Efectos dinámicos de los sistemas no inerciales: una explicación desde la perspectiva de la idea gauge

Cesar Geovanni Suarez Bermúdez

Línea de profundización: la enseñanza de la física y la relación física-matemática.
Grupo campos y partículas

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
Bogotá D.C 2016

Efectos dinámicos de los sistemas no inerciales: una explicación desde la perspectiva de la idea gauge

Cesar Geovanni Suarez Bermúdez
Trabajo de grado para optar el título de:

LICENCIADO EN FÍSICA

Director:
Mauricio Rozo Clavijo

Línea de profundización: la enseñanza de la física y la relación física-matemática.
Grupo campos y partículas

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
Bogotá D.C 2016

Agradecimientos

A mi Familia, por apoyarme durante estos años.

Al profesor Mauricio Rozo por su colaboración en la realización del trabajo

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de Grado
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Titulo del documento	Efectos dinámicos de los sistemas no inerciales: una explicación desde la perspectiva de la idea gauge
Autor(es)	SUAREZ BERMÚDEZ, Cesar Geovanni
Director	ROZO CLAVIJO, Mauricio
Publicación	Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional. 2016. 44 P
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional
Palabras Claves	EFECTOS DINÁMICOS, INVARIANCIA, SIMETRÍA, GAUGE, TRANSFORMACIÓN, RE CALIBRACIÓN, TEORÍA GAUGE.

2. Descripción

En el transcurso de la historia, el hombre ha construido explicaciones a hechos y cosas de la naturaleza que le resultan relevantes. Sin embargo, al realizar una explicación de algunos fenómenos se hace uso de ideas que no son totalmente evidentes para los estudiantes y en muchas ocasiones los experimentos realizados para evidenciar las afirmaciones hechas no permiten hacer una comprensión y un aprendizaje de ellas con sentido y significado. Tal es el caso de la idea gauge, la cual es usualmente considerada como una forma de dar explicación a algunos fenómenos de la naturaleza haciendo uso de la idea de calibración de variables dinámicas que dan cuenta del sistema que se considera como objeto de estudio, bajo esta perpectiva se presenta otra manera de abordar la idea gauge, hacienda uso de sistemas Newtonianos, con el propósito es acercar más rápidamente a los estudiantes a los conceptos contemporáneos de la física con sentido y significado.

3. Fuentes

Asorey, M,(2002) Einstein y las Teorías de Campos Unificados, Departamento de Física Teórica Facultad de Ciencias Universidad de Zaragoza, Recuperado febrero de 2016 de http://upcommons.upc.edu/bitstream/handle/2099.2/279/279_Article.pdf

AYALA, M. Mercedes, 2006" Los Análisis Histórico – Críticos y el re contextualización de saberes científicos, publicado en proposicoes Vol7n°1(49), Unicamp, Brasil.

BUITRAGO Jesús,(2003) La Teoría de la Relatividad y las Teorías "Gauge, Curso Universitario Interdisciplinar "Sociedad, Ciencia, Tecnología y Matemáticas, recuperado en septiembre de 2015 en https://imarrero.webs.ull.es/sctm03.v2/modulo2/JBuitrago.pdf

GUIDRY, Mike W. (1991) "Gauge field theories an introduction with applications" ,New

York.

HOOFT, G.T (1980) “Teorías Gauge de las fuerzas entre partículas elementales”, libro de investigaciones y ciencia (Scientific American)

HERMANN Weyl (1950) Space – Time - Matter, Dover publications Berlín.

HERMANN Weyl (1918) Gravitation and electricity, Sitzungsber. Preuss, akad, Berlín.
HERMANN Weyl (1993) Simetrías, Versión en español, S.A. MCGRAW-HILL

LOPEZ, Rupérez Francisco (1994) Mas allá de las partículas y ondas: una propuesta de inspiración científica, Centro de publicaciones del ministerio de educación y ciencia, Madrid

M. Maldacena, Juan (2014) The symmetry and simplicity of the laws of physics and the Higgs boson, Institute for Advanced Study, Princeton, NJ 08540, USA, recuperado en enero de 2016 en https://arxiv.org/pdf/1410.6753v2.pdf

MIRAMONTES, Octavio y VOLKE,(2013) Karen, Fronteras de la física en el siglo XXI,Copit- arXives ISBN: 978-1-938128-03-5 ebook, pag 47- 55

QUIGG Chris (1997). Gauge Theories of the Strong, Weak, and Electromagnetic Interactions. Advanced Book Classics. Westview Press. ISBN 0-201-32832-1.

TEJEIRO Juan M,(2004) Sobre la teoría especial de la relatividad, universidad nacional de Colombia, recuperado enero de 2015 en https://gnfisica.files.wordpress.com/2010/08/sobre_la_teoria_relatividadtejeiro.pdf , pág. 143 – 168

4. Contenidos

El trabajo se encuentra estructurado en tres capítulos

Capítulo I: Efectos Dinámicos de los sistemas no inerciales desde la perspectiva newtoniana.

En este se presenta el análisis de los efectos dinámicos de los sistemas no inerciales desde la perspectiva newtoniana, es decir, se caracteriza de manera puntual la dinámica de un sistema acelerado, y se pone en consideración los efectos que un observador experimenta bajo este tipo de sistemas.

Capitulo II: Sobre la idea gauge.

En el segundo capítulo, se presenta en primer lugar una contextualización acerca del principio gauge o idea gauge, y en cual se presentan algunos elementos por los cuales la idea presenta gran interés para las teorías modernas de la física.

Por otro lado, se desarrollan unas aproximaciones al uso de la idea gauge en sistemas clásicos, dado que se presentan algunos ejemplos clásicos.

Capitulo III: Efectos Dinámicos desde la perspectiva Gauge

Para Finalizar se presenta la caracterización del estado mecánico de un sistema en rotación haciendo uso de la idea gauge, es decir que partir de recalibrar variables dinámicas se puede describir y caracterizar la dinámica del sistema en cuestión, además se muestra cómo partir de esta línea de razonamiento se llega a obtener los mismos efectos dinámicos

5. Metodología

Para la elaboración del escrito se realizó una contextualización en torno a inspeccionar algunos originales de Hermann Weyl, en los cuales se abordan el principio de invariancia gauge, con el objetivo de analizar el contexto en el que surge la idea gauge, el sentido y el significado que este presenta.

Por otro lado se configuro un sistema en rotación para la obtención de los efectos dinámicos desde la perspectiva de invariancia gauge, para posterior mente comprarlos con los efectos dinámicos que tradicionalmente se obtienen bajo un análisis newtoniano.

6. Conclusiones

- A lo largo de la historia la idea gauge ha sido es considerada como uno de los mayores descubrimientos del siglo XX, en la medida que ha posibilitado la construcción de las denominadas teorías gauge, modelos que intentan explicar las interacciones fundamentales, esto es posible en la medida que se considere la idea gauge, como forma de dar explicación a algunos fenómenos de la naturaleza haciendo uso de la idea de calibración de variables dinámicas, y por las cuales se puede describir el estado mecánico del sistema,

- Al analizar la dinámica de un sistema en rotación, usando procedimientos usuales a los de una teoría gauge, se obtienen los mismos efectos dinámicos estudiados desde la mecánica clásica, permitiendo a los estudiantes generar elementos para la compresión de las teorías gauge, igualmente este análisis pude ser considerado como una nueva forma de abordar los efectos dinámicos de los sistemas no inerciales en el aula, en la medida que describe de manera precisa y coherente la dinámica de un sistema en rotación

- La forma de proceder para obtener los efectos dinámicos de los sistemas no inerciales bajo procedimientos análogos a los de una teoría gauge, es la misma forma como se procede en las teorías modernas de la física, donde se hace necesario remplazar la derivada ordinaria por una derivada de orden superior, o derivada covariante, esto se debe a que la derivada ordinaria no posibilita que el sistema sea invariante bajo trasformaciones gauge local, mientras que la derivada covariante restaura la invariancia agregando un factor adicional, permitiendo que las propiedades físicas de las ecuaciones sean invariantes bajo las trasformaciones gauge, adicionalmente se plantea el uso del plano complejo en la medida que dichas trasformaciones gauge se realicen en términos de la fase del sistema.

Elaborado por:	Suarez Bermúdez; Cesar Geovanni
Revisado por:	Rozo Clavijo, Mauricio

Fecha de elaboración del Resumen:	25	08	2016

Contenido

Introducción

A lo largo de la historia, el hombre ha estado en una constante búsqueda de dar respuesta al comportamiento de la naturaleza, sin embargo, dichas explicaciones que el hombre ha buscado se hace uso de ideas o conceptos que no son totalmente evidentes y mucho menos dicientes por parte de estudiantes que abordan de manera a priori dicho modelo teórico, en la manera que los experimentos realizados para evidenciar las afirmaciones realizadas no permiten hacer una comprensión y un aprendizaje de ellas con sentido y significado. Tal es el caso de la idea gauge, la cual es usualmente considerada como una forma de dar explicación a algunos fenómenos de la naturaleza haciendo uso de la idea de calibración de variables dinámicas que dan cuenta del sistema que se considera como objeto de estudio.

En este sentido, se hace necesario abordar la idea gauge en torno a los originales de Herman Weyl (1885 – 1950), con el fin de indagar cómo el autor introduce el concepto y la relevancia que le asigna, ya que usualmente en la literatura se la muestra con una formalización que no tiene sentido y significado para los lectores. Por otro lado, considerando que la actividad de explicar la experiencia es propia de los procesos de formalización de los fenómenos, configurar la idea gauge de manera que exprese la organización de la experiencia sensible plantea una serie de dificultades a nivel pedagógico, ya que la teorización alrededor de los fenómenos es cada vez más abstracta. Desde esta perspectiva, se realizó un análisis alrededor de la idea gauge que permita hacer una implementación de la idea en contextos diferentes de la física, desarrollando una línea de razonamiento distinta.

Es así como en capítulo I, se realiza una exploración de los efectos dinámicos desde la perspectiva newtoniana, en la medida de estructurar un base conceptual más cercana a la experiencia sensible por parte del lector, dado que se muestra el análisis de la dinámica de un sistema acelerado, y se presenta las descripciones que normalmente hace un estudiante al trabajar con sistemas de referencia no inerciales, , Bajo esta perspectiva se encamina al lector de un campo conceptual conocido a interpretaciones más estructuradas haciendo uso de la idea gauge, además, se presenta un análisis sobre cada uno de los efectos obtenidos al analizar un sistema acelerado, como lo es la fuerza de inercia, coriolis, centrifuga, centrípeta y una fuerza transversal.

En el capítulo II, se aborda las ideas propuestas por de Herman Weyl, en búsqueda de una interpretación a lo que el llamo “Eich” “Gauge” (HOOFT,1980), y el cual es considerado como una forma de dar explicación a los fenómenos de la naturaleza haciendo uso de la idea de calibración de variables dinámicas, esto a su vez relacionando la invariancia de una magnitud física del sistema. En este sentido, se rescata el surgimiento de la idea en una época donde no fue tenida en cuenta por la comunidad científica, dado que Weyl propone dicha idea como un mecanismo en una teoría que unifica los campos gravitacionales y los campos electromagnéticos.

Adicionalmente se presenta una contextualización acerca del principio de invariancia gauge, resaltando el sentido que ha tenido el concepto de simetría e invariancia en la construcción de los modelos teóricos en física, por último, se presenta la implementación de este principio en diferentes sistemas clásicos, esto en búsqueda de escenarios más favorables para su entendimiento.

Finalmente, en el capítulo III, se muestra como a partir de la idea gauge, y haciendo re calibraciones de algunas variables dinámicas de manera local y global, se pueden obtener los mismos efectos esbozados en capítulo I, esto con relación a un sistema en rotación.

Es así que presenta la línea de razonamiento análogo a la de una teoría gauge y por la cual se pude describir el estado dinámico del sistema en consideración. Para concluir este capítulo, se presenta un cuadro comparativo entre la línea de razonamiento newtoniana y línea de razonamiento que es usada en la construcción de una teoría gauge, con el fin de mostrar que el estado mecánico del sistema no cambia si dicho sistema es abordado desde la mecánica newtoniana, o si, por el contrario se describe con procedimientos similares a los de una teoría gauge, permitiendo presentar elementos conceptuales por los cuales la idea gauge cobre un significado por parte del lector.

Contexto Problemático

La explicación contemporánea de los fenómenos a nivel atómico está apoyada en teorías denominadas “teorías gauge”. Qué significa tan rimbombante nombre constituye el principal objetivo del presente análisis. En este sentido, surge la necesidad de explorar la motivación de los pensadores y el contexto en el que aflora la idea gauge para la explicación de los fenómenos, indagando, además a qué responde y destacando las falencias en cuanto a su enseñanza en la medida que se le presta excesivo énfasis a la formulación matemática, lo que provoca que el sentido y la significación de la idea se confundan con la habilidad de interpretar las expresiones matemáticas. (Ayala M, 2006), esto se ve reflejado ya que en la mayoría de textos universitarios especializados introducen conceptos como invariancia gauge local e invariancia gauge global como punto de partida de la teoría (Guidry M, 1991), (Quigg C, 1997), (Griffiths D, 1987) no quedando claro que problemas, situaciones y finalidades llevaron a los científicos a proponer la idea gauge.

Bajo este contexto, se buscarán nuevas formas de estructurar y explicar los fenómenos que permitan la implementación de la idea gauge en sistemas mecánicos, electromagnéticos, *etc.* con el fin de generar puentes entre el conocimiento adquirido por los estudiantes y los tópicos contemporáneos de la física. El propósito es acercar más rápidamente a los estudiantes a los conceptos contemporáneos de la física con sentido y significado, siendo el objetivo principal el de contribuir en la formación de una comunidad académica de docentes, y con ello a la profesionalización de los maestros. Además, el trabajo permitirá caracterizar el papel que juega la geometría en la formalización de los fenómenos, lo cual tiene un especial interés a nivel pedagógico.

Pregunta Problema

Con la problemática planteada anteriormente surge la siguiente pregunta:

¿Cuál es el sentido y significado de la idea gauge, y bajo ésta cómo se obtienen los efectos dinámicos de los sistemas no inerciales?

Objetivo General

Realizar una exploración sobre la idea gauge que permita dar elementos para su implementación en los sistemas de rotación y obtener los efectos dinámicos.

Objetivos Específicos

- Explorar ¿por qué es necesario? y ¿a qué responde? la idea gauge.
- Implementar la idea gauge en diferentes sistemas clásicos para que tenga sentido y significado para los estudiantes.
- Obtener los efectos dinámicos de los sistemas en rotación, desde la perspectiva newtoniana y desde la perspectiva de la idea gauge.
- Realizar un cuadro comparativo entre la explicación clásica y la explicación haciendo uso de la idea gauge.

Capítulo I
Efectos Dinámicos de los sistemas no inerciales desde la perspectiva newtoniana.

1.1 Sistema de referencia no inercial

Desde Galileo Galilei se comprendió la necesidad de elegir un sistema de referencia, respecto del cual sea posible medir el movimiento de los cuerpos, y desde el cual las leyes de movimiento cobren un significado, dado que proporcionan una caracterización, precisa y coherente de la dinámica del sistema respecto a un sistema de referencia. Ahora bien, estas descripciones se pueden hacer respecto a un sistema de referencia inercial o no inercial. Respecto al sistema de referencia inercial, se desarrolla una configuración de los fenómenos cuando el sistema de referencia permanece estático o a velocidad constante. En cambio, en los sistemas referencia no iniciales, se desarrolla una configuración de los fenómenos cuando el sistema referencia es acelerado, este análisis permite una caracterización del movimiento de los cuerpos de forma general, debido a que toma en consideración el estado mecánico de un sistema respecto a sistemas de referencia inercial y no inercial.

Al analizar un sistema con respecto a un sistema de referencia no inercial se representa un inconveniente en relación a cuáles son leyes de movimiento que se deben recurrir para poder describir el sistema, debido que las leyes de movimiento solo son válidas para los sistemas inerciales de referencia (Saveliev,1984). Es así que las leyes de movimiento no predicen los efectos que un observador ligado al sistema de referencia no inercial experimenta. Ante dicho problema cabe resaltar que se puede hacer usos de las leyes de movimiento de Newton, siempre y cuando se introduzca una modificación a dichas leyes, dicha modificación es la consideración, además de las fuerzas condicionadas por el efecto que ejerce un cuerpo sobre otro (elásticas, gravitacionales, rozamiento, etc.) los efectos originados por las propiedades del sistema de referencia no inercial (Muñoz,2012), lo anterior significa que se puede hace uso de las mismas ecuaciones de movimiento siempre que al describir el sistema, se tomen en consideración las llamadas fuerzas de inercia, dado que de esta forma se posibilita caracterizar el estado mecánico del sistema desde cualquier sistema de referencia (tanto inerciales, como no inerciales)

1.2 Ecuaciones de Movimiento en sistema de referencia no inercial.

Al analizar un sistema mecánico, desde un sistema de referencia no inercial, lo primero a precisar es su no-inercialidad (Muñoz,2012), esto se realiza ya que todo sistema de referencia no inercial se mueve respecto a un sistema inercial, lo dicho hasta aquí supone que respecto al sistema de referencia inercial S, describiremos el movimiento del sistema no inercial S', *figura (1),*

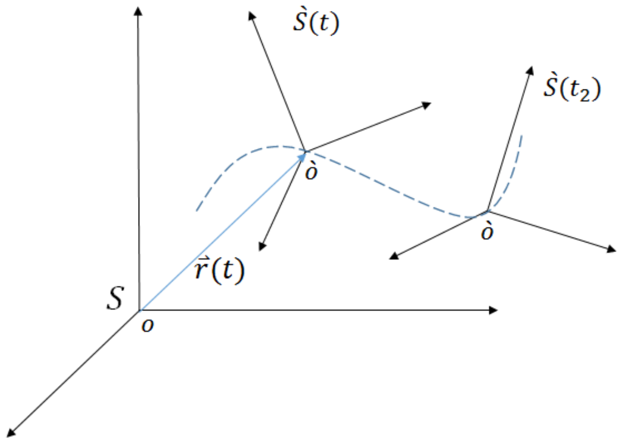


Figura 1, Caracterización de sistema acelerado S` con respecto al sistema inercial S

Lo segundo a precisar es el sistema de coordenadas a utilizar, de modo que permita caracterizar al sistema en relación al sistema de referencia. Para el presente análisis se construirán las ecuaciones de movimiento en primer lugar haciendo uso de coordenadas cartesianas, para luego obtener la dinámica de un sistema de rotación haciendo uso de coordenadas polares.

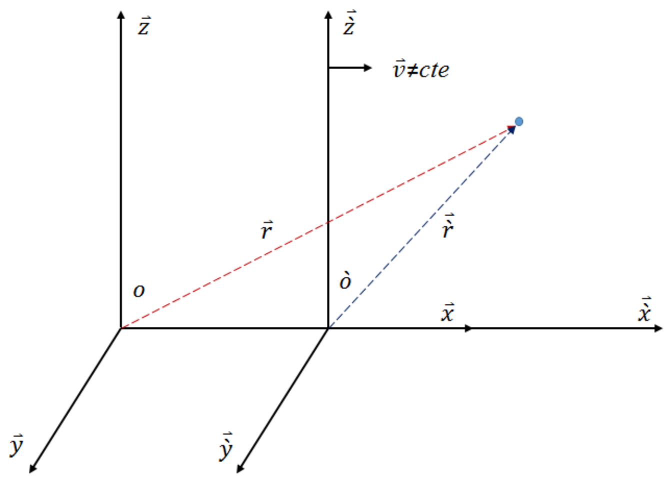


Figura 2, Sistema mecánico compuesto por una partícula que describe una trayectoria rectilínea bajo un sistema de referencia acelerado

Por último, para la construcción de las ecuaciones de movimiento es escoger un sistema a analizar, como, por ejemplo: una partícula que se

encuentra trasladándose en línea recta de bajo un sistema de referencia acelerado.

Dado el sistema, lo primero a describir es la posición de la partícula respecto al sistema de referencia no inercial como:

$$\vec{\dot{r}} = \vec{r} - \vec{v}t, \qquad (1)$$

donde $\vec{r}$ es vector posición respeto al sistema de referencia inercial, y $\vec{v}$ la velocidad del sistema de referencia no inercial. ($\vec{v} \neq Cte)$, la velocidad está definida como $\vec{v} = dr/dt$, es decir que la velocidad de la partícula respecto al sistema de referencia no inercial esta descrita

$$\vec{\dot{v}} = \vec{v} - vt, \qquad (2)$$

Siendo $\vec{v}$ la velocidad con respecto al sistema de referencia inercial, de igual forma se puede caracterizar la aceleración que experimenta la partícula con respeto al sistema de referencia no inercial:

$$\vec{\dot{a}} = \vec{a} - \omega, \qquad (3)$$

donde $\vec{\dot{a}}$ es la aceleración que experimentaría un observador desde sistema de referencia no inercial, $\vec{a}$ es la aceleración medida con respecto al sistema de referencia inercial, y ω es la aceleración que experimenta el sistema de referencia no inercial.

1.3 Las Fuerzas de Inercia

El interés primordial de este análisis es poder describir el estado mecánico del sistema según los sistemas de referencia no inerciales, esto es hablar necesariamente de las causas que generar el movimiento, para esto, hay que tener en cuenta en el análisis las fuerzas que intervienen en dicho movimiento, y la cual puede ser caracterizada en el ejemplo anterior por medio una fuerza total o neta que actúa sobre la partícula, con respecto al sistemas de referencia inercial se denomina F , en tal caso, la segunda ley de Newton dice:

$$\vec{F}_{Neta} = m\vec{a}, \qquad (4)$$

de tal forma que la aceleración del sistema respecto al sistema inercial de referencia es igual:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_{Neta}}{m}. \qquad (5)$$

Por otra parte, con respecto al sistema de referencia no inercial la aceleración que experimenta la partícula, está representada según la ecuación:

$$\vec{\grave{a}} = \frac{\vec{F}_{Neta}}{m} - \overrightarrow{w}, \qquad (6)$$

En consecuencia la ecuación anterior, se desprende una de las principales connotaciones del presente análisis, teniendo en cuenta que si las fuerzas condicionadas sobre el sistema ($\overrightarrow{F_{Neta}}$) es igual a cero (F= 0), un observador respecto al sistema de referencia no inercial podrá argumentar que sobre el sistema persiste una fuerza igual ($-mw$), mientras que por otro lado, un observador con respecto al sistema de referencia inercial argumentara que el sistema se encuentra en equilibrio.

$$m\vec{\grave{a}} = 0 - m\overrightarrow{w} \qquad (7)$$

Lo anterior representa que al describir el movimiento cualquier sistema con relación a sistemas de referencia no inerciales se puede hacer uso de las ecuaciones de Newton, si junto a las fuerzas condicionadas por el efecto de un cuerpo con otro, se toman en consideración las llamadas fuerzas de inercia, que hacen parte de lo que llamamos los efectos dinámicos de los sistemas no inerciales y quedaran descritas de la siguiente manera.

$$F_{in} = -mw \qquad (8)$$

En el siguiente ejemplo presenta de manera explícita la aparición de dichos efectos, para ello se describe el movimiento de traslación de un

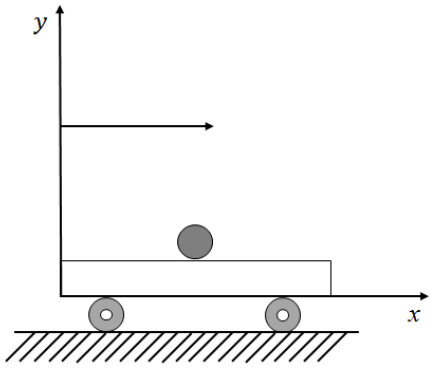


Figura 3, Traslación de un vehículo en cual se encuentra una esfera bajo el efecto de un campo

vehículo en el cual se encuentra una esfera bajo el efecto de un campo gravitacional.

Este sistema se analizara en dos momentos, en primer lugar ,cuando el vehículo está en reposo o a velocidad constante $(\overrightarrow{a} = 0)$, como se muestra en la figura 3, para luego analizarlo cuando el vehículo se encuentra en movimiento de traslación con cierta aceleración $(\overrightarrow{a} \neq 0)$.

Cuando el vehículo se encuentra en reposo o a velocidad constante, la esfera permanece en el mismo lugar, es decir las fuerzas que intervienen en el sistema tienen como resultante un valor igual a cero, en este caso el peso (mg) es igual a la fuerza normal; como se muestra en la figura 4.

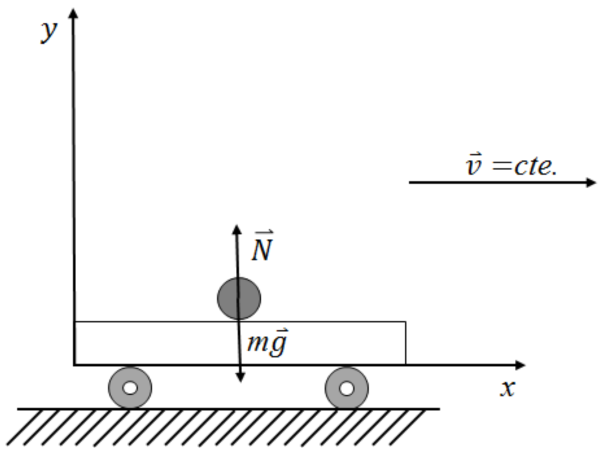


Figura 4 caso 1, El Vehículo está en reposo o a velocidad constante

Para el segundo caso, como se ilustra en la figura 5, el vehículo experimenta cierta aceleración, a simple vista un observador argumenta que la esfera sale de su posición de equilibrio, cabe resaltar que no se le aplicado una fuerza distinta al caso anterior, entonces ¿A qué se debe este cambio en el estado mecánico del sistema?,

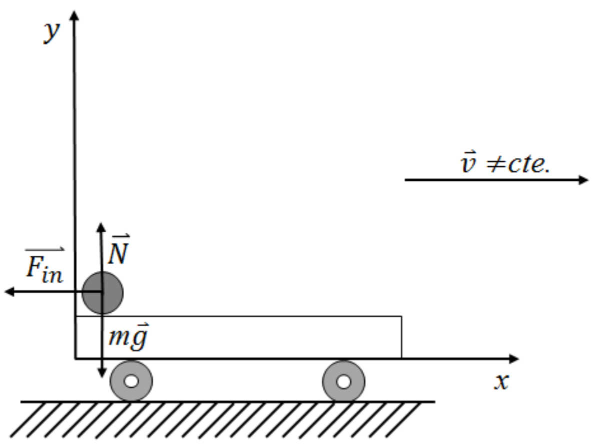


Figura 5, caso 2, El carro se mueve con cierta aceleración

Es ahí donde se hacen perceptibles los efectos dinámicos en los sistemas no inerciales , para presente caso es la fuerza de inercia, en la medida que la esfera se encuentra en reposo con respecto al sistema ligado al vehículo pero no en su posición de equilibrio, esto puede ser explicado

siempre y cuando además de las fuerzas condicionadas entre cuerpos (fuerza de la gravedad y la normal), se considere que sobre la esfera también actúa la fuerza de inercia ($F_{in} = -mw$), y dicha fuerza está condicionada por las propiedades del sistema de referencia no inercial..

Para el análisis de los distintos efectos dinámicos en los sistemas no inerciales se procede de la misma manera al que experimenta la esfera, pero en otra clase de sistemas, como sistemas en rotación. Cabe señalar que este estudio posibilita describir el movimiento de los cuerpos desde cualquier sistema de referencia y más aun apoyándose de las mismas ecuaciones de movimiento.

1.4 Sistemas en Rotación

Al analizar otro tipos de sistemas, como la rotación de los cuerpos se pueden describir otra serie de efectos dinámicos, al caracterizar sistemas en rotación es conveniente utilizar un sistema de coordenadas más naturales al sistema, como los son las coordenadas polares1.

Al igual que en caso anterior se describirá de forma precisa el sistema, es decir que se caracteriza la posición y velocidad del sistema pero en términos de las variables $(\vec{r}, \theta, \hat{r}, \hat{\theta})$

---

[1] La selección de un sistema de coordenadas principalmente se debe a las ventajas, la simplicidad y la naturalidad del sistema con la que se pudiese tratar de buscar una solución al problema, dado que la solución no depende del sistema de coordenadas elegido.

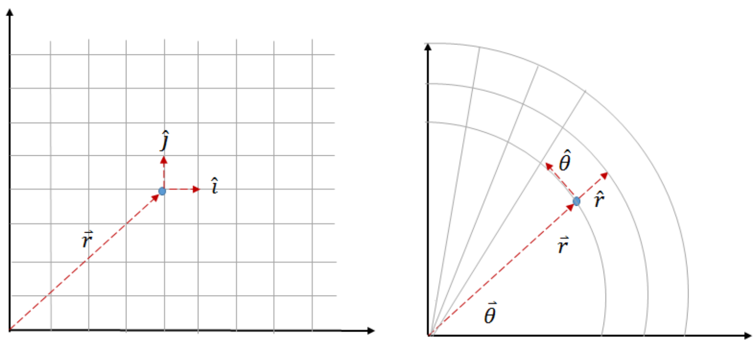


Figura 6, Representación del vector posición en coordenadas cartesianas y polares coordenadas,

Para esto, se busca las respectivas equivalencias entre los dos sistemas de coordenadas, en este caso particular la geometría juega un papel relevante dado que gráficamente es sencillo comprender este paso entre coordenadas

$$r\begin{cases} x = rcos\theta \\ y = rsin\theta \end{cases}, \qquad (9)$$

En forma vectorial podemos escribir el vector posición en coordenadas polares

$$\vec{r} = r\hat{r}. \qquad (10)$$

Cabe señalar una característica fundamental al usar coordenadas polares, debido a que es un sistema de coordenadas no homogéneo, como lo es el cartesiano, esto implica, al caracterizar la posición de un cuerpo, los vectores unitarios cambian de dirección para los distintos puntos del espacio

$$\begin{aligned} \hat{r} &= \hat{r}(\theta) \\ \hat{\theta} &= \hat{\theta}(\theta), \end{aligned} \qquad (11)$$

más aun, es posible establecer dicho cambio, con relación a los vectores unitarios de las coordenadas cartesianas y las coordenadas polares

$$\begin{aligned} \hat{r} &= cos\theta\hat{\imath} + sin\theta\hat{\jmath} \\ \hat{\theta} &= -sin\theta\hat{\imath} + cos\theta\hat{\jmath} \end{aligned} \qquad (12)$$

Ahora bien, al describir la dinámica de un sistema con respecto a las coordenadas polares, el vector $\vec{r}$ posición esta descrito por :

$$\vec{r} = r\hat{r}. \qquad (13)$$

De modo que la velocidad de la particula esta definida:

$$\vec{v} = \frac{d(r\hat{r})}{dt}, \qquad (14)$$

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\frac{d\hat{r}}{dt}. \qquad (15)$$

Como se analizado anteriormente la posicion varia con respecto al tiempo, de forma de los vectores unitarios tambien cambian de direccion con respecto al tiempo, de tal forma que:

$$\frac{d\hat{r}}{dt} = \frac{d\hat{r}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\,\frac{d\hat{r}}{d\theta}\ , \qquad (16)$$

de tal forma que la velocidad del sistema en rotacion quedara descrita como:

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}. \qquad (17)$$

El termino de la ecuacion ($\dot{r}\hat{r}$) representa una velocidad en dirrecion radial, respecto al vector posicion, el seguntdo termino representa una velocidad en direcion tangencial a la particula, tal como se muestra en la figura 7

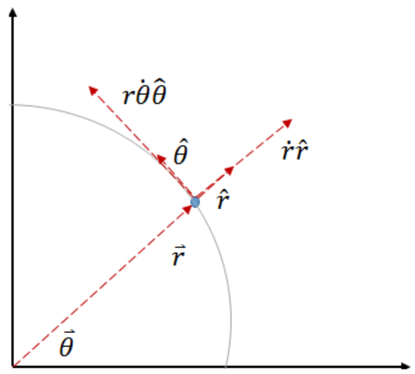


Figura 7, representación de la componente de la velocidad en coordenadas polares, Para finalizar, la aceleracion del sistema se obtiene derivando la expresion de la velocidad del sistema:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\left(\dot{r}\hat{r}+r\dot{\theta}\hat{\theta}\right)}{dt}\,, \qquad (18)$$

donde

$$\vec{a} = \ddot{r}\hat{r} + \dot{r}\frac{d\hat{r}}{dt} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + r\ddot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\theta}\frac{d\hat{\theta}}{dt}. \qquad (19)$$

De igual modo el vector unitario $\hat{\theta}$ también cambia de dirección con respecto al tiempo, de tal forma que puede ser descrito:

$$\frac{d\hat{\theta}}{dt} = \frac{d\hat{\theta}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = -\dot{\theta}\hat{r}\ , \qquad (20)$$

obteniendo:

$$\vec{a} = \ddot{r}\hat{r} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + r\ddot{\theta}\hat{\theta} - r\dot{\theta}^2\hat{r}\ , \qquad (21)$$

finalmente, la aceleración del sistema estará dado por:

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta}. \qquad (22)$$

Donde el término de la aceleración $(\ddot{r}\hat{r})$ se refiere a la aceleración en dirección radial de la partícula, la cual es denominada aceleración centrifuga, y es debida al cambio en la magnitud de la velocidad radial. El segundo termino $\dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta}$ es la aceleración en dirección tangencial, debida al cambio en la magnitud de velocidad tangencial.(Kleppner,2010)

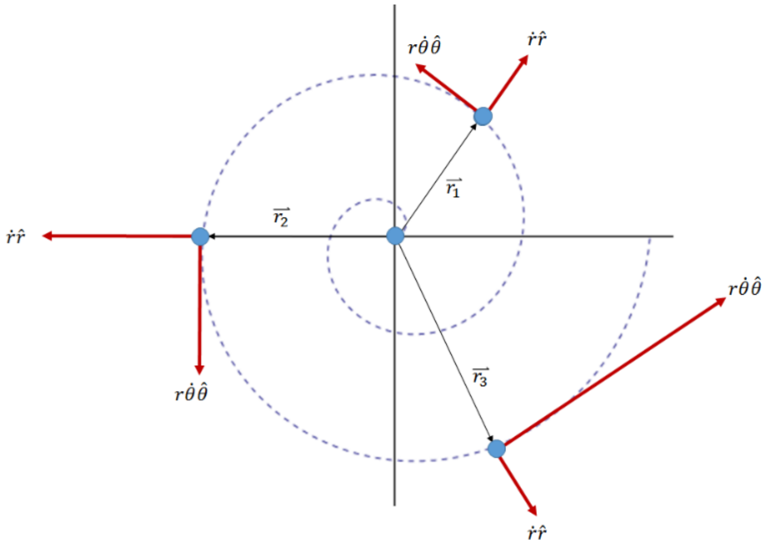


Figura 8, Variación de componentes de velocidad en diversas posiciones en coordenadas polares,

Por otro lado, el término $-r\dot{\theta}^2\hat{r}$ es denominado la aceleración centrípeta, cuya dirección es hacia el centro del sistema de coordenadas, la aceleración centrípeta se debe al cambio de dirección de la velocidad tangencial. Por último, el término $2\dot{r}\dot{\theta}$ es la denominada aceleración de coriolis y se presenta cuando hay cambios de dirección en la componente de la velocidad radial de la partícula.

Es así que los efectos dinámicos se obtienen considerando la masa de la partícula constante:

$$\vec{F} = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta} \qquad \textbf{(23)}$$

Donde el término$-mr\dot{\theta}^2$ es denominado como una fuerza centrípeta, el término $m\ddot{r}$ es la denominada fuerza inercial, o fuerza centrífuga, el termino $m2\dot{r}\dot{\theta}$ es la fuerza coriolis y para finalizar el termino $r\ddot{\theta}$ es una fuerza denominada tangencial. Cabe resaltar que estos tres últimos términos son fuerzas que reciben el nombre de fuerzas ficticias, fuerzas aparentes, pseodofuerzas, fuerzas no inerciales o como fuerzas de inercia, la introducción de dichas fuerzas que aparecen exclusivamente debido a la no inercialidad del sistema de referencia, y permiten describir la dinámica del sistema.

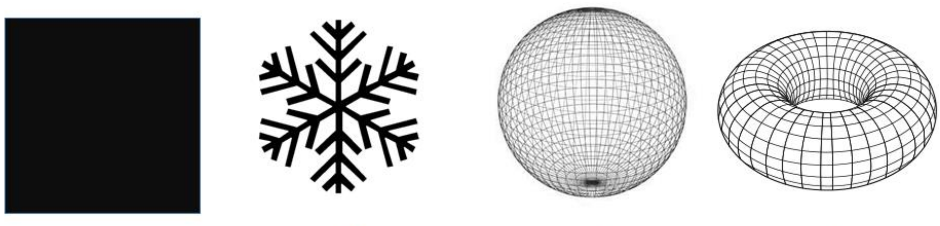
Capitulo II
Sobre la idea gauge

2.1Simetrías e invariancia

A lo largo de la historia, el hombre siempre ha estado en constante construcción de modelos teóricos que expliquen su entorno, en esa constante búsqueda una de las ideas que ha facilitado dicha construcción es la noción de simetría (HOOFT, (1980), más aún las simetrías aparentes de las leyes de la naturaleza, sin ir tan lejos la mecánica de Newton y posteriores desarrollos aportan el primer indicio de una simetría, destacando que describe varios principios de conservación, como el principio de conservación de la energía mecánica, la conservación del momento angular y lineal,.(Velez,2012).

Al hablar de la idea de simetría, esta tiene una connotación esencialmente geometría, ya que generalmente se asocia a la belleza o armonía que presenta una figura al ser observada. Sin embargo, en física, esta idea puede ser entendida en palabras del matemático Herman Weyl como: "... una cosa es simetría si hay algo que se le pueda hacer tal que, una vez hecho, la cosa parezca la misma que antes (Ruperez,1994).

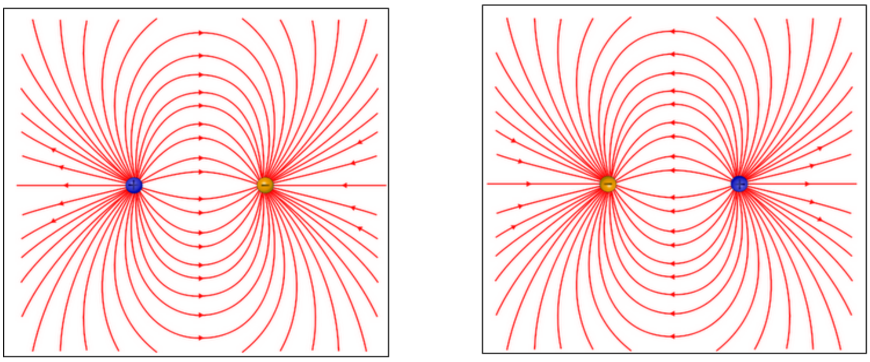
Expresando intuitivamente que la simetría consiste, como consecuencia de una operación que deja invariante un sistema físico de la naturaleza, dicha operación o transformación puede ser entendida en primera medida por medio de las siguientes figuras geométricas:



(a) (b) (c) (d)

Figura (9): Ejemplo de Figuras Geométricas que presentan simetrías bajo rotaciones

Por ejemplo, considere la figura (a), el cuadrado es simétrico bajo la operación de rotación de 90º grados, es decir, a la figura se le aplica cierta operación, pero esta no presenta ningún cambio al ser observada. La figura (b), el copo de nieve presenta una simetría bajo rotaciones de 60º grados (o múltiplos de 60 grados), a su vez, la figura (c) y (d) se pude analizar, que estas presentan una simetría de forma continua, dado que al realizar rotaciones de 360º las figuras permanecerán invariantes. De igual forma se pueden evidenciar como el concepto de simetrías está presente en la construcciones de teorías en física, por ejemplo en el campo de la electrostática, se puede apreciar la noción de simetría de manera sencilla, por ejemplo la magnitud de la fuerza electroestática permanece invariante ante cambios de carga., por ejemplo véase ***(figura 8),*** al analizar la magnitud de fuerza eléctrica entre dos partículas con cargas eléctricas, (+, -), esta dependerá del valor de carga eléctrica de cada partícula, y de la distancia al cuadrado a la cual se encuentren dichas partículas.



(a) (b)

Figura (10): Distribuciones de Carga

Ahora bien, hasta este punto solamente se está resolviendo un problema de electrostática y se recurre a la ley de coulomb que determina la fuerza eléctrica entre cargas en reposo, en búsqueda que analizar la simetría que presenta este modelo teórico se puede pensar de la siguiente forma :

si a dicha distribución de cargas por diferentes mecanismos le invirtiéramos la polaridad a las cargas, es decir, la partícula que era positiva pasa a tener carga negativa y respectivamente la partícula negativa pasa a tener carga positiva, ¿ que pasara con la magnitud de la fuerza eléctrica entre dichas cargas?, haciendo uso del método para determinar la magnitud de fuerza eléctrica, veremos que esta permanece invariante, es decir que no cambia y lo cual permite pensar que sobre la teoría eléctrica existe una simetría. Cabe resaltar que en primera aproximación se muestra solamente el estudio de la electrostática, pero las leyes de maxwell que rigen el comportamiento del campo electromagnético también son invariantes bajo calibraciones en sus potenciales escalar y vectorial.

Es importante puntualizar que las simetrías no se están refiriendo al fenómeno en sí, si no que por el contrario la simetría se hace referencia estrictamente a las leyes que lo rigen.

2.2 Simetrías Locales y Globales

Todas estas simetrías examinadas hasta el momento suelen caracterizarse según bajo la operación que permite que el sistema permanezca invariante (simetría axial, radial, bilateral), sin embargo para ese análisis es conveniente caracterizarlas de dos maneras, simetría local y global, de tal forma que se puede caracterizar una simetría si las leyes permanecen invariantes cuando se aplica la misma trasformación (operación) sin importar del espacio o del tiempo o si por el contrario esta depende del espacio- tiempo.

Puntualmente si el sistema permanece invariante al realizar una operación, ya sea esta rotación, o una traslación, o un cambio en la fase,

etc. Sin tener en consideración el espacio o el tiempo, el sistema presenta una simetría global, otra forma de analizar este tipo de simetría es pensar que ocurren por doquier y al mismo tiempo (Ruperez, 1994), o por el contrario, si la simetría depende de la localización espacio-temporal, la simetría no es global, es denominada una simetría local, en otras palabras , la simetría se presenta bajo trasformaciones distintas para cada punto del espacio tiempo(Weyl, 1918).

Es así como el papel de la simetría, atreves de la historia ha jugado un papel en construcción de innumerables modelos teóricos, tanto en física clásica como en el campo de la física moderna, dado que es a partir de simetrías que se construyen las teorías intentan explicar las interacciones fundamentales, donde se relacionan las propiedades de las fuerzas con simetrías de la naturaleza, a estos modelos teóricos son denominados como teorías gauge.

2.3 Surgimiento de la idea Gauge.

Durante siglo XX, una gran cantidad de pensadores entre ellos Albert Einstein emprendieron la búsqueda de una teoría que unificara la gravitación y el electromagnetismo, y así tener una teoría del campo unificado. Einstein buscaba un esquema central que incorporara las fuerzas básicas de la naturaleza, una explicación de las fuerzas de la naturaleza dentro de un contexto geométrico. Cabe resaltar que su idea tiene su raíz en el trabajo de Maxwell alrededor de la teoría electromagnetismo, dado que en dicho modelo se logró unificar los estudios eléctricos y magnéticos.

Bajo esta búsqueda de obtener las teorías electromagnetismo y la gravitación bajo un mismo contexto se encaminaría también el

matemático alemán Herman Weyl, el cual es el primer en dilucidad un modelo que daba cuenta de estas interacciones, dicha teoría fue expuesta en 1918, (Weyl,1950),

> *Dieser Tage ist es mir, wie ich glaube, gelungen, Elektrizität und Gravitation aus einer gemeinsamen Quelle herzuleiten. Es ergibt sich ein völlig bestimmtes Wirkungs-Prinzip, das im elektrizitätsfreien Feld auf Ihre Gravitationsgleichungen führt, gravitationfreien dagegen Gleichungen ergibt, die in erster Annäherung mit den Maxwellschen übereinstimmen. Darf ich Ihnen, wenn ich's ausgearbeitet habe, das Manuskript (etwa 19 Seiten) zuschicken, dass Sie's vielleicht in der Berliner Akademie vorlegen? (traducción, Asorey, 2002)*

Durante estos días, creo que he conseguido obtener la gravitación y el electromagnetismo a partir de una misma fuente. Resulta un principio de acción perfectamente determinado que, en ausencia de campos electromagnéticos, conduce a sus ecuaciones gravitatorias. Por el contrario, en ausencia de gravitación aparecen ecuaciones que, en primera aproximación, coinciden con las de Maxwell. ¿Podría enviarle el manuscrito (unas 19 páginas) para que usted, tal vez, las presentase en la Academia de Berlin?

El propone un modelo matemático que permanece invariante con respecto a dilaciones o contracciones arbitrarias del espacio, y en cual las ecuaciones resultan invariantes frente a cualquier cambio de coordenadas. Weyl incorpora a la geometría de Riemann la posibilidad del cambio en la longitud de un vector (Buitrago,2003), esto supone que las leyes de la naturaleza no cambian cuando se modifica la escala en cada punto del espacio-tiempo, esto a su vez supuso la introducción de un nuevo principio, al cual llamó "Eich-Invarianz Prinzip" (Principio de invariancia de calibración o invariancia gauge).

A pesar de que su modelo era fantástico y que el propio Einstein describiría este modelo como "un golpe de genialidad de primera clase", (Arorey,2002} fue el mismo quien descarto este modelo teórico que unificara las dos interacciones fundamentales, según Einstein era imposible que describiera el comportamiento de estas interacciones, (Arorey,2002} por tal razón este primer intento por obtener la gravitación y electromagnetismo fue un fracaso, sin embargo, dicha idea no era del todo descabellada, dado que es de este modelo teórico donde aparece por primera vez la palabra clave, y una de las ideas más originales y fructíferas del siglo XX, la invariancia gauge, o idea Gauge, la cual se convertiría uno de los frutos más preciados e inesperados de la investigación en la unificación del electromagnetismo y la gravitación en 1918, posibilitando el punto de partida para grandes científicos como London, C. Yang, P. Higgs, G.t Hooft Feynman, etc en el desarrollo de teorías modernas que explican el mundo de las fuerzas fundamentales, que brindan elementos para entendimiento de las interacciones entre partículas elementales.

2.4 Invariancia Gauge

A partir del artículo "Gravitación and electricity" y de la extensa correspondencia que mantuvieron durante años, Weyl y Einstein (Asorey, 2002) es donde se empieza hablar de la idea gauge, En cuanto a la construcciones de modelos físicos esta idea tiene una mayor relevancia dado es una forma de dar explicación a los fenómenos de la naturaleza haciendo uso de la idea de calibración de variables dinámicas, en palabras de Juan Martin Maldacena "la invariancia gauge, o simetría gauge es considerada como la forma de medir dichas variables dinámicas"(Maldacena, 2012) y como a partir de esto las leyes de la naturaleza no cambian en cada punto del espacio-tiempo, implicando estrictamente la existencia de una simetría en la teoría.

Si bien los modelos teóricos no pueden depender de cómo se describan los parámetros internos del sistema, la fijación de la idea gauge en sistemas físicos relaciona dicha arbitrariedad, es decir, dichas calibraciones o también llamadas trasformaciones gauge se puede fijar de menara tal que sobre el sistema alguna cantidad física permanezca invariante,

$$\grave{A} \rightarrow A = A + cte. \qquad (24)$$

De tal manera que la trasformación gauge puede ser definida mediante el ingreso de un factor adicional (una constante, un operador, etc) a la variable dinámica del sistema, de tal forma que el modelo o teoría física sea invariante ante dicha transformación, donde el sentido de realizar dicha calibración siempre está fijado en que este permita describir y caracterizar la dinámica del sistema,

Consideraos el siguiente ejemplo, en cual se encuentran de dos observadores (O, P), los cuales se encuentran a una cierta distancia uno del otro, la posición de O con respecto a un sistema de referencia es (1m, 4m), mientras que la posición de P con respecto al mismo sistema de referencia es (5m, 5m), la distancia entre los observadores está dada por (4.12 m). Ahora bien, este análisis no conlleva ningún mecanismo nuevo al utilizado en el cálculo vectorial, pero este ejemplo permite realizar un primer acercamiento a desarrollar de principio de invariancia gauge de forma puramente matemático y geométrico.

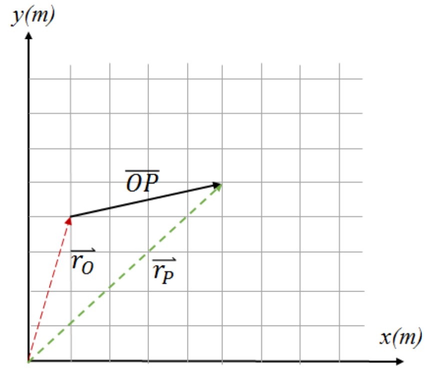


Figura (10): Dos observadores (O, P) separados a una distancia

En primer lugar, se puede hacer uso de la idea gauge, al momento de recalibrar (*trasformación Gauge*) la variable posición de los observadores, de tal forma que la posición de los observadores se le adiciona un factor,

$$\vec{r_1} \to \vec{r_1'} = \vec{r_1} + cte \qquad (25)$$

$$\vec{r_2} \to \vec{r_2'} = \vec{r_2} + cte. \qquad (26)$$

Al analizar un caso particular, es decir que un observador se tomara el trabajo de recalibrar cada uno de las posiciones de forma local, considerando un punto en el espacio en concreto en la medida de buscar si algo en el sistema permanece invariante, de modo que al aplicar una trasformación gauge localmente,

$$\vec{r_1} \to \vec{r_1'} = \vec{r_1} + (2\,m, 2\,m) \qquad (27)$$

$$\vec{r_2} \to \vec{r_2'} = \vec{r_2} + (2\,m\,, 2\,m) \qquad (28)$$

Teniendo en cuenta que el factor adicional $(2\,m, 2\,m)$ por el cual se le aplico dicha trasformación gauge al sistema:

$$\overrightarrow{r_1} = (3\,m, 6\,m)$$

$$\overrightarrow{r_2} = (7\,m\,,7\,m) \qquad (29)$$

Al realizar dicha trasformación, se puede evaluar la distancia a la cual se encuentra los observadores, la cual sigue siendo (4,12 m), evidenciando que dicha distancia permanece invariante bajo este tipo de trasformaciones, cabe señalar que lo realizado de forma práctica es una traslación de vectores, pero que esta idea posibilita comprender el uso de la idea gauge de manera sencilla y práctica

Resumiendo, este razonamiento lleva a pensar que bajo trasformaciones gauge o utilizando la idea de invariancia gauge, las distancia permanece invariante,

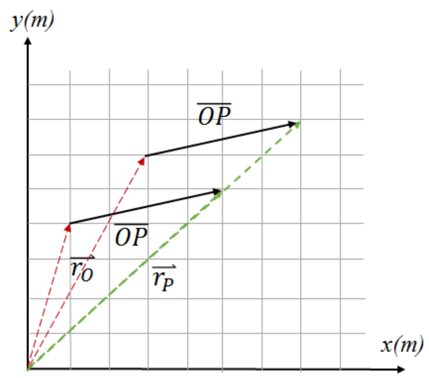


Figura (11): trasformaciones gauge local de los vectores posición de los observadores O y P

2.5 La derivada bajo de este contexto

En matemática, la derivada de una función permite describir la rapidez con la que cambia el valor de dicha función matemática, dentro del contexto de la idea gauge puede ser pensada que al recalibrar funciones de varias variables, dichas re calibraciones hacen pensar en concepto de derivada de una función.

En forma general dicha funcion esta descrita:

$$y = f(x), \qquad (30)$$

Al recaibrar las variables y y x de tal forma que

$$y \rightarrow \grave{y} = y + \Delta y \qquad (31)$$

$$x \rightarrow \grave{x} = x + \Delta x, \qquad (32)$$

la funcion general puede ser vista en terminos de estas trasformaciones gauge como:

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x), \qquad (33)$$

reoganizando y multiplicando ambos lados de la ecuacion por $\frac{1}{\Delta x}$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-y}{\Delta x}, \qquad (34)$$

donde y es igual $f(x)$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}, \qquad (35)$$

aplicando el limite cuanto $\Delta x \rightarrow 0$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}, \quad (36)$$

De modo que a partir de recalibrar una función continua cualquiera, esta nos lleva estrictamente al concepto de derivada,

$$\dot{y} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}. \qquad (37)$$

2.6 El electromagnetismo bajo esta perpectiva

En 1868, James Clerk Maxwell desarrollo una teoría que rige el comportamiento del campo electromagnético, en su trabajo se logró unificar los campos eléctricos y magnéticos, los cuales eran trabajos como entes independientes, una interpretación moderna cataloga la teoría electromagnética como la primera gran teoría gauge dado que los campos, el eléctrico y magnético permanecen invariantes bajo

trasformaciones gauge.

Para hacer hincapié en la idea de que la teoría electromagnética puede ser interpretada bajo esta perspectiva, se presenta el siguiente experimento mental: el funcionamiento de un electrodoméstico del hogar, los cuales funcionan correctamente gracias a que están alimentados a una fuente de energía de 120 V, esta descripción puede ser resumida de la siguiente manera:

$$\Delta U = u_2 - u_1$$

$$u_1 = 0\,V \quad ; \quad u_2 = 120\,V, \qquad (38)$$

el electrodoméstico funciona dado que la diferencia d potencial es:

$$\Delta U = 120\,V \qquad (39)$$

Ahora bien, podemos hacer uso de la idea gauge, dado que podemos recalibrar dichos potenciales, en búsqueda de que alguna magnitud física sea invariante ante una transformación gauge.

Recalibrado Localmente los potenciales:

$$u_1 \to \grave{u}_1 = u_1 + 90V \quad ;$$

$$u_2 \to \grave{u}_2 = u_2 + 90V \qquad (40)$$

al realizar dichas trasformaciones gauge localmente, los electrodomésticos funcionaran de la misma manera; dado que lo que tiene sentido físico, es la diferencia de potencial, no los potenciales, esta propiedad de teoría de maxwell corresponde a una simetría.

$$\Delta U = \grave{u}_2 - \grave{u}_1 \qquad (41)$$

$$\Delta U = (u_2 + 90V) \; - (u_1 + 90V) \quad (42)$$

Remplazando u_2, u_1

$$\Delta U = 120V + 90V \;\; - 0 - 90V \qquad (43)$$

de modo que diferencia de potencial sea:

$$\Delta U = 120V \qquad (44)$$

Es decir que la diferencia de potencial permanece invariante bajo trasformaciones del potencial localmente y el electrodoméstico funcionara correctamente.

Formalmente la teoría de Maxwell, es interpretada bajo este contexto, en la medida que los campos eléctricos y magnéticos son invariantes ante transformaciones gauge (Tejeiro, 2004).

Esto puede ser descrito al analiza las ecuaciones de maxwell en el vacío que describen los campos eléctricos y magnéticos:

$$\nabla \cdot B = 0, \qquad (45)$$

$$\nabla \, \mathrm{x} \, E = -\frac{dB}{dt}, \qquad (46)$$

una forma de determinar los campos eléctrico y magnético es en términos de los potenciales escalar ϕ y vectorial, $\overrightarrow{A}$ tal que:

$$\mathrm{B} = \nabla \times \vec{A} \qquad (47)$$

$$E = -\nabla\phi - \frac{dB}{dt}$$

Recalibrando el potencial escalar y potencial vectorial, los campos eléctricos y magnéticos son invariantes bajo estas trasformaciones gauge.

$$\vec{A} \rightarrow \dot{\vec{A}} = \vec{A} + \nabla x, \qquad (48)$$

$$\phi \rightarrow \grave{\phi} = \phi - \frac{dx}{dt}, \qquad (49)$$

de tal forma:

$$E = -\nabla\left(\phi - \frac{\partial x}{\partial t}\right) - \frac{d\left(\vec{A} + \nabla x\right)}{dt} \qquad (50)$$

$$\mathrm{B} = \nabla \times \left(\vec{A} + \nabla x\right)$$

es decir que el campo eléctrico y magnético:

$$E = -\nabla\phi + \frac{\partial}{\partial t}\nabla x - \frac{d\vec{A}}{dt} - \frac{d}{dt}\nabla x \qquad (51)$$

Aplicando $\nabla \times (\nabla x) = 0$

$$B = \nabla\, X\vec{A} + \nabla\, X\, (\nabla x) \qquad \textbf{(52)}$$

Esto implica que diferentes observadores en diferentes puntos del espacio, usando diferentes trasformaciones gauge, obtienen los mismos campos,

$$E = -\nabla\phi - \frac{d\vec{A}}{dt} \qquad \textbf{(53)}$$

$$B = \nabla \times \vec{A} \qquad \textbf{(54)}$$

Capitulo III

Efectos Dinámicos desde la perspectiva Gauge

3.1 Sistema en rotación

Hasta este punto del análisis, se poseen elementos que permiten que la idea de invariancia gauge, cobre un sentido y un significado por parte de los estudiantes, no obstante, para el este capítulo se presenta el análisis de un sistema en rotación bajo procedimientos análogos a los usados en una teoría gauge, Dicho de otra manera, describiremos la dinámica del sistema haciendo uso de la idea de invariancia gauge, ante esto el sistema en cuestión es; la rotación de un cuerpo bajo un campo gravitacional, y por lo cual describe una trayectoria circular, para empezar a dar solución y obtener la dinámica del sistema usando procedimientos gauge, se empieza por caracterizar el sistema:

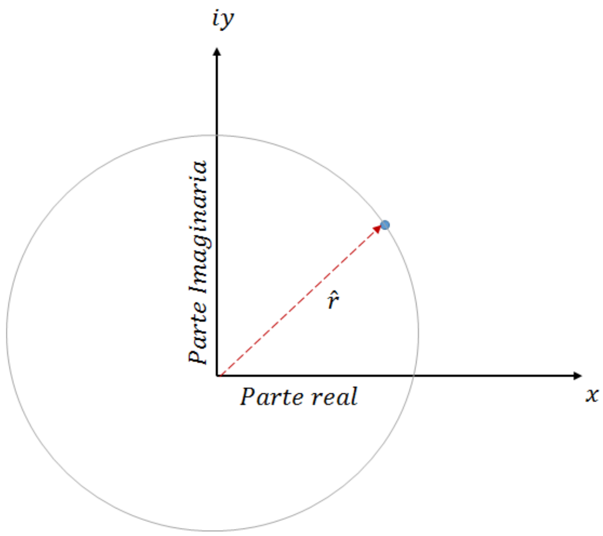


Figura (12): descripción de la posición de un cuerpo haciendo uso del plano complejo

La posición del cuerpo en coordenadas cartesianas está definida como $z = x + b$, esto haciendo uso del plano real, para el presente análisis se

utilizara el plano complejo, esto se debe a dejar la variable posición en términos de los cambios de fase del sistema, cabe recalcar que dicho análisis se hace prescindible porque gracias a la inclusión de números complejos se ha podido expresar y caracterizar el movimiento vibratorio, las oscilaciones armónicas, las vibraciones amortiguadas, entre otros sistemas.(Thomas, 1968).

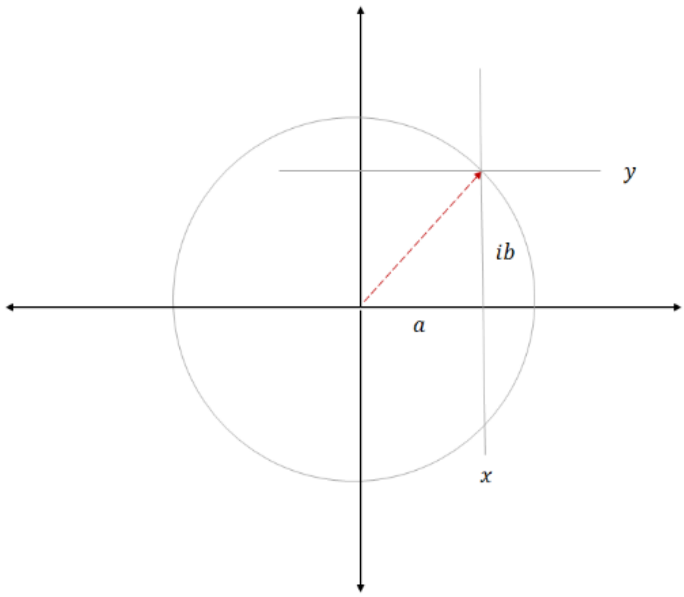


Figura (13): Componentes de la posición en el plano complejo

Es así que el vector posición, usando el plano complejo queda definido como:

$$z = x + iy, \tag{55}$$

siendo x el aporte del plano real y iy, el aporte del plano imaginario, al utilizar la relación de Euler, la posición del cuerpo es:

$$z = re^{i\theta}, \tag{56}$$

donde el vector posición estará definido por los cambios en la fase (θ),cabe recalcar que θ es el ángulo asociado al vector posición *figura 13*), ahora bien podemos hacer uso de idea de invariancia gauge, que no permite recalibrar variables como la posición, buscando que el sistema permanezca invariante ante dichas trasformaciones gauge,

Recalibrando la Fase del sistema, bajo la trasformación gauge global:

$$\theta \rightarrow \grave{\theta} = \theta - \varphi \qquad (57)$$

Geométricamente el termino (φ) lo que hace es rotar al vector posición

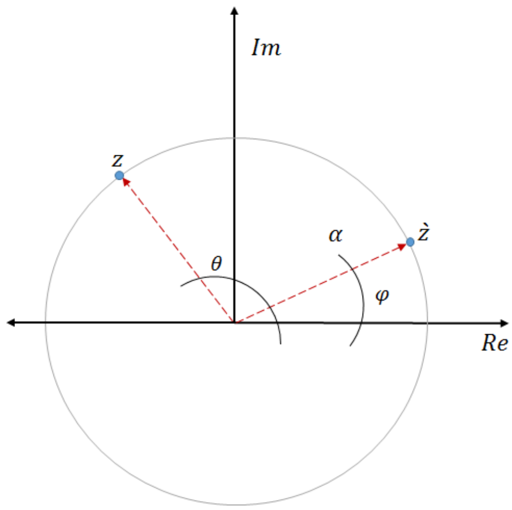


Figura (14): Trasformación gauge global de la posición

de forma que el vector posición recalibrado $\grave{z}$ queda definido:

$$\grave{z} = re^{i(\theta-\varphi)}, \qquad (58)$$

simplificando el vector posición, este queda descrito:

$$\grave{z} = re^{i\theta}e^{-i\varphi}, \qquad (59)$$

dado que $z = re^{i\theta}$ es vector posición inicial:

$$\grave{z} = ze^{-i\varphi} \qquad (60)$$

Al analizar los posibles cambios al sistema, podemos verificar que la magnitud del vector posición permanece invariante bajo este tipo de trasformaciones gauge globales, en la medida que $z = \|\grave{z}\|$, y esta se calcula por $\sqrt{zz*}$,

De modo que

$$\|ze^{-i\varphi}\| = \sqrt{(ze^{-i\varphi})(ze^{i\varphi})}, \qquad (61)$$

$$\|ze^{-i\varphi}\| = \|ze^{-i\varphi}\|, \qquad (62)$$

Es así que $\|\dot{z}\| = \|z\|$, y se demuestra que la magnitud de posición es invariante bajo trasformaciones gauge globales, En búsqueda de describir el sistema, se diferenciará el vector posición con respecto al tiempo:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{d(ze^{-i\varphi})}{dt} \qquad \textbf{(63)}$$

De tal forma:

$$\frac{d\dot{z}}{dt} = \frac{dz}{dt}e^{-i\varphi} \qquad \textbf{(64)}$$

Usando el procedimiento anterior se verifica que la velocidad, permanece invariante bajo trasformaciones gauge de la posición de forma global.

$$\left\|\frac{d\dot{z}}{dt}\right\| = \left\|\frac{dz}{dt}\right\| \qquad \textbf{(65)}$$

En búsqueda de la aceleración que experimenta el sistema, se deriva la expresión de la velocidad del sistema, quedando esta:

$$\frac{d^2\dot{z}}{dt^2} = \frac{dz^2}{dt^2}e^{-i\varphi} \qquad \textbf{(66)}$$

Fácilmente, se pude verificar como la aceleración también permanece invariante bajo una trasformación gauge global realizada a la posición. Ahora bien, la dinámica del sistema viene definida por dicha expresión multiplicada por la masa del cuerpo, considerando que esta es *m,* la dinámica del sistema queda descrita por:

$$m\frac{d^2\dot{z}}{dt^2} = m\frac{dz^2}{dt^2}e^{-i\varphi} \qquad \textbf{(67)}$$

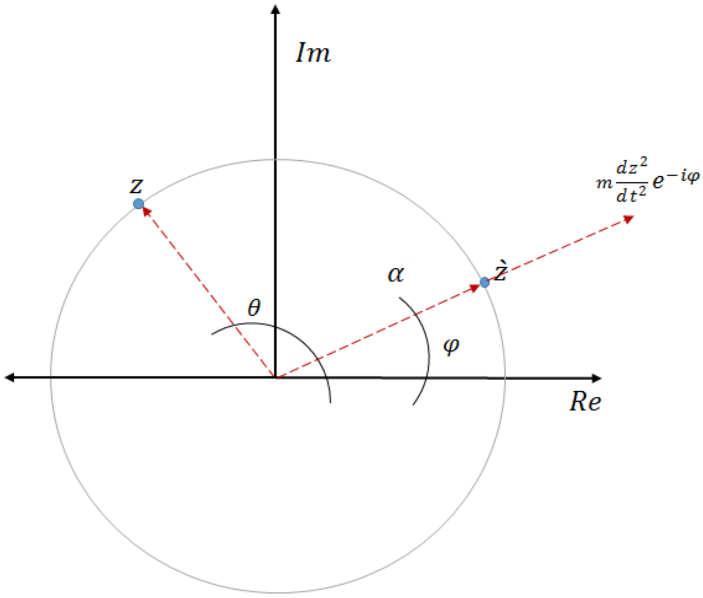


Figura (13): Descripción de la dinámica de un movimiento Circular uniforme

Es decir que al aplicar una trasformación gauge de forma global podemos describir la dinámica del sistema en rotación, adicionalmente nos describe como dichas variables dinámicas permanecen invariantes bajo estos cambios. Al realizar una comparación de la dinámica expuesta en capítulo I, podemos caracterizar que el aplicar trasformaciones gauge de manera global, se está hablando estrictamente de un movimiento circular uniforme, donde solo se describe la fuerza centrífuga.

Al realizar un análisis de un caso más general posible, es considerar dicha trasformación tome en consideración cada punto del espacio-tiempo, es decir que el sistema se analizara bajo trasformaciones gauge de forma Local de la forma:

$$\theta \to \grave{\theta} = \theta - \varphi(t). \qquad (68)$$

Es decir que el vector posición

$$z = re^{i\theta}, \qquad (69)$$

al aplicarle una transformación gauge local este queda definido:

$$\grave{z} = re^{i(\theta-\varphi(t))}, \qquad (70)$$

simplificando el vector posición, esta descrito:

$$\grave{z} = re^{i\theta}e^{-i\varphi(t)}, \qquad (71)$$

dado que $z = re^{i\theta}$ el vector posición finalmente viene dado por:

$$\grave{z} = ze^{-i\varphi(t)}. \qquad (72)$$

De igual forma que para el caso Global, la posición es invariante bajo este tipo re calibraciones o trasformaciones gauge de forma local

$$\left\|ze^{-i\varphi}\right\| = \sqrt{(ze^{-i\varphi(t)})(ze^{i\varphi(t)})}, \qquad (73)$$

$$\|\grave{z}\| = \|z\|$$

Al caracterizar la velocidad del sistema, se deriva el vector posición con respecto al tiempo:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{d(ze^{-i\varphi(t)})}{dt}, \qquad (74)$$

de tal forma:

$$\frac{d\grave{z}}{dt} = \frac{dz}{dt}e^{-i\varphi(t)} - iz\frac{d\varphi}{dt}e^{-i\varphi(t)}$$

$$\frac{d\grave{z}}{dt} = \left(\frac{dz}{dt} - iz\frac{d\varphi}{dt}\right)e^{-i\varphi(t)}.$$

Al verificar la invariancia de la velocidad bajo trasformaciones en la posición de forma local, es evidente que dichas magnitudes no son las mismas, y por lo cual dicha invariancia no existe. Dicho problema en el rompimiento de la invariancia bajo trasformaciones locales es solucionado al considerar sustituir la derivada ordinaria por la derivada covariante (QUIGG,1997),de manera que una teoría gauge sea invariante con respecto a la fase y elevar la invariancia de forma local se debe eliminar el termino extra que rompe la invariancia, así que se debe considerar en sumar un término adicional a la derivada ordinaria, con el cual se anule el termino extra.

$$\frac{d}{dt} \xrightarrow{Pasa} D \equiv \frac{d}{dt} + [\quad] \qquad (76)$$

En términos generales el operador derivada Covariante (D), permite la generalización del concepto de derivada, en la medida que permite extender el cálculo diferencial sobre $\mathbb{R}^n$, es usado como un mecanismo que permite restaurar la invariancia en una teoría Gauge.

El termino extra, es usualmente llamado como conexión, para el presente análisis lo denotaremos como un factor constante "A", y será determinada por métodos algebraicos:

$$D \equiv \frac{d}{dt} + A \qquad (77)$$

de forma que al derivar Covariante $\grave{z} = ze^{-i\varphi(t)}$, es decir $D\grave{z}$, esta operación vendrá definida como:

$$D\grave{z} = \left(\frac{d}{dt} + A\right)z, \qquad (78)$$

de forma explícita:

$$D\grave{z} = \frac{d(ze^{-i\varphi(t)})}{dt} + Aze^{-i\varphi(t)}. \qquad (79)$$

Es así que la conexión o el termino extra que restaura la invariancia de la velocidad con respectos a trasformaciones gauge local está definida como:

$$D\grave{z} = \left(\frac{dz}{dt} - iz\left(\frac{d\varphi}{dt} - A\right)\right)e^{-i\varphi(t)},$$

$$A = i\frac{d\varphi}{dt} \qquad (80)$$

de esta forma el término extra que eleva la invariancia de la teoría esta descrito por cambios de la fase con respecto al tiempo, describiendo en términos formales una velocidad angular, adicionalmente el operador derivada covariante queda definido como:

$$D \equiv \frac{d}{dt} + i\frac{d\varphi}{dt}. \qquad (81)$$

El verificar la invariancia de la velocidad del sistema $(D\grave{z})$, vemos que esta permanece invariante con respecto a trasformaciones gauge locales,

$$D\grave{z} = \frac{dz}{dt} + i\omega(t)z \qquad (82)$$

De igual forma en búsqueda de la aceleración que experimenta el sistema, se utiliza nuevamente el operador derivada covariante, de forma que:

$$D\grave{v} = \left(\frac{d}{dt} + i\frac{d\varphi}{dt}\right)v, \qquad (83)$$

de forma explícita:

$$D\grave{v} = \left(\frac{d}{dt} + i\frac{d\varphi}{dt}\right)\left(\frac{dz}{dt} + i\omega(t)z\right), \qquad (84)$$

es decir, la aceleración del sistema es:

$$\grave{a} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dz}{dt} + i\omega(t)z\right) + i\frac{d\varphi}{dt}\left(\frac{dz}{dt} + i\omega(t)z\right), \qquad (85)$$

$$\dot{a} = \frac{d^2z}{dt^2} + iz\frac{d\omega(t)}{dt} + i\omega(t)\frac{dz}{dt} + i\frac{d\varphi}{dt}\frac{dz}{dt} + i^2\omega(t)z\frac{d\varphi}{dt},$$

de forma directa:

$$\dot{a} = (\ddot{z} - z(\dot{\varphi})^2) \; + \; \{i(\dot{z}\ddot{\varphi} + 2\dot{z}\dot{\varphi})\}, \qquad (86)$$

Al analizar cada uno de los términos de la aceleración, se pude caracterizar y comparar con los obtenidos en el capítulo I, por ejemplo el termino ($\ddot{z}$) se refiere a la aceleración centrifuga, El segundo término - $z(\dot{\varphi})^2$ es denominado la aceleración centrípeta, el termino $\dot{z}\dot{\varphi}$ es una aceleración trasversal, por último, el término $2\dot{z}\dot{\varphi}$ es la denominada aceleración de coriolis.

Es así que los efectos dinámicos se obtienen al considerar la masa del sistema

$$m\frac{d^2\dot{z}}{dt^2} = m\frac{d^2z}{dt^2} + imz\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2im\frac{d\varphi}{dt}\frac{dz}{dt} - zm\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \qquad (87)$$

Dichas interacciones se pueden caracterizadas por su componente en plano real y su componente en el plano complejo, de tal manera:

$$F = Re\ \left\{m\left(\frac{d^2z}{dt^2} - z\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right)\right\} + Im\ \left\{m\left(z\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\frac{d\varphi}{dt}\frac{dz}{dt}\right)\right\} \qquad (88)$$

$$F = \{m(\ddot{z} - z(\dot{\varphi})^2)\} + Im\,\{m(\dot{z}\ddot{\varphi} + 2\dot{z}\dot{\varphi})\} \qquad (89)$$

Al analizar cada término obtenido, se puede describir cada uno de los efectos dinámico, por ejemplo el primer termino $m\ddot{z}$, describe el termino inercial, , el segundo termino $-mz(\dot{\varphi})^2$, se refiere a la fuerza centrípeta,

En cambio el termino $m\dot{z}\dot{\varphi}$, es la fuerza transversal y finalmente el termino $2m\dot{z}\dot{\varphi}$, describe la fuerza coriolis.

3.2 Cuadro comparativo

Perspectiva Newtoniana	Perspectiva gauge
$\hat{r} = \hat{r}(\theta)$	$z = re^{-i\varphi}$
$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$	$v = \dot{z} + i\dot{\varphi}z$
$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta}$	$a = \ddot{z} + iz\ddot{\varphi} + 2i\dot{z}\dot{\varphi} - z(\varphi)^2$
$F = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta}$	$F = \{m(\ddot{z} - z(\dot{\varphi})^2)\} + Im\,\{m(\dot{z}\ddot{\varphi} + 2\dot{z}\dot{\varphi})\}$

Al analizar la dinámica de un sistema en rotación desde la perspectiva gauge, o usando proceminstos usuales para la construcción de la una teoría gauge, es posible describir los mismos efectos que se producen cuando se analiza desde la perspectiva newtoniana, de forma que se producen las mismas interacciones, (inerciales y ficticias).

.

Conclusiones

- **A lo largo de la historia la idea gauge ha sido es considerada como uno de los mayores descubrimientos del siglo XX, en la medida que ha posibilitado la construcción de las denominadas teorías gauge, modelos que intentan explicar las interacciones fundamentales, esto es posible en la medida que se considere la idea gauge, como forma de dar explicación a algunos fenómenos de la naturaleza haciendo uso de la idea de calibración de variables dinámicas, y por las cuales se puede describir el estado mecánico del sistema,**

- **Al analizar la dinámica de un sistema en rotación, usando procedimientos usuales a los de una teoría gauge, se obtienen los mismos efectos dinámicos estudiados desde la mecánica clásica, permitiendo a los estudiantes generar elementos para la compresión de las teorías gauge, igualmente este análisis pude ser considerado como una nueva forma de abordar los efectos dinámicos de los sistemas no inerciales en el aula, en la medida que describe de manera precisa y coherente la dinámica de un sistema en rotación**

- **Para lograr obtener los efectos dinámicos de los sistemas no inerciales bajo procedimientos análogos a los de una teoría gauge,**

es necesario remplazar la derivada ordinaria por una derivada de orden superior, o derivada covariante, esto se debe a que la derivada ordinaria no posibilita que el sistema sea invariante bajo trasformaciones gauge local, mientras que la derivada covariante restaura la invariancia agregando un factor adicional, permitiendo que las propiedades físicas de las ecuaciones sean invariantes bajo las trasformaciones gauge, adicionalmente se plantea el uso del plano complejo en la medida que dichas trasformaciones gauge se realicen en términos de la fase del sistema.

Referencias

[1] Asorey, M,(2002) Einstein y las Teorías de Campos Unificados, Departamento de Física Teórica Facultad de Ciencias Universidad de Zaragoza, Recuperado febrero de 2016 de http://upcommons.upc.edu/bitstream/handle/2099.2/279/279_Article.pdf

[2] AYALA, M. Mercedes, 2006" Los Análisis Histórico – Críticos y el re contextualización de saberes científicos, publicado en proposicoes Vol7n°1(49), Unicamp, Brasil.

[3] BUITRAGO Jesús,(2003) La Teoría de la Relatividad y las Teorías "Gauge, Curso Universitario Interdisciplinar "Sociedad, Ciencia, Tecnología y Matemáticas, recuperado en septiembre de 2015 en https://imarrero.webs.ull.es/sctm03.v2/modulo2/JBuitrago.pdf

[4] GRIFFIHS David J, (1987) "Introduction to Electrodynamics, 3ed, Prentice-Hall

[5] GUIDRY, Mike W. (1991) "Gauge field theories an introduction with applications" ,New York.

[6] HOOFT, G.T (1980) "Teorías Gauge de las fuerzas entre partículas elementales", libro de investigaciones y ciencia (Scientific American)

[7] HERMANN Weyl (1950) Space – Time - Matter, Dover publications Berlín.

[8] HERMANN Weyl (1918) Gravitation and electricity, Sitzungsber. Preuss, akad, Berlín.

[9] HERMANN Weyl (1993) Simetrías, Versión en español, S.A. MCGRAW-HILL

[10] KLEPPNER Y KOLENKOW (2010) An introduction to mechanics, Cambridge university press, Segunda Edición,

[11] LANDAU L.D, E.M. LIFSHITZ, (1973), Teoría clásica de los Campos, volumen 2 del Curso de física teórica, 2 Ed, Editorial Revete, S.A.

[12] RUPÉREZ, LOPEZ Francisco (1994) Mas allá de las partículas y ondas: una propuesta de inspiración científica, Centro de publicaciones del ministerio de educación y ciencia, Madrid

[13] LOCHLAINN O'Raifeartaigh, STRAUMANN Norbert (2000)

Reviews of Modern Physics, Vol. 72, No. 1, January recupedado en septiembre de 2015 en https://docs.google.com/file/d/0B0xb4crOvCgTY283SjctZklaRzA/view

[14] M. Maldacena, Juan (2014) The symmetry and simplicity of the laws of physics and the Higgs boson, Institute for Advanced Study, Princeton, NJ 08540, USA, recuperado en enero de 2016 en https://arxiv.org/pdf/1410.6753v2.pdf

[15] MIRAMONTES, Octavio y VOLKE,(2013) Karen, Fronteras de la física en el siglo XXI,Copit- arXives ISBN: 978-1-938128-03-5 ebook, pag 47- 55

[16] MUÑOZ, Ricardo M, (2012), Apuntes de Mecánica, departamento de Geofísica, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile

[17] QUIGG Chris (1997). Gauge Theories of the Strong, Weak, and Electromagnetic Interactions. Advanced Book Classics. Westview Press. ISBN 0-201-32832-1.

[18] I V.Saveliev, (1984). Libro curso de física general I de Saveliev, Capitulo IV, Sistemas No inerciales de Referencia, editorial Mir Moscú

[19] RODRIGUEZ, José (2008), Electromagnetismo Y Geometría, recuperado en enero de 2016 en https://arxiv.org/pdf/0806.1492.pdf

[20] TEJEIRO Juan M,(2004) Sobre la teoría especial de la relatividad, universidad nacional de Colombia, recuperado enero de 2015 en https://gnfisica.files.wordpress.com/2010/08/sobre_la_teoria_relatividadtejeiro.pdf , pág. 143 – 168

[21] Vélez, Fabio (2012). Apuntes de Relatividad, Universidad Pedagógica Nacional, sexta versión