

**APORTES DE OLIVER HEAVISIDE A LA TEORIA
ELECTROMAGNETICA DE MAXWELL Y A SU
ENSEÑANZA**

**EDWARD AUGUSTO MEZA LOZANO 2008146078
HÉCTOR CHAPARRO HERNÁNDEZ 2008146015**

**UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
BOGOTÁ
2015**

**APORTES DE OLIVER HEAVISIDE A LA TEORIA
ELECTROMAGNETICA DE MAXWELL Y A SU
ENSEÑANZA**

**EDWARD AUGUSTO MEZA LOZANO 2008146078
HÉCTOR CHAPARRO HERNÁNDEZ 2008146015**

MONOGRAFÍA

**DIRECTORA:
MARÍA MERCEDES AYALA MANRIQUE**

**UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
BOGOTÁ
2015**

Agradecimientos:

*Primeramente y sobre todas las cosas agradecemos a Dios que ha hecho posible la
Culminación del presente trabajo.*

*Agradezco infinitamente a mis padres (Dios los tenga en su gloria): Héctor Valerio
Chaparro Rincón, Ana Cecilia Hernández, por tan arduos esfuerzos que han hecho,
para que sea un ciudadano que aporta a la sociedad.*

*Agradezco a todos mis hermanos(a) que creyeron en mí y me apoyaron
incondicionalmente, en especial a mi hermana Banyi y mi sobrina querida Valentina.*

*Agradezco infinitamente a mi madre María Luz Mila Lozano que fue una persona
incondicional durante el largo trayecto de mi carrera, a mis hermanas: Claudia Mónica
Meza; Zoraya Liliana Meza y Sandra Viviana Meza y a mis amigos incondicionales
Héctor Chaparro Hernández; Diego Miguel Hernández; Harol Stif Cortez Villamil y a
la familia Neva*

*Agradecemos a la doctora: María Mercedes Ayala M. por su alto grado de compromiso,
Devoción y afecto que ha hecho posible escribir un sueño entre líneas, sin la cual no
hubiéramos avanzado en el intrincado laberinto de la ciencia electromagnética.*

*Personalmente agradezco a mi esposa: Diana Marcela Cipagauta S. por ser la mujer
incondicional y el bordón en los momentos más difíciles de mi vida.*

*Agradecemos a todo el equipo docente del departamento de física de la Universidad
Pedagógica Nacional por el arduo trabajo que ha hecho de nosotros, docentes críticos
en una sociedad cambiante.*

Nota de aceptación

Jurados del Trabajo de Grado

JUAN CARLOS O.
Prof. Dpto. Física

MAURICIO ROZO
Prof. Dpto. Física

RESUMEN ANALITICO EN EDUCACIÓN - RAE

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de grado
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento	Aportes del trabajo de Heaviside a la teoría electromagnética de Maxwell
Autor(es)	Chaparro Hernández, Héctor; Meza Lozano, Edward Augusto.
Director	Ayala Manrique, María Mercedes.
Publicación	Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional. 2015, 69 pág.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional
Palabras Claves	CUATERNIÓN, VECTORES, ÉTER, CAMPO ELECTROMAGNÉTICO, ACCIONA DISTANCIA, POTENCIALES, MAGNITUDES FUNDAMENTALES, ELECTRICIDAD, MAGNETISMO, ECUACIONES DE MAXWELL, RELACIÓN FÍSICO-MATEMÁTICA.

2. Descripción
<p>El presente trabajo fue desarrollado como un proceso investigativo el cual se adhiere a los intereses y enfoque de la línea de profundización <i>“Enseñanza de las ciencias desde una perspectiva cultural”</i>, especialmente en la sub-línea <i>“Análisis Histórico-crítico”</i> al considerar la relevancia de abordar los textos originales y recurrir a la historia de las ciencias con el fin de poder observar el contexto donde se construyen los diversos tipos de formalización y las problemáticas a las cuales éstas daban solución. De esta forma veremos que el trabajo en gran parte recurre a la interpretación y re-contextualización de varios textos de primer orden, como lo son: el de O. Heaviside <i>Electromagnetic Theory Vol.</i>, J.C. Maxwell <i>A Treatise Electricity And Magnetism Vol. II</i>, entre otros, y de segundo orden, el más relevante de W. Berkson <i>Las teorías de los campos de fuerza. Desde Faraday hasta Einstein</i>, muestran un panorama que da cuenta de cómo el desarrollo de la teoría electromagnética ha sido afectado por un conjunto de hechos tanto históricos como culturales.</p> <p>A partir de esto nace la propuesta APORTES DE OLIVER HEAVISIDE A LA TEORIA ELECTROMAGNETICA DE MAXWELL Y A SU ENSEÑANZA por lo cual la inquietud de notar y visibilizar el análisis de los aportes de Heaviside al electromagnetismo y algunos de los rasgos del el proceso de construcción del sistema conceptual y matemático que está a la base de la representación de los fenómenos electromagnéticos.</p>

3. Fuentes
<p>AYALA, M. (2006). <i>Los analisis historico criticos y la recontextualizacion de saberes científicos construyendo un nuevo espacio de posibilidades. Pro-posicioes</i> , 17 (1), 33.</p> <p>G.M. SIERRA, P. B. (2008). Una epistemología histórica del producto vectorial: Del cuaternión al análisis vectorial. <i>Latin-American Journal of Physics Education</i> , 2 (2).</p> <p>HEAVISIDE, O. (1893). <i>Electromagnetic theory vol I</i> (Primera edicion ed., Vol. 1). LONDRES: LONDON PUBLICATION.</p> <p>H. HERTZ (1990)., <i>Las Ondas Electromagnéticas</i> (págs. 54-58).</p> <p>MAXWELL, J. (1873). <i>A Treatise Electricity And Magnetism</i> (Vol. II). LONDON , INGLATERRA .</p>

HAMILTON, W. R. (1844). ON QUATERNIONS, OR ON A NEW SYSTEM OF IMAGINARIES IN ALGEBRA. (D. R. Wilkins, Ed.) *Philosophical Magazine* .

W. BERKSON (1985)., *Las teorías de los campos de fuerza. Desde Faraday hasta Einstein* (V. e. Seco, Trad., págs. 400). Madrir, España: Alianza.

MAXWELL, J. (1855). On Faraday's Lines of Force. Cambridge: Digitally enhanced and compiled from the repository of digital old.

MAXWELL, J. C. (1965). the Scientific Papers of James Clerk Maxwell . 2 . (J. C. Cruz, Trad.) New Cork : Niven

RAUTIO, J. C. (2008). ¿por qué costó 23 años para que se aceptara la teoría del electromagnetismo de Maxwell. *Microwave Journal* , 51 (7), 2.

4. Contenidos

Con el fin de presentar nuestra investigación con todo un soporte conceptual coherente, se ha presentado una serie de tópicos organizados en dos capítulos: El primer capítulo está dedicado a generar un contexto de significación de la obra de Heaviside especialmente a nivel de lo matemático. Así, en la segunda sección del primer capítulo se hace una ubicación de su trabajo, con la que es posible comenzar a captar su relevancia para el desarrollo del electromagnetismo y tener en cuenta sus aportes. En la tercera sesión del mismo, que es la central, se hace una aproximación al sistema de los cuaterniones buscando sentar unas primeras bases para entender la transición realizada del cuaternión al análisis vectorial y sus implicaciones geométricas.

En el segundo capítulo se presenta primero algunas consideraciones sobre la enseñanza del electromagnetismo donde se contrasta la visión de acción a distancia con la concepción de campos, mostrando la relevancia que adquiere el medio entre los cuerpos como fuente y sede de los procesos electromagnéticos. En la segunda sesión del capítulo II se presenta el modelo de éter de Maxwell y la relación que guarda con su teoría sobre el fenómeno electromagnético. En la tercera parte se presentan los aportes de Heaviside al electromagnetismo donde se logra resaltar lo más relevante de su teoría y el papel protagónico que jugó en la síntesis de las ecuaciones de Maxwell y en la transición del cuaternión al análisis vectorial.

5. Metodología

La presente investigación se desarrolló a partir de un análisis histórico crítico en torno al trabajo efectuado por Oliver Heaviside sobre la teoría electromagnética de Maxwell que escribe en su libro *Electromagnetic Theory vol. 1*. Para generar un contexto de significación de la obra de Heaviside se recurrió tanto a fuentes de primer orden o textos originales de este pensador y de otros pensadores de su época, a los cuales se les dio especial relevancia, como a fuentes de segundo orden, de las cuales se tomó como central la obra de W. Berkson. *Las teorías de los campos de fuerza. Desde Faraday hasta Einstein*. El proceso de documentación en donde se recopiló información pertinente se hizo una revisión de la misma fue el punto de partida de la investigación; pero se desarrolló igualmente en diferentes momentos de ésta, dependiendo de las preguntas formuladas por los investigadores. Las condiciones para la determinación de las magnitudes básicas del sistema teórico analizado y la interrelación entre los sistemas matemáticos y conceptuales en torno a los fenómenos electromagnéticos fueron constituyéndose en los ejes estructurantes de la indagación. La contrastación de las posturas de Maxwell y Heaviside y de sus formas de plantear y abordar la problemática del electromagnetismo así como la explicitación y discusión de nuestras inquietudes frente a los planteamientos y formas de proceder de estos pensadores en torno a estos fenómenos fueron

un motor para la investigación realizada. Después de un primer análisis de la introducción y segundo capítulo del volumen I de la *Electromagnetic Theory* de Oliver Heaviside, que permitió tener en cuenta aspectos relevantes de su versión del electromagnetismo y contrastarla con la comprensión que teníamos de esta teoría, se entró a analizar el contexto conceptual el sistema operativo desde el cual Maxwell planteo sus ecuaciones. Se hizo luego un estudio sobre los cuaterniones y su modo de operación. En el marco de estas ideas realizamos algunas consideraciones sobre la enseñanza del electromagnetismo integrando los diversos aspectos que nos pudieran brindar una propuesta interesante haciendo un énfasis especial en la relación físico-matemática en la explicación de los fenómenos electromagnéticos. Por último luego de tener a la mano esta serie de información se procedió a identificar los aportes de Heaviside a la Teoría Electromagnética de J.C. Maxwell.

6. Conclusiones

1. Con el desarrollo de la investigación se puede sacar como primera conclusión que la riqueza conceptual que se puede adquirir con el trabajo de documentos de primer orden es de gran relevancia para maestros en formación continua que le permite abordar los problemas de la física no desde un punto simplista de la historia como un desarrollo histórico en forma de anécdota sino de poder hilar y construir significados a problemáticas actuales pero fundamentadas en las razones de fondo que condujeron a la aparición de los diferentes sistemas de sistematización de la ciencia, en particular la física.
2. Por otra parte, si examinamos el lenguaje de los cuaterniones, propuestos por Hamilton y puestos al servicio de la física, nos encontramos con otra manera de comprensión de los fenómenos electromagnéticos, que no discrepa mucho de la actual, aunque no sea la manera más idónea, no se abandona tal sistema como lo mencionan O. Heaviside, J.C. Maxwell, entre otros, sino que al contrario se reestructura y se hace una interpretación física de los mismos para que estén en correspondencia con la conceptualización y experimentación de los fenómenos electromagnéticos, **dejándonos ver que tal maquinaria matemática debe ser reestructurada para que tenga sentido físico y no viceversa** (contrario a lo que se piensa, no se puede reestructurar un fenómeno físico para ajustarlo a la maquinaria matemática de que se disponga); es decir, para formalizar un fenómeno, hay que construirse o inventarse el andamiaje matemático que lo sustente, mirando diferentes posturas sobre el mundo físico, repensar la imagen de ciencia y abordar problemas epistemológicos espaciales (lo matemático y lo conceptual) y pedagógicos.
3. Los aportes de Heaviside son de gran relevancia tanto en sus conclusiones matemáticas como físicas. En primer lugar: sintetizó las 20 ecuaciones de Maxwell eliminando los potenciales _escalares y vectoriales_ de sus ecuaciones y reescribiéndolas en su sistema propio que denominó *análisis vectorial*, aunque no encontramos en ninguna página del libro *Teoría Electromagnética* de Heaviside un compendio de ecuaciones de las cuales escriba Heaviside “*son las que sintetizan el electromagnetismo de Maxwell*”, si encontramos algunas de las más relevantes que se relacionan a lo largo de todo el libro (págs. 35, 50, 52) y que de entrada en el capítulo II *las llama magnitudes fundamentales*

que describen el campo electromagnético, a saber, fuerza eléctrica y magnética que en contraste con Maxwell estas no son las magnitudes fundamentales sino las funciones potenciales de las cuales hace uso frecuentemente en el tratado de electricidad y magnetismo y de las cuales deriva las fuerzas: eléctrica y magnética.

4. Heaviside de manera ingeniosa sin recurrir a las funciones potenciales de Maxwell, encuentra una relación vectorial entre ellas que mide el flujo de energía de los campos (eléctrico y magnético) que hoy día se conoce como vector de Pointyng del cual la historia ha cometido un grave error puesto que se debería llamar vector de Heaviside-Pointyng.
5. La caracterización geométrica que hace Heaviside de las magnitudes básicas, de fuerzas como líneas y flujos como tubos así como la clasificación de los flujos en dos, los que involucran almacenamiento de energía y los que involucran su gasto, da un panorama claro del electromagnetismo dándole un significado preciso a cada magnitud utilizada para dar cuenta del fenómeno electromagnético, evidenciando su necesidad en el sistema teórico.
6. El examen del trabajo realizado por Heaviside nos ha permitido visibilizar cómo la obra de Maxwell ha sido afectada por un conjunto de hechos y transformaciones hasta llegar a la teoría electromagnética que en general hoy se conoce, lo cual nos ha posibilitado tener un mejor acercamiento a la actividad científica, transformando nuestra imagen de ciencia y generando una nueva perspectiva para nuestro actuar en el aula, que hará de *los procesos* y no de los resultados o productos científicos una forma de asumir la actividad cognitiva en el aula.

Elaborado por:	Chaparro Hernández, Héctor; Meza Lozano, Edward Augusto.
Revisado por:	Ayala Manrique, María Mercedes.

Fecha de elaboración del Resumen:	24	06	2015
--	----	----	------

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN GENERAL	10
-----------------------------------	----

CAPITULO I

LOS CUATERNIONES Y EL TRABAJO DE OLIVER HEAVISIDE

1. INTRODUCCIÓN	13
2. LA RECEPCIÓN DE LA TEORIA ELECTROMAGNÉTICA DE MAXWELL Y EL TRABAJO REALIZADO POR HEAVISIDE	14
3. TRANSICIÓN DEL CUATERNION AL VECTOR	18
3.1 Los Cuaterniones de Hamilton	20
3.2 ¿Qué son los cuaterniones?	22
3.3 Desarrollos de la teoría de los cuaterniones y el cálculo vectorial	25
3.4 Representación de las rotaciones en el espacio por medio de los cuaterniones	27
3.5 Conclusiones sobre las rotaciones a partir de cuaterniones	30

CAPITULO II

APORTES DEL TRABAJO DE HEAVISIDE A LA TEORÍA ELECTROMAGNÉTICA DE MAXWELL

1. INTRODUCCIÓN	32
2. ALGUNAS CONSIDERACIONES SOBRE LA ENSEÑANZA DEL ELECTROMAGNETISMO	33
2.1 Teoría de Acción a Distancia Vs. Teoría de Campos	36
3. SOBRE LA TEORÍA DEL CAMPO ELECTROMAGNÉTICO PROPUESTA POR MAXWELL	41
3.1 Un contexto necesario	
3.2 Magnitudes Físicas y el Modelo Mecánico del Éter Electromagnético propuesto por Maxwell	46
4. OLIVER HEAVISIDE Y LA TEORÍA ELECTROMAGNÉTICA DE J.C. MAXWELL	55
4.1 Consideraciones Iniciales	
4.2 Magnitudes Fundamentales de Heaviside para el Campo Electromagnético	56
Conclusiones	65
Bibliografía	68

INTRODUCCIÓN GENERAL

Se puede decir que el siglo XIX fue la época de la físico-matemática, fue una época de consolidación de la perspectiva abierta con especial énfasis en la mecánica desde el siglo anterior con los trabajos de Newton, Euler, D’Alambert, los Bernoulli, Lagrange, entre otros, donde la matematización de los fenómenos abordados por ellos era el rasgo predominante. Generar sistemas teóricos donde las propiedades físicas, sin importar a qué tipo de fenómeno se refirieran, lograran ser expresadas en términos de magnitudes cuyas relaciones dieran cuenta de las regularidades en los cambios que estos abarcaban; era el propósito que movilizaba los pensadores de esta época y que conminaba a que se buscara incluir en este enfoque campos fenoménicos como la electricidad, el calor, el magnetismo, la luz, que se habían desarrollado hasta el momento de manera muy independiente de la mecánica. Con las siguientes palabras Maxwell expresa muy claramente el enfoque que lo guiaba en su trabajo en torno al electromagnetismo, y no sólo a él sino también a O. Heaviside que busca mediante analogías, al igual que Maxwell, ligar fenómenos electromagnéticos a fenómenos mecánicos: *Así todas las ciencias matemáticas están basadas en relaciones entre las leyes físicas y las leyes de los números, de modo que **el ánimo de la ciencia exacta es reducir los problemas de la naturaleza a la determinación de cantidades por operaciones con números***¹.

Ubicados en este contexto, examinar los aportes de Heaviside nos lleva a mirar el proceso de interrelación, adecuación y construcción de los sistemas matemáticos y conceptuales sobre los fenómenos electromagnéticos, entendiendo que la construcción de dichos sistemas no es un hecho sino un proceso que se da en una relación dinámica, de doble vía.

Al contrario de lo que se cree usualmente, y como lo veremos, el sistema matemático no es condición previa del sistema conceptual del fenómeno electromagnético y viceversa. Precisamente la selección de magnitudes básicas

¹ J.C. Maxwell 1835-1836, *On Faraday’s Lines of Force*, pág. 155

para especificar el fenómeno electromagnético es uno de los aspectos centrales de nuestro trabajo de grado, que nos permite ilustrar este aspecto y nos lleva a contrastar el trabajo de Maxwell con el de Heaviside.

La selección de magnitudes básicas es un proceso complejo que implica el desarrollo de actividades de diversa índole. Históricamente con estilos y resultados diferentes, encontramos al menos tres pensadores que desde una perspectiva de campos están comprometidos en este propósito en el campo de electromagnetismo y donde los trabajos de unos fueron la base de los otros: primero, Faraday-con su enfoque teórico-experimental; luego, Maxwell quien considera la analogía como una forma de elaborar criterios para matematizar la organización y hallazgos logrados por Faraday en este campo fenoménico en términos de los desarrollos matemáticos de su época, y, encuentra en la elaboración de modelos mecánicos y en los esquemas conceptuales de la mecánica una fuente de inspiración para arrojar luces sobre dichos fenómenos, sus magnitudes básicas y relaciones entre ellas; por último, Heaviside retoma y explicita esquemas de organización de Maxwell con los que puede darle forma a los logros de Maxwell, seleccionando, depurando y dándole una forma simple a las relaciones en el electromagnetismo. Como lo veremos, la concepción de campos de fuerza adoptada por Heaviside se ajustó a las estructuras de geometrización del espacio ya establecidas por Maxwell por medio de las líneas de fuerza y tubos de flujo definidamente distribuidos en el espacio; teniendo en cuenta que este método de representación de la intensidad de una fuerza por la velocidad de un fluido en un tubo depende también de la materia en la medida que sustancias responden y producen efectos diferentes ante las acciones electromagnéticas².

Visibilizar, mediante el análisis de los aportes de Heaviside al electromagnetismo, algunos de los rasgos de este proceso de construcción del sistema matemático y conceptual que está a la base de la representación del fenómeno electromagnético, es también objeto del presente trabajo: La transición de los cuaterniones a los vectores, es un tema de hecho que se abre en el primer capítulo

² O. Heaviside 1893, *Electromagnetic Theory Vol. I*, pág. 20-21

y se clausura temporalmente en el segundo, dejando las puertas abiertas en un tema tan amplio para futuras investigaciones.

Mediante el análisis de la interpretación que Heaviside hace de las relaciones establecidas por Maxwell, al presentar las magnitudes que definen el campo electromagnético en el capítulo segundo del volumen I de su tratado sobre electromagnetismo; se examinan en el capítulo II del presente trabajo dichas relaciones y también se contrasta los dos esquemas organizativos de Maxwell: el éter rotacional planteado en su modelo de vórtices, con los tubos de inducción base de su propuesta de matematización de la perspectiva de Faraday; buscamos mostrar como el punto de vista de Heaviside hace visible la estrecha relación entre estos dos modelos los cuales, a nuestro parecer, el uno es complemento del otro, con lo cual encontraremos marcadas diferencias entre el número de ecuaciones planteadas por Maxwell en el tratado de electricidad y magnetismo y la reducción que hace Heaviside de dichas ecuaciones, al eliminar las funciones potenciales de la teoría electromagnética de Maxwell.

Se examinan también, al final del capítulo II la forma de presentación de las magnitudes que definen el campo, y sus relaciones, tanto de Maxwell como de Heaviside en dos lenguajes diferentes -cuaterniones y vectores- donde mostraremos ciertas discrepancias y similitudes entre estos dos lenguajes en los que se plasma las ecuaciones del electromagnetismo, donde expondremos algunos elementos del incipiente análisis vectorial que se estaba empezando a consolidar a finales del siglo XIX, del cual Heaviside es pionero y participe en la reestructuración e interpretación de los cuaterniones de Hamilton, el cual es puesto al servicio de la física en particular.

En síntesis mostrar los aportes de Oliver Heaviside nos ha implicado generar un contexto de significación de la obra de Heaviside especialmente a nivel de lo matemático y de lo físico, donde la interrelación entre los sistemas matemáticos y conceptuales base de la teorización del electromagnetismo que hoy conocemos se convirtió en el eje estructurante del trabajo que hemos realizado. Así, nos vimos compelidos a examinar en qué consistía el sistema de los cuaterniones y el

tránsito a los vectores, a profundizar mediante el diálogo establecido con los autores estudiados en la comprensión del fenómeno electromagnético desde una perspectiva de campos, rescatando con ello la importancia que puede tener el reconocer la concepción sobre el mundo físico que subyace a una teoría física cuando se trata de hacerla inteligible. El trabajo realizado nos ha llevado igualmente a repensar la imagen de ciencia que tenemos y que guía nuestra actividad pedagógica y abordar problemas epistemológicos especiales como lo es la relación entre lo matemático y lo conceptual; así como a ser más conscientes de las dificultades implicadas en la enseñanza del electromagnetismo.

Por último, queremos destacar que el examen del trabajo realizado por Heaviside nos ha permitido visibilizar cómo la obra de Maxwell ha sido afectada por un conjunto de hechos y transformaciones hasta llegar a la teoría electromagnética que en general hoy se conoce, lo cual nos ha posibilitado tener un mejor acercamiento a la actividad científica, transformando nuestra imagen de ciencia y generando una nueva perspectiva para nuestro actuar en el aula, que hará de *los procesos* una forma de asumir la actividad cognitiva en el aula.

CAPÍTULO I

LOS CUATERNIONES Y EL TRABAJO DE OLIVER HEAVISIDE

1. INTRODUCCIÓN

En el desarrollo del electromagnetismo las matemáticas jugaron un papel muy importante, fue necesario diseñar un sistema matemático que facilitara representar los hallazgos hechos alrededor del electromagnetismo planteado en la época tanto conceptual como experimentalmente; este sistema de análisis en un principio fueron los cuaterniones, que fueron diseñados para hacer una interpretación matemática del mundo real. De hecho Maxwell hace uso de este sistema matemático para representar su teoría del electromagnetismo; pero fue Oliver Heaviside, basado en el Tratado de Electricidad y Magnetismo de Maxwell y teniendo inicialmente como referencia el sistema de los cuaterniones, quien lo sintetiza en una estructura matemática propia de él que denomina en ese momento *análisis vectorial* y que formula con toda claridad las conocidas 4 ecuaciones de Maxwell que circulan en la actualidad en los textos de electromagnetismo.

En torno a los cuaterniones matemáticos y físicos de la época adoptaron diferentes posiciones; unos consideraban, que estos constituían un sistema matemático adecuado y otros, como Heaviside, consideraban, que no era lo suficiente como para realizarse con éste una interpretación física, en particular, cuando se trataba de representar la teoría electromagnética desarrollada hasta ese momento, teniéndolo como base.

Visibilizar, mediante el análisis de los aportes de Heaviside al electromagnetismo, algunos de los rasgos de este proceso de construcción del sistema matemático y conceptual que está a la base de la representación del fenómeno electromagnético es objeto del presente trabajo. Este primer capítulo está dedicado a generar un contexto de significación de la obra de Heaviside especialmente a nivel de lo matemático. Así, en la segunda sección del capítulo se hace una ubicación de su trabajo, con la que es posible comenzar a captar su relevancia para el desarrollo del

electromagnetismo y valorar su aporte. En la tercera, que es la central, se hace una aproximación al sistema de los cuaterniones buscando sentar unas primeras bases para entender la transición realizada con el paso de los cuaterniones a los vectores y sus implicaciones en la conceptualización del fenómeno electromagnético. Con este propósito se abordan las siguientes temáticas: los cuaterniones de Hamilton; ¿qué son los cuaterniones?; desarrollos de la teoría de los cuaterniones y el cálculo vectorial; representación de las rotaciones en el espacio por medio de los cuaterniones.

2. LA RECEPCIÓN DE LA TEORÍA ELECTROMAGNÉTICA DE MAXWELL Y EL TRABAJO REALIZADO POR HEAVISIDE

Al estudiar la teoría electromagnética clásica, un lugar común consiste en hablar del trabajo de Maxwell, compilado en sus cuatro ecuaciones vectoriales que resumen el electromagnetismo, pero lo que se desconoce es que esta notación es muy posterior a Maxwell como lo ratifica J.C. Rautio (2008) haciendo los siguientes cuestionamientos:

¿Por qué costó 23 años para que se aceptara la teoría del electromagnetismo de Maxwell?... ¿Qué es lo que “realmente” modelaban las 20 ecuaciones diferenciales de Maxwell? Recuerda que la notación actual (4 ecuaciones vectoriales) es muy posterior a Maxwell, quien escribió sus ecuaciones componente a componente y en su versión “breve” basada en los cuaterniones de Hamilton”. (Rautio, 2008 , págs. 1-2)

Es de gran importancia hacer notar que la notación actual de las ecuaciones de Maxwell como señala J.C. Rautio en su artículo no es propia de Maxwell sino que se debe a Oliver Heaviside:

El gran genio que revolucionó el electromagnetismo fue Oliver Heaviside. Un genio matemático en toda regla, que nunca fue a la universidad, y aprendió ciencia y matemáticas de forma autodidacta (leyendo libros de la biblioteca). Heaviside reescribió las ecuaciones de Maxwell en su forma moderna. Heaviside se “enamora” del tratado de Maxwell cuando cayó en sus manos “calentito” de la imprenta, en 1873... Heaviside encontró una nueva manera de expresar las ecuaciones de Maxwell, en solo 4 ecuaciones diferenciales para la divergencia y el rotacional de cuatro campos E, H, D y B. Los potenciales escalar (eléctrico) y vectorial (magnético) fueron relegados a un segundo plano por Heaviside. ¿Por qué no se llaman ecuaciones de Heaviside? El propio autor nos da la respuesta, ya que en su

publicación de las mismas afirma que estas “nuevas” ecuaciones deben llamarse “ecuaciones de Maxwell”³.

F.R. Villatoro (Francisco, 2009) dice que Heaviside decidió dedicar su vida a entender un libro, el “*Treatise On Electricity and Magnetism*, de Maxwell, abandonando un buen puesto de trabajo para dedicarse a investigar y estudiar un libro muy difícil de entender para un técnico. De modo que entre 1882 y 1887, Heaviside publicó una serie de artículos en los que aplicaba el cálculo vectorial a las ecuaciones de Maxwell. Según Villatoro, el cálculo vectorial permitía que cualquier ingeniero entendiera las extremadamente difíciles ideas de Maxwell, expuestas en sus 20 ecuaciones en derivadas parciales acopladas. Muchos le pidieron a Heaviside que escribiera un libro fácil sobre la teoría de Maxwell y él elaboró con este propósito “*Electromagnetic Theory*” cuyo primer volumen se publicó en 1893⁴. *Varias generaciones han aprendido las ecuaciones de Maxwell y sus aplicaciones gracias a este libro (evitando el leer la obra del propio Maxwell)*.

La actual notación vectorial de las ecuaciones de Maxwell se debe entonces al trabajo de Oliver Heaviside, quien estudiando el *Tratado de Electricidad y Magnetismo* de Maxwell lo sintetiza en una nueva estructura matemática propia de él, el *análisis vectorial* basada en vectores y no en cuaterniones.

Heaviside nació en 1850 en Camden Town, Londres- en el seno de una familia humilde; su padre Thomas Heaviside era un grabador de madera. Hasta los 16 o 17 años, cuando trabajó durante un tiempo de telegrafista, Heaviside recibió una educación corriente. En 1868 fue asignado al funcionamiento del nuevo cable submarino entre Newcastle y Dinamarca, donde trabajó hasta los 24 años; fue cuando conoció el trabajo de Maxwell, el cual lo impresionó por lo que se dedicó a comprenderlo. Las matemáticas que aprendió en la escuela llegaban solo hasta la trigonometría, pero hacia los 25 años había adquirido por su cuenta un nivel muy alto de matemáticas superiores. Pasó el resto de su vida sólo, dedicado por completo al desarrollo de la teoría electromagnética, huésped de una humilde pensión de un pueblo pequeño. Toda su obra fue recopilada en cinco volúmenes,

³ *Ibíd.* Pág. 2

⁴ Según Villatoro los otros dos volúmenes fueron publicados en 1899 y 1912

dos de ellos con el título de *Electrical Papers*, y los otros tres bajo el título de *Electromagnetic Theory*. Según W. Berkson (1985), Heaviside reunía todas las características de una persona excéntrica en el medio científico: sus obras eran difíciles de entender, no tenía una educación común, chocaba continuamente con el “establishment” científico, y era terrible y maravillosamente sarcástico con sus “enemigos”. Heaviside utilizaba una notación matemática propia, que él denominaba “análisis vectorial” y cuyo uso preconizó. Tal proyecto halló la fiera oposición de Tait, que a su vez había contribuido a desarrollar los cuaterniones, un sistema de tres ejes imaginarios que había introducido Hamilton, su maestro. Heaviside propuso su sistema argumentando que era más intuitivo y que funcionaba mejor que los cuaterniones. Respecto a su carácter y contribución al electromagnetismo, Berkson afirma:

Sería perfectamente posible escribir toda la historia de la teoría de campos (en cuanto relacionada con problemas metafísicos) sin hablar de Heaviside salvo unas notas de pie de página. La mayor parte de su obra sobre problemas metafísicos fue realizada simultáneamente por otros científicos que en algunos casos se le anticiparon; y la parte más importante de su trabajo es ajena al objetivo de este libro (resolvió problemas difíciles en la aplicación de las ecuaciones de Maxwell a la circuitería eléctrica, problemas importantes para la nascente tecnología eléctrica). No obstante, Heaviside es una personalidad harto interesante, y sus libros poseen un gran interés filosófico y literario. Probablemente jamás se escriba una biografía personal y científica suya, porque el grueso de su obra es extremadamente técnica y difícil. Heaviside nunca ocupó puestos académicos ni científicos, y siempre estuvo a la margen de la corriente dominante de la comunidad científica. La mayor parte de su trabajo se publicó en una revista llamada *Electrician*, dirigida, parece ser, a la pujante industria eléctrica, y no disponible en el continente. Tenía fama de persona excéntrica y su obra entrañaba una gran dificultad de comprensión. Hertz, que le escribía frecuentemente, le rogaba que hiciera sus artículos más accesibles, y lo mismo Lord Kelvin y Lord Rayleigh, que eran dos lince de la matemática. De entre los científicos de primera fila, los que conocían su obra le respetaban, y aprendieron mucho de él; pero en general nadie le leía. (Berkson, 1985, págs. 238-239)

Heaviside consideraba de gran importancia realizar un planteamiento adecuado y completo del fenómeno electromagnético; lo cual exigía, según él, sentar las bases matemáticas para poder representar el sistema físico, de modo que resulte satisfactorio tanto experimental como teóricamente.

A nuestro modo de ver es un verdadero problema que en los libros de texto de electromagnetismo no se haga referencia al trabajo realizado por Oliver Heaviside en la teoría electromagnética, ni se destaque el papel importante que jugó en la síntesis lograda de las ecuaciones de Maxwell así como la interpretación de las

mismas. Por un lado, su omisión no nos permite reflexionar sobre las magnitudes requeridas para caracterizar el fenómeno electromagnético. Ya se ha señalado como Heaviside de toda una serie de magnitudes introducidas por Maxwell escoge unas pocas para plantear sus ecuaciones que de hecho son las ecuaciones que hoy conocemos como las ecuaciones del electromagnetismo, reduciéndolas, como ya se ha dicho, de 20 a 4. Precisamente la selección de magnitudes básicas para especificar el fenómeno electromagnético a ser el aspecto central de nuestro trabajo de grado, que se presentara en el siguiente capítulo.

En este capítulo se busca aportar algunos elementos para entender: el significado del paso del cuaternión al vector, la importancia del producto vectorial como el concepto organizador, así como las diferentes transformaciones que han sentado las bases del cálculo vectorial hasta lo que es hoy en día.

Por otro lado, el examen del trabajo realizado por Heaviside puede permitir visibilizar cómo la obra de Maxwell ha sido afectada por un conjunto de hechos históricos, hasta llegar a la teoría electromagnética que en general hoy se conoce, lo cual nos posibilitaría tener un mejor acercamiento a la actividad científica, transformando nuestra imagen de ciencia y por ende nuestro actuar en el aula.

3. TRANSICIÓN DEL CUATERNION AL VECTOR

El plantear las bases matemáticas para poder representar un sistema físico y darle una orientación que resulte satisfactoria tanto desde el punto de vista experimental como matemático es de gran importancia para realizar un planteamiento adecuado y completo del fenómeno electromagnético que queramos analizar. Dado que Maxwell recurrió a los cuaterniones para representar su teoría del electromagnetismo, para nuestro estudio queremos primero ver el planteamiento que realizaron diferentes autores para hacer una transición de los cuaterniones al análisis vectorial y tomar el producto vectorial como un concepto organizador en el *sentido de que el producto vectorial, junto con el Análisis Vectorial, tiene por objetivo el de dotar de economía al sistema simbólico*

cartesiano y el de favorecer una percepción geométrica de los modelos matemáticos, (G.M. Sierra, 2008, pág. 1).⁵

En la mayoría de cursos introductorios de cálculo vectorial cuando se presenta la multiplicación entre dos vectores, el producto vectorial, ésta carece de sentido para la mayoría de los estudiantes. Los estudiantes, señala Sierra, *saben y pueden calcular las coordenadas del vector que resulte al efectuar el producto, pero la interpretación física o geométrica que subyace detrás de los cálculos no es percibida, lo que podemos decir que tal operación no se justifica ante el estudiante y lo que ve en ella es solo un algoritmo sin fundamentos reales*¹. Y cuando se pretende buscar su justificación, es válido preguntarse cosas como por ejemplo: por qué el producto de dos vectores que no son cero dan como resultado un vector cero (nulo), si lo que se ve en algebra elemental es que el producto de dos números diferentes de cero da como resultado un numero diferente de cero. O también ¿por qué el producto vectorial no es conmutativo, $AB \neq BA$, mientras que en el álgebra de los números reales el producto entre ellos es conmutativo? (i. e. $5 * 3 = 3 * 5$).

En este sentido lo que pretendemos mostrar en este análisis es la transición que ha tenido este concepto a lo largo de la historia destacando los momentos más importantes y álgidos en su construcción.

Los orígenes del producto vectorial están íntimamente relacionados, con la aparición del Análisis Vectorial. Ilustrada en la siguiente cita de M. Crowe:

Esta creación corresponde, por lo menos en sus inicios, al encuentro entre dos tradiciones matemáticas. La primera concierne la noción de número y cantidad y su desarrollo a través de la historia, desde los naturales a los irracionales transcendentales, pasando por la inclusión de los complejos y de los "hipercomplejos", así como de las operaciones algebraicas que permiten trabajar con esos números. La segunda consiste en la búsqueda de la representación de la realidad física por medio de conceptos matemáticos. (Crowe M. J., 1985).

⁵ EL análisis vectorial sólo se plantea en un período posterior al 1831, para las diferentes etapas de su construcción se realizaron diferentes transformaciones, las cuales han sentado las bases del cálculo vectorial que se conoce hoy en día, pero tres acontecimientos son de resaltar antes de su desarrollo, Estos tres acontecimientos son (1) el descubrimiento y representación geométrica de los números complejos, (2) Leibniz busca una geometría de posición, y (3) la idea de un paralelogramo de fuerzas o velocidades.. (Crowe M. J. 2002, pág. 2)

En términos de Jean-Luc Dorier (Dorier, 1997) el análisis vectorial nace de *una profunda reflexión dialéctica entre la intuición y el álgebra geométrica*.⁶

En el marco de lo expuesto anteriormente, el análisis histórico que vamos a desarrollar nos permite organizar la génesis del producto vectorial en dos momentos que históricamente corresponden: 1) al planteamiento de los cuaterniones por Hamilton, 2) Las críticas de ciertos autores a los cuaterniones. Para ello retomaremos los planteamientos de G. Sierra en *Una epistemología histórica del producto vectorial*.

3.1. Los Cuaterniones de Hamilton

William R. Hamilton (1805-1865), matemático irlandés, fue uno de los pioneros en trabajar con las representaciones geométricas de las cantidades complejas y es un personaje bastante interesante tanto por sus aportes en mecánica, matemáticas, astronomía entre otras, como por su temprano genio en lenguas orientales.

Como es bien sabido los números complejos tienen una parte real y una imaginaria, pueden considerarse que son pares de números reales que pueden dárseles una representación geométrica en el plano. Con el éxito que tiene esta representación, lo que busca Hamilton es extender este análisis al espacio tridimensional y poder así representar en cierta medida los fenómenos físicos mediante una geometría de tres dimensiones, *Hamilton busca una manera de modelar matemáticamente los fenómenos observados en el mundo tridimensional que sea más intuitiva que el análisis cartesiano...* (G.M. Sierra, pág. 3). El cuaternión –dice Sierra– nace indirectamente de la voluntad de una interpretación matemática del mundo real.

Hamilton tuvo que superar varios problemas con la multiplicación de números complejos, entre ellos, uno de los más importantes es que el producto ente dos

⁶ *une profonde réflexion dialectique entre intuition géométrique et calcul algébrique*

cantidades complejas no obedece el principio de conmutatividad, sino el de anti-conmutatividad; es decir que si tenemos dos cantidades complejas representadas por las letras p y q , y realizamos su producto $p * q$ es equivalente a menos $q * p$, en términos $p * q = -q * p$. Sobre este trabajo de Hamilton prosigue Sierra diciendo que *el resultado de su investigación es el cuaternión, objeto híbrido con una parte escalar y una parte vectorial geométricas. La presencia junta de estas dos partes dificulta considerablemente la interpretación de este número*⁷. Según Sierra, uno de los puntos débiles de esta teoría y el que va a recibir más críticas es que estas dos partes reunidas en un solo número no tienen significado físico en su totalidad, sino por separado ya que el producto cruzado y el no cruzado de la parte imaginaria del cuaternión, tienen una representación geométrica en el espacio tridimensional, mientras que la parte compleja, resultado del producto, no la tiene.

La forma actual que se conoce del producto entre dos vectores (*producto escalar y vectorial*) no es una mera intuición matemática, sino el resultado de la multiplicación entre dos números *cuadridimensionales* con parte escalar igual a cero que no admite una multiplicación conmutativa.

Hamilton hizo su primera publicación sobre los cuaterniones en 1833, con una presentación puramente matemática. En ésta establece una correspondencia entre números complejos y pares ordenados y realizó una interpretación de triplas de números complejos en el plano, dado que no pudo hacer su interpretación en tres dimensiones pero si con cuaternas de números complejos; (tres planos complejos). Así, en 1837 Hamilton escribe:

En la teoría de los números individuales, el símbolo $\sqrt{-1}$ es absurdo, y denota una extracción imposible, o un número meramente imaginario; pero en la teoría de las parejas, el mismo símbolo $\sqrt{-1}$ es significativo, y denota una posible extracción, o una pareja real, es decir, (...) la raíz cuadrada principal de la pareja (-1, 0). Por lo

⁷ Ibid.

tanto, (...) [sería válido] para cualquier pareja (a_1, a_2) lo que sea, $(a_1, a_2) = a_1 + a_2 \sqrt{-1}$
8. (Hamilton W. R., 1853, pág. 27)

Hamilton creó una estructura totalmente nueva en las matemáticas; escribió varios libros el último de los cuales fue *Elements of Quaternions*, publicado póstumamente en 1866. En 1844 Hamilton publicó su *Theory on quaternions* que alcanzó un gran éxito porque con él se abrió las puertas a la introducción de un "cálculo geométrico". La matemática del mundo se sorprendió por su audacia en la creación de un sistema de "números" que no cumplen la norma habitual conmutativa de la multiplicación $ab = ba$, aunque si otras propiedades de los números reales.

El producto de los números complejos se realiza con la propiedad distributiva; es precisamente el estudio de la multiplicación de los números complejos lo que le dio las bases a Hamilton para establecer el sistema de los cuaterniones; pero, fue su representación geométrica lo que le abrió un camino a Hamilton para poder establecer sus propiedades características, seis, las cuales se encuentran en el sistema de los números complejos ordinarios.⁹

3.2 ¿Qué son los cuaterniones?

Los cuaterniones se puede decir, entonces, son una extensión de los números complejos, con tres unidades imaginarias que pueden denotarse con las letras **i, j, k** las cuales se pueden escribir bajo la forma de un número *hipercomplejo*, el cual se puede representar como $q = a + ib + jc + kd$, en dónde $a, b, c, y d$ son números reales. Hamilton (Hamilton W. R., 1843). La expresión, contiene entonces, dos partes distintas: la primera parte a , llamada *real*, y la segunda parte $ib + jc +$

⁸ In the theory of single numbers, the symbol -1 is absurd, and denotes an impossible extraction, or a merely imaginary number; but in the theory of couples, the same symbol -1 is significant, and denotes a possible extraction, or a real couple, namely (...) the principal square root of the couple $(-1, 0)$. Therefore, (...) for any couple (a_1, a_2) whatever, $(a_1, a_2) = a_1 + a_2 \sqrt{-1}$

⁹ (1) es asociativa para la multiplicación y la división, (2) es conmutativa para la suma y multiplicación, (3) la propiedad es distributiva, (4) la propiedad de la división es inequívoca, (5) la propiedad de que los números obedecen a la ley modulativa, (6) la propiedad de ser útil para el análisis de tridimensional en el espacio. Los cuaterniones poseen todas las seis características, a excepción del hecho que ellos no son conmutativos para la multiplicación. (Crowe M. J., 2002, pág. 5)

kd , llamada *imaginaria*, que puede representarse en el espacio complejo \mathbb{C}^3 como un segmento con una dirección. Para Hamilton i, j, k son un sistema de tres cantidades imaginarias diferentes dirigidos a lo largo de los ejes x, y, z respectivamente. Esas unidades obedecen a las fórmulas fundamentales:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1; ij = -ji = k; jk = -kj = i; ik = -ki = j.$$

En términos de Hamilton:

Un cuaternión puede decirse que consiste generalmente de una parte real y un vector. Al poner especial atención a esta última parte o elemento de un cuaternión, al darle a ésta un nombre especial y denotarla en muchos cálculos por un signo único y especial, le parece al autor que se tiene un adelanto en el método de tratar este tema... Considerado desde un punto de vista geométrico esta parte imaginaria del cuaternión, algebraicamente hablando, tiene así un significado o representación tan simple y natural en el espacio que la dificultad es transferida a la parte real algebraicamente vista; y estamos tentados a preguntar que puede esta última denotar en geometría o qué en el espacio puede sugerir. (Hamilton W. R., 1847, págs. 1-16)¹⁰.

Hamilton sabe de antemano que la parte escalar no tiene representación física mientras que la parte imaginaria si la tiene y trata de buscar qué clase de representación podría tener esta parte escalar siendo infructuosa su investigación en darle sentido a esta parte.

Como ya se dijo, una de las críticas más relevantes que se le ha hecho a la teoría de los cuaterniones de Hamilton es la atribución de significado a dos cantidades diferentes contenidas en un mismo número, y tal es el punto débil de su teoría que Hamilton ve la necesidad de hacer una distinción entre las dos partes del número, explicando, más que justificando, el artificio de separar estas dos partes de las cuales solo una de ellas tiene significado físico, mientras la otra no lo tiene. Dice al respecto que *la separación de las partes real e imaginaria de un cuaternión es una operación de ocurrencia tan frecuente, que puede ser considerada como fundamental en esta*

¹⁰ *A quaternion may thus be said to consist generally of a real part and a vector. The fixing a special attention on this last part, or element, of a quaternion, by giving it a special name, and denoting it in many calculations by a single and special sign, appears to the author to have been an improvement in his method of dealing with the subject (...) Regarded from a geometrical point of view, this algebraically imaginary part of a quaternion has thus so natural and simple a signification or representation in space, that the difficulty is transferred to the algebraically real part; and we are tempted to ask what this last can denote in geometry or what in space might have suggested it.*

teoría ¹¹ (Hamilton W. R., 1844). Hamilton introduce la siguiente notación para designar un cuaternión:

$$Q = Sca.Q + Vect.Q = S.Q + V.Q = SQ + VQ.$$

Donde *Sca. Q* es la parte escalar del cuaternion Q y *Vect. Q* es la parte vectorial de éste. Propone en su libro *On quaternions* realizar una multiplicación completa entre dos cuaterniones *p* y *q* con parte escalar igual a cero; esto es, considerando $p = ai + bj + ck$ y $q = Ai + Bj + Ck$, y teniendo en cuenta las operaciones fundamentales, se puede mostrar que el cuaternión producto de dichos quaterniones es tal que la parte escalar del cuaternión es el inverso aditivo de lo que hoy conocemos como producto escalar o producto punto de dos vectores, y la parte imaginaria del cuaternión es el producto vectorial o producto cruz con el que se trabaja hoy en día¹² (con los que se expresan respectivamente magnitudes tales como trabajo de una fuerza, momento de una fuerza o momento magnético, etc.). De modo que:

$$Sca.p * q = -(Aa + Bb + Cc)$$

$$Vect.p * q = (bC - cB)\hat{i} + (cA - aC)\hat{j} + (aB - bA)\hat{k}$$

¹¹ ...the separation of the real and imaginary parts of a quaternion is an operation of such frequency occurrence, and may be regarded as so fundamental in this theory...

¹² Realicemos el producto de dos cuaterniones *p* y *q* con parte escalar igual a cero

$$p * q = (a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k})(A\hat{i} + B\hat{j} + C\hat{k})$$

Multiplicando componente a componente y aplicando las formulas principales:

$$\hat{i}^2 = \hat{j}^2 = \hat{k}^2 = -1; \hat{i}\hat{j} = -\hat{j}\hat{i} = \hat{k}; \hat{j}\hat{k} = -\hat{k}\hat{j} = \hat{i}; \hat{i}\hat{k} = -\hat{k}\hat{i} = \hat{j}.$$

Tenemos:

$$p * q = Aa(\hat{i} * \hat{i}) + Bb(\hat{j} * \hat{j}) + Cc(\hat{k} * \hat{k}) + Ab(\hat{i} * \hat{j}) + aC(\hat{i} * \hat{k}) + bA(\hat{j} * \hat{i}) + bC(\hat{j} * \hat{k}) + cA(\hat{k} * \hat{i}) + cB(\hat{k} * \hat{j})$$

$$p * q = -Aa - Bb - Cc + bC\hat{i} - cB\hat{i} + cA\hat{j} - aC\hat{j} + aB\hat{k} - bA\hat{k}$$

$$p * q = -(Aa + Bb + Cc) + (bC - cB)\hat{i} + (cA - aC)\hat{j} + (aB - bA)\hat{k}$$

*S.p * q* = $-(Aa + Bb + Cc)$ parte escalar del cuaternion

*V.p * q* = $(bC - cB)\hat{i} + (cA - aC)\hat{j} + (aB - bA)\hat{k}$ parte vectorial del cuaternión que representada en la forma actual es el resultado del producto cruz entre dos vectores.

$$\vec{P} \times \vec{Q} = \begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a & b & c \\ A & B & C \end{bmatrix} = (bC - cB)\hat{i} + (cA - aC)\hat{j} + (aB - bA)\hat{k}$$

3.3 Desarrollos de la teoría de los cuaterniones y el cálculo vectorial

Hamilton no fue el único en la creación de un sistema vectorial durante el periodo de 1843. De hecho, en ese período otros seis autores de cuatro países fueron desarrollando sistemas que eran más o menos de carácter vectorial. Los seis hombres fueron: Augusto Ferdinand Möbius, Giusto Bellavitis, Comte de Saint-Venant, Augustin Cauchy, Matthew Brien, y sobre todo Hermann Günther Grassmann. (Crowe M. J., 2002)

Uno de los grandes defensores de los cuaterniones fue el físico escocés G. Tait en su libro *Elementary treatise on quaternion* (P.G.Tait, 1890) buscó difundir el trabajo de Hamilton de una forma más clara; las operaciones de cuaterniones las realiza con sus operaciones elementales (adición, multiplicación escalar, diferenciación de vectores con respecto a una variables escalar) sin emplear su parte real; trabaja las propiedades de los cuaterniones, es claro que muchos de los elementos que hoy usamos en el cálculo vectorial están planteados en este libro. Tait plantea el alcance que pueden tener los cuaterniones para la física para ello citamos el siguiente párrafo de su libro:

Desde la aparición de la primera edición he conseguido (al menos parcialmente) efectuar la aplicación de Cuaterniones a líneas, superficies e integrales del volumen, como se producen en la Hidrocinética, la Electricidad, y Potenciales generalmente. Fui atraído primero al estudio de Cuaterniones por su promesa de la utilidad en tales aplicaciones, por lo que, aunque aún no he avanzado mucho en esta nueva vía, tengo lo suficiente para ver que es cierto que en un momento será de un valor incalculable a la física. He puesto todo lo necesario hacia el final del trabajo para poner al estudiante sobre esta vía, que va, yo esperare pronto seguirse a algún objetivo¹³. (P.G.Tait, 1890, pág. XV)

¹³ P.G.Tait, pág. XV: Since the appearance of the first edition I have managed (atleast partially) to effect the application of Quaternions to line, surface, and volume integrals, such as occur in Hydrokinetics, Electricity, and Potentials generally. I was first attracted to the study of Quaternions by their promise of usefulness in such applications, and, though I have not yet advanced far in this new track, I have got far enough to see that it is certain in time to be of incalculable value to physical science. I have given towards the end of the work all that is necessary to put the student on this track, which will, I hope, soon be followed to some purpose.

Por su parte, Si bien la posición que Oliver Heaviside tenía respecto a los cuaterniones era de oposición, él sabía que configuraban un sistema importante para el desarrollo de las matemáticas: *Un cuaternión (resultado de un producto entre dos cuaterniones con parte escalar cero) no es ni escalar, ni es un vector, pero es especie de combinación de ambos. Esto no tiene ninguna representación física, pero es un concepto matemático sumamente abstracto*". (Heaviside, 1893, pág. 136).

Otros matemáticos gradualmente habían asumido las posiciones de liderazgo. En el tercer período, alrededor de 1880, el sistema moderno de análisis vectorial nació por el trabajo de Josiah Willard Gibbs y Oliver Heaviside y hacia 1910 se había establecido como el sistema dominante, aunque no sin una lucha contra los sistemas hamiltonianos y Grassmannianos. Las figuras principales en este medio de período eran Peter Guthrie Tait, Benjamín Peirce, James Clerk Maxwell, y Guillermo Kingdon Clifford.

Gibbs descubrió los cuaterniones en el *Treatise of Electricity and Magnetism de Maxwell* (Maxwell, 1873) donde este autor expresa de manera explícita las críticas dirigidas al método de cálculo de los cuaterniones. *"Cuando las anotaciones de cuaterniones son muy utilizados, llegué a la convicción de que para dominar los temas, es necesario que comience a dominar los métodos. Al mismo tiempo he visto que aunque los métodos fueron llamados cuaterniones, la idea del cuaternion fue bastante extraño en el tema como instrumento de investigación geométrico*". (Crowe M. J., págs. 12-13) Gibbs en 1881 realiza su libro *Elements of Vector Analysis* (Gibbs, 1884), también desarrollo un cálculo simbólico separando las partes vectorial y escalar de los cuaterniones. A diferencia de Heaviside, no obstante, su claridad y rigor matemático llevo a dar un impulso a los métodos de Heaviside. En particular, por ejemplo, desarrollo la teoría del operador nabra, en su expresión actual, con todos sus matices: rotacional, divergencia, gradiente e identidades.

Heaviside va a desarrollar un sistema vectorial idéntico al que se utiliza hoy en día, excepto por su notación. A partir de 1882 se pronuncia a favor de un acercamiento a la física (en particular al electromagnetismo) bajo la forma de las cantidades

vectoriales y rechaza la teoría del cuaternión. En sus primeros escritos utiliza su cálculo vectorial sin realmente presentarlo. *De hecho, su introducción al vector se realiza por medio de la definición del rotacional*¹⁴, sin que sea necesario hablar de multiplicación de vectores. Por lo tanto, muchas de sus demostraciones quedan en forma cartesiana. Dice Sierra (pág. 207) que en 1885, Heaviside define los productos vectoriales, por medio de consideraciones físicas sobre la inducción y la fuerza eléctrica. Escribe $C = V\varepsilon E$, lo que conocemos como $C = \varepsilon \times E$. Al enterarse de los trabajos de Gibbs, Heaviside, si bien está de acuerdo con el enfoque vectorial propuesto, critica la notación utilizada por estimar la suya más sencilla. Heaviside será el primero en escribir las ecuaciones de Maxwell en la forma sintética con la cual se conocen hoy en día.

3.4 Representación de las rotaciones en el espacio por medio de los cuaterniones

Los cuaterniones que representan geométrica y algebraicamente rotaciones en tres dimensiones, como veremos más adelante, son los cuaterniones unitarios; es decir, aquellos que cumplen la propiedad de que el cuaternión por su conjugado es igual a la unidad, o en otras palabras, que el cuaternión conjugado es su inverso multiplicativo. Así, si q es un cuaternión unitario, su parte escalar hace referencia al ángulo de rotación y su parte vectorial al eje de rotación (Favieri, 2008, págs. 22-24). Entonces, una rotación alrededor de un vector unitario \hat{n} y en un ángulo θ puede pensarse como un cuaternión unitario, donde \hat{n} es la dirección del eje de rotación en el espacio tridimensional siendo $\hat{n} = ai + bj + ck$ cuya norma $|\hat{n}| = 1$ y θ el ángulo de rotación. Proponemos como solución para el cuaternión que representa la rotación en un ángulo θ alrededor de un eje \hat{n} , la siguiente: $q = \cos(\theta) + (ai + bj + ck)\text{sen}(\theta)$ (1)

Fácilmente se puede probar que este cuaternión solución que se supone representa la rotación, es un cuaternión unitario¹⁵.

¹⁴G.M. Sierra, 2008, pág. 207

¹⁵ Demostración: Dado que la norma de $|q| = \sqrt{q \cdot q^*} = \sqrt{\cos^2(\theta) + (a^2 + b^2 + c^2)\text{sen}^2(\theta)}$, y como podemos observar $(a^2 + b^2 + c^2) = 1$ ya que $|\hat{n}| = 1$; tenemos entonces que $|q| = \sqrt{\cos^2(\theta) + \text{sen}^2(\theta)} = 1$ es un cuaternión unitario.

Probemos ahora nuestra solución al rotar un punto en el espacio alrededor de un eje. Consideremos, para ello la rotación del punto $P(0,3,2)$ un ángulo de 90° alrededor del eje x , ($\vec{n} = i$). El cuaternión q que representa dicha rotación es:

$$q = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta = \cos 90^\circ + i \operatorname{sen} 90^\circ \quad (2)$$

$$\text{entonces } q = 0 + i \quad \text{luego } q = i \text{ y } \bar{q} = -i \quad (3)$$

La fórmula para la rotación de un punto alrededor de un eje está dada por¹⁶.

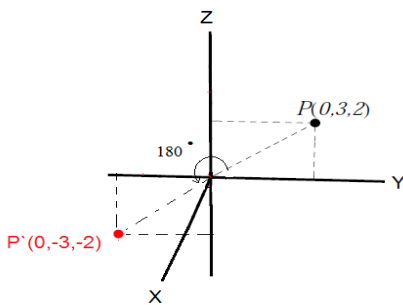
$$p' = q * p * \bar{q} \quad (4)$$

Realicemos el producto $q * p$ y llamemos su resultado h , de modo que

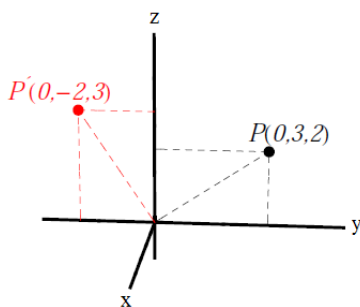
$$h = q * p = i * (3j + 2k) = 3(i * j) + 2(i * k) = 3k - 2j \quad (6)$$

$$\text{entonces } p' = h * \bar{q} = (3k - 2j) * (-i) = -3(k * i) + 2(j * i) = -3j - 2k \quad (7)$$

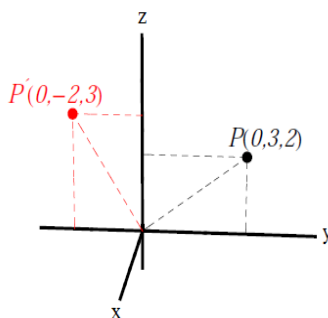
Luego la rotación le haría corresponder mediante la fórmula 4 al punto $p(0,3,2)$ el punto $p'(0, -3, -2)$.



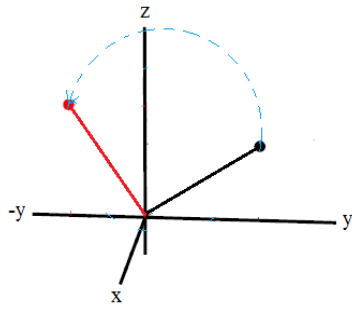
Es interesante hacer notar que al aplicar la rotación q (solución propuesta) sobre el punto p y volver aplicar la rotación conjugada \bar{q} (como lo plantea la ecuación (4) de rotación), el punto no rota 90° como era de esperar, sino que rota 180° lo cual es el doble de la rotación que buscábamos se efectuara.



Pero es más interesante aun el hecho de que al aplicar sólo la rotación q sobre el punto p sin tener que volver a aplicar la rotación conjugada \bar{q} , el punto rota 90° como lo podemos ver en la (ec.6) cuyas coordenadas corresponden a una rotación de 90° la cual buscábamos, y que representamos de manera geométrica en un plano de tres dimensiones.

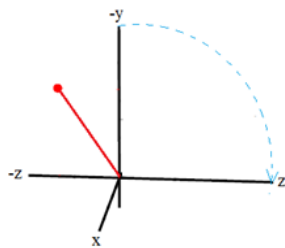


¹⁶ Véase Favieri Ibíd. Pág. 22



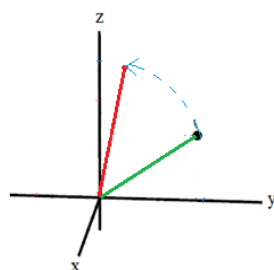
Teniendo en cuenta lo anterior podemos afirmar que si asumimos que el cuaternión q representa la rotación de 90° alrededor del eje x , $h = q * p = 3k - 2j$ corresponde al punto de coordenadas $h(0, -2, 3)$ que se obtiene al rotar el punto $p(0, 3, 2)$ 90° alrededor del eje x .

Cuando aplicamos la rotación q sobre el punto p lo que geoméricamente estamos haciendo es rotar el punto p alrededor del eje x en sentido anti-horario 90° como lo muestra la figura. Pero cuando realizado el producto $p * q$, aplicamos la rotación conjugada \bar{q} , $(p * q) * \bar{q}$, lo que rota ya no es el punto rotado sino el plano yz alrededor del eje x 90° en sentido horario, lo cual significa que z pasa a y y y pasa a $-z$ completando una rotación no de 90° que era la buscada, sino de 180° , que anteriormente se dijo era el doble de la esperada. Las coordenadas en el sistema rotado



A la luz de todas estas consideraciones podemos entender por qué diversos autores (Favieri A., M.J. Crowe., G.F. Castillo, entre otros) proponen como el cuaternión unitario que representan la rotación en un ángulo θ alrededor de un eje \vec{n} unido a la formula, $\cos \frac{\theta}{2} + i \text{sen} \frac{\theta}{2}$, que claramente el

propuesto por nosotros simplifica solucionar un tercer producto innecesario utilizando el cuaternión conjugado \bar{q} .



Tomemos como ejemplo una rotación del punto $p(0, 3, 2)$ 45° grados alrededor del eje x y apliquemos la rotación q sobre p , y al resultado de su producto volvamos de nuevo a aplicar la rotación q , que no sería sorpresa que las coordenadas del punto rotado fueran las mismas coordenadas del punto p ya

que en el primer producto $q * p$ el punto rota 45° en sentido anti-horario, y en el segundo producto $(q * p) * q$ el plano yz rota 45° en sentido anti-horario, tal que las coordenadas de p' coinciden con las coordenadas de p ¹⁷

¹⁷ Representación geométrica de la rotación del punto $p(0, 3, 2)$ 45° alrededor del eje x .

3.5 Conclusiones sobre las rotaciones a partir de cuaterniones:

- 1) La rotación está definida siempre respecto a un eje \vec{n} en el espacio siguiendo la regla de la mano derecha (positivo si el giro se hace en sentido anti-horario en cuyo caso el eje es considerado positivo y en sentido horario si el eje de rotación es negativo, en conclusión la rotación me da el sentido del eje)
- 2) La rotación debe ser expresada mediante un cuaternión unitario. Una forma canónica del cuaternión que representa una rotación en un ángulo θ alrededor de un eje arbitrario \vec{n} es: $q = \cos(\theta) + (ai + bj + ck)\text{sen}(\theta)$, siendo $(ai + bj + ck)$ el vector unitario que indica la dirección del eje de rotación.
- 3) Si q representa una rotación en sentido anti-horario o positivo, \bar{q} conjugado representa una rotación contraria, es decir en sentido horario ó negativo.
- 4) Si se quiere representar un punto del espacio mediante cuaterniones, este debe tener su parte escalar *nula*. La operación indicada por $q * p$ es entonces entre dos cuaterniones cuyo resultado es a su vez un cuaternión pero con parte escalar nula

$$q = \cos 45^\circ + i \sin 45^\circ$$

$$q = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$p = 0 + 0i + 3j + 2k$$

$$q * p = \left[\frac{3\sqrt{2}}{2}j + \frac{2\sqrt{2}}{2}k + \frac{3\sqrt{2}}{2}k - \frac{2\sqrt{2}}{2}j \right]$$

$$q * p = \left[\frac{3\sqrt{2}}{2}j - \frac{2\sqrt{2}}{2}j \right] + \left[\frac{2\sqrt{2}}{2}k + \frac{3\sqrt{2}}{2}k \right]$$

$$q * p = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}j + \frac{5\sqrt{2}}{2}k \right]$$

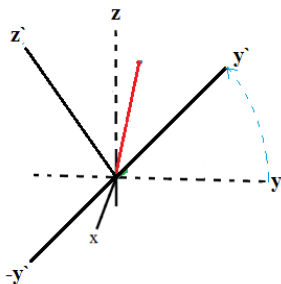
$$q * p * q = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}j + \frac{5\sqrt{2}}{2}k \right] * [3j + 2k]$$

$$q * p * q = \frac{1}{2}j + \frac{5}{2}k - \frac{1}{2}k + \frac{5}{2}j$$

$$q * p * q = \left[\frac{1}{2}j + \frac{5}{2}j \right] + \left[\frac{5}{2}k - \frac{1}{2}k \right]$$

$$q * p * q = 3j + 2k$$

Las coordenadas del punto p en el sistema no rotado son equivalentes (igual) a las coordenadas del punto h en el sistema rotado



que representaría a su vez un punto. como q representa una rotación entonces $q * p$ representaría el punto obtenido al rotarlo alrededor del eje, en el sentido y cantidad expresada por el cuaternión q .

5) $q * p \neq p * q$; en el contexto de las rotaciones tendría un significado doble: 1) que al aplicar q sobre p operando q a mano izquierda, implicaría una rotación del punto p , y q actuando sobre p a mano derecha implicaría una rotación contraria a la anterior.

2) q actuando sobre p a mano derecha podría también significar una rotación del plano perpendicular al eje de rotación que contiene al punto p en el sentido indicado por q , lo que es completamente compatible con lo que es especificado en 1.

CAPITULO II

APORTES DEL TRABAJO DE HEAVISIDE A LA TEORÍA ELECTROMAGNÉTICA DE MAXWELL

1. INTRODUCCIÓN

Como hemos señalado en el capítulo anterior, Heaviside, en su intento de encontrar una forma más adecuada de expresar las ecuaciones del electromagnetismo configura el análisis vectorial y encuentra una manera de reducir las múltiples ecuaciones que Maxwell presenta en su tratado sobre electromagnetismo a sólo 4 ecuaciones diferenciales parciales: dos para la divergencia de los campos \mathbf{D} y \mathbf{B} , y, dos para el rotacional de los campos \mathbf{E} y \mathbf{H} , relegando, como ya se ha dicho, a un segundo plano los potenciales escalar (eléctrico) y vectorial (magnético). Cómo fue esto posible y qué significa es una pregunta que pretendemos responder en el presente capítulo y con ello dimensionar los aportes de Heaviside. Más específicamente se puede decir que la determinación de los criterios a partir de los cuales se hizo posible la selección de las magnitudes básicas para especificar el fenómeno electromagnético es la problemática central de nuestro trabajo de grado y el eje de la presentación que hace en este capítulo. En aras a generar un contexto conceptual que permita interpretar y valorar adecuadamente el trabajo de Heaviside sobre electromagnetismo se presenta primero algunas consideraciones sobre la enseñanza del electromagnetismo donde se contrasta la visión de acción a distancia con la concepción de campos, mostrando la relevancia que adquiere el medio entre los cuerpos como fuente y sede de los procesos electromagnéticos. En la segunda sesión del capítulo II se presenta el modelo de éter de Maxwell y la relación que guarda con su teoría sobre el fenómeno electromagnético. En la

tercera parte se presentan los aportes de Heaviside al electromagnetismo donde se logra resaltar lo más relevante de su teoría y el papel protagónico que jugó en la síntesis de las ecuaciones de Maxwell y en la transición del cuaternión al análisis vectorial.

2. ALGUNAS CONSIDERACIONES SOBRE LA ENSEÑANZA DEL ELECTROMAGNETISMO

La mecánica newtoniana suele ser la teoría que se privilegia para comenzar a interactuar y comprender los fenómenos físicos en el ámbito escolar, posiblemente porque se piensa que es la teoría más sencilla y fácil de entender y que los fenómenos físicos a la luz de ésta se hacen más comprensibles y evidentes. Sin embargo cuando los estudiantes interactúan con el electromagnetismo esto no se cumple: no sólo los enunciados y formulaciones del nuevo sistema teórico resultan ser en su mayoría inesperados e incomprensibles, sino que no entienden a qué fenómenos hacen referencia.

Se acude a la mecánica partiendo del reconocimiento de la gran potencia que tiene el uso de los esquemas mecánicos para la explicación y comprensión de los fenómenos físicos en general, ya que los modelos explicativos que se usan para abordar los diferentes fenómenos de la física están basados en aquellos elaborados en la mecánica, es más, en muchos casos se asume que un problema está comprendido cuando de él se puede hacer una explicación mecánica. En este sentido el uso de la mecánica aporta una gran riqueza de elementos para la comprensión de los diversos fenómenos físicos” (CASTILLO, 2006, pág. 2)

En este orden de ideas es relevante destacar las diferencias y semejanzas en las maneras como Maxwell y Heaviside hacen uso del pensamiento mecanicista en la conceptualización y teorización de los fenómenos electromagnéticos. Algunos de sus rasgos los mostraremos con algún detenimiento más adelante en este capítulo. Pero, a manera de ilustración y para enfatizar la fuerte relación mecánica-electromagnetismo, queremos retomar aquí un párrafo escrito por Heaviside en la introducción de su libro *Electromagnetic Theory Vol. I* (pág. 20) en el cual nos dice:

Nuestro conocimiento primario de electricidad, en su aspecto cuantitativo, está fundado sobre la observación de las fuerzas mecánicas experimentadas por un cuerpo eléctricamente cargado, por un cuerpo magnetizado, y por un cuerpo que soporta una corriente eléctrica. En el estudio de estas fuerzas mecánicas somos conducidos a las ideas más abstractas de fuerza eléctrica y la fuerza magnética,

aparte de la electrificación, o la magnetización, o la corriente eléctrica, para trabajar sobre y producir efectos visibles.¹⁸

Si bien lo mecánico es una referencia clave en la constitución del fenómeno electromagnético, esta relación no es obvia y amerita ser estudiada. En términos generales al comenzar un curso introductorio de electricidad y magnetismo nos encontramos con un problema fundamental: no se establece una distinción entre los planteamientos conceptuales que subyacen a las diferentes propuestas teóricas que se concatenan formalmente para presentar el fenómeno. Así pues no se hace una distinción cuando se habla de la ley de Coulomb y la ley de Gauss como puede verse en los libros de texto universitarios como: Paul Hewitt, *Física Conceptual*; Raymond Serway, *Física Vol. II*; Sears-Zemansky, *Física Universitaria Vol. II*, Resnick-Halliday *Física Vol. II*. En ellos se mezclan indistintamente estas dos teorías confundiendo aún más las perspectivas conceptuales que están a la base de cada una de ellas. Mientras que en la ley de Coulomb la fuerza entre dos cargas puntuales se basa en la perspectiva de acción directa a distancia, el planteamiento de la ley de Gauss supone la introducción de nuevos conceptos: intensidad de campo eléctrico y flujo del campo eléctrico a través de una superficie que encierra cuerpos electrificados; por este hecho se suele considerar que dicha ley ubica en la perspectiva de campos¹⁹. Al confundir las perspectivas de las explicaciones que demandan cada una de las teorías, se genera un obstáculo epistemológico²⁰ para la enseñanza y aprendizaje del electromagnetismo dado que *cada teoría implica sus propios conceptos* (BACHELARD, 1948). Así en la ley de Coulomb, la fuerza reside en las cargas y estas accionan en dirección del radio-vector que une sus centros; la carga a la vez que actúa sobre la otra carga, experimenta la acción de ésta; la acción de una supone la

¹⁸ "Our primary knowledge of electricity, in its quantitative aspect, is founded upon the observation of the mechanical forces experienced by an electrically charged body, by a magnetized body, and by a body supporting electric current. In the study of these mechanical forces we are led to the more abstract ideas of electric force and magnetic force, apart from electrification, or magnetization, or electric current, to work upon and produce visible effects".

¹⁹ Y ello se suele decir porque se trabaja con el concepto de intensidad de campo eléctrico que de alguna forma caracteriza el espacio entre los cuerpos que experimentan la acción mecánica; aunque estrictamente hablando, como se verá más adelante, cuando retomemos el análisis que hace Hertz sobre esta concepción, la perspectiva gaussiana más que en una perspectiva de campos se inscribe en una teoría del potencial que no es más que una variación de la concepción de acción directa a distancia.

²⁰ *Ibíd.* Pág. 15 según Bachelard es en el acto mismo de conocer...donde aparecen los *entorpecimientos* y *confusiones* ya sean por un hecho mal interpretado por una época o un concepto fuera de una teoría que dificulta la comprensión.

presencia de la otra que la experimenta y viceversa. Mientras que en la ley de Gauss, al estar esta ley inscrita en la teoría del potencial²¹, la carga es fuente del campo que la rodea; la presencia de este campo en un punto del espacio se exhibe mediante la fuerza que experimenta una carga puntual ubicada en dicho punto. Vistas así las cosas, la fuerza eléctrica o magnética según Hertz sigue residiendo aun en los cuerpos los cuales son origen y sede de la fuerza que producen alrededor de su entorno con una determinada intensidad en cada punto del espacio; el espacio no es modificado, sino solo un mero recurso para explicar la acción (ya sea de atracción o repulsión) en diferentes puntos alrededor de un cuerpo; y en este sentido tan particular no es estrictamente una teoría de campos, como veremos más adelante; el campo visto así no es sino un ente matemático útil para el cálculo de la fuerza sobre una carga prueba ubicada en un punto dado.

Tal como lo señala Hertz en el texto que se presenta en la siguiente sección dos perspectivas diferentes permiten examinar los efectos mecánicos involucrados en el fenómeno electromagnético: 1) la perspectiva de acción directa a distancia e instantánea entre los cuerpos que actúan, y la perspectiva de acción contigua o del medio interpuesto entre los dos cuerpos que interactúan los cuales hacen parte del medio, conocida como perspectiva de campos. Al respecto, de manera más explícita, M. M. Ayala plantea:

En el electromagnetismo, por su parte, es posible distinguir dos perspectivas de análisis de los fenómenos que no sólo son diferentes sino opuestas. En una, la acción entre los cuerpos es interpretada como una acción directa y a distancia; todo cambio se atribuye a los cuerpos y cualquier referencia al espacio sólo se hace para definir su disposición espacial. En la otra Perspectiva, la acción entre cuerpos que es percibida por los sentidos es atribuida al estado en que se encuentra el medio en el cual están inmersos (o mejor aún, del cual hacen parte); el estado del medio (o si se quiere, del espacio) y sus cambios es, ahora, el objeto de análisis. Usualmente la distinción entre estas dos perspectivas es omitida, y se pasa de una perspectiva a la otra sin hacerlo explícito, produciendo imágenes contradictorias y toda una serie de

²¹La teoría de Newton de la acción a distancia entre dos cuerpos fue desarrollada por varios científicos a lo largo del siglo XVIII, entre los cuales figuran Karl Friedrich Gauss y Pierre Simón Laplace, entre otros, los cuales desarrollaron matemáticamente la teoría Newtoniana elaborando la idea matemática de campos; es decir de una función del espacio según la cual a cada punto del espacio se le asigna un valor, lo que era utilizado como mero recurso matemático para calcular la fuerza ejercida por una distribución de partículas sobre un partícula de prueba ubicada en un punto arbitrario del espacio. Se partía del supuesto de que sólo había fuerzas en puntos del espacio donde había materia; al fin de cuentas se consideraba que la fuerza era producto de la interacción entre partículas materiales, debido a su masa gravitacional. En cambio, las teorías de campos sostenían que los campos de fuerza, existían aún en el vacío, donde no hay materia.

dificultades al tratar de comprender las diversas afirmaciones que se hacen sobre los fenómenos electromagnéticos (Ayala M. , 2006) .

Pareciera que lo importante en gran parte de los libros de texto fuera ofrecer un manual que haga posible solucionar un compilado de ejercicios de cierto tipo, en la mayoría de los casos sin mayor sentido para los estudiantes, omitiendo el preguntarse por la concepción del mundo desde la cual han sido elaboradas dichas teorías y sin presentarse los hechos históricos y culturales que han afectado la teoría electromagnética que se intenta presentar.

Si no se tiene en cuenta la concepción de mundo en la que se inscribe la teoría enseñada y no se profundiza en las razones para introducir las magnitudes físicas involucradas en la presentación del fenómeno y de esta forma no se muestra la relación de las mismas con la cosmovisión adoptada, difícilmente podrá el estudiante comprender aquello que se le enseña y dar cuenta del fenómeno, y muy seguramente se propiciará una imagen equivocada y muy distorsionada del asunto en cuestión.

2.1 Teoría de Acción a Distancia Vs. Teoría de Campos

Como anteriormente se ha planteado la atracción y repulsión manifiestas en los fenómenos eléctricos y magnéticos se pueden interpretar desde dos perspectivas principales. Según Castillo J.C.²² en una, dichas acciones (atracción o repulsión) son asumidas como acciones directas y a distancia; en esta perspectiva los cuerpos son considerados fuentes de dichas acciones; estas fuentes (cuerpos) y sus cambios son los objetos de análisis. A pesar de los matices que se pueden encontrar en esta perspectiva, ésta tiene su expresión más elaborada en la *Teoría del Potencial*, que más adelante expone Hertz en sus cuatro puntos de vista acerca de las dos perspectivas básicas del electromagnetismo (teoría de acción a distancia y teoría de campos). Si bien con esta *teoría del potencial* es posible determinar la ley de acción entre cuerpos electrificados o magnetizados, resulta insuficiente para dar cuenta de fenómenos electrodinámicos como son las ondas electromagnéticas.

²² Sobre la relación Mecánica Electromagnetismo (*De los Fenómenos Mecánicos al Mecanicismo*, Pre-impreso).

En la otra perspectiva, la perspectiva de campos, el objeto de análisis es el espacio del cual los “cuerpos²³” hacen parte (Berkson pág. 75); precisamente es el espacio lo que hace posible las acciones entre los cuerpos, es la causa y sede de las acciones; de ahí la importancia de poder caracterizarlo.

Cabe aclarar nuevamente que se puede hacer una distinción un poco más detallada ya que estas dos perspectivas presentan ciertos matices a la hora de hacer una explicación de los fenómenos electromagnéticos. La siguiente cita de Hertz resulta ser muy ilustrativa al respecto.

Al ver que los cuerpos actúan unos sobre los otros a distancia, podemos formarnos diversas concepciones de la naturaleza de esta acción. Podemos considerar el influjo como una fuerza a distancia que salta por el espacio o bien podemos verla como la consecuencia de una acción que se propaga de punto a punto en un medio hipotético. Al aplicar estas concepciones a la electricidad, podemos hacer una serie de distinciones más finas. Al pasar desde la pura concepción de acción a distancia inmediata a la pura concepción mediata, podemos distinguir cuatro puntos de vista.

Desde el primer punto de vista, consideramos la atracción de dos cuerpos como una especie de afinidad espiritual entre ambos. La fuerza que cada uno ejerce está ligada a la existencia del otro cuerpo y para que simplemente exista una fuerza deben existir al menos dos cuerpos interactuando.

En otras, palabras, para pensar en atracción o repulsión es necesario pensar en dos cuerpos que simultáneamente se atraen, a la vez que los dos ejercen la atracción, la padecen (son atraídos). Causa (ejercer la atracción) y efecto (padecer la atracción) no son separables ni espacial ni temporalmente...

Desde el segundo punto de vista, aunque concedemos que sólo podemos observar esa acción a distancia cuando tenemos al menos dos cuerpos, admitimos sin embargo que uno sólo de los cuerpos en interacción tiene constantemente la tendencia a producir en cada punto de su entorno atracciones de una determinada intensidad y dirección no admitimos en el lugar de la actividad una cierta modificación del espacio, en virtud de la cual podríamos designar este lugar no como sede de la fuerza, sino que el cuerpo actuante sigue siendo a la vez sede y origen de la fuerza...²⁴

El tercer punto de vista mantiene las concepciones del segundo, pero les añade una complicación. Admite que las fuerzas a distancia inmediatas no determinan por sí solas la acción entre cuerpos separados. Admite más bien que las fuerzas producen modificaciones en el espacio, que se imagina lleno por todas partes, las cuales

²³ Faraday creía que las partículas son lugares donde las fuerzas convergen en un punto, en lugar de considerarlas como puntos materiales con fuerzas asociadas...sabemos que los cuerpos actúan unos sobre otros, pero si los cuerpos no son sino sistemas de fuerzas, entonces las fuerzas deben actuar entre sí. Es más, las fuerzas no son sino caras de la misma moneda, lo que significa que una clase de fuerza puede convertirse en otra asumiendo la convertibilidad de las fuerzas, que no actúan a distancia sino sobre otras fuerzas contiguas. Esta hipótesis lleva a admitir la idea de un mar de fuerzas.

²⁴ Este punto de vista viene a ser el punto de vista de la teoría del potencial.

ocasionan a su vez fuerzas a distancia. **Las atracciones entre cuerpos separados se deben pues, en parte a la acción a distancia inmediata entre ellos, y en parte al influjo del medio modificado**²⁵. La modificación misma del medio se imagina como una polarización eléctrica o magnética de sus partes más pequeñas bajo el influjo de la fuerza actuante.²⁶ En relación a los fenómenos estáticos este punto de vista ha sido desarrollado por Poisson para el magnetismo, y transferido por Mosotti a los fenómenos eléctricos; en su desarrollo más general y generalizado a todo dominio del electromagnetismo, se encuentra defendido en la teoría de Helmholtz...

El cuarto punto de vista corresponde a la mera concepción de acción mediata. Concedemos desde este punto de vista que las modificaciones del espacio admitidas desde el tercer punto de vista existen de hecho, y que ellas son las mediadoras del influjo que los cuerpos ponderables ejercen unos sobre los otros. **Pero negamos que estas polarizaciones sean consecuencias de fuerzas a distancia, y negamos la existencia misma de estas fuerzas a distancia; incluso eliminamos las electricidades de las que deberían partir esas fuerzas.** Consideramos más bien ahora aquellas polarizaciones como lo único que realmente existe; ellas son tanto la causa de los movimientos de los cuerpos ponderables, como de los demás fenómenos que nos hacen ver estos cuerpos como modificados. (Hertz H. , 1990, págs. 54-58)²⁷

En los cuatro puntos de vista anteriores que expone Hertz, es relevante hacer notar las marcadas diferencias que sutilmente distinguen un planteamiento del otro y que se suelen mezclar en los textos. Podemos ver como en la teoría electromagnética desde la perspectiva de los medios continuos, de acción mediata, el cuerpo ponderable queda relegado a ser parte del medio y las acciones que se hagan sobre dicho medio se propagaran de manera contigua por todo el espacio.

En este sentido, al estudiar la teoría electromagnética de Maxwell en su *Tratado de Electricidad y Magnetismo*, en el *Tratado Elemental de Electricidad* y en otros de sus escritos, y al examinar los aportes que hace a ésta Oliver Heaviside en su libro *Electromagnetic Theory vol. I*, es posible darse cuenta que para ambos autores un punto fundamental de partida es la perspectiva de *campos en sentido estricto* (el cuarto punto de vista planteado por Hertz); perspectiva que les exige caracterizar el estado del *medio*²⁸ donde se dan los fenómenos electromagnéticos. Es así como

²⁵ La negrilla es nuestra.

²⁶ Esta es la visión que se suele introducir al hablar de las propiedades eléctricas y magnéticas de la materia.

²⁷ Los destacados son nuestros.

²⁸ Para Faraday el medio o espacio, es el origen y sede de las fuerzas que no se encuentran en los cuerpos ni tampoco estas fuerzas confluyen en cuerpos materiales sino que estos a los que llamamos cuerpos no son cuerpos, sino puntos donde confluyen las fuerzas que dan cuenta de los diferentes fenómenos, ya sean electromagnéticos, gravitacionales, químicos, etc.

tanto Maxwell como Heaviside consideran que el *espacio ó medio* entre los cuerpos electrizados o magnetizados es la sede de la energía electromagnética y de su propagación y no propiamente de los cuerpos. Como lo mostraremos en las secciones siguientes, para describirlo, los dos científicos de diferentes maneras y con supuestos distintos, introducen magnitudes como lo son la *fuerza eléctrica y magnética*, [Heaviside] o *intensidad del campo eléctrico y magnético* [Maxwell] y sus magnitudes correspondientes, desplazamiento eléctrico e inducción magnética [Maxwell] o flujos eléctricos y magnéticos, [Heaviside], con las cuales queda descrito el campo electromagnético o el estado del espacio. Heaviside, en el prefacio de su tratado, *Electromagnetic Theory vol. I*, cita la manera como tratará los fenómenos electromagnéticos, señalando las funciones potenciales usadas por Maxwell para la formalización y matematización de la perspectiva de Faraday de dichos fenómenos como un obstáculo para darles una buena interpretación. Refiriéndose en particular al segundo capítulo dice:

El capítulo segundo... consiste en un esquema de los fundamentos de la teoría electromagnética desde el punto de vista de Faraday-Maxwell, con algunas pequeñas modificaciones y extensiones de las ecuaciones de Maxwell. Esta hecho en términos de mis unidades racionales, que proporcionan la única manera de llevar a cabo la idea de líneas y tubos de fuerza de manera coherente e inteligible. También se lleva a cabo principalmente en términos de vectores, por la razón suficiente que los vectores son el tema principal de la investigación. También se realiza en la forma de duplas que introduje en 1885, con la que los lados eléctrico y magnético del electromagnetismo se exhiben de forma simétrica y conectada, a la vez que las "fuerzas" y "flujos" son objeto de una atención inmediata, en lugar de las funciones potenciales que son poderosas ayudas para oscurecer y complicar el tema y ocultar a veces útiles e importantes relaciones.²⁹ (Heaviside, 1893, págs. IV-V)

Es importante destacar aquí también como desde las teorías de campos se considera que las acciones de un cuerpo sobre otro requieren para su transmisión o propagación un cierto tiempo, mientras que desde las teorías de acción directa a distancia se considera que la acción es instantánea. Los teóricos partidarios de los

²⁹ "The second chapter... consists of an outline scheme of the fundamentals of electromagnetic theory from the Faraday-Maxwell point of view, with some small modifications and extensions upon Maxwell's equations. It is done in terms of my rational units, which furnish the only way of carrying out the idea of lines and tubes of force in a consistent and intelligible manner. It is also done mainly in terms of vectors, for the sufficient reason that vectors are the main subject of investigation. It is also done in the duplex form I introduced in 1885, whereby the electric and magnetic sides of electromagnetism are symmetrically exhibited and connected, whilst the "forces" and "fluxes" are the objects of immediate attention, instead of the potential functions which are such powerful aids to obscuring and complicating the subject, and hiding from view useful and sometimes important relations".

campos veían en la finitud del tiempo de propagación de una acción una prueba evidente de que los campos existen en lugares donde no hay materia. La velocidad finita de propagación de los efectos de un cuerpo sobre otro distante es también una característica diferenciadora entre la teoría de campos de predecesores de Maxwell y Heaviside, como Faraday³⁰, y la teoría de acción a distancia pos newtoniana, como la que está implícita en la teoría del potencial³¹.

Desde la teoría de acción a distancia, la explicación de la propagación de la luz fue un reto no solo para la teoría corpuscular de la luz de Newton desarrollada en su Óptica, sino para toda su concepción de mundo como lo señala W. Berkson:

...si la luz viaja de un planeta a otro, debería haber entre ellos algún medio (el éter luminífero) que transportara las ondas luminosas. Además, si el éter existiera... entonces se podría suponer que el éter transporta también la acción gravitatoria, la cual va en contra de la visión Newtoniana del mundo. (Berkson, pág. 52)

A diferencia de otros científicos de su época, Faraday intuía ya una teoría de *campos* del electromagnetismo. En su posterior defensa de su teoría de campos solía argumentar que las líneas que se forman alrededor de un imán, las cuales denominaba *líneas de fuerza curvas*, indicaban que el fenómeno en cuestión no era debido a una acción a distancia.³²

3. SOBRE LA TEORÍA DEL CAMPO ELECTROMAGNÉTICO PROPUESTA POR MAXWELL

3.1. Un contexto necesario

Hasta el momento hemos visto la gran diferencia entre las perspectivas que se manejaban en el siglo XIX en torno a las explicaciones del mundo físico: acción a

³⁰ Faraday creía que la luz era una vibración de las líneas de fuerza asociadas a fenómenos electromagnéticos.

³¹ Cabe aclarar que la idea de acción a distancia para Newton, no es causada por una propiedad de los cuerpos, ya que para Newton los cuerpos son inertes y no tiene ninguna propiedad como lo expone en su primer escolio de los Principios matemáticos de la Filosofía Natural, en la cual los cuerpos son inertes y permanecen en su estado natural de movimiento o de reposo y la acción que es externa a los cuerpos no es causada por los cuerpos mismos sino que estas acciones son atribuidas a DIOS, ya que el espacio en este sentido es el sensorio de DIOS al cual Newton llama *espacio absoluto y matemático*, lo cual es equivalente a llamar a este espacio: absoluto y ordenado, del cual se pueden predecir ciertas leyes o axiomas por su mismo carácter de orden y regularidad. (Berkson, pág. 70)

³² El argumento de Faraday viéndolo en detalle es bien interesante ya que la fuerza en la teoría de acción directa a distancia se da en la misma dirección de la línea que une dos cuerpos, mientras que las líneas de fuerza que unen dos cuerpos cargados ya sea eléctricamente o magnéticamente, no están en la dirección del radio-vector que une sus centros, sino que son curvas que se forman en el espacio que hay entre los dos cuerpos cargados o magnetizados.

distancia *vs.* teoría de campos. En esta sección mostraremos de manera muy sucinta el trabajo que realiza Maxwell en torno a los planteamientos de Faraday sobre los fenómenos electromagnéticos, en particular mostraremos como Maxwell en su intento de representar estas ideas de Faraday de una manera más acorde a los cánones de la ciencia imperante en ese momento construye un modelo mecánico³³ del medio donde se dan los fenómenos electromagnéticos, el éter.

Basados en el artículo *Ether* en *The Scientific Papers of James Clerk Maxwell*, editado by W. D. Niven (pp. 763-776)³⁴, podríamos decir que la teoría del campo electromagnético de Maxwell surge en el contexto problemático de la propagación de la luz en el vacío que preocupó a las mentes científicas más brillantes a lo largo del siglo XVIII. Antes, afirma Maxwell, la hipótesis de un éter, fue sostenida por diferentes especuladores por muy diversas razones. A aquellos que sostienen la existencia de un plenum como un principio filosófico, el aborrecimiento de la naturaleza al vacío fue una razón suficiente para imaginar un éter llenándolo todo, aunque todo otro argumento pareciera estar contra él. Para Descartes, quien hizo de la extensión la única propiedad esencial de la materia, y de la materia una condición necesaria de la extensión, la mera existencia de cuerpos aparentemente a una distancia fue una prueba de la existencia de un medio continuo ente ellos. Pero además de estas elevadas necesidades metafísicas para un medio, señala Maxwell, había más usos mundanos a ser llenados por los éteres. Los éteres fueron inventados para que los planetas nadaran en ellos, para construir atmósferas eléctricas, flujos magnéticos, transportar sensaciones de una parte de nuestro cuerpo a otra, y así sucesivamente, hasta que todo el espacio ha sido llenado tres y cuatro veces con los éteres. De otro lado, dice Maxwell, aquellos que imaginaron éteres con miras a explicar fenómenos no podían explicar la naturaleza del movimiento de estos medios y no podían probar que los medios como eran imaginados podían producir los efectos que intentaban explicar. De hecho, el único éter que ha sobrevivido, afirma Maxwell, *es aquel que fue inventado por*

³³Perspectiva desde la cual materia y movimiento se asumen como categorías fundamentales para dar cuenta de los fenómenos físicos y como los referentes de los modelos para hacerlos inteligibles.

³⁴ Texto al que se tuvo acceso por medio de la traducción realizada por Juan Carlos Orozco Cruz, Profesor Asistente del Departamento de Física de la Universidad Pedagógica Nacional a partir del texto en inglés *The Scientific Papers of James Clerk Maxwell*, vol II, Dover, Publications Inc., New York, 1965.

Huygens para explicar la propagación de la luz. La evidencia de la existencia del éter lumínico ha sido acumulada en la medida en que fenómenos adicionales de luz y otras radiaciones se han descubierto; y las propiedades de este medio, en cuanto deducidas de los fenómenos de la luz, han resultado ser precisamente las necesarias para explicar los fenómenos electromagnéticos. (Maxwell J. C., 1965, pág. 764).

Desde la teoría de Newton, aclara Maxwell, se comenzó a considerar la luz como compuesta por pequeños corpúsculos (cuerpos), asignándosele un carácter sustancialista. Sin embargo, para él es claro que no es posible atribuirle tal carácter a la luz si se tiene en cuenta el fenómeno de interferencia. Si un haz de luz de una sola fuente se divide por cierto métodos ópticos en dos partes- dice Maxwell- y éstas, después de viajar por diferentes caminos, se reúnen y hacen incidir sobre una pantalla; si cualquier mitad del haz es detenida, la otra cae en la pantalla y la ilumina, pero si a ambas partes se les permite pasar, la pantalla en ciertos lugares se oscurece, y por lo tanto muestra que las dos porciones de la luz se destruyen entre sí. Como no podemos suponer que cuando dos cuerpos se pongan juntos puedan aniquilarse, debemos considerar, dice Maxwell, que **la luz no puede ser una sustancia, sino un proceso que se verifica en una sustancia**, siendo el proceso que se lleva a cabo en la primera porción de luz siempre el opuesto exacto al que se verifica en la otra al mismo tiempo, de tal manera que cuando las dos porciones se combinan ningún proceso resulta en total; *demostrándose que una parte de la luz puede ser exactamente lo contrario de otra parte, al igual como +a es exactamente lo contrario de -a, cualquiera sea a.* Entre las cantidades físicas -prosigue Maxwell- encontramos algunas que son capaces de tener sus signos invertidos, y otras que no lo son. Así, un desplazamiento en una dirección es exactamente contrario a un desplazamiento igual en la dirección opuesta. **Tales cantidades, nos hace ver Maxwell, no son las medidas de sustancias, sino siempre de procesos que tienen lugar en una sustancia.** Para determinar la naturaleza del proceso en el que consiste la radiación de luz, alteramos la longitud de la trayectoria de una o ambas porciones del haz, y nos encontramos con que la luz se extingue cuando la diferencia de la longitud de los caminos es un múltiplo impar de una cierta pequeña distancia denominada *media*

longitud de onda. En todos los otros casos, prosigue Maxwell, hay más o menos luz; y cuando los caminos son iguales, o cuando su diferencia es un múltiplo de una *longitud de onda entera*, aparece la pantalla cuatro veces más brillante que cuando una porción del haz impacta sobre ella.³⁵

Estos fenómenos se pueden resumir en la expresión matemática $u = A \cos(nt - px + a)$ que nos da u , la fase del proceso, en un punto cuya distancia medida desde un punto fijo en el haz es x en un momento t .

No hemos determinado hasta aquí, hace notar Maxwell, nada en cuanto a la naturaleza del proceso; puede ser un desplazamiento o una rotación, o una perturbación eléctrica, o de hecho cualquier cantidad física que pueda asumir valores positivos o negativos. Cualquiera que sea la naturaleza del proceso, si es capaz de ser expresada por una ecuación de la forma arriba expuesta, el proceso que ocurre en un punto fijo se llama una *vibración*; la constante A se llama la *amplitud*; el tiempo $2\pi/n$ es llamado el período; y $(nt - px + a)$ es la fase. La configuración en un instante dado se llama una onda, y la $2\pi/p$ se llama *longitud de onda*. La velocidad de propagación es n/p . Cuando contemplamos las diferentes partes del medio como si se fuera través del mismo proceso en sucesión, usamos la palabra ondulatoria para denotar este carácter del proceso sin restringir en modo alguno su naturaleza física.

Una visión ulterior de la naturaleza física del proceso se obtiene si los dos rayos considerados están polarizados, y si el plano de polarización de uno de ellos se hace girar alrededor del eje del rayo, entonces cuando los dos planos de

³⁵ Para aclarar aún más la idea, Maxwell dice: En la forma ordinaria del experimento éstos diferentes casos se exhiben simultáneamente en diferentes puntos de la pantalla, por lo que vemos en la pantalla una serie de franjas que constan de líneas oscuras en intervalos iguales, con bandas brillantes de intensidad graduada entre ellas. Si consideramos lo que está pasando en diferentes puntos en el eje de un haz de luz en el mismo instante, encontraremos que si la distancia entre los puntos es un múltiplo de una longitud de onda el mismo proceso que está pasando entre los puntos en el mismo instante, pero si la distancia es un múltiplo impar de media longitud de onda del proceso pasando en un momento dado es exactamente lo contrario del proceso pasando en el otro.

Ahora, se sabe que la luz se propaga con una cierta velocidad (3.004×10^{10} cm por segundo en el vacío, según Cornu). Si, por lo tanto, suponemos un punto móvil para viajar a lo largo del rayo con esta velocidad, que deberá encontrar el mismo proceso ocurre en cada punto del rayo como el punto móvil alcanza. Si, por último, consideramos un punto fijo en el eje del haz, se deberá observar una rápida alternancia de estos procesos opuestos, siendo el intervalo de tiempo entre procesos similares el tiempo que la luz necesita para recorrer una longitud de onda.

polarización son paralelos los fenómenos de interferencia aparecen como se describieron antes. Cuando el plano gira, las bandas oscuras e iluminadas se distinguen menos, y cuando los planos de polarización están en ángulo recto, la iluminación de la pantalla se vuelve uniforme y ningún rastro de interferencia puede ser descubierto.

De ahí que el proceso físico que participa en la propagación de la luz no debe sólo ser una cantidad dirigida o vector capaz de tener su dirección invertida, sino que este vector debe estar en ángulo recto con el rayo, y, o bien en el plano de polarización o perpendicular al mismo. Fresnel supone, dice Maxwell, que el proceso físico es un desplazamiento del medio perpendicular al plano de polarización. MacCullagh y Neumann, por su parte, suponen que es un desplazamiento en el plano de polarización.

De ahí que el proceso físico que participan en la propagación de la luz no debe ser sólo, dice Maxwell, una cantidad dirigida o vector capaz de tener su dirección invertida, sino que este vector debe estar en ángulo recto con el rayo, y, o estar en el plano de polarización o perpendicular al mismo.

De otra parte, el proceso puede, también, ser electromagnético, y como en este caso el desplazamiento eléctrico y la perturbación magnética son perpendiculares entre sí, cualquiera de ellos puede suponerse que esta en el plano de polarización.

Además, hace notar Maxwell, que todo lo dicho con respecto a las radiaciones que afectan nuestros ojos, y que llamamos luz, se aplica también a las radiaciones que no producen impresiones luminosas en nuestros ojos, porque los fenómenos de interferencia han sido observados y las longitudes de onda medidas en el caso de radiaciones que pueden ser detectadas solamente por el calentamiento producido o por sus efectos químicos.

Después de haber determinado el carácter geométrico del proceso, Maxwell orienta su atención al medio en el cual se dan estos procesos, el éter. En primer lugar, destaca Maxwell, el éter es capaz de transmitir energía. Las radiaciones que transmite son capaces no sólo de actuar sobre nuestros sentidos, lo que de por sí

es una prueba del trabajo realizado, también pueden calentar los cuerpos que las absorben; y midiendo el calor comunicado a dichos cuerpos, la energía de la radiación puede ser calculada. En segundo lugar, **esta energía no se transmite instantáneamente del cuerpo radiante al cuerpo absorbente, sino que existe durante un cierto tiempo en el medio.** Si adoptamos ya sea la teoría ondulatoria de Fresnel o de MacCullagh, dice Maxwell, la mitad de su energía está en forma de energía potencial, debido a la distorsión de las porciones elementales del medio, y la mitad en forma de energía cinética, debido al movimiento del medio³⁶.

Como las propiedades del medio luminífero mencionadas hasta aquí son hasta donde se ha podido establecer similar a aquellas del medio electromagnético, dice Maxwell, la mejor manera de compararlas es determinar la velocidad con la cual una perturbación electromagnética podría ser propagada a través del medio. Si esta resultara ser igual a la velocidad de la luz, tendríamos una razón de peso para creer que los dos medios, ocupando como ellos lo hacen el mismo espacio, son realmente idénticos, y los fenómenos lumínicos y electromagnéticos de la misma clase.

Los datos para hacer el cálculo son proporcionados por los experimentos realizados con miras a comparar las unidades electromagnéticas con las del sistema electrostático. La velocidad de propagación de una perturbación electromagnética en el aire, como se calculó de diferente conjunto de datos, no difiere de la velocidad de la luz en el aire más de lo que difieren los distintos valores calculados para estas unidades, según se determinó por diferentes observadores.³⁷

Si los dos medios (tanto el luminífero como el electromagnético) son equivalentes como lo afirma Maxwell podríamos preguntarnos cuál es la constitución última de este medio o éter³⁸. ¿Es discreto o continuo?

³⁶ Es posible pensar que la perturbación del medio en sí misma involucra movimiento de las partes del medio (que son perturbaciones mecánicas).

³⁷ Traducción realizada por Juan Carlos Orozco Cruz, Profesor Asistente del Departamento de Física de la Universidad Pedagógica Nacional a partir del artículo *Ether* en *The Scientific Papers of James Clerk Maxwell* pág. 8.

³⁸ Se puede concebir el éter como poseyendo elasticidad similar a aquella de un cuerpo sólido (dada la gran magnitud de la velocidad de la luz en el aire), y como teniendo también una densidad finita.

Para Maxwell si el éter transmite vibraciones transversales a distancias muy largas sin una pérdida apreciable de energía por disipación en forma de calor; tal medio podría suponerse como compuesto de moléculas moviéndose bajo condiciones tales que un grupo de moléculas una vez casi juntas permanecen cerca unas de otras durante todo el movimiento, pudiendo ser capaces de transmitir vibraciones sin mucha disipación, pero tal movimiento de las moléculas no debe suponerse desordenado como las moléculas de un gas, porque entonces, a cada grupo de moléculas le corresponde una configuración diferente, disipando energía en cada transmisión de la vibración en cada grupo de moléculas *en la que una ondulación transversal es reducida a menos de uno sobre quinientas partes iguales de su amplitud en una longitud de onda simple.*³⁹ Tomando en cuenta estas consideraciones, si el éter es molecular, los grupos de moléculas tienen que permanecer del mismo tipo, siendo la configuración de los grupos sólo ligeramente modificada durante el movimiento.

3.2. Magnitudes Físicas y el Modelo Mecánico del Éter Electromagnético propuesto por Maxwell

El gran esfuerzo de Maxwell se orientó a explicar el medio por el cual se propagan los fenómenos electromagnéticos mediante un modelo mecánico. Para ello recurre a un modelo de vórtices moleculares planteado en 1867 por el científico William Thomson para explicar el comportamiento de la materia, acudiendo a un modelo de átomos de vórtices que en síntesis proponía que los átomos constituyentes de la materia eran anillos de vórtices enlazados formando distintos nudos en un fluido ideal (Thomson, 1867, págs. 94-105). Para poder explicar dichos fenómenos electromagnéticos Maxwell parecía partir de la premisa que W. Thomson en sus propias palabras planteaba así: responder si podemos o no entender un fenómeno particular en física es responder ¿somos capaces de hacer un modelo mecánico de él? Esta construcción de un modelo mecánico del éter le va valer a Maxwell los resultados más originales de su teoría electromagnética que a continuación explicaremos con algún detalle, basados en la obra de William Berkson *Teoría de Campos de Fuerza desde Faraday hasta Einstein*.

³⁹ *Ibíd.* Pág. 9

En el trabajo de Maxwell *On Physical Lines of Force*, publicado en marzo de 1861 en *The London Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine and Science Journal* (cuarta serie), su problema se centraba, según W. Berkson, en **elaborar un modelo del éter del campo electromagnético que incorporara la masa y elasticidad necesaria para la velocidad finita de propagación, y que fuera coherente con los fenómenos eléctricos y magnéticos ya conocidos**. La estructura mecánica se asemeja a la de un panal de abejas como se muestra en la figura 1 y que describe grosso modo Berkson de la siguiente forma:

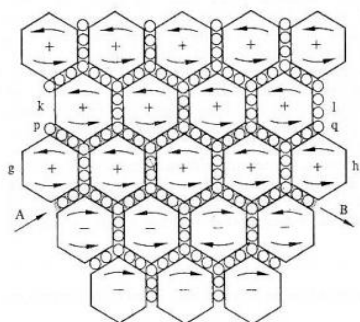


Figura 1. Modelo del campo electromagnético utilizado por Maxwell en su escrito *On Physical Lines of Force* Cap. 25 pág. 349

En la *figura 1* los hexágonos regulares representan los vórtices magnéticos los cuales tienen un eje de rotación fijo lo que quiere decir que no se trasladan. Entre cada dos vórtices hay una capa de bolas que para Maxwell simbolizan la carga eléctrica. Las bolas y los vórtices pueden ser considerados como piñones que están engranados de tal manera que las bolas pueden actuar como un *piñón loco*⁴⁰ pasando de remolino en remolino, haciendo girar los vórtices en la dirección contraria a su movimiento de rotación como se puede apreciar en la *figura 1* (la entrada de las bolas en A y la salida en B); mientras están girando, no hay rozamiento entre las partículas y el remolino, y de esta manera no se produce pérdida de energía. De esta manera, parece posible mantener indefinidamente así un campo magnético. Este desplazamiento de las partículas eléctricas constituye la corriente eléctrica. Mientras pasa corriente, las partículas se mueven de un remolino a otro como se ha mencionado anteriormente y el movimiento de un remolino está ligado al movimiento de otro.

⁴⁰ Ver: *Las teorías de los campos de fuerza*, pág. 187, donde Berkson escribe al respecto: *En mecánica, cuando se quiere que dos ruedas giren en la misma dirección, se coloca entre ellas otra rueda que engrane con ambas, y se llama piñón loco.*

Según Berkson (pág. 188), otra hipótesis del modelo es el de suponer que los remolinos magnéticos están dotados de elasticidad en un medio dieléctrico. Esta hipótesis exige una velocidad finita de propagación de los estados del mecanismo: una velocidad finita de propagación de la acción, y proporciona también una explicación de la electricidad estática: en un dieléctrico, los ejes de los remolinos magnéticos no pueden moverse. Si una causa exterior al mecanismo ejerce fuerza sobre las partículas eléctricas, estas deforman elásticamente los remolinos magnéticos. Esta deformación pone en juego a las fuerzas elásticas del remolino, que presiona sobre las partículas eléctricas circundantes; La fuerza de un remolino sobre una partícula eléctrica representa la fuerza eléctrica debida a la carga.

Este modelo de vórtices que propone Maxwell está pensado de tal manera que relaciona la corriente eléctrica y el campo magnético de una manera ingeniosa como lo explica Berkson; pero en la siguiente explicación de Berkson acerca de los vórtices, no se muestra dicha relación entre una corriente eléctrica y un campo magnético; más bien lo que se ejemplifica, es una construcción mecánica que da cuenta de la fuerza eléctrica (\vec{E}) y la fuerza magnética (\vec{H}) por separado; parafraseando a Berkson el planteamiento es el siguiente:

La corriente es el movimiento de las partículas eléctricas; cuando una partícula se mueve, roza las paredes del remolino magnético contiguo y lo pone en movimiento. La rotación de este remolino provoca la rotación de todas las partículas eléctricas que están en contacto con él. Estas partículas rozan al girar contra los remolinos en contacto con ellas, provocando su rotación; y así hasta que todo el espacio se llena de remolinos magnéticos en movimiento (la acción se propaga). Por lo tanto, una partícula eléctrica con libertad de movimiento en un conductor, produce un campo magnético alrededor del cable. **Cada una de las magnitudes magnéticas y eléctricas está específicamente representada por un aspecto del modelo mecánico en un medio conductor**, la intensidad de la corriente (j) en un punto viene representada por el número de bolas que pasan por este punto en un segundo. Estas partículas eléctricas rozan contra los remolinos adyacentes y les transmiten un movimiento de rotación. La intensidad de la fuerza magnética (\vec{H}) está representada por la variación de la velocidad del remolino en su superficie.⁴¹

⁴¹ Las teorías de los campos de fuerza. Desde Faraday hasta Einstein. Síntesis de las Págs. 190-191.

Al comparar la explicación anterior que hace W. Berkson podemos hacer una analogía con el movimiento de rotación de un cuerpo rígido alrededor de un eje fijo así: el movimiento rotacional de un vórtice es equivalente al momento angular de una rueda maciza de radio R , cuya expresión viene dada por $L = I \left(\frac{v_t}{R} \right)$. Si L se corresponde con la intensidad de la fuerza magnética (H), $\frac{v_t}{R}$ es su inducción magnética (B) en la superficie del remolino (aquí su inducción magnética se corresponde con la velocidad en la superficie del remolino y un radio fijo para los vórtices del éter), y su momento de inercia I se corresponde con el inverso de su permeabilidad magnética (μ^{-1}) la cual puede significar, una oposición a la rotación del vórtice, o también se puede interpretar como la resistencia que posee un material al paso de un *flujo magnético* el cual explicaremos más adelante. Entonces podemos escribir una ecuación que representa la fuerza magnética como $H = B\mu^{-1}$. Su dirección viene dada por el eje del remolino; aquí se está utilizando por convención la regla de la mano derecha.

La inercia media (masa) de los remolinos se corresponde con la permeabilidad magnética (μ) del campo ($I = \mu^{-1}$). Por lo tanto, la energía del campo magnético puede ser expresada en función de la energía cinética rotacional de un vórtice de la siguiente manera: la ecuación de la energía cinética rotacional se puede escribir como ⁴² $U_{rot} = \frac{1}{2}I\omega^2$; al comparar cada magnitud con su correspondiente magnético encontramos que la energía del campo magnético se puede expresar como⁴³ $U_{Mag} = \frac{1}{2}\mu H^2$.

⁴² Ver: Capítulo 11 (Energía 1: Trabajo y Energía Cinética) pág. 243.

⁴³ Si la expresión de la velocidad tangencial es equivalente a la de un movimiento circular de una partícula tenemos que $V_t = \omega R$, luego $\omega = \frac{V_t}{R}$

$$\Rightarrow \text{como } \frac{V_t}{R} \text{ corresponde a } B \text{ tenemos que } \omega \text{ corresponde a } B \quad (\text{Ec. 2})$$

$$\text{Si elevamos al cuadrado ambos miembros de la igualdad, tenemos } \omega^2 = B^2 \quad (\text{Ec. 3})$$

y como $H = \mu^{-1} B$ despejamos B encontramos que

$$B = \mu H \quad (\text{Ec. 4})$$

$$\text{Sustituyendo (4) en (3) obtenemos como resultado } \omega^2 = \mu^2 H^2 \quad (\text{Ec5})$$

$$\text{Tenemos que la energía rotacional } U_{rot} = \frac{1}{2}I\omega^2 \quad (\text{Ec. 6})$$

Con I como una medida de la inercia que se opone a la rotación de un cuerpo, equivalente a la resistencia que opone un cuerpo al flujo magnético expresada como: $I = \mu^{-1}$ (Ec. 7)

Sustituyendo (5) y (7) en (6) tenemos $E_{rot} = \frac{1}{2}\mu^{-1}(\mu^2 H^2)$ y cancelando términos semejantes obtenemos el resultado buscado para la energía del campo magnético por medios mecánicos la cual se puede expresar como:

$$E_{rot} = \frac{1}{2}\mu H^2 \quad (\text{Ec. 8})$$

Esta es la energía magnética media de los vórtices en movimiento rotacional.

De otra parte, si **las bolitas eléctricas forman parte de un dieléctrico, no podrán desplazarse libremente de su posición como en los conductores, pero si sufrir una deformación elástica bajo la acción de las fuerzas que actúan sobre ellas**, dice Berkson refiriéndose al modelo de Maxwell (Berkson pág. 192); el grado en que el material de una bola eléctrica se desplaza por efecto de las fuerzas depende de las constantes elásticas de la bola. Para Maxwell, según Berkson, el desplazamiento total (\vec{D}) es directamente proporcional a la fuerza (\vec{E}) que actúa sobre la bola; la constante de proporcionalidad es análoga a la constante dieléctrica o capacidad inductiva específica (e)⁴⁴ del medio; de manera formal se puede expresar el desplazamiento como $\vec{D} = e\vec{E}$; expresión que se puede reescribir de una manera más inteligible con un simple despeje, pero con un significado diferente, lo cual se presta para hacer una analogía con la deformación de un resorte. La fuerza necesaria f para deformar un resorte es equivalente a la deformación d_{ef} que experimenta el mismo multiplicado por el coeficiente de restitución o elasticidad k que podemos escribir como $f = k d_{ef}$. Ahora bien, si comparamos estos dos casos podemos relacionar a e^{-1} con el coeficiente de elasticidad o rigidez de cada bola, y a (\vec{D}) con la deformación de la bola eléctrica en alguna dirección (tal como si fuera un resorte) debida a la deformación causada por los remolinos en un dieléctrico. Escrita de esta manera, la fuerza eléctrica (\vec{E}) se puede explicar mediante esta analogía mecánica.⁴⁵

Para explicar la energía del campo eléctrico W . Berkson escribe que para Maxwell:

La energía del campo eléctrico se corresponderá con la energía elástica o potencial de las partículas deformadas. Esta energía tiene que ser igual al trabajo realizado para deformar las partículas: la fuerza ejercida por los remolinos multiplicada por el desplazamiento de la sustancia, que es proporcional a $|\vec{E} \cdot \vec{D}| = U_{ele} = eE^2$ (**ec. 4**). (Berkson, pág. 193)

⁴⁴ Que en los textos usuales esta constante de proporcionalidad entre \vec{E} y \vec{D} se suele designar por ϵ y denominar *permitividad eléctrica*.

⁴⁵ Haciendo uso de la analogía mecánica planteada, es posible encontrar la expresión para la energía eléctrica debida a la deformación del medio (de las bolas eléctricas). Basados en la expresión para el trabajo mecánico $W = \vec{F} \cdot d\vec{s}$, que para el caso del resorte elástico con constante k y una deformación Δs nos da un valor $W = 1/2k\Delta s^2$, se puede determinar la energía eléctrica necesaria para deformar una bola eléctrica con constante eléctrica e un equivalente a \vec{D} ; tomaremos para ello $U_{ele} = \int_0^{\vec{D}} \vec{E} \cdot d\vec{D}$ (ec. 1) y reemplazaremos \vec{D} por $e\vec{E}$; así, encontramos el valor para la energía eléctrica, $U_{ele} = eE^2$ que coincide con la expresión usual encontrada en los textos de electromagnetismo.

La idea que encierra el modelo del éter electromagnético de Maxwell compuesto de vórtices magnéticos, es realmente ingeniosa; su desarrollo de las magnitudes que definen el campo (\vec{E}, \vec{H}) es relativamente directo gracias a su modelo mecánico; planteamiento que le valió los resultados más originales de su teoría electromagnética.

Es interesante ver, anota Berkson, como el modelo del éter de Maxwell no solo describe de manera mecánica las intensidades eléctricas y magnéticas, sino que además describe la fuerza electromotriz debida a las distintas velocidades de rotación de dos remolinos vecinos que ejercen una fuerza tangencial sobre las partículas que hay entre ellos; el estado *electrotónico* o potencial vectorial (\vec{A}) está relacionado con **la variación del momento de los remolinos perpendicular a su eje de rotación**⁴⁶; el potencial eléctrico o tensión (Ψ) *-la carga-* **está producida por una presión mutua ejercida por las partículas eléctricas**, cuya diferencia de presión a ambos lados de una partícula eléctrica constituye la contribución de la electricidad estática a la fuerza electromotriz.⁴⁷

Aunque el modelo mecánico del éter relaciona de manera brillante mediante analogías, fenómenos electromagnéticos *con las ecuaciones generalizadas de movimiento de un sistema dinámico*, señala Berkson, no da una geometría del espacio con la cual pueda formalizarse las ideas de Faraday en *pura matemática*. Pero Maxwell sí sienta las bases para ello en su trabajo *On Faraday's Lines of Force* que él lee ante la Sociedad Filosófica de Cambridge el 10 de diciembre 1855, y el 11 de febrero de 1856. Basado en la mecánica de fluidos incomprensibles y estableciendo analogía entre ésta y la acción eléctrica y magnética, y considerando las líneas de fuerza como tubos mostró que si un sistema de líneas de fuerza se obtenía de acuerdo a los lineamientos de Faraday, entonces, al ser la acción eléctrica y magnética inversa del cuadrado de la distancia, el número de líneas de fuerza que pasa a través de una unidad de área de cualquier superficie, perpendicular a la dirección de la fuerza, es proporcional a la magnitud de la

⁴⁶ Esta expresión hace referencia a una variación de la velocidad $\frac{dH}{dt}$ en el tiempo en la superficie del remolino que según Berkson (pág. 196) Maxwell denomina potencial vectorial magnético relacionado con la variación del momento de los remolinos.

⁴⁷ Ver: W. Berkson pág. 192 párrafo 2.

fuerza en la vecindad, y que el número de líneas pasa a través de la unidad de área de cualquier otra superficie es proporcional a la componente de la fuerza perpendicular a dicha superficie.

A continuación compilamos algunas de las ideas más importantes, a nuestro parecer, de dicho trabajo, que como se verá más adelante, nos permitirá esbozar un contexto más adecuado para comprender y dimensionar los aportes de Heaviside a través de su tratado de electromagnetismo:

El estado presente de la ciencia eléctrica parece peculiarmente desfavorable para la especulación. Las leyes de la distribución de la electricidad sobre la superficie de los conductores ha sido analíticamente deducida del experimento; algunas partes de la teoría matemática del magnetismo están establecidas, mientras en las otras partes de los datos experimentales están queriéndolo; la teoría de la conducción del galvanismo y la atracción de los conductores ha sido reducida a fórmulas matemáticas, pero no se han relacionado con las otras partes de la ciencia

Con el fin de obtener ideas físicas sin adoptar una teoría física debemos familiarizarnos con las analogías físicas. Por una analogía física quiero significar esa semejanza parcial entre las leyes de una ciencia y aquellas de otra que hace que cada una de ellas ilustre la otra. Así todas las ciencias matemáticas están basadas en relaciones entre las leyes físicas y las leyes de los números, de modo que el ánimo de la ciencia exacta es reducir los problemas de la naturaleza a la determinación de cantidades por operaciones con números. Pasando desde la más universal de todas las analogías a una muy parcial, encontramos la misma semblanza en la forma matemática entre dos fenómenos diferentes dando lugar a una teoría física de la luz...Todos hemos adquirido la concepción matemática de estas atracciones. Podemos razonar sobre ellas y determinar sus formas apropiadas o fórmulas. Estas fórmulas tienen una significación matemática y sus resultados se han encontrado estar de acuerdo con los fenómenos naturales. No hay una fórmula para aplicar las matemáticas de manera más consistente con la naturaleza que la fórmula de las atracciones, y no hay teoría mejor establecida en la mente de los hombres que aquella de la acción de cuerpos uno sobre el otro a distancia. **Las leyes de la conducción del calor en un medio uniforme aparecen a primera vista entre los más diferentes en sus relaciones físicas de aquellos que relacionan las atracciones. Las cantidades que entran en ellas son *temperatura, flujo de calor, conductividad*. La palabra *fuerza* es extraña al tema. Sin embargo, encontramos que las leyes matemáticas del movimiento uniforme del calor en el medio homogéneo son idénticas en forma a aquellas de las atracciones que varían inversamente al cuadrado de la distancia. Tenemos sólo que sustituir *fuerza* por *centro de atracción*, *flujo de calor* por *efecto aceleratriz de atracción* en cualquier punto, y la *temperatura* por *potencial*, y la solución de un problema en atracciones se transforma en el de un problema de calor...**Esta analogía entre las fórmulas de calor y atracción fue, creo, señalado primero por el profesor William Thomson en *Camb. Math. Journal, Vol III*. Ahora se supone que la conducción de calor procede por la acción entre partes contiguas de un medio, mientras que la fuerza de atracciones una relación entre cuerpos distantes, y aún así, si no conociéramos nada fuera de lo expresado en las fórmulas matemáticas, no habría nada para distinguir entre un conjunto de fenómenos y otro.

Es por el uso de las analogías de este tipo que he intentado traer a mi mente, en un lugar cómodo y manejable, las ideas matemáticas que son necesarias para el estudio de los fenómenos de la electricidad. Los métodos son generalmente los sugeridos por los procesos de razonamiento que se encuentran en las investigaciones de Faraday, y que, a pesar de que se han interpretado matemáticamente por el profesor J. J. Thompson y otros, son muy generales y no matemáticos, en comparación con los empleados por los matemáticos profesos...**Debemos por lo tanto obtener un modelo geométrico del fenómeno físico, el cual haría decirnos la dirección de la fuerza, pero debemos aun requerir un método que indique la intensidad de la fuerza en cualquier punto.** [Para ello] tengo en primer lugar que explicar e ilustrar la idea de "líneas de fuerza"...Podemos encontrar una línea que pasa a través de cualquier punto del espacio, de tal manera que [dicha línea] represente la dirección de la fuerza que actúa sobre una partícula electrificada positivamente, o en un polo norte elemental, y la dirección inversa de la fuerza sobre una partícula electrificada negativamente o un polo sur elemental. Dado que en cada punto del espacio tal dirección se puede encontrar, si empezando en cualquier punto dibujamos una línea de modo que a medida que avanzamos en ella, su dirección en cualquier punto siempre coincida con la de la fuerza resultante en ese punto, esta **curva** indicará la dirección de la fuerza por cada punto por el que pasa, y podría dar cuenta de lo que se llama **línea de fuerza. Podríamos de la misma manera dibujar otras líneas de fuerza, hasta que llenemos todo el espacio con las curvas que indicarían la dirección de la fuerza en cualquier punto.**

Si consideramos estas curvas no como simples líneas, sino como finos tubos de sección variable que transportan un fluido incompresible, ya que la velocidad del fluido es inversa a la sección del tubo, podemos hacer que la velocidad varíe de acuerdo con cualquier ley dada, mediante la regulación de la sección del tubo, y de esta manera podemos representar la intensidad de la fuerza, así como su dirección por el movimiento del fluido en estos tubos. Este método de representación de la intensidad de una fuerza por la velocidad de un fluido en un tubo imaginario es aplicable a cualquier sistema concebible de fuerzas, pero es capaz de una gran simplificación en el caso en el que las fuerzas sean tales que puedan ser explicadas por la hipótesis de las atracciones que varían inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, como los observados en los fenómenos eléctricos y magnéticos.

... Los tubos serán entonces meras superficies, direccionando el movimiento de un fluido llenando todo el espacio ... En el caso de un sistema perfectamente arbitrario de fuerzas, habrá generalmente intersticios entre los tubos; pero en el caso de fuerzas eléctricas y magnéticas es posible disponer los tubos con el fin de no dejar intersticios.⁴⁸ Si sobre una superficie la cual corta los tubos de movimiento de un fluido dibujamos una curva cerrada, **la cantidad de tubos por unidad de superficie será el flujo ... La cantidad de fluido que en la unidad de tiempo cruza cualquier sección fija del tubo es la misma en cualquier parte de la sección que se tome...**[debido a que] como el fluido es incompresible, y ninguna parte se escapa a través de los lados del tubo, la cantidad que se escapa de la segunda sección es igual a la que entra a través de la primera... aquí no hay nada contradictorio en sí mismo en la concepción de las fuentes y [sumideros] donde se crea y aniquila el fluido. Las propiedades del fluido están a nuestra disposición, hemos hecho que sea incompresible, y ahora **supongo que se produce de la nada en ciertos puntos y se reduce a la nada en otros...** Ahora, **dado que el fluido fluye**

⁴⁸ Cuando se piensa en una fuente puntual y en una simetría esférica, los tubos estarían definidos por superficies cónicas (esta nota es nuestra).

siempre desde los lugares de mayor presión a los lugares de menor presión, no puede fluir en una curva en retroceso; ya que no hay fuentes o sumideros dentro de la superficie tubular... **Dado que es de suponer que la presión es de suponer varía continuamente en el fluido, todos los puntos en los que la presión es igual a una presión p dada se extiende sobre una determinada superficie que podemos llamar la superficie (p) de igual presión...** es fácil ver que estas superficies de igual presión deben ser perpendiculares a las líneas de movimiento del fluido; porque si el fluido se moviera en cualquier otra dirección, no habría una resistencia a su movimiento que pueda ser compensada por cualquier diferencia de presiones⁴⁹ ... Ahora hemos obtenido una construcción geométrica que define completamente el movimiento del fluido dividiendo el espacio que ocupa en un sistema de tubos de la unidad. (MAXWELL J., 1855, págs. 156-159).⁵⁰

El punto de partida de Maxwell para este trabajo, dice Berkson (pág. 193) fue el planteamiento de Faraday sobre la existencia de una tensión en las líneas de fuerza, y una presión entre ellas. El trabajo hecho por Maxwell sobre los *tubos de inducción* en el cual expone muchas de sus ideas geométricas del campo electromagnético tratándolo como un fluido hipotético al cual le asigna varias propiedades que no son propias de los fluidos reales como la falta de masa, de viscosidad, su creación de la nada, entre otras, es anterior al modelo de vórtices del éter. Muchas de estas ideas, señala Berkson, se reflejan en el trabajo que realiza en el campo de los vórtices electromagnéticos y que le va a dar los resultados más originales al deducir de éste las ecuaciones del campo electromagnético, encontrando una **estrecha relación entre el flujo de corriente y la rotación de un campo magnético**; encontró además una **relación entre la variación de la velocidad de los vórtices y la rotación del campo eléctrico**. *Maxwell descubrió tales funciones que ahora reciben el nombre de <<rotacional>>* (Berkson, pág. 195).

⁴⁹ En la física de *Halliday vol. 1* (mencionada anteriormente) en la pág. 336 nos encontramos con el principio de pascal de las presiones de un fluido en un tubo, la cual podemos hacer una analogía con un tubo de pasta dental: cuando aplicamos presión a un tubo de pasta dental, se siente en todas sus partes e impulsa hacia fuera la pasta dental en la parte superior. *Es decir, si aumentamos la presión externa sobre un fluido en un lugar en una cantidad Δp , el mismo incremento se experimentara en todas las partes de las paredes del fluido contenido.* Todas las presiones deben ser perpendiculares a una línea de fluido en el tubo puesto que este tubo es imaginado como una manguera en la cual el fluido no fluye a través de las paredes sino paralela a estas y la presión que ejerce la manguera hace que el fluido se mueva en dirección paralela a esta. De lo contrario si imaginamos la manguera como un globo, el fluido se movería en todas las direcciones y las presiones serían perpendiculares a cada punto del globo por donde circula el fluido, lo cual no tendría un sentido de correspondencia con las *presiones a lo largo de las líneas de fuerza* propuestas por Faraday.

⁵⁰ Maxwell, J.C. (1855) 'On Faraday's Lines of Force'. Digitally enhanced and compiled from the repository of digital oldbooks of SICD Universities of Strasbourg. www.blazelabs.com, pp 155-229

4. OLIVER HEAVISIDE Y LA TEORÍA ELECTROMAGNÉTICA DE J.C. MAXWELL

4.1. Consideraciones Iniciales

Heaviside fue una de las primeras personas en entender la importancia del conocimiento de la teoría electromagnética de Maxwell, planteó la manera para interpretar tanto experimental como teóricamente esta teoría mediante el análisis vectorial el cual tenía muchos opositores para la "práctica versus la teoría" que él realizaba.

Mediante el análisis de la interpretación, que O. Heaviside hace de las relaciones establecidas por Maxwell, arriba mencionadas, al presentar las magnitudes que definen el campo electromagnético en el capítulo segundo del volumen 1 de su tratado sobre electromagnetismo; examinaremos dichas relaciones y también contrastaremos los dos esquemas organizativos de Maxwell: el éter rotacional planteado en su modelo de vórtices, con los tubos de inducción base de su propuesta de matematización de la perspectiva de Faraday, como se mostró en el apartado anterior; buscamos mostrar como el punto de vista de Heaviside hace visible la estrecha relación entre estos dos modelos los cuales al parecer, el uno es complemento del otro.

Como veremos, la concepción de campos de fuerza adoptada por Heaviside se ajustó a las **estructuras de geometrización del espacio ya establecidas por Maxwell por medio de las líneas de fuerza y tubos de flujo definidamente distribuidos en el espacio**; teniendo en cuenta que **este método de representación de la intensidad de una fuerza por la velocidad de un fluido en un tubo depende también de la materia que llena el espacio dadas sus propiedades desde el punto de vista electromagnético, puesto que las diferentes sustancias responden de manera distinta a la intensidad de la fuerza eléctrica y magnética**. Pero, sin duda alguna, un paso muy importante dado por Heaviside para su época fué reconocer que la fuerza eléctrica y la fuerza magnética son dos vectores (o campos vectoriales) capaces de caracterizar el estado físico del medio en cuestión desde el punto de vista electromagnético, *cuando se toman en conjunción con otras cantidades experimentalmente*

reconocibles como propiedades de la materia, que muestran que las diferentes sustancias se ven afectados en diferentes grados por la misma intensidad de eléctrico o fuerza magnética.⁵¹

4.2. Magnitudes Fundamentales de Heaviside para el Campo Electromagnético

En su intento de hacer una presentación sistemática y simple de la teoría electromagnética de Maxwell, Heaviside propone, entonces, tomar como magnitudes básicas para la descripción del fenómeno electromagnético y con ello el campo electromagnético dos fuerzas -la *fuerza eléctrica* y la *fuerza magnética*- y los dos flujos que producen, los cuales, cada uno por su parte involucran a su vez dos de tipos diferentes: uno, que conlleva almacenamiento de energía y el otro gasto de energía. De esta manera Heaviside propone una presentación completamente simétrica entre el caso eléctrico y magnético.

Como se ha dicho anteriormente, las magnitudes que definen el campo electromagnético para Maxwell, son la intensidad de campo eléctrico (\vec{E}) y la intensidad de campo magnético (\vec{H}) asociadas respectivamente, al desplazamiento eléctrico (\vec{D}) y a la inducción magnética (\vec{B}), no obstante el papel preponderante que le dio al potencial eléctrico y al potencial vectorial. Es importante recordar aquí que Maxwell, en el capítulo titulado Preliminares del volumen 1 de su Tratado sobre Electricidad y Magnetismo considera que hay tres tipos de magnitudes físicas: magnitudes definidas respecto a líneas o intensidades, magnitudes definidas respecto a superficies o flujos y magnitudes respecto a volúmenes o densidades.

El punto de partida de Heaviside fue aquel propuesto por Maxwell en su trabajo *On Faraday's Lines of Force*: un éter que está lleno y estructurado por tubos de flujo, o de inducción, de dos tipos: uno, de tipo eléctrico, el desplazamiento eléctrico (\vec{D}), y otro de tipo magnético, la inducción magnética (\vec{B}). Heaviside

⁵¹ Respecto a la materia, Heaviside afirma que además de influir en los valores de las constantes del éter (ϵ y μ), también es necesario reconocer que en ciertos tipos de la materia, cuando bajo la influencia de fuerza eléctrica, la energía es disipada continuamente, además de ser almacenado. Estos se llaman conductores eléctricos. Cuando la conducción es del tipo más simple (metálico), el desperdicio de energía tiene lugar a una tasa proporcional al cuadrado de la fuerza eléctrica.

retoma la analogía establecida por Maxwell en dicho trabajo entre la velocidad de un fluido y las intensidades de campo eléctrico y magnético, considerando las fuerzas eléctrica y magnética (\vec{E}) y (\vec{H}) como las magnitudes requeridas para representar y medir el estado físico del medio involucrado desde el punto de vista electromagnético. Considera que la relación entre los flujos y las respectivas fuerzas se pueden expresar formalmente como:

$$\vec{D} = e\vec{E} \quad (1)$$

$$\vec{B} = \mu\vec{H} \quad (2)$$

Donde e y μ hacen referencia a las propiedades eléctricas y magnéticas del medio

Heaviside considera, además, que la fuerza eléctrica (\vec{E}) debe estar vinculada a la producción del flujo eléctrico, (\vec{D}); y la fuerza magnética (\vec{H}) lo debe estar a la producción del flujo magnético o inducción magnética (\vec{B}), y que el producto de la fuerza por el incremento del flujo respectivo corresponde al trabajo realizado para lograr ese incremento (ver adelante ecuaciones 6 y 7).

Heaviside propone reescribir las ecuaciones (1) y (2) de otro modo, para interpretar los nuevos coeficientes que acompañan a los dos flujos mencionados: desplazamiento eléctrico \vec{D} e inducción magnética \vec{B} , de la siguiente manera:

$$\vec{E} = e^{-1}\vec{D} \dots \dots \dots ec. (4)$$

$$\vec{H} = \mu^{-1}\vec{B} \dots \dots \dots ec. (5)$$

Es interesante ver que un simple despeje de una ecuación, modifica el significado de la constante que la acompaña. Mientras que e en la (ec.1) permite el desplazamiento eléctrico, su inverso e^{-1} es su *elastancia*, el grado de rigidez o elasticidad del medio que se opone a la deformación. De igual manera μ en la (ec. 2) indica la capacidad para soportar la inducción magnética, su inverso μ^{-1} es la *reluctancia* o resistencia que un material o medio posee al paso de un flujo magnético.

La presentación anterior que hace Heaviside de las magnitudes que definen el medio (\vec{H}, \vec{E}) es realmente directa y atrapa de una manera sintética las ideas de Maxwell, aunque con un cierto matiz de diferencia en su manera de presentar el modelo de tubos y las magnitudes electromagnéticas que definen el medio.

De manera similar en la explicación del cálculo de la energía eléctrica y magnética en los remolinos de Maxwell, Heaviside para calcular estas dos energías almacenadas en el medio propone:

Cuando los flujos varían, sus tasas de aumento la $\dot{\mathbf{B}}$ y la $\dot{\mathbf{D}}$ son las velocidades correspondiente a las fuerzas \mathbf{E} y \mathbf{H} , con una condición de que ningún otro efecto sea producido. La actividad de \mathbf{E} es $\mathbf{E}\dot{\mathbf{D}}$ y la de \mathbf{H} es $\mathbf{H}\dot{\mathbf{B}}$. El trabajo gastado en la producción de los flujos... es, por lo tanto:

$$U = \int_0^D \vec{E} \cdot d\vec{D} \dots \dots (ec. 6) \quad T = \int_0^B \vec{H} \cdot d\vec{B} \dots \dots (ec. 7)$$

Donde U es la energía eléctrica y T la energía magnética por unidad de volumen. Si μ y e son constantes absolutas estas dan:

$$U = \frac{1}{2} e^{-1} D^2 = \frac{1}{2} ED \dots \dots (ec. 8)$$

$$T = \frac{1}{2} \mu H^2 = \frac{1}{2} HB \dots \dots (ec. 9)$$

Las expresiones (8) y (9) son las energías del campo electromagnético por unidad de volumen las cuales Heaviside interpreta de la siguiente manera: para la energía magnética $\frac{1}{2} \mu H^2$, si μ es interpretada como la densidad de una sustancia (masa), y H ser imaginada como su velocidad, entonces $\frac{1}{2} \mu H^2$ es su energía cinética ; y si $\frac{1}{2} e^{-1} D^2$ es comparada con la energía de deformación de un muelle mencionada anteriormente, entonces esta es la energía de deformación almacenada en el medio.

Heaviside da un paso más y muy importante, al relacionar la densidad de corriente eléctrica J -en general puesto que la corriente total es la suma de las corrientes parciales: la corriente de conducción \mathbf{C} , la corriente de desplazamiento $\dot{\mathbf{D}}$, y la corriente de convección $\rho\mathbf{v}$ - con la fuerza magnética a partir del modelo de los tubos de inducción de Maxwell así:

Si pensamos en la sección transversal de un tubo muy delgado por el que circula un flujo X , veremos las presiones que son radialmente perpendiculares al tubo y diametralmente opuestas en su dirección. Aquí juega un papel muy importante la variación de la fuerza en cada punto a lo largo del perimetro alrededor del tubo

que hace que el flujo se mueva en una dirección y no en otras. Esta circulación de la fuerza alrededor del tubo encierra una superficie por la cual están pasando tubos mucho más delgados que Maxwell a llamado *tubos de la unidad de corriente*; el número de tubos de la unidad que atraviesa esta superficie es la densidad de corriente superficial.

De manera análoga, la densidad de corriente magnética \mathbf{G} (aquí no se está hablando de medio conductores sino en el éter, puesto que no se ha verificado experimentalmente que existan corrientes magnéticas en conductores), es la circulación negativa de la fuerza eléctrica. Estas dos ecuaciones dan como resultado:

$$\text{curl } H = J \dots \dots \dots (ec. 10)$$

$$-\text{curl } E = G \dots \dots \dots (ec. 11)$$

Las ecuaciones⁵² (10) y (11) muestran una íntima relación entre la densidad de corriente y la fuerza del campo magnético con la que tanto había soñado Faraday encontrar dicha expresión y de la que Maxwell fue pionero al deducir de su modelo de vórtices expresiones equivalentes a las de Heaviside, con una cierta diferencia en las unidades y en su forma de presentación. Para mostrar dichas diferencias veamos la relación que dio Maxwell a la corriente eléctrica con la intensidad magnética:

La relación entre la velocidad del remolino y el movimiento de traslación de las bolas eléctricas es fija, se puede expresar el movimiento de las bolas (corriente) en función de la variación de la velocidad de los remolinos (intensidad magnética) de un punto a otro. Maxwell descubrió tal función, que ahora recibe el nombre de <<rotacional>>⁵³.

Esta función que descubrió Maxwell, de la cual nos cuenta W. Berkson es la que relaciona la corriente y la fuerza magnética:

⁵² Las ecuaciones (10) y (11) fueron tomadas de *Electromagnetic theory Vol. 1* pág. 35, donde el término acuñado por Heaviside <<curl>> representa una rotación.

⁵³ *Las teorías de los campos de fuerza. Desde Faraday hasta Einstein.* Pág. 195. Párr. 2

$$p = \frac{1}{4\pi} \text{rot}H \dots \dots (\text{ec. 12})$$

Donde p es la corriente y $\text{rot}H$ es la función rotacional de H .

Ya en este punto, se puede establecer ciertas diferencias tanto en el modelo como en la forma de presentación que hace tanto Maxwell como Heaviside en torno a las magnitudes que definen el medio electromagnético. Para empezar

Uno de los aportes más importantes realizados por Heaviside en torno a la teoría electromagnética de Maxwell fue el de poder representar las ecuaciones en la forma vectorial que hoy día se conoce, según Berkson (pág. 240), hay sin embargo una innovación de Heaviside que si pertenece a nuestra historia:

La simplificación de las ecuaciones de Maxwell. Heaviside eliminó el potencial vectorial de las ecuaciones y utilizó como ecuaciones fundamentales las que relacionan las fuerzas eléctricas y magnéticas, sin introducir ninguna función potencial, ni eléctrica o magnética. Denominó método <<dúplex>> a esta forma de expresar las ecuaciones de Maxwell, porque la expresión de la fuerza magnética, deriva del potencial vectorial de Maxwell, presenta cierta simetría con la expresión de la fuerza eléctrica.

Como se ha mencionado anteriormente, Heaviside trabaja con un sistema propio, el análisis vectorial, que en nuestra opinión es una reestructuración de los cuaterniones para los análisis físicos; puesto que un vector, dice Heaviside (pág. 302), es un cuaternion degradado cuyas componentes, escalar y vectorial nunca aparecen juntos en un fenómeno físico, y por lo tanto trabaja con los cuaterniones de manera separada de una forma parecida a la adoptada por Maxwell.

Mientras que para Maxwell, el lenguaje de los cuaterniones es útil en la medida en que sintetiza los resultados de los fenómenos electromagnéticos, escribiendo sus ecuaciones que describen el campo (E, H, D, B, J, A, Ψ) en cuaterniones, no es útil en su parte operacional puesto que como se ha mencionado en el capítulo I es engorroso el producto de números hipercomplejos y no tienen significado físico cuando reunidos en una misma expresión, se encuentra la parte escalar y vectorial; de hecho en él *A Treatise on Electricity and Magnetism vol. II* de Maxwell, no se encuentra una sola operación completa entre dos cuaterniones sino que él trabaja por separado el producto escalar y el producto que da la dirección del cuaternion que hoy día se conoce como producto vectorial.

Por ejemplo Maxwell escribe la ecuación de la fuerza magnética, en función del vector potencial magnético cuya componente vectorial ha tomado del producto entre dos cuaterniones p y q , con parte real cero, donde las componentes de p son las derivadas a lo largo de los ejes (x, y, z) , que se conce como el operador nabla ∇ , y q son las componentes del momento magnético. Esto es⁵⁴:

$$\mathbf{p} = \nabla = i \frac{d}{dx} + j \frac{d}{dy} + k \frac{d}{dz}$$

$$\mathbf{q} = \mathfrak{U} = Fi + Gj + Hk$$

El producto de los cuaterniones con parte escalar cero, $p * q$ es⁵⁵:

$$\mathbf{p} * \mathbf{q} = V \cdot \nabla \mathfrak{U} = \left(\frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz} \right) i + \left(\frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx} \right) j + \left(\frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy} \right) k = \mathfrak{B} = \mathbf{rot} \mathbf{A} = \mu \mathfrak{H}$$

La última parte de la ecuación resaltada en negrilla, se conoce como el vector potencial magnético, que puesta en la notación actual se escribe como: $B = \nabla \times A$, donde $B = \mu H$. Escrita en el lenguaje del cuaternión (pág. 237) Maxwell escribe la inducción magnética como:

⁵⁴ La simbología que hemos utilizado para las ecuaciones se han tomado del *Treatise on Electricity and Magnetism vol. II*, págs. 236-237. ∇ es un operador lineal nabla visto desde el lenguaje del cuaternion; \mathfrak{U} es el momento electromagnético en un punto, conocido hoy día como \mathbf{A} ; V indica el producto vectorial como resultado de la operación entre dos cuaterniones conocido como rotacional; \mathfrak{B} es la inducción magnética \mathbf{B} y \mathfrak{H} es la fuerza magnética \mathbf{H} .

⁵⁵ Demostración de la ecuación del vector potencial magnético

$$\mathbf{p} * \mathbf{q} = \left(i \frac{d}{dx} + j \frac{d}{dy} + k \frac{d}{dz} \right) (Fi + Gj + Hk) \text{ equivalente a la expresión } (\nabla * \mathfrak{U})$$

$S \cdot \mathbf{p} * \mathbf{q} = - \left(\frac{dF}{dx} + \frac{dG}{dy} + \frac{dH}{dz} \right)$ esta parte escalar del cuaternión se corresponde con el negativo de la divergencia del momento magnético \mathfrak{U} tal que: $-S \cdot \nabla \mathfrak{U} = 0$, Treatise pág. 236, puesto que el momento magnético de los remolinos están asociados a la rotación de los mismos, y por lo tanto, su producto escalar que cuantifica el flujo del campo \mathfrak{U} es igual a cero.

$V \cdot \mathbf{p} * \mathbf{q} = \frac{dF}{dy}(j, i) + \frac{dF}{dz}(k, i) + \frac{dG}{dx}(i, j) + \frac{dG}{dz}(k, j) + \frac{dH}{dx}(i, k) + \frac{dH}{dy}(j, k)$ resolviendo los productos cruzados para la parte vectorial del cuaternión.

$$V \cdot \mathbf{p} * \mathbf{q} = - \frac{dF}{dy} k + \frac{dF}{dz} j + \frac{dG}{dx} k - \frac{dG}{dz} i - \frac{dH}{dx} j + \frac{dH}{dy} i \text{ aplicando las reglas básicas de Hamilton}$$

$$V \cdot \mathbf{p} * \mathbf{q} = \left(\frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz} \right) i + \left(\frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx} \right) j + \left(\frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy} \right) k \text{ agrupando por componentes } i, j, k.$$

$$\mathfrak{B} = V \cdot \nabla u$$

Y es esta y otras funciones potenciales⁵⁶ que van a recibir gran parte de las críticas hechas por Heaviside, puesto que para Heaviside:

La teoría de Maxwell de desplazamiento eléctrico, y la inducción magnética que se propagan en un dieléctrico no conductor en forma de movimientos como en un sólido incompresible. El tema es un tanto oscurecido en el tratado de Maxwell por sus ecuaciones de propagación que contiene A, Ψ, J las cuales son funciones consideradas a distancia, de los vectores que representan el estado del campo, a saber, las fuerzas eléctricas y magnéticas, y por algunos razonamiento de origen dudoso con Ψ y J ... otros métodos equivalentes que emplean potenciales son bastantes inadecuados para el tratamiento de las ondas electromagnéticas, y es entonces en general de naturaleza poco práctica... puesto que el flujo de energía llevado a cabo es perpendicular a la dirección al plano que contiene las fuerzas eléctrica y magnética (del campo), entonces se puede escribir la energía del flujo como: $W = V \cdot EH$ sin acudir a ninguna función potencial⁵⁷.

Heaviside ignora las funciones potenciales, y en vez de ellas utiliza solo funciones que relacionan las fuerzas: eléctrica y magnética, escribiendo sus ecuaciones, Berkson pág. 240, libres de toda función potencial y de manera simétrica tanto para lo eléctrico como para lo magnético. Estas son sus ecuaciones⁵⁸:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} D &= \rho & \operatorname{rot} H &= J \\ \operatorname{div} B &= \sigma & -\operatorname{rot} E &= G \end{aligned}$$

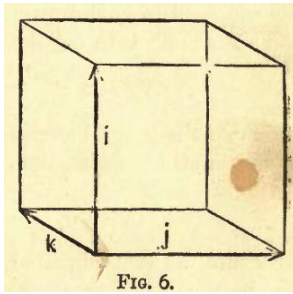
Para Heaviside, no solo los potenciales son confusos, también lo es el lenguaje cuaternion que Maxwell utiliza para escribir sus ecuaciones⁵⁹. Por ejemplo escribe Heaviside (pág. 303) que el vector de seguir las reglas de los cuaterniones, cabe el resultado extraordinario que el cuadrado de cada vector es un escalar negativo. Esto es simplemente cierto para el cuadrado de cuaterniones, y el vector tiene que seguir su ejemplo. Para Heaviside, continua, este sistema revuelto sería una

⁵⁶ En el *Treatise*, pág. 222, 238, Maxwell escribe la fuerza electromotriz (\mathfrak{C}) en función del potencial eléctrico (Ψ), así: $\mathfrak{C} = -\nabla\Psi$. De igual forma, el potencial escalar magnético (Ω) asociado a la fuerza magnética (\mathfrak{S}) lo escribe así: $\mathfrak{S} = -\nabla\Omega$.

⁵⁷ O. Heaviside págs. 66, 78, 127. La ecuación $W = V \cdot EH$ que aparece en la pag. 66, dice Heaviside, que esta fórmula notable primero fue descubierta e interpretada por el Prof. Poynting e independientemente por él mismo un poco más adelante. Esta ecuación de la radiación de energía se escribe hoy como: $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$

⁵⁸ Berkson, pág. 240 escribe a este respecto: *la densidad de carga supuestamente ficticia (σ) fue añadida por razones de simetría*. O. Heaviside págs. 35,50,52.

⁵⁹ A lo largo del *Treatise*, págs. 222; 237-238; 247,249 Maxwell escribe sus ecuaciones del electromagnetismo en el lenguaje simplificado de los cuaterniones.



grave recomendación para los físicos puesto que atentan contra el sentido común que rechaza las cosas revueltas como lo son las doctrinas cuaterniónicas sobre vectores. Nada podría ser más antinatural.

Heaviside argumenta que los vectores se deben tratar vectorialmente, y aunque puedan representar un cuaternion, siempre serán vectores. Escribe al respecto: *Una vez que un vector, siempre será un vector, debe ser un axioma cardinal*⁶⁰. Escribe las reglas fundamentales para el cuadrado de un vector⁶¹, pero deja como resultado para el producto cruzado las reglas fundamentales de Hamilton⁶², con un cierto matiz de diferencia en que el producto vectorial, por ejemplo $V.ij$, su resultado es un vector perpendicular k a i y a j de la rotación positiva del vector i a j como lo muestra la *figura 6*.⁶³ Interpreta i, j, k , no como cantidades complejas, sino como los versores asociados con las direcciones de los ejes coordenados cartesianos⁶⁴ x, y, z deduciendo entre otras cosas, el producto escalar entre dos vectores (pág. 149) como la magnitud de cada uno por el coseno del ángulo comprendido entre ellos:

$$S.AB = AB\cos\theta$$

Y el producto vectorial (pág. 150) como la magnitud de cada vector por el seno del ángulo entre ellos, cuya dirección del vector c es perpendicular al plano que contiene los vectores ab . De manera explícita: $c = V.ab = ab \text{ Sen}\theta$.

Para concluir, escribe Heaviside, un camino que no está concluso, *mi sistema, hasta ahora de ser contrario al sistema cartesiano de las matemáticas, es su esencia misma*⁶⁵.

⁶⁰ O. Heaviside pág. 303

⁶¹ O. Heaviside pág. 149, ecuación (13): $i^2 = 1, j^2 = 1, k^2 = 1$

⁶² Cap. I, pág. 9

⁶³ Tomada de O. Heaviside pág. 157

⁶⁴ O. Heaviside pág. 143

⁶⁵ O. Heaviside pág. 305

Conclusiones

1. Con el desarrollo de la investigación se puede sacar como primera conclusión que la riqueza conceptual que se puede adquirir con el trabajo de documentos de primer orden es de gran relevancia para maestros en formación continua que le permite abordar los problemas de la física no desde un punto simplista de la historia como un desarrollo histórico en forma de anécdota sino de poder hilar y construir significados a problemáticas actuales pero fundamentadas en las razones de fondo que condujeron a la aparición de los diferentes sistemas de sistematización de la ciencia, en particular la física.
2. Por otra parte, si examinamos el lenguaje de los cuaterniones, propuestos por Hamilton y puestos al servicio de la física, nos encontramos con otra manera de comprensión de los fenómenos electromagnéticos, que no discrepa mucho de la actual, aunque no sea la manera más idónea, no se abandona tal sistema como lo mencionan O. Heaviside y J.C. Maxwell, entre otros, sino que al contrario se reestructura y se hace una interpretación física de los mismos para que estén en correspondencia con la conceptualización y experimentación de los fenómenos electromagnéticos, **dejándonos ver que tal maquinaria matemática debe ser reestructurada para que tenga sentido físico y no viceversa** (contrario a lo que se piensa, no se puede reestructurar un fenómeno físico para ajustarlo a la maquinaria matemática de que se disponga); es decir, para formalizar un fenómeno, hay que construirse o inventarse el andamiaje matemático que lo sustente, mirando diferentes posturas sobre el mundo físico, repensar la imagen de ciencia y abordar problemas epistemológicos espaciales (lo matemático y lo conceptual) y pedagógicos.
3. Los aportes de Heaviside son de gran relevancia tanto en sus conclusiones matemáticas como físicas. En primer lugar: sintetizó las 20 ecuaciones de Maxwell eliminando los potenciales _escalares y vectoriales_ de sus ecuaciones y reescribiéndolas en su sistema propio que denominó *análisis*

vectorial, aunque no encontramos en ninguna página del libro *Teoría Electromagnética* de Heaviside un compendio de ecuaciones de las cuales escriba Heaviside “*son las que sintetizan el electromagnetismo de Maxwell*”, si encontramos algunas de las más relevantes que se relacionan a lo largo de todo el libro (págs. 35, 50, 52) y que de entrada en el capítulo II *las llama magnitudes fundamentales que describen el campo electromagnético*, a saber, fuerza eléctrica y magnética que en contraste con Maxwell estas no son las magnitudes fundamentales sino las funciones potenciales de las cuales hace uso frecuente en el tratado de electricidad y magnetismo y de las cuales deriva las fuerzas: eléctrica y magnética.

4. Heaviside de manera ingeniosa sin recurrir a las funciones potenciales de Maxwell, encuentra una relación vectorial entre las magnitudes que definen el estado del medio \vec{E} y \vec{H} que mide el flujo de energía de los campos (eléctrico y magnético) que hoy día se conoce como vector de Pointyng del cual la historia ha cometido un grave error puesto que se debería llamar vector de Heaviside-Pointyng.
5. La caracterización geométrica que hace Heaviside de las magnitudes básicas, de fuerzas como líneas y flujos como tubos así como la clasificación de los flujos en dos, los que involucran almacenamiento de energía y los que involucran su gasto, da un panorama claro del electromagnetismo dándole un significado preciso a cada magnitud utilizada para dar cuenta del fenómeno electromagnético, evidenciando su necesidad en el sistema teórico.
6. Maxwell y Heaviside hacen uso de formas diferentes de asumir la relación mecánica electromagnetismo en el proceso de elaboración sus sistemas teóricos sobre el electromagnetismo. Maxwell acude ya sea a la generación de modelos mecánicos que dejen ver el mecanismo seguido en la producción de efectos o a la explicitación y construcción del homorfismo existente entre dos campos fenoménicos diferentes: movimiento de un fluido incompresible y/o la electricidad y el magnetismo para matematizar el

electromagnetismo de Faraday. Heaviside, por su parte, retoma tanto la geometrización insinuada por Maxwell como los esquemas teóricos más generales de la mecánica para reorganizar con ellos el electromagnetismo de Maxwell.

7. Mostrar los aportes de Oliver Heaviside implicó generar un contexto de significación de la obra de Heaviside especialmente a nivel de lo matemático y de lo físico, convirtiendo la interrelación entre los sistemas matemáticos y conceptuales base de la teorización del electromagnetismo que hoy conocemos en el eje estructurante del trabajo realizado y con ello la relación entre lo matemático y lo conceptual un objeto de indagación para otras investigaciones.
8. El examen del trabajo realizado por Heaviside nos ha permitido visibilizar cómo la obra de Maxwell ha sido afectada por un conjunto de hechos y transformaciones hasta llegar a la teoría electromagnética que en general hoy se conoce, lo cual nos ha posibilitado tener un mejor acercamiento a la actividad científica, transformando nuestra imagen de ciencia y generando una nueva perspectiva para nuestro actuar en el aula, que hará de *los procesos* y no de los resultados o productos una forma de asumir la actividad cognitiva en el aula.

Bibliografía

ADRIANA, F. (03 de Noviembre de 2008). Introducción a los Cuaterniones . Argentina : Universidad Tecnológica Nacional .

AYALA, J. C. (2006). De los fenómenos mecánicos al mecanicismo: Sobre la relación mecánica electromagnetismo.

AYALA, M. (s.f.). La Relación Mecánica –electromagnetismo y la Mecánica de los medios elásticos. Bogotá.

AYALA, M. (2006). *Los analisis historico criticos y la recontextualizacion de saberes científicos construyendo un nuevo espacio de posibilidades. Pro-Posicioies* , 17 (1), 33.

BACHELARD, G. (1948). *La formación del espíritu científico* (Primera ed.). (J. Babini, Trad.) Francia: Argos, Buenos Aires.

BERKSON, W. (1985). *Las Teorías de los campos de fuerza. Desde Faraday hasta Einstein* (segunda version española ed.). Madrid, España : Alianza.

BURBANO, P. P. (2001). REFLEXIONES SOBRE LA ENSEÑANZA DE LA FÍSICA. *Universitas Scientiarum* , 6 (2), 55 - 59.

CASTILLO, J. (2006). De los fenómenos mecánicos al mecanicismo: Sobre la relación mecánica electromagnetismo. Bogotá, Colombia.

CROWE, M. J. (1985). En M. J. Crowe, *A history of vector analysis: the evolution of the idea of vectorial system* (pág. 20). USA.

CROWE, M. J. (2002). *A History of Vector Analysis*. U.S.A:
https://www.math.ucdavis.edu/~temple/MAT21D/SUPPLEMENTARY-ARTICLES/Crowe_History-of-Vectors.pdf.

J.L. DORIER, (1997). *Recherche en histoire et en didactique des mathématiques sur l'algèbre Linéaire. Perspectives théoriques sur leur interactions*, (Vol. Nota No. 51, pág. 81). Washington D.C.

FAVIERI, A. (03 de Noviembre de 2008). Introducción a los Cuaterniones. Argentina: Universidad Tecnológica Nacional .

FRANCISCO, V. R. (08 de junio de 2009). ¿Debo entender la digestion para disfrutar una buena cena? *Magazine* , 2.

G.M. SIERRA, P. B. (2008). Una epistemología histórica del producto vectorial: Del cuaternión al análisis vectorial. *Latin-American Journal of Physics Education* , 2 (2). (1884). En J. W. Gibbs, *Elements Of Vector Analysis*. USA.

GONZALES, H. J. (2015). Recuperado el 20 de Octubre de 2014, de <http://thespectrumofriemannium.wordpress.com/>

HAMILTON, W. R. (1837). En W. R. Hamilton, & D. R. Wilkins (Ed.), *Theory of conjugate functions, or Algebraic couples; with a preliminary and elementary essay on Algebra as the science of pure Time* (Vol. 17, págs. 239-422). Irlanda .

W. R. HAMILTON, (1843). *On a new species of imaginary quantities connected with a theory of quaternions* (Vol. 2, págs. 224-234). Irlanda .

W. R. HAMILTON, (1847). & P. o. Academy (Ed.), *On quaternions* (Vol. 3, págs. 1-16). Irlanda.

HAMILTON, W. R. (1853). En W. R. Hamilton, & D. R. Wilkins (Ed.), *Lectures on Quaternions* (Vol. 17, pág. 27). Irlanda : The Royal Irish Academy.

HAMILTON, W. R. (1844). ON QUATERNIONS, OR ON A NEW SYSTEM OF IMAGINARIES IN ALGEBRA. (D. R. Wilkins, Ed.) *Philosophical Magazine* . Heaviside, O.

HEAVISIDE, O. (1893). *Electromagnetic theory vol I* (Primera edicion ed., Vol. 1). LONDRES: LONDON PUBLICATION.

H. HERTZ, (1990). *Las Ondas Electromagnéticas* (págs. 54-58).

Hertz, H. R. (20 de septiembre de 1889). SOBRE LAS RELACIONES ENTRE LA LUZ Y LA ELECTRICIDAD. New York.

Kelvin, L. (1867). On vortex atoms. En R. Society (Ed.). Edinburgo.

MAXWELL, J. C. (1965). Ether, the Scientific Papers of James Clerk Maxwell, vol II, pp. 763-775, Dover Publications Inc. 2 . (J. C. Cruz, Trad.) New York: Niven .

MAXWELL, J. C. (1835-1836). *On Faraday's Lines of force* (Vol. X parte I). Cambridge .

P.G.TAIT. (1882). *Treatise Elementary on quaternion*. PARIS: GAUTHIER VILLARS.

RAUTIO, J. C. (2008). ¿por qué costó 23 años para que se aceptara la teoría del electromagnetismo de Maxwell. *Microwave Journal* , 51 (7), 2.

THOMSON, W. (1867). On Vortex Atoms.