Sobre el Principio de Mínima Acción: una mirada alrededor de los trabajos realizados por Maupertuis, Euler y Lagrange.

Cristian Camilo Moreno Mojica

Asesor: Mauricio Rozo Clavijo

Programa de Licenciatura en Física
La Enseñanza de las Ciencias desde una Perspectiva Cultural
Grupo Campos y Partículas

Bogotá, D.C.

2013

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de grado
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Titulo del documento	Sobre el Principio de Mínima Acción: una mirada alrededor de los trabajos realizados por Maupertuis, Euler y Lagrange.
Autor(es)	Moreno Mojica, Cristian Camilo.
Director	Rozo Clavijo, Mauricio.
Publicación	Bogotá, Universidad Pedagógica Nacional, 2013. 54 p.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional
Palabras Claves	Principio de mínima acción, conocimientos facticos, problemas variacionales, variación, máximos y mínimos.

2. Descripción

Las ciencias y en particular la física, está fundamentada sobre un conjunto de postulados, leyes y principios que son expresados a través de una formalización que los sujetos hacen de los fenómenos y que en muchas ocasiones no tienen sentido ni significado para los estudiantes. Es así, como el principio de mínima acción se convierte en una dificultad para los estudiantes, ya que los docentes y en general en la literatura especializada se presenta como una expresión matemática que se adquiere con el fin de calcular y obtener alguna información. Bajo esta perspectiva, se propone realizar una exploración para indagar e identificar la necesidad sobre la formulación del principio de mínima acción, con el fin de reconocer la importancia y significado para la explicación de los hechos y cosas que acontecen en la naturaleza.

Este trabajo nace gracias a un curso de mecánica analítica en el cual se abordan el principio de mínima acción desde los textos Landau y Goldstein, los cuales presentan el principio desde su notación matemática definiendo el lagrangiano y sus coordenadas generalizadas, estos textos presentan los pasos a seguir para la solución de la ecuación diferencial de Euler-Lagrange, sin embargo no presenta claramente por que la física se debe atacar desde este principio y no desde las leyes de Newton que hemos venido trabajando toda la carrera, es por esto que se plantea la siguiente pregunta ¿Cuál es el sentido y significado del principio de mínima acción?, para solucionar esta problemática, partimos por realizar un estudio histórico y epistemológico del principio de mínima acción desde los trabajos originales de tres autores, con la intención de reconocer la motivación de cada uno de ellos por proponer el principio, reconocer las problemáticas de sus contexto y que se responde con este principio.

Para esto creemos necesario atacar los artículos originales desde el estudio de los conocimientos facticos y conceptos estructurales, con el fin de tener un dialogo con los autores para reconocer el papel que tiene las interacciones sociales en la construcción de las ciencias. En este sentido, se abordan los artículos originales de Pierre Louis de Maupertuis, Leonard Euler y Lagrange con el fin de realizar una exploración e identificación de cómo estos autores proponen por primera vez la idea sobre el principio mínima acción

3. Fuentes

Descartes, R. (1981). Discruso de metodo, dióptrica, meteoros y geometria. Alfaguara.

Euler, L. (1985). Reflexiones sobre el espacio, tiempo y materia. Alianza .

Euler, L. (1990). Cartas a una princesa de Alemania sobre diversos temas de física y filosofia. Prensa universitaria de Zaragoza.

Euler, L. (1993). Método para hallar líneas curvas que gocen de una propiedad de Máximo o de Mínimo o solución del problema isoperimetrico tomaso en sentido latísimo. Publicacions de la Universitat Autónoma de Barcelona.

Frase, C. (1985). D'Alembert's Principle: The Original Formulation and Application in Jean d'Alembert's Traité de Dynamique. Institute for the History and Philosophy of Science and Technology, University of Toronto, 31-61.

Giordan, G. y. (1986). La historia de las ciencias: una herramienta para la enseñanza. Enseñanza de las ciencias.

Gutiérrez, F. J. (2004). Apuntes de Matemática Discreta. Cádiz.

Lagrange, j. (1760). Essai d'une nouvelle methode pour Determiner les máxima et les minima des formules intégrales indéfinies.

Maupertuis, P. (1758). Examen fiosofico de la prueba de la existencia de Dios . Traduccion de Juan Arana, 180-215.

Maupertuis, P. (1985). El orden verosímil del cosmos. Madrid: Alianza editorial.

Rego, V. P. (2003). Lagrange La elegancia matemática. nivola.

Thomas, H. (1988). Ciencia e ilustración. Madrid: Siglo XXI de España Editores.

Urbaneja, P. M. (2007). La Historia de la Matemática como recurso didáctico e instrumento de integración cultural de la Matemática. Historia de las matemáticas para la enseñanza en la secuandaria.

4. Contenidos

El trabajo está compuesto por cuatro capítulos, los cuales se muestran a continuación:

La historia como una estrategia para la enseñanza de la física: En este capítulo se hace una presentación de la importancia de los estudios históricos y epistemológicos para la enseñanza de la física, apoyándonos en los conceptos facticos y conceptos estructurales para la enseñanza de la física.

La metafísica de Maupertuis en la mecánica: una mirada en torno al principio de mínima cantidad de acción: En este capítulo se presenta las posturas y motivación de Maupertuis, se realiza un análisis de sus trabajos en relación al principio de mínima cantidad de acción y el contexto problemáticos del siglo XVII.

La mecánica por Leonard Euler: En este capítulo hace una presentación de la reorganización de la mecánica propuesta por Euler, resaltando los problemas de ella y mostrando la necesidad de construir el método de máximos y mínimos aplicable a curvas, para llegar finalmente a la formalización del principio de mínima acción a partir su método propuesto.

La mirada de Lagrange: En este capítulo re realiza un análisis de los trabajos de Lagrange en relación al método de máximos y mínimos propuestos por Euler, para reconocer el significado de la variación e identificar los aportes que contribuyeron a la construcción del principio de mínima cantidad de acción.

5. Metodología

Se realiza un trabajo de corte histórico y epistemológico, apoyado en la teoría de los conceptos facticos y conceptos estructurales; con la intensión de reconocer y reproducir las posturas y motivaciones de los autores que se desea indagar, para reconocer la importancia del principio de mínima cantidad de acción.

6. Conclusiones

Cuadro comparativo entre los autores

Maupertuis	Euler	Lagrange
Fue el primero en proponer el principio de mínima cantidad de acción con el fin de evidenciar la existencia de Dios a partir de la simplicidad y uniformidad de la naturaleza(Maupertuis, 1758).	Es de posturas newtonianas. Sin embargo, propone una reorganización de la mecánica de Newton con la intención de aclarar los conceptos de espacio, fuerza y materia(ya que estos son los fundamentos	Los trabajos de Lagrange parten por un reconocimiento matemático por parte de Euler. Realiza una investigación alrededor del trabajo propuesto por Euler, en relación al

Es de posturas newtonianas, sin embargo encuentra que los postulados de Newton no satisfacen el estudio de la mecánica por los vacíos conceptuales presentados en la definición de espacio, tiempo y fuerza.

Propone la unificación (propuesta del principio de mínima acción) de los postulados newtonianos con la intención de construir un principio que dé cuenta sobre el comportamiento de los cuerpos en la naturaleza. Retoma los trabajos propuestos por Leibniz, Descartes y Huygens como punto de partida de su principio.

Su propuesta tiene la intención de axiomatizar la mecánica, cuyo sentido es la utilización de las matemáticas de la época.

Propone un principio a partir de las concepciones pitagóricas de simplicidad y uniformidad como: "*si las leyes del movimiento son expresadas con la mayor economía, se demostrara la existencia del ser supremo*" (Maupertuis, 1758, pág. 188).

Define la acción como el duplo de las fuerzas vivas por el tiempo, y propone que "*cuando ocurre un cambio en la naturaleza, la cantidad de acción necesaria para este cambio, es lo más pequeña posible* (Maupertuis, 1985, conceptuales de la mecánica). Complementa la concepción de espacio introduciendo los movimientos relativos.

Euler desliga de su trabajo la teología dado las dificultades que tuvo Maupertuis en su propuesta y afirmando que la teología no es necesaria para axiomatizar ni validar el principio de mínima acción.

Reconoce que la reorganización no es posible ya que la mecánica de Newton se fundamenta en postulados. Desde esa perspectiva, afirma que cualquier académico debería ser capaz de comprender la naturaleza de la misma forma que lo haría Newton.

Procede a trabajar con los hermanos Bernoulli en matemáticas aplicadas, construyendo un método de máximos y mínimos aplicable a curvas tomadas de los movimientos de los cuerpos en la naturaleza.

En los trabajos de Descartes encuentra la relación que existe entre el espacio de Newton y el plano cartesiano. Propone el plano cartesiano como la axiomatización del espacio newtoniano.

Euler concluye que todas las curvas mecánicas (tomada del movimiento de los cuerpos en la naturaleza) son mínimas en relación a todas las demás método de máximos y mínimos.

Propone un artificio matemático que le permite obtener la ecuación que denomina Euler-Lagrange, a partir de la variación de la acción, y con éste logra reducir el nivel de complejidad del principio formalizado por Euler.

Con la propuesta de Lagrange se obtienen las ecuaciones de movimiento de los sistemas mecánicos a partir de la funcional denominada lagrangiano. El lagrangiano se construye a partir de la fenomenología observada.

La propuesta de Lagrange es acogida por los académicos de la época por su simplicidad y gran generalidad.

Los trabajos de Lagrange abren el camino hacia nuevas miradas lideradas por Hamilton y Jacobi, con la intención de axiomatizar la mecánica.

pág. 27)". Define una cantidad de acción diferente para cada sistema, lo cual genera una inconformidad para los académicos de la época dado que el principio no es general. Sin embargo, es considerada una propuesta innovadora para la época**.**	curvas que se pueden construir, mostrando la validez de la propuesta hecha por Maupertuis en relación al principio de mínima cantidad de acción. Define la cantidad de acción: "*como el movimiento colectivo del cuerpo a lo largo de un pequeño espacio dr* (el movimiento colectivo hace referencia a la cantidad de movimiento*)*" (Euler,1993, pág. 200) El método absoluto propuesto por Euler permite la formalización de la propuesta hecha por Maupertuis. Su propuesta está fundamentada en la geometría analítica de Descartes y el cálculo de Leibniz. Sin embargo, el método propuesto conduce a realizar cálculos complejos y extensos que la comunidad académica de la época no estaban dispuestos a desarrollar.	

El realizar un estudio de corte histórico y epistemológico permite desmitificar que las ciencias son construidas por algunos genios, sino reconocer que está es construida en consenso social el cual es cambiante según su contexto, ya que actualmente se cree que Euler construyo el principio de mínima acción, donde en el trabajo se muestra que él parte de los trabajos de Maupertuis y Descartes en relación al principio.

A pesar de las diferencias entre los autores sus preocupaciones no se limitan a la matematización de la mecánica, sino existen en ellos una necesidad de aclarar conceptualmente los fundamentos en los que se sustenta la mecánica como los son: espacio, tiempo, materia y fuerza, con la intención de que la sociedad pueda comprender el comportamiento de los cuerpos en la naturaleza.

Este principio consiste en resaltar la relación entre las matemáticas y la física, la cual a partir de sus magnitudes y relaciones abstractas permite descubrir fenómenos del mundo natural, utilizando principios, axiomas, teoremas entre otros; es necesario reconocer que los autores buscan la forma de corregir los problemas conceptuales de los fundamentos de la mecánica, sin embargo, la única alternativa que encuentra Maupertuis es formular el principio con la intención de estudiar la naturaleza a partir de él.

El principio de mínima cantidad de acción resuelve los problemas en las definiciones de espacio, tiempo, materia y fuerza, fundamentado en la definición de una funcional que me permite obtener las ecuaciones de movimientos, esta funcional se puede escribir en términos de cantidad de movimiento o fuerzas vivías; donde Actualmente se trabaja a partir de un lagrangiano o hamiltoniano según el caso.

La propuesta de esta investigación es reconocer la importancia de que los docentes de física introduzcan en sus cursos las problemáticas conceptuales que tiene las leyes de Newton, con la intensión que el estudiantes se apropie de estas, y más aún para que el estudiantes comprenda la necesidad de estudiar la mecánica desde el principio de mínima cantidad de acción, ya que las teorías modernas de la física están sustentadas en la axiomatización o matematización de la mecánica.

Elaborado por:	Cristian Camilo Moreno Mojica
Revisado por:	Mauricio Rozo Clavijo

Fecha de elaboración del Resumen:	4	08	2013

Tabla de Contenido

INTRODUCCIÓN

Las ciencias y en particular la física, está fundamentada sobre un conjunto de postulados, leyes y principios que son expresados a través de una formalización que los sujetos hacen de los fenómenos y que en muchas ocasiones no tienen sentido ni significado para los estudiantes. Es así, como el principio de mínima acción se convierte en una dificultad para los estudiantes, ya que los docentes y en general en la literatura especializada se presenta como una expresión matemática que se adquiere con el fin de calcular y obtener alguna información. Bajo esta perspectiva, se propone realizar una exploración para indagar e identificar la necesidad sobre la formulación del principio de mínima acción, con el fin de reconocer la importancia y significado para la explicación de los hechos y cosas que acontecen en la naturaleza.

Este trabajo nace gracias a un curso de mecánica analítica en el cual se abordan el principio de mínima acción desde los textos Landau y Goldstein, los cuales presentan el principio desde su notación matemática definiendo el lagrangiano y sus coordenadas generalizadas, estos textos presentan los pasos a seguir para la solución de la ecuación diferencial de Euler-Lagrange, sin embargo no presenta claramente por que la física se debe atacar desde este principio y no desde las leyes de Newton que hemos venido trabajando toda la carrera, es por esto que se plantea la siguiente pregunta ¿Cuál es el sentido y significado del principio de mínima acción?, para solucionar esta problemática, partimos por realizar un estudio histórico y epistemológico del principio de mínima acción desde los trabajos originales de tres autores, con la intención de reconocer la motivación de cada uno de ellos por proponer el principio, reconocer las problemáticas de sus contexto y que se responde con este principio.

Para esto creemos necesario atacar los artículos originales desde el estudio de los conocimientos facticos y conceptos estructurales, con el fin de tener un dialogo con los autores para reconocer el papel que tiene las interacciones sociales en la construcción de las ciencias. En este sentido, se abordan los artículos originales de Pierre Louis de Maupertuis, Leonard Euler y Lagrange con el fin de realizar una exploración e identificación de cómo estos autores proponen por primera vez la idea sobre el principio mínima acción, desarrollando el trabajo en cuatro capítulos, donde el primero de ellos es una presentación de las corrientes pedagógicas que se trabajan en el escrito, el segundo es un análisis en relación a los escritos de Maupertuis, el tercero es un análisis de los escritos de Euler y finalmente el cuarto es un análisis de los escritos de Lagrange, introduciendo dos apéndices de producto cartesiano y el método absoluto de máximos y mínimos.

En el departamento de física de la Universidad Pedagógica Nacional, encontramos un anteceden que se titula "*génesis y desarrollo del principio de mínima dentro de la física*.escrito por Orlando Aya Corredor, esta trabajo desarrolla el principio de mínima desde los aportes hechos por Heron hasta llegar a la notación de Hamilton- Jacobi, sin embargo, el trabajo se enfatiza en la notación pero no reconstruye las discusiones del principio para identificar la necesidad de ser propuesto, por esto el trabajo se desarrolla para resaltar el sentido y el significado del principio de mínima acción. Alrededor de las propuestas a nivel internacional se encuentran traducciones de los originales de Euler, Lagrange y Maupertuis, pero no hay un escrito que recopile con detalle cómo se construyó el principio, como el trabajo titulado: El principio de mínima acción de Maupertuis: el sueño de una visión unificadora del mundo en el siglo XVIII, o la búsqueda de Dios a través de la belleza y simplicidad de las teorías, escrito por Vicente Menéndez.

Es así como Maupertuis motivado en demostrar la existencia de Dios, propone una explicación sobre el movimiento de los cuerpos a partir de un principio de simplicidad con el propósito de unificar los postulados[1] de Newton en una sola expresión y así axiomatizar las concepciones newtonianas del movimiento.

Maupertuis (Maupertuis, 1758) emprende un examen crítico sobre los postulados newtonianos y a la vez reconoce los problemas que están a la base, indicando que la mecánica no puede ser propuesta a partir de postulados, ya que, si lo fuera, los académicos de todas las épocas deberían ser capaces de comprender la naturaleza de la misma forma que lo ha hecho Newton. Por lo cual, Maupertuis propone el principio de mínima cantidad de acción

[1]Maupertuis se refiere a las leyes de Newton, ya que Newton formula la mecánica a partir de sus interacciones con la naturaleza, y las describe a partir de su experiencia sensible.

intentando formalizar la mecánica a partir de una magnitud que denomina acción, con la cual suprime el concepto de fuerza por el de cantidad de movimiento[2]. Esta nueva mirada aporta a la construcción de una mecánica axiomática, que permite definir un espacio métrico euclidiano y mostrar relaciones entre variables. Maupertuis presenta y desarrolla su idea sobre el principio de mínima cantidad de acción en cuatro artículos "*Loi du repos des corps*", (Maupertuis, 1985). "*Accord de différentesloix de la nature quiavoient jusqu'ici paru incompatibles*", (Maupertuis, 1985). "*Essai de philosophiemorale*" (Maupertuis, 1985) y "*Sur la figure de la terre*" (Maupertuis, 1985), en los cuales define la acción como el duplo de la fuerza viva; fuerza viva que fue propuesta por Leibniz y Wolff (Maupertuis, 1758). No obstante, el principio no es aceptado por la comunidad por el uso de argumentos metafísicos y por definir una cantidad de acción para cada fenómeno en particular. Sin embargo, reconocen que la propuesta hecha por Maupertuis es innovadora y genera una motivación para los demás académicos de la época.

Maupertuis por problemas de salud abandona la academia de Berlín y es Euler quien ocupa su cargo continuando con su trabajo. Euler propone una reorganización de la mecánica en el sentido de realizar una argumentación sobre sus fundamentos: la existencia del espacio y el tiempo, la naturaleza de la fuerza e identifica si ésta es una propiedad o una causa externa de los cuerpos. Reconoce que la reorganización de la mecánica es necesaria, pero, al querer realizarla encuentra que al estar fundamentada en postulados no la puede formalizar. Por lo cual decide abandonar temporalmente sus trabajos y motivado por los hermanos Bernoulli, realiza la construcción del método de máximos y mínimos para la formalización del principio de mínima acción y consecutivamente lo aplica a casos particulares como el movimiento parabólico y para una partícula libre.
El método propuesto por Euler se puede estudiar en dos partes: el método absoluto y el método relativo; estos son modelados a partir de una ecuación diferencial de segundo grado dependiente de los puntos inicial y final. El método absoluto permite saber si la curva es máxima o mínima con respecto a las demás curvas, las cuales deben tener la misma abscisa. Por otro lado, a partir del método relativo se construyen curvas que poseen un máximo o mínimo teniendo la misma abscisa y otras propiedades en común como las áreas bajo la curva, puntos de inflexión entre otros para poder ser comparadas.

[2]Maupertuis utiliza la cantidad de movimiento para que la cantidad de acción contenga el espacio y el tiempo en ella, y no se utilicen separadamente como se hace en las leyes de Newton, el no propone una unificación del espacio y el tiempo, si no reconoce que para la existencia del movimiento es necesario tener en cuentas tanto el espacio y el tiempo.

Euler al aplicar el método absoluto en curvas tomadas del movimiento de los cuerpos en la naturaleza, demuestra que estas trayectorias son mínimas entre las demás curvas que cumple la condición. Introduce el concepto de funcional para formalizar la propuesta del principio de Maupertuis y reescribe el movimiento de los cuerpos de una forma axiomática sustituyendo la idea de fuerza por la de acción expresada en términos de cantidad de movimiento o fuerzas vivas (Euler, 1993). De este modo, Euler define la acción como: "la cantidad de movimiento en un diferencial de curva o trayectoria del cuerpo" (Euler L. , 1993). Es de aclarar que el principio no es aplicable en medios resistentes y movimiento de varios cuerpos (Euler L. , 1993). Pero se reconoce que la axiomatización realizada por Euler permite hacer una relación entre el mundo real y la representación axiomática de la mecánica, siendo esta una herramienta que facilita la compresión del comportamiento de los cuerpos en la naturaleza.

Al tiempo que Euler realizaba su investigación, D'Alembert trabajaba en un nueva forma de suprimir el concepto de fuerza externa por el de la vis viva, conduciéndolo a retomar los fundamentos cinemáticos y aplicar el cálculo de Leibniz para la axiomatización de la mecánica, donde propone que es necesario realizar un estudio no de la causa que genera el movimiento sino del movimiento de los cuerpos en la naturaleza (Frase, 1985).

D'Alembert formaliza el principio de fuerzas vivas propuesto Leibniz a partir de la geometría analítica de Descartes y del cálculo de Leibniz (Thomas, 1988), lo cual le permite hacer un paso de la geometría al algebra y construir el concepto de función para relacionar las variables. En este sentido, se enfoca en el cálculo de un vector que representa la aceleración del cuerpo, para construir una expresión de segundo orden que le permita obtener las ecuaciones de movimiento del sistema a partir de ésta y de las condiciones de frontera. Sin embargo, al expresar el principio en términos geométricos no tiene mucha aceptación por la comunidad ya que se consideraba que la geometría haría más complejo el análisis (Frase, 1985).

Euler a partir del concepto de funcional introduce el cálculo de variaciones como una herramienta para hallar los máximos o mínimos de curvas mecánicas (curvas tomadas del comportamiento de los cuerpos en la naturaleza). Por otro lado, Lagrange parte de los trabajos propuestos por Euler con la intención de formalizar algunos problemas sobre el continuo de la funcional. Propone introducir el término de variación δ para garantizar las cotas superior e inferior entre las funcionales que componen la curva. Al aplicar la variación al principio de mínima acción encuentra la ecuación conocida con el nombre Euler-Lagrange, donde ésta permite obtener las ecuaciones de movimiento del sistema a partir de las condiciones de frontera. Además afirma que el principio no es una expresión matemática sino es la forma de axiomatizar y validar la mecánica hasta entonces conocida.

Capítulo 1

UNA ESTRATEGIA PARA LA ENSEÑANZA DE LA FÍSICA

Siendo las teorías elaboradas en contextos culturales específicos por comunidades científicas encargadas en producir y validar el conocimiento, la imagen de ciencia es vista como universal y centrada en los productos de la actividad científica. Esta imagen de ciencia instaura mediante su práctica, una noción de autoridad; autoridad que está representada por la literatura que tradicionalmente se emplea para la enseñanza de la física siendo los contenidos su eje central. En este contexto, el docente deberá encaminar la enseñanza a la búsqueda de estrategias y metodologías para el aprendizaje de los contenidos por parte de los estudiantes. Sin embargo, estas metodologías aunque valiosas, no permiten realizar un análisis crítico de los contenidos que se enseñan y la forma de abordarlos. Por lo cual, esta manera de abordar la enseñanza-aprendizaje de la física ha contribuido a mostrarla en el contexto social, como una disciplina llena de ecuaciones, conceptos y principios que han desanimado activamente la perspectiva de una ciencia dinámica de un quehacer científico por parte de los docentes involucrados en la construcción de conocimiento.

Por otro lado, también se plantean propuestas de investigación encaminadas a determinar las dificultades, obstáculos y problemas que tienen los estudiantes para la adquisición, manejo y uso adecuado de los conceptos, leyes y principios de la disciplina, buscando estrategias que faciliten una mejor comprensión y aprendizaje de los contenidos. Bajo este contexto, el conocimiento no puede ser construido ni responde a problemas propios de los sujetos, ya que conduce a darle un carácter de realidad objetiva a los productos de la actividad científica, eliminando la reflexión sobre lo que se enseña y planteando una pedagogía subordinada al conocimiento. De esta manera, se establece una relación de exterioridad entre conocimiento, docentes y estudiantes. Además, se dejan de lado los criterios en la organización de las temáticas de la física, del por qué se enseña lo que se enseña y sobre qué otros tópicos podrían ser abordados para su enseñanza.

Mirada la enseñanza de la física de esta forma, los docentes son puestos en un grado de subordinación frente al conocimiento científico, teniendo un papel de transmisor o mediador de conocimiento en la sociedad. Por lo cual, como lo plantean Gagliardi y Giordan (Giordan, 1986) es necesario rescatar las discusiones en relación a la enseñanza de las ciencias desde el conocimiento mismo, no sólo mirándolo como contenido de información sino como una construcción y un consenso social a partir de los procesos de comunicación con el otro, para que la población tenga una apropiación de las ciencias y sean utilizadas para la elaboración de su discurso social. La enseñanza de las ciencias retoma el papel de ser una herramienta transformadora de la ciudadanía, no sólo con el objetivo de formar profesionales, sino también promueve que la población pueda participar activamente en la construcción de su entorno recurriendo al discurso científico para ello.

Bajo esta perspectiva, el rol del maestro retoma un nuevo rumbo ya que su trabajo no se reduce a pensar cuál es la información que se debe transmitir a los estudiantes ni pensar en divulgar los últimos avances que se presentan en las teorías de moda, sino que además, su labor estará enfocada en torno a las ideas que los estudiantes explicitan y con ellas ir construyendo una explicación de los fenómenos abordados. En este sentido, Gagliardi y Giordan (Giordan, 1986) proponen una formación que permita que el estudiante se adapte a una serie de situaciones cambiantes, desarrollando la confianza en sí mismo, la disposición y el placer de aprender con la elaboración de explicaciones a los fenómenos abordados, de esta manera se forma y educa una población capaz de tener una participación directa y activa en la producción de conocimiento.

Bajo este contexto, se plantea utilizar las bases de corte histórico y epistemológico propuestos por Gagliardi y Giordan, (Giordan, 1986) para el estudio de las ciencias: humanas, sociales, económicas y científicas, en sus palabras, las bases estructurales son, "*aquellas que al ser construidas por los estudiantes determina una transformación de su sistema cognitivo, que les permite incorporar nuevos conocimientos* (Giordan, 1986, pág. 254)". Esta mirada permite la superación de algunos obstáculos epistemológicos y teóricos en la investigación o construcción del aprendizaje de las ciencias. No obstante, posibilita al estudiante el conocer cuáles han sido los conceptos base que fueron necesarios para la construcción y desarrollo de una explicación, al mismo tiempo, permite reconocer qué problemas surgen alrededor de estos según su contexto.

Al Realizar un análisis sobre una problemática en particular,este tipo de análisis permite reconocer cuáles fueron los conceptos estructurales y motivaciones que tuvieron los pensadores dando la posibilidad de reconstruir sus discusiones en la explicación de los fenómenos sin importar si actualmente son consideradas como invalidas. Además permite resaltar el diálogo y polémica del contexto dando la posibilidad de mostrar que el conocimiento o modelos científicos actuales no son verdades eternas o absolutas, sino construcciones realizadas en un contexto social definido, afirmando que el conocimiento no es una acumulación de observaciones acertadas ni la utilización de dispositivos tecnológicos, sino el uso de nuevos métodos donde estos permiten resaltar que la ciencia es construida por medio de interacciones sociales, ya que algunos argumentos que proponen son tomados de otros pensadores y se validan en consenso académico.

De esta manera, se puede mostrar la forma como se transforma el conocimiento, contextualizando y reconociendo los problemas políticos y económicos de la época. Además permite tener referencia de lo que se estaba instaurado en su momento, lo cual es un punto de partida para resaltar los avances que se proponen en cada época, evidenciando cuáles fueron las relaciones sociales, políticas y económicas que contribuyeron para su desarrollo, reconociendo en detalle los autores que se opusieron a la transformación y los sectores que intentaron detenerla. Esta propuesta permite que el estudiante sostenga un dialogo con los autores y más que ello, se haga participe de toda la problemática que se genera en cada época. Este tipo de estudio es una herramienta para que los estudiantes comprendan la situación actual de la ciencia, y con ello, desmitificar la imagen del científico, puesto que, quienes la construyen no son los genios benefactores sino los sujetos comprometidos en la construcción de conocimiento destacando que cada teoría es un proceso social dependiente de su contexto y problemática.

Por otro lado, Colombo, Sandoval y Julia (Colombo de Cudmani, 2004) proponen un estudio de las ciencias desde un conocimiento fáctico; una interacción con el objeto de estudio y la estructura cognoscitiva del sujeto que lo estudia, ya que, por medio del razonamiento se construyen explicaciones, interpretaciones y predicciones del comportamiento de los sistemas analizados. Las concepciones fácticas son el resultado de las interacciones de los sujetos y el objeto de estudio, siendo consensuadas socialmente según su contexto. Esta mirada permite el desarrollo de habilidades para explicar y desglosar las suposiciones con las hipótesis, permitiendo reconocer qué factores deben ser reorganizados y corregidos a partir de los datos experimentales. Esta manera de abordar la enseñanza permitirá ordenar las ideas de los sujetos en busca de una coherencia y claridad en ellas, mejorando sus estrategias de investigación ya que al proceder con mayor cuidado en el planteamiento del problema y desarrollo de los cálculos darán un nuevo rumbo en la explicación alrededor de los hechos y cosas que acontecen en la naturaleza.

Finalmente, se concluye que los conceptos estructurales y las concepciones fácticas permite que el estudiante tenga un participación activa en la construcción de su propio conocimiento siendo participes de su proceso de aprendizaje. Por lo cual, considero que es una forma de justificar y validar la importancia de realizar este tipo de investigación o estudio como aporte a la enseñanza, lo cual facilita una correcta compresión, ordenación y evolución de los conceptos, proporcionando instrumentos para que los estudiantes de ciencias asuman sus tareas con mayor rigurosidad y profundidad siendo este un ejercicio de gratificación y beneficio social.

Capítulo 2

LA METAFÍSICA DE MAUPERTUIS EN LA MECÁNICA: UNA MIRADA EN TORNO AL PRINCIPIO DE MÍNIMA CANTIDAD DE ACCIÓN

Maupertuis nació en Saint-malo Francia- el 28 de septiembre de 1698. Desde una corta edad fue apasionado por la música y las matemáticas. Su educación fue guiada para pertenecer a los mosqueteros grises de Francia, terminando su carrera a corta edad. En 1720 obtuvo la comandancia de una compañía de caballería permitiéndole viajar frecuentemente a Paris donde conoce a Nicolas Fréret, quien lo encamina a consagrarse enteramente al estudio de las matemáticas y la física. Rápidamente es reconocido entre los discípulos de Newton y aceptado como fellow en la Royal Society (Maupertuis, 1985). Posteriormente, frente a las inconformidades con las posturas cartesianas (Thomas, 1988) forma el círculo volteriano con la intención de refutar los modelos aristotélicos (Maupertuis, 1758) impuestos en Francia, intentando divulgar los postulados Newtonianos siendo la primera persona en popularizar los postulados de la gravitación universal en Francia.

El círculo volteriano[1] fue quién divulgó los trabajos realizados por Newton en los cuales se generaron disputas y controversias. Debatieron con los cartesianos sobre la validez

[1]El circulo voltariano es una comunidad académica conformada por Voltarie, Maupertuis, Mme de Châtele entre otros, con la intensión de introducir los Principias Newtonianos a la academia francés, esta comunidad nace para confrontar públicamente a la academia parisina (academia francesa).

de los modelos newtonianos como: la figura de la tierra, la mecánica celeste y la teoría corpuscular de la luz. Se generaron discusiones alrededor de la forma de concebir los fenómenos naturales estudiados en el siglo XVIII (Thomas, 1988). En 1735 Maupertuis escribe una memoria titulada, "*Sur la figure de la terre*", donde apoya el trabajo de Newton sobre que la tierra era un esferoide achatado hacia los polos (Maupertuis, 1985, pág. 20).

A pesar de la admiración que sentía Maupertuis por Newton, existían algunas inconformidades de éste en la forma de cómo Newton da explicación sobre el comportamiento de la naturaleza partiendo de sus postulados. Maupertuis considera que no es suficiente como Newton muestra la existencia de Dios a partir de los análisis realizados en torno al estudio del movimiento de los planetas, señalando que la propuesta realizada por Newton sobre las orbitas planetarias no era suficiente para dar cuenta sobre la simplicidad de la naturaleza y por ende sobre la existencia de Dios como el ser quien los controla (Maupertuis, 1985). Motivado a querer dar una explicación más formal a los fenómenos naturales, Maupertuis propone un estudio de ella desde corrientes metafísicas con la intención de axiomatizar los postulados[2] newtonianos y demostrar desde un principio fundamental la existencia de Dios(Maupertuis, 1758).

Por otro lado, al examinar los trabajos realizados por Leibniz, Maupertuis cree que no es suficiente la forma como éste demuestra la existencia de Dios a partir de principios de conservación o de las fuerzas vivas. Para Leibniz estos principios eran herramientas matemáticas que permitían tener una mejor compresión del comportamiento de la naturaleza, pero, sin embargo, con ellos no se podía demostrar la existencia de Dios. No obstante, Maupertuis cree que al realizar un estudio del movimiento de los cuerpos desde principios de conservación, le permitiría describir el movimiento de los cuerpos desde posturas de simplicidad y uniformidad lo cual lo conduciría a su principio de mínima cantidad de acción.

Durante sus primeros años de vida científica, Maupertuis propuso realizar un análisis de los fenómenos de la naturaleza a través de principios conservativos que condujeran a las leyes de movimiento de los cuerpos. Es así que en 1745 da a conocer el escrito ti-

[2]Para Maupertuis la axiomatización es la unificación de las leyes newtonianas en una sola expresión, esto lo hace para corregir los problemas en las definiciones de espacio, tiempo y fuerza y evitar que los ateos de la época sustenten la inexistencia de Dios a parir de los trabajos realizados por Newton.

tulado:"Essai de philosophie morale" en el cual propone el principio de mínimum desde argumentos ontológicos, espirituales y éticos, donde genera controversia entre sus propios seguidores Franceses, lo cual ocasiona que lo tacharan de metafísico, y los leibnizianos de ignorante y plagiario, ya que sostenían que el principio de mínimum ya había sido enunciado por Leibniz en una carta dirigida a George Hermann Schulle (Maupertuis, 1985). Sin embargo, la carta original de Leibniz nunca se conoció y por este motivo los lebinizianos no pudieron corroborar el supuesto plagio y así aceptaron a Maupertuis como la primera persona que propone el principio de mínima cantidad de acción (Thomas, 1988). A pesar de ser una propuesta que no estaba del todo justificada era innovadora generando de esta manera una polémica en el siglo XVII (Thomas, 1988).

Maupertuis propone el principio de mínima cantidad de acción como: "*cuando ocurre un cambio en la naturaleza, la cantidad de acción necesaria para este cambio, es lo más pequeña posible* (Maupertuis, 1985, pág. 27)". Principio que lo considera válido para los fenómenos asociados a la luz y la dinámica. Además añade a éste la universalidad y economía de la naturaleza, plasmando sus discusiones y pensamientos en relación a éste en las memorias: "*Loi du repos des corps*" (Maupertuis, 1985). Lo aplica al estudio de los cuerpos en estado de equilibrio, (refiriéndose al caso de la palanca) buscando dar una explicación en términos de la cantidad de movimiento del sistema y proponiendo para ello que la suma de las acciones del sistema sea mínimo. Sin embargo, define la acción para este sistema como: "*el producto de sus masas por el cuadrado de su arco*" (Maupertuis, 1758).

2.1. MAUPERTUIS Y EL CASO DE LA PALANCA

Maupertuis plantea la manera de abordar el fenómeno : sea una barra de longitud c con su masa despreciable en cuyos extremos son colocadas dos masas, A y B. La distancia de la masa A al punto de equilibrio x es z y la distancia de la masa B al punto de equilibrio x es $(c - z)$, como se muestra en la figura 2.1.

Maupertuis desea hallar el punto donde el sistema se encuentra en equilibrio. Para esto aplica su principio buscando que la expresión acción sea mínima. En este sentido, encuentra que el sistema se mantiene en equilibrio a menos que sea perturbado por una causa externa a él, sin embargo, este seguirá en equilibrio si los arcos recorridos por las masas sean iguales ya que viajan en direcciones contrarias; es decir, para resolver el problema a

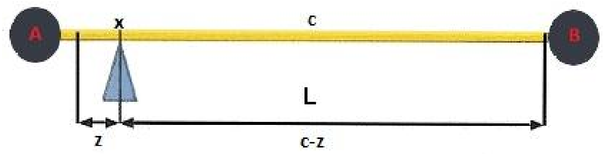


Figura 2.1: Sistema de equilibrio compuesto por dos masas (A y B) y una palanca de longitud c de masa despreciable.

partir de su principio procede a realiza la definición de la acción como: "*la cantidad de acción será proporcional al producto de cada cuerpo por el cuadrado de su arco*" (Maupertuis, 1985, pág. 129).

Al definir de esta manera la acción procede a realizar el cálculo del punto donde ésta debe ser mínima para que el sistema esté en equilibrio. Por lo cual, la acción del cuerpo A será Az^2 y la acción del cuerpo B será $B(c-z)^2$ donde la suma de las acciones debe ser un mínimo.

$$Az^2 + Bc^2 - 2Bcz + Bz^2 = \text{Mínimo}$$

Diferenciando con respecto a z la acción y garantizando el mínimo de ella se obtiene,

$$2Azdz - 2Bcdz + 2Bzdz = 0.$$

Agrupando términos, Maupertuis obtiene la relación fundamental,

$$z = \frac{Bc}{(A+B)}.$$

La anterior relación da la ecuación general para hallar el punto de equilibrio de cualquier sistema (principio de estática propuesto por Newton). Maupertuis a partir del principio de mínima cantidad de acción encuentra la proposición fundamental de la estática propuesta por Newton. Por otro lado, en la segunda memoria titulada: "Accord de différentes loix de la nature qui avoient jusqu'ici paru incompatibles"(Maupertuis, 1985), publicada en el año 1744, desarrolla el trabajo dado por Fermat sobre la refracción de la luz, abordándolo desde su principio de mínima cantidad de acción. En esta memoria atribuye un término llamado acción como una cantidad definida "*como el producto de la fuerzas vivas por el tiempo*" en honor de Leibniz y Wolff quienes propusieron por primera vez las fuerzas vivas; definición que relaciona estas fuerzas como el duplo de lo que hoy se conoce como la energía cinética del sistema (Thomas, 1988).

2.2. UN ANÁLISIS ALREDEDOR DE LOS FENÓMENOS DE REFLEXIÓN Y REFRACCIÓN: ARGUMENTOS DE PLAUSIBILIDAD ALREDEDOR DE LA IDEA DE MAUPERTUIS

En la época se deseaba realizar una formalización de los fenómenos de la refracción y reflexión de la luz a partir de explicaciones algebraicas, ya que Fermat había propuesto[3] una explicación alrededor de estos fenómenos desde la geometría euclidiana. Fermat parte por encontrar la trayectoria donde el rayo de luz toma el menor tiempo para viajar de un medio a otro. Propone que la trayectoria más corta sea una línea recta y construye todas las trayectorias posibles para que el rayo tome el tiempo más corto en viajar de un medio a otro. Sin embargo en su trabajo, no utiliza la idea de espacio por lo que Maupertuis cree necesario utilizar el principio de mínima cantidad de acción para reconstruir la ecuación propuesta por Fermat y Snell, con la intención de utilizar la magnitud acción que contiene la idea de espacio y el tiempo como lo afirma a continuación:

"*Cuando un cuerpo es trasladado de un punto a otro, es preciso para ello una cierta acción, esta acción depende de la velocidad que tiene el cuerpo y del espacio que recorre, pero no es ni la velocidad ni el espacio tomados separadamente. La cantidad de acción es tanto más grande, cuando mayor es la velocidad del cuerpo y más largo el camino que recorre, es proporcional a la suma de los espacios multiplicados cada uno por la velocidad con la cual el cuerpo los recorre* "[4] (Maupertuis, 1985, pág. 98).

[3]El principio de tiempo mínimo de Fermat propone que la luz para viajar de un medio a otro utiliza el camino que le tome el menor tiempo.

[4]Maupertuis argumenta la definición de acción para el caso de las refracciones de la luz, propone que la acción contiene el espacio y el tiempo, ya que la velocidad está en función del tiempo y el rayo de luz

Maupertuis aplica su principio a la refracción de la luz queriendo mostrar que la suma de las acciones debe ser un mínimo para obtener las ecuaciones propuestas por Fermat (Ley de Snell). Propone el análisis del fenómeno de la siguiente forma (Maupertuis, 1985, pág. 98): sean dos medios separados por la recta $\overline{CD}$ como se muestra en la figura 2.2. La velocidad del rayo de luz en el medio 1 es V y la velocidad del rayo de luz en el medio 2 es W.

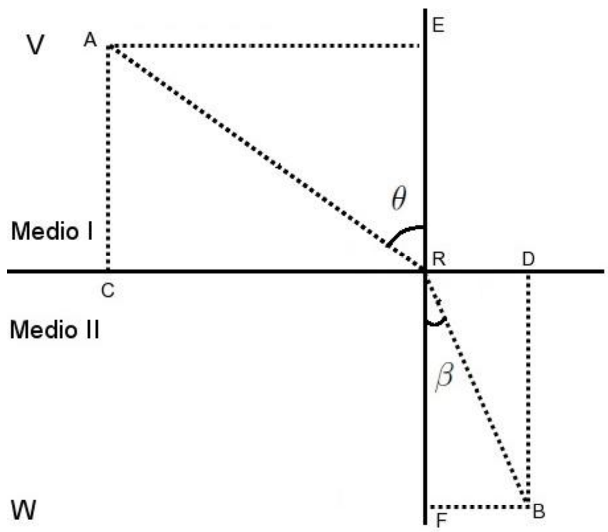


Figura 2.2: Refraccion de un rayo de luz que parte del punto A en el medio 1 hasta llegar al punto B en el medio 2.

El primer paso que realiza Maupertuis es definir la acción como el producto del espacio por la velocidad del rayo en el medio (Maupertuis, 1985, pág. 97), siendo necesario el espacio y la velocidad para describir al fenómeno. Propone el principio general: "*Cuando ocurre algún cambio en la naturaleza, la cantidad de acción necesaria para este cambio es la más pequeña que sea posible*" (Maupertuis, 1985, pág. 124).

A partir de este principio muestra que la cantidad de acción para el medio uno se puede expresar como el espacio recorrido $\overline{AR}$ por la velocidad del rayo en el medio (V). La cantidad de acción para el medio dos la expresa como el espacio recorrido por el rayo $\overline{RB}$

en cada instante ocupa lugar en el espacio. Maupertuis con la definición de acción quiere mostrar que el espacio y el tiempo ya no se estudian por separado, sino la cantidad de acción contiene los dos.

por la velocidad del rayo en el medio (W). Maupertuis propone que estas acciones deben ser un mínimo, ya que se debe gastar la menor cantidad de acción, es decir, la menor cantidad de energía o la menor cantidad de movimiento por los rayos. En este sentido obtiene:

$$V\overline{AR} + W\overline{RB} = Minimo.$$

Al proponer la cantidad de acción como mínimo, reconoce que el punto R es el punto donde debe quebrace el rayo y éste debe ser el único punto que permite que la suma de la cantidad de acción sea mínima. Por lo cual, los segmentos que varían son $\overline{CR}$ y $\overline{RD}$ ya que el punto R es el que se desea encontrar. Además considera que es necesario expresar las rectas por medio de sus componentes horizontales y verticales para evidenciar los triángulos rectángulos como se muestra en la figura 2, formados por las rectas $\overline{AR}$ y $\overline{RB}$, expresadas de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\overline{AR} &= \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{CR}^2},\\ \overline{RB} &= \sqrt{\overline{BD}^2 + \overline{RD}^2}.\end{aligned}$$

El segmento $\overline{RD}$ se puede expresar como $\overline{RD}$= $\overline{CD}$ - $\overline{CR}$, luego:

$$V\sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{CR}^2} + W\sqrt{\overline{BD}^2 + (\overline{CD} - \overline{CR})^2} = \text{Mínimo.}$$

Simplificando la expresión anterior se obtiene:

$$V\sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{CR}^2} + W\sqrt{\overline{BD}^2 + \overline{CD}^2 - 2\overline{CR}\overline{CD} + \overline{CR}^2}$$

En la expresión se reconoce que la variable con la cual se debe hacer la derivada es con respecto a $\overline{CR}$ ya que $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ y $\overline{DC}$ son constantes; al realizar la derivada de la expresión acción se obtiene:

$$\frac{V\overline{CR}}{\sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{CR}^2}} + \frac{W(\overline{CR} - \overline{CD})}{\sqrt{\overline{BD}^2 + (\overline{CD} - \overline{CR})^2}} = 0, \tag{2.1}$$

$$\frac{V\overline{CR}}{\overline{AR}} + \frac{W(\overline{CR} - \overline{CD})}{\overline{RB}} = 0,$$
$$\frac{V\overline{CR}}{\overline{AR}} + \frac{W(-\overline{RD})}{\overline{RB}} = 0,$$
$$\frac{V\overline{CR}}{\overline{AR}} = \frac{W\overline{RD}}{\overline{RB}},$$

$$\sin\theta = \frac{\overline{CR}}{\overline{AR}},$$
$$\sin\beta = \frac{\overline{RD}}{\overline{RB}},$$

se obtiene la expresión,[5]

$$\frac{V}{W} = \frac{\sin\beta}{\sin\theta}.$$

La anterior expresión da la ley de refracción obtenida por Snell en terminos de velociadades y el pricnipio de de timepo mínimo de Fermat. No obstante, los pensadores de la época no estaban de acuerdo con la explicación expuesta por Maupertuis, ya que él parte de una acción muy diferente a la propuesta para el caso de la palanca. Por lo cual, argumentan que la acción debe ser general para todos los sistemas y no se debe definir una acción para cada caso, ya que sería cuestión de azar conocer cuál es la que satisface al sistema, concluyendo de esta manera que el principio no es general.

Para Maupertuis el nuevo esquema planteado a partir de una magnitud llamada acción, permitirá expresar en un lenguaje más comprensible para la comunidad académica la forma de cómo se comportan los cuerpos en la naturaleza. En este sentido, Maupertuis muestra que las explicaciones hechas por Descartes, Leibniz, Newton y Huygens sobre diferentes fenómenos, pueden ser también explicadas a partir de su principio. Finalmente, la propuesta de Maupertuis se fundamenta en la idea de unificar las miradas de Descartes, Leibniz, Newton, etc, en una sola expresión matemática que sintetice el comportamiento

[5]Maupertuis toma el ángulo de incidencia y refracción con respecto a la línea vertical que se forma con el punto R para obtener la relación que presento Fermat en su escrito sobre el principio de tiempo mínimo, ya que si se toma los ángulos con respectó a la horizontal la expresión que se obtiene queda en términos de cosenos y no de senos.

de los cuerpos en la naturaleza de una manera simple lo cual permitiría evidenciar la existencia de Dios.

Por otro lado, algunos académicos de la época al reflexionar sobre el principio sólo encuentran de éste una demostración geométrica, punto sobre el que Maupertuis no presto gran atención ya que pensaba que las matemáticas debían tener un sustento filosófico para dar cuenta de los fenómenos de la naturaleza. En este sentido dice: "*si las leyes del movimiento son expresadas con la mayor economía, se demostrara la existencia del ser supremo*" (Maupertuis, 1758, pág. 188). En relación al carácter geométrico, Maupertuis argumenta que son impresiones que los objetos hacen sobre nuestros sentidos, permitiendo interactuar con el medio y reflexionar sobre éste.

Maupertuis resalta la importancia de considerar, para la descripción del movimiento de los cuerpos en la naturaleza, las cualidades inherentes a ellos considerándolos dentro de un entorno. Al realizar sus observaciones evidencio que los cuerpos tienen cualidades que son perceptibles gracias a la vista. Una de ellas es la extensión que se entiende como el área del cuerpo comparada con otros circundantes a él. Esta idea, que es tomada de nuestros sentidos, permite introducir en la mecánica la idea de extensión la cual permite comparar las cualidades espaciales entre los cuerpos a partir de cantidades numéricas. En palabras de Maupertuis: "*Hemos visto que cada sensación y, por consiguiente, cada sentido dá nacimiento a la idea de número. La idea de extensión tiene también una prerrogativa sobre las demás ideas ...*" (Maupertuis, 1758, pág. 192).

Por otro lado, a pesar de que Maupertuis era un seguidor de Newton encuentra algunas inconformidades sobre cómo Newton presenta sus postulados en los principia, ya que al realizar un análisis sobre sus postulados, reconoce qué para comprender los fenómenos de la naturaleza de la forma como lo hizo Newton sería imposible, ya que se debería pensar cómo Newton; para dar explicación a los fenómenos abordados. Por lo cual afirma, que la mecánica debe ser fundamentada por verdades necesarias; verdades que son demostrables a partir de las matemáticas y es así como nace la motivación para él de axiomatizar la mecánica de una manera que sea comprensible para la comunidad y no se tergiverse con la perspectiva de cada pensador.

Además Maupertuis reconoce que Descartes y Malenbranche proporcionan una nueva mirada de los fenómenos a partir de la geometría analítica, la cual permite por un lado, hacer una relación entre variables y por otro, la construcción de un plano cartesiano (Maupertuis, 1758). Sin embargo, en su análisis se desconoce como tal al fenómeno ya que se enfatiza en las operaciones y la obtención de valores que no tiene ningún sentido con el fenómeno. No obstante, Maupertuis retoma el aporte de Descartes definiendo el espacio como un contenedor de los cuerpos apoyandose en la geometría analítica y el álgebra. Maupertuis, finalmente muestra en sus escritos los vacíos conceptuales que tiene la teoría de Newton en relación al concepto de fuerza, espacio y las propiedades que le asigna a los cuerpos. Por esto, da argumentos para axiomatizar la mecánica (Maupertuis, 1985), de manera que sea una mecánica racional.

Maupertuis por problemas de edad decide abandonar la dirección de la academia de Berlín para regresar a Francia y pasar sus últimos años de vida. En este tiempo, realiza unos trabajos sobre la simetría y perfección en los animales para argumentar la importancia del principio y generar una nueva mirada en relación a la naturaleza dejando todos sus escritos y trabajos a disposición de la academia de Berlín para su continuación con la formalización axiomática de la mecánica. Finalmente, Maupertuis al presentar el principio en la academia de Berlín no tiene gran aceptación por una serie de problemas en sus definiciones y procesos matemáticos, ya que define una cantidad de acción de manera diferente para cada sistema, lo cual muestra que el principio no es general.

Capítulo 3

LA MECÁNICA POR LEONARD EULER

La mirada de la mecánica desde el contexto newtoniano generó gran controversia en el siglo XVIII, ya que muchos académicos estaban en desacuerdo con la forma de cómo se daba explicación a los fenómenos de la naturaleza partiendo explícitamente de los postulados propuestos por Newton. Uno de ellos fue Leonard Euler quien argumenta que para la explicación de los fenómenos naturales, la mecánica de Newton no debe ser remplazada, sino por el contrario, debe ser aclarada y reorganizada para evitar malas interpretaciones como lo señala: "*los postulados sobre los cuales se apoya han sido establecidos tan sólidamente que sería de gran equivocación dudar de ellos*" (Euler, 1985, pág. 40). No obstante, propone que los postulados deben ser dados de una manera más comprensible en el sentido de darle una reorganización a la mecánica; reorganización que para Euler consiste en una argumentación sobre los conceptos de espacio, fuerza, materia, (como lo había propuesto Maupertuis) con la intensión de que la mecánica sea racional y comprensible para quienes deseen estudiarla.

3.1. EL ESPACIO

Euler procede a realizar un análisis en busca de las estructuras conceptuales de la teoría de Newton reconociendo la importancia del espacio y el tiempo para la descripción de los fenómenos. Reconocer la naturaleza del espacio, para Euler, permite tener una mejor abstracción del fenómeno para construir una mejor explicación en torno a éste. Asumiendo que Euler es de posturas newtonianas, busca fortalecer la concepción de espacio newtoniano (espacio absoluto) y no la de construir otra definición. Por lo cual procede a revisar la forma como éste define el espacio e indaga sobre los problemas epistemológicos ya que los académicos afirmaban (Euler, 1985) que este concepto carecía de realidad objetiva en la naturaleza.

Euler está de acuerdo con la idea de espacio absoluto newtoniano como contenedor inercial de todos los cuerpos. Sin embargo, en la época existía otra definición de espacio dada por los Metafísicos para abordar el movimiento de los sistemas mecánicos en la naturaleza. Los Metafísicos consideran el espacio como la relación circundante que existe entre el cuerpo que se desea estudiar con los que lo rodean. A partir de las dos concepciones sobre el espacio, Euler procede a realizar una comparación entre ellas con el fin de ampliar la idea de espacio newtoniano, ya que consideraba que la definición dada por los metafísicos no era la más adecuada para la explicación del movimiento de los cuerpos en la naturaleza. Sin embargo, con el análisis realizado le permite ampliar la idea de espacio newtoniano dado que ésta no tenía en cuenta los movimientos relativos de los sistemas y muestra de esta forma que el espacio tiene una realidad en la naturaleza sin ser un artificio abstracto.

En este sentido, Euler procede a realizar una definición sobre el reposo verdadero y el reposo aparente, ya que la definición de espacio de Newton no toma en cuenta los movimientos relativos o aparentes. Euler realiza una definición de ellos para complementar la idea de espacio propuesta por Newton definiéndolo como: "*reposo verdadero cuando permanece el cuerpo en el mismo lugar, no en relación a la tierra, sino en relación al universo; y reposo aparente cuando el cuerpo conserva la misma posición en la tierra*" (Euler, 1990, pág. 222). Euler a pesar de su definición reconoce que el nivel de abstracción necesario para comprender la idea de reposo y movimiento es alta ya que es necesario introducir ideas filosóficas para su comprensión. Euler intenta a partir de experimentos mentales aclarar la concepción de reposo y movimiento aparente. En este sentido, propone el experimento mental sobre un grupo de hombres que viajan en un barco por el mar. Para ellos un cuerpo en reposo es un objeto que mantiene la misma posición con respecto al barco; los objetos que están fuera de él se encontrarán en movimiento con respecto al barco. De esta manera Euler resalta la importancia del marco de referencia para el estudio del movimiento y complementa la idea de espacio que propuso Newton.

Por otro lado, al evidenciar Euler las dificultades que presenta la concepción de espacio absoluto propuesto por Newton, recurre a las ideas de los Metafísicos[1] de la época con el fin de aclarar si la definición dada por éstos es la que necesita ó por el contrario la definición propuesta por Newton es la mejor para estudiar el movimiento de los cuerpos. Euler sustituye la idea de espacio de los postulados newtonianos por la forma como los metafísicos lo conciben y lo enuncia de la siguiente forma: "*un cuerpo que se encuentre en una cierta relación con los demás cuerpos que le rodean permanecerá siempre en esta misma relación*" (Euler, 1985, pág. 49). A partir de esta afirmación quiere probar si la definición de espacio absoluto satisface la descripción de los fenómenos, o si ésta no lo hace. Para esto propone el siguiente enunciado.

Si un cuerpo es denotado como un punto material A, y este se encuentra rodeado de algunos puntos materiales B, D, C, D que están en reposo, entonces el cuerpo A guarda las mismas proporciones con sus objetos vecinos según lo propuesto por los metafísicos. Desde esta mirada existe una equivalencia entre los dos espacios. Una forma de evidenciar lo anterior es por medio del siguiente experimento mental. Introduciendo el cuerpo A en agua estancada este tendría la misma relación con sus objetos o cuerpos vecinos al transcurrir el tiempo como se muestra en la figura 3.1.

Por otro lado, si el cuerpo A es introducido en una corriente de agua, la única forma para que el cuerpo guarde las mismas proporciones con sus cuerpos vecinos es que se mueva con la misma rapidez del caudal del agua. Además si la causa externa que se aplica al cuerpo por la corriente de agua no mueve el cuerpo, las concepciones de espacio metafísico no evidenciaría los movimientos constantes ya que el cuerpo no conserva la distancia con relación a los cuerpos circundantes, lo cual no cumpliría el postulado de inercia como se muestra en la figura 3.2.

En consecuencia Euler evidencia que el estado de reposo absoluto se puede expresar por la relación de los cuerpos que lo rodean, pero el movimiento constante en un espacio absoluto no. Euler interpreta el espacio Metafísico como el movimiento de los cuerpos en el espacio absoluto y el espacio absoluto como el contenedor del todos los cuerpos, ya que sin un espacio absoluto inmóvil sería imposible determinar tanto la velocidad como la dirección del movimiento de cada cuerpo (Euler, 1985). Euler reconoce que el movimiento

[1]Los Metafísicos es un grupo filosófico de la época, que busca argumentar la mecánica desde conceptos reales (perceptibles), este movimiento ataca la mecánica de Newton, argumentando que el espacio y el tiempo de su propuesta no tienen realidad.

Figura 3.1: Un cuerpo dentro de un estanque de agua, el cual es representado por el punto negro, donde al estar en reposo conserva la misma distancia con los puntos blancos que representan partículas del agua.

no es absoluto sino también existe los movimientos relativos, por esto el espacio contiene estos dos tipos de movimiento.

3.2. LA NOCIÓN DE ESTADO

Para Euler, la idea de espacio está inmersa en el primer postulado de Newton que está referido a la inercia. Euler propone que el postulado se puede expresar de forma más clara a partir de la noción de estado. El estado de un sistema mecánico en este contexto se refiere al estado de reposo del sistema o hace referencia al estado de movimiento uniforme del sistema. Con la introducción de la noción de estado de los sistemas mecánicos, Euler muestra la necesidad de introducir las cualidades del espacio para que un sistema mecánico se encuentre en un estado inercial de reposo o de movimiento uniforme.

Esta discusión surge al realizar un análisis sobre el primer postulado newtoniano debido a que Newton en éste muestra la necesidad del espacio sin hacer una presentación detallada de la forma como él concebía el espacio. De ahí nace la inconformidad de los Metafísi-

Figura 3.2: Se presenta un cuerpo sumergido en un estanque en el cual el agua se encuentra en movimiento. El cuerpo que es representado por el punto negro, no se mueve con el caudal del estanque, por lo cual no guarda la misma distancia con las partículas de agua vecinas a él representadas por los puntos blancos.

cos, quienes proponen realizar una aclaración de la forma como está enunciado el primer postulado intentando llevar éste a términos realistas y cotidianos, ya que para ellos el concepto de espacio absoluto que define Newton carece de toda realidad y es un concepto que no se evidencia en la naturaleza. A pesar de los conflictos que se tuvieron sobre los intentos de aclarar el concepto de espacio Euler continúa con la reorganización de la mecánica.

Euler divide el movimiento en tres clases: primero, el movimiento uniforme, segundo el movimiento acelerado y tercero el movimiento retardado. Cada tipo de movimiento describe un estado del cuerpo. Los cambios de estado son debidos a los cambios de velocidad en cada instante del sistema. Euler propone el siguiente ejemplo para mostrar los diferentes tipos de movimiento: si un cuerpo viaja en línea recta siempre conserva la misma dirección de movimiento, sin embargo, al cambiar su trayectoria por una línea curva, su dirección cambia instantáneamente evidenciando un cambio de estado del cuerpo; como se observa en la figura 3.3.

Si el objeto toma la trayectoria curva como la mostrada en la figura por los puntos ABC, se puede apreciar que en el punto A existe una recta tangente denotada por el segmento

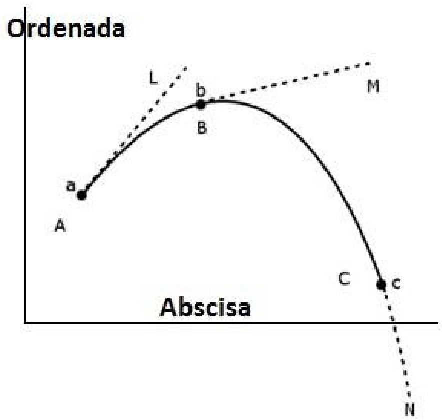


Figura 3.3: Trayectoria curva que describe un cuerpo representando los cambios de estado.

aL. Esta recta tangente permite conocer el estado del cuerpo en un instante de tiempo; por lo cual la curva se construye por rectas tangentes a los puntos que componen la trayectoria que sigue el cuerpo indicando sus diferentes estados. En otras palabras, el movimiento del cuerpo representado por una trayectoria curva, indica los diferentes cambios instantáneos de estado del cuerpo representado por la rapidez y el cambio en la dirección de su velocidad. Ya que la idea de recta tangente permite construir la concepción de variación o cambio de velocidad propuesta por Newton y Leibniz, esta es una forma de diferenciar los tipos de movimiento.

3.3. SEGUNDO POSTULADO VERSUS CAMBIO DE ESTADO: LA FUERZA

Euler considera que para dar las leyes de movimiento de los sistemas mecánicos, es necesario considerar el estado y los cambios de estado de éstos. Evidencia que si al colocar el cuerpo en el espacio estando el cuerpo en estado de reposo, él no podrá cambiar su estado a menos que una causa externa interactúe con él. A partir de esta aseveración propone la ley del movimiento de la siguiente forma "*cuando un cuerpo se encuentra en reposo, sin que nada exterior actué sobre él, ese cuerpo permanecerá siempre en reposo; y si empieza a moverse, la causa de su movimiento estará fuera de él, de manera que no hay nada* *en el cuerpo capaz de ponerlo en movimiento*" (Euler, 1990, pág. 222).

Euler al hacer un análisis de los tipos de movimiento, continúa buscando lo que genera el movimiento de los cuerpos. Si el cuerpo es puesto en movimiento tendrá un cambio de velocidad y dirección, provocada por una perturbación sobre él generada por una causa externa. Sin embargo, si el cuerpo no es perturbado por una causa externa, éste continúa moviéndose en línea recta perpetuamente sin tener cambios en su dirección y rapidez. Lo anterior conduce a Euler a concluir que un cuerpo en un estado de movimiento se conservará en el mismo a menos que sea perturbado por una causa externa a él y los cambios de estado son provocados por causas externas. Para Euler esta es la primera y principal ley del estado de movimiento de los cuerpos.

Euler enuncia el postulado de la inercia por medio del siguiente principio, "*una vez este en reposo un cuerpo, permanece eternamente en reposo, a menos que sea puesto en movimiento por alguna causa exterior o extraña, y una vez en movimiento un cuerpo, conservara eternamente el movimiento con la misma dirección y velocidad, o bien se trasladara con un movimiento uniforme siguiendo una línea recta, a menos que sea perturbado por alguna causa exterior o extraña*" (Euler, 1990, pág. 228). Con lo anterior, Euler intenta expresar el postulado de la inercia de una forma más diciente mostrando que el movimiento es generado por una causa externa a los cuerpos.

Finalmente para Euler, la fuerza que introduce Newton es la magnitud que cambia el estado de los sistemas mecánicos. Si un cuerpo se encuentra en un estado de movimiento constante y es aplicada una fuerza externa a él, cambiará su estado de movimiento. Sin embargo, la mecánica sustentada a partir de los postulados, no permite que los sujetos que la desean estudiar la comprendan en su totalidad, ya que no pueden pensar de la forma como lo hizo Newton. Bajo esta perspectiva, Euler siente una inconformidad en la forma como se estructura la mecánica y retoma los trabajos propuestos por Maupertuis buscando la forma de axiomatizar los postulados. Para ello emprende la ruta de construir un método de máximos y mínimos aplicable a curvas mecánicas siendo éstas tomadas del comportamiento de los cuerpos en la naturaleza.

3.4. PRINCIPIO DE MÍNIMA CANTIDAD DE ACCIÓN

Ya que la reorganización que hace Euler sobre la mecánica no satisface a los académicos de siglo XVII, abandona sus investigaciones en física para construir un método de máximos y mínimos sobre una problemática propuesta por los hermanos Bernoulli en el ámbito de la mecánica. La propuesta radica en construir un método que permita describir la trayectoria conocida como braquistócrona en la que un cuerpo tome el menor tiempo posible en pasar de una posición A a otra posición B. Para la construcción del método, Euler parte de los escritos de Descartes en relación a la geometría analítica para luego tomar sus concepciones sobre espacio y utilizarlo como herramienta matemática para ubicar los cuerpos como puntos inmateriales en el plano.

El trabajo que influyó en la vida académica de Descartes, fue el propuesto por Viète, lo tituló con el nombre de álgebra simbólica en el año 1591 (Descartes, 1981). Este trabajo introduce el concepto de variable, la cual Viète la simboliza por medio de la letra x. Su propuesta presenta la forma de cómo se puede asignar una variable a un segmento de recta desconocido. Además muestra que los productos de dos variables hacen referencia al área de un rectángulo, como lo propuso Euclides en sus trabajos (Urbaneja, 2007). También da a conocer que el producto de tres variables hace referencia al volumen de un paralelepípedo rectangular. Sin embargo, la geometría propuesta por Euclides no puede solucionar productos mayores a tres segmentos. Descartes retoma el trabajo de Viète para hacer una re-interpretación de estos productos, argumentando que se pueden expresar como variables y ser trabajadas desde la teoría del algebra (Descartes, 1981).

Descartes introduce la idea de relacionar segmentos con el fin de describir las curvas mecánicas que son las curvas tomadas del movimiento de los cuerpos en la naturaleza, a partir de ecuaciones algebraicas (Descartes, 1981). En otras palabras, propone (Urbaneja, 2007) un método que le permita realizar una representación gráfica de las ecuaciones algebraicas tal que satisfaga una serie de condiciones y teoremas de la geometría de Euclides. Para esto introduce la aritmética en la geometría reduciendo todas las magnitudes geométricas en magnitudes algebraicas (variables). Esto le permite hacer operaciones elementales entre los segmentos lo cual lo conduce a construir ecuaciones algebraicas. Esta nueva mirada abre el estudio del análisis y la teoría de números (Urbaneja, 2007).

Posteriormente que Descartes fundamenta y valida toda su propuesta, procede a calcular las relaciones o productos que pueden tener la intersección de dos segmentos. Para esto toma un segmento de longitud x y un segmento de longitud y que se cortan en un punto para formar un ángulo como se muestra en la figura 3.4.

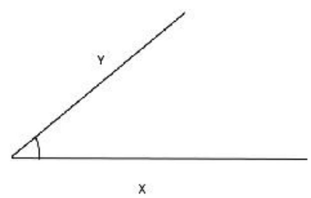


Figura 3.4: Representación de los segmentos de Descartes.

Descartes desea encontrar todas las posibles relaciones que exista entre x y y, siendo la operación de relación x^2. Esto se puede analizar como una aproximación a la definición de función propuesta por Leibniz (Urbaneja, 2007). Esta propuesta lo motiva a seguir buscando la relaciones para x y y, tal que, la operación relación sea x^3. Al realizar esta operación encuentra que el lugar geométrico de esta relación es una parábola cúbica. Descartes al tener la ecuación algebraica construye un método que le permite representar el lugar geométrico.

Al introducir el término relación, como un producto cartesiano, Descartes evidencia que los diagramas de Venn no son útiles para esta representación ya que al realizar el producto cartesiano (apéndice A) se construyen parejas ordenadas las cuales no se pueden representar en los diagramas. Para la representación de las parejas ordenadas introduce el concepto de plano cartesiano, el cual es la intersección de dos conjuntos o segmentos que forman un ángulo fijo. Por facilidad decide que este ángulo debe ser recto entre las dos. Sin embargo, Descartes en su tratado de Geometría (Descartes, 1981) no utiliza esta representación ni presenta este aporte de una forma clara, no obstante, Leibniz en 1692 construye el concepto de función acudiendo a los trabajos de Descartes (Urbaneja, 2007).

Al realizar un análisis sobre los escritos de Descartes (Arana, 1987), Euler reconoce que el plano cartesiano es una herramienta importante para axiomatizar el espacio de Newton, ya que para éste el espacio era considerado como un contenedor inercial de los cuerpos con el objeto de poderlos ubicar en éste. Por lo tanto, Euler interpreta el espacio como el contenedor de un conjunto de parejas ordenadas teniendo una relación con la ubicación de los cuerpos materiales. Esta perspectiva, le permite reconstruir el lugar geométrico del movimiento de los cuerpos en la naturaleza y su evolución temporal. Además, considera el espacio y el plano cartesiano como marcos de referencia inerciales para la explicación del movimiento de los sistemas mecánicos.

Al realizar la axiomatización del espacio, Euler continúa con la construcción de su método para hallar máximos y mínimos de las curvas tomadas del movimiento de los cuerpos en la naturaleza. Construye su método en dos partes: el método absoluto, el cual es aplicable a curvas con la misma abscisa. Euler se refiere a la abscisa apoyándose en la teoría del cálculo de Leibniz donde la abscisa es la coordenada independiente de una función o conocida actualmente como el dominio de la función. Lo que Euler desea con este método, es poder tomar diferentes curvas que tenga el mismo dominio (que partan de un punto a hasta un punto b) y compararlas entre ellas para hallar la que tiene una cantidad que es mínima entre todas las curvas que se deseen comparar.

La segunda parte se refiere al método relativo, el cual permite construir trayectorias que tengan la cualidad de ser máximas o mínimas cumpliendo con las siguientes condiciones: tener la misma abscisa (dominio), tener los mismos puntos de inflexión, concavidad y área entre otras. La diferencia entre los métodos consiste en que en el método relativo la condición de la abscisa no es suficiente para poder hacer una comparación entre las demás curvas, además de ser construidas teóricamente. En el método absoluto las curvas proceden del análisis de los movimientos de los cuerpos en la naturaleza para saber si son máximas o mínimas.

El método que sirvió para la formalización del principio de mínima cantidad de acción propuesto por Euler, fue el absoluto ya que las curvas eran las tomadas del comportamiento de los cuerpos en la naturaleza. Euler propone este método de la siguiente forma: se exige que las curvas deben tener una misma abscisa siendo ésta un intervalo del dominio donde está definida la función[2]. En la figura 3.5 se muestra una representación de cuatro curvas en el espacio denotadas como $S1, S2, S3$ y $S4$, teniendo cada curva la misma abscisa (parten del punto A y llegan hasta el punto B), pero su concavidad y puntos de inflexión cambian, lo cual significa que el método relativo no es válido para esta clase de curvas. Es de resaltar que Euler desea conocer cuál de las anteriores curvas satisface la

[2]La abscisa en termino actuales se refiere el dominio de la función, en su caso es un intervalo cerrado, que tiene un punto de inicio y final.

condición de ser mínima o máxima en relación a la cantidad de acción.

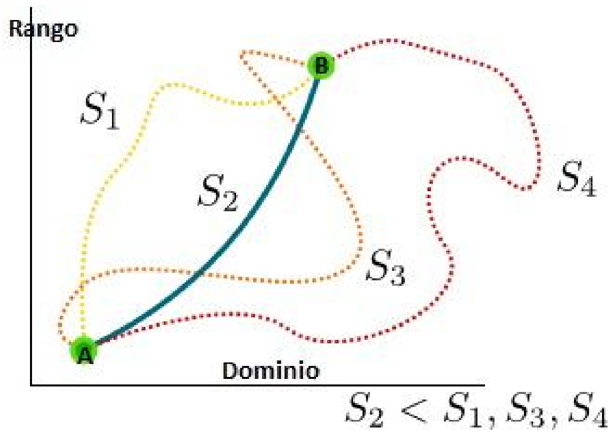


Figura 3.5: Representación de cuatro curvas que poseen la misma abscisa(dominio).

Euler aplica el método absoluto a las curvas tomadas del movimiento de los cuerpos en la naturaleza, ya que la condición del método radica en que las curvas que se desean comparar tengan la misma abscisa. Al aplicar su método a las trayectorias de los cuerpos encuentra que si son mínimas entre todas las que se pueden construir a partir de la abscisa, el principio propuesto por Maupertuis seria valido para toda la mecánica y los postulados de Newton serian cambiados por una mecánica racional.

Para comprender como Euler desarrolla su método es necesario reconocer que es un método de matemáticas aplicado a curvas, ya que Euler hace uso de la geometría y el cálculo propuesto por Descartes y Leibniz (Euler L. , 1990). Además es necesario evidenciar el aporte que hace el método para el avance de las matemáticas en el siglo XVIII. La formalización del método absoluto de Euler es desarrollado en el apéndice B.

3.5. FORMALIZACIÓN DEL PRINCIPIO DE MÍNIMA ACCIÓN A PARTIR DEL MÉTODO PROPUESTO POR EULER

Euler al construir su método y aplicarlo a una serie de curvas, observa de sus cálculos que las curvas tomadas del movimiento que describen los cuerpos en la naturaleza son mínimas entre todas las que se pueden formar con la misma abscisa. Esto lo llevo a la formalización del principio de mínima cantidad de acción el cual ya había sido formulado inicialmente por Maupertuis pero atribuido a Euler. Euler suprime la teología que Maupertuis había dado al principio escribiendo la demostración matemática de éste en el texto aditamiento II en 1743 (Thomas, 1988). Euler propone en este texto la primera prueba para el estado de movimiento uniforme de un cuerpo de la siguiente manera: sea (m) la masa del cuerpo y $\sqrt{v}$ su velocidad para recorrer un segmento de espacio dr. La cantidad de movimiento está dada por: $m\sqrt{v}$ y al ser multiplicarla por el diferencial de espacio dr se obtiene la magnitud llamada por Euler, acción $(S = \int_a^b m\sqrt{v}dr)$. Esta magnitud la define: '"*como el movimiento colectivo del cuerpo a lo largo de un pequeño espacio dr*" (método de máximos y mínimo, pág. 200). Sin embargo, esta magnitud se puede escribir en términos de las fuerzas vivas de la siguiente forma:

$$S = \int_a^b m\sqrt{v}dr = \int_a^b m\sqrt{v}\sqrt{v}dt = \int_a^b mvdt$$

Demostrando que la suma de todas las fuerzas vivas en cada instante es mínima. Euler considera que si no existe alguna causa externa que perturbe el sistema, la velocidad del cuerpo será la única variable considerada ya que la trayectoria estará dada por el método de máximos y mínimos. Por lo tanto, la acción para este caso será: $m\sqrt{v}r + cte$, lo que implica que la trayectoria será la mínima entre todas las posibles trayectorias que se puedan construir por una misma abscisa. La trayectoria dada por la ecuación $m\sqrt{v}r + cte$ representa una línea recta lo cual corresponde a la realidad física de un estado de movimiento uniforme.

3.6. MOVIMIENTO PARABOLICO A PARTIR DEL PRINCIPIO DE MÍNIMA CANTIDAD DE ACCIÓN

Euler propone estudiar el caso de un movimiento parabólico ilustrando en la figura 3.6. En su propuesta, describe un proyectil en caída libre desde una posición A que es atraído hacia la tierra por una fuerza constante igual a mg.

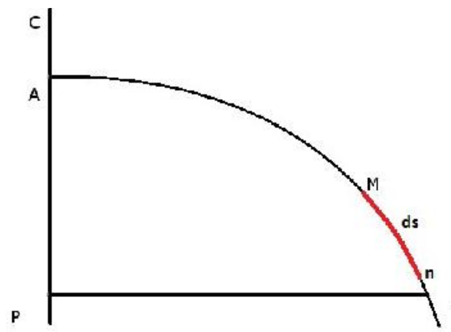


Figura 3.6: Trayectoria que describe el proyectil en caída libre.

A partir de la trayectoria dada por la figura 3.6, Euler toma los segmentos $AP = x$ como la abscisa y $PM = y$ como la ordenada. La trayectoria descrita por el cuerpo está dada por la curva MA y el elemento de línea dado por: $Mn = ds$. Euler parte de un sistema ideal, puesto que no considera el rozamiento del cuerpo con el aire. Realiza un análisis dinámico a partir de una idea cinemática ya que la velocidad del cuerpo la expresa como:

$$u_f^2 - u_o^2 = 2gx.$$

Considera la velocidad inicial del cuerpo como una constante $u_o^2 = a$ y realiza un cambio de variable de la forma: $v = u^2$ para evitar términos que contengan radicales. De esta manera, introduce la velocidad en la funcional acción de la siguiente forma:

$$S = \int_a^b \sqrt{(gx + a)}ds.$$

Expresando el elemento de línea como (apéndice B),

$$
\begin{aligned}
ds^2 &= dx^2 + dy^2, \\
ds^2 &= dx^2 + p^2 dx^2, \\
ds^2 &= dx^2(1 + p^2),
\end{aligned}
$$

se obtiene:

$$S = \int_a^b \sqrt{1+p^2}\sqrt{gx+a}dx,$$

la acción en términos de una sola variable, que en nuestro caso es x.

Al comparar la anterior expresión con la acción general del método $(\int Zdx)$, se obtiene la funcional $Z = \sqrt{1+p^2}\sqrt{gx+a}$(La funcional Z es la que describe la trayectoria del cuerpo en el espacio, esta se construye a partir de unas condiciones de frontera que plantea la persona que desea estudiar el fenómeno, esta funcional está en términos de una coordenadas generalizadas como lo son: el tiempo , la cantidad de movimiento y la velocidad). Exigiendo el mínimo de la funcional, se deriva con respecto a x (apéndice B),[3]

$$dZ = \frac{p(\sqrt{a+gx})}{\sqrt{1+p^2}} = Ndy + Pdp.$$

Como la función no depende de la variable (y), el valor de N debe ser igual a cero, en tanto el valor de P debe ser igual a:

$$\frac{p(\sqrt{a+gx})}{\sqrt{1+p^2}} = P.$$

Se procede a remplazar el valor de N y P en la ecuación diferencial propuesta por Euler (apéndice B), obteniendo:

[3]En el método absoluto propuesto por Euler, define que las abscisa (dominio) de la curva está compuesta por infinitos puntos, la distancia que hay de punto a punto es dx, como estas separaciones son constantes entonces la $dx^2 = 0$, sin embargo cada punto depende de esas separaciones, donde cada punto esta función de x, por lo cual se pueden diferenciar con respecto a x.

$$
\begin{aligned}
N - \frac{dP}{dx} &= 0 \\
\frac{dP}{dx} &= 0
\end{aligned}
$$

El valor de P es una constante que Euler la llama $\sqrt{C}$. Por lo cual la expresión queda denotada como:

$$
\frac{p(\sqrt{a+gx}}{\sqrt{1+p^2}} = \sqrt{C}.
$$

Volviendo a las variables iniciales $dy = pdx$ y $ds = \sqrt{1+p^2}dx$ se obtiene la ecuación:

$$
\begin{aligned}
\frac{dy(\sqrt{a+gx})}{ds} &= \sqrt{C}, \\
dy^2 &= \frac{Cdx^2}{((a+gx)-C)}, \\
dy &= \frac{\sqrt{C}dx}{\sqrt{a-C+gx}}
\end{aligned}
$$

correspondiendo a una ecuación diferencia ordinaria de primer grado cuya solución es:

$$
y = \frac{2}{g}\sqrt{C(a-C+gx)} \tag{3.1}
$$

La ecuación (3.1) describe una parábola dado que al elevar al cuadrado los dos lados de la expresión obtiene una parábola como se muestra en la figura 3.6 del enunciado del problema. De esta forma, Euler señala que a partir del principio de mínima acción se puede reconstruir el lugar geométrico de un cuerpo en movimiento en la naturaleza.

Euler con los trabajos realizados alrededor de la dinámica muestra que para la explicación de los fenómenos de la naturaleza puede hacerse de una manera más simple como lo afirmaba Maupertuis. A partir de un principio variacional, Euler construye su método de máximos y mínimos publicado en el texto: "*Methodus inveniendi líneas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti*", en el cual argumenta que el principio es válido para los casos como: caída libre, fuerzas centrales y caída libre con fuerzas no constantes.

No obstante, los académicos de la época abordaron algunos problemas de física a partir del principio propuesto por Euler encontrando que para su explicación se obtenían cálculos complejos y de un alto nivel de abstracción. Por lo cual, el principio de mínima acción propuesto por Euler no fue acogido por gran parte de la comunidad académica y solo fue aceptado por los matemáticos de la época.

Capítulo 4

LA MIRADA DE LAGRANGE

Los trabajos de Euler tienen un efecto simbólico en el siglo XVIII ya que los matemáticos más brillantes de la época abandonan sus investigaciones en matemáticas para incursionar en el mundo de la física. Euler en el año 1736 publica su obra titulada *Mechanica sive motus scientia analytice expósita*, la cual es la primera publicación en la que se estudia la dinámica de Newton mediante los nuevos métodos analíticos propuestos por Euler (principio de mínima acción). A partir de su publicación, los matemáticos de la época se encaminan a resolver problemas abordados desde el método propuesto por Euler, partiendo de las curvas descritas por el movimiento de los cuerpos en la naturaleza como la braquistócrona, el isoperimétrico y la superficie de revolución de área máxima, entre otros (Thomas, 1988).

Sin embargo, al intentar resolver estos problemas se encuentran con una serie de falencias en el principio propuesto por Euler como lo menciona Lagrange, "*en primer lugar el método no es suficientemente sistemático ni general como para no precisar gran ingenio y capacidad del cálculo en la resolución de gran número de problemas variacionales, y en segundo lugar, la metodología utilizada por Euler tenía la complicación adicional de presentar una mezcla de estilos geométricos y analítico-diferencial que la hacía bastante farragosa*" (Rego, 2003, pág. 55). Es así, que busca la forma de eliminar la geometría de la propuesta dada por Euler con el objeto de hacerla analítica y más que ello poder resolver los problemas variacionales de la forma más simple, ya que los cálculos a partir de su propuesta son muy complejos, extensos y engorrosos. De esta manera nace la propuesta Lagrange.

En su artículo, *Essai d'une nouvelle methode pour Determiner les máxima et les minima des formules intégrales indéfinies*, presenta su inconformidad como; "*ouvrage original et qui brille partout d'une profonde science du calcul. Cependant, quelque ingénieuse et féconde que soit sa method, il faut avouer que' elle n'a pas toute la simplicité qu'on peut désirer dans un sujet de pure analyse*" (Lagrange, 1760, pág. 336), donde muestra la necesidad de buscar un nueva forma de hacer más sencillo el metodo de Euler y más simple en su manejo.

En general el escrito que motivo a Lagrange fue: *Methodus inveniendi líneas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti*, en donde muestra la solución sobre el problema de la curva Tautócrona. En su solución, Lagrange encuentra una forma más simple que la propuesta por Euler (Rego, 2003). Lagrange escribe una carta a Euler presentándole la solución con el nuevo método propuesto por él, y meses más tarde obtiene una respuesta de Euler donde admira su trabajo y le ofrece un puesto en la academia de Berlin, pero Lagrange no lo acepta (Rego, 2003).

Años más tarde Lagrange publica la carta dirigida a Euler donde se encuentra el nuevo método para resolver problemas variacionales. Este trabajo fue llamado por Lagrange como: "*Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les máxima et minima des formules intégrales indéfínies*". Gracias a los aportes dados por Lagrange en 1766, Euler muestra una nueva rama de las matemáticas con ayuda de Lagrange la cual se denominó cálculo de variaciones.

4.1. El METODO DE LAGRANGE

Es importante reconocer que Lagrange parte de los trabajos propuestos por Euler, quien parte de la construcción de una funcional Z, dependiente de tres variables: la abscisa, los puntos que la componen y la imagen en el recorrido[1], $x(p,q,...)$,$y(x(p,q,...))$,$dx(p,q,...)$, $dy(x(p,q,...))$,$dx(p,q,...)^2$,$dy(x(p,q,...))^2$,... Euler procede hacer la derivada de la funcional con la intención de garantizar el mínimo de ella y llegar a una ecuación diferencial (Apéndice B). A partir de este trabajo Lagrange toma la función acción $S=\int Zdx$, pro-

[1]Euler con esta notación desea introducir el concepto de funcional, la cual es una función en función de otra funciones, en el caso de Euler presenta variables que están en términos de más variables, donde cada variable la describe como una función

puesta por Euler e introduce un nuevo termino que denomino la variación δ de la acción. Con ayuda de la variación de la acción encuentra la misma ecuación diferencial dada por Euler lo cual lo conduce a suprimir el análisis que propone Euler en relación a la variación de la funcional.

La variación δ de la acción la introduce Lagrange como una herramienta para mostrar de forma más simple las variaciones de las variables que componen la funcional, ya que, Euler muestra que estas variables cambian de dos formas; la primera de ellas es con respecto a la ordenada (ver la variación de los puntos que componen la abscisa con respecto a dx), y la segunda, es la variación del recorrido (con respecto a dx y los puntos que componen la abscisa) como se muestra en la figura 4.1.

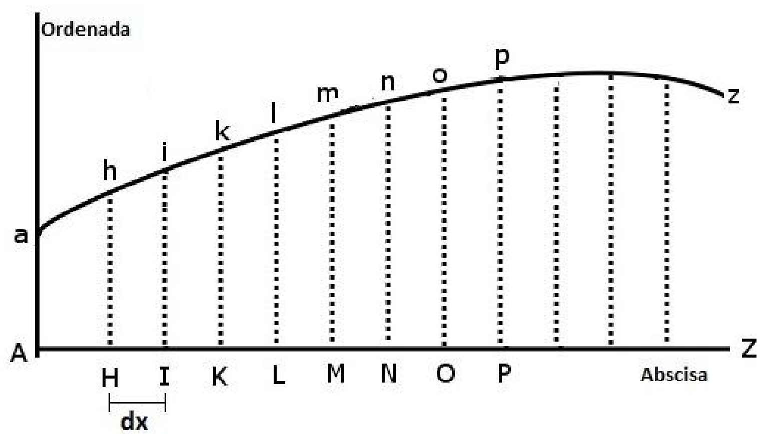


Figura 4.1: La abscisa esta compuesta por el segmento (AZ) el cual contiene infinitos puntos $H, I, K, L, M, N, O, P, ...$, donde cada punto está en función de x, la imagen de cada punto son $h, i, k, l, m, n, o, p, ...$

La propuesta de Lagrange permite introducir la variación de la acción trayendo como consecuencia la variación de todas las variables de la funcional, lo cual significa que las variables son linealmente dependientes conduciendo a que la variación de la acción debe ser mínima. Para validar su propuesta, Lagrange muestra que las variables que componen la funcional son linealmente dependientes, (ya que la variación δx exige que las variables sean dependientes).

Lagrange hace la variación de la expresión acción $\delta \int Zdx = 0$ para garantizar el mínimo. En este sentido, lo que Lagrange propone es realizar la variación de las variables que componen la funcional para encontrar si las variables son linealmente independientes o dependientes, donde halla la siguiente expresión[2]:

$$\delta Z = n\delta x + p\delta dx + q\delta d^2x + ... + N\delta y + P\delta dy + Q\delta d^2y + ...,$$

Integrando la variación se obtiene:

$$\int n\delta x + \int p\delta dx + \int q\delta d^2x + ... + \int N\delta y + \int P\delta dy + \int Q\delta d^2y + ...,$$

Al resolver estas integrales Lagrange encuentra dos ecuaciones: la primera está en términos de las variaciones de primer orden (Lagrange, 1760, pág. 337)

$$(n - dp + d^2q - d^3r + ...)\delta x + (N - dP + d^2Q - d^3R + ...)\delta y,$$

y la segunda,

$$(p - dp + d^2r + ...)\delta x + (q - dr + ...)d\delta x + (r - ...)d^2\delta x... = 0,$$

en términos de las variaciones de segundo orden (Lagrange, 1760, pág. 337).

Lagrange asume que las variables son linealmente independientes y toma la ecuación que está en función de las variaciones de primer orden. Por lo tanto, encuentra una contradicción ya que las variables no son linealmente independientes sino que dependen de sus variaciones de segundo orden (Lagrange, 1760, pág. 338), como lo señala: "*on examinera d'abord si, par la nature du problème, il y a entre elles quelque rapport donné, et les ayant réduites au plus petit nombre possible, on fera ensuite le coefficient de chcune de celles qui resteront égales à zéro. Si elles sont absolument indépendantes les unes des autres, l'équation (b) nous donnera sur-lechamp les trois suivantes*" (Lagrange, pág. 338).

[2]Lagrange hace la variación de todas las variables de orden n que contiene el funcional Z, esto lo hace para n términos, donde las letras minúsculas son las variables que están contenidas en el dominio de la funcional y las mayúsculas son las del rango de la funcional.

Al realizar el analisis con relacion a la variacion de la funcional de la expresion acción, encuentra que las variables son linealmente dependientes, y por ende las variaciones están en funcion de los puntos de la abscisa y la ordenada como queria demostrar Lagrange. Lo anterior justifica la introducción del simbolo δ el cual representa estos cambios (Rego, 2003). Al mostrar que la variación δ es una herramienta que permite aclarar la concepción de las variaciones propuestas por Euler, procede a encontrar la misma ecuación diferencial a la que llego Euler.

Lagrange para esto le suma una variación a la expresión acción $S = \int_a^b Zdx$, obteniendo: $(S_1 = \delta S = \int_a^b Zdx + \int_a^b \delta Zdx)$una curva por encima de la acción inicial y al restarla obtiene una curva por debajo de la acción inicial $(S_2 = \int_a^b Zdx - \int_a^b \delta Zdx)$como se muestra en la figura 4.2 (Rego, 2003) (Thomas, 1988).

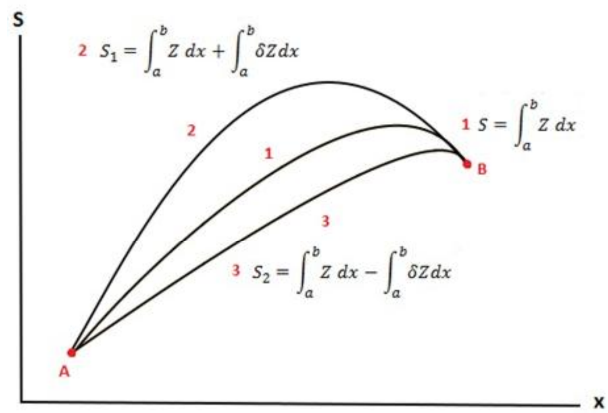


Figura 4.2: Grafica de tres curvas que poseen la misma abscisa, y son construidas a partir de S.

Al realizar la variación de la acción $S_2 = \delta S = \int_a^b Zdx - \int_a^b \delta Zdx)$ encuentra una expresión que describe una curva que está por debajo de la inicial,

$$\delta S = \int_a^b [Z(x, y + \delta y, \acute{y} + \delta \acute{y}) - Z(x, y, \acute{y})]dx,$$

ya que la funcional está en términos de las variables $y, \acute{y}$ y la constante x. Lagrange realiza una serie Taylor para las anteriores variables tomando solo las de primer orden ya que las de orden mayor son pequeñas, introduciendo la notación $Z_y = \frac{\partial Z}{\partial y}$ y $Z_{\acute{y}} = \frac{\partial Z}{\partial \acute{y}}$ se obtiene:

$$\delta S = \int_a^b (Z_y + F_{\acute{y}} \delta \acute{y}) dx.$$

Posterior a esto Lagrange utiliza las propiedades de la variación para reescribir la primera variación de la curva, ya que $\delta \acute{y} = \frac{d(\delta y)}{dx}$,y como la variación con la diferenciación conmutan, entonces:

$$\delta S = \int_a^b (Z_y \delta x + Z_{\acute{y}} \frac{d\delta y}{dx}) dx.$$

La integración por partes del segundo miembro de la curva, es nula ya que la $\delta y(a) = 0$ y $\delta y(b) = 0$; luego, la variación de la acción se puede reescribir de la siguiente forma,

$$\delta S = \int_a^b (Z_y \delta y + (\frac{dZ_{\acute{y}}}{dx}) \delta y) dx.$$

Lagrange garantiza el mínimo de la variación de la acción $\delta S = 0$ encontrando la ecuación diferencial de Euler con la que resolvió el problema de variaciones,

$$Z_y - \frac{d}{dx} Z_{\acute{y}} = 0.$$

Haciendo uso de la notación contemporánea,y designando la funcional (Z) por (L) la ecuación de Euler-Lagrange se escribe como:

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = 0,$$

siendo y la variable que describe la posición del cuerpo y $\dot{y}$ su velocidad.

Lagrange al introducir el concepto de variación suprime la complejidad sobre la forma como Euler desarrolla su propuesta y logra reescribir el principio de una forma tal que la comunidad académica acepta y utiliza sin ningún inconveniente. Los trabajos de Lagrange promovieron la axiomatización de la mecánica dando paso a la mecánica analítica y continuando con los aportes de Hamilton y Jacobi quienes proponen la mecánica desde axiomas y teoremas matemáticos sin dejar de lado la filosofía natural y la observación que hace el sujeto sobre el fenómeno.

Finalmente, se muestra en el cuadro comparativo las diferentes miradas, posturas y aportes de cada autor en relación al principio de mínima acción.

Cuadro comparativo entre los autores		
Maupertius	Euler	Lagrange
Fue el primero en proponer el principio de mínima cantidad de acción con el fin de evidenciar la existencia de Dios a partir de la simplicidad y uniformidad de la naturaleza. Es de posturas newtonianas, sin embargo encuentra que los postulados de Newton no satisfacen el estudio de la mecánica por los vacíos conceptuales presentados en la definición de espacio, tiempo y fuerza. Propone la unifica- ción de los postulados newtonianos con la intención	Es de posturas newtonianas. Sin embargo, propone una reorganización de la mecánica de Newton con la intención de aclarar los conceptos de espacio, fuerza y materia. Complementa la concepción de espacio introduciendo los movimientos relativos. Euler desliga de su trabajo la teología dado las dificultades que tuvo Maupertuis en su propuesta y afirmando que la teología no es necesaria para axiomatizar ni validar el principio de mínima acción.	Los trabajos de Lagrange parten por un reconocimiento matemático por parte de Euler. Realiza una investigación alrededor del trabajo propuesto por Euler, en relación al método de máximos y mínimos. Propone un artificio matemático que le permite obtener la ecuación que denomina Euler-Lagrange, a partir de la variación de la acción,

de construir un principio que dé cuenta sobre el comportamiento de los cuerpos en la naturaleza. Retoma los trabajos propuestos por Leibniz, Descartes y Huygens como punto de partida de su principio. Su propuesta tiene la intención de axiomatizar la mecánica, cuyo sentido es la utilización de las matemáticas de la época. Propone un principio a partir de las concepciones pitagóricas de simplicidad y uniformidad como:"*si las leyes del movimiento son expresadas con la mayor economía, se demostrara la existencia del ser supremo*" (Maupertuis, 1758, pág. 188).

Define la acción como el duplo de las fuerzas vivas por el tiempo, y propone que "*cuando ocurre un cambio en la naturaleza, la cantidad de acción necesaria para este cambio, es lo más pequeña posible* "(Maupertuis, 1985, pág. 27).

Define una cantidad de acción diferente para cada sistema,

Reconoce que la reorganización no es posible ya que la mecánica de Newton se fundamenta en postulados. Desde esa perspectiva, afirma que cualquier académico debería ser capaz de comprender la naturaleza de la misma forma que lo haría Newton. Procede a trabajar con los hermanos Bernoulli en matemáticas aplicadas, construyendo un método de máximos y mínimos aplicable acurvas tomadas de los movimientos de los cuerpos en la naturaleza.

En los trabajos de Descartes encuentra la relación que existe entre el espacio de Newton y el plano cartesiano. Propone el plano cartesiano como la axiomatización del espacio newtoniano.

Euler concluye que todas las curvas mecánicas (tomada del movimiento de los cuerpos en la naturaleza) son mínimas en relación a todas las demás curvas que se pueden construir, mostrando la validez de la propuesta hecha por Maupertuis en relación al

y con éste logra reducir el nivel de complejidad del principio formalizado por Euler.

Con la propuesta de Lagrange se obtienen las ecuaciones de movimiento de los sistemas mecánicos a partir de la funcional denominada lagrangiano. El lagrangiano se construye a partir de la fenomenología observada.

La propuesta de Lagrange es acogida por los académicos de la época por su simplicidad y gran generalidad. Los trabajos de Lagrange abren el camino hacia nuevas miradas lideradas por Hamilton y Jacobi, con la intención de axiomatizar la mecánica.

lo cual genera una inconformidad para los académicos de la época dado que el principio no es general. Sin embargo, es considerada una propuesta innovadora para la época.	principio de mínima cantidad de acción. Define la cantidad de acción: "*como el movimiento colectivo del cuerpo a lo largo de un pequeño espacio dr*" (método de máximos y mínimo, pág. 200). El método absoluto propuesto por Euler permite la formalización de la propuesta hecha por Maupertuis. Su propuesta está fundamentada en la geometría analítica de Descartes y el cálculo de Leibniz. Sin embargo, el método propuesto conduce a realizar cálculos complejos y extensos que la comunidad académica de la época no estaban dispuestos a desarrollar.	

CONCLUSIONES

El realizar un estudio de corte histórico y epistemológico permite desmitificar que las ciencias son construidas por algunos genios, sino reconocer que está es construida en consenso social el cual es cambiante según su contexto, ya que actualmente se cree que Euler construyo el principio de mínima acción, donde en el trabajo se muestra que él parte de los trabajos de Maupertuis y Descartes en relación al principio.

A pesar de las diferencias entre los autores sus preocupaciones no se limitan a la matematización de la mecánica, sino existen en ellos una necesidad de aclarar conceptualmente los fundamentos en los que se sustenta la mecánica como los son: espacio, tiempo, materia y fuerza, con la intención de que la sociedad pueda comprender el comportamiento de los cuerpos en la naturaleza.

Este principio consiste en resaltar la relación entre las matemáticas y la física, la cual a partir de sus magnitudes y relaciones abstractas permite descubrir fenómenos del mundo natural, utilizando principios, axiomas, teoremas entre otros; es necesario reconocer que los autores buscan la forma de corregir los problemas conceptuales de los fundamentos de la mecánica, sin embargo, la única alternativa que encuentra Maupertuis es formular el principio con la intención de estudiar la naturaleza a partir de él.

El principio de mínima cantidad de acción resuelve los problemas en las definiciones de espacio, tiempo, materia y fuerza, fundamentado en la definición de una funcional que me permite obtener las ecuaciones de movimientos, esta funcional se puede escribir en términos de cantidad de movimiento o fuerzas vivías; donde Actualmente se trabaja a partir de un lagrangiano o hamiltoniano según el caso.

La propuesta de esta investigación es reconocer la importancia de que los docentes de física introduzcan en sus cursos las problemáticas conceptuales que tiene las leyes de Newton, con la intensión que el estudiantes se apropie de estas, y más aún para que el estudiantes comprenda la necesidad de estudiar la mecánica desde el principio de mínima cantidad de acción, ya que las teorías modernas de la física están sustentadas en la axiomatización o matematización de la mecánica.

BIBLIOGRAFÍA

- Arana, J. (1987). La doble significación científica y filosófica de la evolución del concepto de fuerza de Descartes a Euler. Anuario filosófico, 9-42.

- Colombo de Cudmani, L. y. (2004). ¿Es importante la epistemología de las ciencias en la formación de investigadores y de profesores en física . Enseñanza de las ciencias.

- Descartes, R. (1981). Discruso de metodo, dióptrica, meteoros y geometria. Alfaguara.

- Euler, L. (1985). Reflexiones sobre el espacio, tiempo y materia. Alianza .

- Euler, L. (1990). Cartas a una princesa de Alemania sobre diversos temas de física y filosofia. Prensa universitaria de Zaragoza.

- Euler, L. (1993). Método para hallar líneas curvas que gocen de una propiedad de Máximo o de Mínimo o solución del problema isoperimetrico tomaso en sentido latísimo. Publicacions de la Universitat Autónoma de Barcelona.

- Frase, C. (1985). D'Alembert's Principle: The Original Formulation and Application in Jean d'Alembert's Traité de Dynamique. Institute for the History and Philosophy of Science and Technology, University of Toronto, 31-61.

- Giordan, G. y. (1986). La historia de las ciencias: una herramienta para la enseñanza. Enseñanza de las ciencias.
- Gutiérrez, F. J. (2004). Apuntes de Matemática Discreta. Cádiz.
- Lagrange, j. (1760). Essai d'une nouvelle methode pour Determiner les máxima et les minima des formules intégrales indéfinies.
- Maupertuis, P. (1758). Examen fiosofico de la prueba de la existencia de Dios . Traduccion de Juan Arana, 180-215.
- Maupertuis, P. (1985). El orden verosímil del cosmos. Madrid: Alianza editorial.
- Rego, V. P. (2003). Lagrange La elegancia matemática. nivola.
- Thomas, H. (1988). Ciencia e ilustración. Madrid: Siglo XXI de España Editores.
- Urbaneja, P. M. (2007). La Historia de la Matemática como recurso didáctico e instrumento de integración cultural de la Matemática. Historia de las matemáticas para la enseñanza en la secuandaria.

Apéndice A

PRODUCTO CARTESIANO

"*Dada una colección de conjuntos* $A_1, A_2, A_3, ...A_n$*, se llamara el producto cartesiano de los mismos y lo notaremos por* $A_1XA_2X...XA_n$*, al conjunto formado por n-tuplas ordenadas,* $(a_1, a_2, ..., a_n)$ *donde* $a_i \in A_(i) : 1 \leq i \leq n$ *es decir,*$A_1XA_2XA_3...XA_n = (a_1, a_2, ..., a_n) : a_(i) \in A_i \leq i \leq n$" (Gutiérrez, 2004).

Siendo dos conjuntos A y B, el producto cartesiano se define como:

$$AXB = \{(a, b) : a \in Ayb \in B\}.$$

Si $A = B$ entonces:

$$AXA = \{(a, b) : a \in Ayb \in B\},$$

y se denota como A^2.

La extensión n del producto se denota como:

$$AXAX...A_n = \{(a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n) : (a_1, a_2, ..., a_n) \in Ay(b_1, b_2, ..., b_n) \in A\}$$

Tomando el conjunto R y realizando un producto cartesiano entre él queda:

$$RXR = R^2 = (x, y) : x, y \in R)$$

Cada punto (x, y) representa un par ordenado de números reales. R^2 se denomina plano cartesiano.

Propiedades:

El producto cartesiano es distributivo respecto de la unión y la intersección de conjuntos, es decir, si A, B y C son tres conjuntos cualesquiera, cumple con las siguientes propiedades:

- $A \times (B \bigcup C) = (A \times B) \bigcup (A \times C)$
- $A \times (B \bigcap C) = (A \times B) \bigcap (A \times C)$
- $(A \bigcup B) \times C = (A \times C) \bigcup (B \times C)$
- $(A \bigcap B) \times C = (A \times C) \bigcap (B \times C)$

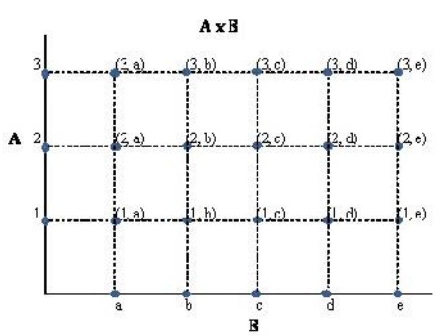
Ejemplo:
Sean dos conjuntos A y B tal que.

$$\begin{aligned} A &= \{1, 2, 3\}. \\ B &= \{a, b, c, d, e\}. \end{aligned}$$

Al realizar el producto cartesiano se obtiene:

$AXB = (1, a), (1, b), (1, c), (1, d), (1, e), (2, a), (2, b), (2, c), (2, d), (2, e), (3, a), (3, b), (3, c), (3, d)(3, e)$

El diagrama propuesto por Descartes para los productos cartesianos es:



Plano cartesiano propuesto por Descartes, para pintar las parejas ordenadas obtenidas del producto cartesiano.

Apéndice B

FORMALIZACIÓN DEL MÉTODO ABSOLUTO

El método absoluto es propuesto por Euler en su trabajo Método para hallar líneas curvas que gocen de una propiedad de máximo o de mínimo o solución del problema isoperimétrico tomado en sentido latísimo. "*El método absoluto de máximos y mínimos sirve para determinar la curva en la que cierta magnitud variable dada de antemano alcance el máximo o el mínimo, entre todas las curvas referidas a una misma abscisa*" (Euler L. , 1993, pág. 37), sin embargo, las curvas pueden construirse de muchas formas por lo cual Euler cree necesario restringir el problema.

Para graficar una curva en un plano ordenado, es necesario recurrir a los ejes o a cualquier intervalo del eje. Euler propone que la primera restricción debe referirse a la magnitud de la abscisa, ya que la abscisa la considera como el intervalo cerrado de una parte del eje dado como se muestra en la gráfica B.1.

Para la construcción del método absoluto, Euler parte por la siguiente hipótesis:

"*En este sentido designaremos siempre con la letra x la abscisa, a la que referimos todas las curvas, y con la letra y la ordenada. Entonces, tomando elementos de abscisa iguales, será siempre*, $dy = pdx, dp = qdx, dq = rdx, dr = sdx, ...$"(Euler L. , 1993, pág. 41).

Lo que muestra la hipótesis de Euler es que la abscisa está compuesta por infinitos puntos, donde la distancia de punto a punto es constante, lo cual significa que los dx son iguales.

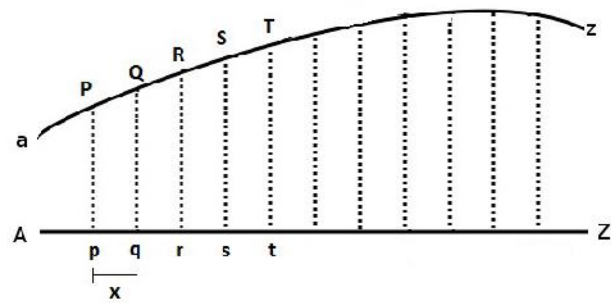


Figura B.1: Se presenta los puntos que componen la abscisa y la ordenada.

Los puntos que componen la abscisa son $p, q, r, s, t, ...$, y dado que las dx son constantes la segunda variación deber ser igual a cero $(d^2x = 0)$, gráfica B.1. Al utilizar estas sustituciones Euler logra dejar la expresión en términos de una diferencial constante, "*lo cual para cualquier diferencial que se suponga que es constante debe dar siempre la misma fórmula..., por razón del método que emplearemos, es necesario que asumamos la diferencial dx como constante*" (Euler L. , 1993, pág. 41).

Todas las diferenciales de la variable y de cualquier orden, se pueden expresar en términos de dx, como se presenta en la siguiente tabla,

$dy = pdx$
$ddy = dpdx = qd^2x$
$d^3y = dqd^2x = rd^3x$
...

Donde los puntos $p, q, r, s, ...$ están en función de dx ya que son los puntos que componen la abscisa, y los dx muestran las separaciones de punto a punto, las cuales son constantes .

Euler al restringir el problema por medio de la abscisa, procede a construir una ecuación que debe estar restringida por la misma abscisa, "*por lo tanto la formula será una magnitud variable dependiente de la longitud de la abscisa arbitraria a la que corresponda*"(Euler L. , 1993, pág. 45). En otro aparte afirma: "*Puesto que todos los problemas* *para los que éste método es apropiado se busca una curva, sea entre todas o sea entre innumerables de algún modo determinadas, que gocen de una propiedad de máximo o de mínimo; esta misma propiedad, que en la curva que se busca ha de ser máxima o mínima, será la magnitud, que se expresa con una formula, que aquí llamaremos la fórmula de máximo o mínimo*" (Euler L. , 1993, pág. 44).

Sin embargo, la ecuación no puede depender solo de la abscisa, ya que si fuera así la ecuación tomaría el mismo valor para todas las curvas que tengan la misma abscisa, por lo cual la ecuación debe depender de cada curva que pueda ser máxima o mínima de entre las innumerables curvas. La ecuación será función de las variables x e y, donde Euler llama a x como la abscisa genérica y a y como la ordenada genérica. Euler precede a introducir una proposición con el fin de definir la funcional, "*Para que una fórmula de máximos o mínimos, W, determine una curva (amz) que satisfaga mejor que todas las restantes, la formula W debe ser una magnitud integral indefinida, que no pueda integrase si no se supone una relación entre x y y*" (Euler L. , 1993, pág. 48).
Euler introduce el término de integral indefinida para presentar el concepto de funcional a través de la siguiente ecuación:

$$W = \int Z dx,$$

donde la funcional $Z = Z(x, y, p, q, r, ...)$ depende de las variables $y, p, r, s, ...$, y estas a su vez dependen de la variable independiente x. La magnitud W debe construirse de tal forma que: "*Su valor deducido de una determinada curva dependa de la posición de cada uno de los elementos de esta curva situados entre los extremos a y z, pero esto solo puede suceder si la magnitud W es una integral indefinida, que no puede en absoluto integrarse sino se supone una ecuación entre x e y*" (Euler L. , 1993, pág. 50).

Por otro lado, en el segundo capítulo del libro (Euler, 1993) presenta la proposición con la que introduce el término de incrementos y decrementos, con la intención de obtener una ecuación diferencial de segundo grado dependiente de los puntos inicial y final del recorrido, para esto propone: "*Si en una curva cualquiera (amz) , una ordenada arbitraria Nn se aumenta en un trozo infinitamente pequeño nv, hallar los incrementos o decrementos que recibe cada una de las magnitudes determinadas que se refieren a la curva"*, (Euler L. , 1993, pág. 65), como se presenta en la figura B.2.

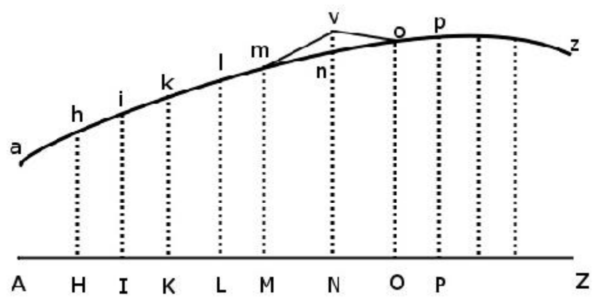


Figura B.2: Euler presenta una curva que está compuesta por la abscisa (AZ) y la ordenada az, con un incremneto en Nn de nv, el cual es infinitesimal.

Al introducir la abscisa genérica $AM = x$, y la ordenada genérica $Mm = y$, se definen los incrementos y decrementos con la notación propuesta por Euler. Los incrementos son denotados como: $F^I, F^I I, F^I II, ...$ a los puntos N, O, P que están después de la abscisa genérica. Los decrementos son denotados como:$F_(I,)F_I I, F_I II, ...$ a los puntos H, I, K, L que están contendidos en la abscisa genérica o la anteceden como se muestra en la figura B.2.

De la figura B.2 se observa que el valor de la curva se aumenta en un pequeño trozo nv a causa de la traslación del punto n al punto v, donde este aumento se denota como $Nn = y^I$. Los incrementos puede hallarse de manera rápida diferenciando la función o ecuación de máximos o mínimos, ya que los incrementos se pueden remplazar por los valores propuesto por Euler dados en su tabla (Euler L. , 1993, pág. 66).

Para esto Euler propone el siguiente enunciado:

"*Siendo Z una función determinada de solas x e y, hallar la curva az (figura B2), en la que el valor de la formula $\int Zdx$ sea máximo o mínimo*" (Euler L. , 1993, pág. 68).

Se supone que la abscisa genérica es $AM = x$, y la ordenada genérica como: $Mm = y$, en el punto MN le corresponde el valor Zdx, los puntos mayores a él le corresponderán los incrementos de la forma $Z^I, Z^I I, Z^I II, ...$, y a los antecesores le corresponderá los decrementos de la forma $Z_I, Z_I I, Z_I II, ...$, por lo tanto la suma de los incrementos y los decrementos tendrá que ser máxima o mínima (Euler L. , 1993).

Pero como se presenta en la figura B.2, se observa que el único incremento es $Nn = y^I$, se aumenta con el pequeño trozo nv,y la expresión debe conservar el mismo valor, por lo tanto la suma de las diferenciales de la expresión debe anularse con la suma de los decrementos, y al hallar los valores diferenciales de cada punto y sumarlos se obtiene la fórmula de máximos y mínimos, e igualando a cero se obtiene la ecuación de la curva que se quiere hallar (Euler L. , 1993).

Si Z esta en función de x yy , su diferencial será de la forma $Mdx + Ndy = dZ$, donde las derivadas de los incrementos y decrementos serán:

$$\begin{aligned} dZ^I &= M^I dx + N^I dy^I, \\ dZ_I &= M_I dx + N_I dy_I. \end{aligned}$$

Para resolver esta diferencial se remplaza el dy^I por el valor nv el cual es el incremento de la ordenada, siendo este el único incremento, los demás son iguales a cero; por lo cual la única diferencial es $Z^I dx$, que se puede expresar como:

$$Ndxnv = 0,$$

donde el dx es constante y el nv es un incremento, la única forma que la expresión sea cero, es que el valor de N sea cero, lo cual muestra que le incremento es infinitesimal.
Euler retoma el enunciado de la figura B.2, agregándole que la funcional ahora este en términos de, x, y y p , donde p es un punto que compone la abscisa; lo cual al realizar la traslación del n al v se debe tomar en cuenta y^I, p o p^I, donde la diferencial se expresa como:

$$dZ = Mdx + Ndy + Pdp,$$

Y el incremento de la diferencial la denota como:

$$dZ^I = M^I dx + N^I dy^I + P^I dp^I.$$

Al realizar las derivadas obtiene:

$$\begin{aligned} dZ &= \frac{P(nv)}{dx} \\ dZ^I &= N^I nv - P^I, \end{aligned}$$

y sumando Z^I y Z, donde esta suma debe ser igual a cero para obtener la ecuación de la curva, se obtiene:

$$nv(Ndx - dP) = 0,$$

Por lo tanto, la ecuación queda expresada como:

$$N - \frac{dP}{dx} = 0.$$

La anterior ecuación la denomina ecuación de Euler, siendo ésta una ecuación diferencial de segundo orden con la que soluciono los problemas propuestos por los hermanos Bernoulli.

A continuación se da un ejemplo donde se muestra que el método propuesto por Euler reconstruye el lugar geométrico de las curvas cuando la funcional está en términos de x y y.

Sea la ecuación de máximos y mínimos $\int(\frac{a}{2}x^2 - y)y^2dx$, donde Z es igual a:

$$Z = \frac{a}{2}x^2 - y^3,$$

diferenciando la funcional se obtiene:

$$axy^2dx + (ax^2y - 3y^2)dy.$$

Donde $M = axy^2$ y $N = ax^2y - 3y^2$, pero si $N = 0$ se obtiene que la ecuación de la curva es:

$$0 = ax^2y - 3y^2,$$

$$\begin{aligned} 3y^2 &= ax^2y \\ 3y &= ax^2 \\ y &= \frac{a}{3}x^2 \end{aligned}$$

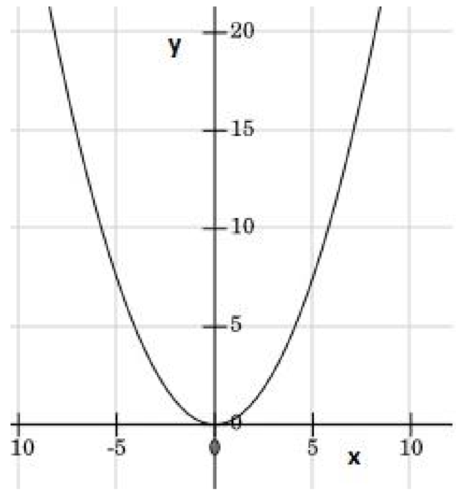


Figura B.3: Lugar geometrico de la formula$\int(\frac{a}{2}x^2 - y)y^2dx$.

Como a es una constante, que en nuestro caso es igual a 1, se obtiene el lugar geométrico de la ecuación que se presenta a continación:

Para conocer si es mínima o máxima, se debe comprar con otra curva que tenga la misma abscisa.