción de un paralelogramo con lado AB igual al segmento menor y diagonal AC igual al segmento mayor

Aspectos descriptivos:
Trazan un paralelogramo con lado AB igual al segmento menor y diagonal AC igual al segmento mayor (basados en la interpretación del profesor), donde AC quede en la posición de una diagonal del paralelogramo. El profesor hace preguntas para que los estudiantes caractericen un rectángulo y verifiquen si el cuadrilátero construido cumple con las condiciones de ser rectángulo. Por tanto se concluye que el cuadrilátero no es un rectángulo entonces no es solución de la tarea.

64.	Leydi:	[Traza arco con centro en A y distancia el segmento mayor, y un arco con centro en C y distancia AB que corten con la semi-recta DC. Une la intersección de los arcos con la semi-recta DC, la nombra con F, y la une con A]. Entonces, uno va por el punto que encontramos [corte de los arcos], y uno… y a este nombrémoslo F. Entonces acá hay un rectángulo [señala el paralelogramo ABCF] y acá lo corta [señala el punto C] 
65.	Profesor:	¿Cuál? ¿Me lo puedes nombrar? Por fa
66.	Leydi:	ABCF y acá lo corta AC [señala el paralelogramo ABCF y su diagonal AC], y acá, y acá forma otro [señala el rectángulo ABDC]
67.	Profesor:	O sea que estás formando ¿un rectángulo o un cuadrilátero?
68.	Julián	Es un cuadrilátero
69.	Profesor:	[…]
76.	Julián	No sé, yo, o sea, no, no me parece que sea un rectángulo porque… o sea tiene más como una forma como de… de rombo sí, es que el lado, o sea éste debería estar, eh ¿cómo se dice? [señala el ángulo obtuso BAF]
77.	Leydi:	[…]
81.	Profesor:	Tratemos de caracterizar primero, cómo construir un rectángulo y qué características debe tener la definición de rectángulo como tal
82.	Julián	Pues todos, primero que todo, pues todos sus ángulos deben ser como de 90° sí, todos los ángulos internos
83.	Profesor:	Esa es una característica muy importante, todos los ángulos, ¿qué pasa con eso?
84.	Julián	Y mira digamos acá no son de 90° [señala el ángulo BAF del paralelogramo ABCF]
85.	Profesor:	No está cumpliendo una de las características
86.	Julián	O sea, eso era lo que quería decir
87.	Profesor:	Perfecto. ¿Estamos de acuerdo [que no es un rectángulo]? [pregunta al grupo]
88.	Todos:	Sí

Actividad demostrativa:

- **Explorar:** Construye un paralelogramo de lados los segmentos dados. [64]
- **Verificar:** Los ángulos internos del paralelogramo no son de 90° [82-84]

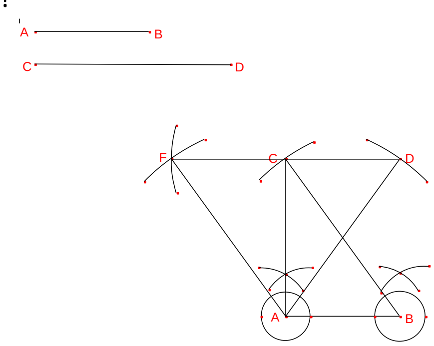
Argumentación:

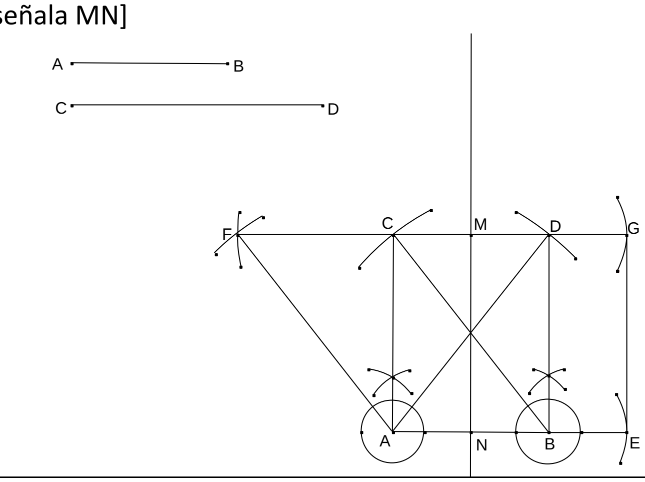
- **Argumento** [81-86]

Episodio 4: Construyen un rectángulo con lado igual al segmento menor y diagonal igual al segmento mayor, pero se toma como diagonal al segmento interior que queda al trazar la mediatriz del segmento menor

Aspectos descriptivos:

Traza la mediatriz de AB y toma el segmento interior del rectángulo ABCD como diagonal, luego copia la medida de AB a partir de su punto medio y construye un nuevo rectángulo con iguales medidas que el anterior, que queda dividido por el segmento BD el cuál es tomado como diagonal. Por último miden la verdadera diagonal con el compás y descartan la estrategia porque su medida no es igual a la del segmento mayor por inexactitud en el manejo del compás; y porque comparan los segmentos CD y no son iguales.

89.	Profesor:	Entonces, ¿qué podemos hacer para que esa…?, digamos acá es un ejemplo perfecto, donde el cuadrilátero que se encuentra ahí [hoja 2], que es el cuadrilátero CFAB, tiene diagonal AC, la cual es igual al segmento más largo [según interpretación incorrecta del profesor]; cumpliste, pero que te hizo falta?, una condición, que ese cuadrilátero ¿debe ser un qué? 
90.	Tod	Un rectángulo
91.	Profesor:	¿Cómo hago para que eso se cumpla?
92.	Leydi:	Si… si… mira [toma la hoja 2]
93.	Julián	Sacarle la perpendicular al segmento [AB].
94.	Leydi:	Sabemos que ésta es la mitad [toma un punto aproximando la mitad que había marcado]
95.	Julián	Pues sí, sacarle la perpendicular al segmento [AB], esa medida es de 90°

96.	Profesor:	¿Por qué sabemos que esa es la mitad del segmento?
97.	Leydi:	Pues no estoy segura, más bien saquémosle la mediatriz [realiza el proceso para sacar mediatriz de AB y la traza]
98.	Leydi:	Entonces, ahí al sacarle la mediatriz, ya estamos hallando las diagonales también
99.	Profesor:	Estas sacando la mediatriz, ahora muéstrame las diagonales, ¿cuáles son?
100.	Profesor:	[…]
107.	Julián	AB[Marca el segmento menor con AB y el mayor con CD]
108.	Profesor:	AB y el otro lo vamos a tomar como CD, Listo. Vamos a tratar de hacer un rectángulo que tenga lado AB y diagonal CD, ¿cómo podemos hacer eso?
109.	Leydi:	[En la hoja 2, con centro en B y distancia hasta el punto medio de AB, traza un arco; con centro en D y misma distancia, traza un segundo arco. Luego prolonga AB y CD para que corten los arcos, los marca con E y G, y une los dos cortes con un segmento]
110.	Leydi:	Mira, acá ya construí el rectángulo [señala AB] y la diagonal que corta a los rectángulos [señala la mediatriz de AB], o sea, es la misma parte pero acá [señala AB y NE]
111.	Profesor:	Muéstrame que rectángulo. Nómbramelo por favor
112.	Leydi:	Ah, pero acá le falta un punto, entonces a este punto de la mediatriz [punto medio de CD] lo vamos a llamar M, y a este [punto medio de CD] N; entonces, está el triángulo ABCD y el triángulo NE y MG, entonces, al unir esos dos triángulos [rectángulos] se está formando una diagonal [señala MN] 
113.	Profesor:	Triángulos?
114.	Leydi:	Eh… rectángulos digo, se está formando una diagonal entre CB [AB] y CD y acá DB está formando una diagonal entre NE y GM
115.	Profesor:	Ahora, ¿Cómo garantizas que esa diagonal sea igual al segmento CD que te dimos inicial?
116.	Leydi:	[…]

120.	Leydi:	[Con el compás con abertura igual al segmento CD dado en la tarea, hace centro en el B de la construcción y la abertura no es la misma que el BC de la construcción] mira, tu ¿cómo lo hiciste? [pregunta a Nicolás]
121.	Profesor:	¿No es igual?
122.	Nicolás	No es igual, es que yo, yo tomé el segmento AB y lo copié acá [señala AB en la construcción] y esta medida CD la pase pero partiendo de B y la marqué acá [con los dedos muestra un arco con centro en B de la construcción y distancia CD que corta en la perpendicular a AB que pasa por A]
123.	Leydi:	O sea que tú hiciste esto mal porque mira [con centro en C de la construcción y distancia CD, dado en la tarea, [traza un arco que corta a la recta que contiene el segmento CD, mostrando que el corte no da en D. CD dado diferente a CD de la construcción, pero ella cree que son iguales]
124.	Nicolás	[…]

Actividad demostrativa:

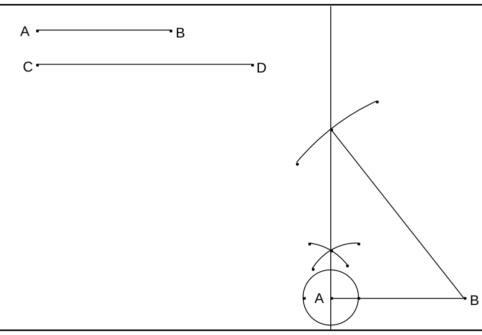
- **Explorar:** Construye un rectángulo congruente al rectángulo ABCD tomando como vértices los puntos medios de AB y CD [93, 97, 98, 107, 109, 112]
- **Verificar:** Comparan BC y CD de la construcción con el segmento mayor dado [120,123]
- **Verificar:** Desechan la construcción porque BC y CD de la construcción no son congruentes con el segmento mayor dado [121-123]

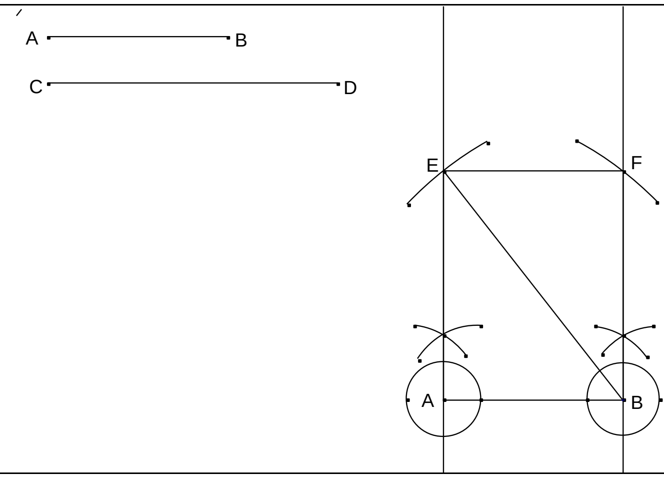
Episodio 5: Construcción de un rectángulo con lado igual al segmento menor y diagonal igual al segmento mayor

Aspectos descriptivos:

Toma el segmento menor como AB y el segmento mayor como CD; copia el segmento AB levanta perpendiculares a AB sobre A y sobre B, y copia el segmento CD a partir de A y B hasta el corte con la perpendicular que pasa por B y A respectivamente, es decir, la perpendicular que pasa por el otro extremo del segmento. Por último nombra los cortes con E y F y traza el segmento EF para obtener el rectángulo ABFE con lado igual al segmento AB dado y diagonales iguales al segmento CD dado.

126.	Julián	[estaba trabajando en una nueva construcción en la hoja 1] Es que estoy intentando como sacar las perpendiculares de AB, tomar la medida de… del segmento de acá de CD, a ver si puedo, o sea como el punto que las corta como para trazar la diagonal [copió el segmento AB y levantó una perpendicular a AB por el punto A e hizo un arco con distancia CD y centro en A y trazó un segmento]

		
127.	Profesor:	Levantaste, ¿Qué hiciste en el punto A?
128.	Julián	Levanté una perpendicular
129.	Profesor:	Y ahora, ¿qué vas a hacer?
130.	Julián:	Una perpendicular en el punto B
131.	Profesor:	~~[…]~~
139.	Profesor:	Cuéntame que hiciste Julián, después de levantar las dos perpendiculares
140.	Julián	Pues, tome la medida de la… de… del segmento que voy a usar como diagonal que es CD, y la voy a copiar encima de A de la perpendicular para que me diera el punto de corte y unir las dos… [corte del arco con centro en A y distancia CD que corta la perpendicular a AB que pasa por B]
141.	Profesor:	Me muestras como la copiaste, con centro ¿en dónde? y distancia ¿en dónde?
142.	Julián	Con centro en A, con la distancia CD centro en A y acá hice el corte [trazó un arco con centro en A distancia CD y que corte la perpendicular a AB que pasa por B]
143.	Profesor:	Donde corta, perfecto
144.	Julián	Acá hice el corte, y acá centro en B y acá hice el [trazó un arco con centro en B distancia CD y que corte la perpendicular a AB que pasa por A] y uní los dos puntos [cortes en las perpendiculares]
145.	Profesor:	Ahora, ¿esos dos puntos cómo los vas a llamar?, esos dos puntos de corte
146.	Julián	Entonces, este punto lo llamamos E [corte en la perpendicular que pasa por A con el arco con centro en B y distancia CD] y este F [corte en la perpendicular que pasa por B con el arco con centro en A y distancia CD; traza la diagonal AF], eh… pues ésta diagonal [señala CD] tiene la misma distancia sí, eh.. de AF

		
147.	Leydi:	[…]
152.	Profesor:	Vamos a mirar el trabajo que hizo Julián y a ver si cumple con los que…con lo que nos pedía la tarea; la tarea nos pedía que teníamos dos segmentos iniciales AB y CD como ustedes lo marcaron, hay que tomar uno como lado y uno como diagonal. Vamos a mirar, lo que está dibujado en la hoja ¿es un rectángulo?
153.	Todo	Sí
154.	Profesor:	¿Por qué?
155.	Ley	Porque tiene cuatro lados
156.	Profesor:	Cuatro lados
157.	Julián	Los ángulos son de 90
158.	Profesor:	Los ángulos son de 90
159.	Leydi:	Eh… dos lados son más largos que los otros dos
160.	Profesor:	Dos lados son más largos que los otros dos. Ahora, debe ser que diagonal que aparece en ese rectángulo debe tener las mismas medidas o debe tener el… la… o el mismo tamaño que el segmento BC que teníamos inicialmente. ¿Cumple o no cumple eso? ¿por qué cumple eso? ¿cuál es la garantía de que ese dibujo que hizo Julián o de esa representación que hizo Julián cumple lo que está diciendo? ¿por qué?
161.	Leydi:	¿Por qué?, porque con el compás lo podemos revisar, entonces CD, tomamos la distancia de CD y la pusimos sobre B y trazamos E

Actividad demostrativa:
- **Explorar:** Construye perpendiculares a AB que pasan por A y B, y arcos con centro en A y B y distancia CD que corten la perpendicular que pasa por el extremo opuesto. [126-130, 139-146]
- **Explicar:** por qué la figura es un rectángulo [152-161]

Argumentación:
- **Argumento** [152-159]
- **Argumento** [160-161]

Episodio 6: Explican la construcción y establecen de forma general los pasos para construir un rectángulo con las condiciones que pide la tarea

Aspectos descriptivos:
Explican cómo construyeron el rectángulo ABCD. Por sugerencia del profesor intentan escribir un enunciado general que de solución a la tarea; al no poderlo establecer, enuncian los pasos necesarios para construir un rectángulo que cumpla las condiciones de la tarea

162.	Profesor:	Okey, ahora si eso cumple, necesito que hagan una característica general teniendo un lado y una diagonal ¿qué debo hacer para poder construir un rectángulo?, ¿qué es lo que tengo que hacer?. Según el proceso que tu hiciste Julián, tú que piensas Nico que se puede hacer
163.	Nicolás	Bueno, primero se toma el segmento más corto, que en este caso es el segmento AB y se copia en la hoja, luego se toma la… el segmento más largo que es el segmento CD y parado en los dos puntos A y B se toma la distancia, hallando así las diagonales; para hallar el… los otros dos lados del rectángulo se levanta una perpendicular por cada punto y se prolonga hasta que corte en los puntos de cada diagonal, sí, y donde se corten esos puntos se unen, en este caso que es el segmento FE y se forma el rectángulo
164.	Profesor:	¿Estamos de acuerdo con ese proceso?
165.	Todo	Sí
166.	Profesor:	¿Se cumple todo lo que dice en el trabajo?
167.	Leydi:	Sí, o sea ahí ya se está cumpliendo la tarea
168.	Profesor:	Ahora, ¿cómo podríamos tal vez escribir un enunciado en el cuál al darnos una diagonal y un lado podamos escribir cómo, cómo se construiría y cómo garantizamos de que la construcción sea un rectángulo? Y que ése rectángulo tenga como lado uno de los lados y como diagonal el otro que nos dieron, ¿cómo podríamos escribir eso en un enunciado?
169.	Leydi:	Para construir un rectángulo eh… tenemos el segmento AB y CD, pero el segmento CD debe ser la diagonal podemos eh… ¿cómo se dice? Uhm… podemos tomar la medida CD sobre B hallando E, al unirla nos estamos dando cuenta que BE es… es un… es el diagonal que está hallando la ésta, o sea que el enunciado podría ser… al pasar de BE estamos hallando el diagonal que necesitamos ¿no?
170.	Profesor:	¿Qué será más fácil hacer un enunciado o escribir los pasos para hacerlo?
171.	Tod	Escribir los pasos para hacerlo
172.	Profesor:	¿Cuál sería el primer paso?
173.	Leydi:	Copiar el segmento AB
174.	Profesor:	Copiar el segmento AB, segundo paso

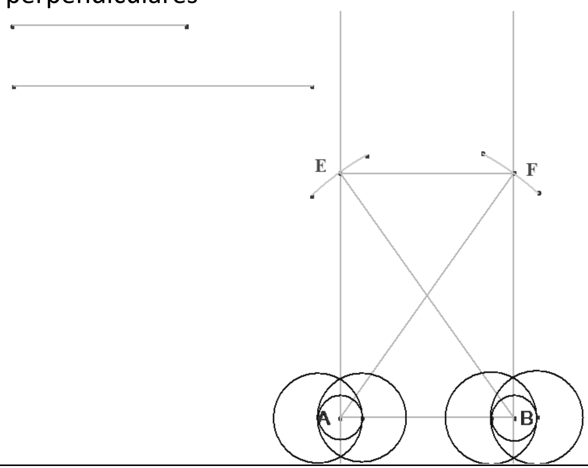
175.	Leydi:	Copiar el segmento CD y ponerlo sobre B para trazar E
176.	Profesor:	¿Cuál fue el segundo paso que tú hiciste Julián?
177.	Julián	No, el segundo paso que yo hice fue levantar las perpendiculares de A y de B
178.	Ley	Ah¡ o sea que el segundo paso es levantar las perpendiculares
179.	Julián	Y después de haber levantado las perpendiculares las prolongué. Bueno el tercer paso sería tomar la distancia CD y copiarla desde el punto B y A y hacer como el punto de corte
180.	Profesor:	¿Entre quién y quién?
181.	Julián	Entre B y ese, o sea, entre la… el punto B y la perpendicular de A, exacto
182.	Profesor:	Excelente, y ¿cuándo tenga esos dos puntos de corte?
183.	Julián	Cuando tenga esos dos puntos de corte eh… los uno
184.	Profesor:	Obtengo ¿qué rectángulo?... ¿qué rectángulo se obtiene?... ahí lo tienes, el rectángulo ¿qué?
185.	Julián	¿Diagonal?
186.	Profesor:	No, Ahí lo tienes ¿cómo lo caracterizas ahí? El rectángulo que aparece ahí ¿qué rectángulo obtienes?
187.	Leydi:	No, no se
188.	Profesor:	Ahí está marcado, ¿cómo podrías nombrarlo?
189.	Tod	¡Ah! ABEF
190.	Profesor:	Con diagonales ¿qué?
191.	Nicolás	Con diagonales BE y AF
192.	Profesor:	¿Siempre se cumple?
193.	Todo:	Sí
194.	Profesor:	¿Todos de acuerdo?
195.	Todo:	Sí
196.	Profesor:	Muchas gracias muchachos

Actividad demostrativa:

- **Explicar:** solución de la tarea [163]
- **Generalizar:** Cómo construir un rectángulo a partir de dos segmentos uno como lado y el otro como diagonal [168-196]

Episodio 7: Describen por qué el cuadrilátero construido es un rectángulo

Aspectos descriptivos: en una clase posterior, la profesora con los cuatro integrantes del grupo 2, socializaron las exploraciones y justificaciones que habían desarrollado durante la solución de la tarea. En este episodio la profesora indaga las razones que llevaron a los estudiantes a afirmar que el cuadrilátero que finalmente habían construido era un rectángulo.

197	Profesor:	Bueno niños, estuve revisando las construcciones que hicieron para la tarea. Entonces recuérdame Julián como hicieron la construcción.
198.	Julián	Bueno, tomamos el segmento más pequeño y lo nombramos AB, lo copiamos aquí [parte inferior de la hoja]. Al punto A y al punto B le sacamos sus perpendiculares 
199.	Profesor:	¿Por qué perpendiculares?
201.	Julián	Porque la construcción que toca hacer es un rectángulo, entonces toca hacer perpendiculares para que den ángulos de 90 grados. O sea como el rectángulo tiene que tener todos sus ángulos internos de 90 grados
202.	Profesor:	[…]
206.	Julián	Entonces las prolongue [se refiere a las perpendiculares]. Luego tome la medida del segmento más largo que nombramos C D y la copie. Tome la medida, hice centro en B y trace el punto E, o sea donde me diera el corte [se refiera a que E lo ubica en el corte del arco con la perpendicular sobre A]
207.	Profesor:	O sea que para ti el segmento más largo que daba la tarea era la diagonal
208.	Todos	Sí
209.	Profesor:	¿Por qué dedujeron eso? ¿Por qué no podía ser al revés?
210.	Nicolás	Porque la diagonal, primero el segmento es muy pequeño y no alcanza hacer como la diagonal, a atravesar el rectángulo.
211.	Julián	Bueno, entonces con la misma medida [Segmento de mayor medida], trace el punto F que era el corte que me daba [se refiere al corte del arco con centro en A y radio CD y la perpendicular por B]. Luego uní el punto E y el punto F. Y pues me dio [se refiere a que logro construir el rectángulo]. Y finalmente hice las diagonales.
212.	Profesor:	[…]¿Ya puedo decir que es un rectángulo?
213.	Mafe:	Si porque sus ángulos son de 90 grados

214.	Profesor:	Pero por ahora solo hay dos ángulos de 90, que son los ángulos de abajo [ángulos A y B] que construyeron con perpendiculares. Pero ¿Cómo puedo saber que los dos de arriba también son rectos? [ángulos E y F]
215.	Leydi:	Porque en un rectángulo tiene las mismas medidas…
216.	Julián	Lo que a mí se me ocurre es pues, porque digamos estas dos rectas son paralelas [señala las rectas AE y BF]. Entonces por eso siempre va a ver acá 90 [señala ángulo A]. Y cuando se cierren siempre va a quedar un rectángulo.
217.	Profesor:	¿O sea que para ti AE y CF son paralelas?
218.	Julián	Si, ¿este que es? [señala punto E]
219.	Mafe:	C
220.	Julián	AC y BF son paralelas [el vértice E lo cambian por C]
221.	Profesor:	Esas dos son paralelas, y ¿por qué son paralelas?
222.	Nicolás	Porque nunca se unen
223.	Julián	O sea nunca se cortan. Por más que se prolonguen nunca se cortan
224.	Profesor:	A bueno, entonces si son paralelas ¿eso me permite decir que el ángulo E y el ángulo F son de 90 grados?
225.	Julián	Ah, sí si
226.	Profesor:	Y que más tengo que mirar de ese rectángulo. ¿Qué características tiene un rectángulo?
227.	Mafe:	Que dos de sus lados son más pequeños y los otros dos son grandes
228.	Leydi:	Tiene cuatro lados, dos de sus lados son pequeños, dos grandes, sus ángulos son de 90 grados
229.	Profesor:	Y esos dos lados pequeños y esos dos lados grandes ¿Cómo son? Por ejemplo ahí ¿cómo son AB y CF?
230.	Leydi:	Son derechos, rectos, no van inclinados ni…o sea son paralelos también.
231.	Profesor:	[…]
233.	Profesor:	Y los dos que son más pequeños ¿tienen algo en común?
234.	Leydi:	Si, son congruentes, los dos más pequeños son congruentes.
235.	Profesor:	¿Y los otros dos?
236.	Leydi:	También son congruentes
237.	Profesor:	O sea que un rectángulo tiene dos pares de lados congruentes
238.	Todos	Si
239.	Profesor:	Y ¿Cómo puedo mirar con la construcción que los lados AE y BF son congruentes?
240.	Leydi:	Pues nos damos cuenta porque tenemos la medida de la diagonal y con el compás al trazarlo acá y acá [describe los arcos] y como son las mismas [las medidas de las diagonales] ahí nos damos cuenta
241.	Profesor:	O sea que al hacer esos cortes con las diagonales, garantizan que los lados son

		igualitos
242.	Nicolás	Son congruentes
243.	Profesor:	Y ¿Cómo sé que el lado CF es congruente con el lado AB?
244.	Julián	Pues como te dije, lo que pasa es que como estas dos rectas son paralelas [AC y BF], entonces la distancia que haber acá [CF] es congruente con esta [AB]
245.	Profesor:	O sea, ustedes dicen que como la recta AC y BF son paralelas, entonces las distancias entre ellas son iguales
246.	Nicolás	Siempre van a ser iguales
247.	Profesor:	Para que no se corten deben ser iguales. Listo les entendí. Entonces ¿cumplieron la tarea?
248.	Todos	Si
249.	Profesor:	Gracias

Actividad demostrativa:

- **Explicar:** de cómo construyeron el rectángulo [198-225]
- **Visualizar:** de la figura afirman que tiene dos lados pequeños y dos más largos, que tiene sus ángulos de 90 grados [226-230]
  Los lados más pequeños del rectángulo son congruentes [233-246]

Argumentación:

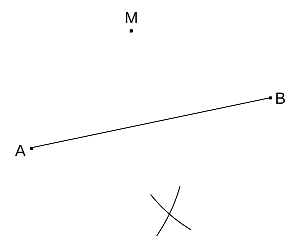
- **Argumento** [199-200]
- **Argumento** [207-210]
- **Argumento** [212-216]
- **Argumento** [220-223]
- **Argumento** [239-242]
- **Argumento** [243-246]

ANEXO 2

A1P1G1E2

¿Qué tienen?

Problema 1: *En la figura, el punto M es el punto donde se cortan las mediatrices del triángulo ΔABC y $\overline{AB}$ es un lado del triángulo. Construya un triángulo tal que M sea corte de las mediatrices.*

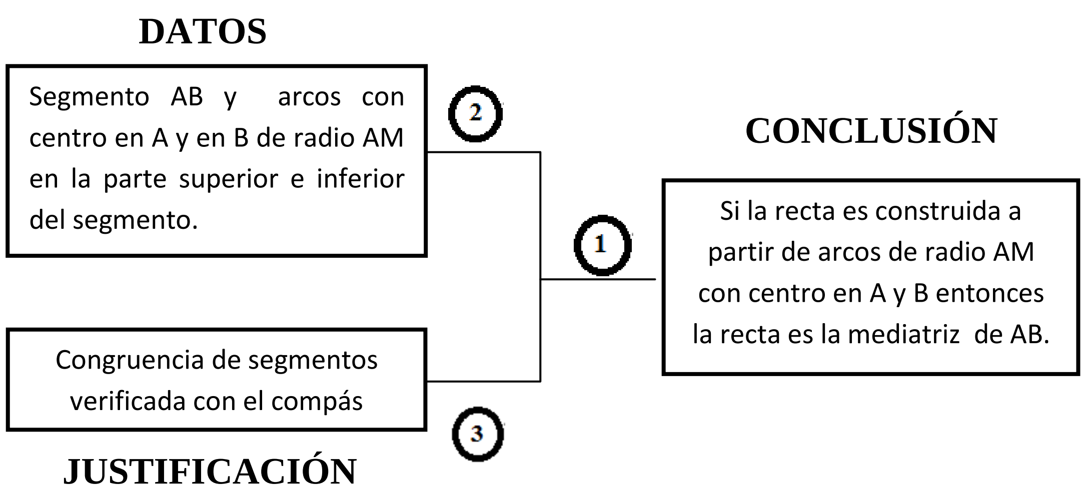


¿Qué dicen?

[39]	Felipe	Ah, sí es la mediatriz… sí, si es la mediatriz. [Vuelve a marcar los dos arcos en la parte de abajo del segmento *AB* con radio *AM* y centros en *A* y en *B*]

¿Qué creemos que dicen? Afirma que la recta que se construye a partir de los cortes de los arcos con radio AM y centro en A y en B es la mediatriz del segmento AB.

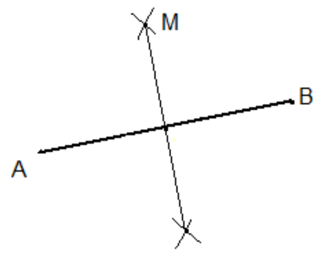
¿Por qué creemos que lo dicen? La construcción garantiza que la mediatriz pasa por M porque los arcos pasan por M.



Pragmático-empírico-crucial-constructivo

A2P1G1E2

¿Qué tienen?



¿Qué dicen?

[40-43]	Sergio:	Sí, si es la mediatriz. [Ubica la regla para que una las intersecciones de los arcos]
	Daniel:	Si porque sube por toda la…
	Profesora	¿Qué comprobaron Sergio?
	Felipe	Que era la mediatriz. [con la regla traza la mediatriz del segmento AB uniendo el corte de los arcos con *M*]

¿Qué creemos que dicen? Tratan de caracterizar el lugar geométrico de la mediatriz colocando una regla en posición perpendicular al segmento y que pase por el punto medio.

¿Por qué creemos que lo dicen? Porque M pertenece a la recta perpendicular al segmento y pasa por la mitad del segmento.

DATOS

1

Segmento AB y arcos con centro en A y en B de radio AB. Trazo de la regla que une los arcos

CONCLUSIÓN

2

Si la recta es perpendicular y pasa por el punto medio entonces es la mediatriz.

Propiedades de Mediatriz

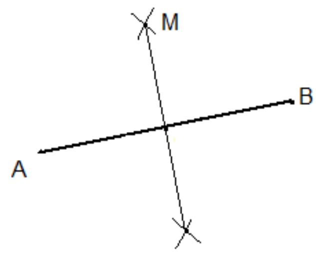
3

JUSTIFICACIÓN

Pragmático-empírico-genérico-analítico

A3P1G1E2

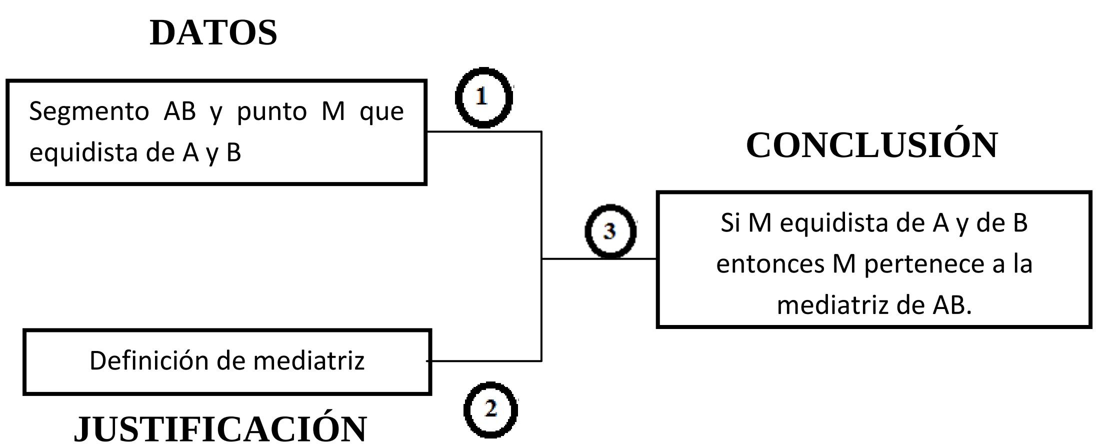
¿Qué tienen?



¿Qué dicen? [44] Sergio: Que *M* es un punto que equidista en *A* y *B*. O sea que M está formando la mediatriz.

¿Qué creemos que dicen? Como M equidista de A y B entonces M está en la mediatriz.

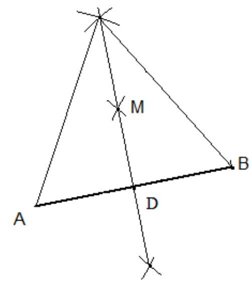
¿Por qué creemos lo dicen? Por la definición de mediatriz.



Intelectual-conceptual-analítico

A4P1G1E4

¿Qué tienen?



¿Qué dicen? [88] Felipe: Porque todos sus ángulos son iguales y sus lados son iguales es un triángulo congruente [en un triángulo equilátero la mediatriz de AB divide al triángulo en dos triángulos congruentes]

¿Qué creemos que dicen? La mediatriz del lado AB de un triángulo equilátero ABC, forma dos triángulos congruentes.

¿Por qué creemos que lo dicen? Porque si los lados y ángulos correspondientes son congruentes, entonces los triángulos son congruentes.

DATOS

1

Un triángulo equilátero de lado AB y la mediatriz de dicho lado.

CONCLUSIÓN

3

Si trazo mediatriz de uno de los lados de un triángulo entonces divido al triángulo en dos congruentes.

Criterio de congruencia LLL y criterio de semejanza AAA.

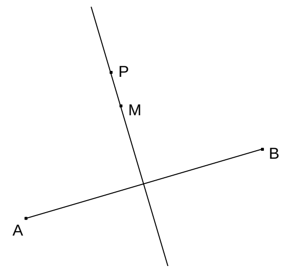
2

JUSTIFICACIÓN

Intelectual-conceptual-analítico

A5P1G1E5

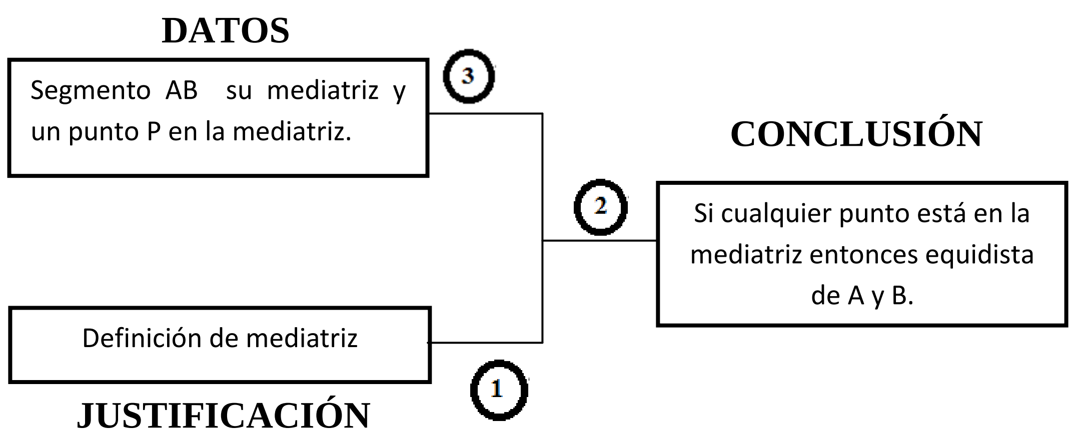
¿Qué tienen?



¿Qué dicen? [104] Sergio: Si la mediatriz es el conjunto de uniones, de puntos que equidisten de A y de B, cualquier punto que señalemos arbitrariamente, puede ser este, [señala un punto arbitrario sobre la mediatriz encima de *M*] ya está equidistando en A y en B, porque ya está sobre la mediatriz.

¿Qué creemos que dicen? Como la mediatriz es el conjunto de puntos que equidistan de los extremos de un segmento entonces cualquier punto de la mediatriz equidista de A y B.

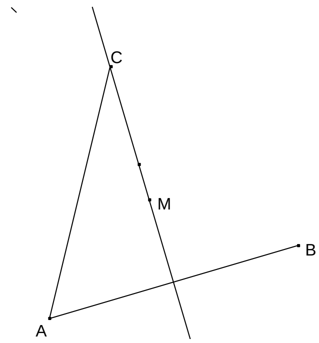
¿Por qué creemos que lo dicen? Por la definición de mediatriz.



Intelectual-conceptual-analítico

A6P1G1E5

¿Qué tienen?



¿Qué dicen? [105-111]	F	Comprobémoslo [que cualquier punto de la mediatriz equidista de los extremos] con el compás [toma el compás y mide la distancia que hay desde el punto medio de AB hasta un punto arbitrario que hizo Sergio]
	S	¿Qué va hacer?
	F	Voy a hacer cualquier punto [un punto arbitrario sobre la mediatriz]
	S	Así no se hace
	F	Si vea, ahí salió
	P	¿Por qué así no se hace?
	S	Porque…profe porque toca… con radio *A* punto arbitrario y *B* punto arbitrario y ahí tiene que dar, no así, ¿por qué así donde más lo va a señalar? [no hay dos intersecciones que determinen el punto arbitrario]

¿Qué creemos que dicen? Quieren verificar que cualquier punto de la mediatriz de AB equidista de los extremos del segmento.

¿Por qué creemos que lo dicen? Porque el compás les permite comparar las longitudes de los segmentos y comprobar si son iguales.

DATOS

1. Un triángulo equilátero de lado AB, la mediatriz de AB y un punto arbitrario en la mediatriz.

CONCLUSIÓN

3. Si trazo arcos de igual radio con centro en A y B entonces su intersección es un punto de la mediatriz.

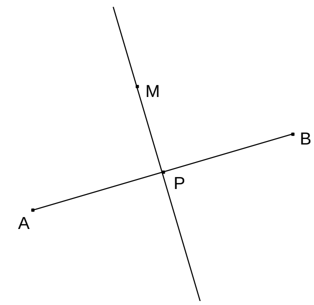
2. Congruencia de segmentos
Definición de mediatriz verificada con el compás.

JUSTIFICACIÓN

Intelectual-conceptual-analítico

A7P1G1E6

¿Qué tienen?



¿Qué dicen?

[136-138]

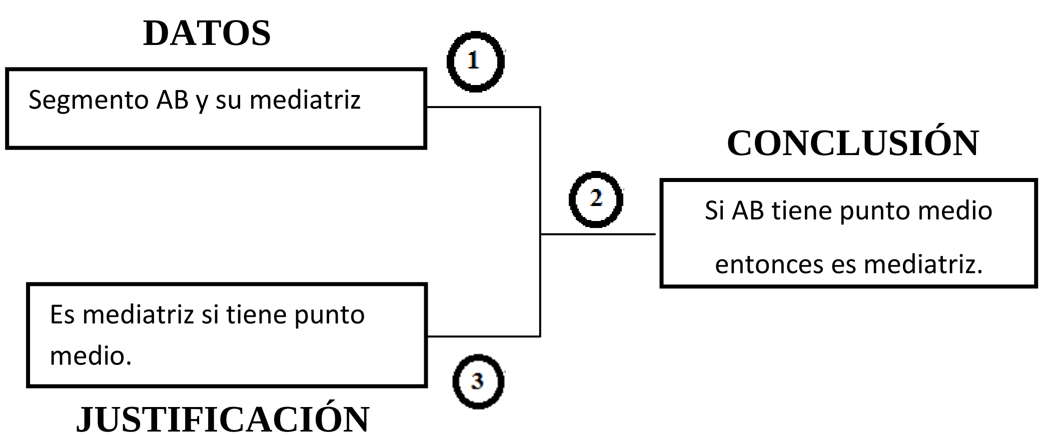
F No, este [AB] es un segmento Sergio se equivocó, eso no podría ser una mediatriz, porque si no tendría un punto medio

S Por eso, ya lo tiene

F Pero antes no lo tenía, no era un punto medio, digo no era una mediatriz

¿Qué creemos que dicen? Felipe le justifica a Sergio que AB no es una mediatriz

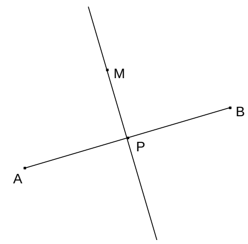
¿Por qué creemos que lo dicen? Porque AB no tenía inicialmente punto medio



Pragmático-empírico-genérico-analítico

A8P1G1E7

¿Qué tienen?

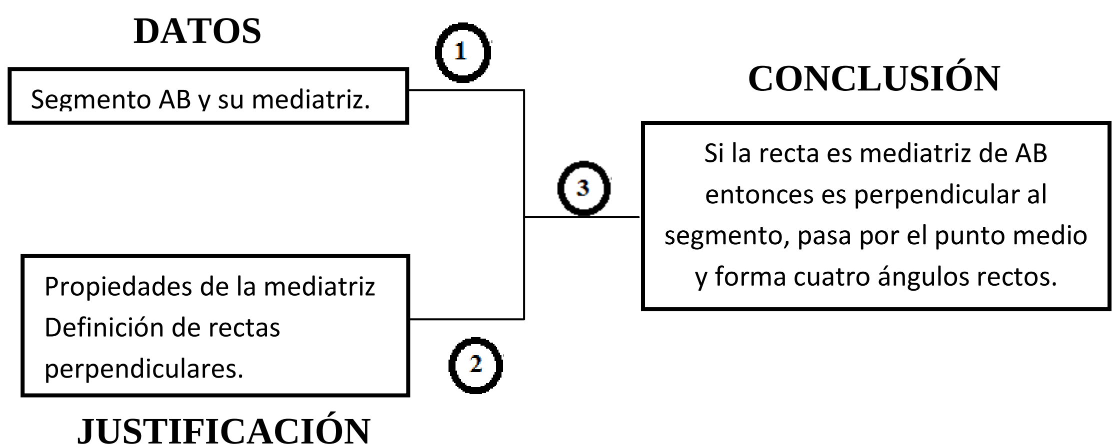


¿Qué dicen? [156-162] [168]

F	Vea, mediatriz. Volvemos a leer. Una mediatriz es una recta perpendicular al segmento. Una recta perpendicular, [señala la mediatriz que ya construyó] ahí está bien, al segmento *AB* y por el punto medio
S y F	Entonces este es el punto medio [señalan al corte de la mediatriz con el segmento *AB*]
F	Señalemos el punto medio
S	Venga lo señalamos acá. Pongámosle *P* [nombra al punto medio con la letra *P*]
S	Bueno entonces hagámosle, *P*, *C* y *D* [señala el punto medio *P*, al corte superior de las dos circunferencias lo nombra con *C* y al corte inferior con la letra *D*]
F	¿Se acuerda? la recta perpendicular, dos rectas o segmentos son perpendiculares si forman un ángulo recto, ya tenemos … [lee en las fichas]
S	Tenemos un, dos, tres, cuatro. [Señala con los dedos los cuatro ángulos rectos que forma la mediatriz con el segmento *AB*. Luego con el lápiz marca los cuatro ángulos rectos]
F	Qué forma dos ángulos rectos. ¿Se acuerdan de la clase que hicimos esto, que cualquier punto ubicado en la recta era una mediatriz?

¿Qué creemos que dicen? Se remiten a las propiedades de la mediatriz, perpendicularidad y corte por el punto medio, y las identifican en la figura.

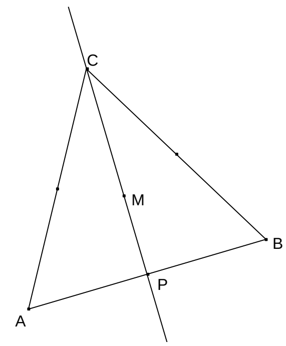
¿Por qué creemos que lo dicen? porque parten de que la construcción realizada corresponde a la mediatriz.



Intelectual-conceptual-analítico

A9P1G1E8

¿Qué tienen?



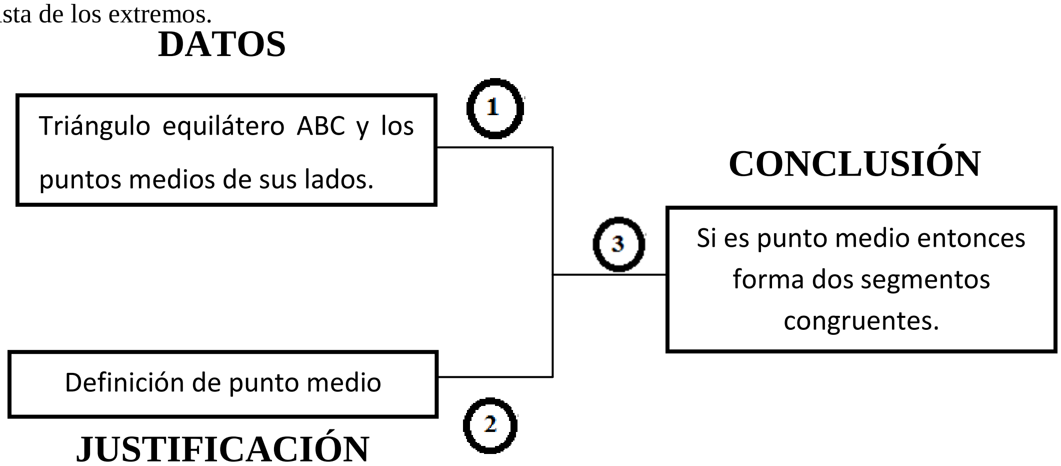
¿Qué dicen?

[197-201]

C Bueno, yo entiendo que para sacar las demás mediatrices pues toca sacar la mitad de los otros.
S Lados.
C De los otros lados
F ¿Para qué?
D Para que sean congruentes [se refiere a que son congruentes las partes del segmento en que queda dividido por el punto medio]

¿Qué creemos que dicen? Para construir las mediatrices primero se deben encontrar los puntos medios de todos los lados, que los dividen en segmentos congruentes.

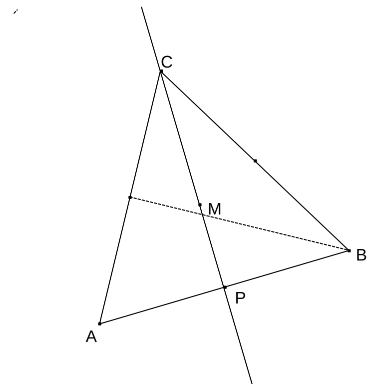
¿Por qué creemos que lo dicen? Porque el punto medio de un segmento pertenece a la mediatriz entonces equidista de los extremos.



Intelectual-conceptual-no analítico

A10P1G1E8

¿Qué tienen?



¿Qué dicen?

[208-211]

F ¿Acá cierto? [señala el punto *M* y con los dedos describe los segmentos que se forman desde el vértice A hasta el punto medio del lado BC y desde el vértice B hasta el punto medio de AC] Pun y pun ¿no?

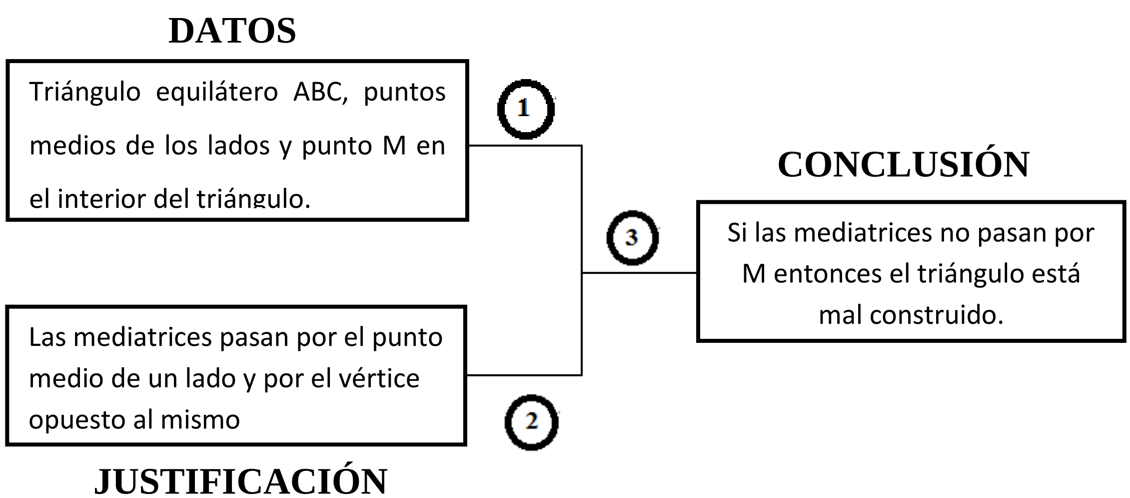
S Sí

F Entonces ya lo tenemos

S Pero el problema aquí es que de pronto, no se unan porque este punto es muy abajo [señala a *M*] entones va a pasar por encima

¿Qué creemos que dicen? Sin construir las mediatrices anticipan que no se cortarán en M.

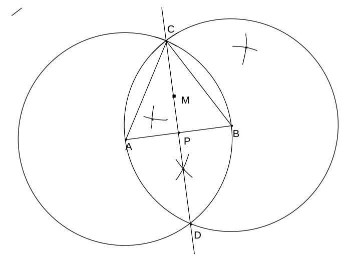
¿Por qué creemos que lo dicen? Porque al simular el trazo con la mano no cortan en M.



Pragmático-empírico-naif-de ejemplificación

A11P1G1E9

¿Qué tienen?



¿Qué dicen?

[236, 238]

S Es que tocaba coger el ancho de *M* [se refiere al radio *BM* para construir la mediatriz de BC]y pun subirle [el corte de las mediatrices quedará sobre M]

S Porque mire, tenía que cortar las tres mediatrices y las tres mediatrices dan un punto medio [se refiere a las tres mediatrices del triángulo]

[244- 245]

C Si ve que no, [se refiere a que no da, pues la mediatriz se construyó con radios arbitrarios] queda más abajo, pero ¿por qué?

S Porque tocaba con el ancho de *M*

¿Qué creemos que dicen? Hay que construir la mediatriz de BC con arcos de radio BM, para que las mediatrices se corten en el centro del triángulo.

¿Por qué creemos que lo dicen? Porque cree que la mediatriz de BC debe trazarse con radio BM para que pase por M.

DATOS

1

Triángulo equilátero ABC, mediatriz de AB y mediatriz de BC construida a partir de radios arbitrarios.

2

CONCLUSIÓN

Si la mediatriz de BC se traza con radio BM entonces las mediatrices pasan por M.

3

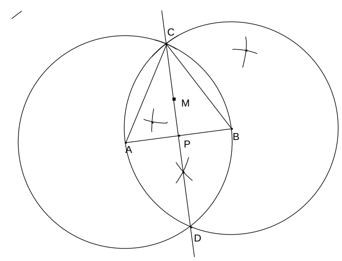
M equidista de los vértices del triángulo.

JUSTIFICACIÓN

Pragmático-empírico-crucial-constructivo

A12P1G1E11

¿Qué tienen?



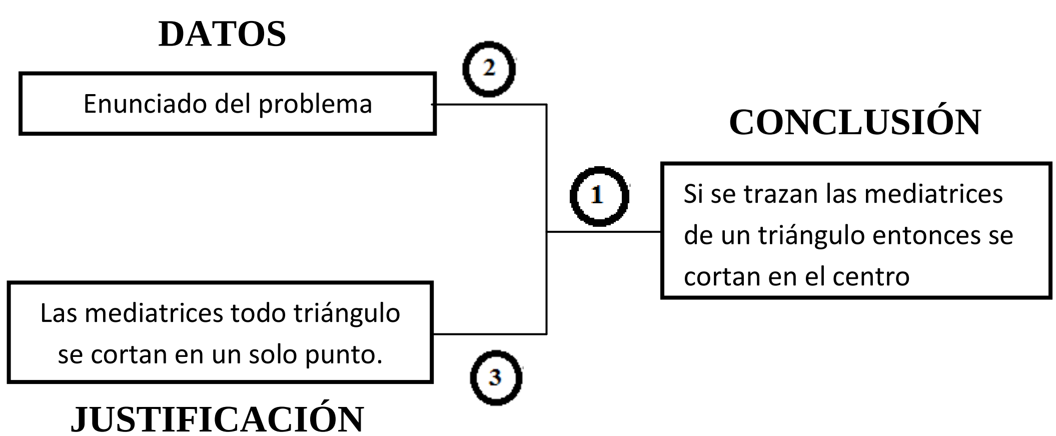
¿Qué dicen?

[289-297]

S Sí, *M* tiene que ser el punto del triángulo, o sea el centro del triángulo
P ¿Tiene que ser el centro del triángulo?
S Sí, porque las tres mediatrices cortan en un punto y el punto es el centro del triángulo
P […]
P ¿Siempre las tres mediatrices se cortan en el centro del triángulo?
F No necesariamente ¿No?
P No tenemos seguridad de eso todavía
S Bueno, yo si tengo la seguridad

¿Qué creemos que dicen? Las mediatrices de un triángulo siempre se cortan en un punto que es el centro del triángulo.

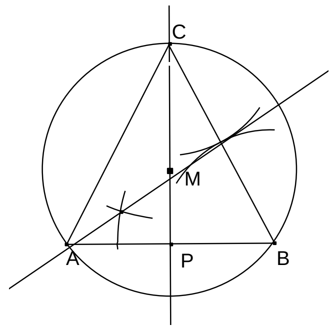
¿Por qué creemos que lo dicen? Porque cree que en el centro del triángulo se cortan las mediatrices.



Intelectual-conceptual-no analítico

A13P1G1E11 / A15P1G1E11

¿Qué tienen?



¿Qué dicen?

[306-309] F Sí es el punto medio, tendría que tener la misma medida de *M* a *P* y de *M* a *C*
S De la circunferencia, punto medio de la circunferencia

[311-315] P ¿O sea el centro?
F ¡Ah!, Sí, sí, si es que no estaba viendo esta parte, [Señala la parte de la circunferencia que queda por debajo del segmento *AB*] Disculpe Sergio
F De la circunferencia. Del triángulo ahí no es el punto medio
S ¡Ahí! Dios mío, el centro del triángulo, el centro del triángulo, ya ¿de acuerdo? ¿Ya?
F No, ese no es el centro del triángulo
S ¿Cuánto quiere perder que sí?
F ¿Cuánto que no? ¿Dígame si la misma medida de *P* a *M* es la misma de *M* a *C?* porque esto ya no hace parte del triángulo [se refiere a la parte del circulo que queda por debajo del segmento *AB*]

[319, 321]

F No le va a dar. No le da. Vea. Yo sabía que no le iba a dar porque *M* no es el punto medio del triángulo. No le da ni porque le acomode la regla [no le da pues al unir con la regla los arcos que pasan por el segmento y los otros dos arcos en el interior del triángulo; la mediatriz del segmento *BC* no pasa por *M*] [los arcos que construyo para determinar el punto medio de BC están mal construidos, porque el triángulo cumple la tarea]
F Es que *M* nunca va a poder ser el punto medio [del triángulo]. Si el punto medio esta acá [señala un punto arbitrario sobre la mediatriz, aproximadamente en el punto medio de PC] Porque tendría que dar lo mismo de aquí [P] a M y de M a C

¿Qué creemos que dicen? Felipe hace referencia a M como el centro (de la superficie) del triángulo y Sergio caracteriza a M como el centro de la circunferencia y del triángulo que corresponde al circuncentro.

¿Por qué creemos que lo dicen? Porque para Felipe M es el centro (de la superficie) del triángulo, mientras que para Sergio si M es el centro (circuncentro) debe equidistar de los vértices del triángulo.

DATOS

Triángulo ABC, con C en la intersección de la mediatriz de AB con la circunferencia de radio AM y centro M; dos arcos con mismo radio y centro en B y C; y dos arcos con diferente radio y centro B y C.

1

M es el centro (de la superficie) del triángulo

2

JUSTIFICACIÓN

3

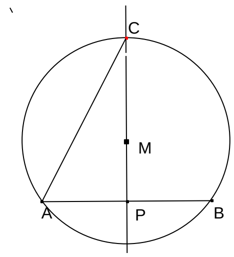
CONCLUSIÓN

Si las mediatrices se cortan en M entonces MP es igual a MC.

Pragmático-empírico-genérico-constructivo

A14P1G1E11

¿Qué tienen?



¿Qué dicen? [310] S [Construye nuevamente la mediatriz del segmento *AB*] aquí donde corta este punto, aquí si da [nombra a *C* como el corte de la mediatriz y la circunferencia] porque *M* es el punto medio del triángulo

¿Qué creemos que dicen? M es el centro (circuncentro) del triángulo.

¿Por qué creemos que lo dicen? Porque la idea que tiene de centro del triángulo corresponde al circuncentro del triángulo.

DATOS

Triángulo ABC, con C en la intersección de la mediatriz de AB con la circunferencia de radio AM y centro M.

1

2

CONCLUSIÓN

Si trazo una circunferencia con centro en M y radio MA entonces la intersección de ella con la mediatriz de AB es el C buscado.

Congruencia de segmentos comprobada con el compás

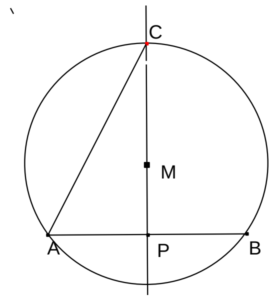
3

JUSTIFICACIÓN

Pragmático-empírico-crucial-analítico

A16P1G1E11

¿Qué tienen?



¿Qué dicen?

[327-329]

S Lo que pasa es que mi teoría era que si *B* y *A* cuadran también *C* tiene que cuadrar
P ¿Qué significa que cuadren?
S O sea, que *M* sea el punto centro del triángulo, pero veo que no y que me equivoque en mi teoría

¿Qué creemos que dicen? Si A y B equidistan de M, C también debe equidistar de M, entonces M es el centro del triángulo (circuncentro)

¿Por qué creemos que lo dicen? Porque si M está en las tres mediatrices del triángulo, entonces debe equidistar de los tres vértices del triángulo.

DATOS

1 Triángulo ABC, con C en la intersección de la mediatriz de AB con la circunferencia de radio AM y centro M.

CONCLUSIÓN

2 Si M es el centro del triángulo entonces equidista de A, B y C

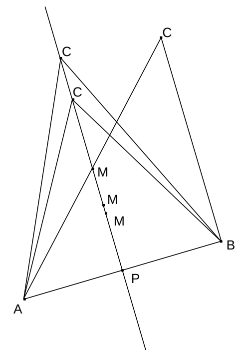
3 Centro (de la superficie del triángulo) según Felipe

JUSTIFICACIÓN

Informal-de convicción externa

A17P1G1E12

¿Qué dicen? Imaginan la variación del corte de las mediatrices en diferentes tipos de triángulos:

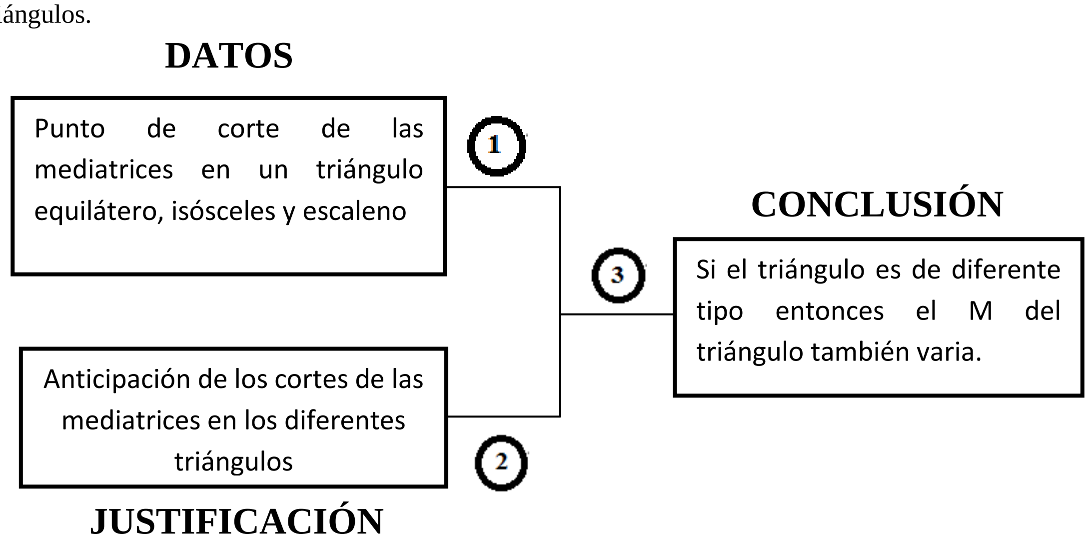


¿Qué dicen? [343-350]

F Es que *M* no necesariamente tienen que ser el punto medio, ¿cierto profe?
P Del triángulo
F Podemos hacer nosotros las mediatrices de acuerdo como salgan y *M* es otra mediatriz que es la mediatriz que va acá arriba, no siempre tiene que pasar por acá
C ¿No puede ser también en un triángulo equilátero? ¿Podría ser también un isósceles? o ¿un escaleno?
S […]
C *M* podría ser punto medio de un segmento [se refiere un lado del triángulo]
F No necesariamente tiene que cortar por *M*, eso es lo que les trato de decir

¿Qué creemos que dicen? Depende del tipo de triángulo, M varia y no necesariamente debe ser el centro del triángulo.

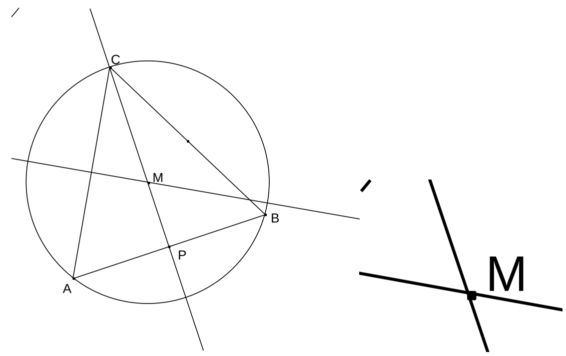
¿Por qué creemos que lo dicen? Anticipan los movimientos de M al pensar en diferentes tipos de triángulos.



Pragmático-Empírico-naif-inductivo

A18P1G1E13

¿Qué tienen?



¿Qué dicen?

[371-374]

S Bueno, si *M* es el punto de equidistancia de *B* y de *A*
P Sí
S También tendría que ser el punto de equidistancia de *C* para que al sacar las tres mediatrices corten en ese punto que es *M* y*M* tendría que ser el centro. Pero, en la construcción que hice ahorita tratando de probar mi teoría, no me dio… [por errores de construcción]
F Porque *M* no es el centro, no le dio porque *M* no es el centro

¿Qué creemos que dicen? M equidista de A, B y C; pero el corte de las mediatrices no pasa por M por error de construcción.

¿Por qué creemos que lo dicen? Porque no es el centro del triángulo que describe Felipe.

DATOS

Triangulo ABC con C en la intersección de la mediatriz de AB y la circunferencia de radio AM y centro en M

1

2

CONCLUSIÓN

Si M equidista de los vértices del triángulo entonces esta en el centro del triángulo.

Errores de construcción

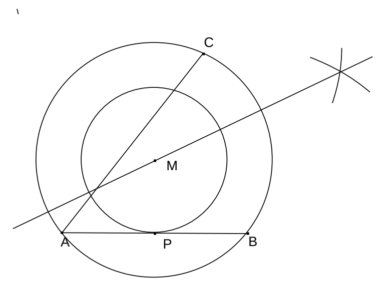
JUSTIFICACIÓN

3

Informal-de convicción externa

A19P1G1E15

¿Qué tienen?



¿Qué dicen?

[402,406]

S [Construye arcos de centro B y C y radio cualquiera que se intersecan a un lado del segmento, por fuera del triángulo. Aún le faltan dos arcos para trazar la mediatriz. Une con la regla el corte de los arcos y *M*] Sí dio, sí dio, dios mío…

S [Mira si la recta trazada pasa por el punto A] No dio Estoy tratando de comprobar si lo que yo digo es cierto ¿ya? [dice que no da porque la mediatriz no pasa por A][borra el triángulo]

¿Qué creemos que dicen? La mediatriz de BC debe pasar por el vértice A.

¿Por qué creemos que lo dicen? Porque creen que la mediatriz de un lado del triángulo debe pasar por el vértice opuesto.

DATOS

Triángulo ABC con C en la mediatriz de AB (que cumple la tarea), recta que pasa por el punto M y por el corte de los arcos con centro en B y C y misma distancia.

1

3

CONCLUSIÓN

Si la mediatriz pasa por M y por el vértice opuesto entonces el triángulo cumple el problema.

La mediatriz del lado de un triángulo siempre pasa por el vértice opuesto.

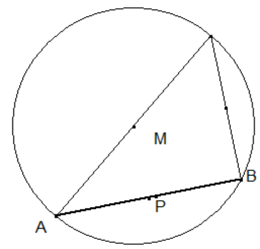
2

GARANTE

Pragmático-empírico-naif-de ejemplificación

A20P1G1E16

¿Qué tienen?



¿Qué dicen?

[426-428]

S Es que *M* tiene que ser el punto medio de todo. ¿Cierto? ¡Sí dio Felipe!, ¡sí dio!
F ¿Qué?
S Su teoría dio. Ah, no le dio Felipe. ¿Le digo por qué? porque tiene que pasar por *M* a un punto y el contrarío de éste es éste, el contrarío de este punto es éste, el contrarío de éste o sea del punto, no espere [Está comparando cada vértice con el punto medio del lado opuesto] El punto medio es este ¿cierto? Si o pa' que, pero tiene que cortar con… así sí, no da profe, no da

¿Qué creemos que dicen? Anticipan que las mediatrices (medianas) no pasan por M.

¿Por qué creemos que lo dicen? Porque creen que las mediatrices deben pasar por el punto medio y por el vértice opuesto.

DATOS

Triángulo ABC con M sobre el lado AC, C en la circunferencia de radio AM y colineal con A y M. Describe con los dedos las mediatrices del triángulo.

1

3

CONCLUSIÓN

Si las mediatrices cortan en M entonces M es el centro del triángulo.

M debe estar en el centro del triángulo

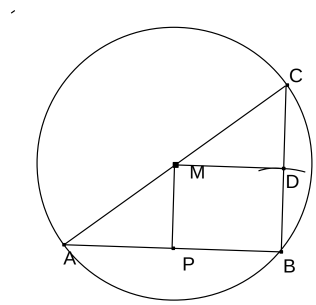
2

GARANTE

Pragmático-empírico-crucial-de ejemplificación

A21P1G1E16

¿Qué tienen?



¿Qué dicen?

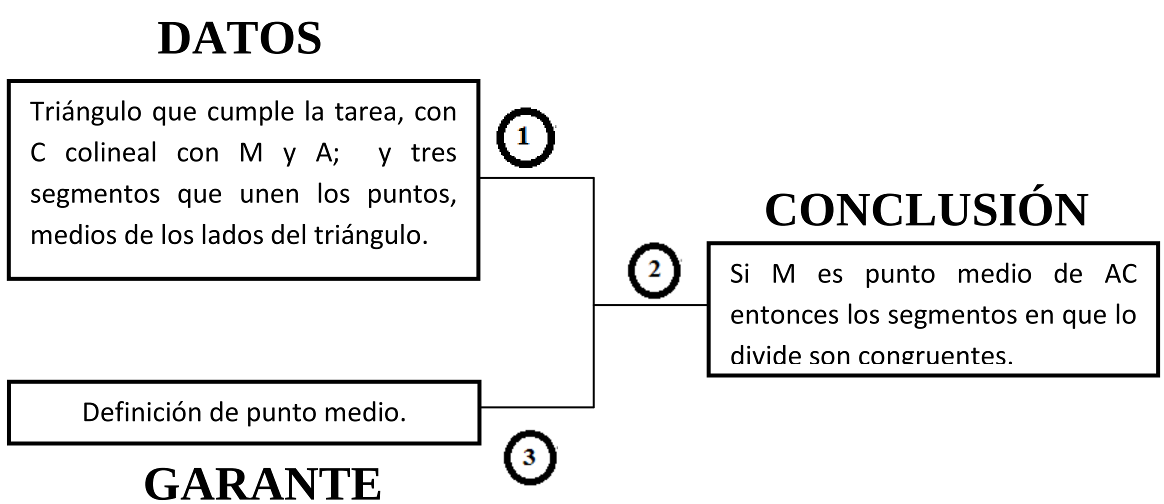
[440,441]

P ¿Y porque sé que es punto medio del lado *AC*? [se refiere al punto M]

F Porque tiene la misma medida de acá a acá y de acá a acá [señala las distancias *MA* y *MC*] Entonces nosotros antes habíamos hecho un triángulo el cual nos dio y teníamos la mitad que era *P* y con la medida *PM* sacamos la mitad de *BC* y sacamos un triángulo cualquiera que se uniera con punto *M*, *P* y …punto *D* [nombra el punto medio de *BC* con la letra *D*]

¿Qué creemos que dicen? Justifica porque M es el punto medio del lado AC

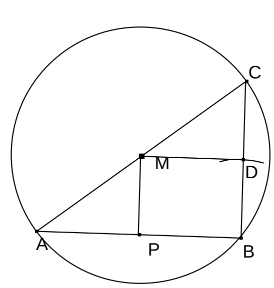
¿Por qué creemos que lo dicen? Porque quieren estar seguros que M es el punto medio del lado AC.



Pragmático-empírico-crucial-constructivo

A22P1G1E16

¿Qué tienen?



¿Qué dicen?

[453-455]

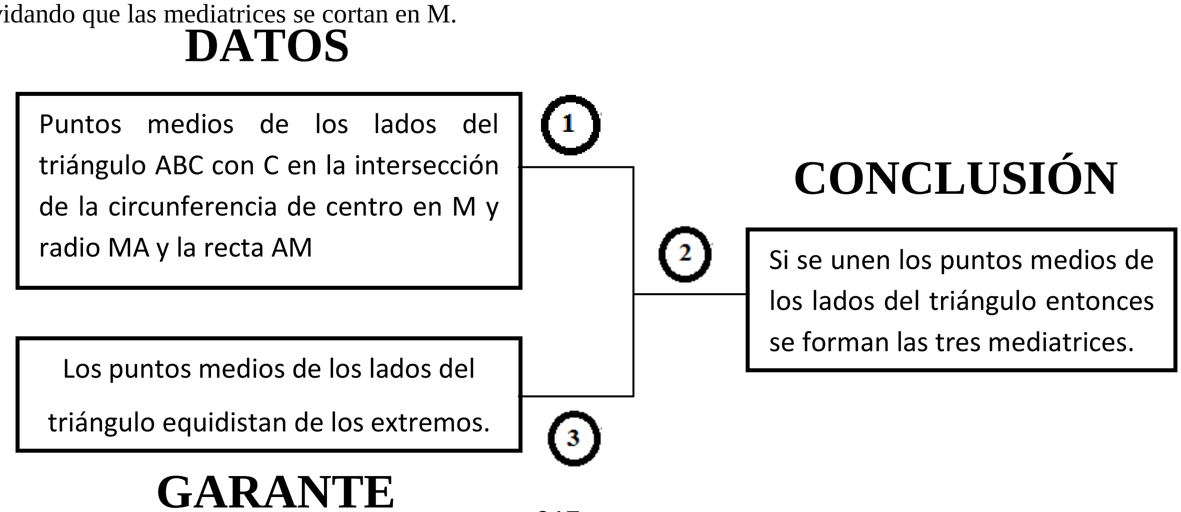
F Porque tendría que dar en el punto medio de acá, ¿si me entiende? [se refiere al punto medio del lado *BC*] Yo, mi teoría es la siguiente: como dice que una mediatriz es una equidistancia del segmento *AB* entonces esta distancia que hay entre *AP* es la misma que hay entre *BP* entonces esta distancia tendría que ser igual acá [*MP*] entonces este sería un punto equidistante [*M*] y este también [*D*] [compara la distancia de *MP* con *PB* y dice que son iguales por eso *M* y *D* son puntos equidistantes]

P Bueno esta distancia es igual a esta [se refiere a *AP* y *PB*] entonces bueno este [*P*] es punto medio

F Esta [AM] es igual a esta [MC] y esta [CD] es igual a esta [*DB*] y esta [AP] es igual a esta [PB]…o sea que sería un punto equidistante o sea que ya tendríamos las tres mediatrices.

¿Qué creemos que dicen? Afirma que al unir los puntos medios de los lados del triángulo ABC (C en la intersección de la circunferencia de centro en M y radio MA y la recta AM), encuentra las tres mediatrices del triángulo.

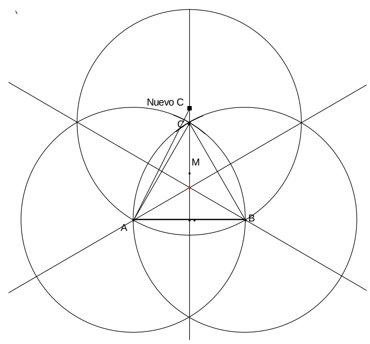
¿Por qué creemos que lo dicen? Porque los puntos medios de los lados forman segmentos congruentes, olvidando que las mediatrices se cortan en M.

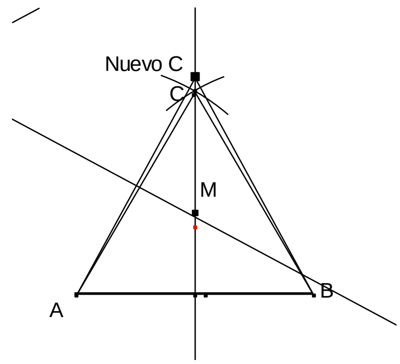


Pragmático-empírico-crucial-analítico

A23P1G1E19

¿Qué tienen?





¿Qué dicen?

[601-603]

S Lo que construimos primero era un triángulo equilátero, y no era un triángulo equilátero, era un triángulo isósceles, entonces lo construimos aquí [señala donde estaba inicialmente el punto *C*].

P Entonces *C* originalmente estaba aquí abajito, pero ¿cómo sabían que tanto lo iban a correr? Y ¿por qué hacia arriba?

F Porque los cortes que hicimos nos daban más abajo, entonces de lógica hicimos, *M* estaba ubicado acá entonces nos dio por acá abajo, entonces tomamos la misma medida de este punto a *M* y la subimos, pongámosle *C* antiguo la subimos a donde estaba…entonces tomamos la medida y tomamos otro *C* nuevo…

¿Qué creemos que dicen? Deciden subir el vértice C del triángulo ABC equilátero sobre la mediatriz de AB una distancia igual a la distancia que hay desde el corte de las mediatrices a M.

¿Por qué creemos que lo dicen? Porque al subir C la distancia que hay entre M y el corte de las mediatrices, el corte de las nuevas mediatices sube hasta M.

DATOS

Triángulo equilátero ABC, triángulo isósceles ABC con C ubicado en la mediatriz de AB y distancia entre éste y el C del equilátero igual a la distancia entre el corte de las mediatrices del equilátero y M.

1

2

CONCLUSIÓN

Si se sube a C sobre la mediatriz una distancia igual a la distancia que hay desde el corte de las mediatrices del equilátero hasta M entonces el triángulo isósceles resultante cumple el problema.

La distancia que sube C sobre la mediatriz del segmento AB es la misma que sube el corte de las mediatrices.

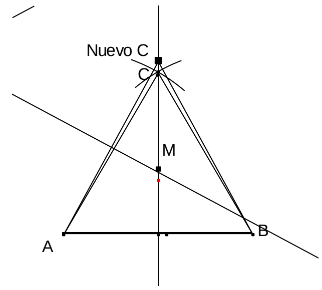
3

GARANTE

Pragmático-empírico-crucial-de ejemplificación

A24P1G1E19

¿Qué tienen?

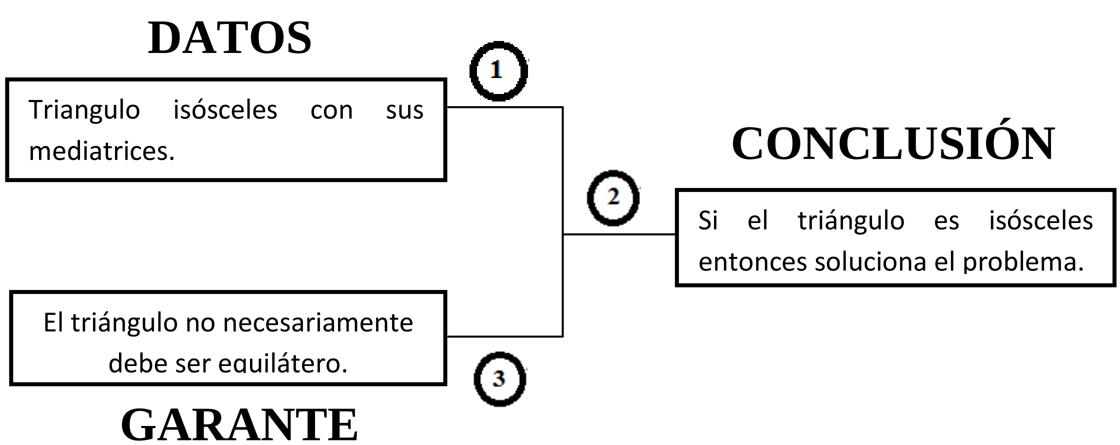


¿Qué dicen?

[609-611]	P	Pero justifique, hagámoslo acá nuevamente y justifiquemos por qué ese poquito que subía acá era lo que tenía que subir ese vértice para que me diera
	S	Porque no necesariamente tiene que ser un triángulo equilátero. Porque como *M*…
	F	Podría ser cualquier triángulo no necesariamente tiene que ser… [equilátero]

¿Qué creemos que dicen? Justifican por qué la distancia que subieron C a partir del triángulo equilátero es la adecuada.

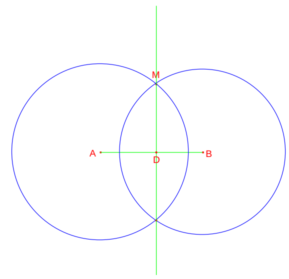
¿Por qué creemos que lo dicen? Porque el triángulo no tiene que ser equilátero, puede ser isósceles.



Pragmático-empírico-genérico-de ejemplificación

A25P1G2E1

¿Qué tienen?



¿Qué dicen?

[12-14]	Ley	No, mira, tienes que darle… o sea… tienes que tomar la distancia de D [Punto medio de AB] a M
	Maf	¡Ah ¡ Si, si.
	Ley	Para saber cuál es la de abajo [señala las distancias de D a los cortes de las circunferencias de igual radio], o si no, no te va a dar igual [las distancias].

¿Qué creemos que dicen? Para construir la mediatriz del lado AB se deben hacer arcos arriba y abajo del segmento con radios iguales.

¿Por qué creemos que lo dicen? Porque las distancias de los cortes de las circunferencias a D deben ser iguales.

DATOS

Segmento AB su mediatriz y un punto M sobre ella. Circunferencias de igual radio que se cortan arriba y abajo del segmento AB.

1

CONCLUSIÓN

3

Si la mediatriz se traza a partir de circunferencias de igual radio entonces las distancias de los arcos al punto medio del segmento AB son iguales.

Congruencia de segmentos

GARANTE

2

Pragmático-empírico-genérico-constructivo

A26P1G2E2

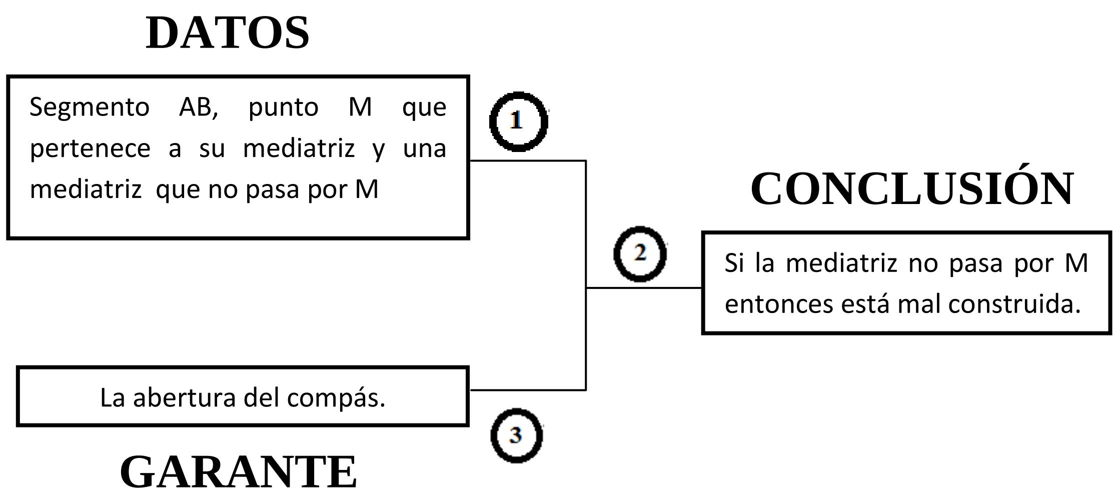
¿Qué tienen? Segmento AB, punto M y mediatriz de AB mal construida.

¿Qué dicen?

[31-33]	Ley	No, pero mira que ahí está mal [Señala que la recta construida como mediatriz no pasa por M; Julián había tomado mal la medida BM]
	Maf	Al sacarle la mediatriz de AB
	Jul	Espérate… espérate porque es que tome la medida del compás mal.

¿Qué creemos que dicen? La mediatriz de AB no pasa por M por errores de construcción.

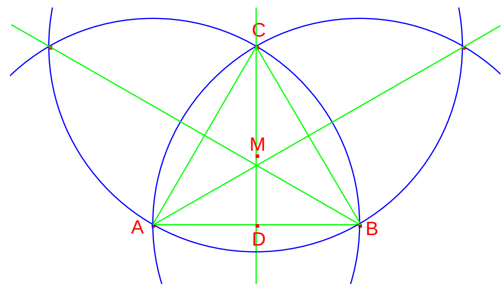
¿Por qué creemos que lo dicen? Porque la abertura del compás se modificó durante la construcción.



Pragmático-empírico-genérico-constructivo

A27P1G2E3

¿Qué tienen?

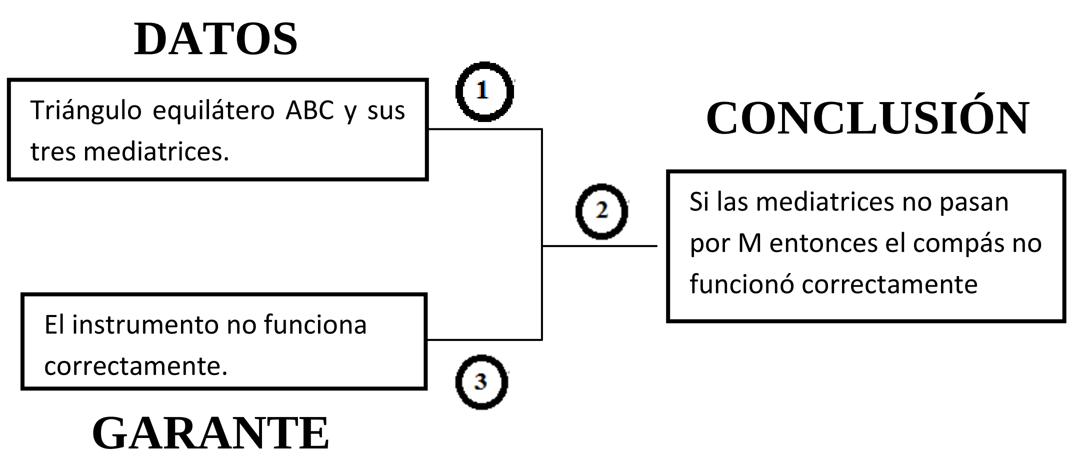


¿Qué dicen?

[63-65]	Nic	Pero esto quedo mal [las mediatrices no cortan en M]. Uhm…
[77-78]	Ley	Nos descachamos.
[84-85]	Jul	Es que la tomó mal. Vea [Muestra que no cortan en M] se salió. Por qué no lo hace con un… es que esa mina está muy gruesa, ¿no?
[88]	Ley	No, mira que a mí tampoco me da en el punto. [En la hoja 1, las mediatrices no se cortan en M].
	Jul	Espérate porque es que Nicolás tomó la mediatriz aquí mal [se refiere a que no trazo los arcos con exactitud y por eso la mediatriz no pasa por M]. Espera volvamos a hacer ese [repetir el proceso de trazo de la mediatriz].
	Ley	Pero no, da abajo [la mediatriz de BC pasa más abajo del punto M y no sobre él].
	Jul	Es que Nico la tomó mal. [En la hoja 2, Repite el proceso de construcción para la mediatriz de BC].
	Jul	¡Ah! pues es que le… y… ¿entonces? Nos toca buscar otro proceso.

¿Qué creemos que dicen? Dado el triángulo equilátero ABC y sus mediatrices, estas no pasan por M.

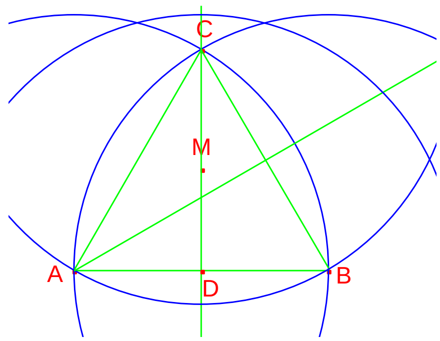
¿Por qué creemos que lo dicen? Porque el instrumento no funcionó correctamente.



Informal-de convicción externa

A28P1G2E4

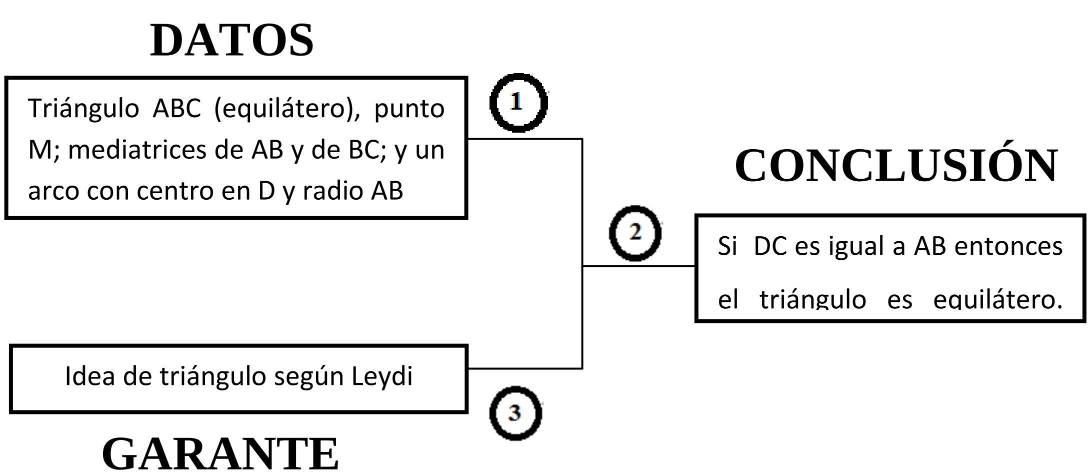
¿Qué tienen?



¿Qué dicen?	Ley	Es que, ¡mira! acá lo que nos está… o sea… supongamos no nos da acá [En la hoja 1, señala M], es que BC y AC no tienen la misma medida de AB, o sea ésta es más larga [señala BC], para que nos de este [señala M]… o sea que lo que toca...
[93, 97-98]	Nic	Esta medida [en la hoja 2, señala AB] es ésta [señala BC] ¿Cierto?... Entonces, para comprobar bien, nos paramos aquí en el punto medio [D]. ¡Claro! Es que mira; yo tomo la distancia del segmento AB y me paro en el punto medio [de AB] y no da [en la hoja 2, toma el compás y con distancia AB y centro D, marca un arco en la mediatriz de AB, mostrando que para que el triángulo sea equilátero debe medir lo mismo AB y DC, por lo cual se debe reubicar C en este corte].
	Ley	¡Por eso es que no nos da la mediatriz!, ¡ah! Entonces ahí la embarramos, nos toca borrar.

¿Qué creemos que dicen? En el triángulo CD debe ser igual que AB para que el triángulo sea equilátero.

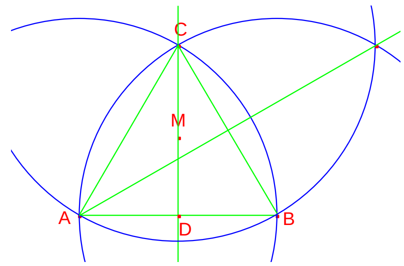
¿Por qué creemos que lo dicen? Porque creen que AC y BC son diferentes de AB.



Pragmático-empírico-naif-de ejemplificación

A29P1G2E4

¿Qué tienen?



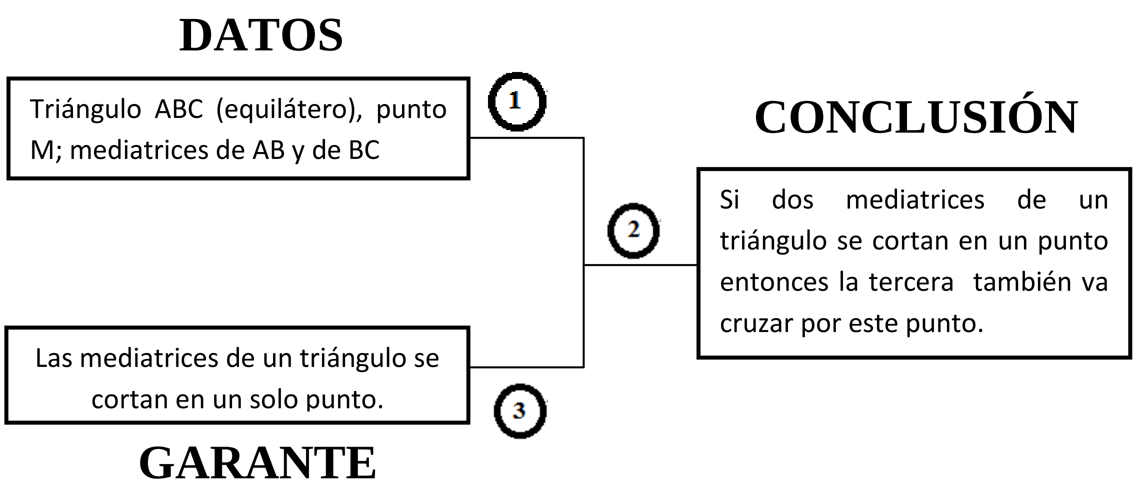
¿Qué dicen?

[94, 96]

Maf	Saquemos mediatriz de CA, a ver qué…
Ley	¡No! porque al sacar la [tercera] mediatriz no vamos a hacer nada ahí.
Maf	¡Ah! porque tiene que pasar [las tres mediatrices por M]… si.

¿Qué creemos que dicen? Si dos mediatrices no cortan en M entonces no es necesario trazar la tercera mediatriz para verificar que corten en M

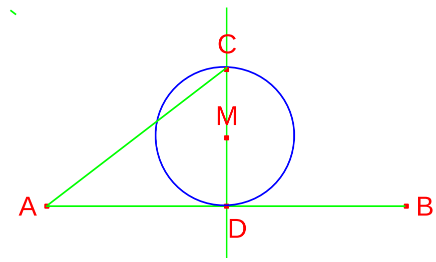
¿Por qué creemos que lo dicen? Porque creen que las tres mediatrices de un triángulo se cortan en un solo punto.



Intelectual-conceptual-analítico

A30P1G2E5

¿Qué tienen?

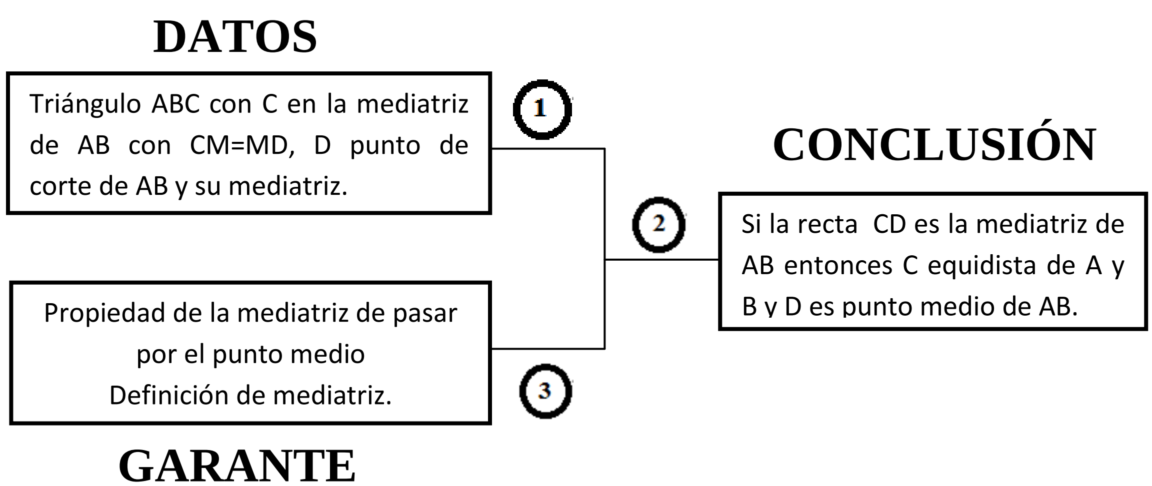


¿Qué dicen?

[156] Nic: Pues primero porque toca comparar el segmento AD con el segmento DB y yo sé que estos dos segmentos unen un segmento que es el segmento AB, pero el segmento [AB] lo divide la mediatriz que siempre pasa por el punto medio, por eso sé que estos dos segmentos son iguales. Esto, el segmento AC y el segmento BC son iguales porque están... el punto C está ubicado en la mediatriz

¿Qué creemos que dicen? Identifican en la gráfica la propiedad pasar por el punto medio de la mediatriz, y su definición, conjunto de puntos que equidistan.

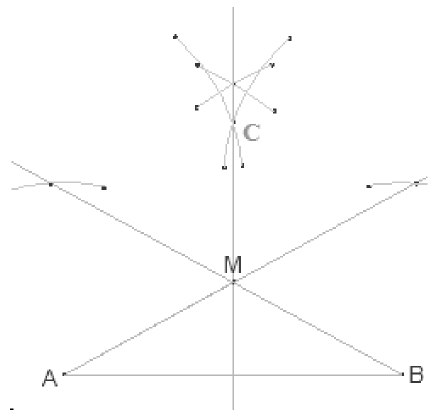
¿Por qué creemos que lo dicen? Porque se remiten a la definición de mediatriz y la evidencian en la construcción.



Intelectual-conceptual-analítico

A31P1G2E7

¿Qué tienen?



¿Qué dicen?

[269]	Ley	Si vez, ya sé por qué eso no nos funcionó[la ubicación de C porque A, C y el corte, con centro en A y distancia AM, con el rayo BM no son colineales], porque como no pasaba por ésta [señala un nuevo corte en el rayo BM colineal con A y C], pues la mediatriz… eh la ésta va cambiar [lado del triángulo]

¿Qué creemos que dicen? C no cumple las condiciones del problema

¿Por qué creemos que lo dicen? Porque A, el corte en el rayo BM y C no son colineales; y B, el corte en el rayo AM y C tampoco lo son.

DATOS

El triángulo ABC con C en la mediatriz de AB, trazado a partir de dos arcos con radio AM y centro en A y B, que se cortan con los rayos BM y AM; luego con centro en los cortes de los rayos y radio AM trazan los arcos que se cortan sobre la mediatriz de AB.

1

CONCLUSIÓN

3

Si no son colineales C, el corte sobre un rayo y un vértice entonces el vértice C no soluciona el problema.

Definición de puntos colineales

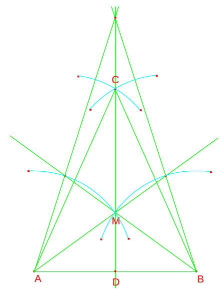
2

GARANTE

Pragmático-empírico-crucial-constructivo

A32P1G2E8

¿Qué tienen?



¿Qué dicen?

[283-289, 298]

P2	¿Es necesario que el punto C este en la mediatriz de AB?
Ley	Que el punto C... sí, es necesario
P2	¿Por qué?
Ley	porque el punto C es el que une las puntas de… o sea, une los extremos de… o sea, termina de formar el triángulo, al unirlos formamos el triángulo
P2	Pero, ¿Es necesario que pertenezca a la mediatriz de AB?
Ley	No se
Maf	Sí, es necesario porque están diciendo que M debe estar cortando la mediatriz [M sea el corte de las mediatrices], entonces pues tiene que estar [M] en el medio para poder cortar
Jul	[…]
Ley	Es que AC y BC, deben de medir lo mismo, entonces al ponerlo en otra parte, pues ya no van a medir lo mismo, o AC va medir más o BC va medir más y ya no, o sea ya estaríamos hallando la mediatriz en otra parte

¿Qué creemos que dicen? Justifican que C debe estar en la mediatriz para asegurar que C equidista de los extremos de AB.

¿Por qué creemos que lo dicen? Porque creen que el triángulo que solucione el problema debe ser isósceles.

DATOS

Triángulo ABC isósceles con C sobre la mediatriz de AB y colineal con A, y el corte en el rayo BM

1

CONCLUSIÓN

3

Si un punto está en la mediatriz entonces equidista de los extremos del segmento

Definición de mediatriz.

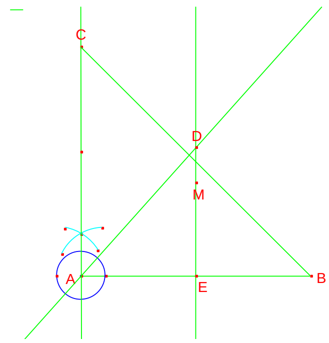
2

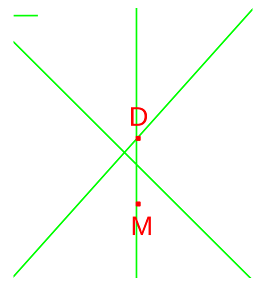
GARANTE

Pragmático-empírico-crucial-analítico

A33P1G2E8

¿Qué tienen?





¿Qué dicen?

[325, 330]	Nic	Las medidas están mal
	Nic	Porque el corte de las mediatrices no dio un punto exacto [el corte de las mediatrices no dio en un punto por errores en la construcción]

¿Qué creemos que dicen? Las mediatrices están mal construidas

¿Por qué creemos que lo dicen? Porque las mediatrices no se cortan en un solo punto

DATOS

1

Triángulo rectángulo ABC con AB=AC y mediatrices de los tres lados.

CONCLUSIÓN

2

Si se trazan las tres mediatrices de un triángulo entonces se deben cortar en un solo punto

Las mediatrices se cortan en un solo punto.

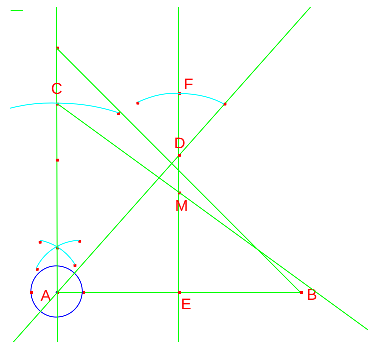
3

GARANTE

Intelectual-conceptual-analítico

A34P1G2E9

¿Qué tienen?

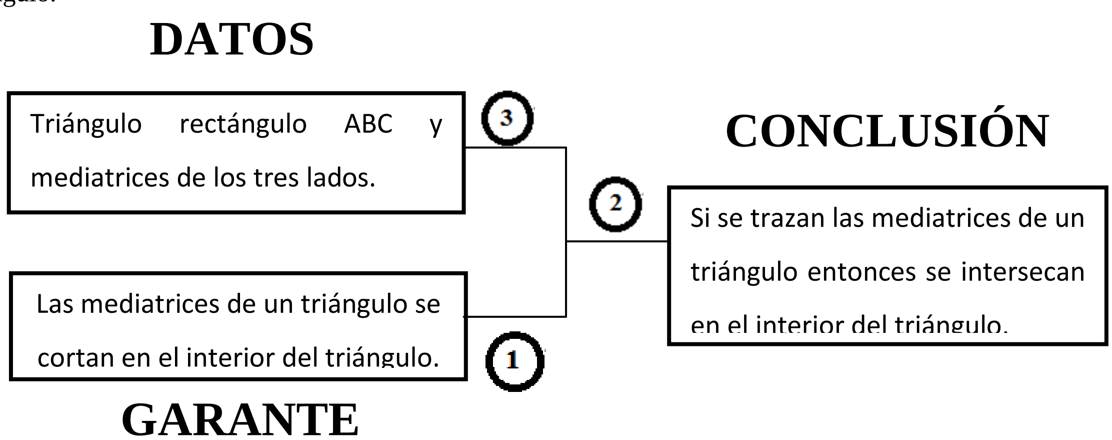


¿Qué dicen?

[367-369]	Maf	El punto M es el punto donde se cortan las mediatrices del triángulo ABC
	Ley	Por eso
[372-373, 377]	Maf	Entonces M si tiene que estar en... en… en la mitad [del triángulo] [revisa la construcción inicial, es decir la del triángulo isósceles]
	P2	¿Por qué dices que tiene que estar [M], dentro del triángulo? O ¿por qué crees?
	Maf	Porque… o sea, dice que tiene que el punto M es el punto donde se cortan las mediatrices del triángulo ABC, y pues, M pues, está en la mediatriz y la mediatriz está ya en el punto medio [del triángulo], sí
	Maf	Pues se tiene que estar también en el punto medio para que, o sea, para que se puedan cortar, ¿si me entiendes? [habla con Leidy]

¿Qué creemos que dicen? Justifica por qué el corte de las mediatrices debe estar en el punto medio del triángulo.

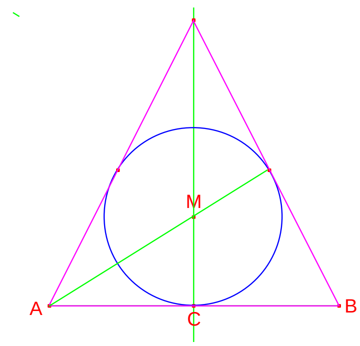
¿Por qué creemos que lo dicen? Porque supone que las mediatrices siempre se cortan en el interior del triángulo.



Pragmático-empírico-crucial-de ejemplificación

A35P1G2E10

¿Qué tienen?

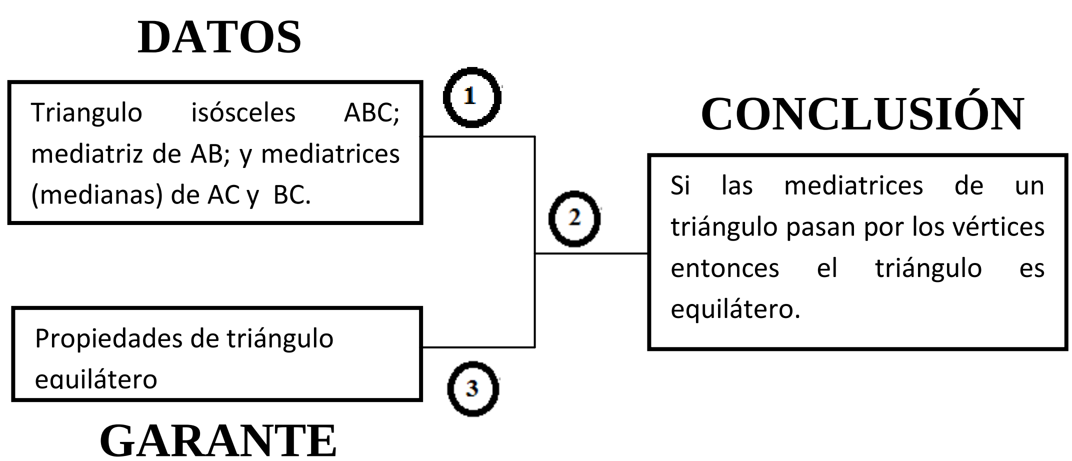


¿Qué dicen?

[382-385]	P2	¿Por qué siempre que trazas las mediatrices pasan por el punto A o por el punto B? [vértices opuestos al lado]
	Jul	Porque cuando, es que no sé, o sea, tocaría, es que pensé, me imagino que si pasa por el punto B [vértice opuesto al lado] tendría que ser el triángulo equilátero, ¿no?, pues en este caso no es equilátero, entonces está mal; pues entonces estas mediatrices.. [señala el rayo BM]
	P2	Y si no es equilátero, ¿qué pasa con las mediatrices?
	Jul	Las mediatrices no pasan por los puntos B o A, o sea, digamos la mediatriz de [AC está mal trazada]…

¿Qué creemos que dicen? Justifican que las mediatrices no pasan por los vértices.

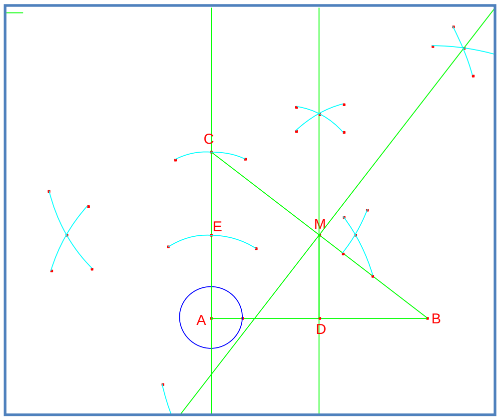
¿Por qué creemos que lo dicen? Porque el triángulo no es equilátero.

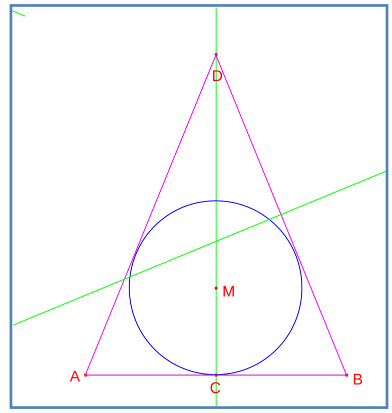


Pragmático-empírico-genérico-analítico

A36P1G2E12

¿Qué tienen?





¿Qué dicen?

[463]	Ley	En AC y en AD [señala los segmentos de los dos triángulos], ¿por qué?, porque acá [segmento AC de su triángulo] la medida es muy distinta a ésta [señala CB en triángulo rectángulo] y ésta [segmento AC del triángulo rectángulo] medida es muy distinta a ésta [segmento AC del triángulo isósceles]; por eso a nosotras si nos dio y a ellos no, porque nosotras tomamos medidas distintas. Ellos trataron fue de hallar la mediatriz pero que todos fueran igua.., o sea, que estos dos fueran iguales [señala DA y DB en el triángulo isósceles] [...]

¿Qué creemos que dicen? Compara las dos construcciones realizadas y justifica por qué en el triángulo rectángulo las mediatrices cortan en M y en el triángulo isósceles no.

¿Por qué creemos que lo dicen? Porque para que las mediatrices pasen por M el triángulo debe ser escaleno.

DATOS

Triángulo rectángulo, triángulo isósceles y sus respectivas mediatrices.

1

CONCLUSIÓN

3

Si las mediatrices pasan por M entonces el triángulo es escaleno

Los lados del triángulo deben ser de diferente medida para que las mediatrices corten en M

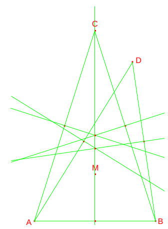
2

GARANTE

Pragmático-empírico-genérico-analítico

A37P1G2E13 / A38P1G2E13 / A39P1G2E13

¿Qué tienen?



¿Qué dicen?

[598-600, 608]	Jul	Pero no porque mira, de todos modos la [mediatriz] de AB…
	Nic	siempre hay un punto de corte
	Jul	la de AB ya estaba mira, este es el punto de corte [señala el circuncentro]
	Jul	Siempre va, se van a encontrar todas en un punto
[599-602]	Nic	siempre hay un punto de corte
	Jul	la de AB ya estaba mira, este es el punto de corte [señala el circuncentro]
	Ley	Sí y ése [señala] es éste y éste el de acá, ¿dónde está? [confunde las mediatrices de los dos triángulos con bases iguales AB]
	Nic	O sea, éste es el de éste, éste es... [señala el corte de las tres mediatrices del nuevo triángulo]
[597, 601, 603, 605]	Ley	Pues que no, o sea, no cruzaron todas las mediatrices solo cruzaron dos, o sea que...
	Ley	Sí y ése [señala] es éste y éste el de acá, ¿dónde está? [confunde las mediatrices de los dos triángulos con bases iguales AB]
	Ley	¿Cuál es la medida? Ah sí, sí corta, o sea que la conclusión es que, no importa la medida, o sea las medidas de los lados…
	Ley	del segmento, siempre la mediatriz eh… va a cruzar de todos los lados del triángulo, siempre la mediatriz va cruzar [cortan en un punto]

¿Qué creemos que dicen? Todas las mediatrices del triángulo siempre se van a cortar en un punto.

¿Por qué creemos que lo dicen? Porque es una regularidad en las dos figuras.

DATOS

Triángulo rectángulo, triángulo isósceles y sus respectivas mediatrices.

1

3

CONCLUSIÓN

Si se trazan las mediatrices de un triángulo entonces siempre se cortan en un punto

Las mediatrices de un triángulo se cortan en un punto.

2

GARANTE

Pragmático-empírico-genérico-analítico

A40P1G2E13

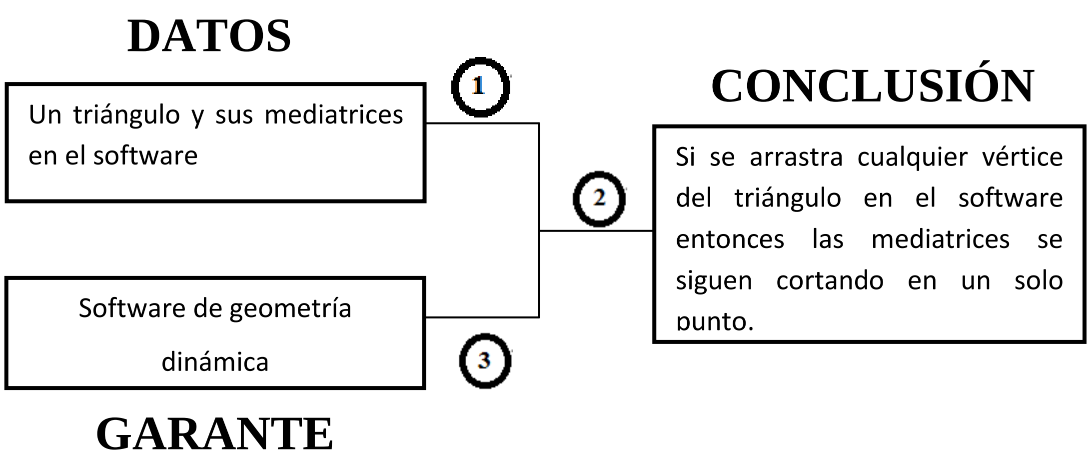
¿Qué tienen? Experiencia con **s**oftware de geometría dinámica

¿Qué dicen? [584]

Jul: o sea, me acordé porque la vez pasada la profe nos mostró un programa que ella tiene en el computador, ella hizo un triángulo todas con sus mediatrices y ella movía nada más este punto [señala un vértice], ¿sí?; para cualquier lado que lo moviera las mediatrices siempre se cruzaban en un punto cualquiera

¿Qué creemos que dicen? Las mediatrices se cortan en un punto

¿Por qué creemos que lo dicen? Porque lo vieron en un software de geometría dinámica



Informal-de convicción externa

A41P2G1E1

¿Qué tienen?

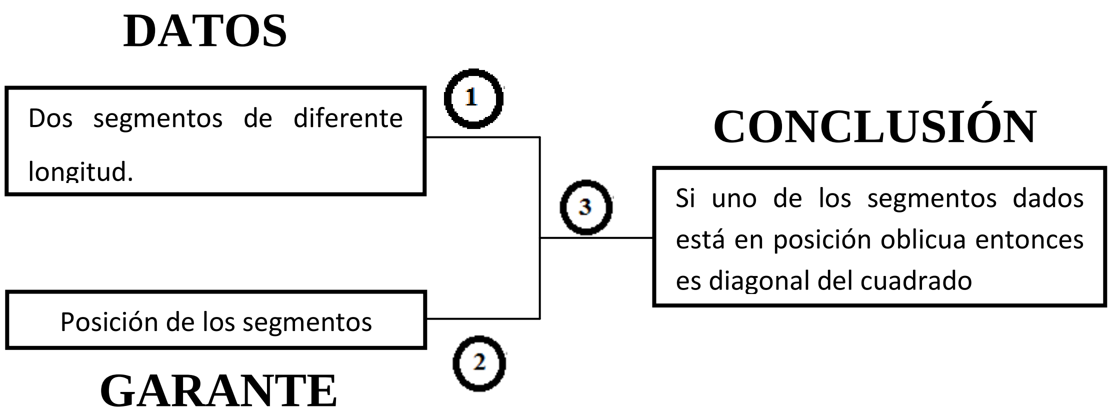
Problema 2: *Construya un rectángulo a partir de dos segmentos: uno como lado y el otro como diagonal.*

¿Qué dicen? [5-9]

Profesor	Uno de esos segmentos que hay ahí, es uno de los lados del rectángulo.
Felipe	Sí.
Profesor	Y el otro, es una diagonal.
Sergio	O sea diagonal así [con la mano traza una línea oblicua en el espacio].
Felipe	¡Ah! ya, pero ahí no tiene cara de diagonal ninguno.

¿Qué creemos que dicen? No identifican a ningún segmento dado como diagonal.

¿Por qué creemos que lo dicen? Porque su posición es horizontal y no oblicua.



Pragmático-empírico -crucial-de ejemplificación

A42P2G1E1 / A64P2G2E7

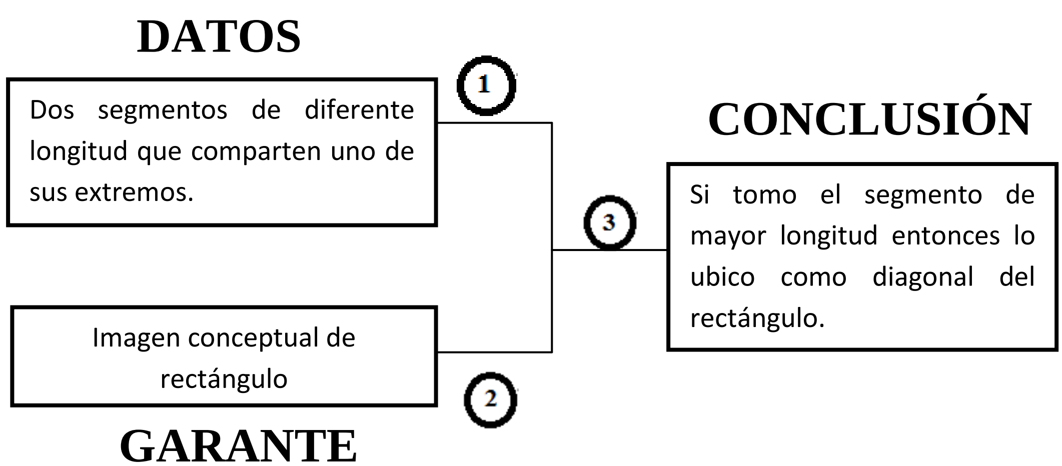
¿Qué dicen?

[17-23]	Sergio	Este podría ser, sí, pero este no alcanza de un lado al otro lado [señala el segmento de mayor medida para tomarlo como base; y se refiere a que el otro segmento no alcanza a cruzar todo el rectángulo]; entonces podríamos hacer esto.
	Profesor	Repite lo que dijiste que… ¿qué?
	Sergio	Este [segmento más largo], podría ser un lado, pero esta [señala el segmento más corto], no podría ser la diagonal porque no alcanza hasta la otra esquina, Entonces…
	Profesor	O sea que ¿ahí que pasa? es muy que…
	Sergio	Es muy corta, entonces yo sugeriría que esta sería la base [señala el segmento más corto].
	Profesor	¿O sea que ustedes sugieren que la diagonal tiene que ser la más larga?
	Sergio	La diagonal tiene que ser larga

[207-210]	P2	O sea que para ti el segmento más largo que daba la tarea era la diagonal
	Todos	Sí
	P2	¿Por qué dedujeron eso? ¿Por qué no podía ser al revés?
	N	Porque la diagonal, primero el segmento es muy pequeño y no alcanza hacer como la diagonal, a atravesar el rectángulo.

¿Qué creemos que dicen? El segmento de menor longitud no puede ser una diagonal, ésta debe ser el segmento de mayor longitud.

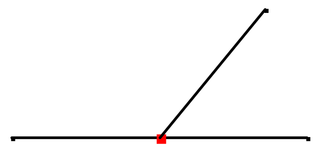
¿Por qué creemos que lo dicen? porque al colocar el segmento de menor longitud sobre uno de los extremos del otro segmento, no alcanza hasta el vértice opuesto, para ubicarse como diagonal.



Intelectual-conceptual-analítico

A43P2G1E2

¿Qué tienen?

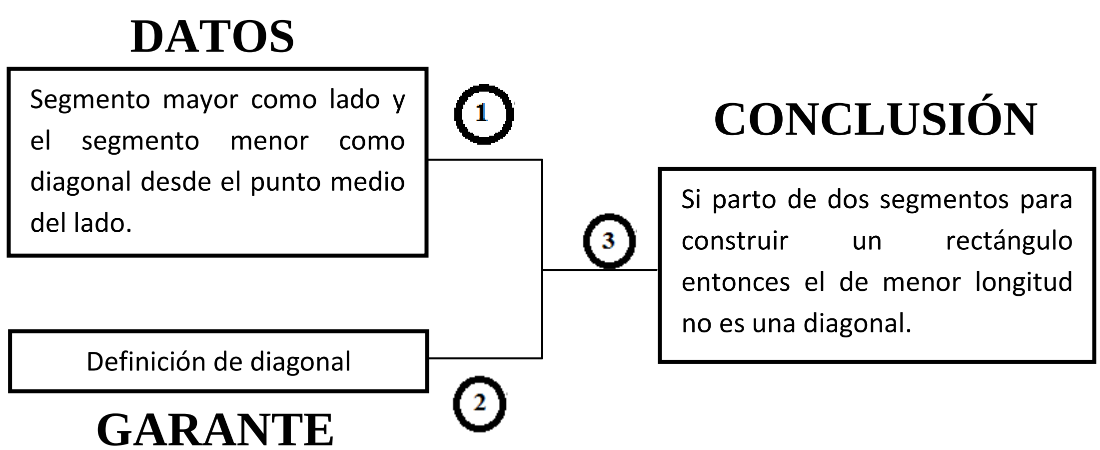


[Construcción de Cristian]

¿Qué dicen? [36-38]	Sergio	Una diagonal ¿Qué es?
	Felipe	Algo que traza de vértice a vértice
	Felipe	Una diagonal es un segmento que pasa desde un punto cualquiera a un punto cualquiera

¿Qué creemos que dicen? a partir de la definición de diagonal, refutan porque la construcción de Cristian no puede corresponder a una diagonal del rectángulo.

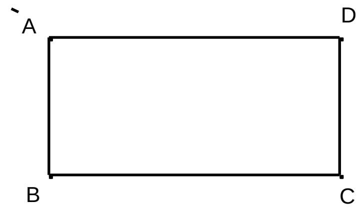
¿Por qué creemos que lo dicen? Porque la diagonal que trazó Cristian no está construida de vértice a vértice, es decir, no cumple la definición.



Intelectual-conceptual-analítico

A44P2G1E3

¿Qué dicen? [54-59]

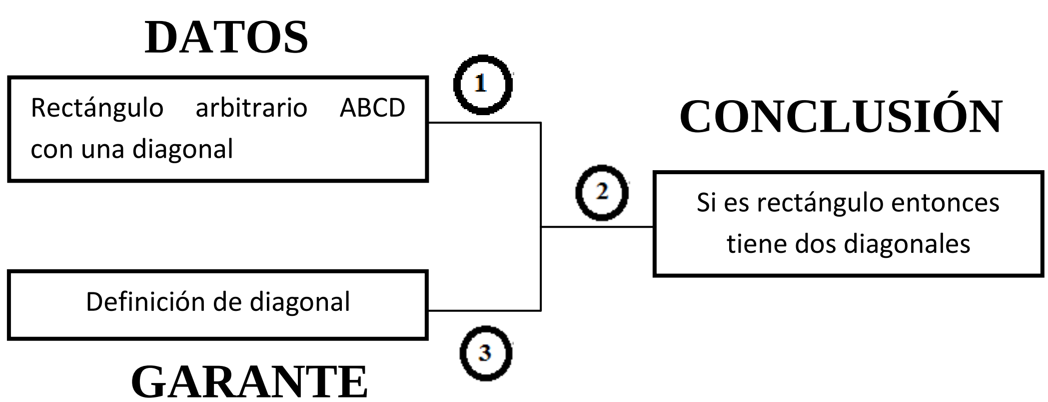


¿Qué dicen? [54-59]

Profesor	¿O sea que cuántas diagonales puede tener un rectángulo?
Sergio	Cuatro
Profesor	¿Cuántas diagonales?
Felipe	Dos
Daniel	Dos, sí
Sergio	Porque hay cuatro vértices […]

¿Qué creemos que dicen? Un rectángulo tiene dos diagonales.

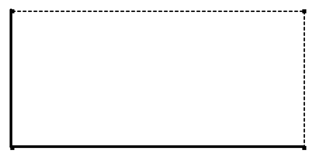
¿Por qué creemos que lo dicen? Porque todo rectángulo tiene cuatro vértices



Intelectual-conceptual-analítico

A45P2G1E4

¿Qué tienen?

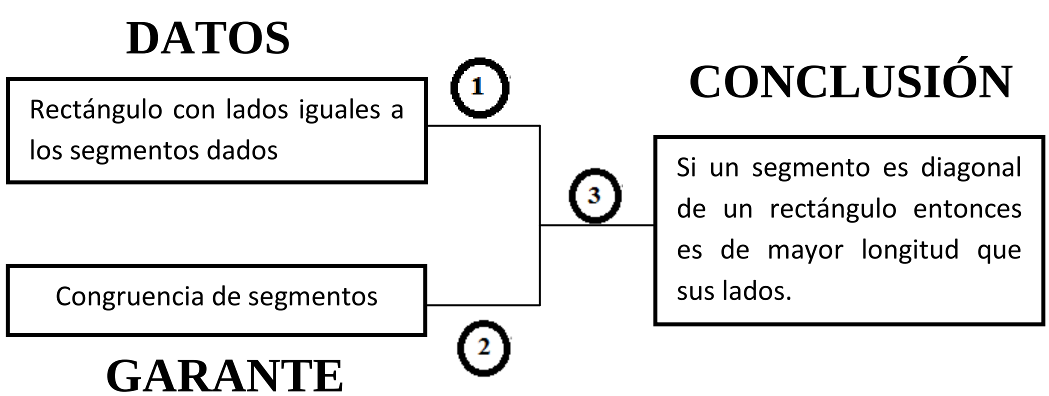


¿Qué dicen? [90-94]

Felipe	[compara la medida de la diagonal y la del lado más largo]
Sergio	Si ve que no, porque la diagonal tiene que ser más larga
Profesor	¿No tiene la misma medida?
F y S	No
Sergio	la diagonal tiene que ser la más larga

¿Qué creemos que dicen? La diagonal es más larga que los lados del rectángulo.

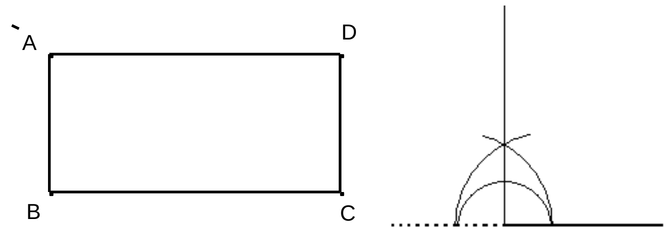
¿Por qué creemos que lo dicen? Porque la diagonal se traza entre vértices opuestos.



Intelectual-conceptual-analítico

A46P2G1E5

¿Qué tienen?

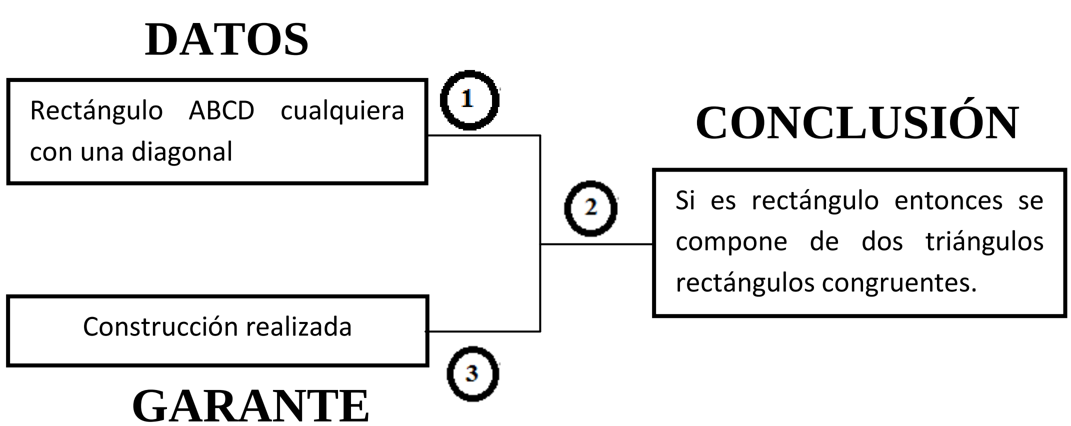


¿Qué dicen?

	P	¿Qué estás haciendo?
[104-109]	S	Construir un ángulo, un triángulo recto, porque un…
	F	¿Un triángulo?
	S	Un triángulo sí, porque un rectángulo son dos triángulos iguales. [Señala el rectángulo que había construido y muestra en él los dos triángulos que forman el rectángulo]
	P	Sí
	S	Dos triángulos rectos iguales [se refiere a dos triángulos rectángulos congruentes]

¿Qué creemos que dicen? Construyen un ángulo recto para formar un triángulo rectángulo con los segmentos dados

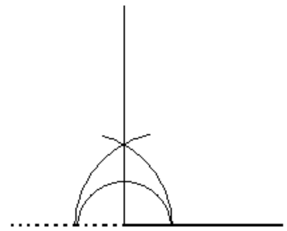
¿Por qué creemos que lo dicen? Porque un rectángulo está formado por dos triángulos rectángulos congruentes.



Pragmático-empírico-genérico-constructivo

A47P2G1E5 /A63P2G2E7

¿Qué tienen?



¿Qué dicen?

[138-139]

P [...]¿Por qué hiciste perpendicular? ¿Por qué te interesa que ese ángulo sea de 90? El de ahí abajito

S Porque como un rectángulo tiene cuatro lados de 90 grados, cogí un lado de 90 [se refiere a ángulos de 90 grados]

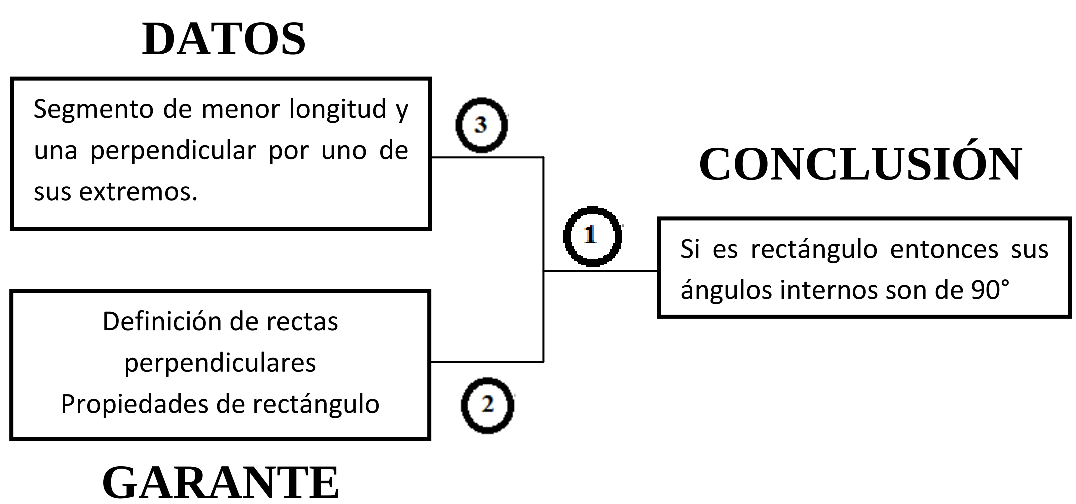
[199-200]

P2 ¿Por qué perpendiculares?

J Porque la construcción que toca hacer es un rectángulo, entonces toca hacer perpendiculares para que den ángulos de 90 grados. O sea como el rectángulo tiene que tener todos sus ángulos internos de 90 grados

¿Qué creemos que dicen? Toma el segmento de menor longitud y construye una perpendicular por uno de sus extremos.

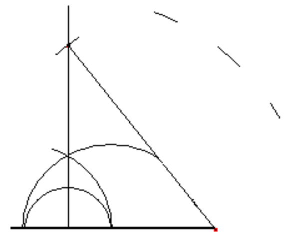
¿Por qué creemos que lo dicen? Porque quiere construir un ángulo de 90º para formar el rectángulo.



Intelectual-conceptual-analítico

A48P2G1E6

¿Qué tienen?



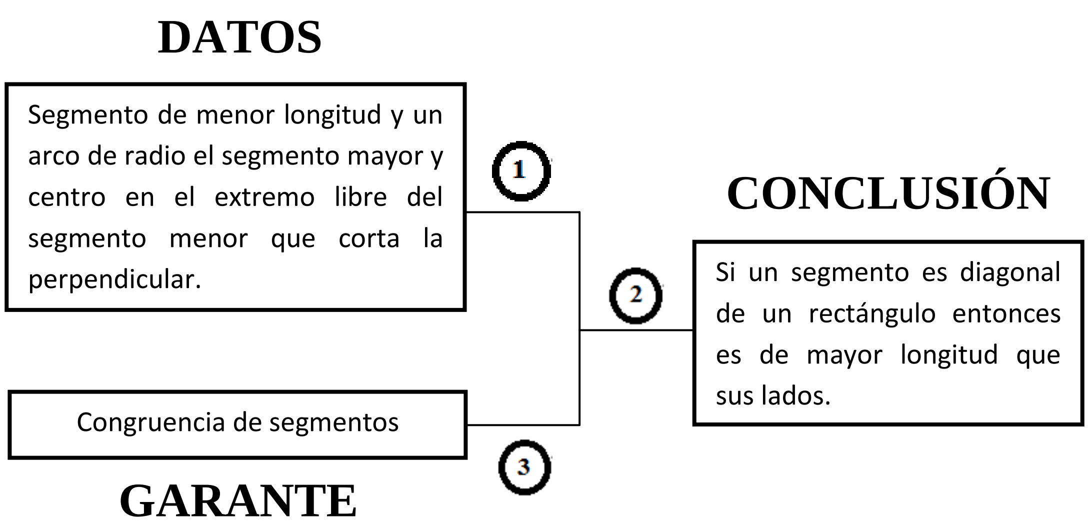
¿Qué dicen? [164-165]

P Pero este lado que vas construir acá, no tiene la misma medida de la diagonal. [señala con la mano el lado del rectángulo que se construiría perpendicular a *D*]Entonces no me serviría eso

S No porque una diagonal tiene que ser más larga

¿Qué creemos que dicen? El lado construido sobre la perpendicular no tiene la misma medida que la diagonal.

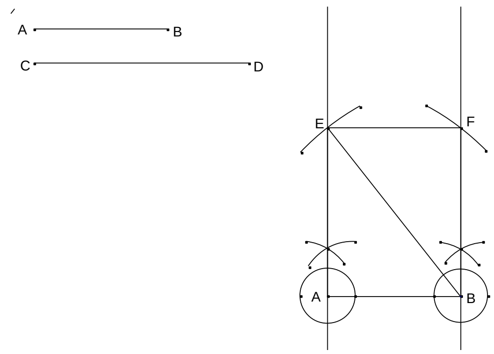
¿Por qué creemos que lo dicen? Porque la diagonal debe ser más larga que los lados del rectángulo.



Intelectual-conceptual-analítico

A49P2G1E7 / A62P2G2E5

¿Qué tienen?



¿Qué dicen?

[187-188]

P1 Dos lados son más largos que los otros dos. Ahora, debe ser que diagonal que aparece en ese rectángulo debe tener las mismas medidas o debe tener el… la… o el mismo tamaño que el segmento BC que teníamos inicialmente. ¿Cumple o no cumple eso? ¿por qué cumple eso? ¿cuál es la garantía de que ese dibujo que hizo Julián o de esa representación que hizo Julián cumple lo que está diciendo? ¿por qué?

Ley ¿Por qué?, porque con el compás lo podemos revisar, entonces CD, tomamos la distancia de CD y la pusimos sobre B y trazamos E

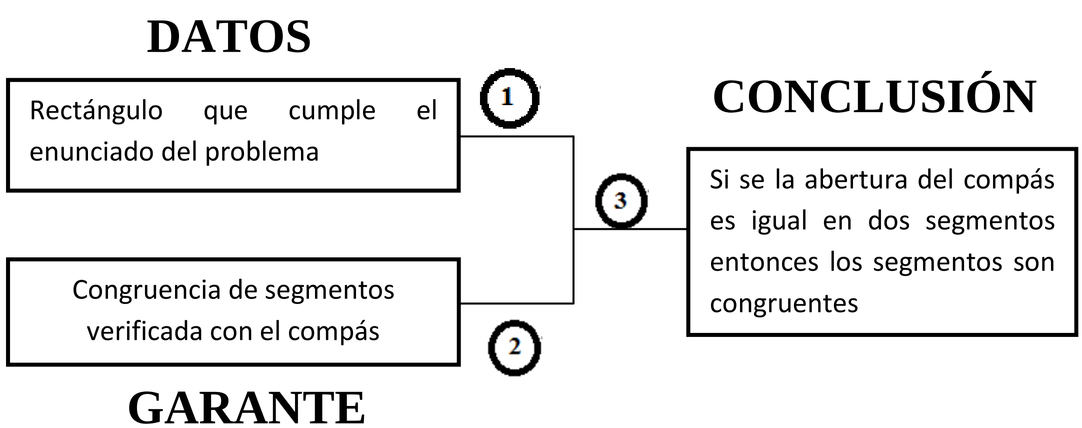
[160-161]

F Pero está diciendo que si este [*CD*] tiene la misma medida que este [lado del rectángulo] y si este [*AB*] tiene la misma medida que este [diagonal del rectángulo]

S Pero sí los copie, sí [compara con el compás las medidas de los segmentos dados, con la diagonal y los lados del rectángulo que construyó]

¿Qué creemos que dicen? Los lados y la diagonal del rectángulo son congruentes a los dados en el problema

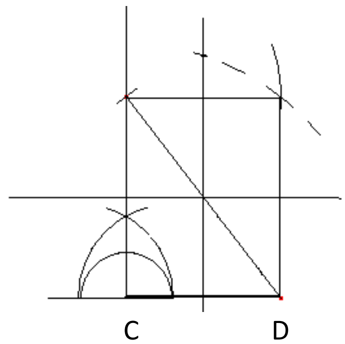
¿Por qué creemos que lo dicen? Porque se copiaron con el compás.



Intelectual-conceptual-analítico

A50P2G1E7

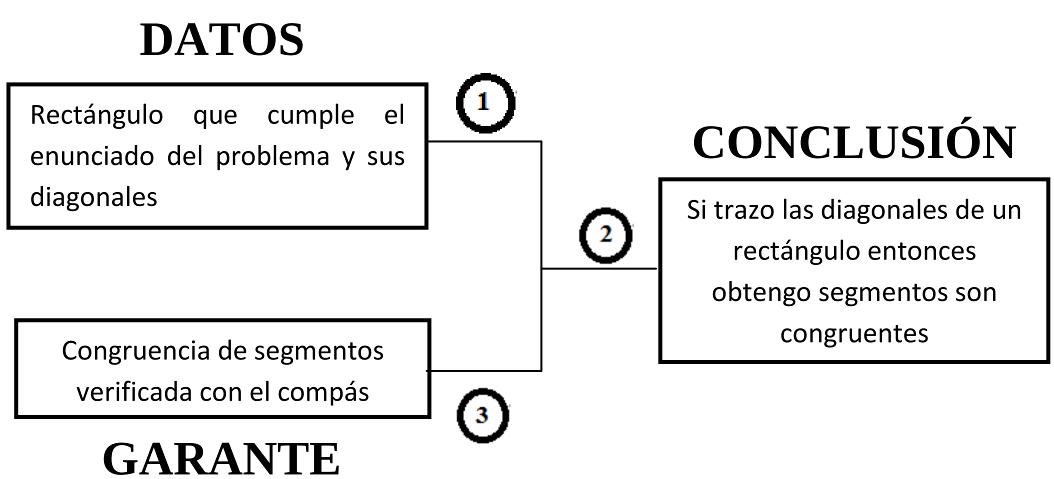
¿Qué tienen?



¿Qué dicen?	P	¿Si son iguales? Y las dos diagonales ¿tienen que ser iguales?
[189-192]	S	Sí
	P	¿Tienen que medir igual?
	S	Tienen que medir igual, porque si son diagonales… [Compara la medida de las dos diagonales del rectángulo construido. Luego con los arcos marcados traza las mediatrices de los lados del rectángulo, que para los lados opuestos coinciden]

¿Qué creemos que dicen? Las diagonales del rectángulo son iguales

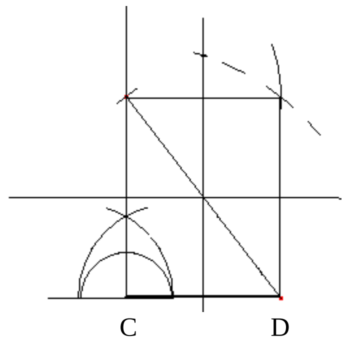
¿Por qué creemos que lo dicen? Porque son diagonales



Pragmático-empírico-genérico-constructivo

A51P2G1E7

¿Qué tienen?



¿Qué dicen?

[193-195]

S Y este sería el punto centro [marca el corte de las mediatrices que está en el interior del rectángulo] y el punto centro de un cuadrilátero es cuando todas sus…

P Ahí se cortan ¿quiénes?

S Se cortan las diagonales, las diagonales cortan en un punto, que el punto es el centro del rectángulo. Entonces ahí también sabría si me quedo bien el rectángulo, y ahí cortaron todos en un punto [cuando dice todos pareciera que tanto las diagonales como la mediatrices]

¿Qué creemos que dicen? Caracterizan el centro del rectángulo como el lugar donde las diagonales y las mediatrices de los lados se cortan.

¿Por qué creemos que lo dicen? Porque intentan mostrar que la construcción corresponde a un rectángulo.

DATOS

1 Rectángulo que cumple el enunciado del problema, sus diagonales y mediatrices de los lados.

CONCLUSIÓN

3 Si las diagonales y mediatrices de un cuadrilátero se cortan en un mismo punto entonces es rectángulo

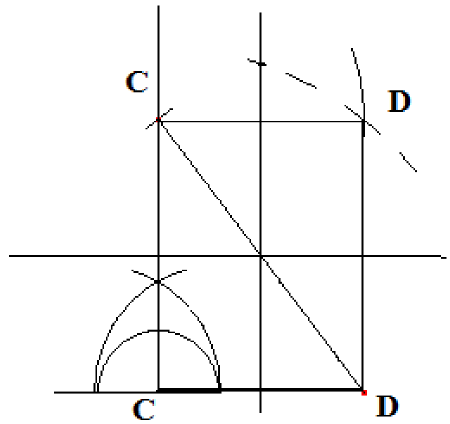
2 Centro del rectángulo según Sergio

GARANTE

Pragmático-empírico-genérico-constructivo

A52P2G1E8

¿Qué tienen?

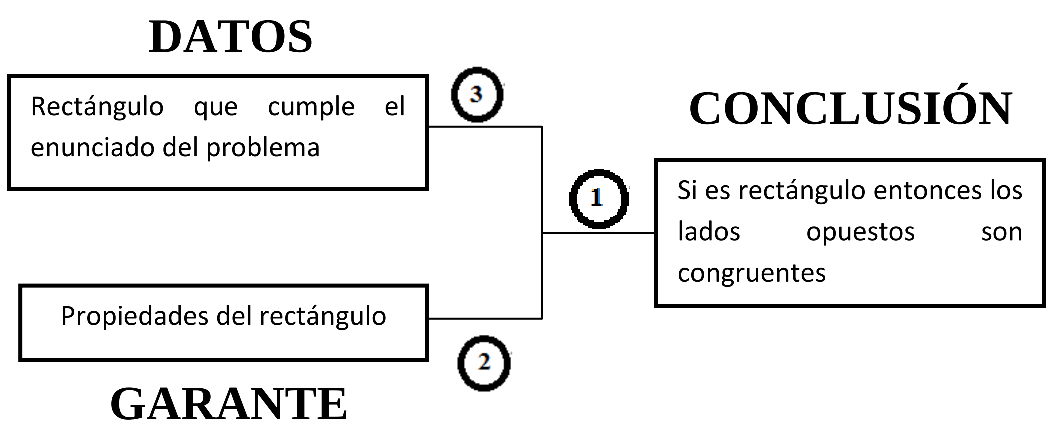


¿Qué dicen?

[205] D Como esta, esta medida acá, la base, este es *CD* y aquí arriba también es *CD*, porque tiene la misma medida [compara los lados opuestos del rectángulo construido]

¿Qué creemos que dicen? Los lados opuestos de un rectángulo son congruentes

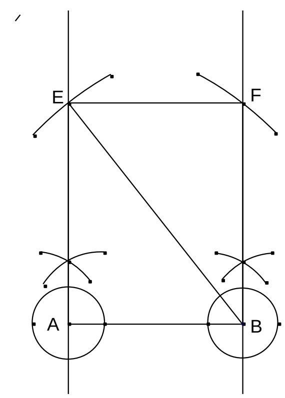
¿Por qué creemos que lo dicen? Porque identifican propiedades en el rectángulo



Intelectual-conceptual-analítico

A53P2G1E8 / A55P2G1E9 / A61P2G2E5

¿Qué tienen?



¿Qué dicen?

[212 - 213]

P	Felipe, explícanos a tus compañeros y a mí, por porqué esta figura que construyó Sergio ¿Por qué es un rectángulo?
F	Bueno, lo Primero porque sus diagonales todas son iguales, tiene ángulos de 90 grados y estos lados son iguales y estos lados son iguales [se refiere a que los lados opuestos del rectángulo son iguales]

[240-241]

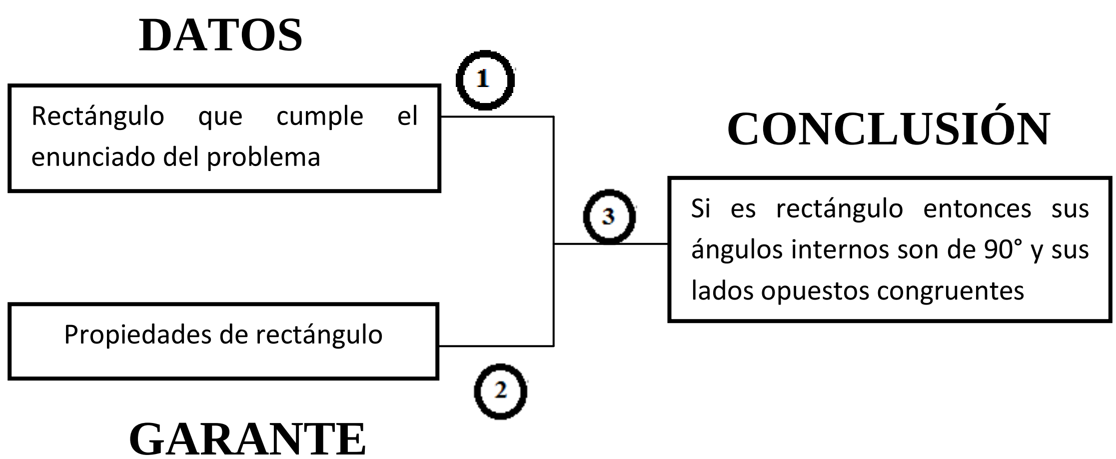
P	¿Por qué obtengo un rectángulo?
C	Porque, este lado es igual a este y este lado es igual a este [señala los lados opuestos del rectángulo] y sus ángulos tiene…

P1	Vamos a mirar el trabajo que hizo Julián y a ver si cumple con los que…con lo que nos pedía la tarea; la tarea nos pedía que teníamos dos segmentos iniciales AB y CD como ustedes lo marcaron, hay que tomar uno como lado y uno como diagonal. Vamos a mirar, lo que está dibujado en la hoja ¿es un rectángulo?
Tod	Sí
P1	¿Por qué?
Ley	Porque tiene cuatro lados
P1	Cuatro lados
Jul	Los ángulos son de 90
P1	Los ángulos son de 90
Ley	Eh… dos lados son más largos que los otros dos

[152-159]

¿Qué creemos que dicen? La construcción corresponde a un rectángulo

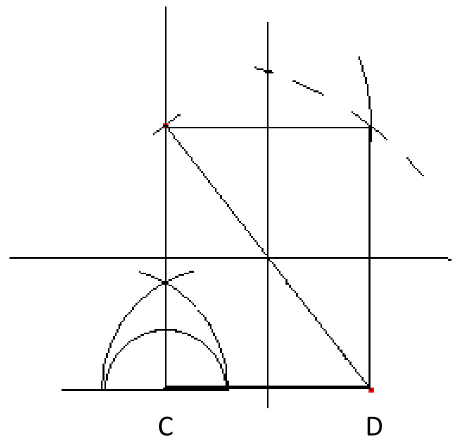
¿Por qué creemos que lo dicen? Porque cumple las propiedades de tener ángulos de 90º y lados opuestos congruentes.



Intelectual-conceptual-analítico

A54P2G1E8

¿Qué tienen?



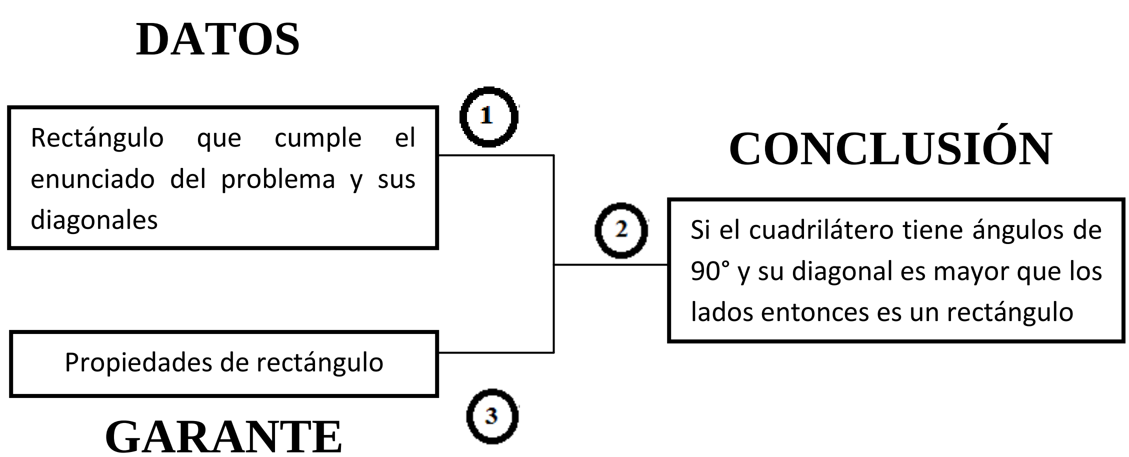
¿Qué dicen?

[230-235]

P Bueno Cristian ¿que nos tienes por contar? ¿Por qué es un rectángulo?
C Bueno un rectángulo acá se ve que como la regla lo dice tiene sus ángulos de 90 grados, y pues como dijo Sergio siempre la diagonal tiene que medir un poco más que las líneas de …
P Más que ¿qué?
C Más que las líneas de arriba, o sea
P O sea que tú también estás de acuerdo en que la diagonal siempre es más larga que los lados
C Pues claro o sino no daría la medida

¿Qué creemos que dicen? El cuadrilátero construido es un rectángulo.

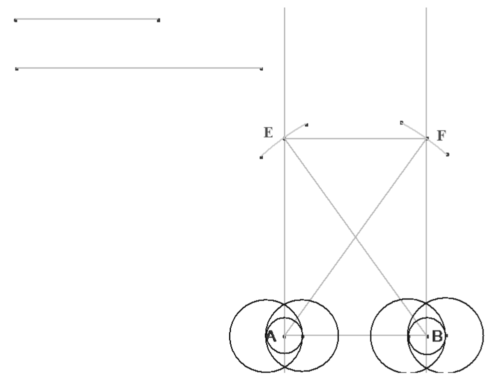
¿Por qué creemos que lo dicen? Porque los ángulos del cuadrilátero son de 90º y la longitud de la diagonal es mayor que las longitudes de los lados.



Intelectual-conceptual-analítico

A56P2G1E9 / A67P2G2E7

¿Qué tienen?



¿Qué dicen?

[242-245]

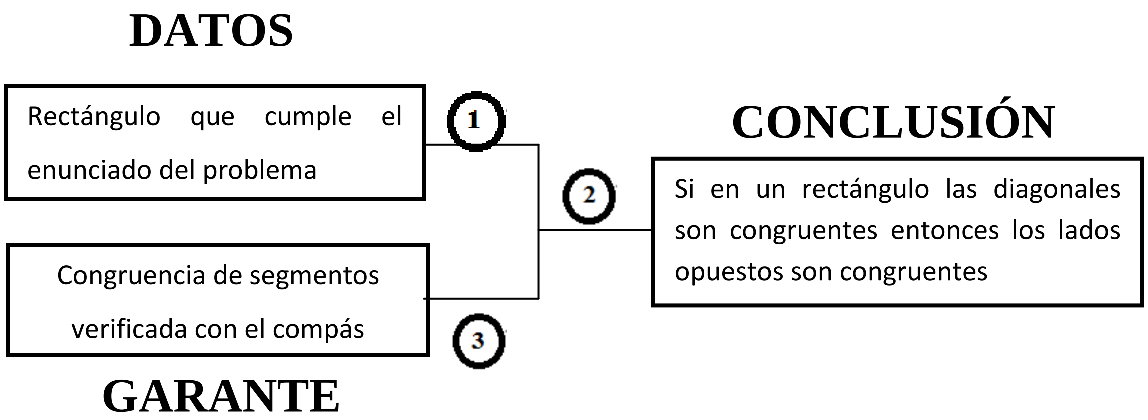
	P	¿Por qué puedo estar segura que los lados son iguales?
	S	Fácil profe, dos lados son iguales y dos lados porque al dar las diagonales cortan en un punto…
	P	¿Por qué son iguales?
	S	Por las medidas y las diagonales que son las mismas

[239-242]

	P2	Y ¿Cómo puedo mirar con la construcción que los lados AE y BF son congruentes?
	L	Pues nos damos cuenta porque tenemos la medida de la diagonal y con el compás al trazarlo acá y acá [describe los arcos] y como son las mismas [las medidas de las diagonales] ahí nos damos cuenta
	P2	O sea que al hacer esos cortes con las diagonales, garantizan que los lados son igualitos
	N	Son congruentes

¿Qué creemos que dicen? Los lados opuestos del rectángulo son congruentes

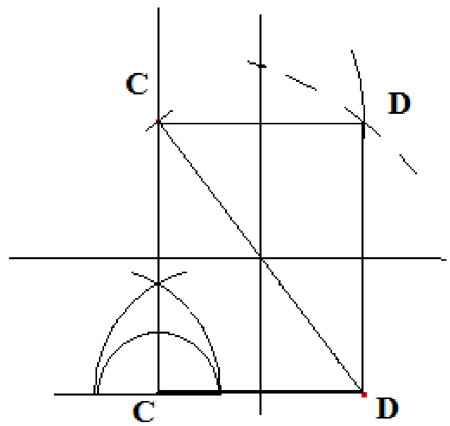
¿Por qué creemos que lo dicen? Porque las diagonales son congruentes y al trazar los arcos con esa medida garantizan que los lados que forman también sean congruentes.



Pragmático-empírico-genérico-constructivo

A57P2G1E9

¿Qué tienen?



¿Qué dicen?

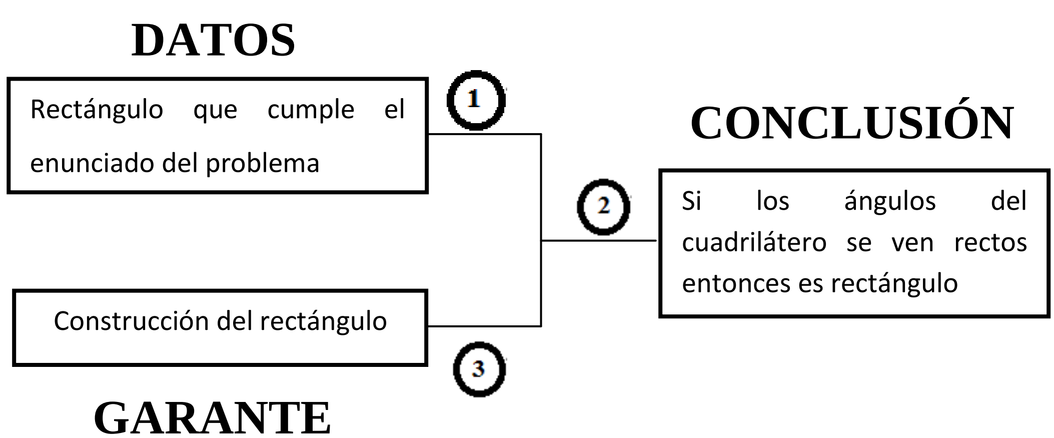
[260,262]

P Porque fue donde hicimos la perpendicular. Y ¿Cómo puedo estar segura que los otros tres ángulos son rectos?

F Porque ahí se ve a pura vista

¿Qué creemos que dicen? Identifican que todos los ángulos del rectángulo son rectos.

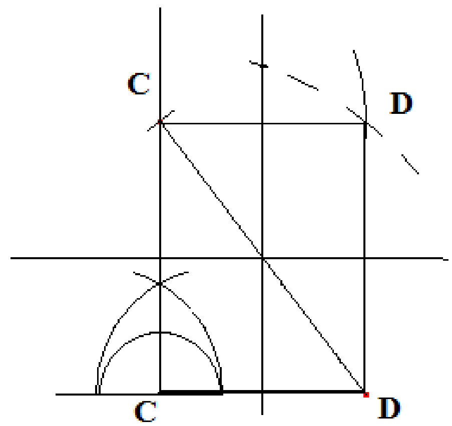
¿Por qué creemos que lo dicen? Porque perciben ángulos rectos en la construcción.



Pragmático-empírico-naif-de ejemplificación

A58P2G1E9

¿Qué tienen?



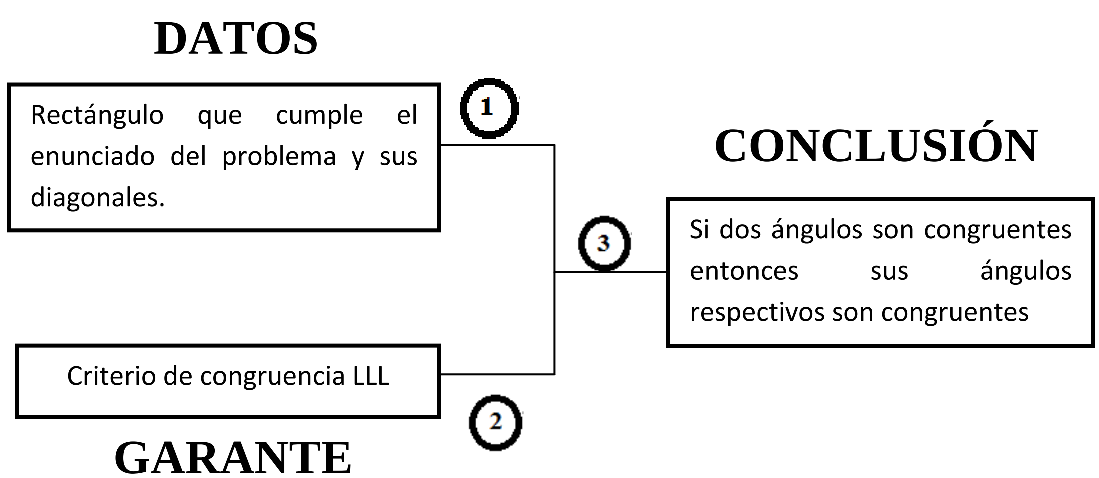
¿Qué dicen?

[316]

F Como dice Sergio el rectángulo se divide en dos triángulos rectos iguales, entonces si este tiene la misma medida que este [compara las medidas de los lados de los triángulos], entonces el otro triángulo igual va a tener la misma medida de este [señala el ángulo opuesto al ángulo recto que construyeron con la perpendicular]

¿Qué creemos que dicen? El ángulo opuesto al ángulo por el cual construyeron la perpendicular es recto.

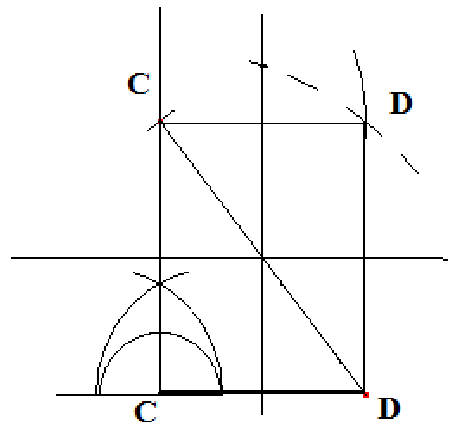
¿Por qué creemos que lo dicen? Porque la diagonal divide al rectángulo en dos triángulos congruentes, por tanto sus ángulos respectivos son congruentes.



Intelectual-conceptual-analítico

A59P2G1E9

¿Qué tienen? Un dado y la siguiente construcción

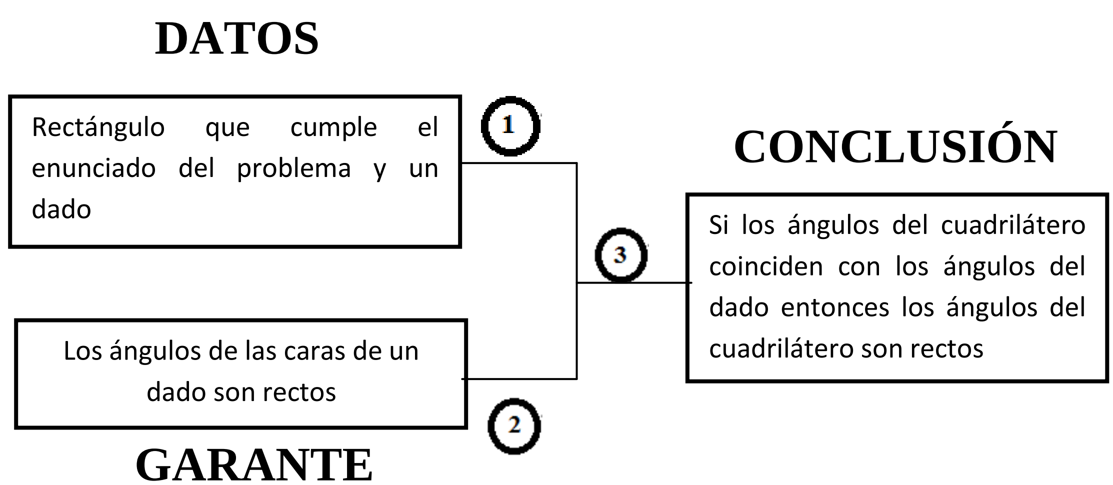


¿Qué dicen?

[335-340]	S	Fácil profe, mire [toma dos dados que habían en el escritorio. Coloca uno sobre el ángulo recto que ya se había justificado, y el otro lo coloca sobre uno de los ángulos que no se sabía su medida] ¿Dio o no dio? Mire
	P	¿Qué?
	S	90 grados, 90 grados [señala los ángulos que forman los dados]
	P	O sea que ese ángulo de los daditos ¿es de 90?
	Todos	Si claro
	S	Sí, porque es un cubo, y un cubo tiene que tener todos sus ángulos de 90 grados

¿Qué creemos que dicen? Los ángulos del rectángulo son de 90º

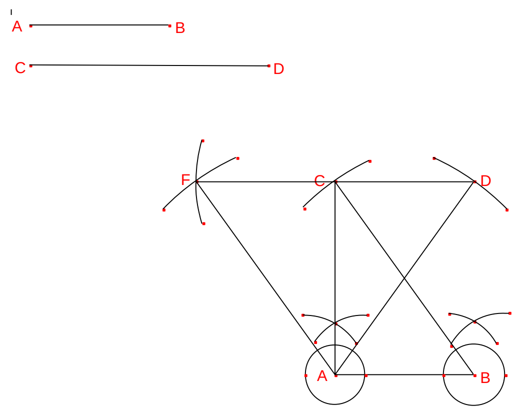
¿Por qué creemos que lo dicen? Porque al colocar sobre los ángulos un dado que tiene todos los ángulos de las caras rectos, coinciden exactamente con los ángulos.



Informal-no geométrico

A60P2G2E3

¿Qué tienen?



¿Qué dicen?

[81-86]

P1	Tratemos de caracterizar primero, cómo construir un rectángulo y qué características debe tener la definición de rectángulo como tal
Jul	Pues todos, primero que todo, pues todos sus ángulos deben ser como de 90° sí, todos los ángulos internos
P1	Esa es una característica muy importante, todos los ángulos, ¿qué pasa con eso?
Jul	Y mira digamos acá no son de 90° [señala el ángulo BAF del paralelogramo ABCF]
P1	No está cumpliendo una de las características
Jul	O sea, eso era lo que quería decir

¿Qué creemos que dicen? El cuadrilátero construido no es un rectángulo.

¿Por qué creemos que lo dicen? Porque sus ángulos internos no son de 90º.

DATOS

Paralelogramo ABCF donde la diagonal y un lado son congruentes a los segmentos dados.

1

CONCLUSIÓN

3

Si los ángulos internos de un paralelogramo son rectos entonces es rectángulo.

Propiedades de rectángulo

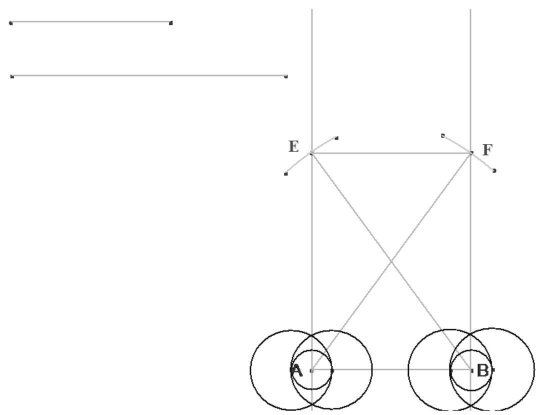
2

GARANTE

Intelectual-conceptual-analítico

A65P2G2E7

¿Qué tienen?



¿Qué dicen?

[212-216]

P2	[…]¿Ya puedo decir que es un rectángulo?
M	Si porque sus ángulos son de 90 grados
P2	Pero por ahora solo hay dos ángulos de 90, que son los ángulos de abajo [ángulos A y B] que construyeron con perpendiculares. Pero ¿Cómo puedo saber que los dos de arriba también son rectos? [ángulos E y F]
L	Porque en un rectángulo tiene las mismas medidas…
J	Lo que a mí se me ocurre es pues, porque digamos estas dos rectas son paralelas [señala las rectas AE y BF]. Entonces por eso siempre va a ver acá 90 [señala ángulo A]. Y cuando se cierren siempre va a quedar un rectángulo.

¿Qué creemos que dicen? Los cuatro ángulos del cuadrilátero son de 90 grados

¿Por qué creemos que lo dicen? Los ángulos E y F son rectos porque están formados en medio de dos rectas paralelas y dos perpendiculares a ellas.

DATOS

Dos rectas perpendiculares a un lado y una recta paralela al mismo.

1

Definición de rectas perpendiculares. Propiedades entre rectas paralelas

3

CONCLUSIÓN

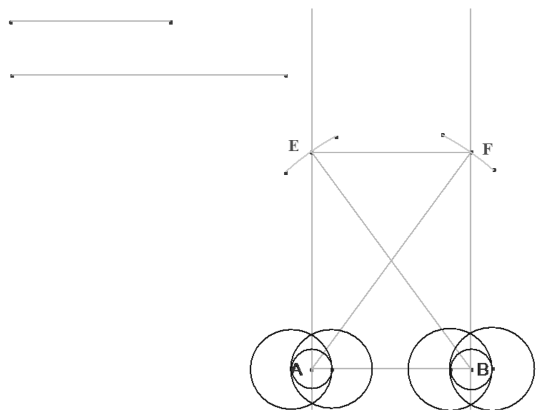
Si dos rectas son perpendiculares entonces la recta paralela a una recta es perpendicular a la otra

GARANTE ②

Intelectual-conceptual-analítico

A66P2G2E7

¿Qué tienen?

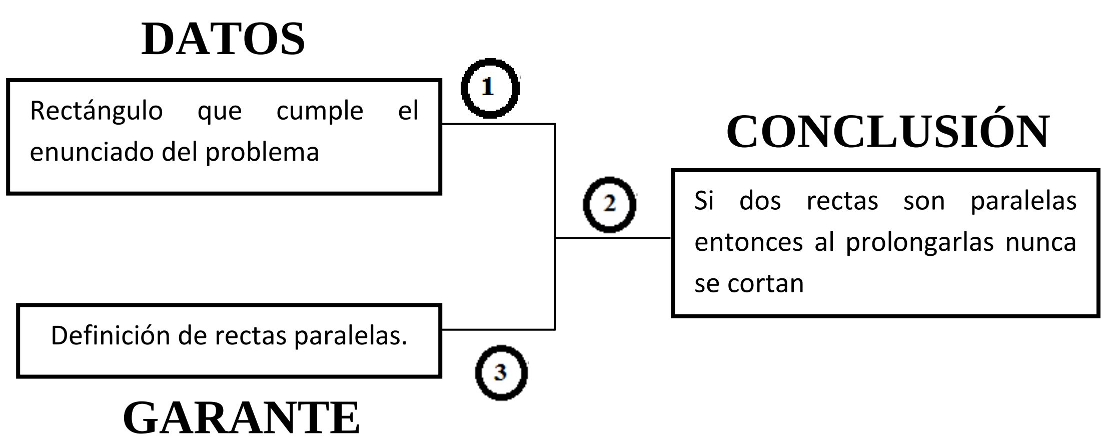


¿Qué dicen?

[220-223]	J	AC y BF son paralelas [el vértice E lo cambian por C]	
	P2	Esas dos son paralelas, y ¿por qué son paralelas?	
	N	Porque nunca se unen	
	J	O sea nunca se cortan. Por más que se prolonguen nunca se cortan	

¿Qué creemos que dicen? En el rectángulo ABFC, AC y BF son paralelas.

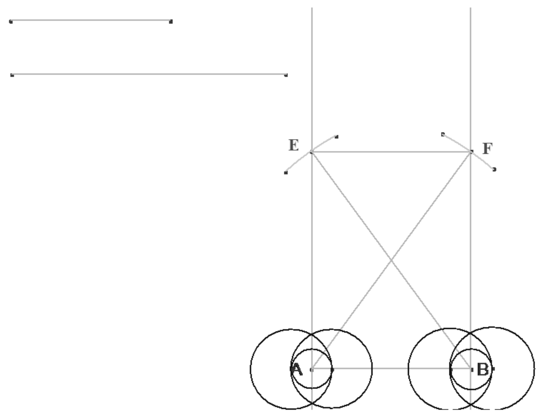
¿Por qué creemos que lo dicen? Porque nunca se cortan.



Intelectual-conceptual-analítico

A68P2G2E7

¿Qué tienen?



¿Qué dicen?

[243-246]

P2 Y ¿Cómo sé que el lado CF [el vértice E lo cambian por C] es congruente con el lado AB?

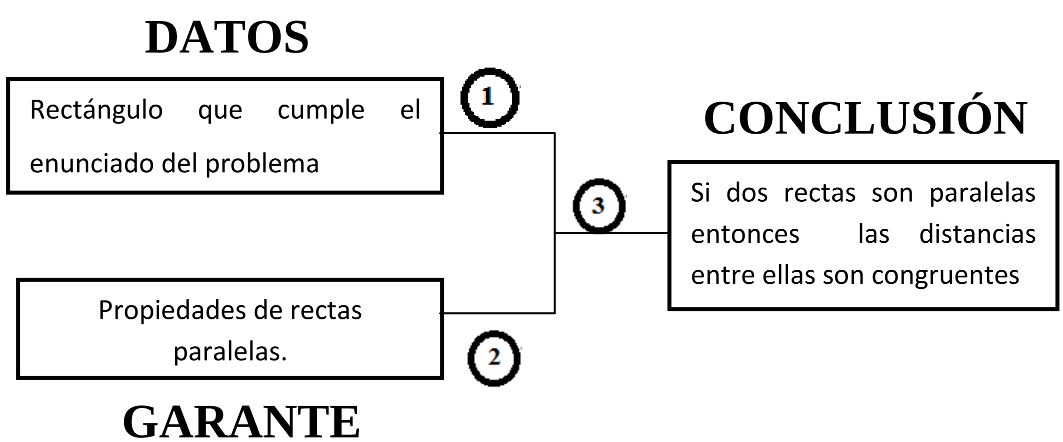
J Pues como te dije, lo que pasa es que como estas dos rectas son paralelas [AC y BF], entonces la distancia que haber acá [CF] es congruente con esta [AB]

P2 O sea, ustedes dicen que como la recta AC y BF son paralelas, entonces las distancias entre ellas son iguales

N Siempre van a ser iguales

¿Qué creemos que dicen? Los lados EF y AB son congruentes

¿Por qué creemos que lo dicen? Porque las distancias entre paralelas son congruentes.



Intelectual-conceptual-analítico