FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

Trabajo de Pregrado:

CAMINO A LA INTEGRAL MODERNA

(Teoría de la medida e integral de Lebesgue)

Presentada por:

Johan Steven Durán -2009140019

Numael Guerrero-2009140022

Para optar por el título de Licenciados en Matemáticas

Asociado al ínteres de los maestros en formación

Asesor: Hernán Díaz Rojas

Dedicado a

Nuestras familias, amigos, amigas, profesores y profesoras
que le aportaron y lo siguen haciendo a nuestra formación

Dedicado a

mi papá Numael Guerrero Calderón y a mi mamá Rosalba Pérez
por el increíble esfuerzó y ayuda que me brindan en cada momento

1.Información General	
Tipo de documento	Trabajo de Grado
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Titulo del documento	Camino a la integral moderna
Autor(es)	DURÁN TORRES, Johan Steven; GUERRERO PÉREZ, Numael
Director	DÍAZ ROJAS, Hernán
Publicación	Bogotá, Universidad Pedagógica Nacional. 2014, 104 pág.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional
Palabras Claves	Concepción de área, medida del área, integral, cuadratura, continuo geométrico, sumas de Riemann, integral de Riemann, indivisibles, infinitesimales, cuadratura básica, integral de Lebesgue.

2.Descripción
El presente trabajo de grado se asocia al interés profesional de los estudiantes, que observan la necesidad de conocer más sobre el desarrollo del concepto de área, su relación con la integral y las concepciones históricas que se presentaron durante su construcción. El trabajo se realiza a partir de una investigación histórica y teórica de la construcción de las nociones de área, en donde distinguimos diversos métodos para asignar áreas a regiones de R^2, y las cuales traen implícitamente una concepción de medida y área.

3.Fuentes
• Barcenas, Diomedes. (2006). La integral de Lebesgue un poco más de cien años después. Boletín de Asociación Matemática Venezolana. Vol. 13. N° 1. Venezuela. • Fava, Norberto y Zo, Felipe. (1996). Medida e Integral de Lebesgue. Instituto Argentino de Matemática. Editorial Red Olímpica. Buenos Aires. Argentina. • Manuel, Luis. (2011). Teoría de la Medida e Integral de Lebesgue. Universidad Nacional del Rosario. Argentina. • Quezada, Roberto. (sd). Una introducción a la medida e integral de Lebesgue. Universidad Autónoma Metropolitana – UAM –. Departamento de Matemáticas. México. Iztapalapa. • Recalde, Luis. (2007). Raíces históricas de la Integral de Lebesgue. Revista Educación e Historia. Vol. 15. N°2. Págs. 103-127. Universidad del Valle. Colombia. • Takeuchi, Yu. (1970). Integral De Lebesgue, Universidad Nacional de Colombia. Bogotá. • Zamorano, Pablo. (2006). La integral de Lebesgue en su contexto histórico.

4.Contenidos
En la siguiente lista exponemos los tópicos más relevantes que se abordaron junto con las actividades que se desarrollaron y el tiempo que se destinó para cumplir nuestros objetivos, a partir de las siguientes etapas: investigación, lectura, reflexión y escritura: ▪ Caracterizar los aportes más importantes que se han dado en la historia respecto a la teoría de la medida. ▪ Concepción de medida (área) en cada uno de los aportes investigados. ▪ Caracterización detallada del método de Riemann para encontrar el área bajo una curva dada.

- Ejemplos de Funciones que tienen subconjuntos que bajo Riemann no tienen medida (área).
- Concepción de la medida (área) para Riemann.
- Generalización de la integral de Riemann.
- Concepción de la medida (área) para Lebesgue.
- Caracterización detallada del método de Lebesgue para encontrar el área bajo una curva dada
- Comparación de las concepciones de área entre Riemann y Lebesgue.

5.Metodología

Luego de clarificar los objetivos y presentar el cronograma de trabajo al asesor, se estableció un cronograma, en el cual se destinó un tiempo determinado a los textos seleccionados los cuales pasaron por las etapas de: investigación (momento previo para la búsqueda y asesoramiento de la bibliografía consultada), lectura (según la matriz en los tiempos se dio lectura a los textos seleccionados), reflexión (dialogo entre los autores y asesor para concertar las ideas) y escritura (reelaboración del texto escrito para plasmar las conclusiones de la reflexión.)

6.Conclusiones

- La concepción de medida a lo largo de la historia se mantiene en una idea básica, la cual es asignar un numero positivo ó cero a un región de R^2; como se ha visto durante todo el documento lo que cambia es la colección de subconjuntos de R^2 que son medibles según la construcción de área que se tenga.
- El desarrollo del área se ve potenciado debido a que históricamente se plantean subconjuntos de R^2 que no tiene medida con la presente teoría, es el caso de funciones cuyo conjunto de discontinuidades D cumple que $\overline{m}$ (D)

$=0$ las cuales no son integrables Riemann pero si pueden ser integrables según Lebesque . .

Elaborado por:	DURÁN TORRES, Johan Steven; GUERRERO PÉREZ, Numael
Revisado por:	DÍAZ ROJAS, Hernán

Fecha de elaboración del Resumen:	27	05	2014

Índice general

Índice de figuras

Índice de tablas

Introducción

Desde la antigüedad, (Recalde, 2007) las actividades de contar y medir han evocado en el hombre, la sociedad y en el pensamiento los problemas más interesantes. Para las comunidades matemáticas estos procesos (contar y medir) han sido la base para el desarrollo múltiple de diferentes disciplinas del pensamiento matemático. Si nos centramos en el proceso de medir, podemos reconocer que los griegos, quienes fueron los primeros en desarrollar una teoría matemática (en su mayoría geométrica) sustentada fuertemente en la razón y la justificación, se esforzaron por construir una estructura matemática que les permitiera medir sin las limitaciones naturales. Es por eso que emplearon diferentes métodos con el fin de hallar medidas y en particular de hacer cuadraturas de figuras geométricas. Los problemas más difíciles a los que se enfrentaron precisamente surgieron al resolver este último objetivo, es decir, hallar las áreas (cuadrados) que tuvieran igual medida que el área de varias figuras geométricas (triángulos, rectángulos, círculos, parábolas). Son notables en este sentido los aportes de Eudoxo y Arquímedes al desarrollo de métodos para hallar la cuadratura de esas figuras.

Pero tras el objetivo de hallar la cuadratura de ciertas figuras, yace implícito el concepto moderno de la integral. Los griegos iniciaron –tal vez con ese objetivo- el desarrollo de este objeto matemático, sin embargo su historia culminó mucho antes de que pudiéramos advertir esa meta. Sin embargo, sus aportes dieron pie a matemáticos relevantes de siglos posteriores (como Wallis, Newton, Leibniz, Fermat, Euler, Riemann, Lebesgue, entre otros) para que junto con herramientas como el álgebra y el análisis pudieran elaborar y formalizar una teoría de la medida relacionada intrínsecamente con el concepto de integral.

Podemos observar dentro de los primeros métodos analíticos que se inventaron con el fin de hallar áreas bajo la curva de funciones definidas, en un intervalo dado de su dominio, en particular el empleado por Bernhard Riemann, un método sin lugar a dudas audaz que tiene en su invención aportes teóricos formalizados anteriormente. También alcanzó a desarrollar dentro de su teoría elementos para soportar funciones altamente discontinuas, pero matemáticos contemporáneos a él hallaron en el fundamento de su método algunas inconsistencias y encontraron varios contraejemplos que ponían en evidencia su razonamiento.

Por ejemplo:

Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in Q \\ 0 & si \quad x \in I \end{cases}$$

En el intervalo $[0, 1]$

! Esta función no es integrable-Riemann ¡

Henri Lebesgue en la elaboración de su Teoría de la Medida, la cual construyó retomando elementos de trabajos de sus contemporáneos y reflexionando sobre unas bases fundamentales para resolver el problema de la medida, cayó en cuenta que tales cuestiones se remontan a la forma como se abordaba la medida y cómo evolucionó el proceso de medir desde la antigüedad hasta su tiempo, inicios del siglo XX. Como sabemos, cuestiones tales como magnitud, continuo, infinito entre otros están relacionados en la actividad de medir, en este sentido, realizaremos un breve ejercicio histórico, pasando por las civilizaciones, los tiempos y los personajes más importantes (incluyendo una breve presentación de su vida y logros) en el desarrollo de propuestas matemáticas para hallar el área de superficies, y resaltaremos los aspectos más importantes que nos permitan caracterizar su propuesta y como está influyó en la construcción de la actual forma de abordar los problemas del cálculo de áreas por medio de la integral.

Capítulo 1

Medida en la Antigüedad

Según Kline(2009), a diferencia de otras ramas de la ciencia, los desarrollos o conocimientos que se elaboran en matemáticas son acumulativos. Las creaciones actuales y las diversas áreas que hoy tienen las matemáticas, precisaron en su desarrollo haber comprendido todos los resultados elaborados antes que en su tiempo. Recordemos en este sentido la famosa frase de Bernardo de Chartres utilizada por Isaac Newton al escribirle a su colega Robert Hooke, "Si he logrado ver más lejos, ha sido porque he subido a hombros de gigantes".

1.1 Civilizaciones Antiguas

Al analizar las primeras civilizaciones podemos observar que tuvieron un prominente desarrollo político, cultural, social, económico, artístico, religioso y astronómico. Sin embargo tan solo algunas de ellas lograron elaborar conceptos matemáticos relevantes, a parte de un sistema numérico que les permitiera contar. Entre las más relevantes podemos encontrar dos civilizaciones que tuvieron un papel importante en el desarrollo posterior de las matemáticas, los egipcios y los babilonios.

Ambas culturas que hoy abarcan el Egipto y el Irak actual, nos legaron sus elaboraciones en papiros y tablillas de arcilla. En ellas hemos podido evidenciar que manipularon los números enteros y fraccionarios. Además que tenían reglas simples para hallar el área y el volumen de figuras geométricas, que en su mayoría constituían el acumulado de experiencias anteriores. Todas estas herramientas les servían para el comercio y la administración estatal, en el cálculo de gastos, dividendos e intereses en transacciones comerciales, así como impuestos e hipotecas sobre terrenos, cálculo de superficies cultivables, volúmenes de estructuras y la producción agrícola principalmente. Todas estos simples instrumentos junto con esmero y paciencia, los ayudaron a elaborar portentosas edificaciones que hoy en día causan impacto, como los son las pirámides de los egipcios y los zigurats (templos) de los babilonios.

Como vemos según Kline(2009) estas civilizaciones emplearon los constructos matemáticos en la ingeniería, el comercio y la agricultura. Si apenas consideraron a las matemáticas como campo independiente y autónomo, y al razonamiento como esencia misma de su constitución. No hubo un empeño por sistematizar sus observaciones en una visión general, se conformaron con la aplicabilidad práctica. Constituyeron sin embargo un punto de partida para próximas civilizaciones que conocieron sus culturas, entre ellos los griegos.

1.2 Civilización Griega

Con el paso del tiempo, los griegos quienes se fueron perfilando dentro de la historia como pioneros en diversos campos de la ciencia y del pensamiento, observaron las limitaciones que la realidad le imponía a nuestros sentidos cuando queriamos conocer la medida de una longitud muy larga o alta, o una magnitud inalcanzable por medios comunes, fueron buscando caminos y alternativas que nos permitieran acceder a eso que parecia tan lejano.

Como nos cuenta (Recalde, 2007) cuestiones como magnitud, número, constitución del continuo, la naturaleza del infinito, entre otras, que vinculaban la constitución de los elementos matemáticos de este tiempo, aparecen y se debaten de forma importante en la cultura Griega, debido a la aparición de los inconmensurables. Los primeros en enfrentarse a este gran obstáculo fueron los Pitagóricos, después vendrían más invenciones que supondrían una salida a semejante dificultad.

Por primera vez en la historia de las matemáticas aparecían visiblemente los problemas de la continuidad y se ponían en tela de juicio las ideas que se estaban construyendo en cuanto al infinito. Y es que su aparición constituyó una fuerte crisis que volcó todos los esfuerzos Griegos hacia la Geometría (Gonzalez Urbaneja, 2008), lo que provocó que se alejaran de la Aritmética y el Álgebra, y tuvieran más desarrollos en este aspecto.

El problema matemático de la medida está relacionado según los griegos con el logos [1]. Algunos de sus más ávidos pensadores lo relacionaron al concepto de

[1] Razón, principio racional del universo

razón. Esto es muestra de lo diverso que se podía conocer en interpretaciones sobre la medida en la Antigua Grecia.

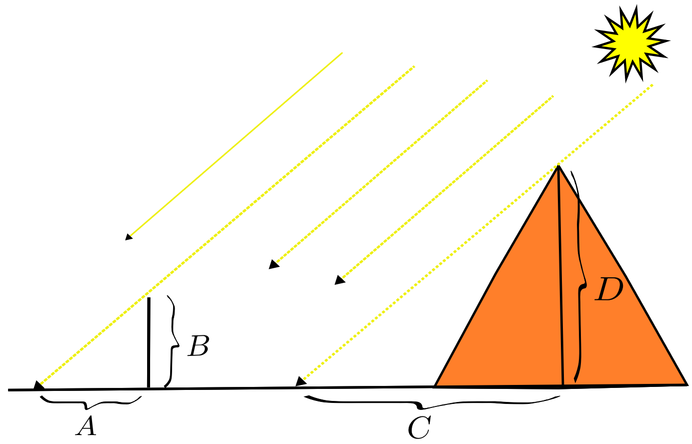
Así vamos a adentrarnos en el desarrollo histórico que los diversos pensadores, matemáticos e intelectuales griegos le dieron al problema de medir magnitudes.

Desde la antigua Grecia se pueden vislumbrar cuales fueron las situaciones que llevaron a una reflexión sobre los constructos matemáticos relacionados con procesos infinitesimales que se relacionan con la actividad de medir.Según (Gonzalez Urbaneja, 2008) en particular fueron tres las situaciones: La primera entorno a las reflexiones que provocaron cuestiones como el cambio y el movimiento, la segunda con base a las discusiones en cuanto a la constitución última de la materia, y la tercera y última cuestión trata las teorías sobre el carácter continuo o discreto de los entes geométricos. Estas situaciones se pueden referenciar claramente al reflexionar sobre el problema de la continuidad de los entes geométricos, la divisibilidad de segmentos al infinito (ad infinitum) y la existencia atomística de partes intrínsecamente indivisibles de las cuales se componían los entes geométricos.

Podemos así establecer tres grandes momentos en los cuales evidenciamos cómo los aportes matemáticos de los griegos se fueron transformando en ese cuerpo estructurado que les permitió consolidar una herramienta para la actividad de medir. El primero de ellos cuando aparecen las magnitudes inconmensurables para los Pitagóricos y las paradojas de Zenón que pusieron en evidencia las propuestas filosóficas del entendimiento matemático de los Griegos, el segundo de ellos en relación con los aportes de la Academia de Platón con su mayor exponente Eudoxo, que se enfrentaron a las dos anteriores cuestiones, y que se recopiló junto con todos los aportes Griegos hasta ese momento en la obra de Euclides, y el tercer momento con los increibles aportes de las obras de Arquímedes.

1.2.1 Tales de Mileto

Filosófo griego (624 a.C. - 546 a.C.) al cual se le atribuyen varios aportes a la geometría (Recalde, 2007) entre los cuales destaca el famoso Teorema asociado a su nombre y cuyo aporte nos brinda unas primeras pinceladas del trabajo de los griegos con las matemáticas y la geometría.



$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$$

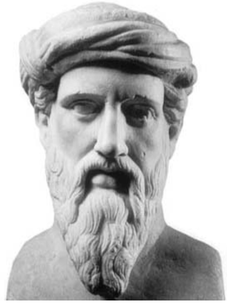
Figura 1.1: Tales de Mileto y las Píramides

NOTA
Todas las figuras en este apartado fueron elaboradas por los autores en Inkscape (Software de graficación vectorial con licencia GPL) y GeoGebra, tomando como base las encontradas en los documentos referenciados.

Como comerciante en Egipto, al observar las grandes pirámides que allí se encontraban, surgió en él un interés por medir la altura de ellas. Las limitaciones físicas que le impedían conocer tal medida, lo llevaron a transformar un problema físico en un problema matemático (Ver figura 1.1). Para tal objetivo, utilizó el hecho (el cual percibió) de que se mantenía una relación invariable (proporcionalidad) entre las alturas (la de él y la pirámide) y las sombras que estas proyectaban.

Sus aportes así como la situación que comentamos, tienen que ver con la actividad de medir por medio de la comparación entre magnitudes homogéneas y aunque es resaltable el hecho de que recurrió a las matemáticas para darle salida a un problema de la realidad, podemos percibir qué noción de medida (diferente a la que manejaron las civilizaciones antiguas) tenían para medir.

1.2.2 Los Pitagóricos



Pitágoras, filósofo griego (572 a.C. - 496 a.C.) que nació en la ciudad de Samos. Su vida se encuentra envuelta en varias leyendas e historias. Se sabe que fundó en Crotona una secta de carácter filosófico-religioso, que agrupó a varios seguidores y la cuál perduró hasta que por sus importantes influencias en el devenir de la ciudad, causaron cierto resquemor en los ciudadanos quienes se rebelaron y los desterraron de aquel lugar.

Tenían una cosmovisión[2] particular del universo (Gonzalez Urbaneja, 2008-2), pues creían en un principio rector que lo guiaba y regía. La relación que observó Pitágoras entre los sonidos y la longitud de las cuerdas de la Lira (Ver figura 1.2), los llevó a considerar al número como ese principio por el cual todo el universo y todas las cosas estaban constituidas.

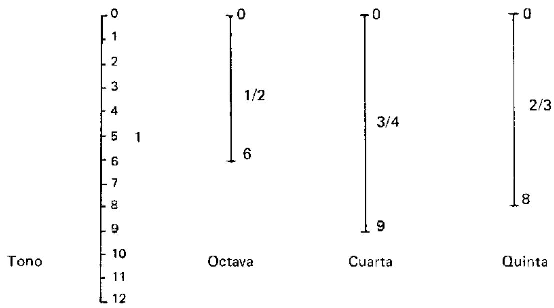


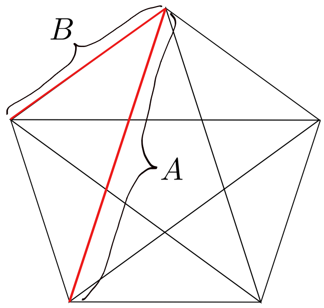
Figura 1.2: Los Sonidos y la Lira

Para los pitagóricos los cuerpos eran una yuxtaposición de puntos, el tiempo era una sucesión de instantes y el movimiento era una adición de pasos de un punto a otro (Gonzalez Urbaneja, 2008).

Para los pitagóricos dos magnitudes (en realidad dos segmentos) siempre tenían una medida en común. Tal medida se consideraba común a ambas magnitudes. Es decir, si tomásemos una magnitud de estas como referente (segmento), esta mediría un número entero de veces a la otra, pues era imposible que violase el principio organizador del universo. Esto se consideraba como magnitudes conmensurables.

Se reconoce que la aparición de los inconmensurables se dio hacia el año 480 a.C. gracias al trabajo del Pitagórico Hipasos de Metaponto. (Gonzales Urbaneja, 2008). Tal acontecimiento pudo ocurrir al intentar reiteradamente encontrar una magnitud o unidad común que permitiera medir, de forma exacta (un número entero de veces), la longitud del lado de un cuadrado y su diagonal correspondiente, aunque también pudo ocurrir al medir la diagonal y el lado de un pentágono regular(Ver figura 1.3).

[2]Visión del mundo



$$\frac{A}{B} = \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Figura 1.3: Irracionalidad en el Pentágono.

Esto constituyó un atentado contra toda su estructura filosófica, pues recordemos, para ellos los “números son la esencia de todas las cosas”, y encontrar dos magnitudes que no son conmensurables o expresable por medio de una razón era impensable dentro de su teoría, más aún cuando se encontraban en sus dos figuras representativas más emblemáticas.

En el lenguaje matemático actual, las magnitudes inconmensurables las representamos con números irracionales, por tanto podemos observar claramente, una **primera noción de medida para los griegos**, pues para ellos, y como lo enuncia González (González Urbaneja,2008) *”... número significa en lenguaje actual, número entero positivo; así que cuando planteaban la medida de dos magnitudes por medio de una fracción $\frac{a}{b}$, está no indicaría un número racional sino una relación entre dos números enteros a y b, es decir, la razón entre a y b.”*

A partir del anterior argumento, se desarrolló la teoría pitagórica de la proporción, construida bajo el argumento de que las magnitudes eran todas conmensurables, es decir, que tenían una unidad en común. Pero con lo sucedido, varios de los teoremas demostrados por los pitagóricos con su teoría de la proporción quedaban afectados y por tanto debían ser re-elaborados.

El surgimiento de este hecho marcó un hito histórico en las matemáticas según (Gonzalez Urbaneja, 2008), pues la comprobación de los inconmensurables solo se puede hacer por medio de elaboración teórica, pues la comprobación física es prácticamente imposible. Esto convoca a elaborar entes matemáticos bastante definidos que en articulación con métodos de demostración pudieran llegar a constituir una salida a la crisis que esta cuestión planteaba. De esta forma el proceso de medir (en este caso segmentos, y por tal áreas) se veía afectado, ya no estaría ligado a comprobaciones físicas ni a la primera noción de medida (que por ese momento quedaba corta frente a la situación) y en cambio se vería ligado a entes matemáticos que aún estaban por construirse y a conceptos filosóficos que argumentaran tal elaboración teórica.

Es así que el método demostrativo adquiere un carácter urgente por desarrollar para los griegos, por el valor que adquiere al develarse como una salida con carácter propio de las matemáticas para enfrentar el problema que surgía, además de definir un paradigma frente a como asumir y accionar en matemáticas, pues para comprobar desarrollos teóricos dentro de esta rama de las ciencias se debía recurrir a métodos de demostración deductiva que tomara principios o verdades evidentes tomadas como válidas.

1.2.3 Hipócrates de Quíos

Por aquel tiempo recorrían por toda Grecia, algunos problemas que ponían en consideración varias de las cuestiones como la constitución del continuo, finito e infinito, entre otras, se conocían alrededor de estas cuestiones los problemas clásicos griegos (Fernández, sf). Surgieron con base en leyendas e historias, pero de forma general eran: La cuadratura del círculo (Hallar la longitud del lado de un cuadrado que tenga la misma área que la de un círculo dado), la trisección del ángulo (Dividir en tres partes iguales un ángulo dado) y la duplicación del cubo (Hallar la longitud del lado de un cubo que tiene el doble de volumen de un cubo dado).

Hipócrates, quien vivió hacia el año 450 a.C. consigue elaborar mediante argumentos teóricos la primera cuadratura[3] de una figura curvilínea (lúnula) que se haya conocido en la historia de las matemáticas con base en la primera noción de medida.

Se piensa que Hipócrates elaboró una primera correspondencia lógica de proposiciones en su intento por resolver la cuestión de cuadrar el círculo, pero para acercarse a su objetivo, lo hizo en primera medida, cuadrando lúnulas, que son figuras planas limitadas por arcos de circunferencia de diferentes radios(Ver figura 1.4).

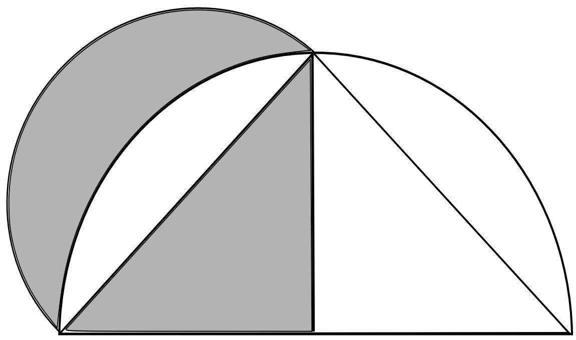


Figura 1.4: Lúnulas

[3]Determinación del área de un cuadrado equivalente en área a una figura geométrica dada

Pese a no resolver el problema en cuestión (cuadrar el círculo) su aporte tuvo dos consecuencias, la primera de ellas es que animó a muchos de sus contemporáneos (crearon e idearon varios métodos para resolver el problema, entre ellos la cuadratriz de Dinostrato, la cisoide de Diocles, entre otras), pues mostró una luz en el camino al mostrar la conmensurabilidad de líneas curvas por áreas de líneas rectas, y la segunda es que puso en evidencia una relación o razón que comparten todas las circunferencias (el número π), cuestión sobre la cual, Euclides en su desarrollo geométrico se encontrará, pero que debido a algunas limitaciones no podrá cuantificar, y Arquímedes que en su obra *Sobre la medida del círculo*, realiza una excelente aproximación.

1.2.4 Demócrito de Abdera

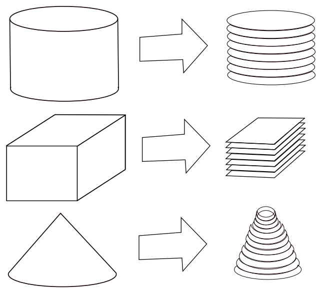
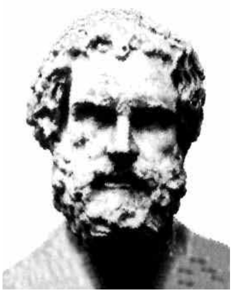


Figura 1.5: Constitución de las figuras geométricas por indivisibles



Demócrito de Abdera (460 a.C. - 370 a.C.) es considerado el fundador del atomismo físico. Para él todo lo que existe son átomos y vacío. Los átomos son las partículas originarias con la cuál todas las cosas están constituidas. En su tiempo se entendía a los átomos como los *indivisibles*.

Bajo estas ideas desarrolla un atomismo geométrico (Gonzalez Urbaneja, 2008), en el cual considera a los sólidos como una yuxtaposición o superposición de innumerables capas paralelas, las cuales vienen a ser los elementos constitutivos (*indivisibles* Ver figura 1.5) de las figuras geométricas.

1.2.5 Zenón de Elea

Zenón (489 a.C. - 430 a.C.) desarrolló unos argumentos en forma de paradojas, que buscaban alimentar la reflexión que los problemas clásicos habían causado, en particular la aparición de los inconmensurables.

Por ese tiempo había dos fuertes tésis sobre las cuales reposaban todos los constructos matemáticos griegos. La primera de ellas era el Atomismo Geométrico de los Pitagóricos y la segunda de ellas contemplaba la Física de Heráclito[4].

Zenón argumenta que si los entes matemáticos tuvieran una dimensión sensible las magnitudes geométricas estarán constituidas por elementos indivisibles y extensos, tan pequeños que carezcan de magnitud y tan grandes que pueden llegar a ser infinitos.

AQUILES Y LA TORTUGA
Aquiles, el héroe griego más rápido que la tradición recuerda, jamás podrá alcanzar a una tortuga, el más lento de los animales, si ésta parte con ventaja, porque cuando Aquiles llegue al punto de donde la tortuga partió, ésta ya se habrá movido hacia otro punto recorriendo una distancia; y cuando Aquiles llegue a este segundo punto la tortuga, a su vez, se habrá movido a otro recorriendo por tanto otra distancia, y así 'ad infinitum'.

Como vemos en la anterior paradoja, sus elaboraciones frustran el intento de articular todo el sistema aritmético del número y su representación geométrica (Gonzalez Urbaneja, 2008), pues develan la esencia el número – como hemos mencionado antes- se consideraba solo como un número entero positivo, luego su carácter es discreto y está asociado a un infinito numerable. En cambio la Geometría se consideraba como un ente de espacio continuo y homogéneo que está asociado a un espacio no comprensible y extenso.

Por tanto, los inconmensurables exigían un trabajo más arduo que implicara no solo la infinitud numérica sino también la infinita divisibilidad.

[4]Para Heráclito el ser es un ente cambiante en una transición continua entre el pasado y el devenir, es decir, el mundo es una realidad en la que todo fluye, todo va cambiando constantemente y en su relación con el "ser" es relevante en este sentido sus afirmaciones de que "no es posible bañarse dos veces en el mismo rio y "nada permanece".

1.2.6 Antifón y Bryson

Antifón de Atenas (430 a.C.) contemporáneo de Sócrates, se enfrenta al problema clásico inscribiendo polígonos de área conocida en la circunferencia. Luego construía sobre los lados de ese polígono, otros polígonos inscritos en la circunferencia duplicando sus lados. De este modo y realizando continuamente este proceso supone él que los polígonos llegarán a "llenar" toda la circunferencia.

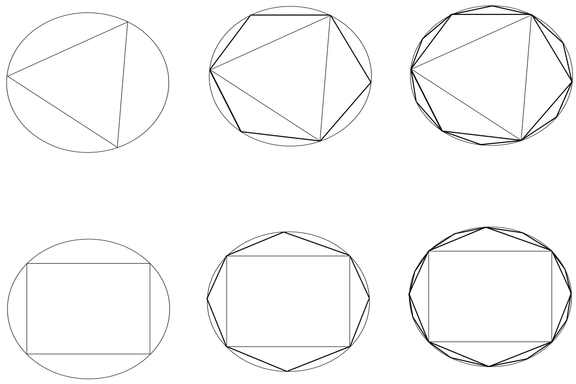


Figura 1.6: Inscripción hecha por Antifón

El principio que infringe como nos lo comenta (Gonzalez Urbaneja, 2008) es suponer que las magnitudes son divisibles sin límite alguno, por tanto si el área del círculo es divisible sin límite los lados del polígono se acercaran en el proceso pero nunca alcanzaran en el instante, en el momento a la circunferencia.

Sin embargo, la idea de *acercarse con tanta aproximación como uno quiera* supone la base del método de exhaución que tiempo después elabora Eudoxo.

Bryson de Heraclea (400 a.C.) realizó un trabajo similar al de Antifón, él añadió además de la inscripción, la circunscripción de polígonos. Supuso que el polígono intermedio que es mayor que todos los polígonos inscritos y menor que todos los polígonos circunscritos, cumplía con la misma condición que la circunferencia, por tanto no quedaba de otra que coincidieran en algún momento, y aunque no es un argumento válido, pues se vale de intuiciones, supuestos de los que espera de las figuras, ideó un método para enfrentar el problema.

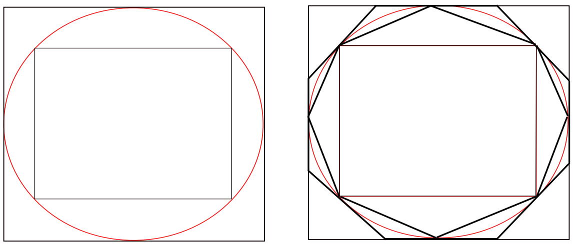


Figura 1.7: Inscripción y Circunscripción hecha por Bryson

1.2.7 Eudoxo de Cnido

Eudoxo de Cnido (408 a.C. - 355 a.C.) fue el mayor exponente de la Acádemia de Platón y el único que propuso una salida formal a la crisis por la cual atravesaba la cultura griega hacia el siglo IV a.C., pues los habia llevado a tratar las magnitudes geométricas de una forma diferente a como manipulaban los números, pues aunque eran conscientes de las magnitudes geométricas que nosotros llamamos irracionales, no las concebían como números.

Eudoxo se basa en la idea de "tan pequeño como se quiera" –desarrollada por Antifón y Bryson en sus propuestas- (Gonzalez Urbaneja, 2008) para establecer una nueva definición en la cual no se hace mención al carácter de las magnitudes (conmensurable e inconmensurable) pues la construye para que aplique en ambos casos.

Esta propuesta es un antecedente claro de nuestro actual paso al límite, y se compone generalmente de 3 elementos:

- Definición de Igualdad de Razones (Elementos V.5)
- Axioma de Eudoxo – Arquímedes o de Continuidad (Elementos V.4)
- Principio de Eudoxo (Elementos X.1)

En primer lugar, la definición que propone Eudoxo se parece bastante en forma a la propuesta hecha por Dedekind para construir los números reales por medio de cortaduras.

Segundo, dentro de este proceso se opera con magnitudes que se pueden hacer arbitrariamente pequeñas que otras anteriormente prefijadas, para tal fin introducen el axioma de continuidad que enuncia:

"Se dice que dos magnitudes tienen razón cuando se puede multiplicar una de ellas de modo que supere a la otra".

Este axioma tiene la misión de suponer la existencia de magnitudes "tan grandes o tan pequeñas como se quiera", es decir, de excluir a los infinitesimales actuales[5].

Por último, el principio de Eudoxo sirve para estimar el error que se comete en cada paso del proceso de cuadratura de Antifón. Aplicando este principio encontraremos un polígono inscrito cuya diferencia con el círculo *es tan pequeña como se quiera.*

1.2.8 Aristóteles

Filósofo griego nacido en Estagira (384 a.C. - 322 a.C.) es considerado el discípulo más prominente de la Academia de Platón. Cuando su maestro y líder muere, abandona la escuela y funda el Liceo. Allí empieza a desarrollar una propuesta diferente a la que se estaba generando en la Academia.

Para nuestro interés, la Academia de Platón reconocía las partículas indivisibles fijas con las cuales estaban constituidos los entes geométricos, en cambio, para el Liceo de Aristóteles se reconocía a los entes geométricos una infinita divisibilidad de su continuo. Para Aristóteles era impensable creer que dos puntos colocados uno al lado del otro constituyeran una línea (considerándolos ambos *indivisibles*), más bien consideraba como línea lo que existe entre dos puntos.

Otro asunto relevante es su teoría de flujo, que considera la naturaleza y la sustancia de los seres. Asume el cambio como algo innegable de la realidad y característico de la naturaleza. Este cambio tiene dos formas bien diferenciadas, una ser *en acto* y otra ser *en potencia.* La primera de ellas hace referencia a como es la sustancia en el ahora y la segunda se refiere a una capacidad de la sustancia, es decir, a la capacidad de ser algo que por naturaleza es propio de esa sustancia y no de otra.

Para Aristóteles estas cuestiones lo llevaron a tratar la cuestión del infinito de este modo: Un infinito *en acto* se caracteriza por ser un todo constituido de infinidad de cosas dadas, y un infinito *en potencia* es un todo que en su constitución la infinitud no está acabada y es susceptible de cambiar por encima de todo límite.

Estas acepciones nos llevan a considerar que si a los entes geométricos (por ejemplo un segmento de recta) les aplica el infinito *en acto*, obtendríamos los *indivisibles* y que si les aplica el infinito *en potencia* obtendríamos los *infinitesimales.* Esto es importante pues define dos tendencias que van a prevalecer el desarrollo de las matemáticas durante los siguientes siglos: por un lado los exponentes de los *infinite-*

[5]En el apartado de Aristóteles veremos un poco más este concepto

simales como Arquímedes, Galileo, Roberval, Barrow y Newton, y por el otro lado los exponentes de los *indivisibles* como Demócrito, Arquímedes, Cavalieri, Fermat, Pascal, Huygens y Leibniz.

1.2.9 Euclides de Alejandría

Fue un matemático y geómetra griego (330 a.C. - 275 a.C.), que asumió la titánica tarea de recopilar, ordenar y sistematizar todos los aportes y desarrollos que como civilización griega se habían hecho a las matemáticas. El producto final de este proyecto se denominó los *Elementos*.

Ante la crisis que suscitaron la aparición de las magnitudes inconmensurables y las reflexiones que se llevaron a cabo por las paradojas de Zenón, la respuesta de los griegos fue desarrollar todo un sistema estructurado que les permitiera medir diferente a la comparación directa entre magnitudes.

Con un propósito ambicioso, la obra de Euclides tenía la misión de estructurar toda la matemática griega elemental, normativizándola bajo una estructura lógico-deductiva.

De los trece libros que componen la obra, se considera al quinto como el más importante. En este se recopilan los aportes de Eudoxo, los cuales constituyeron una salida a la crisis que habían provocado los inconmensurables. Sin embargo, todo ese compendio estaba permeado fuertemente por la visión filosófica de Platón, así que el desarrollo general a los largo de lo libros tomó un rumbo geométrico-deductivo, que rechazaba la aplicabilidad práctica y por tanto limitaron el desarrollo de una noción y definición de número irracional.

La brecha tan grande que lograron imponer entre número y magnitud, los llevó a utilizar las propias figuras que empleaban como magnitudes y operar directamente con ellas, esto es lo que se conoce como ***álgebra geométrica*** y que consideramos es la **segunda noción de medida de área**, pues su sistema de numeración utilizaba letras del alfabeto para representar números enteros, lo que dificultó bastante el desarrollo algorítmico de manipulación.

Esto les impidió poder asignar a las figuras geométricas, números que designaran su longitud, área y volumen. Se estableció así un paradigma de la medida que consideraba tres aspectos:

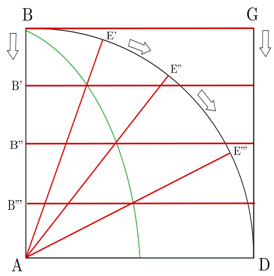
- Dimensión Uno - Comparar un segmento con otro tomado como referente
- Dimensión Dos - Hallar un cuadrado equivalente en área a una figura plana

- Dimensión Tres - Hallar un cubo equivalente en volumen a un sólido

Esas limitaciones algebraicas los condicionaron a tratar con pocas curvas, pues no manejaban una expresión que condensara las propiedades de ésta, sino solo su definición por retórica o través de razones y proporciones (Ver recuadro la cuadratriz de Dinostrato y su expresión). Además por la herencia que dejó la filosofía eleática a la Academia de Platón, la geometría que se vislumbra a través de la obra de Euclides tiene un matiz muy estático, a salvar la definición de círculo y la noción común cinco que hacen de la geometría euclidiana invariante bajo translaciones. Esta ausencia de una cinemática o nociones sobre el movimiento provocó que no se trataran temas y problemas que hoy se resuelven y se abordan con la diferenciación.

CUADRATRIZ DE DINOSTRATO

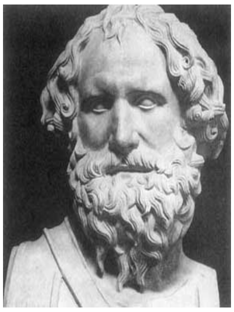
Como lo enuncia (Arenzana, 1998), *"Siguiendo la misma nomenclatura de las figuras que Pappus podemos decir que dado el cuadrado ABGD se llama cuadratriz al lugar geométrico de los puntos de intersección de las recta BG que se desplaza con movimiento uniforme hasta AD con las rectas AE que giran en torno a A desde AB a AD, también con movimiento uniforme cuando AB y BG comienzan a la vez el movimiento y emplean el mismo tiempo en el recorrido."*



Pero centrandonos ahora en la forma como abordaron la actividad de medir con base en el paradigma que establecieron, nos limitamos a nombrar algunas cuestiones sobre el libro XII que trata sobre cuadraturas y cubaturas.

Son 18 proposiciones en donde empleando la doble reducción al absurdo junto a los elementos primordiales del método de exhaución, logran proporcionar más que resultados exactos, nos muestra una comparación directa entre razones de las figuras y elementos geométricos que intervienen o de las cuales están compuestas.

1.2.10 Arquímedes de Siracusa



Arquímedes nació en Siracusa (287 a.C. – 212 a.C.). Estudió en Alejandría junto a los primeros discípulos de Euclides y tiempo después vuelve a Siracusa donde seguirá con sus estudios e investigaciones, los cuales comunicará por medio de cartas a sus colegas en el Museo de Alejandría. Es considerado el prototipo de científico representante de la época Helenística de Grecia. Sus trabajos son ampliamente reconocidos por los alcances, la creatividad, el rigor y la sencillez que manejo en cada una de sus investigaciones.

Como un primer elemento importante a señalar, es que Arquímedes trasciende el punto de vista filosófico sobre el cual reposaba la geometría euclidiana, púes Platón no consideraba, ni siquiera como fuente de inspiración, el mundo sensorial, en cambio para Arquímedes constituyó una fuente inagotable de investigación y descubrimiento.

Como un segundo elemento importante a resaltar es la modificación que Arquímedes hace del método de Exhaución de Eudoxo, pues él y Euclides aproximan las dos figuras (magnitudes) conocida y desconocida a una sucesión monótona creciente tal que... y luego empleando la doble reducción al absurdo, concluyen que son iguales, en cambio Arquímedes añade una sucesión monótona decreciente, adjunta a la anterior, forzando a las magnitudes a ser iguales, lo cual comprobara por medio de reducción al absurdo.

A Euclides se le rescata la labor que como compilador-organizador tuvo al elaborar los *Elementos*. Pero se cree que el fin de esta obra era didáctico, en realidad constituía un primer paso en el amplio y profundo estudio de la filosofía, así lo consideraba Platón. Pero Arquímedes tiene la fortuna de ser reconocido como investigador, pues en comparación con los *Elementos*, los escritos de Arquímedes estaban dirigidos a otros matemáticos de su tiempo. Eran concisos e intensos, todos unos estudios científicos. En ellos planteaba problemas nuevos, investigaba e indagaba cuestiones muy diferentes a las abordadas por sus contemporáneos.

Y aunque las obras de Arquímedes están redactadas en el lenguaje del *álgebra geométrica*, logra tener un gran desarrollo de pensamiento matemático, que articuló procesos de investigación y exploración junto con una forma sintáctica y deductiva de demostrarlos de manera rigurosa e impecable.

1.3 Noción de medida en los griegos

En la siguiente tabla (Ver tabla 1.1) recopilamos algunos aspectos importantes en cuanto a las nociones de medida que manejaron los griegos en cabeza de algunos de sus más importantes representantes.

NOCIÓN DE MEDIDA Y SUS CARACTERÍSTICAS EN LOS GRIEGOS	
Pitagóricos	▪ Creían que el número entero era el principio rector del universo ▪ No concebían las magnitudes inconmensurables (actualmente, números irracionales), esto supuso una fuerte crisis de las matemáticas cuando aparecen inconsistencias en la resolución de problemas bajo su propuesta. ▪ Desarrollaron una teoría de las proporciones basada en las magnitudes conmensurables y resolvieron problemas geométricos con base en está **primera noción de medida**.

Continúa en la página siguiente

Continuación de la página anterior

Eudoxo - Euclides	▪ Introducen y manipulan las magnitudes inconmensurables a la teoría de proporciones de Pitágoras ▪ Eudoxo desarrolla el método de exhaución como una estrategia frente a los cuestiones que el infinito planteaba en la fundamentación de los elementos geométricos y que aparecían en la resolución de problemas tales como la asignación o cálculo de medidas y áreas. ▪ Euclides le imprime el carácter estático a la geometría griega, fiel a las creencias de su maestro Platón y a las creencias de la Academia que dictaban que la geometría debía alejarse de elementos ajenos a la mente tales como los procedimientos mecánicos y/o producidos por experiencias sensoriales. ▪ Re-elaboran la teoría de las proporciones añadiendo el tratamiento con magnitudes inconmensurables
Arquímedes	▪ Desarrolla **El método** como vía heurística (creativa e investigativa) de descubrimiento de resultados por medio de la investigación con experimentos mecánicos y de palanca, que le asigna por medio de reglas concretas pesos (físicos) a las figuras y con procedimientos y operaciones entre indivisibles logra relacionar su longitud, área y volumen por medio de proporciones. ▪ Amplía le método de exhaución de Eudoxo y lo utiliza como vía de demostración (A la manera de Euclides y los **Elementos**) para demostrar los resultados que por la vía de la investigación (heurística) pudo vislumbrar de las relaciones entre las figuras. ▪ Utiliza aspectos tanto estáticos como cinemáticos

Continúa en la página siguiente

Continuación de la página anterior

Tabla 1.1: Noción de medida en los Griegos

1.3.1 A modo general para los Griegos

Los griegos lograron un lugar realmente importante en la historia de las matemáticas pues establecieron un paradigma de pensamiento y actuar frente ellas que duraron por más de 2000 años. Los desarrollos más relevantes se dieron en una de las disciplinas más antiguas de este campo como es la geometría.

La relación que existe entre ésta y la noción de medida que caracterizó este tiempo se evidencia en un primer momento por la teoría de las proporciones de los Pitagóricos con magnitudes conmensurables (**una primera noción de medida**) y luego con el mejoramiento de ésta y su extensión a las magnitudes inconmensurables hecha por Eudoxo y lo que consideramos vendría a ser el *álgebra geométrica* (**segunda noción de medida**) y un uso excesivo de ella. Esto resultado de su elaboración teórica para enfrentar los dilemas que planteaban el infinito y la constitución de los elementos geométricos.

La ausencia de un marco de referencia en el espacio, los llevó a considerar solamente figuras limitadas o con bordes de forma estática (sin movimiento, por eso no aceptaron válidamente las curvas mecánicas), características que no los limitó en su presentación de ideas, pero que sin embargo los estancó en la evolución de su producción, ya que solo podían asignar o medir el área de las figuras relacionándola con otras áreas más fáciles y ya conocidas. Vale resaltar en este sentido el trabajo hecho por Arquímedes, quien es considerado por autores como el primer científico investigador, precursor del cálculo integral, cuyos aportes y tratados, que elabora utilizando nada más que dos métodos, uno de descubrimiento (llamado Método Mecánico) que empleaba indivisibles y otro de demostración (A la manera de Euclides y los *Elementos*) empleando infinitesimales se convierten en la **tercera noción de medida**, en este caso para Arquímedes, y servirán de inspiración y motivaran a las generaciones posteriores de matemáticos en la consolidación del gran edificio que hoy conocemos como análisis. Son precisamente estos trabajos los que consolidan la producción griega que alimentará las mentes de matemáticos europeos del siglo XVII, quienes con nuevas herramientas y constructos matemáticos en nacimiento y desarrollo irán dando forma a las elaboraciones matemáticas modernas. Esto lo veremos en el próximo capítulo.

Capítulo 2

Medida en el Siglo XVII

El cambio de actitud en la matemática del siglo XVII, quizá influenciada por los grandes descubrimientos de todo tipo: geográficos, científicos, médicos y tecnológicos, aumentó el interés de los matemáticos por descubrir más que por dar pruebas rigurosas, lo que supuso un gran avance en el desarrollo del cálculo infinitesimal.

Como menciona (Gonzalez Urbaneja, 1995) tras la herencia dejada por lo griegos en particular, la escuela platónica, la cual se enmarcaba en un contexto geométrico apoyado en una construcción rigurosa de un sistema axiomático el cual tenía como fin demostrar propiedades de los elementos geométricos, este se tomó como precedente en el siglo XVII, para lo cual se hizo la recuperación, construcción y asimilación del legado clásico, se impuso un nuevo contexto hacia los problemas matemáticos, que imperó durante la época. Lo cual permitió el desarrollo y creación de nuevas técnicas infinitesimales, las cuales permitieron obtener resultados de forma directa dejando al lado el rigor de la Matemática Griega. El álgebra simbólica de vieta, la representación geométrica de curvas, la geometría analítica de Fermat y Descartes, aplicados al análisis geométrico recuperado de los griegos, propició la rápida y sencilla formulación para la investigación de multitud de problemas de áreas, volúmenes, centros de gravedad, tangentes, máximos y mínimos.

Bajo esta perspectiva y con el uso de tales herramientas se da inicio al desarrollo del Cálculo integral, con nuevos métodos, tales como:

- Método de los indivisibles, por Cavalieri
- Método de los infinitesimales por: Fermat, Roberval y Wallis.

- Isaac Barrow, Isaac Newton y Gootfried Leibnitz, con el desarrollo de la derivada, la integral y el Teorema Fundamental del Cálculo.
- Distribuciones de probabilidad para variables continuas.

2.1 Siglo XVII: Contextualización

Durante el siglo XVII lo importante luego del paradigma expuesto por los griegos para exponer los conocimientos en matemáticas, fue lograr nuevos resultados, de crear, inventar, aún en ausencia de expresión rigurosa. Es así que el siglo XVII se constituyó para las matemáticas como una época prospera para el nacimiento de nuevas disciplinas, entre ellas: el cálculo infinitesimal, la geometría analítica, el cálculo de probabilidades, la teoría de números y la geometría proyectiva.

Se reconocía de la matemática griega su carácter riguroso, sin embargo las dificultades que tuvieron con la aceptación del infinito, lo limitado de sus métodos para tratar cada problema de forma particular y la forma tan rigurosa y metódica (método de Eudoxo) de abordar los problemas infinitesimales, llevó a los pensadores de este siglo a recuperar, asimilar y reconstruir muchas de estas herramientas, todo con el objetivo de crear, de abordar rápidamente los problemas infinitesimales que tantos recursos le demandaron a los griegos, sin importar que la rigurosidad de los argumentos fuera débil.

Es importante resaltar los aportes del algebra simbólica de Vieta y Descartes que junto con el análisis geométrico de los antiguos, permitieron el desarrollo de técnicas formales que abrieron paso a nuevos descubrimientos. La representación algebraica de curvas fue otro punto a favor en el desarrollo de esta época, a cargo de Fermat y de Descartes.

En general se produjo un proceso de aritmetización de los problemas que en la antigüedad habían tenido solo un enfoque geométrico.

Respecto del cálculo, inicia durante este siglo, una etapa empírica en la que cuestiones tales como cantidades infinitamente pequeñas, indivisibles, pequeños tanto como se quiera, se emplean como elementos fundamentales de muchas técnicas y métodos infinitesimales, y aunque no están bien definidos, logran suplir con sentido de generalidad y unificación su falta de rigor, lo que lleva a Newton y a Leibniz a descubrir el cálculo infinitesimal simultáneamente.

Esta perspectiva llevó a los desarrolladores del cálculo a aproximarse al desarrollo de un método como del que precisaba Arquímedes y el cual ellos no conocían hasta ese momento (Método Mecánico).

A inicios de este siglo, se intenta modificar y mejorar los métodos de Arquímedes para facilitar el proceso y dejar a un lado la doble reducción al absurdo que empleó en cada una de sus demostraciones. Se empieza a utilizar las bases de una teoría de números que hasta ahora empezaba a gestarse.

Cavalieri se encontraba entre los que asumía a los entes geométricos constituidos por infinitos elementos indivisibles, pero en su tiempo el álgebra le brinda los recursos para agilizar los procesos que con indivisibles realizaban los griegos, en particular, los hechos por Arquímedes y su método mecánico y además le proporciona la posibilidad de generalizar resultados que para los griegos era imposible.

Sin embargo se polemizó sobre el uso reiterado de los indivisibles y de la intuición en la invención de muchos métodos, de los cuales no hubo mucho esfuerzo en demostrar su validez, pues se creía que se podía fácilmente desarrollar al emplear el método de Exhaución.

El método de los indivisibles recibió muchas críticas, en parte por las ambigüedades y problemas que surgían cuando se trataba la estructura del continuo, pues contradecían la doctrina aristotélica que sobre este yacía. Fermat, Wallis y Roberval recogen esas críticas y se proponen modificar el método de Cavalieri para evitar esos problemas de dimensionalidad, y acogiendo la doctrina aristotélica dejan de tomar segmentos para sumar todas las ordenadas y toman rectángulos de anchura infinitesimal (infinitesimales). Esto provoca una segunda etapa del cálculo que se basa en las anteriores reflexiones, principalmente en reemplazar los indivisibles por los infinitesimales, y aunque no se precisaba su naturaleza, lo que volvía frágil la rigurosidad, dio vía libre a diferentes y numerosos métodos.

El álgebra permitió que durante esta época se trataran de una forma más investigativa y con un mejor análisis las curvas. En un primer momento se abordaron las curvas que crearon los griegos, entre ellas destacan las cónicas de Menecmo y Apolonio, la Cisoide de Diocles, la cuadratriz de Dinostrato, la hipopede de Eudoxo, la concoide de Nicomedes y la espiral de Arquímedes. Luego vinieron las creaciones de los matemáticos de la época, entre las que resaltan las curvas de Fermat, el caracol de Pascal, el folio de Descartes, la espiral logarítmica y la cicloide.

Dada la forma tan estática que tuvo la geometría griega, durante el siglo XVII hubo una preocupación más profunda por abordar cuestiones que relacionaran la cinemática, y en particular las variaciones y las velocidades. Los problemas de diferenciación adquieren relevancia, pues al considerar las curvas como la trayectoria de un punto en un tiempo determinado, termina por convocar los esfuerzos de los matemáticos para elaborar y construir herramientas que permitan determinar un método general de obtención de tangentes, con las cuales podían deducir información importante de la partícula y su recorrido.

Descartes no acoge las curvas definidas cinemáticamente y trabaja solamente con aquellas algebraicas. Elabora para éstas un método general de hallar tangentes basado en geometría algebraica, con el empleo de algoritmos y el uso de raíces dobles. Sin embargo su procedimiento será absorbido por los procedimientos cinemático-diferenciales de Fermat, Roberval y Barrow, que defienden a las curvas cinemáticas y las comprenden como curvas, sin distinción.

Es importante ver como la variable "tiempo" dentro de los trabajos de Barrow adquiere relevancia y se convierte en la variable independiente universal de la que dependerán multitud de magnitudes dependientes. Estas son las ideas que llevaran a Newton a desarrollar su teoría de fluyentes (magnitudes que dependen del tiempo) y fluxiones (derivadas respecto al tiempo).

Un aspecto importante a resaltar, es que durante el siglo XVII se empieza a trabajar en torno a una clasificación de los problemas. En cuanto a la diferenciación podemos hallar las tangentes, velocidades y problemas de máximos y mínimos. En cuanto a la integración, aumentaron considerablemente los problemas de cuadraturas y cubaturas gracias al gran abanico de posibilidades (nuevas curvas) que se habían creado.

Además se abordan problemas de rectificación de curvas y el cálculo de superficies de revolución (Arquímedes fue el único que desarrollo problemas como estos en sus trabajos). El problema de la rectificación de curvas, supuso un descubrimiento relevante durante este siglo, el cual vislumbra la relación recíproca que compartían los procesos de diferenciación e integración. Barrow fue el primero en observar que estos dos problemas que se constituían como fundamentales en el Cálculo eran inversos el uno del otro, pero es en la mente de Newton y Leibniz que se consolida esta perspectiva en un poderoso algoritmo para calcular áreas y tangentes.

En general se clasifican los problemas según la integral que subyace detrás de ellos. Redujeron todos los problemas de áreas y volúmenes al estudio de cuadraturas. Cavalieri con sus indivisibles avanza en este sentido declarando que la mayoría de los problemas abordados por Arquímedes se reducen a la integral $\int x^n dx$. De manera general podemos decir que durante el siglo XVII se centraron los esfuerzos en desarrollar técnicas y métodos a través de la resolución de la cuadratura básica integral $\int x^n dx$ (n entero positivo).

En el sentido de abordar la cuestión anterior, vale recordar que Arquímedes en la cuadratura de la espiral utiliza procedimientos similares a los que actualmente utilizamos en las integrales definidas, como lo son la suma de enteros y sus cuadrados.

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n\,(n+1)}{2}\approx\int_0^a xdx=\frac{a^2}{2}$$
$$1^2+z^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}\approx\int_0^a x^2dx=\frac{a^3}{3}$$

Lo que evidenciamos es que para Arquímedes eran dos problemas diferentes, para nosotros es una misma integral. Durante ese siglo se desarrollaron pruebas que se basaban en fórmulas para la suma de las primeras potencias de enteros.

$$1^k+\ldots+(n-1)^k<\frac{n^{k+1}}{k+1}<1^k+\ldots+n^k$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+\ldots+n^k}{n^{k+1}}=\frac{1}{k+1}$$

$$a^{k+1}\cdot\frac{1^k+\ldots+n^k}{n^{k+1}}\frac{a^{k+1}}{n}<S<a^{k+1}\frac{1^k+\ldots+n^k}{n^{k+1}}$$

Generalizando el resultado, se utiliza implícitamente el paso al límite obviando la doble reducción al absurdo, lo cual consideraban dispendioso. Así para obtener la cuadratura de la integral $\int x^n dx$ dividen el intervalo $(0,a)$ en a subintervalos de longitud $\frac{a}{n}$ construyendo los rectángulos inscritos y circunscriptos con altura la ordenada correspondiente, y obteniendo para la suma de las áreas las conclusiones que obtenian de las sumas de enteros. El diagrama presenta la situación donde los rectángulos que están por encima de la curva representa a los polínogos circunscritos, y los rectángulos qu están por debajo de la curva, los polígonos inscritos (Ver Figura 2.1) :

NOTA
Todas las figuras en este apartado fueron elaboradas por los autores en Inkscape (Software de graficación vectorial con licencia GPL), tomando como base las encontradas en los documentos referenciados.

Y si denominamos S al área limitada por la curva $y=x^k$ en el segmento $(0,a)$ se verifica que las desigualdades por medio del método de comprensión de Arquímedes, nos da como resultado:

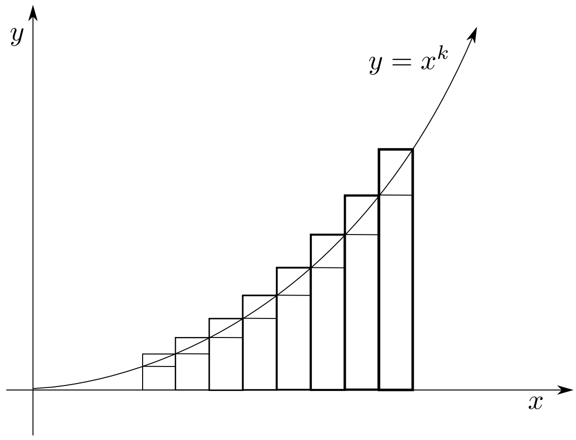


Figura 2.1: Sumas por inscripción y circunscripción

$$\frac{a^{k+1}}{k+1}$$

Gracias a la naciente Teoría de Números, matemáticos como Fermat, Wallis y Roberval se empeñan por generalizar el resultado y desarrollan por métodos aritméticos y sustituyendo los indivisibles de Cavalieri por los elementos infinitesimales (en particular Roberval emplea rectángulos, paralelepípedos, cilindros y triángulos) integraciones aritméticas que se asemejan a la actual integral definida, realizando numerosas cuadraturas de parábolas e hipérbolas (Gonzalez Urbaneja, 1995).

2.2 Buenaventura Cavalieri

Matemático italiano (1598 - 1647) que centró su atención en el estudio de logaritmos y la geometría (Barrios, 1995). Tuvo como maestro un discípulo de Galileo Galilei. Tiempo después mantiene un constante intercambio de mensajería con Galileo en donde tratan diversos temas científicos y le expone sus dudas y fundamentos de su método de los indivisibles. Galileo, que en algunas ocasiones utilizó su método, nunca lo aprobó totalmente.

Hacia 1635 expone los resultados que componen su método. En general tiene dos versiones de su procedimiento, la primera denominada el método colectivo y la segunda llamada el método distributivo. En 1647 presenta un nuevo libro donde expone la revisión de la primera versión del método y sugiere algunas simplificaciones, y muestra una nueva forma de la segunda versión.

En todo su trabajo procuró seguir la tradición griega de dotar los aportes a las matemáticas de mucha rigurosidad. Elaboró por tal una sofisticada estructura bastante extensa, original y de bastante dificultad, pues la mayoría de sus trabajos los expone de manera retórica, limitando el uso de símbolos y el álgebra.

El método consiste en dividir las figuras planas en segmentos paralelos a un segmento dado y los volúmenes en superficies planas paralelas a una superficie dada. Estos se consideran como los indivisibles de las figuras. Bajo estos supuestos analizará la relación que hay entre los indivisibles de dos figuras y así observar que sucede con sus áreas y volúmenes. Este análisis comparativo lo realiza en dos vías: Método Colectivo: Toma colectivamente todos los indivisibles de una figura y los compara con todos los indivisibles tomados también colectivamente de otra figura. Método Distributivo: Compara por separado cada uno de los indivisibles de una figura con el correspondiente indivisible de la otra.

Cavalieri se enfocó más en el primer método, es así que analizó diversas colecciones de figuras. Por ejemplo todos los puntos de un segmento de recta, todas las líneas de una figura plana, todos los planos de una figura sólida, todas las figuras planas construidas sobre las líneas de una figura plana dada, entre otras. Uno de los elementos importantes a resaltar de su método, es el empleo de una directriz, o como él lo llamaba una regula, para definir las partes geométricas paralelas a ésta que se iban a prolongar indefinidamente y que constituirían el conjunto de todos los indivisibles de la figura (Ver Figura 2.2).

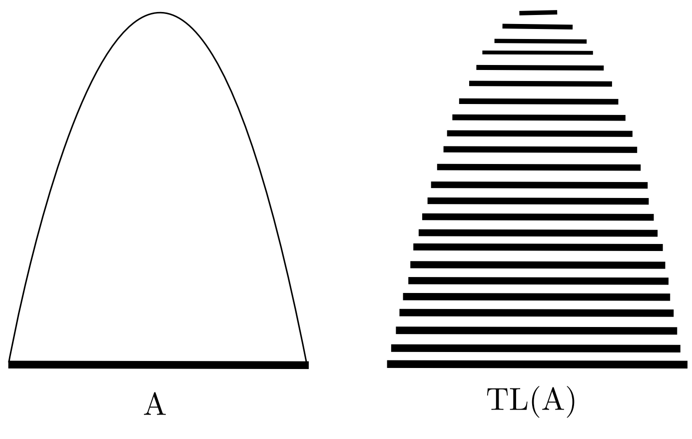


Figura 2.2: Una figura (A), su regula y todas las líneas (TL(A)) que representan sus indivisibles

Con el método colectivo, lo que pretende Cavalieri es mostrar que las colecciones de indivisibles que toma de cada figura, son magnitudes geométricas entendidas en el sentido euclideo (Barrios, 1995). Sin embargo, su argumento carece de solidez pues emplea propiedades de las colecciones que asume implícitamente y aparecen algunas dudas y problemas en el manejo de infinitos indivisibles en cada colección.

En particular, cuando quiere demostrar que las colecciones de indivisibles de dos figuras son magnitudes que guardan razón, es decir, que al multiplicarse una excede a la otra, debe elegir que colección de infinitos indivisibles es el máximo, lo que lo llevo a descuidar su demostración y a ser poco riguroso. Gran parte de los resultados que obtuvo, se basaron en el Principio que lleva su nombre, El Principio de Cavalieri, que enuncia así: ***Si dos figuras planas o sólidas tienen igual altura, y si las secciones hechas por rectas paralelas o planos paralelos a las bases y a igual distancia de ellas están siempre en una misma razón, entonces las figuras planas o sólidas están también en esa misma razón***(Barrios, 1995).

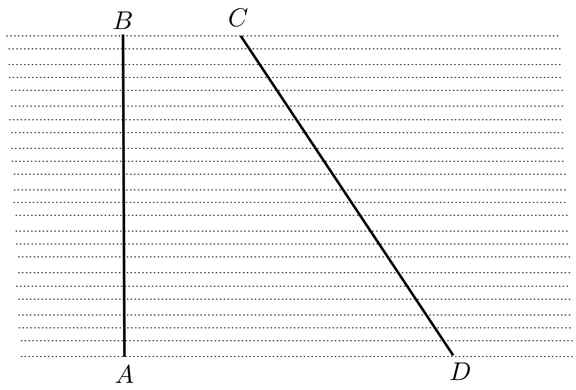


Figura 2.3: Plano perpendicular y oblicuo

Este principio presenta algunos inconvenientes que llevaron a Cavalieri a diferenciar las secciones paralelas perpendiculares y oblicuas a la figura y su regula cuando ésta estaba contenida en una dimensión mayor a la que la define. Por ejemplo a segmentos contenidos en un plano o a figuras planas contenidas en el espacio (Ver Figura 2.3).

Vamos ahora a analizar cuáles fueron los aportes hechos por este método a la consolidación durante el siglo XVII de una concepción de medida y del cálculo integral. Cavalieri bajo el método anteriormente descrito, logra reducir a una comparación de indivisibles la cuadratura de la parábola $y = x^n$, para n desde 1 hasta 9, y así llevarlo a enunciar una solución general para n natural (Ver Figura 2.4).

Debido al intercambio epistolar que sostenía con Galileo frente a la fundamentación del método, desarrollo una segunda versión de su método, la forma distributiva. Sin embargo acá también presentó percances. Las discusiones giraban en torno a la composición del continuo geométrico, y a través del intercambio se sabe que Cavalieri no tenía una posición definida, pues juzgaba que la discusión era ajena a su método. Otras voces venidas de sus colegas hicieron sentir su objeción frente al método. Una de ellas aseguraba que el método de los indivisibles era inútil para cuadrar figuras, pues en primer lugar, es imposible que entre dos colecciones de infinitos se guarde

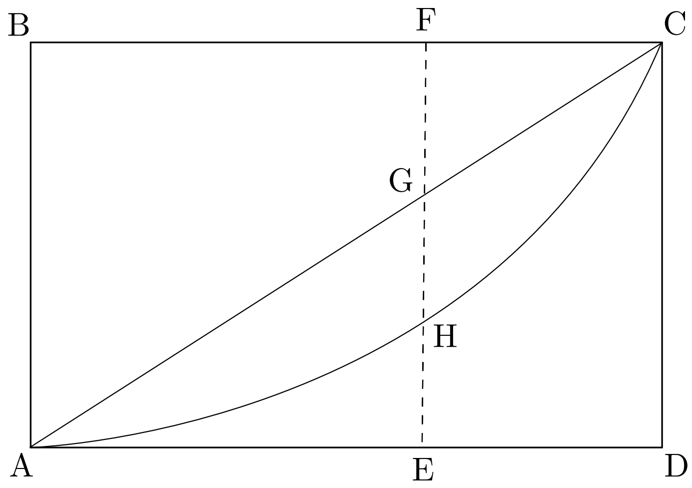


Figura 2.4: La cuadratura básica por Cavalieri

alguna razón, y en segundo lugar, no es posible que toda la colección de indivisibles que componen la figura sea el interior de la figura en sí, pues esta colección de indivisibles (en el caso de una figura plana, compuesta de segmentos) sería en general una longitud acumulada mas no un área. Otra objeción le llego a través de la carta de un anónimo quien le expone la debilidad de su método aplicándolo a un problema sencillo de triángulos.

Cavalieri defiende sus ideas frente a las críticas de sus compañeros pero aun así no aclaró cuestiones que seguían fundamentando su método. Sin importar que tan fuerte fue la consolidación de su propuesta, determinó un punto de partida para la elaboración de distintos métodos que apuntaran a la fundamentación de la cuadratura básica que el propuso.

2.3 Pierre de Fermat

Fermat es considerado como el matemático que inició y contribuyó al desarrollo de la mayoría de las disciplinas que se consolidaron por otros de sus colegas durante este siglo (la geometría analítica de Descartes, el cálculo de probabilidades de Pascal, y el cálculo infinitesimal de Newton y Leibniz). Esto se debe a que desarrolló un minucioso estudio de las obras y trabajos de sus antecesores: para la teoría de números tuvo presente las obras de Diofanto, de los griegos Apolonio y Pappus junto a los trabajos de Vieta la creación de una geometría analítica y de esta última al relacionarla con los trabajos de Arquímedes varios métodos y técnicas infinitesimales que contribuyeron al nacimiento del cálculo. Sin embargo, no fue prioridad para él publicar sus resultados, a pesar de la insistencia de sus colegas, por tal razón permanece en la mayoría de las veces oculto e imperceptible en la historia de sus aportes.

Fermat desarrolla unas cuadraturas aritméticas basadas en las fórmulas para la suma de potencias de enteros (Gonzalez Urbaneja, 1995), éstas son fundamentadas en las propiedades de los números poligonales desarrollados en los trabajos de Diofanto. Con estas cuadraturas extiende las desigualdades que Arquímedes utilizó en su método ampliado de exhaución y alcanza resultados similares a los de Cavalieri, pretendiendo justificar el límite o las desigualdades que hacia el siglo XVII consolidaban la cuadratura básica. Hacia 1640 investiga y resuelve el problema de hallar el área de las hipérbolas generales de ecuación $yx^n = k$, $(m, n$ enteros positivos) limitadas por una asíntota y una línea ordenada. Bajo este estudio se propone generalizar la cuadratura de Cavalieri para n entero negativo o fraccionario. Utiliza un método que utiliza rectángulos infinitesimales que están en progresión geométrica de razón menor que la unidad, luego subdivide el eje de la figura a cuadrar en intervalos, donde construirá la inscripción y circunscripción de los anteriores rectángulos infinitesimales, con el objetivo de que cumplan las características del método arquimediano (de que la diferencia entre las áreas de las dos figuras escalonadas sea menor que una cantidad prefijada). En uno de sus tratados escritos hacia 1658 dice que Arquímedes solo utilizó progresiones geométricas para la cuadratura del segmento de parábola, que en otras cuadraturas empleó progresiones aritméticas, pensando tal vez que las primeras no eran muy provechosas. Él afirma que las progresiones geométricas son muy útiles para las cuadraturas, y que éstas se pueden emplear para cuadrar tanto parábolas como hipérbolas.

Antes de iniciar la cuadratura enuncia una propiedad (**sumación**) de las progresiones geométricas de razón menor que la unidad: *"Dada una progresión geométrica cuyos términos decrecen indefinidamente, la diferencia entre dos términos consecutivos es al más pequeño de ellos como el mayor es a la suma de los términos restantes"*

Luego da inicio a su justificación. Al inicio de este tratado considera las hipérbolas $yx^n = k$, y efectúa la demostración para $n = 2$. De la Figura 2.5 deduce:

$$\frac{AH^2}{AG^2} = \frac{EG^2}{IH}$$

$$\frac{AO^2}{AH^2} = \frac{IH}{NO}$$

Fermat afirma: "...que el área indefinida que tiene por base EG y que está acotada un lado por la curva ES y de otro lado por la asíntota infinita GOR, es igual a una cierta área rectilínea" (González Urbaneja, 1995).

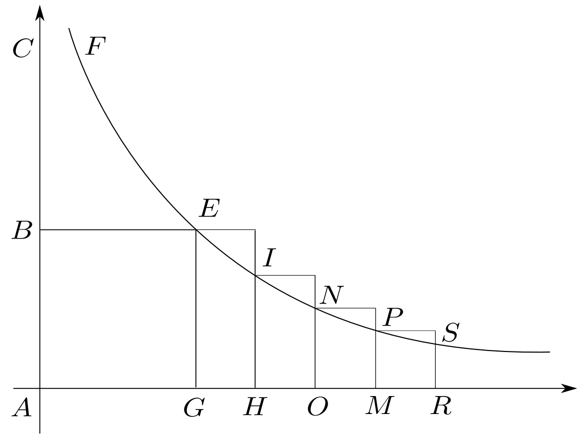


Figura 2.5: Cuadratura de la parábola por Fermat

Las anteriores magnitudes hacen parte de una progresión geométrica indefinida y decreciente, que luego le servirá a Fermat para conformar otra progresión geométrica decreciente con los rectángulos $R_1, R_2, R_3, \ldots$ de razón $\frac{AG}{AH}$.

Comprobando lo anterior y considerando a S como la suma de esta progresión, Fermat aplica la propiedad equivalente a su sumación donde obtiene:

$$S - EG \cdot GH = EG \cdot AG$$

Además como supone que los intervalos $GH, HO, OM, \ldots$ están lo suficientemente próximos para que otros "fueran suficientemente iguales" deduce que el área indefinida a la cual se refería y la cual estaba limitada por la hipérbola y las líneas GH y GE, y gracias a las infinitas subdivisiones y a la conclusión que sacó de la propiedad de sumación de la progresión, es igual al área del rectángulo $AG \cdot GE$.

El método empleado por Fermat se denomina "Logarítmico", pues durante esa época la palabra evocaba una relación entre una progresión geométrica y una aritmética. Actualmente se le llama "exponencial" (Ver Figura 2.6) pues en notación actual a partir de la abcisa $x = a$ se obtiene una progresión geométrica de razón e^t con los términos $x_1 = ae^t, x_2 = ae^2t, \ldots$, así el área de los rectángulos circunscritos es:

$$R_1 = a\left(e^t - 1\right)\left(\frac{1}{a^2}\right) = \left(\frac{e^t - 1}{a}\right)$$
$$R_2 = a \cdot e^t \cdot \left(e^t - 1\right)\left(\frac{1}{a^2 e^{2t}}\right) = \left(\frac{e^t - 1}{ae^t}\right)$$

Luego R_1, R_2 conforman una progresión geométrica decreciente de razón e^t, a la que aplicando la propiedad de la sumación, donde $S(t)$ es la suma de la progresión,

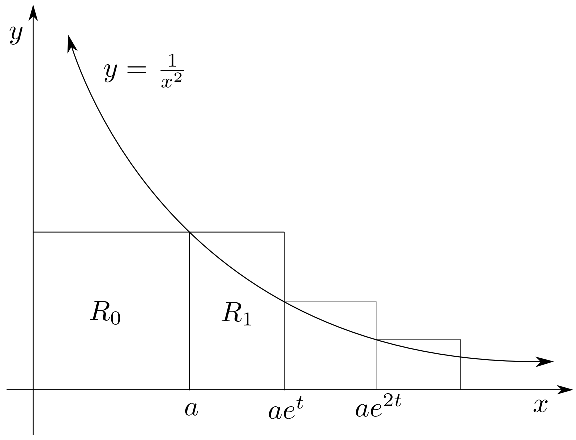


Figura 2.6: Método exponencial de cuadratura de Fermat

se obtiene:

$$S(t) = \frac{R_1}{1-e^t} = \frac{\frac{e^t-1}{a}}{1-e^t} = \frac{1}{a} + \frac{e^t-1}{a} = R_0 + R_1$$

A partir de acá podemos deducir que el área (S) limitada por la hipérbola, la ordenada $x = a$ y la asíntota $y = 0$ es:

$$S = \lim_{t\to 0} S(t) = \frac{1}{a} = R_0$$

Resultado que es equivalente la integral impropia:

$$S = \int_a^{\infty} \frac{k}{a^2}\,dx = a \cdot \frac{k}{a^2} = R_0$$

El procedimiento empleado por Fermat (Ver Figura 2.7) como lo describe (González Urbaneja, 1995) para cuadrar hipérbolas (excepto la de Apolonio) y parábolas generalizadas comparte aspectos esenciales con la integral definida:

- Dividir el área bajo la curva en elementos de área infinitamente pequeños (rectángulos)
- Aprovechar la ecuación analítica de la curva para hallar una aproximación numérica de la suma de los rectángulos
- Expresar la suma cuando el límite de esos rectángulos crece indefinidamente mientras se hacen infinitamente pequeños

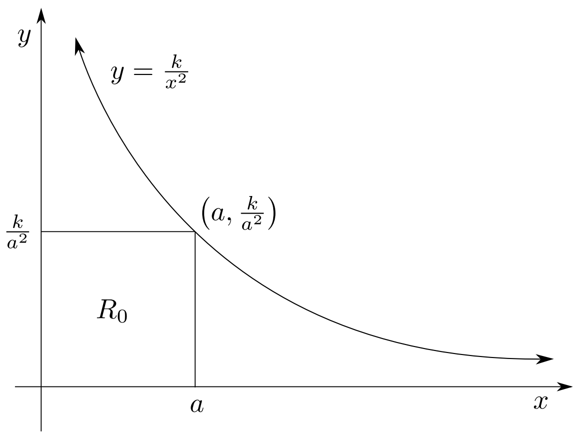


Figura 2.7: Situación del límite de Fermat

2.4 Gilles Personne de Roberval

Este matemático francés desarrolla un método que es una especie de transición de los indivisibles de Cavalieri a los infinitesimales de Fermat o de Newton y Leibniz (Gonzalez Urbaneja, 1995). Efectivamente, el trabajo de Roberval conjuga las características de las dos visiones de la constitución del continuo (Indivisibles e Infinitesimales), pues maneja *infinitamente pequeños homogéneos* (infinitesimales) y en algunos casos y pasos de su elaboración lo hace como si fueran *indivisibles heterogéneos*, lo llama *método de los indivisibles* (**Traité des Indivisibles**) .

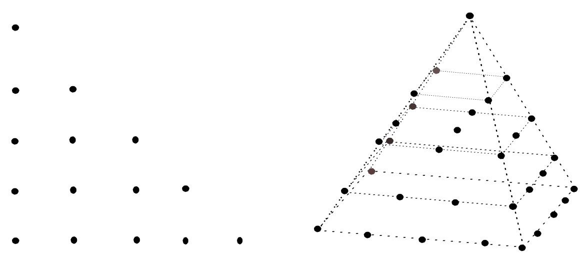


Figura 2.8: Asociación aritmético-geométrica hecha por Roberval

Roberval asocia nuevamente los números a las magnitudes geométricas (Ver Figura 2.8), pues un segmento de línea se considera como una composición de elementos a los cuales se les asigna enteros positivos. Considérese como ejemplo triángulos rectángulos isósceles en los que sus catetos estén compuestos a manera de puntos (indivisibles) de $2, 3, 4, 5, \ldots$ puntos y pirámides de base cuadrada en la que cada uno de estas son cuadrados de lados $2, 3, 4, 5, \ldots$. Roberval al igual que Fermat utiliza resultados sobre números poligonales y calcula lo siguiente:

Número de Puntos Triángulo
... para el triángulo de 4 es: $10 = (\frac{1}{2})4^2 + (\frac{1}{2})4$
... para el triángulo de 5 es: $15 = (\frac{1}{2})5^2 + (\frac{1}{2})5$
... para el triángulo de 6 es: $21 = (\frac{1}{2})6^2 + (\frac{1}{2})6$
Estos son en últimas números triangulares, que tienen una expresión así:
$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n\,(n+1)}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)n^2 + \left(\frac{1}{2}\right)n$

Los segundos términos de las expresiones representan la mitad del lado del triángulo y en consecuencia el exceso de éste para con la mitad del cuadrado. A medida que el número de puntos aumenta este exceso se hace cada vez más pequeño en comparación con el primer término y ya que el triángulo se compone de infinitos puntos, este exceso se hace tremendamente pequeño y no se tiene en consideración para los cálculos. Es así que se concluye que la suma de puntos triangulares es la mitad del cuadrado, y se convierte en un argumento a favor de Roberval para justificar la cuadratura:

$$\int_0^a x \quad dx \approx \frac{a^2}{2}$$

De forma similar lo muestra para la pirámide, concluyendo que la suma de puntos es igual a $\frac{1}{3}$ del cubo, resultado que se corresponde con la cuadratura:

$$\int_0^a x^2 \quad dx \approx \frac{a^3}{3}$$

De la misma forma, la suma de cubos es igual a un cuarto de la cuarta potencia y así sucesivamente, teniendo por parte de Roberval un resultado justificable para la cuadratura básica con k positivo. A Roberval se le considera un predecesor de Leibniz pues en su trabajo consideró que los *infinitésimos de orden superior* se hacen imperceptibles frente a los *infinitésimos de primer orden*, además de utilizar integraciones con nociones muy cercanas a la actual en cuanto al tratamiento de los infinitesimales.

En lenguaje actual, la cuadratura de la parábola que realiza Roberval se expondría de la siguiente forma: Sean F_1 y F_2 dos figuras (Ver Figura 2.9) con base rectilínea AD y limitadas por las funciones $f1$, f_2, AB y DC. En esta parte utiliza una proporción comparando la superficie a hallar el área con otra superficie más simple, como un rectángulo o un triángulo, de forma tal que de las cuatro magnitudes conoce tres, y la cuarta sale a partir de las otras. Para el ejemplo anterior así:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(f_1\left(\frac{i}{a}AD\right)\right)\frac{AD}{n}}{\sum_{i=1}^{n}\left(f_2\left(\frac{i}{a}AD\right)\right)\frac{AD}{n}}$$

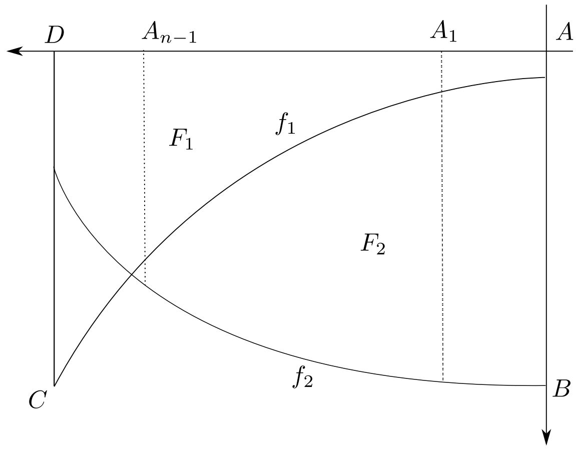


Figura 2.9: Cuadratura de la parábola por Roberval

Para cuadrar la parábola, Roberval tomó a F_1 como el segmento de parábola y a F_2 como un rectángulo, de esta manera:

$$\left(f_1\left(\frac{i}{a}AD\right)\right) = \left(\frac{i^2}{n^2}\right)AD^2$$

$$\left(f_2\left(\frac{i}{a}AD\right)\right) = AD^2$$

Y reemplazando le permite llevar la cuadratura de la parábola a la determinación del límite:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{i^2}{n^2}}{\sum_{i=1}^{n}1} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{3}\right)n^3+\left(\frac{1}{2}\right)n^2+\left(\frac{1}{6}\right)n}{n^3} = \frac{1}{3}$$

Roberval asegura que es $\frac{1}{3}$, pues como vimos anteriormente, según muestra, los últimos dos términos son imperceptibles para n^3 luego el límite tiende a este valor. Como vemos aunque comparte características con la integral definida, como es la determinación del límite de la suma de una cantidad infinita de cantidades infinitamente pequeñas, tiene que hacer una justificación a su procedimiento cuando tiene que resolver el límite, y es recurrir a argumentos intuitivos añadiendo que no calcula directamente, sino a través de la comparación con figuras más simples y conocidas, como rectángulos.

2.5 John Wallis

Wallis se esforzó en sus trabajos por independizar a la aritmética del simbolismo geométrico y alejarse así del algebra geométrica de los griegos, de forma que en sus trabajos sustituyó los indivisibles geométricos de una figura a cuadrar (propios de los trabajos de Cavalieri, inspiración de su labor) por indivisibles aritméticos (Gonzalez Urbaneja, 1995). Esto gracias a los aportes de los métodos algebraicos que yacían en la geometría analítica de Fermat y Descartes. Con estos indivisibles aritméticos fue quien más se acercó intuitivamente a la idea de límite, introduciendo el símbolo que perdurará hasta la actualidad (∞) y representando lo infinitamente pequeño por $\frac{1}{\infty}$. Sin absoluta preocupación por el rigor, lleva las propiedades aritméticas de lo finito a lo infinito, y manifiesta que cada subdivisión que se realice se puede considerar una línea o un paralelogramo infinitesimal. Además asegura que un ente de estas características, de anchura infinitamente pequeña multiplicada infinitas veces resultará una anchura dada, es decir, si a es la anchura dada se tiene $\left(\dfrac{a}{\infty}\right) \bullet \infty = a$

Resultados como éste llevarán a Wallis por medio de la utilización de excesiva intuición, inducción e interpolación a alcanzar resultados en cuanto a la cuadratura básica de Cavalieri, pero ahora considerando exponentes racionales e irracionales. Su ausencia de rigor constituyó un punto de partida relevante para que los trabajos posteriores se esforzaran por darle cuerpo y rigor a la elaboración del Cálculo. En su obra *Arithmetica Infinitorum* publicada en 1655, J. Wallis estudia exhaustivamente la cuadratura de curvas $y = x^k$ con k no necesariamente entero positivo. Sin embargo al inicio de su trabajo trabaja con k entero para deducir algunos resultados y emplearlos luego en otras proposiciones. Es así que afirma conocer la cuadratura de las curvas $y = x^k$ con el siguiente límite:

$$\int_0^1 x^k \, dx = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{0^k + 1^k + \ldots + n^k}{n^k + n^k + \ldots + n^k} \right)$$

Wallis llama a este límite *“serie de orden k”* el cual obtiene de forma empírica, comparando los indivisibles aritméticos de la parábola $y = x^k$ con los de los rectángulos circunscritos obteniedo los siguientes cocientes (para $k = 3$):

$$\frac{0^3+1^3}{1^3+1^3} = \frac{1}{4}+\frac{1}{4}$$
$$\frac{0^3+1^3+2^3}{2^3+2^3+2^3} = \frac{1}{4}+\frac{1}{8}$$
$$\frac{0^3+1^3+2^3+3^3}{3^3+3^3+3^3+3^3} = \frac{1}{4}+\frac{1}{12}$$
$$\vdots$$

Inductivamente concluye que:

$$\frac{0^3+1^3+2^3+\ldots+n^3}{n^3+n^3+n^3+\ldots+n^3} = \frac{1}{4}+\frac{1}{4n}$$

Hace algunos cálculos más de los cuales obtiene:

$$\frac{\sum_{i=0}^{n} i}{(n+1)\,n} = \frac{1}{2} \qquad \frac{\sum_{i=0}^{n} i^2}{(n+1)\,n^2} = \frac{1}{3}+\frac{1}{6}$$
$$\frac{\sum_{i=0}^{n} i^3}{(n+1)\,n^3} = \frac{1}{4}+\frac{1}{4n} \qquad \frac{\sum_{i=0}^{n} i^k}{(n+1)\,n^k} = \frac{1}{k+1}+\frac{a_1}{n}+\ldots+\frac{a_{k-1}}{n^{k-1}}$$

De estos cálculos deduce una regla que confirma para cualquier entero k positivo lo siguiente:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{0^k+1^k+\ldots+n^k}{n^k+n^k+\ldots+n^k}\right) = \frac{1}{k+1}$$

De este modo empieza a realizar cuadraturas (Ver Figura 2.10) por medio de la comparación de indivisibles:

$$\frac{\sum_{x=0}^{a} y}{\sum_{x=0}^{a} b} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\left(a\cdot\frac{0}{n}\right)^k+\left(a\cdot\frac{1}{n}\right)^k+\ldots+\left(a\cdot\frac{n}{n}\right)^k}{a^k+a^k+\ldots+a^k}\right)$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=0}^{n} i^k}{(n+1)\,n^k} = \frac{1}{k+1}+\frac{a_1}{n}+\ldots+\frac{a_{k-1}}{n^{k-1}}$$

Que es equivalente al resultado de la cuadratura básica:

$$\frac{\int_0^a x^k\ dx}{a^{k+1}} = \frac{1}{k+1}$$

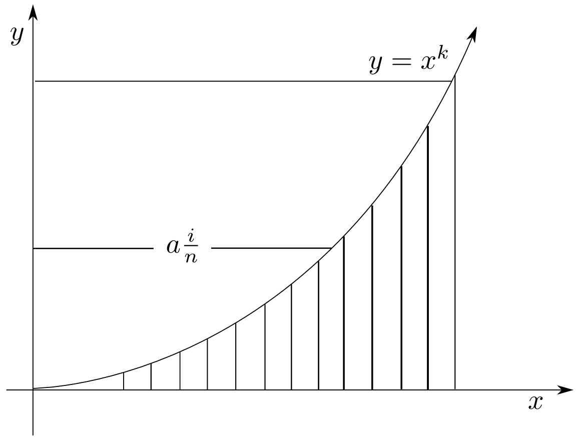


Figura 2.10: Cuadratura por indivisibles aritméticos de Wallis

Luego extendió este resultado para números k racionales positivos. Así que primero define el Índice de una función $(I(f))$así:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{f(0)+f(1)+\ldots+f(n)}{f(n)+f(n)+\ldots+f(n)}\right)=\frac{1}{I(f)+1}$$

Por ejemplo para la función $y = x^k$ el índice sería $I(x^k) = k$. A partir de esto Wallis observa que dada una progresión geométrica de potencias enteras positivas como: $\{1, x^3, x^5, x^7, \ldots\}$ su correspondiente serie de índices según la definición sería: $\{0, 3, 5, 7, \ldots\}$, la cual es una progresión aritmética. Sin demostración deduce que lo mismo puede pasar para una progresión geométrica como: $\{1, \sqrt[q]{x}, (\sqrt[q]{x})^2, \ldots, (\sqrt[q]{x})^{p=q-1}, x\}$ en la cual su serie de índices se puede corroborar que:

$$I\left\{\left(\sqrt[q]{x}\right)^p\right\}=\frac{p}{q}$$

Y razonando de la misma forma como lo hizo con el k entero, obtiene:

$$\int_0^a x^{\frac{p}{q}}\ dx=\frac{a^{\frac{p}{q}+1}}{\frac{p}{q}}$$

Que es exactamente el resultado de la integral para $k = \frac{p}{q}$. Es a lo largo de este procedimiento que Wallis asocia la raíz $(\sqrt[p]{x})^q$ con el índice $\frac{p}{q}$ (cuestión que más tarde con Newton tomará más relevancia), y logra además cuadrar las parábolas con índice racional positivo y los sólidos de revolución que estas determinaban. Se cuestionó mucho la veracidad de sus métodos por las justificaciones tan intuitivas, pero Wallis siempre estuvo totalmente convencido que sus procedimientos eran correctos.

2.6 Desarrollo de la derivada, la integral y el T.F.C

Los ingleses Isaac Barrow e Isaac Newton junto con el alemán Gootfried Leibniz fueron los pioneros en el desarrollo del cálculo, identificando la relación importante que existe entre el problema de la tangente (derivada) y el problema de encontrar áreas (Integral).
En los siguientes tres apartados se mostraran se caracterizarán los aportes desarrollados de cada uno de ellos en lo que respecta al concepto de área.

2.6.1 Isaac Barrow

Parece que fue Isaac Barrow el primero en demostrar, de alguna manera, el carácter inverso de los problemas de tangentes (Derivación) y los problemas de cuadraturas(Integral), que aunque originalmente consistían en encontrar cuadrados cuya área fuese igual al de una figura dada, con el tiempo se generalizaron al cálculo de áreas. No obstante, su conservadora adhesión a los métodos geométricos le impidió hacer un uso efectivo de esta relación. En la lección X de su obra *Letiones opticae geometricae (1674)* Barrow muestra la versión geométrica del Teorema Fundamental del Cálculo.

Barrow realiza un paso increíble en el desarrollo del cálculo sin el percibirse, este paso dotado de un detenimiento geométrico heredado de Euclides y Arquímedes, no le permite ver la relación explicita de la integral y la derivada. La relación que encuentra en términos modernos es la siguiente:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

¿Cómo lo hace ?

Usando términos modernos, representa dos curvas $f(x)$ y $g(x)$, el segmento AD representa el eje de abscisas donde toma valores x. La curva $g(x)$ representa el valor del área bajo la gráfica de $f(x)$ comprendida entre el punto A y x, así por ejemplo la longitud del segmento PI representa el área de la región $APGZ$. Lo que prueba barrow es que si se traza una recta por el punto $(D, g(D))$ en donde la pendiente de la recta es $\frac{DF}{TD}$ es igual a $f(D) = DE$

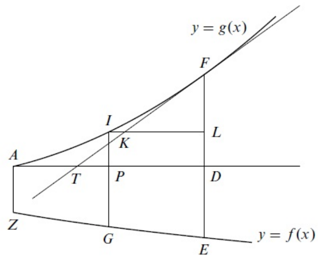


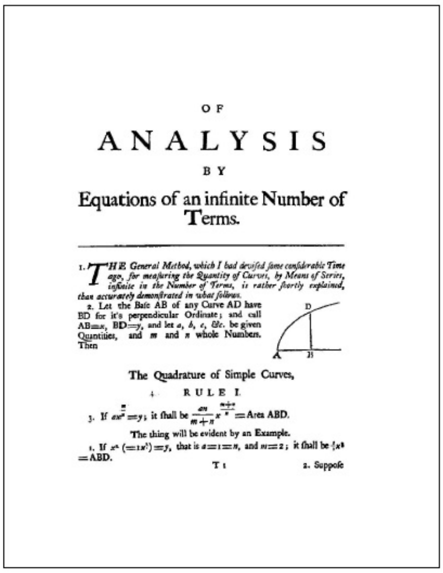
Figura 2.11: Cuadratura

2.6.2 Isaac Newton

Aportes de Newton al cálculo de cuadraturas

Newton hace circular una monografía llamada **De Analisy** en 1669 hecha por el, está la hace llegar a sus amigos. Mucho después en el año 1711 fue publicada en latín en donde contenía las ideas esenciales del cálculo de Newton. Empieza dando unas reglas para calcular cuadraturas, cuya primera regla dice así:

Regula 1 : Si $ax^{\frac{m}{n}} = y$ entonces el área de ABD es: $(\frac{an}{m+n})x^{\frac{m+n}{n}}$



OF

ANALYSIS

BY

Equations of an infinite Number of Terms.

1. *THE General Method, which I had devised some considerable Time ago, for measuring the Quantity of Curves, by Means of Series, infinite in the Number of Terms, is rather shortly explained, than accurately demonstrated in what follows.*

2. Let the Base AB of any Curve AD have BD for it's perpendicular Ordinate; and call AB$=x$, BD$=y$, and let a, b, c, &c. be given Quantities, and m and n whole Numbers. Then

The Quadrature of Simple Curves,

RULE I.

3. If $ax^{\frac{m}{n}}=y$; it shall be $\frac{an}{m+n}x^{\frac{m+n}{n}}=$ Area ABD.

The thing will be evident by an Example.

1. If $x^2\ (=1x^{\frac{2}{1}})=y$, that is $a=1=n$, and $m=2$; it shall be $\frac{1}{3}x^3$ $=$ABD.

T 1 2. Suppose

De Analysi, traducción inglesa (1745).

2.6.3 Gottfried Leibniz

Teorema Fundamental Del Cálculo para Leibniz
Considera la siguiente gráfica:

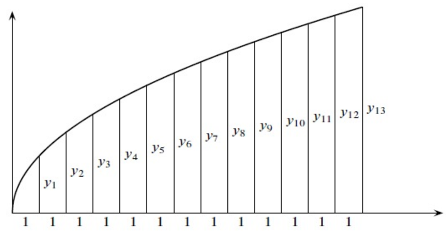


Figura 2.12: Cuadratura

La cual tiene una serie de ordenadas separadas por un segmento de longitud unidad. Si se considera la suma de las ordenadas esta será una aproximación de la cuadratura de la curva (del área bajo la curva), y la diferencia entre dos ordenadas sucesivas es aproximadamente igual a la pendiente de la recta tangente. Cuanto más pequeña se elija la unidad 1, tanto mejor estas dos aproximaciones. Lebniz razonó, diciendo que si las unidades son infinitamente pequeñas los valores de la pendiente y la cuadratura ya no serían aproximaciones si no los valores exactos. Es aquí en donde se da cuenta que el proceso de cuadratura está directamente relacionado con la tangente .

Aclaración

Si se sigue la idea de Leibniz , en términos modernos se puede aproximar la siguiente integral :

$$\int_0^4 xdx$$

entonces tomando la unidad de longitud igual 1, se tiene que :

$$\int_0^4 xdx \approx 1+2+3+4 = 10$$

sabiendo que el valor real es :

$$\int_0^4 xdx = 8$$

lo cual es una buena aproximación¡

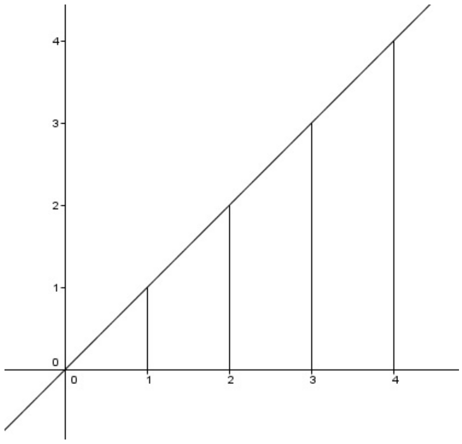


Figura 2.13: Cuadratura

Leibniz decía que entre más pequeña la unidad mejor la aproximación, miremos si es así: si se escoge la unidad igual a 0,5, entonces :

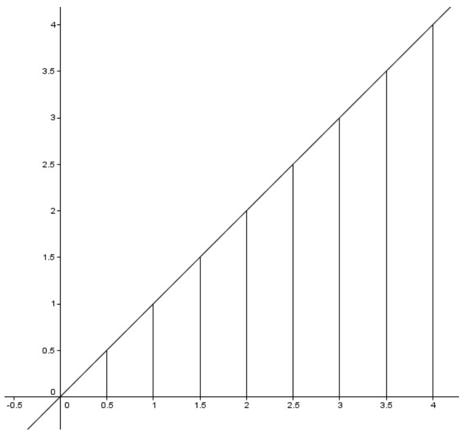


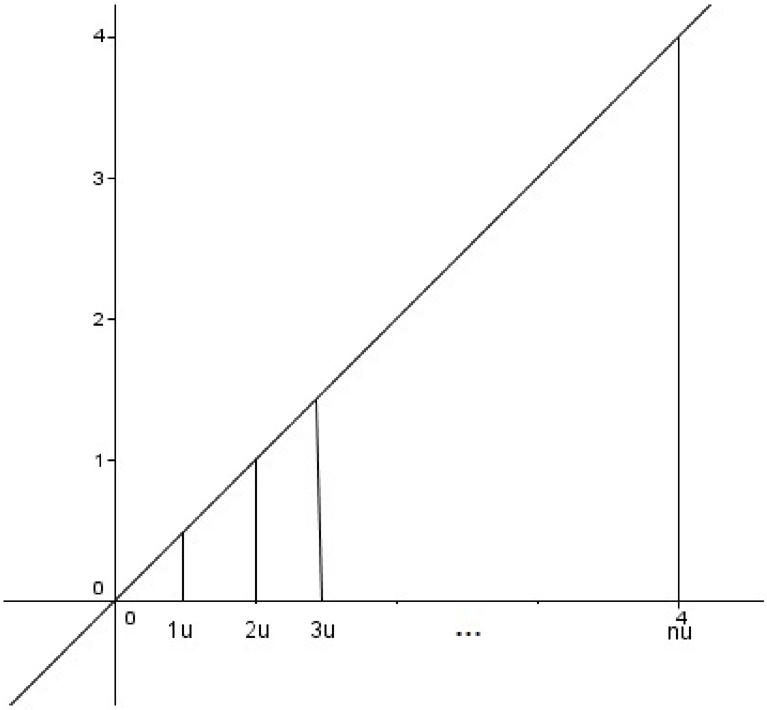
Figura 2.14: Cuadratura

$$\int_0^4 x dx \approx 0{,}5 + 1 + 1{,}5 + 2 + 2{,}5 + 3 + 3{,}5 + 4 = 18$$

Por tanto ya no sería una buena aproximación.

Lo que en verdad sucede

Se toma una unidad "pequeña", arbitraria, así:



Cuadratura

Que según lo que dijo Leibniz una buena aproximación sería :

$$\sum_{i=1}^{n} i = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Y como la anterior esta en unidades cuadradas y adicionalmente se tiene que , $u = \frac{4}{n}$, entonces :

$$\frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{4}{n}\right)^2 = \frac{8}{n} + 8$$

Con lo cual se concluye que la aproximación a la integral es :$\frac{8}{n} + 8$, si la unidad es cada vez más pequeña , significa que n tiene a infinito, entonces :

$$\int_0^4 x dx = \lim_{n\to\infty} \frac{8}{n} + 8 = 8$$

2.7 Noción de medida en el siglo XVII

Vamos a compilar en la siguiente tabla los aspectos relevantes que nos permiten caracterizar la noción de medida que se desarrollo durante el siglo XVII

NOCIÓN DE MEDIDA Y SUS CARACTERÍSTICAS EN EL SIGLO XVII	
Cavalieri	- Pretende fusionar los procesos de descubrimiento y de demostración de Arquímedes en uno solo. - Asume la doctrina euclidiana de las magnitudes y la extiende al hecho de trabajar con conjuntos de magnitudes, aunque trasgrede el principio de homogeneidad y opera con conjuntos de magnitudes heterogéneas. Esto es lo que consideramos como la **noción de medida para Cavalieri**, el esfuerzo por articular los dos procesos de descubrimiento y demostración de Arquímedes, y por trabajar con conjuntos de indivisibles para demostrar y trabajar sobre la cuadratura básica con índices enteros.
Fermat	- Es el precursor junto con Descartes de la geometría analítica, la cual marca una diferencia enorme en cuanto a los trabajos de los griegos, pues al poder relacionar en un marco general en el espacio las curvas expresadas en términos de dos variables, permite el trabajo articulado con el álgebra simbólica y así una mejor abstracción de las relaciones y de la asignación a la medida de áreas. Consideramos está es la **noción de medida para Fermat** - Desarrolla también los primeros elementos de la teoría de números, la cual brindará elementos a otros contemporáneos suyos en la elaboración de estrategias para halar cuadraturas.

Continúa en la página siguiente

Continuación de la página anterior

Wallis	▪ Su trabajo fue ampliamente aritmético, queriendo desligar los elementos geométricos y en particular prescindir del álgebra geométrica de los griegos. Su punto de partida fue el trabajo del italiano Cavalieri, donde sustituye sus indivisibles geométricos por indivisibles aritméticos, y estudia así la cuadratura básica pero con índices racionales e irracionales. ▪ Introduce al lenguaje matemático el símbolo del infinito (∞), que en sus trabajos lo empleara casi con las mismas propiedades que los números enteros. ▪ Sus trabajos se caracterizaron por emplear excesiva intuición y por su falta de rigor, lo que sin embargo sería un punto de partida para que los trabajos posteriores empezaran a buscar cuerpo y robustez teórica.

Continúa en la página siguiente

Continuación de la página anterior

Roberval	▪ El trabajo de este matemático francés conjuga las dos visiones que sobre la constitución del continuo vienen alimentando las propuestas sobre cuadraturas o de medida del área (indivisibles e infinitesimales). ▪ Emplea en un primer momento relaciones numéricas de la suma de los primeros números poligonales asociadas a las magnitudes geométricas, donde los resultados le ofrecen la posibilidad de justificar la cuadratura básica con índices enteros. ▪ Luego cuadra (o mide el área) de figuras como parábolas, en las que recurre a lo largo de su demostración a los resultados obtenidos con las relaciones aritméticas y así justificar el valor obtenido. Consideramos que este proceso es la **noción de medida para Roberval**
Isaac Barrow, Isaac Newton y Gottfried Leibniz	▪ Realizan el cálculo de cuadraturas. ▪ Dan con algunas ideas que relacionan el problema de tangentes con el problema de cuadraturas. ▪ Empiezan a descubrir lo que posteriormente se denominaría teorema fundamental del cálculo.

Tabla 2.1: Noción de medida en el Siglo XVII

2.7.1 A modo general en el siglo XVII

Es el siglo glorioso de las matemáticas, pues muchas áreas y disciplinas de ella nacen y se desarrollan durante este periodo. Entre ellas el análisis y nuestro objeto de trabajo las nociones de medida y su relación con la integral. Podemos ver que este desarrollo fue fuertemente influenciado por el trabajo de los griegos y en particular el de Arquímedes, del cual se perdió mucho de su trabajo (obras y tratados) y permaneció perdido hasta hace unos pocos años su Método mecánico de investigación y descubrimiento, cosa que intrigo a los matemáticos europeos que sin tener ningún elemento para verificar como Arquímedes había llegado a esos resultados, se preocuparon por desarrollar métodos y estrategias con cierta ausencia de rigor, que permitiera llegar a los mismos resultados de la cuadratura básica y ampliarlos a nuevos conjuntos numéricos que estaban siendo estudiados. El punto fuerte de este tiempo es entonces, la ambición por crear nuevos métodos aún con falta de rigor, que con ayuda de la geometría analítica de Fermat y Descartes y el álgebra simbólica de Viète, se verán fortalecidos en creatividad y justificación, viendo de manera importante la relación que empieza a entreverse con la aritmética y el álgebra, lo que permitió una mejor abstracción de la relación que por ese tiempo tenia en un marco de referencia el cual es R^2 la medida de las áreas y la reciente diferenciación o cálculo de tangentes. En el próximo cápitulo veremos como se consolida con argumentos más sólidos la medida de áreas a conjuntos más amplios y extensos que los conjuntos numéricos iban develando, llegando a abarcar las propuestas de Riemann y Lebesgue como propuestas de articulación entre la medida de áreas y el concepto moderno de integral.

Capítulo 3

Medida en la Edad Contemporánea

El concepto de área en esta época se ve beneficiado en parte por el desarrollo gestado en las bases del cálculo,en particular la noción y definición de **límite** y el **Teorema Fundamental Del Cálculo.**

Este recibió una fundamentación en el siglo XIX adecuada y formal de parte de Augustin Louis Cauchy.

Históricamente es Cauchy el primero en dar una definición analítica de la integral de una función , para lo cual considera una función continua f en un intervalo $[a, b]$, construye una partición P de [a,b]

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$$

Se definie la respectiva suma de Cauchy:

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})$$

Cuando las longitudes de $[x_{i-1}, x_i]$ tienden a cero, la suma la llamo integral definida de f sobre $[a, b]$ y lo denotó por

$$\int f(x)dx$$

Una vez que el problema de la definición analítica de la integral fué resuelto por Cauchy para las funciones continuas, las investigaciones se orientaron hacia la búsqueda de una definición analítica de la integral para funciones discontinuas. Cauchy, Lipschítz, y Dirichlet hicieron contribuciones en esta dirección mostrando que es posible definir la integral de una función cuando ésta tiene como conjunto de discontinuidades un conjunto contable; de manera más especifica, lograron extender la definición de integral a todas las funciones que son continuas excepto en un conjunto cuyo número de discontinuidades son infinitas pero no contables. Cabe mencionar que para Cauchy, Lipschitz y Dirichlet la integral de una función discontinua no es definida como el limite de Sumas de Cauchy como lo es para las funciones continuas. En el caso no continuo, la integral se define aislando primero las discontinuidades de la función y luego tomando un limite; por ejemplo, si una función acotada $f : [a, b] \to R$ es continua excepto en el punto $c \in (a, b)$, entonces su integral se define como el limite [1]

$$\lim_{e \to 0}[\int_a^{c-e} f(x)dx + \int_{c+e}^{b} f(x)dx]$$

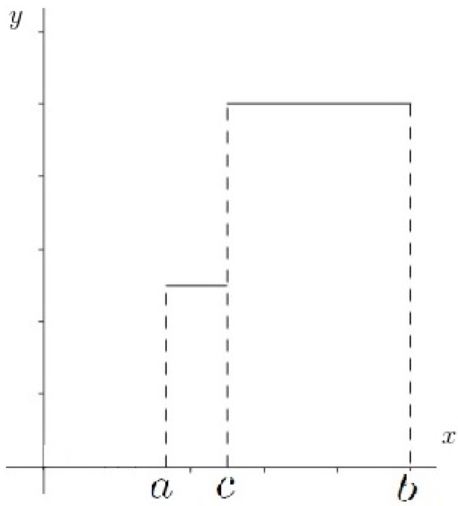


Figura 3.1: Función discontinua en c

NOTA
Todas las figuras en este apartado fueron elaboradas por los autores en LaTeXDraw y Paint, tomando como base las encontradas en los documentos referenciados.

[1]Tomado de: (Villegas, 1992, 4)

Un gran avance significativo es el que proporciona Bernhard Riemann en 1854, en donde la definición de integral para el caso particular de las función discontinuas se enfoca de manera distinta a como Cauchy, Lipschitz y Dirichet la hicieron.

Para Riemann la integral definida de una función acotada en el intervalo $[a, b]$, se hallaba de la siguiente manera, dado el intervalo $[a, b]$, P una partición de $[a, b]$ y x_t un punto arbitrario en $[x_{i-1}, x_i]$, para lo cual se define la integral como :

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_t)(x_i - x_{i-1})$$

Donde δ es el máximo de las longitudes δ_i de los subintervalos de la partición. Se puede observar que la definición que da Cauchy es un caso particular a la que da Riemman.

Una vez que Riemann establece que su definición se aplica a cualquier función acotada $f : [a, b] \to R$, se plantea entonces el problema de caracterizar aquellas funciones para las cuales el límite que define su integral existe. Logra dar dos criterios que caracterizan a estas funciones y con base en ellos, exhibe funciones cuyo conjunto de discontinuidades es infinito contable en un intervalo, pero integrables, ejemplos:

Ejemplo 1

En el intervalo $[0, 1]$

$$g(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x = \frac{1}{n} \quad \text{n}\in\text{N} \\ 1 & si \quad x \neq \frac{1}{n} \quad \text{n}\in\text{N} \end{cases}$$

Entonces:

$$\int_0^1 g(x)dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 1dx + \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} 1dx + ... + \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} 1dx + ... = 1$$

Ejemplo 2

La funcion de Riemann, Representemos a los números de la forma $\frac{p}{q}$ con $q \neq 0$; $(p, q) = 1$ y $p, q \in Z$

Defínase

$$g(x) = \begin{cases} 1/q & si \quad x = p/q \\ 1 & si \quad x = 0 \\ 0 & si \quad x \notin Q \end{cases}$$

Este enfoque que brindó Riemann resultó fructífero debido a que encontró nuevas funciones que eran integrables. Lo cual también dio pie a la investigación que realizó el francés Henry Lebesgue, la cual dio resultados más generales que los de Riemann *(su resultado es una generalización, a sabiendas que lebesgue no era un entusiasta de las generalizaciones, en algún momento llego a decir: "Reducida a teorías generales, las matemáticas serían un hermosa forma sin contenido").*

Se llegoó al teorema de Lebesgue, el cual establece que la integral de una función acotada $f : [a, b] \to R$, en el sentido de Riemann, existe si y solo si el conjunto de discontinuidades de la función tiene medida cero, esto es, dado cualquier número $e > 0$, se puede cubrir el conjunto de discontinuidades de f mediante una colección numerable de intervalos abiertos tales que la suma de sus longitudes sea menor que e. El teorema de Lebesgue cerraba un ciclo de investigación en cuanto a la teoría de integración se refiere. Sin embargo, debido a la existencia de funciones que no son $Riemann - integrables$, el problema de extender el concepto de integral a una clase más amplia de funciones quedaba abierto.

Por ejemplo, la función de Dirichlet [2], definida en $[0, 1]$:

$$g(x) = \begin{cases} 1 & x \in \ Q \\ 0 & x \in \ I \end{cases}$$

Para concluir Henri Lebesgue da un paso significativo en esta dirección, al lograr extender el concepto de integral a una clase más amplia de funciones. Su integral permite reemplazar el intervalo $[a, b]$ por conjuntos mas generales, es decir la función de dirichlet es integrable en el sentido lebesgue.

3.1 Método De Riemann

Georg Friedrich Bernhard Riemann, hijo de un pastor luterano, el segundo de seis hermanos (dos hermanos y cuatro hermanas), nació en la pequeña aldea de Breselenz, en Hanover, Alemania, el 17 de septiembre de 1826. Fue un matemático

[2]También conocida como la función lluvia

Figura 3.2: G.F. Riemann

muy prolifero debido a que realizó aportes en diferentes ramas de las matemáticas como:

- Calculo integral
- Geometría diferencial
- Análisis

También propuso una hipótesis en su ensayo para mejorar la obra de Legendre la cual se denominó, **Hipótesis De Riemann** [3], que actualmente es uno de los desafíos notables, si no el más notable, en la comunidad matemática mundial.

3.1.1 Sumas De Riemman

Con base en (Takeuchi, 1970, p.13), La teoría de integración de Riemann (1854) fue derivada de la de Cauchy debilitando al máximo las hipótesis necesarias para que

[3] Si s es una variable compleja se define la función zeta de Riemann como :

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

Hipotesis De Riemann:

los ceros no triviales de $\zeta(s)$ están en la recta $Re(s) = \frac{1}{2}$

una función sea integrable. Mientras Cauchy restringía la integralidad a funciones continuas, Riemann dio una condición necesaria y suficiente para ello: una función acotada $f(x)$ es integrable en $[a,b]$ si y solo si la suma de Cauchy converge.

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})$$

Para tal definición de integral de Riemann, propuso las denominadas Sumas de Riemann, para las cuales, primero se define una partición.

Sean $a, b \in R$; $a < b$. Una partición del intervalo $[a,b]$ es una colección finita de puntos de $[a,b]$ de los cuales uno es a y otro es b. Si P $= \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ es una partición de $[a,b]$, sabiendo que la numeración se escoge de la siguiente manera :

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b$$

Cuando se habla de una partición siempre se supondrá que esta ordenada en la forma anterior y la norma de la partición, $|P|$, se define por

$$|P| = max\{x_i - x_{i-1} : 1 \leq i \leq n\}$$

Una partición como la indicada divide el intervalo $[a,b]$ en n subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$, cada uno de longitud $x_i - x_{i-1}$.

Como segundo para, definir Las Sumas de Riemann se necesita una función $f(x)$, acotada y definida en $[a,b]$.

Como tercero para cada $i = 1, ..., n$, se definen los siguientes conjuntos:

$$M_i = sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}; m_i = inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

Como cuarto se definen las siguientes sumas:

•**La suma inferior** de f asociada a P se define como:

$$\underline{S}(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$$

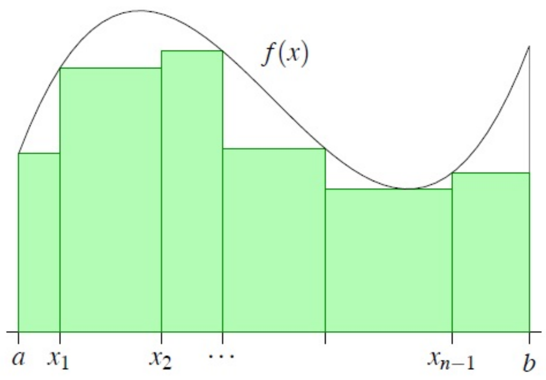


Figura 3.3: Suma inferior asociada a una partición

•**La suma superior** de f asociada a P se define como:

$$\overline{S}(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$$

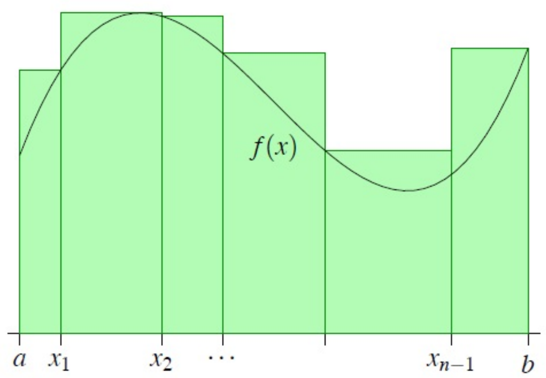


Figura 3.4: Suma superior asociada a una partición

Para tales sumas se puede brindar una visualización gráfica, se muestra para el caso de una función continua en $[a, b]$.

Acontinuación, se realiza la siguiente definición: Dada una función f acotada en $[a, b]$, se define su integral inferior en [a,b] como

$$\underline{\int_a^b} f = sup\left\{\underline{S}(f, P) : P \in D\right\}$$

y su integral superior en $[a, b]$ como:

$$\overline{\int_a^b} f = inf\left\{\overline{S}(f, P) : P \in D\right\}$$

En donde D es el conjunto de particiones sobre $[a, b]$.

Para finalizar se dice que la función f es integrable-Riemann (o en el sentido Riemann) si:

$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$$

En tal caso, al valor común de dichas integrales se le denomina Integral de Riemann) de f en $[a, b]$, y se escribe :

$$\int_a^b f(x)dx$$

Una definicion alternativa tomada de (Villegas, 1992, p.1) pero equivalente que dio Riemann es la siguiente:

Definición

Sea $[a, b] \subset R$, sea

$$f : [a, b] \mapsto R$$

una función acotada . Se dice que f es integrable Riemann en $[a, b]$ si existe $A \in R$ que satisface lo siguiente: Para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$

tal que si $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ es una partición de $[a, b]$, $\{c_0, c_1, ..., c_n\} \in [a; b]$ son tales que $c_i \in [t_{i-1}, t_i]$ y $|P| < \delta$ entonces:

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(t_i - t_{i-1}) - A \right| < \varepsilon$$

Al número A que aparece en esta denicion se le llama integral de Riemann de f sobre el intervalo $[a, b]$ se denota por:

$$\int_a^b f(x)dx$$

3.1.2 Generalización de Cauchy a Riemann

Como ya se ha visto anteriormente, para encontrar el área bajo la curva de una función se parte de la definición y el método que ofrece Cauchy, teniendo como requisito de integrabilidad una función f tal que sea continua en $[a, b]$, bajo la misma idea de sumas sucesivas de rectángulos, heredada de los griegos y apropiada por Cauchy, Riemman le dio uso a esta idea, pero con un requisito de integrabilidad diferente. Apartir de esto extiende la teoría de integración para funciones más complejas como lo son:

- Funciones con discontinuidades finitas en $[a.b]$
- Funciones cuyo conjunto de discontinuidades en $[a, b]$ es denso sobre $[a.b]$, con la condición de que este conjunto sea numerable (equipotente con el conjunto de los números Naturales)

Aunque lo que Riemann hizo nos pueda parecer ahora un paso casi trivial a partir de la integral de Cauchy, históricamente representó un gran salto, ya que involucraba un conjunto radicalmente diferente de funciones. De hecho, en su tiempo, la teoría de Riemann parecía la más general posible: su condición de integralidad era la más débil (con menos condiciones) usando la definición tradicional de Cauchy; de hecho, como ya se mencionó permitió extender el concepto de integral a funciones cuyos puntos de discontinuidad forman un conjunto denso y contable, funciones cuya existencia ni siquiera había sido sospechada por la mayoría de los matemáticos de la época, al conjunto de las funciones que son integrables-Riemann se simbolizó como $R([a, b])$.

3.2 Generalización de la integral de Riemann

Para describir la generalización de la integral de Riemann, primero se debe tener claro qué condiciones (criterio), debe tener una función para que sea Integrable Riemann, posteriormente con el reconocimiento se puede caracterizar los defectos que tiene tal integral.

3.2.1 Condiciones de Integrabilidad Riemann

Basados en (Takeuchi, 1972, p.38)Podemos caracterizar dos condiciones de integrabilidad Riemann, la primera es el siguiente teorema :

- **(Condición De Riemann)**:

  Una función $f : [a,b] \to R$ pertenece a $R([a,b])$ si y sólo si para todo $\epsilon > 0$ existe una partición P_ϵ tal que $P \supset P_\epsilon$ implica $\overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) < \epsilon$, la cual describe un criterio para saber si una función $f(x)$ es integrable Riemann, dando uso de las sumas inferior y superior.

La segunda se desarrolla con el concepto de medida exterior de un conjunto:

- Para determinar el tamaño de un conjunto s se utiliza la aproximación por exceso tomando el menor cubrimiento con particiones infinitas, para así obtener una mayor cantidad de conjuntos medibles

  Sea s un conjunto dado y sea :

  $$T = \{I_1, \quad I_2, \quad ... \quad I_k, \quad ....\}$$

  Una colección de intervalos abiertos que recubre s (o cuya union total contiene a s) , se define la longitud de recubrimiento, $L(t)$, como la suma total de las longitudes de los intervalos I_k, osea :

  $$L(T) = \sum_{k=1}^{\infty} L(I_k)$$

  En donde $L(I_k)$ es la longitud del intervalo I_k

  $L(t)$ depende de la colección T (Puede ser ∞) y sería una aproximación por exceso del conjunto s por un número enumerable de intervalos abiertos. El extremo inferior de $L(t)$ para todos los recubrimientos por intervalos abiertos se llama **la medida exterior de** s y se denota por $\bar{m}(s)$

$$\bar{m}(s) = inf L(T)$$

Se pueden deducir varias propiedades de la medida exterior de un conjunto, como :

- Para cualquier conjunto s existe una única medida exterior tal que

$$0 \leq \bar{m} \leq \infty$$

- Si $A \subset B$ entonces $\bar{m}(A) \leq \bar{m}(B)$
- $\bar{m}(A \cup B) \leq \bar{m}(A) + \bar{m}(B)$
- Para un intervalo I (cerrado , abierto o semiabierto) se tiene que $\bar{m}(I) = L(I)$

Pero el teorema que en verdad nos interesa es el siguiente:

Sea D el conjunto de todos los puntos de discontinuidad de una función $f(x)$, acotada en $[a, b]$. Entonces $f(x)$ es integrable Riemann si y solo si $\bar{m}(D) = 0$

Caracterizados los dos criterios, se evidencia que el segundo es importante debido a que nos proporciona una descripción detallada de la condición que debe tener el conjunto de discontinuidades de una función $f(x)$ para que sea integrable Riemann.

3.2.2 Defectos de la Integral de Riemann

Criterios como los mencionados en el apartado anterior nos permite reconocer algunas funciones como:

- La función lluvia.
- Funciones cuyas derivadas no son acotadas.
- La función, límite de una sucesión acotada de funciones integrables Riemann.

Para las cuales, se tiene que :

- La función lluvia no es integrable Riemann.

- Hay funciones cuyas derivadas no son acotadas y por tal no son integrables Riemann.
- Hay funciones $f(x)$ que son límite de una sucesión acotada de funciones integrables Riemann, para lo cual $f(x)$ no es integrable Riemann.

3.3 Ejemplos De Funciones No Integrables-Riemann

Para este apartado se brindará una serie de ejemplos de funciones las cuales tienen las siguientes características:

- Funciones no acotadas con antiderivada.
- Funciones con un conjunto de discontinuidades infinito pero no contable en un intervalo dado $[a, b]$.

Estos ejemplos de funciones que no son integrables-Riemann, se abordan a modo de ejemplo, debido a que historicamente como ya se había nombrado ayudan ha desarrollar y ampliar la teoría de integración, en el sentido que los matemáticos de la época muestran interés y necesidad por crear una nueva teoría en la cual estas funciones tengan medida (área), esto traduce en ampliar la teoría de integración para que estas funciones en un intervalo dado sean integrables.

3.3.1 Ejemplo 1 - Función de Dirichlet o Funcion Lluvia

Función $g(x)$ definida en $[0, 1]$:

$$g(x) = \begin{cases} 1 & x \in \ Q \\ 0 & x \in \ I \end{cases}$$

Para demostrar que tal función no es integrable-Riemann se da uso del teorema (Condición De Riemann).

Se tiene que $Sup\ g(x) = 1$ y $Inf\ g(x) = 0$, si P es una partición, se tiene que $\overline{S}(g, P) = 1(1-0)$, $\underline{S}(g, P) = 0(1-0) = 0$, por lo tanto $g(x)$ no es integrable Riemann

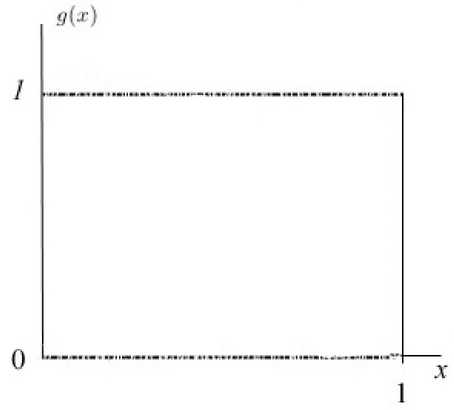


Figura 3.5: Función de Dirchlet en $[0, 1]$

Con lo cual se contradice la Condición De Riemann

Esta demostración también se pudo haber realizado de la siguiente manera:

Si consideramos al conjunto D como el conjunto de discontinuidades de la función, habría que demostrar que $\bar{m}(D) \neq 0$ con lo cual se concluiría que la función no es integrable Riemann

3.3.2 Ejemplo 2 - Funciones con primitiva pero no acotadas

En el desarrollo de la teoría de integración Lebesgue hace notar que: "No todas las funciones que son derivada de una función son Riemann integrables". Se encuentran funciones cuya derivada no es acotada, por tal motivo aquella derivada no es integrable-Riemann, por ejemplo:

Sea

$$f(x) = \begin{cases} x^2 cos(\frac{1}{x^2}) & si \quad 0 < x \leq 1 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$$

NOTA
Todas las gráficas de funciones en este apartado fueron elaboradas por los autores en Maple 16.

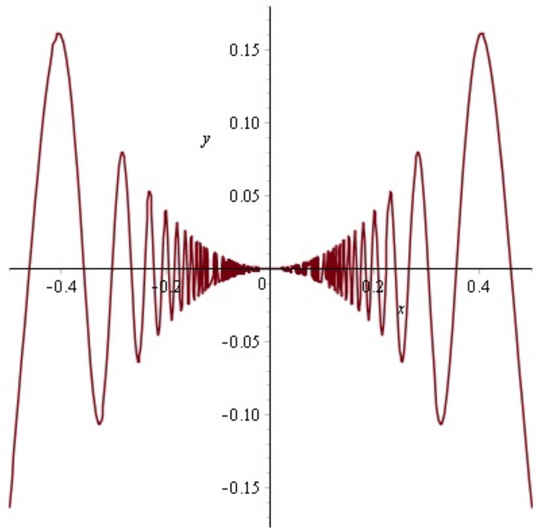


Figura 3.6: Gráfica de la función $f(x)$

Entonces para $x \in (0,1]$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xcos(\frac{1}{x^2}) + \frac{2}{x}sin(\frac{1}{x^2})$$

para el punto $x = 0$, utilizando la definición de derivada se tiene que :

$$\frac{\partial f(0)}{\partial x} = \lim_{x \mapsto 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \mapsto 0} \frac{x^2 cos\frac{1}{x^2}}{x} = \lim_{x \mapsto 0} xcos\frac{1}{x^2}$$

como $-1 \leq cos(x) \leq 1$, para toda $x \in R$ se tiene que $-|x| \leq xcos\frac{1}{x^2} \leq |x|$ y dado que $\lim_{x \mapsto 0} |x| = 0$ entonces $\frac{\partial f(0)}{\partial x} = 0$.Por tanto $f(x)$ es diferenciable para todo $x \in [0,1]$, pero como $\frac{\partial f}{\partial x}$ no ésta acotada en $[0,1]$ no es integrable-Riemann, de manera que $\frac{\partial f}{\partial x} \notin R([0,1])$

Para estas funciones las cuales tienen primitiva, pero que no son acotadas, se tiene otro ejemplo, la derivada de la siguiente función:

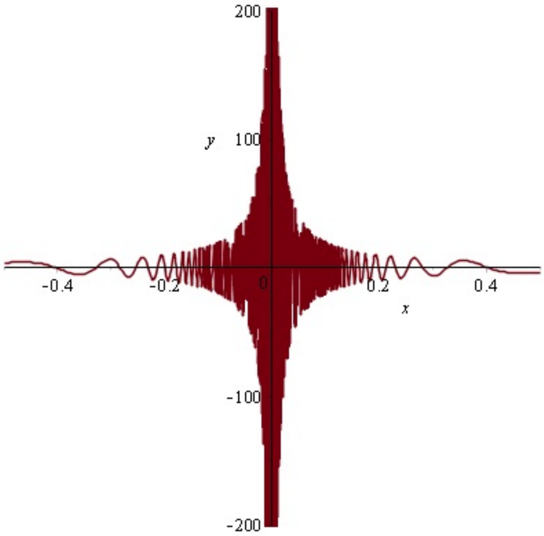


Figura 3.7: Gráfica de la derivada de la función $f(x)$

$$g(x) = \begin{cases} x^2 sen(\frac{1}{x^2}) & si \quad 0 < x \leq 1 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$$

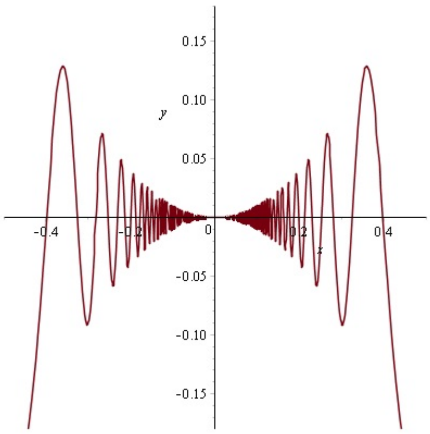


Figura 3.8: Gráfica de la función $g(x)$

para $x \in (0, 1]$ se tiene que

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 2xsen(\frac{1}{x^2}) - \frac{2}{x}cos(\frac{1}{x^2})$$

para el punto $x = 0$, utilizando la definición de derivada :

$$\frac{\partial g(0)}{\partial x} = \lim_{x \mapsto 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x \mapsto 0} \frac{x^2 sen\frac{1}{x^2}}{x} = \lim_{x \mapsto 0} x sen \frac{1}{x^2}$$

como $-1 \leq sen(x) \leq 1$, para toda $x \in R$ se tiene que $-|x| \leq x sen\frac{1}{x^2} \leq |x|$ y dado que $\lim_{x \mapsto 0} |x| = 0$ entonces $\frac{\partial g(0)}{\partial x} = 0$.

Por tanto $g(x)$ es diferenciable para todo $x \in [0, 1]$, pero como $\frac{\partial g}{\partial x}$ no está acotada en $[0, 1]$ no es integrable-Riemann, de manera que $\frac{\partial g}{\partial x} \notin R([0, 1])$

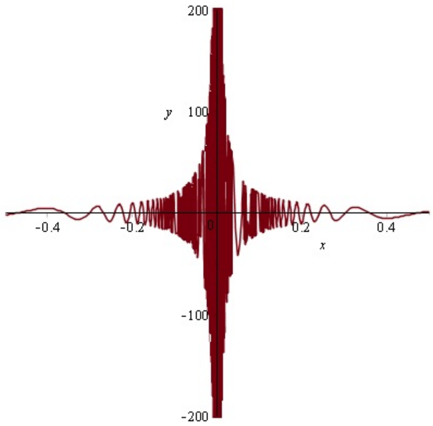


Figura 3.9: Gráfica de la derivada de la función $g(x)$

3.4 Concepción de la medida (área) para Riemann

Para vislumbrar la concepción que tuvo Riemann de medida (área), hay que tener en cuenta los desarrollos anteriores al propuesto por él en la teoría de integración, desarrollos como el de la geometría analítica y el concepto de función, ayudaron a tener una panorámica mas general de subconjuntos del plano, a los cuales se les quería encontrar su medida (área). La herencia que dejaron los griegos en las ideas del método para encontrar el área de un subconjunto en R^2 expuesto por Riemann, tiene las siguientes ideas en su construcción:

- Se da como postulado que el área de un rectángulo es ab, en donde las longitudes de lados son a y b respectivamente.

- A partir del rectángulo y en general polígonos, se construyen figuras elementales las cuales son uniones finitas de estos.
- En el caso de una figura plana arbitraria acotada F, definimos el área interior de F como el supremo de las áreas de todas las figuras elementales contenidas en F y el área exterior de F como el ínfimo de las áreas de todas las figuras elementales que contienen a F. Si los dos números así obtenidos coinciden, decimos que F es medible y que tiene un área igual al valor común de dichos números[4].
  Anteriormente se había expuesto el método que utiliza Riemann para encontrar el área bajo una curva, que aunque utilizó las tres ideas mencionadas en este apartado lo hizo desde otra panorámica.

3.4.1 Mirando con otros lentes la medida

Riemann a diferencia de los griegos utilizó la geometría analítica; centrándose especialmente en el producto cartesiano RXR Porqué a este conjunto pertenecen las regiones a las cuales les asigna área. Estas regiones son de la siguiente forma

$$H = \{(x, y) : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

Se observa que la región depende exclusivamente del intervalo $[a, b]$ y de la función $f(x)$.

En síntesis, Riemman en realidad lo que hace es seguir con la idea básica y clásica de área, la cual consiste en tomar el conjunto $P(R^2)$ (Potencia o partes de R^2), tomar una región H (de la forma ya antes mencionada) arbitraria tal que $H \subset R^2$ y H acotada, y asignarle una medida (Área, Número) bajo el método de sumas de Riemann.

Bajo esta concepción la cual se sintetiza en la Figura 3.10[5] , se evidencia que el área se relaciona con una función cuyas imágenes son números reales positivos o cero, este hecho se concibe si y sólo si la función cumple con las condiciones de integralidad de Riemann ya mencionadas. En concordancia con lo que los griegos asumían como área, es lo mismo que Riemann desarrolla, con la diferencia que el conjunto de regiones de R^2 a las cuales les puede asignar área es mucho más rico que el de los griegos y del propio Cauchy.

[4]Tomado de:(Fava, zo, 1996, p.74)

[5]El diagrama evidencia lo siguiente: si se escoge un elemento H que pertenezca a $P(R^2)$, de la forma mencionada , entonces por ultimo a H se le asigna un área (número), Hallándola a partir de sumas de Riemann.

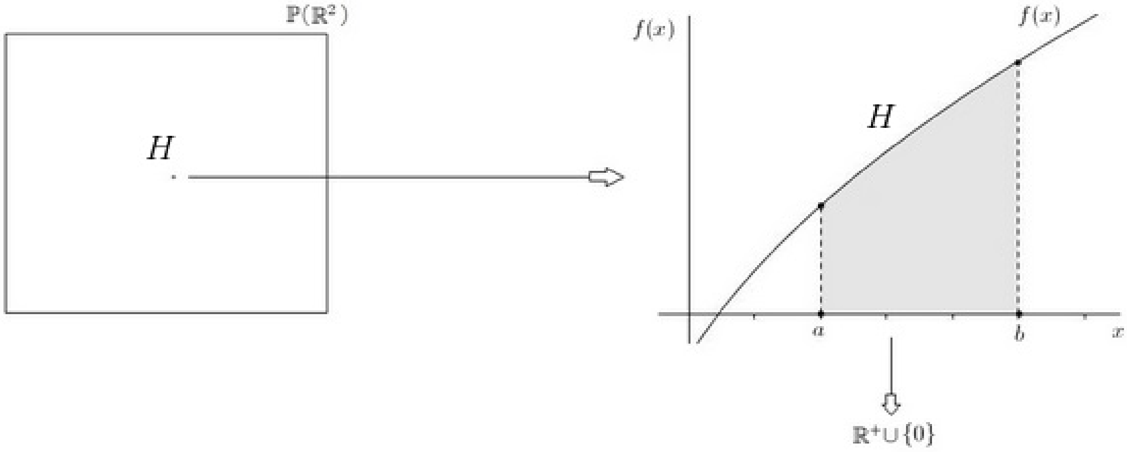


Figura 3.10: Esquema de área para Riemann

3.4.2 Un caso particular

Tras un desarrollo metódico de cómo encontrar el área bajo una curva dada, hecho por Riemann, el descubrimiento del teorema fundamental del cálculo parte 2 y el desarrollo de la integral doble Riemann, se evidencian dos formas de encontrar áreas de subconjuntos con ciertas características en R^2.

Pudiendo encontrar el área por la definición de integral de Riemann lo cual implicaría desarrollar una serie ya sea difícil o fácil según corresponda la función o como segundo se prodría dar uso del teorema fundamental del cálculo, lo cual se reduce a encontrar la antiderivada correspondiente a la función dada y posteriormente evaluarla.

Miremos un caso al cual no se le da uso a ninguno de los métodos antes mencionados por dos razones uno por lo complicado y otro por la imposibilidad.

El teorema fundamental del cálculo permite encontrar áreas de manera sencilla, lo que puede llegar a complicarse es encontrar la antiderivada o primitiva de la función, por ejemplo esto sucede en el caso de la función $f(x) = e^{-x^2}$, si se quisiera encontrar el valor de :

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx$$

Se puede utilizar el teorema fundamental del cálculo debido a que la función es continua, pero en este caso la primitiva no es elemental[6], y encontrar el valor de la integral se complica.

[6]

Esta integral se resuelve haciendo uso del cálculo en varias variables de la siguiente manera :
Igualamos la integral a un número A , así :

$$A = \int_0^\infty e^{-x^2} dx$$

Si multiplicamos por la misma integral en diferente variable a ambos lados se tiene que :

$$A^2 = \int_0^\infty e^{-x^2} dx \int_0^\infty e^{-y^2} dy$$

Utilizando propiedades de la integral doble se concluye :

$$A^2 = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} dxdy$$

Entonces la región de integración de la integral doble queda determinada por el primer cuadrante

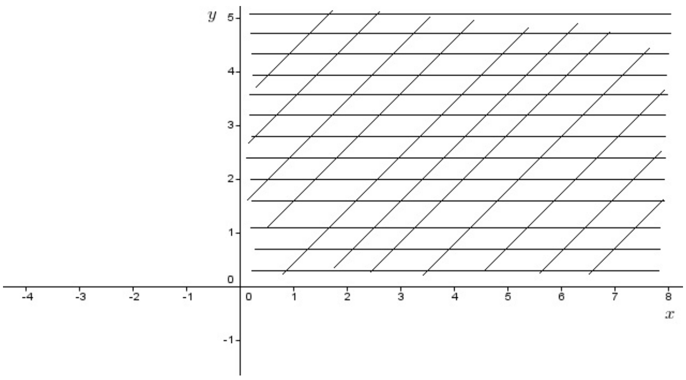


Figura 3.11: Región de integración

- La antiderivada no elemental es :$F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$
- En este trabajo no abordamos la definición formal de función elemental, pero de manera informal una función elemental es una función que no está expresada en términos de polinomios, raíces, senos, cosenos, exponenciales, logaritmos, etc.

Para poder realizar esta integral en coordenadas cartesianas dando uso del teorema fundamental del cálculo no es posible, pero se puede realizar haciendo un cambio de variable. El cambio que se debe realizar es de coordenadas cartesianas a polares, por lo cual:

$$x = rcos\theta \text{ y } y = rsen\theta$$

La región de integración es $D = \{(x, y) : 0 \leq x < \infty \wedge 0 \leq y < \infty\}$ en coordenadas cartesianas y haciendo el cambio a coordenadas polares se tiene que $D = \left\{(r, \theta) : 0 \leq r < \infty \wedge 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}\right\}$ con lo cual se puede utilizar el teorema del cambio de variable para integrales dobles, entonces dando uso de tal teorema:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty e^{-(r^2)} rdrd\theta$$

Ahora resolviendo

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty e^{-(r^2)} rdrd\theta$$

Se tiene que:

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty e^{-(r^2)} rdrd\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\lim_{b\to\infty} \int_0^b r\, e^{-r^2} dr\right] d\theta = -\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \lim_{b\to\infty} (e^{-b^2} - 1) d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{\pi}{4}$,por tanto:

$$A^2 = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty e^{-(r^2)} rdrd\theta = \frac{\pi}{4}$$

entonces :

$$A = \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Se concluye que el área de la función $f(x) = e^{-x^2}$ en el intervalo $[0, \infty)$ es de $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Para este caso se puede encontrar el área de una manera exacta haciendo uso del caculo en varias variables, no con todas las funciones que no tengan antiderivada se puede realizar tal procedimiento, en este caso particular se facilita debido a que el jacobiano de la transformación es la derivada interna de la función y que el primer cuadrante ya sea en forma polar o en forma cartesiana sus descripción se comporta de forma similar.

Podemos observar un ejemplo para el caso de un intervalo acotado, si se quisiera encontrar el valor de la siguiente integral:

$$\int_0^a e^{-x^2}dx$$

Procedamos como el ejercicio anterior

$$A = \int_0^a e^{-x^2}dx$$

Si multiplicamos por la misma integral en diferente variable a ambos lados se tiene que :

$$A^2 = \int_0^a e^{-x^2}dx \int_0^a e^{-y^2}dy$$

Utilizando propiedades de la integral doble se tiene que :

$$A^2 = \int_0^a \int_0^a e^{-(x^2+y^2)}dxdy$$

Entonces la región de integración es $[0, a]$ X $[0, a]$

Se debe partir en dos por que el radio varia de diferente manera en cada una de ellas, la integral queda de la siguiente manera:

$$\int_0^a \int_0^a e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{x}{cos\theta}} e^{-(r^2)}rdrd\theta + = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{y}{sen\theta}} e^{-(r^2)}rdrd\theta$$

Pero las dos integrales del lado derecho de la igualdad tiene dificultades al tratar de resolverlas, debido que al hacer la primera integral iterada nos queda una integral cuya función tiene antiderivada no elemental, es por esto que no se puede utilizar el mismo método.

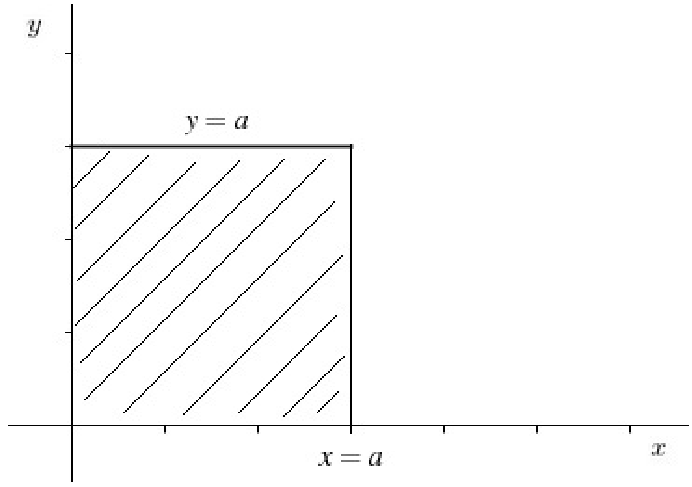


Figura 3.12: Región de integración

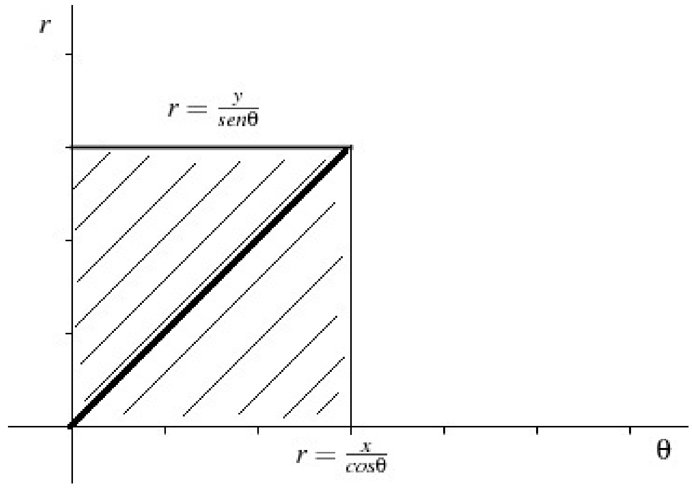


Figura 3.13: Región de integración

3.4.3 La integral y la probabilidad

La teoría de la probabilidad ha sido relacionada históricamente con los juegos de azar, es desde estos juegos en donde las discusiones se presentan, queriendo responder a la siguiente pregunta: ¿tengo más chance de ganar o de perder en el juego de azar?.
Para tales discusiones aparecen primeramente matemáticos de la talla de Gerolamo Cardano (1501-1576) y el francés Blaise Pascal (1623-1662), los cuales se apropian de la pregunta del párrafo anterior, para la cual brindan su respectiva respuesta, desde este contexto de los juegos de azar es en donde se desarrolla la probabilidad. Entre los siglos XVII y XVIII se hicieron grandes avances en la teoría de la proba-

bilidad, dentro de los cuales se encuentra la Ley de los grandes números debida a James Bernoulli (1654-1705); esta ley es un teorema básico de la teoría moderna de probabilidad el cual establece que si se realiza un experimento aleatorio en el que hay solo dos posibilidades o lo que es equivalente su espacio muestral está compuesto por dos elementos : éxito y fracaso, entonces la proporción de éxitos obtenidos tiende a estabilizarse en un numero el cual se encuentra entre 0 y 1. Otro de los adelantos de esta época fue el teorema de DeMoivre-Laplace, el cual establece que cuando n es lo suficientemente grande , una variable aleatoria binomial con parámetros n y p tienen aproximadamente la misma distribución que una variable aleatoria normal con media np y varianza $np(1-p)$.

Nacimiento de la curva normal

En el siglo XIX el famoso matemático Carl Friedrich Gauss (1777-1855) a quien se conoce como el *"príncipe de las matemáticas"*, fue un niño prodigio quien poseía una capacidad increíble para las matemáticas, a la temprana edad de los 18 años, se propuso calcular la órbita de un asteroide llamado Ceres. La técnica utilizada por Gauss consistió en demostrar como las variaciones en los datos de origen experimental podían representarse mediante una curva acampanada (hoy conocida como la curva normal o campana de Gauss) para lo cual empleo el llamado método de los minimos cuadrados el cual fue desarrollado por el.

Aplicación a la física de la curva normal

A principios del siglos XX, uno de los problemas más importantes era el llamado movimiento browniano nombrado así en honor al botánico inglés Robert Brown (1777-1858) quien observó que las partículas de polen suspendidas en un líquido se mueven de manera incesante he irregular [7], a partir de los trabajos de Brown el físico alemán Albert Einstein (1879-1955)publica en su artículo (Acerca de la teoría cinética molecular del movimiento, inducido por el calor, de partículas suspendidas en un líquido) los aspectos que describen el movimiento browniano, para lo cual prueba que el movimiento de la partícula en el instante t se puede modelar por medio de la distribución normal[8].

Concepción de área en la probabilidad

Anteriormente se mostró un resumen del desarrollo histórico de la probabilidad y en particular de la función de densidad o probabilidad denominada curva normal, la cual uno de sus usos hoy en día es aproximar probabilidades sobre una variable aleatoria X, recordemos que se dice que una variable aleatoria X tiene como distribución normal de parámetros μ y σ, donde μ es un número real y σ es un número real positivo, si su función de densidad está dada por :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]; x \in R$$

[7] Para el lector ó lectora que desee informarce más acerca del movieminto browniano puede ver via internet un video en el siguiente enlace:*http://vimeo.com/11395261*

[8] Tomado de: (Blanco, 2012, p.1)

Ahora observemos un ejemplo del uso de la distribución normal
Ejemplo:
Las estaturas de los estudiantes de una Universidad siguen una distribución Normal con media 170 cm y desviación típica 5 cm. Calcular La probabilidad de que un estudiante mida menos de 162 cm. Para la resolución de tal ejercicio se tipifica la variable aleatoria X que en este caso es la estatura de los estudiantes de la Universidad, por lo cual:

$$P(X \leq 162) = P(\frac{X - 170}{5} \leq \frac{162 - 170}{5}) = P(Z \leq -1{,}6)$$

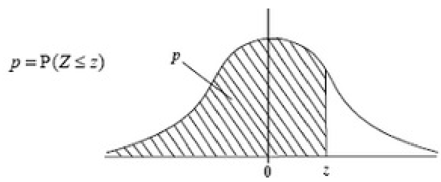


Figura 3.14: Distribución normal

Para encontrar $P(Z \leq -1{,}6)$ se hace uso de la tabla de valores de la normal[9] , siendo la siguiente :

Entonces podemos decir que por simetría de la curva normal se tiene que $P(Z \leq -1{,}6) = 1 - P(Z \leq 1{,}6) = 1 - 0{,}8452 = 0{,}0548$

Y finalmente concluir que la probabilidad que un estudiante mida menos de $162cm$ es de 5,82 %

El ejemplo de la normal se muestra con el fin de identificar el procedimiento que se hace en su uso. El fin es encontrar la probabilidad requerida usando la tabla, sabiendo que la tabla muestra áreas aproximadas de la curva normal en intervalos de la forma $(-\infty, a)$.
En este caso el valor aproximado que nos da la tabla es el de la siguiente integral :

$$\int_{-\infty}^{162} \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{162 - 170}{5}\right)^2\right] dx$$

0,582 es el número aproximado de tal integral, en este sentido se observa que el área bajo la curva se hace corresponder con la probabilidad de un evento planteado,

[9]Tabla realizada en excel. Esta muestra en la columna el valor del número entero y el primer decimal del valor z y la fila el segundo decimal del valor z ,Por ejemplo si se quiere encontrar el área de la curva normal en el intervalo $(-\infty, 2{,}56)$ por la tabla el área se aproxima a 0,9948.

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5	0,504	0,508	0,512	0,516	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5754
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,591	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,648	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,67	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,695	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,719	0,7224
0,6	0,7258	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7518	0,7549
0,7	0,758	0,7612	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,791	0,7939	0,7967	0,7996	0,8023	0,8051	0,8079	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,834	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,877	0,879	0,881	0,883
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,898	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,937	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,943	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9485	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,97	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,975	0,9756	0,9762	0,9767
2	0,9773	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,983	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,985	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9865	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,989
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,992	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,994	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,996	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,997	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,998	0,998	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9983	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,999	0,999
3,1	0,999	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999

Figura 3.15: Tabla de valores de la distribución normal

por lo cual se puede deducir que cuando se encuentran probabilidades de eventos definidos por una variable aleatoria X que tiene comportamiento normal , lo que se hace primeramente es encontrar un área, que en el aspecto probabilístico se presenta esta como un “sinónimo” de probabilidad.

En este caso de las distribuciones de probabilidad, nos limitamos a mostrar una de las más conocidas como lo es la normal, pero hay otras distribuciones como: la uniforme, la gamma ,la de weibull ,etc. Las cuales describen otros comportamientos pero que a la hora de encontrar probabilidades de eventos, nos remitimos a encontrar aproximaciones de áreas en sus respectivas tablas, así se puede decir que en las distribuciones de densidad, el área y la probabilidad son sinónimos.

3.5 Método de Lebesgue

La integral de Riemann siempre toma una partición finita P del intervalo $[a, b]$ que es una subdivisión en un número finito de intervalos. Luego la suma que se establece es:

$$S(f, P) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k) \cdot (x_k - x_{k-1}) \text{ donde } t_k \in [x_{k-1}, x_k]$$

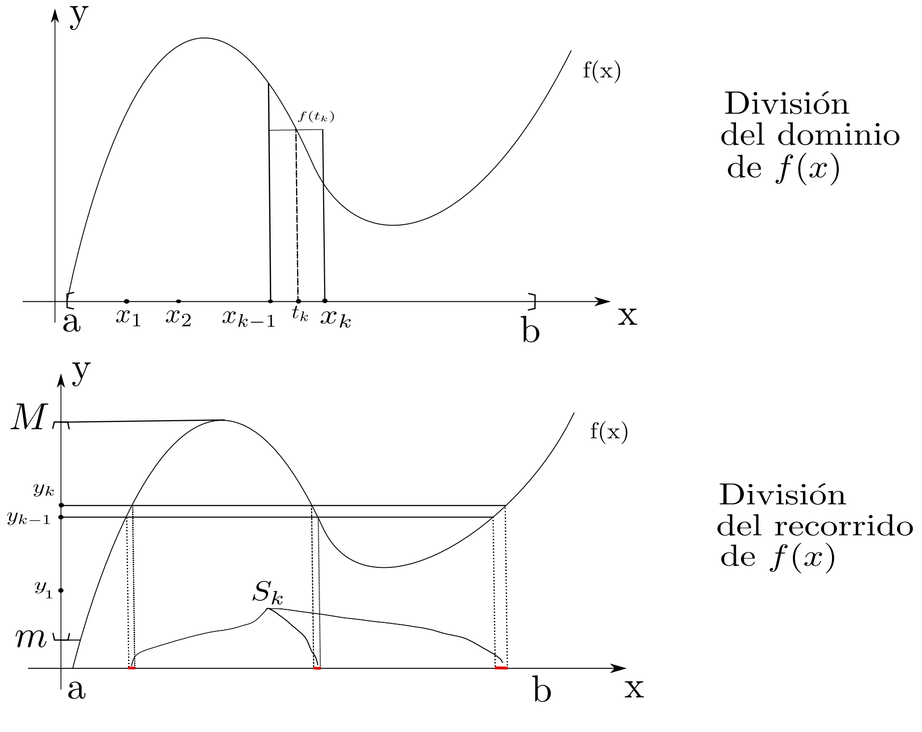


Figura 3.16: División de dominio y recorrido de $f(x)$

La base de la anterior suma es la división del dominio de $f(x)$, sin embargo podemos realizar otras divisiones, en particular, la del recorrido de $f(x)$ en un intervalo [m,M] donde:

$$m = \inf_{[a,b]} f(x), y \quad m = \sup_{[a,b]} f(x)$$

Sea:

$$y_0 = m, y_1, y_2, \ldots, y_{k-1}, y_k, \ldots, y_N = M \quad \text{una partición de } [m, M]$$

Y sea:

$$S_k = \{x | y_{x-1} \leq f(x) < y_k\}$$

entonces podemos elaborar una suma parecida a la mostrada al inicio del apartado así:

$$S_L(f) = \sum_{k=1}^{N} t_k \cdot m(S_k) \qquad , t_k \in [y_{k-1}, y_k]$$

Si se toma el límite de la suma cuando la partición es infinita, podemos ver que define una integral. Además $m(S_k)$ es una medida (en general, cualquier medida) del conjunto S. Ya que es la cantidad que determina el tamaño del conjunto, debe nacer de una generalización del concepto *longitud de intervalo* y así trascender a una generalización de la integral de Riemann.

Vamos entonces a repasar algunos conceptos esenciales de la teoría de la medida que nos permitirán realizar esta generalización, puesto que S_k ya no es un intervalo, debemos encontrar herramientas que nos permitan argumentar esta integral.

3.5.1 Conjunto Medible

Para la generalización de la longitud del intervalo, consideraremos para la medida conjuntos del espacio euclidiano de dimensión uno y las siguientes propiedades:

- La medida de un intervalo abierto o cerrado es su longitud
- La medida es aditiva, es decir, si a_1 y a_2 son disyuntos entonces $m(a_1) + m(a_2) = m(a_1 \cup a_2)$
  Para garantizar la linealidad de la integral[10] se exige una condición fuerte llamada *aditividad perfecta o completa* que enuncia:

$$\text{Si} \quad a_1, a_2, a_3, \ldots \quad \text{son disyuntos, entonces}$$
$$m \bigcup_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} m(a_k)$$

- La traslación paralela $y = x + a : x \to y$ no afecta a la medida, es decir, si $S_1 = \{x | x \pm a \in S\}$ entonces $m(S) = m(S_1)$

---

[10] $\int f_1 + f_2 = \int f_1 + \int f_2$

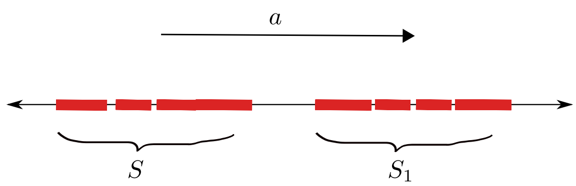


Figura 3.17: Medida invariable a la traslación

3.5.2 Conjunto Medible Acotado

Tomemos un intervalo $I_0 = [a, b]$ y consideremos un conjunto S contenido en I_0. Sea $S' = I_0 - S$ (Complemento de S). Luego si la medida $\overline{m}$ es aditiva se tiene que:

$$\overline{m}\,(S) + \overline{m}\,(S') = \overline{m}\,(I_0) = b - a$$

Esta ultima relación no siempre es verdadera, y se pueden construir conjuntos que no cumplan tal condición, así que solo consideraremos conjuntos que cumplan tal requisito y los llamaremos **Conjuntos medibles** L o **Conjuntos** L. Con base en lo anterior definimos la medida interior ($\underline{\mathrm{m}}$) así:

$$\underline{\mathrm{m}}\,(S) = \overline{m}\,(I_o) - \overline{m}\,(S')$$

Por tanto la relacion que nombrabamos al inicio es equivalente a $\underline{\mathrm{m}}\,(S) = \overline{m}\,(S)$. En este caso como las medidas son iguales (la interior y la exterior) se nota $m\,(S)$ y se denomina *medida de* S.

3.5.3 Conjunto no Acotado

Para un conjunto $S \subset I_0$ no acotado, se define *conjunto medible*, si $m\,(S)$ es independiente del intervalo (I_o) que se tome. Pensemos un conjunto (I) en particular que sea un intervalo, por tanto se tiene:

$$m\,(I) = \overline{m}\,(I \cap S) + \overline{m}\,(I \cap S')$$

Pero generalizando para cualquier conjunto V se tiene que:

$$\overline{m}\,(V) = \overline{m}\,(V \cap S) + \overline{m}\,(V \cap S') \tag{3.1}$$

Por tanto decimos que un conjunto V es medible si cumple la relacion (3.1), donde S' es el complemento de S con respecto a V.

3.5.4 Propiedades de los conjuntos L

Vamos a enunciar ahora las propiedades demostrables que tienen los conjuntos L:

- El espacio total es un conjunto L
- El complemento de un conjunto L es un conjunto L
- Si S_1 y S_2 son conjuntos L entonces $S_1 \cup S_2$ y $S_1 \cap S_2$ son conjuntos L
- La medida L es completamente aditiva, es decir, si se tienen $s_1, s_2, \ldots$ disyuntos y además medibles L entonces:

$$S = \bigcup_{i=1}^{\infty} s_1 \quad \text{es medible } L \text{ y}$$
$$m(S) = \sum_{i=1}^{\infty} m(s_i)$$

  pero de manera más general, para cualquier conjunto V:

$$\overline{m}(V \cap S) = \sum_{i=1}^{\infty} \overline{m}(V \cap s_i)$$

- La unión cualquiera de conjuntos L es un conjunto L
- Un conjunto abierto ó cerrado es un conjunto L
- Para cualquier conjunto V se tiene que:

$$\overline{m}(V) = \inf_{A \supset V} m(A) \quad A \text{ es un conjunto abierto que contiene a } V$$
$$\underline{m} = (V) = \sup_{F \subset V} m(F) \quad F \text{ es un conjunto cerrado que está contenido en } V$$

- Las siguientes 3 propiedades son condiciones necesarias y suficientes para que un conjunto sea medible L:

  1. Dado ϵ existe un conjunto A abierto y un conjunto F tal que:

$$A \supset S \supset F, \quad m(A - F) < \epsilon$$

  2. Dado ϵ existe un conunto cerrado F tal que:

$$S \supset F, \quad \overline{m}(S - F) < \epsilon$$

  3. Dado ϵ existe un conjunto abierto A tal que:

$$A \supset S, \quad \overline{m}(A - S) < \epsilon$$

3.5.5 Funciones medibles-L

Tomaremos las funciones de valor real $f(x)$ tal que el conjunto:

$$\alpha = \{x | f(x) > a\}$$

Si este conjunto es medible-L entonces la función $f(x)$ se llama **función medible-L** o **función-L**. A parte del conjunto α podemos tomar también los conjuntos:

$$\beta = \{x | f(x) \geq a\}$$
$$\gamma = \{x | f(x) < a\}$$
$$\delta = \{x | f(x) \leq a\}$$

Estos tambien son funciones-L, pues β es complemento de γ y α de δ.

Además, si $f(x)$ es una función-L, entonces podemos decir que el conjunto:

$$\{x | f(x) = a\} = \{x | f(x) \geq a\} - \{x | f(x) > a\} \quad \text{es un conjunto-}L.$$

Nombraremos a continuación algunos teoremas que surgen a partir de la definicion de las funciones-L.

- Si $f(x)$ y $g(x)$ son medibles-L, entonces el conjunto:

  $$\{x | f(x) > g(x)\} \quad \text{es un conjunto medible-}L$$

- Todas las funciones medibles forman un anillo con los coeficientes reales: si f y g son medibles-L entonces las siguientes funciones son medibles-L

  $$a \cdot f(x) \qquad f(x) + g(x) \qquad f(x) \cdot g(x)$$

3.5.6 Integral de Lebesgue

En este apartado vamos a exponer la integral de Lebesgue bajo la anterior fundamentación.

En un conjunto E medible-L definimos la integral de una función-L, $f(x)$ así:

- Si $f(x) \geq 0$ Sea entonces $P = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ una partición general de E, luego:

  $$E = \bigcup_{k=1}^{n} e_k \quad \text{donde } e_1, e_2, \ldots, e_n \text{ son conjuntos disyuntos y medibles-}L$$

Definimos entonces la suma inferior:

$$L\left(f,P\right)=\sum_{k=1}^{n}m_k\cdot m\left(e_k\right)\quad \text{donde } m_k=\inf_{x\in e_k}f\left(x\right)$$

El extremo superior de $L\left(f,P\right)$ para todas las particiones generales se llama **la integral de Lebesgue de** $f(x)$ y la notamos de la siguiente manera:

$$\int_E f\left(x\right)dx=\sup_P L\left(f,P\right)$$

$L\left(f,P\right)$ puede ser ∞ por tanto la integral $\int_E f\left(x\right)dx$ también puede ser ∞. El dominio de la integral, que es el conjunto E, puede ser no acotado, por tanto $m(e_k)$ puede ser también ∞, luego por conveniencia se utiliza la siguiente notación:

$$\begin{aligned}0\cdot\infty&=0\\ a\cdot\infty&=\infty\\ \infty\cdot\infty&=\infty\end{aligned}$$

Dentro de las debilidades de la integral de Riemann observamos que existen funciones que no se acogen a su condicion de integrabilidad, entre ellas la función de Dirichlet o Lluvia, así que observaremos como se integra bajo esta concepción.

- Sea $f(x)=0$ si x es irracional, y $f(x)=1$ si x es racional, entonces: Sea R el conjunto de todos los números racionales, así que:

$$\begin{aligned}m_k&=\inf_{x\in e_k}f\left(x\right)=0\quad sie_k\not\subset R\\ m_k&=\inf_{x\in e_k}f\left(x\right)=1\quad sie_k\subset R\end{aligned}$$

para el segundo caso tenemos que $m(e_k)\leq m(R)=0$, así que:

$$L\left(f,P\right)=\sum_{k=1}^{n}m_k\cdot m\left(e_k\right)=0$$

ya que m_k ó $m(e_k)$ es cero, por lo tanto se tiene que:

$$\int_{(-\infty,\infty)}f\left(x\right)dx=0$$

3.6 Comparación entre Riemann y Lebesgue

Vemos que el proceso que viene al interior de los métodos para encontrar el área de un subconjunto en R^2 ya sea el de Riemann o el de Lebesgue , a estos subyace algunas propiedades que caracterizan tales procesos, de las caules solo nos interesa una; independiente del método para encontrar el área, se tiene que si una colección $\Im$ es medible según el método usado cumple con la siguiente propiedad:

- Para cada elemento S de $\Im$ se tiene que $a(S) \geq 0$ [11]

La cual traduce en una asignación (función) para cada elemento de una colección $\Im$ medible (según sea el método) al conjunto de los números reales positivos junto con el cero. Es una concepción explícita en los procesos que proponen Riemann y Lebesgue, por lo cual se concluye que estas dos concepciones son similares a diferencia que las colecciones de subconjuntos de R^2 a las cuales se les pueden encontrar área según sea el método, son diferentes en el sentido en que cada colección tiene elementos con diferentes caracteristicas, entre las cuales está el conjunto de discontinuidades.

3.7 Gráfico de contenencia (Conclusión)

El diagrama de Venn lo que representa es una serie de contenencias que reflejan históricamente los nuevos subconjuntos de R^2 a los cuales se les puede asignar área, teniendo en cuenta que la concepción de área permanece igual; la construcción de este diagrama no se hace pensando en asignar a cada punto del cuadrado una función o subconjunto de R^2 que pertenezca a cualquiera de los conjuntos que se encuentran en el diagrama, debido a que se sabe que un cuadrado con sus puntos interiores tiene como cardinal $\aleph_1$ y el conjunto de las funciones un cardinal de $\aleph_2$, más bien se considera como un diagrama el cual representa únicamente la contenencia y no tiene en cuenta la cardinalidad.

Para la construcción del diagrama de Venn se tuvo en cuenta el desarrollo de medida (área) en los siguientes apartados históricos:

- Concepción de medida para los Griegos
- Concepción de medida para Cauchy

[11] $a(S)$ se usa como la notación del área de S

- Concepción de medida para Riemann
- Concepción de medida para intervalos e imagenes no acotadas
- Concepción de medida para Lebesgue

Como se ha visto la concepción de medida en los cuatro apartados anteriores llevan implícitamente un proceso de medir, en el cual para los cuatro es análogo, lo que cambia en cada uno de ellos es los subconjuntos a los cuales se les puede encontrar área (medida), así si hacemos corresponder a cada una de las concepciones un conjunto, como sigue :

- Concepción de medida para los Griegos$\longrightarrow$ Conjunto **G**
- Concepción de medida para Cauchy $\longrightarrow$ Conjunto **C**
- Concepción de medida para Riemann $\longrightarrow$ Conjunto **R**
- Concepción de medida para intervalos e imagenes no acotadas$\longrightarrow$ Conjunto **GR**
- Concepción de medida para lebesgue $\longrightarrow$ Conjunto **L**

A partir de tal correspondencia y en concordancia con el desarrollo histórico que se ha expuesto se tiene que:

- El conjunto **G** está compuesto por: segmentos de parábola, circulo, polígonos regulares, polígonos irregulares y figuras compuestas por algunas de las anteriores.
- El conjunto **C** está compuesto por los del conjunto **G** y adicionalmente por subconjuntos de R^2 de la forma $H = \{(x, y) : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$ en donde $f(x)$ es una función continua y acotada.
- El conjunto **R** está compuesto por los del conjunto **C** y adiciónamele por subconjuntos de R^2 de la forma $H = \{(x, y) : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$ de tal manera que el conjunto de discontinuidades D de la función $f(x)$ tiene medida exterior igual a 0.
- El conjunto **GR**[12] está compuesto por los del conjunto **R** y adiciónamele por subconjuntos de R^2 de la forma $H = \{(x, y) : a \leq x \leq \infty, 0 \leq y \leq f(x)\}$ de tal manera que la función $f(x)$ es acotada y tambien los subconjuntos de la forma $P = \{(x, y) : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq \infty\}$

[12]Es conjunto es el de regiones para las cuales la integral impropia existe

- El conjunto **L** está compuesto por los del conjunto **R** y adicionalmente por subconjuntos de R^2 de la forma $H = \{(x, y) : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$ de tal manera que el conjunto D de discontinuidades de la función $f(x)$ puede terner medida exterior diferente a cero y $f(x)$ puede ser no acotada.
  En conclusión el diagrama se acopla al desarrollo histórico del área (medida), mostrando así como a través de la historia y en particular los cuatro momentos mencionados, se amplía el conjunto al cual se le puede hallar área .

Aclaración

Se dice **amplía**, no en el sentido que el conjunto que contenga a otro es de mayor cardinal, si no que aparecen nuevos elementos con diferentes condiciones y características que el anterior no tiene.

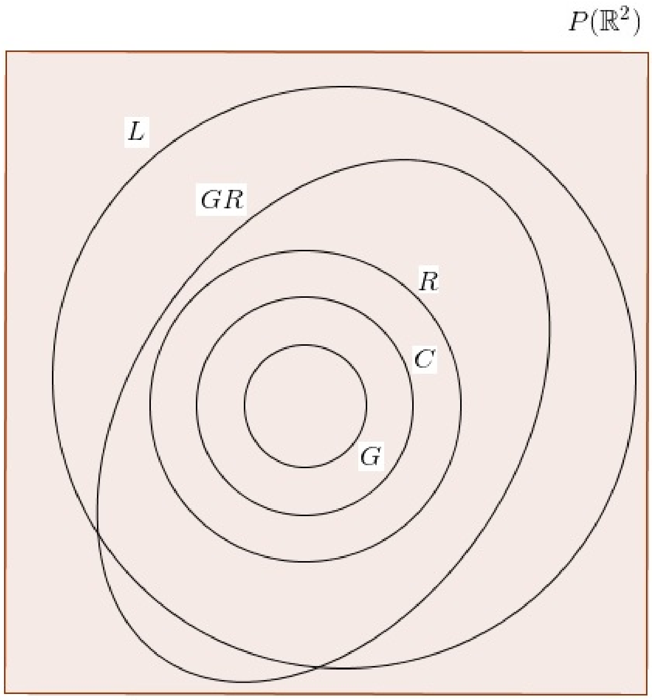


Diagrama de Venn[13]

[13]Observe que por ejemplo $\frac{sen(x)}{x}$ en $[0, \infty)$ es integrable Riemann immpropia pero no es Lebesgue-integrable , por lo cual GR no es subconjunto de L

Conclusiones

- Se puede considerar a los problemas de acumulación y cálculo de áreas como la primera fuente de inspiración de diversas estrategias que se construyeron a lo largo de la historia, y que además se caracterizaron por el contexto en el cual se hallaban inmersas. Es así que podemos ver cómo influyó la filosofía fuertemente todos estos planteamientos, y la forma en cómo moldeo la aparición de resultados a medida que aparecian nuevas propuestas y se iba consolidando ese enorme edificio que hoy conocemos como análisis.

- A pesar de ser una época tan provechosa para el desarrollo de estrategias y múltiples métodos para el cálculo de áreas, en el siglo XVII no se pudo desentrañar la relación que había entre la diferenciación y la acumulación. Sin embargo, constituyó el punto de partida para los consolidadores de todo ese andamiaje, Newton y Leibniz.

- La concepción de medida a lo largo de la historia se mantiene en una idea básica, la cual es asignar un numero positivo ó cero a un región de R^2; como se ha visto durante todo el documento. Lo que cambia es la colección $\Im$ de subconjuntos de R^2 que son medibles según la construcción de área que se tenga.

- El desarrollo del área se ve potenciado debido a que históricamente se plantean subconjuntos de R^2 que no tiene medida con la presente teoría en su tiempo, es el caso de funciones cuyo conjunto de discontinuidades D cumple que $\bar{m}(D) \neq 0$ las cuales no son integrables Riemann pero si pueden ser integrables según Lebesgue.

- Aún falta mucho por decir, pues no hemos ahondado en las propuestas más actuales que buscan tener la rigurosidad de poder integrar cualquier función con la sencillez de lenguaje y definición como lo hace Riemann, por ejemplo la integral de Henstock-Kurzweil.

Bibliografía

- Arenzana, Victor. (1998). Las curvas mecánicas en la geometría griega. La cuadratriz de Dinostrato. En Revista Suma. Número 28. págs 31-36. España.
- Takeuchi, Yu. (1970). Integral De Lebesgue, Universidad Nacional De Colombia. Bogotá.
- Blanco, Liliana. (2012). Probabilidad, Universidad Nacional De Colombia. Bogotá.
- Barrios, José. (1995). La geometría de los indivisibles: Buenaventura Cavalieri. En Actas II del seminario Orotava de Historia de la Ciencia: De Arquímedes a Leibniz tras los pasos del infinito matemático, teológico, físico y cosmológico. Canarias. España
- Quezada, Roberto. (sd). Una introducción a la medida e integral de Lebesgue. Universidad Autónoma Metropolitana – UAM –. Departamento de Matemáticas. México. Iztapalapa.
- Fava, Norberto y Zó, Felipe. (1996). Medida e Integral de Lebesgue. Instituto Argentino de Matemática. Editorial Red Olímpica. Buenos Aires. Argentina.
- Fernández, Santiago. (sf). Los tres problemas clásicos. COP de Sestao. págs 81-92.
- Zamorano, Pablo. (2006). La integral de Lebesgue en su contexto histórico.
- Manuel, Luis. (2011). Teoría de la Medida e Integral de Lebesgue. Universidad Nacional del Rosario. Argentina.
- Recalde, Luis. (2007). Raíces históricas de la Integral de Lebesgue. Revista Educación e Historia. Vol. 15. N°2. Págs. 103-127. Universidad del Valle. Colombia.

- Bárcenas, Diomedes. (2006). La integral de Lebesgue un poco más de cien años después. Boletín de Asociación Matemática Venezolana. Vol. 13. N° 1. Venezuela.

- Cheng, Steve. (2008). A Crash Course on the Lebesgue Integral and Measure Theory. Aramburu Ortega, Joaquín M. (2001). Análisis IV. Capitulo: Integral de Riemann. Campuzano Ponce, Juan Carlos. (2010). Cálculo diferencial e integral de funciones de una variable.

- Leal Pacheco, Sahid David. (2009). Definiendo la integral de Riemann sin utilizar sumas de Riemann.

- Kline, Morris. (2009). Matemáticas para estudiantes de humanidades. Fondo de Cultura Económica. México D.F.

- Gonzalez Urbaneja, Pedro M. (2008). Arquímedes y los orígenes del cálculo integral. Nivola libros y ediciones. España.

- Gonzalez Urbaneja, Pedro M. (2008). El teorema llamado de Pitágoras. Una historia de 4000 años. En Revista Sigma. Número 32. págs 103-130. España.

- Gonzalez Urbaneja, Pedro M. (1995). Las técnicas del cálculo: Fermat, Wallis y Roberval. En Actas II del seminario Orotava de Historia de la Ciencia: De Arquímedes a Leibniz tras los pasos del infinito matemático, teológico, físico y cosmológico. Canarias. España.

- Barceló, Bartolome. (2002). El descubrimiento del cálculo.

- Suaréz, Miguel Martín. (2008). Orígenes del cálculo diferencial e integral.

- Fernández Fernández, Laura. (2010). La historia como herramienta didáctica: el concepto de integral.

- Rodríguez Villegas, Humberto. (1992). La integral de Banach y el problema de la integral.