

**Papel de la representación gráfica de la fracción, en las pruebas Saber 5° aplicadas en
el año 2009**

Campo Elías Castillo Gutiérrez

Universidad Pedagógica Nacional

Facultad de Ciencia y Tecnología

Departamento de Matemáticas

Maestría en Docencia de la Matemática

Bogotá D. C., Abril 2012

**Papel de la representación gráfica de la fracción, en las pruebas Saber 5° aplicadas en
el año 2009**

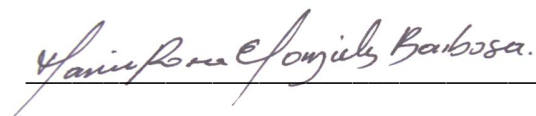
Campo Elías Castillo Gutiérrez

Código: 2010185005

**Trabajo de grado presentado como requisito parcial
para optar por el título de Magister en Docencia de la Matemática**

Asesora

Magister María Rosa González Barbosa



María Rosa González Barbosa.

Universidad Pedagógica Nacional

Facultad de Ciencia y Tecnología

Departamento de Matemáticas

Maestría en Docencia de la Matemática

Bogotá D. C., Abril de 2012



UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA
NACIONAL

Educadora de educadores

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

**ACTA DE EVALUACION
DE TESIS DE GRADO**

Escuchada la sustentación del Trabajo de Grado titulado "*Papel de la representación gráfica de la fracción que se privilegia en la Prueba Saber 5° aplicadas en el año 2009.*" Presentado por EL estudiante:

Campo Elías Castillo Gutiérrez-2010185005

Como requisito parcial para optar al título de **Magíster en Docencia de la Matemática**, analizado el proceso seguido por el estudiante en la elaboración del Trabajo y evaluada la calidad del escrito final, se le asigna la calificación de **Aprobado** con **43** puntos.

Observaciones:

En constancia se firma a los 05 días del mes de junio de 2012.

JURADOS

Director(a) del Trabajo:

Profesor(a)


Maria Rosa González

Jurados:

Profesor(a)

Giovanna Castiblanco

Profesor (a)


Edgar Guacaneme

Nota de aceptación

Presidente del Jurado

Jurado

Jurado

Bogotá 31 de mayo de 2012

*A Sorangie Andrea, Ana
Virginia y mi familia, por
su apoyo y colaboración
incansable.*

Atendiendo al párrafo 2 del Artículo 42 del acuerdo 031 de 2007 del Consejo Superior de la Universidad, declaro que:

Para todos los efectos, declaro que el presente trabajo es original y de mi total autoría; en aquellos casos en los cuales he requerido del trabajo de otros autores o investigadores, he dado los respectivos créditos.



**LICENCIA DE SU USO A FAVOR DE LA BIBLIOTECA CENTRAL DE LA
UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL**

Bogotá, D.C., 4 de Junio de 2012

Señores

Biblioteca Central
Universidad Pedagógica Nacional
Ciudad

Los suscritos:

Campo Elías Castillo Gutiérrez , con C.C. No 7´185.068
_____, con C.C. No _____
_____, con C.C. No _____

En mi (nuestra) calidad de autor (es) exclusivo (s) de la obra titulada:
Papel de la representación gráfica de la fracción, en las pruebas Saber 5° aplicadas en el año 2009

(por favor señalen con una "x" las opciones que apliquen) tesis ___ trabajo de grado x presentado en el año 2012, por medio del presente escrito autorizo (autorizamos) a la Biblioteca Central de la Universidad Pedagógica Nacional para que, en desarrollo de la presente licencia de uso parcial, pueda ejercer sobre mi (nuestra) obra las atribuciones que se indican a continuación, teniendo en cuenta que en cualquier caso, la finalidad perseguida será facilitar, difundir y promover el aprendizaje, la enseñanza y la investigación.

En consecuencia, las atribuciones de usos temporales y parciales que por virtud de la presente licencia se autorizan a la Universidad Pedagógica Nacional, a los usuarios de la Biblioteca Central, así como a los usuarios de las redes, bases de datos y demás sitios web con los que la Universidad tenga perfeccionado un convenio, son:

AUTORIZO (AUTORIZAMOS)	SI	NO
1. La conservación de los ejemplares necesarios en la Biblioteca.	x	
2. La consulta física o electrónica según corresponda	x	
3. La reproducción por cualquier formato conocido o por conocer	x	
4. La comunicación pública por cualquier procedimiento o medio físico o electrónico, así como su puesta a disposición en Internet	x	
5. La inclusión en bases de datos y en sitios web sean éstos onerosos o gratuitos, existiendo con ellos previo convenio perfeccionado con la Biblioteca Central de la Universidad Pedagógica Nacional para efectos de satisfacer los fines previstos. En este evento, tales sitios y sus usuarios tendrán las mismas facultades que las aquí concedidas con las mismas limitaciones y condiciones	x	
6. La inclusión en el repositorio digital de la Biblioteca Central de la Universidad Pedagógica Nacional	x	

De acuerdo con la naturaleza del uso concedido, la presente licencia parcial se otorga a título gratuito por el máximo tiempo legal colombiano, con el propósito de que en dicho lapso mi (nuestra) obra sea explotada en las condiciones aquí estipuladas y para los fines indicados, respetando siempre la titularidad de los derechos patrimoniales y morales correspondientes, de acuerdo con los usos honrados, de manera proporcional y justificada a la finalidad perseguida, sin ánimo de lucro ni de comercialización.

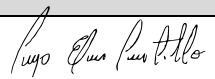
De manera complementaria, garantizo (garantizamos) en mi (nuestra) calidad de estudiante (s) y por ende autor (es) exclusivo (s), que la Tesis o Trabajo de Grado en cuestión, es producto de mi (nuestra) plena autoría, de mi (nuestro) esfuerzo personal intelectual, como consecuencia de mi (nuestra) creación original particular y, por tanto, soy (somos) el (los) único (s) titular (es) de la misma. Además, aseguro (aseguramos) que no contiene citas, ni transcripciones de otras obras protegidas, por fuera de los límites autorizados por la ley, según los usos honrados, y en proporción a los fines previstos; ni tampoco contempla declaraciones difamatorias contra terceros; respetando el derecho a la imagen, intimidad, buen nombre y demás derechos constitucionales. Adicionalmente, manifiesto (manifestamos) que no se incluyeron expresiones contrarias al orden público ni a las buenas costumbres. En consecuencia, la responsabilidad directa en la elaboración, presentación, investigación y, en general, contenidos de la Tesis o Trabajo de Grado es de mí (nuestro) competencia exclusiva, eximiendo de toda responsabilidad a la Universidad Pedagógica Nacional.

Sin perjuicio de los usos y atribuciones otorgadas en virtud de este documento, continuaré (continuaremos) conservando los correspondientes derechos patrimoniales sin modificación o restricción alguna, puesto que de acuerdo con la legislación colombiana aplicable, el presente es un acuerdo jurídico que en ningún caso conlleva la enajenación de los derechos patrimoniales derivados del régimen del Derecho de Autor.

De conformidad con lo establecido en el artículo 30 de la Ley 23 de 1982 y el artículo 11 de la Decisión Andina 351 de 1993, "Los derechos morales sobre el trabajo son propiedad de los autores", los cuales son irrenunciables, imprescriptibles, inembargables e inalienables. En consecuencia, la Universidad Pedagógica Nacional está en la obligación de RESPETARLOS Y HACERLOS RESPETAR, para lo cual tomará las medidas correspondientes para garantizar su observancia.

NOTA: Información Confidencial:

Esta Tesis o Trabajo de Grado contiene información privilegiada, estratégica, secreta, confidencial y demás similar, o hace parte de una investigación que se adelanta y cuyos resultados finales no se han publicado. Si ____ No x. En caso afirmativo expresamente indicaré (indicaremos), en carta adjunta, tal situación con el fin de que se mantenga la restricción de acceso.

NOMBRE COMPLETO	No. del documento de identidad	FIRMA
Campo Elías Castillo Gutiérrez	7 185.068	

AGRADECIMIENTOS

Quiero expresar mis más sinceros agradecimientos a:

La profesora Gloria García, ya que su apoyo y guía fue importante en el inicio de este proyecto.

La profesora María Rosa González, por continuar apoyando el desarrollo de este proyecto.

La institución educativa Nuevo Colegio San Juan Bautista, ya que permitieron de una manera desinteresada realizar este estudio en sus instalaciones.

Mis compañeros de trabajo y maestría.

RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN

TIPO DE DOCUMENTO: Trabajo de grado

ACCESO AL DOCUMENTO: Universidad Pedagógica Nacional.

TÍTULO: Papel de la representación gráfica de la fracción, en las pruebas Saber 5° aplicadas en el año 2009

AUTOR: CASTILLO GUTIÉRREZ, Campo Elías

ASESOR: GONZÁLEZ, María Rosa

PUBLICACIÓN: Bogotá D.C., 2012, 111 Páginas.

UNIDAD PATROCINANTE: Universidad Pedagógica Nacional.

PALABRAS CLAVE: Representación gráfica, visualización, evaluación externa, significados de la fracción.

DESCRIPCIÓN: En este trabajo se realiza un análisis del uso, la viabilidad y la pertinencia de las situaciones que en la prueba Saber 5° 2009 emplean los significados de la fracción, pero que además incorporan el uso de representaciones gráficas. Se pretende indagar la relación que puede existir entre representación gráfica y visualización; para este fin se utilizan los niveles de estudio de un problema con representación gráfica.

FUENTES: Para esta investigación se utilizaron 17 fuentes bibliográficas en total, de las cuales 3 son libros (o capítulos de libros), 8 artículos de revistas, 6 artículos publicados en internet.

CONTENIDOS: Este documento consta de cinco capítulos distribuidos de la siguiente manera: en el primer capítulo se hace un contextualización de la investigación empezando con la prueba Saber en Colombia y se particulariza la presentada en el año 2009. Además, se hace un estudio acerca de investigaciones que abordan los significados de la fracción en diferentes contextos. El segundo aborda el marco conceptual, en el encontramos las

definiciones de los significados de la fracción, las categorías de Arcavi (2003) acerca de la visualización y los niveles de representación definidos por Parra y Flores (2008), para la solución de problemas. El tercero se encuentra la metodología de la investigación. En el cuarto el estudio de los resultados obtenidos y para finalizar en el sexto las conclusiones.

METODOLOGÍA: Esta investigación es de carácter cualitativo y se caracteriza por la interpretación y descripción de información. Consta de tres etapas en las que encontramos el *preanálisis* que trata de las observaciones primitivas y la determinación de las categorías de análisis. *La exploración del material* que se refiere al estudio de las pruebas Saber 5° 2009 y por ultimo el *tratamiento de los resultados* en donde se realizó el estudio de los resultados obtenidos.

CONCLUSIONES: Los problemas planteados en la prueba Saber 5° 2009, que incorporan los significados de la fracción y que además apelan al uso de las representaciones gráficas, sólo las utilizan para expresar de otra manera un mismo tipo de información, pero no se pretende que el estudiante indague, profundice o analice, acciones que le faciliten resolver la situación problema planteada. Por otro lado, en esta prueba se privilegia concepto de fracciones bajo su significado parte-todo, principalmente en los problemas que incorporan representaciones gráficas, además solo se espera que los estudiantes realicen procesos algorítmicos para que los conduzcan a una solución, aunque este proceso Arcavi (2003) lo define como visualizador, no es el único, que se puede movilizar.

FECHA DE ELABORACION DEL RESUMEN: 28/05/2012

Tabla de contenido

1.	Contextualización de la investigación	1
1.1	Pruebas Saber en Colombia	1
1.1.1	Sus inicios	1
1.1.2	La Prueba Saber en el 2009.....	2
1.2	Problema de investigación	8
1.2.1	Antecedentes	8
1.2.2	Investigaciones acerca de las fracciones y sus representaciones gráficas	9
1.2.3	Aportes de los antecedentes	12
1.3	Planteamiento del problema	12
1.4	OBJETIVOS	14
1.4.1	Objetivo general:.....	14
1.4.2	Objetivos específicos:.....	14
2	Marco de referencia conceptual	15
2.1	Posturas de la visualización	17
2.2	Visualizar dentro del proceso de comprensión.....	18
2.3	Fracciones, representaciones gráficas y visualización	19
2.3.1	Significados de la fracción	26
2.3.2	Representaciones y problemas	31
3	Metodología	35
3.1	Análisis de contenido	35
3.2	Investigación cualitativa	36
3.3	Etapas de la investigación.....	37
3.3.1	Proceso de selección y discriminación de preguntas	38
3.3.2	Estudio del cuerpo documental	39
3.4	Proceso de selección de preguntas	41

3.5	Visualización como parte del proceso de solución de los problemas .	53
3.6	Pruebas aplicadas.	75
3.6.1	Aplicación de las pruebas.....	77
4	Estudio.....	79
4.1	Análisis de las pruebas.....	79
4.1.1	Pregunta 1.....	79
4.1.2	Pregunta 2.....	80
4.1.3	Pregunta 3.....	82
4.1.4	Pregunta 4.....	84
4.1.5	Pregunta 5.....	88
4.1.6	Pregunta 6.....	90
4.1.7	Pregunta 7.....	92
4.1.8	Pregunta 8.....	93
4.1.9	Pregunta 9.....	95
4.1.10	Pregunta 10.....	97
4.1.11	Pregunta 11.....	98
4.1.12	Pregunta 12.....	100
4.1.13	Pregunta 13.....	101
4.1.14	Pregunta 14.....	101
4.1.15	Pregunta 15.....	102
4.1.16	Pregunta 16.....	102
5	Conclusiones.....	106
6	Bibliografía.....	110

TABLA DE ESQUEMAS

ESQUEMA 1 SIGNIFICADO PARTE-TODO SEGÚN ESCOLANO Y GAIRIN (2005)..	20
ESQUEMA 2 PROCEDIMIENTO PARA EL ESTUDIO DE LA PRUEBA.....	38

TABLA DE FIGURAS

FIGURA 1 PROCESO DE ELABORACIÓN DE LA PRUEBA A TRAVÉS DE LA METODOLOGÍA DE DISEÑO BASADO EN EVIDENCIAS (PEDRAZA & OTROS, 2009).....	5
FIGURA 2 PROPIEDAD DE LA DENSIDAD DE LOS NÚMEROS RACIONALES	22
FIGURA 3 SEGUNDA PRUEBA DE LA DENSIDAD DE LOS NÚMEROS RACIONALES.....	23
FIGURA 4 COLECCIÓN DE FÓSFOROS.....	24
FIGURA 5 UNIDADES DE CONTEO	24
FIGURA 6 DESCOMPOSICIÓN DE LA FIGURA	24
FIGURA 7 FRACCIÓN COMO MEDIDA. (ESCOLANO & GAIRIN, 2005)	27
FIGURA 8 SIGNIFICADO PARTE-TODO (ESCOLANO & GAIRIN, 2005).....	28
FIGURA 9 PRIMERA RESPUESTA (PARRA & FLORES, 2008).....	32
FIGURA 10 RESPUESTA GRÁFICA (PARRA & FLORES, 2008).....	33

TABLA DE RECORTES

RECORTE 1 EJEMPLO DE PREGUNTA PRUEBA SABER (PEDRAZA & OTROS, 2009).....	4
RECORTE 2 USO DE LA FRACCIÓN CON REPRESENTACIONES GRÁFICAS (VÁZQUEZ & OTROS, 2002).....	11
RECORTE 3 EJEMPLO DE REPRESENTACIONES GRÁFICAS (CARO & OTROS, 1982).....	15
RECORTE 4 REPRESENTACIÓN GRÁFICA VISTA DESDE ESCOLANO Y GAIRIN (2005).....	19
RECORTE 5 UN GRÁFICO QUE DESCRIBE LA CAMPAÑA DE NAPOLEÓN EN RUSIA EN 1.812 (ARCAVI, 2003).	21
RECORTE 6 PREGUNTA 12 DE LA PRUEBA EDITADA SIN OPCIONES DE RESPUESTA.....	76
RECORTE 7 PREGUNTA 13 DE LA PRUEBA EDITADA SIN OPCIONES DE RESPUESTA.....	76
RECORTE 8 PREGUNTA 15 DE LA PRUEBA EDITADA SIN OPCIONES DE REPUESTA	76
RECORTE 9 PREGUNTA ELIMINADA DEL ESTUDIO EN TODAS SUS CATEGORÍAS	78
RECORTE 10 REPRESENTACIÓN GRÁFICA PARA LA SOLUCIÓN DE LA PREGUNTA 2	81
RECORTE 11 RESPUESTA GRÁFICA PARA LA SOLUCIÓN DE LA PREGUNTA 2..	81
RECORTE 12 RESPUESTA DE ANGIE.....	83
RECORTE 13 PREGUNTA 4	84
RECORTE 14 ENUNCIADO PRINCIPAL PREGUNTA 4	84
RECORTE 15 PROCESO ALGORÍTMICA PARA LA PREGUNTA 4	85
RECORTE 16 PREGUNTA 16.....	102
RECORTE 17 REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UN ESTUDIANTE PARA LA PREGUNTA 16.....	103

TABLA DE TABLAS

TABLA 1 COMPETENCIA: COMUNICACIÓN (PEDRAZA & OTROS, 2009).....	6
TABLA 2 COMPETENCIA: RAZONAMIENTO (PEDRAZA & OTROS, 2009)	6
TABLA 3 COMPETENCIA: RESOLUCIÓN (PEDRAZA & OTROS, 2009)	7
TABLA 4 PREDICCIÓN DE LO INVISIBLE PARA LA PRUEBA	23
TABLA 5 RESUMEN CATEGORÍAS DE ARCAVI (2003)	26
TABLA 6 SIGNIFICADOS DE LA FRACCIÓN	31
TABLA 7 RELACIÓN DE PREGUNTA CON LA COMPETENCIA A EVALUAR (PEDRAZA & OTROS, 2009).....	41
TABLA 8 RESULTADOS PRIMERA ETAPA DEL ESTUDIO.....	42
TABLA 9 SELECCIÓN DE LAS PREGUNTAS TENIENDO EN CUENTA EL NIVEL SEMÁNTICO	49
TABLA 10 ANÁLISIS DE LOS PROBLEMAS DESDE EL SIGNIFICADO DE LA FRACCIÓN	53
TABLA 11 ANÁLISIS DE PROBLEMAS RESUELTOS.....	72
TABLA 12 RELACIÓN DE PREGUNTAS SIGNIFICADOS Y CATEGORÍAS DE ARCAVI.....	74
TABLA 13 RESPUESTAS PREGUNTA 3 P2.....	82
TABLA 14 RESPUESTAS PREGUNTA 4 P2.....	86
TABLA 15 RESPUESTAS PREGUNTA 4 P3.....	87
TABLA 16 RESPUESTAS PREGUNTA 5 P2.....	89
TABLA 17 RESPUESTAS PREGUNTA 5 P3.....	90
TABLA 18 RESPUESTAS PREGUNTA 6 P1 Y P2.....	91
TABLA 19 RESPUESTAS PREGUNTA 7 P1 Y P2.....	92
TABLA 20 RESPUESTAS PREGUNTA 8 P2.....	94
TABLA 21 RESPUESTAS PREGUNTA 8 P3.....	94
TABLA 22 RESULTADOS PREGUNTA 9 P2.....	95
TABLA 23 RESULTADOS PREGUNTA 9 P3.....	96
TABLA 24 RESPUESTAS PREGUNTA 10 P2.....	97
TABLA 25 RESPUESTAS PREGUNTA 10 P3.....	98
TABLA 26 RESPUESTAS PREGUNTA 11 P2.....	99
TABLA 27 RESPUESTAS PREGUNTA 11 P3.....	99
TABLA 28 RESPUESTAS PREGUNTA 12 P3.....	100
TABLA 29 RESPUESTAS PREGUNTA 14 P2 Y P3.....	101
TABLA 30 RESPUESTAS PREGUNTA 16 P3.....	104

CAPITULO 1

1. Contextualización de la investigación

1.1 Pruebas Saber en Colombia

1.1.1 Sus inicios

Las evaluaciones estandarizadas en Colombia han avanzado de acuerdo con los requerimientos y necesidades nacionales, en busca de una descripción del panorama de la educación, según lo planteado por (Peña, 2008) además, son una herramienta para conocer la dinámica de los procesos en los sistemas educativos (Ravela, 2008).

El en contexto colombiano las pruebas estandarizadas, particularmente las Saber, surgieron por la necesidad de tener información válida y confiable acerca de la educación en Colombia que sirviera como herramienta para diseñar políticas, proyectos y planes que contribuyeran con el propósito de tener una educación de calidad y equidad. Por esta razón el ICFES, el Ministerio de Educación Nacional y otros organismos especializados realizaron pruebas muestrales en las áreas de lenguaje y matemáticas durante el periodo de 1991 - 1999, en los grados 3º, 5º, 7º y 9º, en instituciones oficiales y no oficiales, públicos y privados a nivel nacional y departamental, participaron ciudades como Bogotá, Barranquilla, Cali y Medellín para un total de 36 entidades territoriales, 31 de calendario A y 5 de calendario B, obteniendo información sobre las competencias logradas por los estudiantes (Fernández, 2005).

Aunque las pruebas realizadas brindaron información acerca de factores asociados a la calidad, el total de las instituciones no se benefició de estos resultados, por tal razón se diseñó una prueba censal que fue posible en el marco de *Sistema Nacional de Evaluación de la Educación*, conformado en 1994.

De acuerdo con Fernández (2005), las pruebas Saber censal, iniciaron en el año 2002 por iniciativa del Ministerio de Educación Nacional, evaluando las áreas de lenguaje, matemáticas, ciencias y competencias ciudadanas, en este año los grados que participaron

fueron 3º, 5º, 7º y 9º. Sin embargo, a partir del año 2003 solo presentaron la prueba los grados 5º y 9º y fue denominada Prueba Saber.

1.1.2 La Prueba Saber en el 2009

Las pruebas SABER en Colombia son un instrumento de evaluación cuyo propósito es valorar la calidad de la educación. Con esta prueba se busca brindar información acerca de las fortalezas y debilidades de las competencias y de la calidad de las instituciones (Pedraza & otros, 2009). La entidad encargada de diseñar dichas pruebas es el ICFES, quien toma como marco de referencia los Estándares Básicos de Competencias definidos como:

Los estándares son unos referentes que permiten evaluar los niveles de desarrollo de las competencias que van alcanzando los y las estudiantes en el transcurrir de su vida escolar.

Una competencia ha sido definida como un saber hacer flexible que puede actualizarse en distintos contextos, es decir, como la capacidad de usar los conocimientos en situaciones distintas de aquellas en las que se aprendieron. Implica la comprensión del sentido de cada actividad y sus implicaciones éticas, sociales, económicas y políticas. (MEN, 2006).

Las pruebas Saber según Pedraza & otros (2009) se pueden definir cómo compiladoras de los Lineamientos Curriculares y los Estándares Básicos de Competencia, además de mantener una estructura definida entre competencias y componentes, donde los primeros hacen referencia al saber y al proceder, y las segundas a los conceptos y estructuras matemáticas.

Para la prueba diseñada en el año 2009, que de ahora en adelante se convertirá en el objeto de análisis de este estudio, las competencias se agruparon en las siguientes tres categorías:

- **Razonamiento y argumentación:** *están relacionadas, entre otros, con aspectos como el dar cuenta del cómo y del porqué de los caminos que se siguen para llegar*

a conclusiones, justificar estrategias y procedimientos puestos en acción en el tratamiento de situaciones problema, formular hipótesis, hacer conjeturas, explorar ejemplos y contraejemplos, probar y estructurar argumentos, generalizar propiedades y relaciones, identificar patrones y expresarlos matemáticamente y plantear preguntas, reconocer distintos tipos de razonamiento y distinguir y evaluar cadenas de argumentos.

- ***Comunicación, representación y modelación:*** *están referidas, entre otros aspectos, a la capacidad del estudiante para expresar ideas, interpretar, usar diferentes tipos de representación, describir relaciones matemáticas, relacionar materiales físicos y diagramas con ideas matemáticas, modelar usando lenguaje escrito, oral, concreto, pictórico, gráfico y algebraico, manipular proposiciones y expresiones que contengan símbolos y fórmulas, utilizar variables y construir argumentaciones orales y escritas, traducir, interpretar y distinguir entre diferentes tipos de representaciones, interpretar lenguaje formal y simbólico y traducir de lenguaje natural al simbólico formal.*
- ***Planteamiento y resolución de problemas:*** *se relacionan, entre otros, con la capacidad para formular problemas a partir de situaciones dentro y fuera de la matemática, desarrollar, aplicar diferentes estrategias y justificar la elección de métodos e instrumentos para la solución de problemas, justificar la pertinencia de un cálculo exacto o aproximado en la solución de un problema y lo razonable o no de una respuesta obtenida, verificar e interpretar resultados a la luz del problema original y generalizar soluciones y estrategias para dar solución a nuevas situaciones problema. (Pedraza & otros, 2009)*

De otra parte las componentes, definidas a partir de los cinco pensamientos¹, se agruparon en tres categorías: numérico – variacional, geométrico – métrico, aleatorio, de tal manera que sirvan como un esquema de clasificación total de los componentes planteados en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006).

¹ Establecidos en la propuesta de Lineamientos Curriculares (MEN, 1998)

La prueba Saber 5° 2009 contiene unos problemas a partir de los cuales se dependen preguntas cerradas, que tienen cuatro opciones de respuesta y de éstas solo una es correcta. Particularmente ésta prueba tiene un total de 48 preguntas en el área de matemáticas.

De acuerdo a la estructura de la prueba, presentada anteriormente presentamos un ejemplo donde se relacionan las características explicadas.

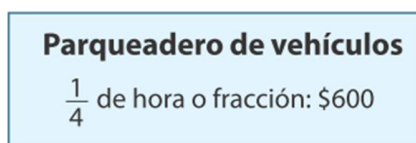
Estándar:

Interpretar las fracciones en diferentes contextos: situaciones de medición, relaciones parte-todo, cociente, razones y proporciones. (MEN,2006)

Pregunta con opciones de respuesta:

Una de las preguntas que pueden ser elaboradas alrededor de éste estándar sería:

8. En un parqueadero de vehículos tienen el siguiente aviso.



Andrés dejó estacionado su vehículo en el parqueadero durante dos horas y media ¿Cuánto debe pagar

Andrés?

- A. \$150
- B. \$600
- C. \$2.400
- D. \$6.000

Recorte 1 Ejemplo de pregunta prueba saber (Pedraza & otros, 2009)

La pregunta ejemplo tiene cuatro opciones de respuestas de las cuales solo una es correcta, en este caso, la respuesta D. La competencia evaluada es la *Resolución de problemas*, porque se espera que el estudiante aplique diferentes estrategias y justifique la elección de métodos para la solución de problemas, entre otros.

Diseño de las preguntas de la prueba Saber 5°

Cada una de las componentes y las competencias contaba con afirmaciones, definidas como interpretaciones de los estándares que permiten darle significado a los resultados obtenidos. Las evidencias se refieren a las acciones o productos observables mediante los cuales se permite verificar las afirmaciones, y buscan responder ¿Qué deben hacer los estudiantes en las pruebas que permitan verificar que tienen determinados conocimientos o habilidades? De esta manera las evidencias se convierten en la base para construir las preguntas de la prueba. En la figura 1 se explica la construcción y jerarquía de cada uno de los procesos necesarios para llegar a tener como resultado la prueba Saber 5° y 9° 2009.



Figura 1 Proceso de elaboración de la prueba a través de la metodología de diseño basado en evidencias (Pedraza & otros, 2009)

Las afirmaciones a partir de las cuales se construyeron las evidencias y las preguntas establecidas para la prueba SABER 2009, se presentan en las siguientes tablas:

Componente	Afirmación: El estudiante...
Numérico-variacional	<ol style="list-style-type: none"> 1. Reconoce significados del número en diferentes contextos (medición, conteo, comparación, codificación, localización, entre otros) 2. Reconoce diferentes representaciones de un mismo número 3. Describe e interpreta propiedades y relaciones de los números y sus operaciones. 4. Traduce relaciones numéricas expresadas gráfica y simbólicamente
Geométrico-métrico	<ol style="list-style-type: none"> 1. Diferencia atributos mensurables de los objetos y eventos en diferentes situaciones 2. Selecciona unidades tanto estandarizadas como no convencionales apropiadas para diferentes mediciones 3. Utiliza sistemas de coordenadas para especificar localizaciones
Aleatorio	<ol style="list-style-type: none"> 1. Clasifica y organiza la presentación de datos 2. Interpreta cualitativamente datos relativos a situaciones del entorno escolar 3. Representa un conjunto de datos e interpreta representaciones gráficas de un conjunto de datos 4. Hace traducciones entre diferentes representaciones 5. Expresa el grado de probabilidad de un suceso.

Tabla 1 Competencia: Comunicación (Pedraza & otros, 2009)

Componente	Afirmación: El estudiante...
Numérico-variacional	<ol style="list-style-type: none"> 1. Reconoce patrones numéricos 2. Justifica propiedades y relaciones numéricas usando ejemplos y contraejemplos 3. Reconoce y genera equivalencias entre expresiones numéricas 4. Analiza relaciones de dependencia en diferentes situaciones 5. Justifica el valor posicional en el sistema de numeración decimal en relación con el conteo recurrente de unidades
Geométrico-métrico	<ol style="list-style-type: none"> 1. Compara y clasifica objetos tridimensionales y figuras bidimensionales de acuerdo con sus componentes 2. Reconoce nociones de paralelismo y perpendicularidad en distintos contextos 3. Hace conjeturas y verifica los resultados de aplicar transformaciones a figuras en el plano 4. Describe y argumenta relaciones entre perímetro y área de diferentes figuras, cuando se fija una de estas medidas 5. Representa objetos tridimensionales a partir de representaciones bidimensionales 6. Construye y descompone figuras planas y sólidos a partir de condiciones dadas 7. Identifica y justifica relaciones de semejanza y congruencia entre figuras
Aleatorio	<ol style="list-style-type: none"> 1. Compara datos presentados en diferentes representaciones 2. Hace arreglos condicionados o no condicionados 3. Hace conjeturas acerca de la posibilidad de ocurrencia de eventos

Tabla 2 Competencia: Razonamiento (Pedraza & otros, 2009)

Componente	Afirmación: El estudiante...
Numérico-variacional	<ol style="list-style-type: none"> 1. Resuelve y formula problemas aditivos de transformación, comparación, combinación e igualación 2. Resuelve y formula problemas multiplicativos: de adición repetida, factor multiplicante, razón y producto cartesiano 3. Resuelve y formula problemas de proporcionalidad directa e inversa 4. Resuelve y formula problemas que requieren el uso de la fracción como parte de un todo, como cociente y como razón
Geométrico-métrico	<ol style="list-style-type: none"> 1. Utiliza diferentes procedimientos de cálculo para hallar la medida de superficies y volúmenes 2. Reconoce el uso de las magnitudes y de las dimensiones de las unidades respectivas en situaciones aditivas y multiplicativas 3. Utiliza relaciones y propiedades geométricas para resolver problemas de medición 4. Usa y construye modelos geométricos para solucionar problemas
Aleatorio	<ol style="list-style-type: none"> 1. Resuelve problemas que requieren representar datos relativos al entorno usando una o diferentes representaciones 2. Resuelve problemas que requieren encontrar y/o dar significado al promedio de un conjunto de datos 3. Resuelve situaciones que requieren calcular la posibilidad o imposibilidad de ocurrencia de eventos

Tabla 3 Competencia: Resolución (Pedraza & otros, 2009)

En las tablas anteriores se encuentra explícito lo que se espera que los estudiantes hagan al momento de resolver un problema en particular.

Por ejemplo, para el problema del recorte 1 tenemos que la tabla 3 lo sustenta teóricamente, ya que la competencia a evaluar es la *resolución de problemas*, dentro de la tabla la componente referida es la *Numérico-variacional*, por lo tanto la afirmación por la cual se construyó la pregunta es: *El estudiante resuelve y formula problemas que requieren el uso de fracción como parte de un todo, como cociente y como razón.*

1.2 Problema de investigación

1.2.1 Antecedentes

Las actividades sociales diarias son un escenario natural donde se puede ver que la mayor parte de las personas se enfrentan a situaciones en las cuales está inmerso el uso de los números fraccionarios. Esto lo señala Elguero (2009) en su tesis titulada *Construcción social de ideas en torno al número racional en un escenario sociocultural de trabajo*, en un grupo de costureras se demuestra el uso cotidiano de la fracción.

La inconciencia del empleo de las fracciones en situaciones cotidianas no excluye su uso, por ejemplo cuando un grupo de niños decide jugar un partido de cualquier deporte en el que es necesario hacer una distribución igualitaria, están utilizando el concepto de fracción bajo el significado de reparto igualitario (Escolano & Gairin, 2005). Si bien es posible que no se haya aprendido dentro del aula de clase, su uso fue necesario para enfrentar esta situación.

Dados los distintos significados y usos de la fracción tanto en las matemáticas como en las situaciones sociales se ha generado varios estudios de orden teórico y práctico (Elguero, 2009), es así que el Ministerio de Educación Nacional los incorporó dentro de los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas, privilegiándolos en el pensamiento numérico. Cabe aclarar que los diversos significados de las fracciones también, podemos encontrar sus usos en otros pensamientos, como en el pensamiento aleatorio (probabilidades), en el pensamiento métrico (medidas), etc. No obstante en el nivel de la educación básica primaria su estudio sólo es dirigido o está limitado a algunos significados de la fracción, especialmente al de la relación parte-todo (Escolano & Gairin, 2005).

En los lineamientos generales de la prueba Saber 5° del año 2009 se afirma que se valoran las competencias que han desarrollado los estudiantes al finalizar un ciclo académico, basados en los Estándares Básicos de Competencias (2006). Por esta razón las fracciones son un objeto de evaluación en esta prueba ya que son incluidas en los estándares de primero a tercero grado de educación básica primaria, el estándar relacionado con las fracciones es: “describo situaciones de medición utilizando fracciones”.

A la luz de esta prueba se generan resultados que determinan el nivel de logro alcanzado por los estudiantes, que incidirán en el diseño de planes de mejoramiento elaborados por instituciones escolares y organismos de dirección ejecutiva (Pedraza & otros, 2009).

Sin embargo, estos resultados no solo repercuten en procesos educativos, también son la base para estudios de investigación, por ejemplo el diseñado por Vázquez & Otros (2002). Estos autores elaboraron estudios de: comprensión y resolución de problemas asociados al concepto de fracción, a partir de una prueba externa realizada en Cali que se analiza posteriormente en el documento.

1.2.2 Investigaciones acerca de las fracciones y sus representaciones gráficas

A continuación se presentan algunas investigaciones relacionadas con las fracciones, es preciso aclarar que se contextualizarán de esta manera, ya que precisamente nos interesa estudiar el uso de sus significados, aunque los autores tomaron el termino números fraccionarios, en esta investigación adoptaremos la terminología fracción ya que no realizamos un estudio del conjunto sino de los casos y usos particulares que se generan en diferentes contextos.

La primera investigación se fundamenta en el uso de la representación gráfica y simbólica para alcanzar una comprensión de la fracción. La segunda se refiere a la importancia de las representaciones gráficas para la solución de problemas con fracciones. La tercera es un estudio realizado en Colombia que evidencia los bajos resultados de los estudiantes al resolver un ejercicio que involucra el concepto de fracción.

1.2.2.1 Fracciones y representación gráfica: su cambio de representación simboliza un proceso de comprensión

La importancia de las diferentes representaciones de la fracción ha generado una gran cantidad de investigaciones en el campo de la Educación Matemática. Particularmente en Sevilla se realizó una investigación en el año 1997 con estudiantes que se formaban para ser profesores de matemáticas, el estudio pretendía analizar las características de la comprensión que los participantes habían alcanzado durante su formación en la educación básica primaria.

Para este objetivo utilizan la teoría de Hiebert, quien presenta un esquema para el análisis e interpretación de resultados basado en cinco categorías, que en la investigación realizada por Llinares & Sánchez, (1997) sólo se profundizan dos; la concerniente al desarrollo del proceso para la solución de problemas y manipulación de símbolo, y la elaboración de procedimientos para la utilización de ellos. Durante este estudio se presentaron a los estudiantes diferentes actividades que debían resolver de una manera personal y autónoma, además podían utilizar el procedimiento que quisieran.

Con respecto a los procedimientos realizados por los participantes se evidenció el uso de representaciones gráficas al momento de enfrentarse a las tareas, no obstante aunque lo importante no era el resultado sino el procedimiento utilizado, los estudiantes mostraron dificultad en pasar de representaciones simbólicas a representaciones gráficas. De esta manera el estudio concluyó que aunque el nivel de comprensión de los participantes debería ser superior y flexible al cambio de representaciones, debido a que eran estudiantes que se preparaban para ser profesores de matemáticas, solo se encontraban en el primer nivel establecido por Hiebert: conexión de símbolos con referentes, es decir que únicamente lograban interpretar los significados de la fracción en su forma simbólica.

1.2.2.2 Representaciones gráficas, su empleo en solución de problemas

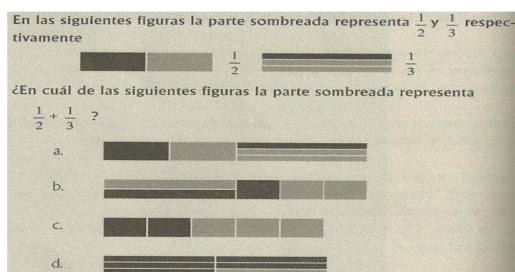
En México, Parra y Flores (2008) realizaron una investigación con estudiantes de bajo rendimiento académico, cuyo objetivo era analizar la forma como los estudiantes, a través de representaciones gráficas o pictóricas, pasaban al uso de algoritmos de las operaciones entre fracciones. Esta investigación, además, hizo énfasis en el trabajo cooperativo de los estudiantes, analizando las discusiones grupales y la elaboración de negociaciones. Para este estudio se asignaron a cada participante dos problemas distintos, que debían solucionar a partir de la discusión grupal. En el primer problema debían determinar la fracción que representaba las áreas de un gráfico, y en el segundo tenían que encontrar una solución de la mejor manera posible a un problema planteado en una forma semántica denominado “se acabó la leche”, en el cual se iniciaba con un unidad fija y paulatinamente se fraccionaba de acuerdo a diferentes sucesos descritos. A través de este estudio los autores reconocieron que el proceso de solución de este tipo de problemas requiere del desarrollo del pensamiento estratégico, pero es necesario brindar a los estudiantes diferentes caminos de

solución. Respecto a las representaciones gráficas se infiere que estas se pueden convertir en una herramienta eficaz para la solución de problemas que aluden a significados de la fracción, pero es necesario que el estudiante realice un cambio adecuado de representación, ya que esto puede contribuir a una mejor comprensión de los mismos.

1.2.2.3 Representaciones gráficas en pruebas externas

En el proceso de búsqueda de evaluación de la calidad de la educación en Colombia, particularmente en la educación en matemáticas, distintos entes territoriales han asumido el reto de la creación y aplicación de pruebas estandarizadas. En Cali se aplicaron las *Pruebas censales y de formación de pensamiento Matemático en la escuela*. Los resultados de estas fueron incorporados al programa de *Formación en educación Matemática* de la universidad del Valle y posteriormente estudiados y analizados (Vázquez & otros, 2002).

En los análisis realizados esta la siguiente pregunta (recorte 2), la cual involucra el uso de los números fraccionarios e incorpora una representación gráfica. Con esta pregunta se estudió el empleo de la representación gráfica como parte de la solución del problema.



Recorte 2 Uso de la fracción con representaciones gráficas (Vázquez & otros, 2002)

Dentro de los resultados obtenidos los investigadores encontraron que debido a la estructura del problema, es decir, la forma en la que se presenta al estudiante el problema, iniciando por una representación gráfica de dos fracciones diferentes, se induce al estudiante hacia las opciones A o B, ya que éstas representan el concepto intuitivo que tienen de suma los estudiantes, y puede ser entendido como una reunión de dos o más cantidades, llevándolos a un error ya que D es la respuesta correcta. Además, como no hay

una relación con la representación gráfica inicial, entonces se justifica el por qué el 74,09% escogieron las opciones A o B.

1.2.3 Aportes de los antecedentes

Las investigaciones señaladas anteriormente, muestran un panorama sobre la importancia de las representaciones gráficas dentro de la solución de un problema con fracciones, además de darle un valor significativo al uso de las mismas en varios sentidos: En primer lugar, como lo señala Llinares y Sánchez (1997), las representaciones son características de comprensión que pueden evidenciar si el uso de los significados es adecuado, y en segundo lugar, de acuerdo a la investigación de Parra y Flores (2008), favorecen la solución de un problema; sin embargo y como se evidencia en el estudio de Vázquez y Otros (2002) el uso de representaciones gráficas dentro de un problema con fracciones puede llegar a desorientar a un estudiante cuando se enfrenta a este tipo de situaciones.

Al considerar las conclusiones establecidas en las anteriores investigaciones y al reconocer que existe un papel protagónico de las representaciones de las fracciones en la solución de problemas, se opta por proponer un estudio que dé cuenta del papel de dichas representaciones cuando se resuelve un instrumento de evaluación de una prueba externa, es este caso las pruebas Saber 5°.

1.3 Planteamiento del problema

El uso de las representaciones gráficas en las fracciones es una herramienta mediadora del proceso de enseñanza por parte del profesor y de comprensión por los estudiantes. Por esta razón es que en muchas ocasiones al presentar una situación problema que involucra el uso de la fracción, la mayor parte de los estudiantes inician con representaciones gráficas, como lo evidenció Llinares y Sánchez (1997), en el problema exhibido en el apartado 2.1.1.1, en el que se pretendía que los estudiantes encontraran una fracción equivalente a una fracción dada, y uno de los participantes lo desarrolló en un primer momento a través de la representación gráfica. Además Parra y Flores (2008) dentro del segundo problema presentado en el apartado 2.1.1.2, muestran cómo los participantes se apoyan en representaciones gráficas para solucionar el problema “Se acabó la leche” que mostraba

cómo secuencialmente la cantidad de leche inicial se disminuía a través de diferentes repartos fraccionados. Sin embargo el uso de las representaciones gráficas no garantiza la comprensión de las fracciones, ya que en muchas ocasiones y debido a las tareas establecidas en la escuela ésta solo representa la relación entre dos números naturales, donde el número de abajo (denominador) es el total de partes de un todo y el número de arriba (numerador) es la cantidad de partes sombreadas, además este tipo de representación solo admite el significado de la fracción como parte-todo. (Escolano & Gairin, 2005)

Estas situaciones que representan la relación entre representación gráfica y significado de la fracción han generado en los estudiantes dificultades que se ven reflejadas en los resultados de pruebas externas, tal como es demostrado en “Pruebas censales y de formación de pensamiento Matemático en la escuela” (2002) presentadas en Cali, donde las preguntas que contenían representación gráfica y fracciones obtuvieron muy bajos resultados.

Por otro lado los Lineamientos Curriculares en Matemáticas (MEN, 1998), posicionan a las representaciones graficas como una herramienta importante para comprender un conglomerado de información. Esto sumado al estudio de Vázquez y otros (2002), nos llevan a indagar el uso por parte de las pruebas externas de las representacioens graficas, por tal razon y a manera de limitar el estudio se generó la siguiente pregunta de investigacion:

¿Cuál es el papel de la representación gráfica de las fracciones en la resolución de problemas planteados en la prueba Saber 5°?

1.4 OBJETIVOS

1.4.1 Objetivo general:

Analizar el papel de las representaciones gráficas en la resolución de problemas que involucran el concepto de fracción, planteados en las pruebas Saber quinto del año 2009.

1.4.2 Objetivos específicos:

- Identificar las situaciones problema que movilizan los significados de la fracción en las cuales la representación gráfica hace parte del mismo.
- Establecer el papel de la representación gráfica de las fracciones en el enunciado de los problemas de la prueba Saber 5° de 2009.
- Determinar el papel de la representación gráfica de las fracciones en la resolución de los problemas de la prueba Saber 5° de 2009.

CAPITULO 2

2 Marco de referencia conceptual

Dentro de este estudio se usaron términos como: significados de la fracción, representación gráfica y/o algorítmica, visualización y otros que tiene una conceptualización en el campo de la Educación Matemática. En este capítulo se indicarán las posturas teóricas y conceptuales que sustentaron este estudio.

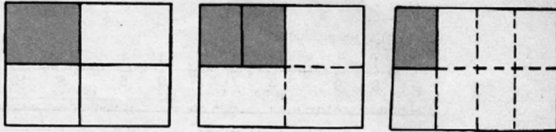
Es frecuente que en el proceso de enseñanza de las matemáticas se recurra a una representación gráfica para expresar de forma diferente una misma idea, con el fin que los estudiantes tenga la oportunidad de ver de una manera distinta una información. Por ejemplo, una forma de multiplicación utilizada por un libro de texto fue:

10.2 MULTIPLICACION DE DOS UNIDADES FRACCIONARIAS

10.2 Los siguientes ejemplos muestran como se multiplican dos unidades fraccionarias.

a) $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$

Interpretamos esta multiplicación de la siguiente manera:

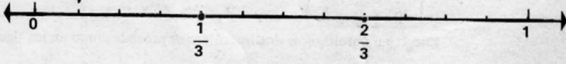


$\frac{1}{4}$ de una región $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{8}$ de la región

Es decir, $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{4}$ equivale a $\frac{1}{8}$ de la unidad; se escribe: $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$

b) $\frac{1}{4} \times \frac{1}{3}$

Interpretamos esta multiplicación sobre una recta numérica de la siguiente manera:



$\frac{1}{4}$ de $\frac{1}{3}$ equivale a $\frac{1}{12}$ en la recta numérica es decir: $\frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$

En general:

El producto de dos unidades fraccionarias es una unidad fraccionaria cuyo denominador es el producto de los denominadores.

Es decir:

$$\frac{1}{a} \times \frac{1}{b} = \frac{1}{ab}$$

Recorte 3 Ejemplo de representaciones gráficas (Caro & otros, 1982)

En este ejemplo se usan tres tipos de representaciones para mostrar al estudiante la estructura de la multiplicación entre números fraccionarios. En la primera representación “gráfica”, se presenta el efecto que produce la multiplicación de dos números fraccionarios sobre un todo establecido, para este caso un rectángulo, y cómo a través de la operación dada, la figura va sufriendo transformaciones sucesivas. En particular se observa que a partir de la representación de $\frac{1}{4}$ se llega a $\frac{1}{8}$ dividiendo todos los cuartos del primer rectángulo en medios del segundo rectángulo. A partir de este ejemplo el estudiante puede observar una manera de significar la operación de multiplicación entre fracciones, sobre una cantidad de magnitud de área.

En la segunda representación “gráfica”, se hace uso de la recta numérica, pero conserva el mismo principio que en el primer caso, se toma la unidad se divide en tercios, y luego cada uno de ellos se divide en cuartos, finalizando este proceso se ubica la expresión $\frac{1}{4}$ de $\frac{1}{3}$ y haciendo un conteo de las nuevas partes se llega al resultado. En este caso la representación gráfica le sirve al estudiante como una forma visual de comprender la multiplicación según la cantidad de longitud.

En la tercera representación “simbólica”, se presenta una conclusión obtenida a partir de las dos primeras, pero en ella se presenta el algoritmo de la multiplicación de fracciones cual se apoya de los resultados obtenidos.

De esta manera se puede entender el papel de las representaciones gráficas dentro de la situación planteada en el ejemplo, es decir se espera que éstas brinden a los estudiantes herramientas que faciliten su proceso de razonamiento. Además, de posibilitar un mejor proceso de enseñanza y aprendizaje. Arcavi (2003) señala que una representación gráfica al condensar información permite que sea perceptualmente fácil de entender para la persona que la está observando ya que no se requiere de una mayor búsqueda de conocimiento.

La representación gráfica en el ejemplo anterior sólo es una herramienta que se espera facilite la comprensión de esa situación, pero no hay que olvidar que un aspecto importante de la representación, es el uso que el estudiante haga de ella en el proceso de comprensión del algoritmo. Durante este proceso el estudiante debe pensar y recordar pasos anteriores,

que lo conduzcan a un resultado, y es probable que logre tener intuiciones de posibles soluciones, ya que su mente lo induce a través de las imágenes creadas anteriormente, este proceso Arcavi (2003) lo denomina *visualización*.

2.1 Posturas de la visualización

El concepto de visualización en Educación Matemática aparece en la década de los ochenta Souto (2009). A partir de esta década se emprenden diferentes investigaciones que tienen como eje principal estudios relacionados con este concepto, nuevo para el momento. Al mismo tiempo que aumentan las investigaciones y nacen tres posturas respecto a la visualización, que fueron: la cognitiva, la sociológica y la cultural (Figueiras & Deulofeu, 2005).

El concepto de visualización desde la perspectiva cultural, tiene en cuenta el obstáculo que se establece al no aceptar una demostración de carácter visual, debido a la preconcepción que se tiene acerca de las demostraciones rigurosas que trae consigo la matemática.

Dentro de la perspectiva cognitiva dicho concepto contempla todas aquellas situaciones donde se realiza una traducción de carácter visual a su correspondiente traducción analítica, además de considerar las situaciones donde una imagen puede facilitar o limitar el razonamiento y la resolución de un problema. Por último, desde el punto de vista sociológico la visualización se estudia en dos dimensiones, la primera se centra en el estudio de las imágenes que llevan consigo los estudiantes, además de su diversidad y su conocimiento en matemáticas, y la segunda dirigida hacia el nivel experto del profesor, que de acuerdo con Souto (2009) hace referencia a que visualizar es más complicado de enseñar, es decir visualizar es un proceso inherente a la persona y surge de acuerdo a los propios conocimientos de ella.

Estas posturas de la visualización brindan una herramienta de clasificación de las acciones realizadas por los estudiantes al momento de solucionar un problema con fracciones, ya que no solo se valora el uso de las representaciones gráficas como lo indica la visualización cognitiva, sino además se admite la importancia de las acciones que se

realizan aunque no se plasmen de manera escrita, como lo expresan las posiciones cultural y sociológica.

Este estudio se centra en la postura de visualización cognitiva debido a que sitúa en forma teórica algunas situaciones que se contemplan en el instrumento de estudio. En un apartado posterior se desarrollara este punto.

2.2 Visualizar dentro del proceso de comprensión

Según Piere y Kieren, citados por Meel (2003), el proceso de comprensión en matemáticas, es un fenómeno no lineal, es recursivo y ocurre cuando el pensamiento cambia de niveles. De acuerdo con lo anterior los autores conceptualizan un modelo caracterizado por siete niveles:

Primer nivel, entendimiento primitivo es el conocimiento inicial que posee un estudiante, es decir toda la información que trae consigo durante el proceso de aprendizaje.

Segundo nivel denominado creación de imagen, que no necesariamente es una representación gráfica, se refiere al significado mental que se crea para la idea de un concepto.

Tercer nivel, comprensión de la imagen, hace alusión a la creación de una sola imagen de todas aquellas imágenes mentales creadas a partir de un solo concepto.

Cuarto nivel denominado observación de la propiedad, se define como el examinar la imagen mental y reconocer sus atributos, respecto a este podemos resaltar que se refiere a la capacidad del estudiante en cambiar de una representación numérica a una representación gráfica, aunque es preciso aclarar que no solo se refiere a este único cambio de representación sino lo contextualizamos para el proyecto.

Quinto nivel o de formalizaciones, es la capacidad de reconocer propiedades y abstraer las cualidades del objeto, el estudiante es capaz de hacer generalizaciones, a partir de las imágenes creadas.

Sexto nivel, denominado de observación, se expone como la verbalización de conceptos formalizados, y por último el nivel de estructuración, es la capacidad que tiene el estudiante de validar a través de procesos axiomáticos de las observaciones formales creadas.

A través del anterior modelo, se puede reconocer el papel de las representaciones gráficas y de la visualización dentro del proceso de comprensión. Además se identifica que dentro de los niveles, visualizar es un proceso que evidencia una medida de comprensión, que brinda información sobre si un concepto es reconocido o no por un estudiante.

Estos niveles nos demuestran que el proceso de visualizar no solo puede ser entendido como una acción circunstancial, de un momento preciso, por lo contrario, está íntimamente relacionada con un proceso de comprensión, en la que no solo es necesario recordar, sino llevar a cabo una serie de pasos mentales que lleven a la comprensión (Arcavi, 2003).

Aunque la visualización se puede considerar como parte de un proceso de comprensión, en este estudio no profundizaremos en esta relación ya que nuestro objetivo central es el análisis de las representaciones gráficas y por tal razón acudimos a conceptos como visualización, pero sin embargo, era necesario considerarla dentro de diferentes procesos de aprendizaje.

2.3 Fracciones, representaciones gráficas y visualización

Escolano y Gairin (2005) presenta una situación a partir de la cual sustenta su posición del significado de la fracción como parte-todo. Los autores describen la forma como usualmente se inicia el estudio de las fracciones, así:

Representación gráfica: se le presenta al estudiante una imagen a través de la cual se resalta una unidad bien definida independiente de la cantidad de magnitud, además de partes de la misma unidad resaltadas.



Recorte 4 Representación gráfica vista desde Escolano y Gairin (2005)

Conteo: El estudiante reconoce la cantidad total de elementos y los relaciona con los que se encuentran resaltados.

Cambio de representación: A partir de la representación gráfica y el conteo, el estudiante debe realizar un cambio de representación, de la gráfica a la simbólica, manteniendo la estructura de la forma $\frac{a}{b}$, donde a representa los elementos resaltados y b el total de partes de la unidad establecida.

Bajo las anteriores descripciones podemos establecer el siguiente esquema para el significado parte-todo:



Esquema 1 Significado parte-todo según Escolano y Gairin (2005)

Sin embargo, la representación gráfica en sí misma comprende más que la simple figura icónica, por esta razón es necesario caracterizar y definir los papeles que ésta nos podría ofrecer dentro de un episodio en el cual se encuentren inmersas las fracciones, por esta razón se presenta la forma de entender la representación gráfica a través de la visualización, y caracteriza varios niveles, propuesta por Arcavi (2003)

- Ver lo invisible en los datos
- Ver lo invisible con símbolos y palabras.
- Predicción de lo invisible para la resolución de problemas.
- Ver lo invisible para la prueba.

Ver lo invisible en los datos: esta categoría representa las situaciones a través de las cuales se utiliza una representación gráfica para significar un conglomerado de datos.

Este autor plantea esta categoría describiendo una situación donde a través de una representación gráfica el ingeniero Charles Joseph Minard (1781-1870), condensa de una manera clara y precisa los acontecimientos sucedidos durante la campaña militar de Napoleón. En ella relata el inicio de la campaña en el año de 1812, con la cantidad de hombres a su mando, y la paulatina disminución de los mismos a través del paso del

propiedad denominada “densidad de los racionales”, en ésta se explicita que entre dos números racionales cualesquiera siempre existirá al menos uno entre los dos, además éste se puede hallar sumando los numeradores y los denominadores de los dos números lo cual se puede ver como $\frac{a}{b} < \frac{(a+c)}{(b+d)} < \frac{c}{d}$. Sin embargo ésta no es una propiedad bastante clara para los estudiantes, por tal motivo Arcavi (2003), modela esta situación usando un plano cartesiano de la siguiente manera: primero representa la fracción $\frac{a}{b}$ como la pareja ordenada (a, b) debido a que la fracción $\frac{a}{b}$ es precisamente la pendiente que va desde el origen $(0,0)$ al punto (b, a) , así mismo todas las fracciones equivalentes a $\frac{a}{b}$ se encontrarán sobre la recta formada por la pendiente que pasa por los dos puntos. Ahora tomemos los racionales $\frac{1}{3}$ y $\frac{4}{5}$ por la propiedad de la densidad tenemos que entre los dos racionales dados existe un número racional y es $\frac{5}{8}$, gráficamente obtendríamos:

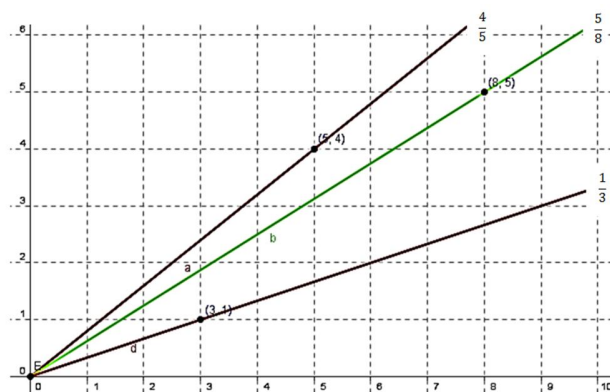


Figura 2 Propiedad de la densidad de los números racionales

En esta gráfica, aunque no es considerada la longitud de los segmentos trazados ya que cada punto representa una fracción equivalente, en ella se puede observar que por las rectas generadas por los racionales $\frac{1}{3}$ y $\frac{4}{5}$ existe una tercera entre ellas que es $\frac{5}{8}$, asimismo sucedería si lo realizamos entre $\frac{4}{5}$ y $\frac{5}{8}$, obtendríamos $\frac{9}{13}$ que gráficamente sería:

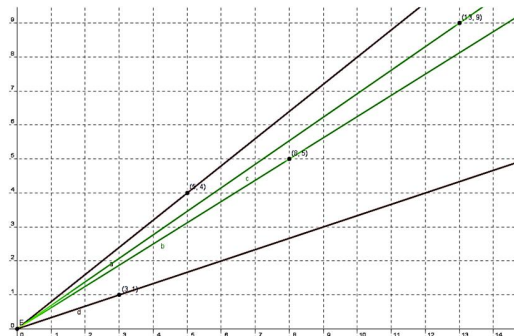


Figura 3 Segunda prueba de la densidad de los números racionales

De esta manera podemos observar cómo por medio de la representación gráfica de un número racional en el plano cartesiano se prueba la propiedad de la densidad de los números racionales.

Predicción de lo invisible para la resolución de problemas: Es el reconocimiento de secuencias que se encuentran dentro de una estructura simbólica.

En esta categoría se destacan las situaciones en las cuales se llega a un punto final, a un resultado por medio de una serie de percepciones consecutivas, Arcavi (2003) lo referencia a través de los momentos en donde recordamos una dirección por medio de los lugares recorridos, seguimos una secuencia de sitios guiándonos por las imágenes mentales. Un ejemplo para esta categoría puede ser:

A un estudiante se le pregunta por el resultado de la operación $\frac{1}{2} + \frac{2}{4}$

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$	Operación inicial
$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{\quad}{4}$	Esto lo escribiría después de un momento de reflexión
$\frac{1(2)}{2(2)} + \frac{1(1)}{4(1)} = \frac{\quad}{4}$	Seguiría escribiendo y reflexionando
$\frac{1(2)}{2(2)} + \frac{1(1)}{4(1)} = \frac{2 + 1}{4}$	Continuaría con
$\frac{1(2)}{2(2)} + \frac{1(1)}{4(1)} = \frac{2 + 1}{4} = \frac{3}{4}$	Para finalizar con este resultado

Tabla 4 Predicción de lo invisible para la prueba

De esta manera el proceso de solución se describe como “mirar, reflexionar, escribir, mirar, pensar, escribir, y así sucesivamente” (Arcavi, 2003). En otras palabras una secuencia de imágenes visuales llevaron a la solución de un problema.

Ver lo invisible para la prueba: *son aquellas situaciones donde una representación gráfica es usada al servicio de la solución de un problema.*

En este nivel se pretende demostrar que las representaciones gráficas no solo se deben entender como un complemento que puede ser excluido dentro de una demostración matemática, sino al contrario puede convertirse en un elemento generador de resultados. Arcavi (2003) hace una demostración de tal categoría, presentando el siguiente problema: “¿Cuántos fósforos son necesarios para construir un cuadrado de $n * n$?”

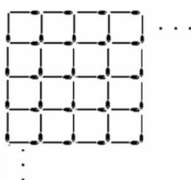


Figura 4 Colección de fósforos

El ejercicio fue abordado en su mayoría de los participantes, a través de representaciones gráficas, debido a que estas facilitaban los procesos de conteo y de organización (Arcavi, 2003). Una de las pruebas expuestas por los participantes se desarrolló de la siguiente manera; en primer lugar se establecieron unidades de conteo:



Figura 5 Unidades de Conteo

Y a través de ellas se realizó una desfragmentación del cuadrado completo para obtener una figura en la cual se pudiera realizar un conteo rápido:

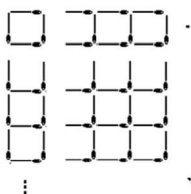


Figura 6 Descomposición de la figura

A partir de esta figura, encontrar la expresión que describiera la cantidad de fósforos utilizados se convierte en un proceso más fácil. Es importante aclarar que Arcavi no hizo una mayor profundización de este ejercicio porque su fin era mostrar las definiciones a partir de resultados, para los propósitos de este trabajo nos adentraremos en el ejemplo para una mejor comprensión, los resultados se presenta a continuación.

En primer lugar como se puede observar siempre se mantiene una unidad constante en todas las construcciones y es la que tiene cuatro fósforos. Ahora las unidades que tienen tres fósforos vienen determinadas por la expresión $2(n - 1) \times 3$ e 3 es la cantidad de fósforos de la unidad, finalmente la cantidad de unidades de tres fósforos viene dada por $(n - 1) \times 2$, donde 2 es la cantidad de fósforos de la unidad, en consecuencia obtenemos la siguiente expresión:

$$4 + 2 \times 3(n - 1) + 2(n - 1)^2$$

Realizando operaciones algebraicas llegamos al resultado

$$2(n^2 + n)$$

Que es una de las expresiones que determina la cantidad de fósforos para un cuadrado de $n \times n$ fósforos de lado.

Como podemos observar la representación gráfica se convirtió en un instrumento para llegar a la solución del problema. Es por esta razón que el autor deja ver que existirán problemas que ineludiblemente requieren de una construcción gráfica; ya que el intento de solución a partir de representaciones simbólicas puede generar un trabajo muy tedioso y un consumo de mayor cantidad de tiempo.

Las categorías antes expuestas ofrecen una herramienta para el estudio de las representaciones gráficas, como instrumentos de demostración, y elementos complementarios para la comprensión. Dentro de los niveles establecidos solo la predicción de lo invisible para la resolución de problemas, no compromete directamente una representación gráfica, ya que ésta, en la mayoría de las situaciones, es dependiente de

representaciones simbólicas; sin embargo y debido a la conceptualización realizada por el autor, se encuentra dentro del nivel de la visualización, por el uso que el sentido de la vista le aporta para realizar la acción involucrada.

Por esta razón dentro de este estudio cuando incorporemos el concepto de representación gráfica, movilizaremos la acción de visualizar, ya que como vimos existe una estrecha relación entre estos dos conceptos.

En resumen tenemos que:

Categoría	Descripción
<i>Ver lo invisible en los datos</i>	Representa las situaciones a través de las cuales se utiliza una representación gráfica para significar un conglomerado de datos.
<i>Ver lo invisible con símbolos y palabras.</i>	A través de una gráfica se puede verificar alguna propiedad o situación representada simbólicamente
<i>Predicción de lo invisible para la resolución de problemas.</i>	Es el reconocimiento de secuencias que se encuentra dentro de una estructura simbólica
<i>Ver lo invisible para la prueba.</i>	Una representación gráfica es usada al servicio de la solución de un problema

Tabla 5 Resumen categorías de Arcavi (2003)

Estas categorías nos brindaran una herramienta de análisis de los problemas planteados en la prueba Saber 5° 2009, donde no solo se estudiará el papel de las representaciones gráficas sino la acción que éstas producen en un estudiante.

Debido a que en este proyecto no solo se abordan las representaciones gráficas sino además los significados de la fracción, se hace necesario conceptualizar los términos asociados.

2.3.1 Significados de la fracción

Respecto a los significados de la fracción encontramos que en el mundo académico matemático existen diferentes posturas. Sin embargo, para este estudio nos acogeremos y

analizaremos las definiciones de Escolano & Gairin (2005) y Elguero (2009), ya que ellos reúnen, desde nuestro punto de vista, las definiciones más apropiadas para el estudio.

Estos autores convergen en las ideas acerca del significado de la fracción como medida y operador, definiéndolos en sentido de sus usos. Para ambos el significado de la fracción como medida requiere de uso de operaciones algorítmicas para obtener nuevas magnitudes. Sin embargo, Escolano y Gairin hacen hincapié en el hecho que a través de representaciones gráficas no se puede conseguir una nueva subunidad, para esto es necesario realizar operaciones matemáticas.

Por ejemplo, si tomamos como referencia la figura 7, es claro que no es posible realizar una comparación directa entre la unidad dada y la superficie a medir, se hace necesario por parte de la persona que resuelve, realizar cálculos matemáticos, y es en este punto donde divergen las definiciones de Escolano y Gairin (2005) y Elguero (2009), ya que existe una posición respecto al uso de las representaciones gráficas.

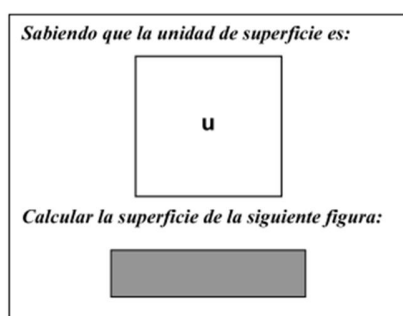


Figura 7 Fracción como medida. (Escolano & Gairin, 2005)

Por otro lado, el significado de fracción como operador se define mediante la idea de aquel que transforma una cantidad para obtener otra cantidad con la misma magnitud (Elguero, 2009). Escolano define el operador como una función de transformación que se consigue multiplicando por el numerador y dividiendo por el denominador, por esta razón la representación gráfica no hace parte tampoco de este significado.

Para este significado se puede tomar el caso de calcular las $\frac{2}{3}$ partes de un grupo de 90 personas, entonces la unidad principal serían las personas, luego aplicando el operador se tiene:

$$90 \times \frac{2}{3} = 60$$

De esta manera los $\frac{2}{3}$ de 90 personas son 60 personas manteniendo nuestra unidad (Elguero, 2009), por otra parte la función transformación es $\frac{2}{3}$ (Escolano & Gairin, 2005).

Estas dos posiciones acerca de los significados de la fracción, empiezan a tener divergencia frente a la relación parte-todo, ya que para Escolano y Gairin esta relación es independiente de las demás interpretaciones, debido a la forma en que se introduce en el contexto escolar; a la estructura gráfica que acompaña las primeras tareas que los estudiantes resuelven le acompaña una relación de conteo entre el numerador y el denominador. Es decir la identificación de la fracción se inicia a través de las representaciones gráficas, donde éstas muestran una unidad dividida en varias partes iguales, y se resalta una parte de ellas, y esto es lo que caracteriza la fracción como parte-todo.

Por ejemplo la figura 8 se muestra una unidad principal, que se denominara el “todo”, y unas subunidades de las cuales se encuentran resaltadas una “parte”, de acuerdo a escolano para este significado es necesario identificar de una manera clara la unidad, que se vuelve evidente en la figura. Además, no nos interesa la medida de la magnitud de la figura, solo la relación establecida entre las partes.



Figura 8 Significado parte-todo (Escolano & Gairin, 2005)

Por el contrario Elguero caracteriza varios escenarios en los cuales este significado se encuentra, pero no lo precisa como un nivel independiente sino como resultado de situaciones particulares. El primer escenario se encuentra en el significado como operador,

lo define como una acción de partir de un entero n y tomar m partes, aplicando la función de transformación para obtener la nueva cantidad. El segundo escenario lo ubica dentro del significado de la fracción como razón al comparar dos magnitudes similares pero que se generan a partir de una misma unidad.

Tanto la convergencia y la divergencia en la semántica de los autores, crea dos miradas de una misma situación, de igual manera los niveles que plantean respecto al significado estructuran una visión de su interpretación acerca de las fracciones. Los niveles de definición planteados se representan en la tabla que viene a continuación.

Significado de la fracción	Elguero	Escolano y Gairin
Medida	Se compara una cantidad de magnitud con respecto a otra, y además las unidades de medida son diferentes.	Se compara una magnitud respecto a otra, pero implica el uso de procedimientos simbólicos
Operador	Modifica una cantidad para producir otra de la misma magnitud	Transforma una cantidad de magnitud obteniéndose otra medida con la misma unidad. Se establece la función de transformación.
Razón	Es una acción que permite comparar dos magnitudes de la misma naturaleza o no, se establecen tres categorías: <i>Todo-todo:</i> Se comparan dos cantidades enteras de la misma magnitud. <i>Parte-parte:</i> Se comparan las	Se comparan dos cantidades de una misma magnitud o magnitudes diferentes. El significado <i>parte-todo</i> se podría considerar como un caso particular de cantidades de igual magnitud.

	<p>partes de un todo.</p> <p><i>Parte-todo</i>: se compara el entero con una de sus partes</p>	
Reparto	<p>Es la acción de buscar el valor unitario de una distribución homogénea de una cantidad continua o discreta</p>	<p>Este autor no la identifica como reparto sino como cociente y la define como una distribución igualitaria de cantidades donde la fracción a/b es el resultado de esta acción</p>
Parte-Todo	<p>Es un caso particular del significado de la fracción como razón.</p>	<p>Aunque se podría situar como un caso particular del significado como razón, este es un nivel independiente porque se caracteriza por el uso de representaciones gráficas. Se caracteriza por:</p> <ul style="list-style-type: none"> a) El conocimiento se adquiere de forma visual b) Se omite la magnitud utilizada c) Es irrelevante la igualdad de las cantidades de magnitud
Cociente indicado	<p>Es la generalización que se obtiene cuando el dividendo no es múltiplo del divisor. Este es un caso</p>	<p>La fracción representa la división que se puede obtener entre dos números enteros</p>

	particular del significado de la fracción como reparto	
--	--	--

Tabla 6 Significados de la fracción

De acuerdo con estas definiciones podemos resaltar la diferenciación que realizan Escolano & Gairin, (2005), al momento de establecer la representación gráfica como soporte del significado parte - todo, y la representación simbólica y sus tratamientos como generadores de los demás significados.

En consecuencia este estudio tendrá como referente teórico los significados establecidos por Escolano & Gairin (2005) debido, en primer lugar a la estratificación establecida entre las representaciones simbólica y gráfica, y en segundo lugar por el número de significados establecidos para la fracción.

2.3.2 Representaciones y problemas

Las fracciones debido a su función práctica (Elguero, 2009) facilitan el uso de las representaciones gráficas, además es frecuente el uso de estas representaciones por ser una de las formas usuales de los docentes para la enseñanza de las fracciones. Sin embargo, su uso dentro de los problemas por parte de los estudiantes es fragmentado debido a la falta de comprensión, como lo demuestra Parra & Flores (2008). Estos autores también estructuran un modelo que tiene como objetivo analizar la evolución de las representaciones (gráficas o simbólicas), por parte de los estudiantes ante un problema. Este modelo tiene cuatro categorías:

Representación no canónica: La respuesta diseñada a través de representaciones gráficas tiene una interpretación del problema deficiente, y la solución planteada corresponde a otro tipo de problema, es decir no existe una comprensión del problema.

Representación canónica no algorítmica: Existe una buena interpretación del problema, pero su solución únicamente depende de las representaciones gráficas, no existe representación simbólica.

Representación canónica algorítmica basada en un esquema de solución no algorítmico: El estudiante interpreta correctamente el problema y lo puede solucionar de manera gráfica y algorítmica, pero puede existir la posibilidad de que no se consiga explicar la semejanza entre los resultados de las representaciones.

Representación canónica algorítmica: El estudiante comprende el problema y entiende el algoritmo que va a utilizar para su solución. Puede prescindir de una representación gráfica.

Para ejemplificar estas categorías se presenta el problema planteado por (Parra & Flores, 2008) llamado “Se acabó la leche”

- *¡Cómo! ¿Ya no hay leche? - preguntó la madre asombrada-. Si ayer compré suficiente para la cena.*
- *La mitad la usó la abuela para el arroz con leche – dijo Rosita.*
- *Bueno, yo usé la mitad de la que quedó, para los licuados esta mañana- dijo Martha.*
- *Acuérdate que al medio día ocupaste la mitad de la que había para el flan- aclaró Javier.*
- *Y yo me tomé la mitad de la que quedaba esta tarde, mientras veía la televisión agregó Juanito.*
- *¿Y solo queda ¼ de litro?- preguntó el padre-, pues ¿cuánto compraste ayer?*

Este problema fue planteado para los estudiantes que participaron en el estudio de Parra & Flores (2008), de acuerdo a los autores las respuestas aportadas por los participantes fueron; En primer lugar tenemos la representada en la figura 9.

$$1 - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{8} - \frac{3}{8} = \frac{3}{8}$$

Figura 9 Primera Respuesta (Parra & Flores, 2008)

En esta respuesta se puede observar que aunque los estudiantes intentaron dar una respuesta a partir del análisis de los datos aportados por el problema, estos no fueron

adecuadamente utilizados, por tal razón se llegó a una respuesta equivocada. Es por esto que la respuesta fue clasificada como *Representación no canónica*.

La segunda solución aportada por los estudiantes fue de carácter algorítmico. Sin embargo, el resultado obtenido no es claro para los estudiantes y deciden desecharlo. Aunque no se encuentra explícito el proceso de solución se puede pensar que la operación realizada puede ser algo similar a:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{4}{4} + \frac{8}{4} = \frac{16}{4} = 4$$

En esta solución la primera fracción de izquierda a derecha representa lo que le quedó al papá, la segunda lo que tomó Juanito, ya que era lo mismo que le quedó al papá, la tercera lo que cogió Javier que es el doble de lo de Juanito, la cuarta, que representa lo utilizado para los licuados de Martha que es el doble de lo de Javier y la quinta, lo del arroz de la abuela que es doble de lo de Martha. Como se puede observar la respuesta es correcta pero únicamente corresponde a procesos estrictamente algorítmicos y por tal motivo no se clasifican dentro de las categorías de Parra y Flores (2008)

La tercera solución válida en este ejercicio se basó en el uso por parte de los estudiantes de una representación gráfica como se muestra en la figura 10.



Figura 10 Respuesta Gráfica (Parra & Flores, 2008)

Como se observa la respuesta es correcta; pero si fuera la primera o la única respuesta presentada por los estudiantes, ellos se encontrarían en una *representación canónica no algorítmica*. Sin embargo como en primer lugar realizaron un proceso algorítmico (no aceptado por los propios estudiantes) y en segundo lugar llegaron a la respuesta por medio de una representación gráfica, entonces los estudiantes se encuentran en una *representación canónica algorítmica basada en un esquema de solución no algorítmico*. Por otro lado si

los estudiantes hubieran aceptado la solución algorítmica y además representaran la situación por medio de una gráfica se podría clasificar a los estudiantes en una *representación canónica algorítmica*.

Estas categorías bridarán un nuevo criterio de análisis a la prueba realizada con un grupo de estudiantes de grado quinto, debido a que ya no se valora únicamente el nivel de acierto sino el par: enunciado del problema - representación gráfica.

3 Metodología

Esta investigación es de tipo descriptivo basado en una metodología interpretativa, tomando como referentes las teorías de análisis de contenido. A continuación se realiza una descripción general de las características de este modelo de investigación definido también por Abela (2002) como de tipo sociológico.

3.1 Análisis de contenido

Abela (2002) definen el análisis de contenido como una técnica sistemática, objetiva, replicable y válida, que se caracteriza principalmente y de manera diferenciadora de las otras técnicas de investigación, por realizarse a través de la observación y la producción de datos, combinando además de esto la interpretación y el análisis de los mismos. En esta técnica de investigación, cobra un gran valor las producciones textuales como las gráficas, ya que por medio de ellas se puede hacer una interpretación y análisis de un contenido que se quiera comunicar. De acuerdo con estos autores por medio de un mensaje podemos interpretar textos ocultos e indirectos, aparte de los que quiso comunicar de una manera directa el autor, en otras palabras tanto los textos escritos² como los latentes pueden ser interpretados dentro de un contexto.

Por otro lado en el análisis de contenido, de acuerdo a Abela (2002), debe hacer una descripción objetiva sistemática y cuantitativa del contenido manifiesto de la comunicación. En este caso el contenido manifiesto de la información lo encontramos en los enunciados de los problemas del instrumento de evaluación de matemáticas en prueba Saber 5° del año 2009, y el mensaje a interpretar estará en dos fuentes, la primera será en cada uno de los enunciados presentados, su coherencia y estructura, y la segunda en las respuestas aportadas por un grupo de estudiantes seleccionados. Sumado a lo anterior tenemos que González & Romero (2007) definen que en el análisis de contenido se pueden

² En esta técnica de investigación los textos escritos abarcan los propiamente textuales como los realizados por medio de imágenes.

establecer inferencias que verifiquen o contradigan el mensaje que se va a comunicar debido a que se hace una interpretación global del contenido y se prueban hipótesis respecto al análisis de textos, es decir que el análisis de contenido brinda las herramientas teóricas para controvertir o reafirmar la información dentro de una estructura sintáctica en este caso las presentadas en las pruebas Saber 5°.

En resumen el proyecto se basa en la interpretación de la información presentada en forma textual (teniendo en cuenta que se incorpora tanto imágenes como la estructura sintáctica) por la prueba Saber 5° 2009, tanto en forma textual es decir el problema escrito, como en forma gráfica, las imágenes que lo acompañan.

3.2 Investigación cualitativa

Además del análisis de contenido, este proyecto se vincula con las posturas teóricas de la investigación cualitativa que de acuerdo con González & Romero, (2007, pag 33) citando a Pérez, se caracteriza por:

- *La realidad la constituyen hechos observables y externos, significados, símbolos e interpretaciones elaboradas por las personas en su interacción con los demás.*
- *La finalidad de la investigación no es la predicción ni el control, si no la comprensión de los fenómenos educativos.*
- *La investigación intenta comprender, interpretar y explicar la realidad, teniendo en cuenta los valores del contexto social y cultural.*
- *La credibilidad de la investigación se logra con el contraste permanente de las indagaciones, las inferencias provisionales, las hipótesis de trabajo que se van decantando como resultado de la reflexión, el debate y el contraste.*
- *Describe e interpreta la situación en la que se desarrolla el acontecimiento.*

- *La consistencia y rigor de los datos se pretende alcanzar, mediante el debate reflexivo de perspectivas subjetivas y el contraste permanente del marco teórico con las múltiples evidencias de la realidad.*

Basados en las características de esta postura teórica, y tomado como base que el proyecto tiene por objetivo analizar el papel de las representaciones gráficas en los problemas que involucran el concepto de fracción en la prueba Saber 5° 2009, nos vinculamos a esta forma de investigación, ya que brinda las herramientas teóricas necesarias para sustentar los procesos

3.3 Etapas de la investigación

Para las etapas de investigación se siguió la siguiente estructura:

Preanálisis: se refiere a las observaciones primitivas que tiene que ver con la exploración documental, análisis y elección del cuerpo documental, en esta etapa se incluye la determinación de las categorías de análisis entre ellos:

Escolano y Gairin (2005): Autores que nos brindaran herramientas para clasificar el significado de la fracción dentro de los problemas seleccionados.

Parra y Flores (2008): Ofrecen categorías de análisis de respuestas en las que intervienen representaciones gráficas y uso de fracciones.

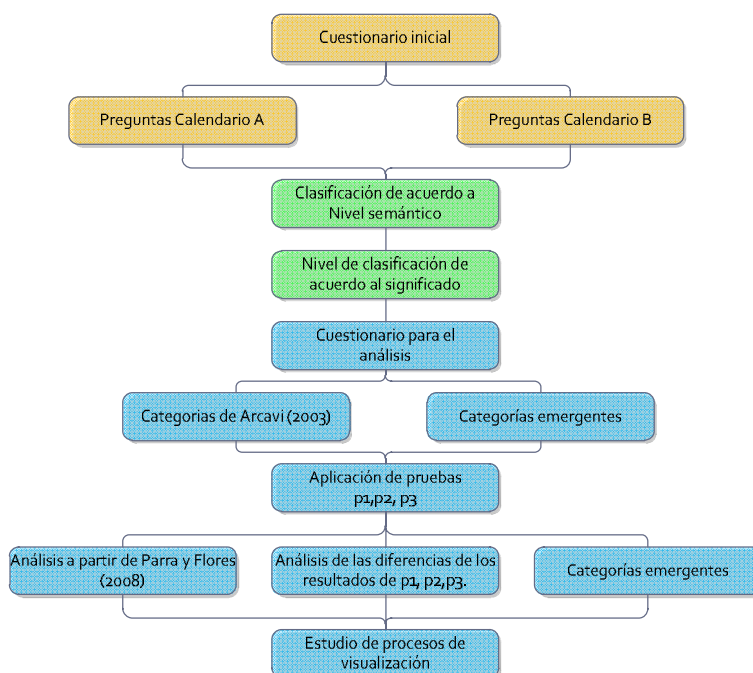
Arcavi (2003): caracteriza procesos de visualización que se pueden presentar dentro de la solución de una situación problema.

Exploración del Material: En esta etapa se realiza una selección y reducción de preguntas, por medio de procesos de estudio de la estructura semántica de la pregunta, y análisis del significado de la fracción. Para esta parte se utilizan los cuadernillo de calendarios A y B que utilizaron para la prueba Saber 5 2009.

Tratamiento de resultados: En esta etapa se realizan las inferencias que resultan a través del análisis de los instrumentos.

3.3.1 Proceso de selección y discriminación de preguntas

Discriminación de preguntas: La estructura para el análisis y discriminación de las preguntas que fueron incorporadas en el estudio se resume en el siguiente esquema:



Esquema 2 Procedimiento para el estudio de la prueba

En este esquema se pueden diferenciar dos niveles, el primero identificado con el color verde que se caracteriza por ser de exclusión, es decir, donde el total de las preguntas son estudiadas y se retiran las que no cumplan con las categorías establecidas para estas dos etapas, y el segundo de color azul en la que no se excluyen las preguntas que pasaron el anterior nivel, aunque no generen procesos de visualización, tanto en el estudio previo como en el momento de aplicación de las pruebas.

Particularmente en el nivel azul no se excluyen problemas debido al hecho que la visualización, como se puede interpretar según lo expuesto por Arcavi, es un proceso personal e inherente a cada persona. Sin embargo esto no significa que esta acción no pueda ser inducida por pruebas estandarizadas.

También es preciso aclarar que dentro del proceso de estudio es posible que sobresalgan categorías diferentes a las contempladas y que no se encuentren en el estudio pero son relevantes para el mismo; a estas las llamaremos *categorías emergentes*.

3.3.2 Estudio del cuerpo documental

Las etapas iniciales de este proyecto tomaron como referencia la estructura metodológica desarrollada por González & Romero (2007), iniciando con el preanálisis llegando a la determinación de las categorías de análisis.

En primer lugar el preanálisis definido como la operacionalización y sistematización de ideas iniciales para llegar al diseño del trabajo, consta de la lectura de los escritos, la formulación de hipótesis, finalizando con la constitución de los objetivos. Particularmente para este proyecto en esta etapa se tomaron como referencia los cuadernillos de las pruebas Saber presentados en los años 2003, 2005 y 2009, seleccionando la última de ellas debido a ser la más reciente.

Los cuadernillos del año 2009 tanto de calendario A como calendario B tenían un total de 48 preguntas y en la tabla 7 se relaciona la componente a valorar, el número de pregunta que la aborda y la competencia a desarrollar.

Componentes	Cuadernillo 1			Cuadernillo 2		
	Total de preguntas	Número de la pregunta	Competencia	Total de preguntas	Número de la pregunta	Competencia
Preguntas de componente geométrico	19	1	Razonamiento	19	1	Razonamiento
		5	Razonamiento		2	Razonamiento
		13	Comunicación		3	Razonamiento
		17	Comunicación		4	Comunicación
		18	Razonamiento		5	Comunicación
		19	Razonamiento		18	Resolución
		20	Resolución		19	Razonamiento
		23	Resolución		20	Razonamiento
		24	Razonamiento		24	Resolución
		27	Razonamiento		30	Razonamiento

		29	Razonamiento		31	Razonamiento
		30	Resolución		34	Resolución
		31	Razonamiento		35	Comunicación
		35	Resolución		37	Resolución
		41	Comunicación		38	Razonamiento
		42	Comunicación		39	Comunicación
		45	Razonamiento		40	Comunicación
		46	Resolución		44	Razonamiento
		47	Comunicación		45	Resolución
Preguntas del componente aleatorio	10	2	Resolución	10	9	Comunicación
		6	Comunicación		14	Razonamiento
		10	Razonamiento		16	Comunicación
		15	Comunicación		17	Comunicación
		16	Comunicación		23	Resolución
		26	Comunicación		27	Resolución
		32	Resolución		33	Comunicación
		39	Razonamiento		43	Resolución
		40	Razonamiento		47	Comunicación
		44	Comunicación		48	Razonamiento
Preguntas del componente numérico variacional	19	3	Comunicación	19	6	Comunicación
		4	Resolución		7	Razonamiento
		7	Comunicación		8	Comunicación
		8	Resolución		10	Resolución
		9	Comunicación		11	Resolución
		11	Razonamiento		12	Comunicación
		12	Razonamiento		13	Resolución
		14	Resolución		15	Razonamiento
		21	Resolución		21	Resolución
		22	Comunicación		22	Comunicación
		25	Comunicación		25	Comunicación
		28	Resolución		26	Comunicación
		33	Resolución		28	Resolución
		34	Comunicación		29	Resolución
		36	Razonamiento		32	Resolución
37	Resolución	36	Razonamiento			

		38	Comunicación		41	Comunicación
		43	Razonamiento		42	Resolución
		48	Resolución		46	Razonamiento
Número de preguntas		48			48	

Tabla 7 Relación de pregunta con la competencia a evaluar (Pedraza & otros, 2009)

Luego de la selección de los cuadernillos se requería hacer un filtro para la selección de las preguntas a través de una reducción de datos para una mejor inferencia de los resultados, para este objetivo se tuvieron en cuenta las siguientes características:

1. La pregunta debía hacer alguna mención al significado de la fracción³, esto se realizó mediante el análisis sintáctico de los problemas.
2. Uso de representaciones gráficas, dentro del problema o dentro de su solución, para este procedimiento fue necesario resolver los problemas que clasificaron dentro de la primera categoría.

3.4 Proceso de selección de preguntas

Teniendo en cuenta que las pruebas Saber incorporan dentro de su estructura, diferentes conceptos matemáticos, fue necesario realizar una clasificación de las preguntas que hicieran alusión a la fracción. Para lograr este objetivo se tuvieron en cuenta dos niveles de análisis, el primero buscaba que la pregunta hiciera alusión a algún significado de la fracción y el segundo que la pregunta hiciera uso de representaciones gráficas. A continuación se realiza una completa descripción de cada uno:

Primero, etapa semántica: Dentro de este se clasificaron todas aquellas preguntas que en su enunciado incluían palabras relacionadas con el uso de las fracciones como: la mitad, la tercera parte, una parte, y además las que de alguna manera aluden a los significados de la fracción. Por otro lado también se tuvo en cuenta los ejercicios que dentro de su estructura contaran con una representación gráfica que hiciera alusión a la fracción.

³ Para este procedimiento se tomó en cuenta que los significados también pueden ser expresados mediante una representación gráfica.

Para la selección de las preguntas se tuvo en cuenta que en el año 2009 se presentaron dos pruebas Saber 5°, la primera aplicada en mayo a los estudiantes de calendario B, a esta se denominó cuadernillo 1, y la segunda aplicada en octubre y desarrollada por estudiantes de calendario A, que se denominó cuadernillo 2.

De acuerdo con esto en la primera etapa las preguntas que cumplían con la condición expuesta fueron:

Saber 5 Cuadernillo 1	Saber 5 Cuadernillo 2
8, 9, 37, 38, 42, 46, 48	13, 18, 21, 22,23,25,26,27,38,41,42,47.
Total 7	Total 12
Total de preguntas 19	

Tabla 8 Resultados primera etapa del estudio

Este primer conteo aportó un total de 19 preguntas que correspondían a un 12.5% del cuadernillo 1 y 25% del cuadernillo 2 o a un 19,79% del total de la prueba de matemáticas Saber 5° de 2009.

En la siguiente tabla se muestra el enunciado de las preguntas relacionadas en la Tabla 8, resaltando las palabras o la representación clave que indicaban alusión al concepto de fracción

Cuadernillo	N°	ENUNCIADO
1	8	El auto de Jorge necesita 6 galones de gasolina para recorrer 240 kilómetros . ¿Cuántos galones necesita para recorrer 480 kilómetros? a) 6 b) 8 c) 10 d) 12
	9	Observa la figura.



¿Cuál es la **fracción** que se representa en la figura?

a) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{2}{5}$

c) $\frac{5}{2}$

d) $\frac{2}{1}$

El reloj de la escuela marca las horas correctamente. Cuando Juan llegó a la escuela el reloj marcaba las 12 en punto.







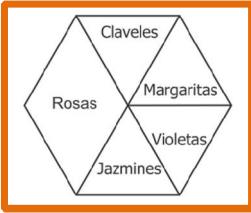
Cuando Juan salió al primer descanso miró el reloj y observó lo siguiente:



37

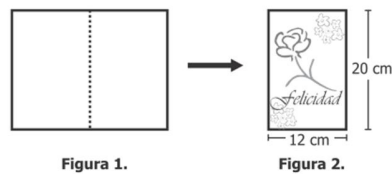
¿Cuánto tiempo ha pasado desde que Juan llegó a la escuela?

- a) **Media hora.**
- b) **Una hora y media.**
- c) **Tres cuartos de hora.**
- d) **Una hora y cuarto.**

	38	<p>Tres cuartos de hora después de que Juan llegó a la escuela, ¿qué hora marcaba el reloj?</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;">A. </div> <div style="text-align: center;">B. </div> <div style="text-align: center;">C. </div> <div style="text-align: center;">D. </div> </div>
	46	<p>En la siguiente figura se representan las áreas que ocupan diferentes cultivos en un terreno:</p> <div style="text-align: center; margin: 10px 0;">  </div> <p>La zona de los claveles ocupa un área de 10.000 m². El área total del terreno es</p> <p>a) 10.000 m² b) 30.000 m² c) 50.000 m² d) 60.000 m²</p>
	48	<p>En un salón de clases, $\frac{3}{4}$ del total de estudiantes son niños. En el salón hay 10 niñas. ¿Cuántos estudiantes en total hay en el salón?</p> <p>a) 10 b) 20 c) 40 d) 50</p>
2	13	<p>Pedro tenía algunos dulces guardados, se comió la mitad y regaló 2. Ahora tiene 4 dulces. ¿Cuántos dulces tenía guardados Pedro?</p>

- a) 6
- b) 8
- c) 10
- d) 12

Para elaborar una tarjeta de felicitación, Marta dobló una hoja de papel por **la mitad**, como se indica a continuación: La tarjeta tiene las medidas indicadas en la figura 2.



18

¿Cuáles son las medidas de los lados de la hoja que Marta dobló?

- a) 10 cm y 6 cm
- b) 20 cm y 24 cm
- c) 20 cm y 6 cm
- d) 10 cm y 12 cm









Claudia compró varios metros de cinta, unos de color amarillo y otros de color azul.


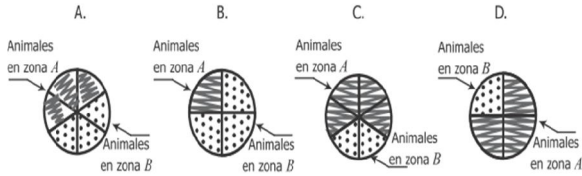
Con 15 metros de cinta amarilla, Claudia puede hacer 5 adornos del mismo tamaño, iguales, sin que sobre cinta. ¿Cuántos adornos **del mismo tamaño** de los amarillos puede hacer con 30 metros de cinta azul sin que sobre cinta?

21

- a) 3
- b) 5
- c) 10

		d) 15										
	22	<p>Claudia tomó 12 metros de cinta amarilla y 20 metros de cinta azul y los cortó de forma que resultaran pedazos del mismo tamaño, no sobrara cinta y fueran de la mayor longitud posible. ¿Cuál es la longitud de cada pedazo?</p> <p>a) 3 metros. b) 4 metros. c) 5 metros. d) 6 metros.</p>										
	23	<p>La profesora Diana les preguntó a 60 estudiantes de grado cuarto cuál de los siguientes libros preferían leer:</p> <ul style="list-style-type: none"> • <i>Zoro.</i> • <i>La isla del tesoro.</i> • <i>Harry Potter.</i> • <i>Cuentos de los hermanos Grimm.</i> <p>Con las respuestas obtenidas, la profesora Diana elaboró la siguiente gráfica:</p> <div style="text-align: center;"> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <caption>Datos del gráfico circular</caption> <thead> <tr> <th>Libro</th> <th>Porcentaje</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Zoro</td> <td>50%</td> </tr> <tr> <td>Harry Potter</td> <td>25%</td> </tr> <tr> <td>La isla del tesoro</td> <td>20%</td> </tr> <tr> <td>Cuentos de los hermanos Grimm</td> <td>5%</td> </tr> </tbody> </table> </div> <p>En la clase se leerán los libros escogidos por más de 10 estudiantes. ¿Cuáles son estos libros?</p>	Libro	Porcentaje	Zoro	50%	Harry Potter	25%	La isla del tesoro	20%	Cuentos de los hermanos Grimm	5%
Libro	Porcentaje											
Zoro	50%											
Harry Potter	25%											
La isla del tesoro	20%											
Cuentos de los hermanos Grimm	5%											

		<p>a) Zoro solamente.</p> <p>b) Zoro y La isla del tesoro solamente.</p> <p>c) Zoro, Harry Potter y La isla del tesoro solamente.</p> <p>d) Zoro, Harry Potter, La isla del tesoro y Cuentos de los hermanos</p>
25		<p>Para la fiesta de cumpleaños de Valeria se preparó una torta y se partió en 10 porciones iguales.</p> <p>Valeria se comió $\frac{3}{10}$ de su torta de cumpleaños.</p> <p>¿En cuál de las siguientes gráficas se representan las porciones de torta que se comió Valeria?</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;"> <p>A.</p>  </div> <div style="text-align: center;"> <p>B.</p>  </div> <div style="text-align: center;"> <p>C.</p>  </div> <div style="text-align: center;"> <p>D.</p>  </div> </div>
26		<p>Las $\frac{3}{4}$ partes de la superficie del planeta Tierra están cubiertas por agua. ¿En cuál de las siguientes gráficas se representa la superficie del planeta Tierra cubierta por agua?</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;"> <p>A.</p>  </div> <div style="text-align: center;"> <p>B.</p>  </div> <div style="text-align: center;"> <p>C.</p>  </div> <div style="text-align: center;"> <p>D.</p>  </div> </div>
27		<p>Observa el número de canicas que tienen Daniela, Juan y Rosita.</p>

		<div style="text-align: center;">  <p>Daniela Juan Rosita</p> </div> <p>Daniela, Juan y Rosita reúnen todas las canicas y las reparten entre ellos en partes iguales. ¿Cuántas canicas le corresponden a cada uno?</p> <p>a) 1 b) 2 c) 3 d) 4</p>
41		<p>En una finca hay 600 animales distribuidos en dos zonas, zona A y zona B. De los 600 animales, $\frac{4}{6}$ está en la zona A y el resto de los animales está en la zona B. ¿Cuál diagrama representa correctamente la distribución de los animales en las dos zonas?</p> <div style="text-align: center;">  </div>
42		<p>Si $\frac{1}{4}$ de los animales que estaba en la zona A pasó a la zona B, ¿Cuántos animales están ahora en la zona B?</p> <p>a) 100 b) 150 c) 300 d) 400</p>
47		<p>Jhony tiene dos fichas. El color de las dos caras de cada ficha se muestra a continuación.</p>

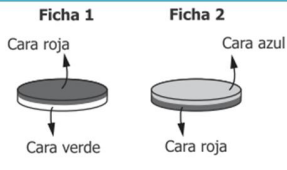
		 <p style="text-align: center;"> Ficha 1 Ficha 2 Cara roja Cara azul Cara verde Cara roja </p>
<p>Jhony lanzó la Ficha 1 y sin levantarla miró el color de la cara. La probabilidad de que la cara sea roja es</p> <p style="text-align: center;"> a) El doble de que sea verde. b) La mitad de que sea azul. c) Igual a la de ser verde. d) La cuarta parte de la de ser azul. </p>		

Tabla 9 Selección de las preguntas teniendo en cuenta el nivel semántico

Segunda, etapa de significado de la fracción: En esta etapa se estudió el uso de representaciones gráficas, dentro del problema o dentro de su solución; para este procedimiento fue necesario resolver los problemas que clasificaron dentro de la primera categoría.

Con este grupo de problemas se realizó un estudio en el que se pretendía establecer el tipo de significado al cual cada problema hacía mención, tomando como referencia los significados de la fracción establecidos por Escolano & Gairin (2005), los resultados obtenidos los encontramos en la siguiente tabla:

Nº	Significado de la fracción	Fundamento
8	Razón	Se comparan dos magnitudes el volumen y la distancia.
9	Parte - todo	En este problema se hace uso de una representación gráfica y con ella se plantea una cuestión omitiendo la cantidad de magnitud, no es importante la igualdad entre las partes sino la relación entre la parte sombreada y la no sombreada.

37	Razón y medida	<p>En este problema únicamente interviene la magnitud tiempo, y para solucionarlo es necesario conocer la relación de equivalencia entre minutos y horas (1 hora equivale a 60 minutos), para luego plantear una razón entre dos cantidades de igual magnitud.</p> <p>$\frac{75 \text{ minutos}}{60 \text{ minutos}}$ y después obtener como resultado</p> $1 \frac{1}{4} \text{ horas}$ <p>Ahora decimos que se clasifica también en el significado de medida ya que medimos las horas en términos de los minutos y para lograrlo fue necesario el uso de procedimientos algorítmicos.</p>
38	Medida	<p>Esto se debe a que los datos del problema hacen alusión a una transformación similar a la anterior que proporcionó como resultado $\frac{3}{4} \text{ hora}$.</p>
46	Parte - todo	<p>Este ejercicio es categorizado bajo el significado de la fracción como parte-todo, debido a que se utiliza una representación gráfica donde se compara una parte con el total de la figura.</p>
48	Razón	<p>En este problema se plantea una comparación de la misma magnitud, tiene como factor adicional que se pide hallar el todo. En este caso particular cantidad de estudiantes (niños y niñas), aunque como lo plantea (Escolano & Gairin, 2005), este puede considerarse también como un caso <i>Parte - Todo</i>, debido a que comparamos una parte (niños), con el total de estudiantes.</p>
13	Parte - todo	<p>Este problema hace alusión al significado de la fracción como Parte- todo, debido a que aunque el todo es desconocido se nos da la característica de sus partes.</p>
18	Medida	<p>En este problema se comparan dos cantidades de una misma</p>

		unidad de magnitud (la tarjeta y la hoja original). Para obtener la medida requerida es necesario realizar un procedimiento algorítmico.
21	Razón	Es este problema aunque podría considerarse como medida debido al planteamiento y a la respuesta esperada en términos de metros, verdaderamente es un problema bajo el significado de razón debido a: primero en el inicio del problema se plantea una comparación de dos magnitudes distintas $\frac{5 \text{ adornos}}{15 \text{ metros}}$, y segundo porque se compara una parte con un todo aceptado esto también como significado de la fracción como razón.
22	Ninguno	Aunque este ejercicio podría clasificarse como significado de la fracción como medida, debido a que debemos encontrar una sub unidad de las unidades dadas, y esto solo es posible por métodos algorítmicos, no lo clasificamos dentro de ningún significado de la fracción ya que este ejercicio se pretende solucionar a través del Máximo Común Divisor. No se puede olvidar que se encuentra dentro del primer nivel de clasificación por utilizar la palabra “pedazo”, pero por su proceso de solución no se va a tener en cuenta dentro del estudio.
23	Parte-todo	Se clasificó como un problema bajo el significado parte-todo en primer lugar por el uso de la representación gráfica y la información aportada se realiza de forma visual, a través de la fragmentación del círculo. Sin embargo, cabe aclarar que puede hacer parte del significado como razón que sería el caso de este ejercicio ya que además de la información aportada por la gráfica se realiza una comparación entre la circunferencia y la parte señalada para encontrar la razón. Por otro lado, es preciso aclarar que para responder a este

		ejercicio, la razón que se obtiene se convierte en un operador, pero por su estructura en el enunciado se clasificó como Parte-todo.
25	Parte-todo	Este problema se denominan como parte-todo debido al hecho que para llegar a su respuesta en primer lugar se hace uso de una representación gráfica, y en segundo lugar dentro de las opciones solo hay una que cumple ser $\frac{3}{10}$ realizando un doble conteo.
26	Parte-todo	Aunque este ejercicio se fundamenta a partir de una representación simbólica, imita en su solución al ejercicio anterior ya que por medio de una representación gráfica se debe realizar una comparación entre las partes sombreadas y la que no lo están.
27	Ninguno	Este ejercicio podría considerarse como un problema donde interviene la fracción en su significado parte-todo en un contexto discreto, sin embargo, el problema hace alusión directa a números naturales y el resultado también es un número natural, aunque está dentro de la primera categoría de clasificación no será tomada en cuenta dentro del estudio debido a que su solución se puede determinar por procedimientos algorítmicos.
41	Parte-todo	Debido a la intención de la pregunta y a las opciones de respuesta este problema se clasificó bajo el significado de la fracción como parte-todo, ya que además de aportar una representación gráfica, el ejercicio solo requiere de contar las partes rayadas y las punteadas para luego ser comparadas y hallar la respuesta.
42	Operador	En este problema utiliza la fracción como un operador, ya que conocemos la cantidad total de animales.
47	Razón	Se categoriza la fracción como razón, ya que comparamos los eventos probables con los totales. Sin embargo cabe aclarar que en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas, solo se

		utiliza la palabra probabilidad a partir de grado séptimo, antes de este se hace alusión a la posibilidad.
--	--	--

Tabla 10 Análisis de los problemas desde el significado de la fracción

Como podemos ver, el primer método de clasificación a través de su estructura semántica, no garantizaba realmente el uso de fracciones y métodos algorítmicos relacionados con las fracciones, como por ejemplo sucedió en el problema de “reparto” de canicas (27) que la solución viene dada por la aplicación de métodos algorítmicos con números naturales. Por otro lado el problema de las cintas que deben ser cortadas en “pedazos” de igual tamaño se puede solucionar a través del uso del Máximo Común Divisor. En otras palabras aunque a través del estudio semántico se puede estar haciendo alusión a los significados de la fracción, es necesario precisar un contexto para poder llegar a una solución apropiada del problema.

3.5 Visualización como parte del proceso de solución de los problemas


Los anteriores niveles de clasificación, aunque brindaban información importante sobre el tipo de significado de la fracción al que hacía referencia el problema, no revelaban el hecho de saber hasta qué punto la pregunta planteada movilizaba en los participantes la acción de visualizar más aún, si los problemas que incorporaban representaciones gráficas inducían también a esta acción. Por esta razón, cada problema fue objeto de un nuevo estudio, el cual se pretendía reconocer el papel de la información aportada dentro del enunciado, de tal manera que se pudiera dar un significado a un elemento adicional como puede ser una representación gráfica y si por medio de este se generaba la acción de visualizar.

En el tercer nivel de la investigación se solucionó cada uno de los problemas que fueron objeto de estudio, y a partir de las posibles soluciones se realizó una clasificación teniendo en cuenta los niveles establecidos por Arcavi (2003).

Las soluciones aportadas para cada ejercicio están resumidas en la siguiente tabla y además cada respuesta brinda información sobre el papel de las representaciones gráficas y si existe o no movilización a la visualización, por tal motivo en los problemas que no se

haga referencia a alguna categoría de Arcavi, significa que de acuerdo al análisis no completo con los requisitos establecidos.

Problema	Solución						
<p>El auto de Jorge necesita 6 galones de gasolina para recorrer 240 kilómetros. ¿Cuántos galones necesita para recorrer 480 kilómetros?</p>	<p><u>Primera solución:</u></p> <p>El ejercicio plantea la comparación $\frac{6 \text{ galones}}{240 \text{ kilometros}}$ por consiguiente tenemos la razón $\frac{1}{40}$. En consecuencia y de acuerdo a la pregunta planteada tenemos que: $480 * \frac{1}{40} = 12$.</p> <p>Como respuesta a la pregunta planteada en el problema tenemos que es 12 galones, resultado de sucesivas operaciones algorítmicas.</p> <p><u>Segunda solución:</u></p> <p>Partimos de la comparación</p> <table border="1" data-bbox="855 1330 1179 1574"> <thead> <tr> <th>Galones</th> <th>Kilómetros</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>6</td> <td>240</td> </tr> <tr> <td></td> <td>480</td> </tr> </tbody> </table> <p>El dato faltante en el cuadro es el resultado de comparar los valores de la segunda columna y el razonamiento de ser magnitudes directamente proporcionales, como 480 es el doble de 240 entonces en el cuadro vacío tendrá que ir 12 ya que es el doble de 6</p>	Galones	Kilómetros	6	240		480
Galones	Kilómetros						
6	240						
	480						

	<p><u>Tercera solución:</u></p> <p>Se refiere al planteamiento de una regla de tres simple directa.</p> $x = \frac{6 \times 480}{240} = 12$
<p>Respecto a la visualización en este problema y de acuerdo a la forma de solución presentada por los participantes se enmarca dentro de la categoría denominada <i>Predicción de lo invisible para la solución de un problema</i> (Arcavi, 2003) debido a que desencadena una serie de pasos consecutivos para poder resolverlo.</p> <p>Teniendo en cuenta que las tres soluciones hacen referencia a las razones y sus aplicaciones se puede estructurar de la siguiente manera :</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) Establecer las magnitudes 2) Plantear la razón 3) Resolver las operaciones simbólicas planteadas 4) Dar una respuesta <p>Aunque en la segunda solución no es explícita una operación algorítmica (que implícitamente es el doble), es necesario resolver mentalmente la relación planteada para llegar a la respuesta.</p>	
<p>Observa la figura.</p>  <p>¿Cuál es la fracción que se representa en la figura?</p>	<p>La respuesta generalizada a este ejercicio se basó en la observación a la figura presentada, la comparación entre la parte sombreada y el total de las partes.</p> $\frac{2}{5}$

Este ejercicio se podría categorizar como *ver lo invisible en los datos*, ya que la gráfica representa una información aportada y este caso particular se refiere a la representación simbólica $\frac{2}{5}$, sin embargo, en la gráfica no se condensa una gran cantidad de información, que es la base que sustenta esta categoría, por tal razón podríamos decir que en el problema la gráfica no moviliza la visualización, sino es utilizada como otra forma de presentar la información.

El reloj de la escuela marca las horas correctamente. Cuando Juan llegó a la escuela el reloj marcaba las 12 en punto. Cuando Juan salió al primer descanso miró el reloj y observó lo siguiente:



¿Cuánto tiempo ha pasado desde que Juan llegó a la escuela?

Como se vio en la primera etapa de clasificación, este ejercicio utilizaba términos relacionados con fracción dentro de las opciones de respuesta, además en la segunda etapa fue clasificado dentro del significado de la fracción como razón, sin embargo, para solucionar este problema, se evidencia que no era necesario realizar operaciones ya que identificar cual manecilla marcaba las horas y cuál los minutos determinaba la respuesta, por tal motivo la solución únicamente fue dependiente de saber leer el reloj y de identificar cada una de las manecillas dentro de la figura planteada

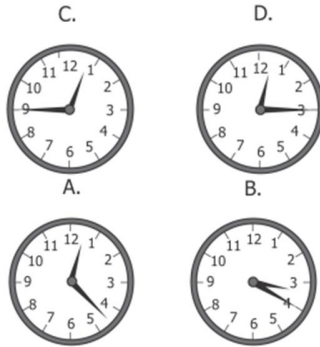
Aunque este ejercicio puede generar un estudio completo sobre la transformación de medidas ya que se debe pasar de segundos a minutos y a horas, la cotidianidad hace que este solo se convierta en un problema de lectura que necesita reconocer el espacio recorrido por cada una de las manecillas a partir de un punto de referencia.

Es claro que la gráfica es parte importante dentro de la estructura del enunciado, ya que sin ella no se puede llegar a la solución, sin embargo igual que el ejercicio anterior la gráfica solo es un elemento que brinda información de interpretación y lectura.

Tres cuartos de hora después de que

Este problema tiene la particularidad de que

Juan llegó a la escuela, ¿qué hora marcaba el reloj?



no lleva al estudiante al ejercicio inmediatamente anterior, sino lo conduce al punto inicial del enunciado, lo que puede generar en el estudiante una equivocación al momento de encontrar la respuesta, debido a que también el problema anterior posee una representación gráfica de un reloj.

Por otro lado, también los participantes requirieron identificar la hora de llegada para poder darle una respuesta rápida.

Este ejercicio tiene una característica que lo diferencia del anterior y que lo clasifica como un generador de la acción de visualizar. Como se vio en el ejercicio pasado solo se necesitaba saber leer un reloj, en este se suma el hecho que además de reconocer y saber leer un reloj, es necesario saber adicionar sub unidades de tiempo, aquí sí se puede decir que se requiere de la visualización, independientemente que se realicen operaciones simbólicas o no.

Supongamos que el estudiante sabe leer un reloj, entonces debe saber identificar dónde quedará la manecilla que marca los minutos cuando le indican “tres cuartos de hora después”, luego esto lleva al estudiante a imaginar el movimiento de la manecilla para identificar la posición final, en este caso el estudiante utilizaría la gráfica como un elemento facilitador de un resultado lo que Arcavi (2003) denominaría *ver lo invisible para la prueba*.

En la siguiente figura se representan las áreas que ocupan diferentes cultivos en un terreno:

Solución 1 Aunque gráficamente este ejercicio lleva al significado de la fracción como parte - todo, la solución del mismo solo requiere de la identificación de las partes y un posterior conteo de la siguiente manera:

Como las Rosas, Margaritas, Violetas,



La zona de los claveles ocupa un área de 10.000 m^2 . El área total del terreno es:

Jazmines, en la gráfica se “observa” que tiene la misma área entonces tenemos que:

$$10000 \times 4 = 40000$$

Por otro lado la figura nos evidencia que las Rosas ocupan el doble que los claveles:

$$10000 \times 2 = 20000$$

En consecuencia el área total del terreno es:

$$40000 + 20000 = 60000$$

Solución 2: las partes que tienen la misma área son 4, y además las rosas son el doble que cualquiera de las otras áreas y por ende tenemos 6 partes del total, por tal motivo el área total de la figura es:

$$(10000 \times 4) + (10000 \times 2) = 60000$$

O

$$10000 \times 6 = 60000$$

Como resultado el área total de la figura es 60000 m^2

Escolano & Gairin, (2005), plantearon una definición según la cual el significado parte-todo hace uso ineludible de una representación gráfica. Este ejercicio se introduce a partir de la información brindada por la gráfica, que aunque no se sombrea ninguna parte como lo destacan los autores, sí se relaciona una parte con el total de la figura, es por esta razón que al momento de darle una solución se hace alusión a las partes y toman la información tanto explícita (áreas ocupadas por cada terreno), como implícitas (congruencia en el tamaño de las áreas), aunque esta segunda información se asume

cierta de acuerdo con la figura dada.

La gráfica en este ejercicio brinda dos datos: nombre y forma de cada zona de cultivo, es decir se puede clasificar como un elemento que aporta información, mas no como una herramienta generadora de visualización, debido a que los datos aportados únicamente nos llevan al uso de operaciones algorítmicas.

En un salón de clases $\frac{3}{4}$ del total de estudiantes son niños. En el salón hay 10 niñas. ¿Cuántos estudiantes en total hay en el salón?

Solución 1: Se basa en la comparación entre la unidad total (suma de los niños y las niñas) y $\frac{3}{4}$. de esta comparación obtenemos:

$\frac{1}{4}$ equivale a 10 niñas

$\frac{3}{4}$ a cuantos niños equivale

En consecuencia se planteó una ecuación de la siguiente manera:

$$x = \frac{\frac{3}{4} \times 10}{\frac{1}{4}}$$

Consiguiendo como respuesta

$$x = 30$$

Es decir el total de estudiantes viene dado por:

$$10 + 30 = 40$$

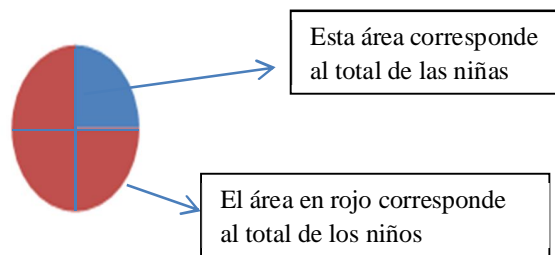
Solución 2:

Si $\frac{1}{4}$ corresponde a 10, entonces $\frac{3}{4}$ por ser el triple ($3 \times \frac{1}{4}$) corresponde a 30, obteniendo como resultado que el total de estudiantes es:

$$10 + 30 = 40$$

Obteniendo también el resultado esperado

Solución 3: Por último también se tomó la opción de realizar una gráfica para describir la situación de la siguiente manera:



Por ende el total de estudiantes corresponde a el total de la gráfica, y como las niñas son 10 el total de estudiantes es 40.

Otra posible solución es el planteamiento de una proporción, sin embargo pensamos que las más pertinentes o usualmente usadas son las anteriormente expuestas.

Para este problema se tienen al menos tres formas de solución de las cuales solo la tercera hace uso de la representación gráfica. Las dos primeras soluciones presentan procedimientos en los que solo es necesario realizar operaciones algorítmicas, es decir los datos aportados solo requieren de operaciones algorítmicas para llegar al resultado. Sin embargo en la tercera solución se evidencia otra forma de plantear el problema utilizando representaciones gráficas. En este caso se puede decir que hubo una visualización de la solución de un problema, y en consecuencia *se observó lo que no estaba visible para la prueba* (Arcavi, 2003).

Pedro tenía algunos dulces guardados, se comió la mitad y regaló 2. Ahora tiene 4 dulces. ¿Cuántos dulces tenía guardados Pedro?

Solución 1:

Tomamos los dulces que le quedo y los que regaló, luego los sumamos:

$$4 + 2 = 6$$

Esto equivale a la mitad debido a que inicio regalando la mitad, en consecuencia los dulces que tenía guardados vienen dados por:

$$6 \times 2 = 12$$

Siendo 12 el total de dulces guardados.

Solución 2:

$$x - \frac{x}{2} - 2 = 4$$

Y realizando procedimientos algorítmicos obtenemos que:

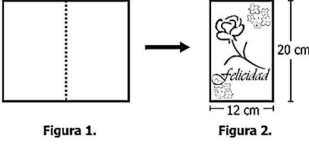
$$x = 12$$

Llegando también al resultado.

Solución 3: apoyándose de la representación gráfica tenemos:



Esta gráfica representa en su totalidad el problema, en la parte más grande que corresponde a la mitad no se encuentra

	<p>ningún dato, precisamente por el hecho que no se presenta dentro del enunciado. Ahora como podemos observar existe una parte que si tiene información y corresponde a la otra mitad de la figura y esta equivale a:</p> $2 + 4 = 6$ <p>Como 6 corresponde a la mitad por esta razón el total de los dulces corresponde a:</p> $6 \times 2 = 12$
<p>Al igual que el ejercicio anterior, en este problema se plantean dos soluciones en la que solo se hace necesario usar procedimientos algorítmicos. Sin embargo, el tercer método de solución presenta otra situación de movilización de visualización, ya que por medio de una gráfica se representa una situación planteada en términos numéricos y de acuerdo a lo planteado por Arcavi (2003), puede <i>mostrar lo invisible para la prueba</i>.</p>	
<p>Para elaborar una tarjeta de felicitación, Marta dobló una hoja de papel por la mitad, como se indica a continuación: La tarjeta tiene las medidas indicadas en la figura 2.</p>  <p>¿Cuáles son las medidas de los lados de la hoja que Marta dobló?</p>	<p>En este ejercicio se hace uso de una representación gráfica para mostrar información y a partir de ella se generan las siguientes soluciones:</p> <p>Primera solución: como la tarjeta no sufrió transformaciones y además visualmente se reconoce su origen tenemos que el ancho de la hoja viene dado por:</p> $12 \times 2 = 24$ <p>Ahora como la altura permanece igual entonces las medidas de la hoja original son: alto 20 cm y ancho 24 cm.</p> <p>Segunda solución: En esta solución se debió</p>

	<p>reconocer un dato dado en una forma no numérica (mitad que se expresa como $\frac{1}{2}$) en este caso tendríamos que:</p> $12 \div \frac{1}{2} = 24$ <p>Que correspondería al ancho de la hoja que fue dividido en 2 partes.</p>
<p>En este problema es evidente que la gráfica brinda una información sobre el punto donde fue doblada la hoja inicial pero además permite que se visualice la información inicial por medio de la tarjeta obtenida, y es este proceso el que genera la primera solución. Si no existiera la figura 1 sería difícil saber cuál es el tamaño de la hoja original, debido a que no se sabría si fue doblada en forma horizontal o vertical. Por esta razón este problema de acuerdo a lo planteado por Arcavi (2003), <i>permite ver lo invisible con símbolos y palabras</i>.</p> <p>Por otro lado se puede ver que el reconocimiento de la fracción $\frac{1}{2}$ dentro de la estructura del problema no es suficiente para llegar a la solución, y por ese motivo es necesario recurrir a la representación gráfica como elemento que brinda información.</p>	
<p>Claudia compró varios metros de cinta, unos de color amarillo y otros de color azul.</p> <p>Con 15 metros de cinta amarilla, Claudia puede hacer 5 adornos del mismo tamaño, iguales, sin que sobre cinta. ¿Cuántos adornos del mismo tamaño de los amarillos puede hacer con 30 metros de cinta azul sin que sobre cinta?</p>	<p>Este ejercicio generó dentro de los participantes un grado mayor de dificultad, sin embargo, generó diversas formas de solución además de información, entre ellas están:</p> <p>Primera solución: se reconoce la razón planteada por el ejercicio obteniendo:</p> $\frac{5 \text{ adornos}}{15 \text{ metros}} = \frac{1}{3}$ <p>Luego los adornos que se realizan con 30 metros se establecerían por medio de la</p>

expresión:

$$30 \times \frac{1}{3} = 10$$

Es decir la cantidad de adornos resultantes es 10.

Segunda solución: la idea de esta segunda solución parte de averiguar los tamaños de los adornos de la cinta amarilla, ésta se consigue por medio de la expresión:

$$15 \div 5 = 3$$

Es decir cada adorno tiene 3 metros, ahora para saber cuántos adornos se obtienen con 30 metros de cinta azul planteamos la expresión:

$$30 \div 3 = 10$$

Tercera solución: aunque se podría denominar intuitiva esta solución, por su forma de presentación también llevó a una correcta solución, y se planteó de la siguiente manera: Si con 15 metros se hacen 5 adornos, entonces con 30 que es el doble de 15 ($30=15 \times 2$) se pueden hacer 10 adornos, ya que es el doble de 5 ($10=5 \times 2$)

Cuarta: se plantean las proporciones establecidas y se soluciona la ecuación que se obtiene así:

$$\frac{5}{15} = \frac{x}{30}$$

Obteniendo la ecuación:

$$x = \frac{30 \times 5}{15}$$

Llegando al resultado

$$x = 10$$

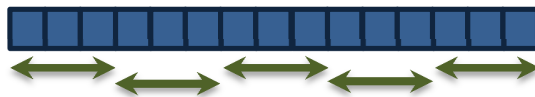
Quinta solución: El uso de la representación gráfica para interpretar el problema de otra



manera lleva a las siguientes construcciones:

15 m

Cada cuadrado amarillo tiene un largo de 1 metro y cada línea verde tiene 3 metros, que equivale a los adornos que salieron de ese tamaño en consecuencia si se tiene una cinta azul de 30 metros saldrán o se obtendrán 10 adornos pues solo se debe duplicar la gráfica así:



15 m

Este ejercicio muestra de una manera clara la tendencia en buscar regularidades puesto que, tanto en la segunda como en la cuarta solución se llegó a las respuestas por medio de las características principales escondidas dentro de los datos, este clase de soluciones por medio de descubrimiento de regularidades Arcavi (2003) la denomina *predicción de lo invisible para la resolución de problemas*, es decir tiene una característica de visualización. Por otro lado se reconoce en la cuarta solución que se hizo uso de una representación gráfica para llegar a la solución categorizándose también esta solución como ver lo invisible para la prueba (Arcavi, 2003)

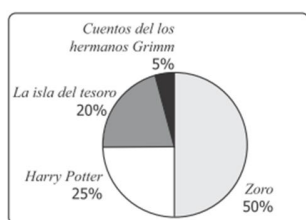
La profesora Diana les preguntó a 60 estudiantes de grado cuarto cuál de los siguientes

libros preferían leer:

- *Zoro.*
- *La isla del tesoro.*
- *Harry Potter.*
- *Cuentos de los hermanos Grimm.*

Con las respuestas obtenidas, la profesora Diana elaboró la siguiente gráfica:

En la clase se leerán los libros escogidos por más de 10 estudiantes. ¿Cuáles son estos libros?



El procedimiento para resolver este ejercicio para todos los participantes se basó la búsqueda de la razón que determinaba cada una de las partes de la figura, el proceso que es más claro en su estructura es el siguiente:

Se establece la razón para cada una de las partes tomando el porcentaje de cada una de ellas y comparándolas con el total y así se encontró que:

$$\frac{5\%}{100\%} = \frac{1}{20}$$

$$\frac{20\%}{100\%} = \frac{1}{5}$$

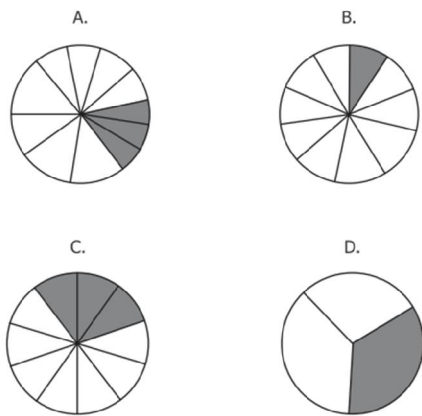
$$\frac{25\%}{100\%} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{50\%}{100\%} = \frac{1}{2}$$

A partir de las razones encontradas establecemos la cantidad de estudiantes por cada parte, utilizando la razón como un operador de la siguiente manera:

	$60 \times \frac{1}{20} = 3$ $60 \times \frac{1}{5} = 12$ $60 \times \frac{1}{4} = 15$ $60 \times \frac{1}{2} = 30$ <p>A partir de estos resultados se puede ver cuál es la cantidad de estudiantes para cada porcentaje, y de esta manera seleccionar las respuestas más adecuadas.</p>
<p>Como se puede ver en este ejercicio existe una secuencia determinada para poder dar respuesta al problema, no se puede determinar un resultado sin realizar los procesos anteriores, entonces de acuerdo a Arcavi (2003), <i>se está prediciendo el proceso, de lo invisible para la resolución de problemas</i>, en este caso lo invisible se encuentra en los pasos del problema para llegar a la solución.</p> <p>Por otro lado se debe calificar la representación gráfica como una herramienta que se está utilizando para presentar información, sin embargo, a partir de ella se generó el proceso anterior que podría categorizarse como visualizador.</p>	
<p>Para la fiesta de cumpleaños de Valeria se preparó una torta y se partió en 10 porciones iguales.</p> <p>Valeria se comió $\frac{3}{10}$ de su torta de cumpleaños.</p> <p>¿En cuál de las siguientes gráficas se representan las porciones de torta que se</p>	<p>En este ejercicio de acuerdo con el planteamiento establecido en las pruebas Saber 5° 2009, solo era necesario seleccionar la gráfica que mejor se acomodara a las características del problema. Las figuras presentadas tenían las siguientes particularidades: La primera figura está dividida en once partes de las cuales se encuentran sombreadas 3, es decir podría</p>

comió Valeria?




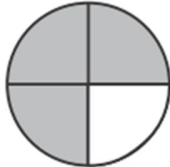
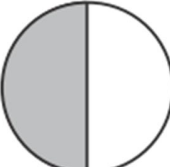

representar la fracción $\frac{3}{11}$, de esta manera ya no representaría la fracción deseada. Además, observando detalladamente se puede advertir que no todas las partes son iguales y de esta manera tampoco podemos asegurar que representa la fracción $\frac{3}{11}$. La segunda figura está dividida en 10 partes que parecen ser iguales, de las cuales tiene sombreada 1 parte, es decir representa la fracción $\frac{1}{10}$. La tercera figura está dividida en 10 partes, de las cuales tiene sombreada 3, representando la fracción $\frac{3}{10}$ además parece que todas sus partes son iguales. La cuarta figura está dividida en 3 partes iguales de las cuales tiene sombreada 1, representa la fracción $\frac{1}{3}$.

Como se puede ver en este ejercicio solo se pretende que el estudiante realice lo que denomina Escolano & Gairin, (2005) un recuento, comparando las partes que se comieron del postre y el total del mismo. No se busca que el estudiante tome una posición respecto a las opciones de respuesta ya que solo existe una válida de manera irrefutable. Respecto a las representaciones gráficas se puede decir que cumplen un papel de presentación de información que como en este caso se convierte en un distractor para llegar a la respuesta correcta.

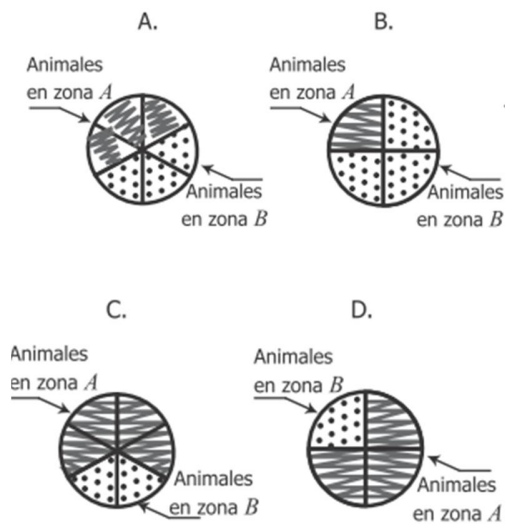
Las $\frac{3}{4}$ partes de la superficie del planeta Tierra están cubiertas por agua. ¿En cuál de las siguientes gráficas se representa la superficie del planeta Tierra cubierta por agua?

Las opciones de respuesta de este ejercicio fueron las siguientes:

La primera figura presentaba un círculo dividido en 3 partes iguales de donde se sombrea 1, es decir se representaba la

<p>A. </p> <p>B. </p> <p>C. </p> <p>D. </p>	<p>fracción $\frac{1}{3}$. La segunda figura presentaba un círculo dividido en 4 partes iguales de las cuales se sombreaban 3, representando la fracción $\frac{3}{4}$. La tercera figura presentaba un círculo dividido en 2 partes iguales de las cuales se sombreaba 1, representando la fracción $\frac{1}{2}$. La cuarta figura presentaba una circunferencia dividida en 4 partes de las cuales se sombreaba 1, representando la fracción $\frac{1}{4}$.</p> <p>Debido a que este problema era de selección no se hace un estudio a procedimientos ya que no existieron</p>
<p>En este ejercicio a diferencia que el anterior, se puede pensar que se presentaron representaciones gráficas en las cuales el estudiante debía tomar una decisión, debido a que, tanto la segunda como la cuarta figura parecen representar la misma fracción, en este caso es necesario que se tomen en cuenta las convenciones del ejercicio donde se aclaran los sectores que representaran el agua y la tierra. Sin embargo, tiene características similares al anterior en cuanto se busca que el estudiante realice un recuento para llegar a la respuesta. Igualmente las representaciones gráficas sirven como herramientas para ofrecer la información de otra manera.</p>	
<p>En una finca hay 600 animales distribuidos en dos zonas, zona A y zona B. De los 600 animales, $\frac{4}{6}$ está en la zona A y el resto de los animales está en la zona B. ¿Cuál diagrama representa</p>	<p>Aunque este ejercicio presenta distintos datos, la pregunta requiere que el estudiante solo sepa representar la fracción dada y escoger la más adecuada. Las opciones de respuesta fueron:</p>

correctamente la distribución de los animales en las dos zonas?



a. Se dividió la unidad en 6 tomando como representación una circunferencia, y de estas se marcaron 3 para la zona A y 3 para la zona B

b. Se dividió la unidad en 4 y se tomó 1 para la zona A y el resto para la zona B

c. Se dividió la unidad en 6 y se tomaron 4 para la zona A y el resto para la zona B.

d. Se dividió la unidad en cuartos tomando 3 para la zona A y 1 para las zona B.

Aunque el enunciado de este ejercicio parece llevar a buscar más información, la pregunta solo llevó a escoger una fracción, la que mejor se acomodara al enunciado. Por esta razón igual que los ejercicios anteriores se evidencia que la representación gráfica solo es otra forma de presentar información.

<p>Si $\frac{1}{4}$ de los animales que estaba en la zona A pasó a la zona B, ¿Cuántos animales están ahora en la zona B?</p>	<p>Los procedimientos para encontrar la solución a este problema fueron:</p> <p>Primera solución: Es necesario saber cuántos animales se encontraban en la zona A, y para esto utilizamos la fracción $\frac{4}{6}$ como operador (debido a que esta es la parte de animales que está en la zona A), y tenemos que:</p> $600 \times \frac{4}{6} = 400$ <p>Es decir 400 animales están en la zona A, ahora si se paso $\frac{1}{4}$ de esta a la zona B obtendríamos:</p> $400 \times \frac{1}{4} = 100$ <p>Teniendo que se pasaron 100 animales. Como al principio teníamos 200 animales en la zona B porque:</p> $600 - 400 = 200$ <p>Entonces ahora en la zona B tenemos</p> $200 + 100 = 300$ <p>En otras palabras ahora hay 300 animales en la zona B.</p> <p>Segunda solución: en esta forma de solución primó el razonamiento intuitivo, de la siguiente manera:</p>
--	--

	<p>Si 600 animales equivalen a $\frac{6}{6}$ entonces 400 animales equivalen a $\frac{4}{6}$, estableciéndose una relación entre los numeradores. Ahora si 400 equivalen a $\frac{4}{4}$ entonces 100 equivalen a $\frac{1}{4}$. De esta manera ya se tendría establecido la cantidad de animales por zona y el resultado final se consigue realizando un procedimiento semejante al anterior.</p>
<p>En este ejercicio se puede ver de una forma clara que algunos resultados se consiguen por medio de un proceso consecutivo, en el cual la percepción es la guía conductora, tanto en la primera como en la segunda solución existió un proceso continuo que llevó al resultado, los pasos que se siguieron fueron los siguientes</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Hallar la cantidad que representaba $\frac{4}{6}$ de 600 2. Hallar la cantidad que representaba $\frac{1}{4}$ de 400 3. Realizar las operaciones algorítmicas entre esos resultados para llegar al resultado final. <p>Por esta razón en este ejercicio se movilizó la visualización en su categoría de <i>predicción de lo invisible para la resolución del problema</i> ya que aunque no se explicitaron los pasos a seguir, fue necesario preverlos para llegar al resultado final.</p>	

Tabla 11 Análisis de problemas resueltos

De acuerdo a lo condensado en esta tabla podemos extraer información que nos brinda herramientas de calificación acerca de la valoración de los procesos de visualización y uso de las representaciones gráficas dentro de la prueba SABER 5° de 2009.

En primer lugar, es preciso tener en cuenta que este segundo análisis inició con catorce ejercicios que se clasificaron dentro del nivel semántico y de significado de la fracción,

ahora de estos ejercicios y de acuerdo a los resultados tenemos que de ellos solo ocho⁴ pueden generar de alguna manera una acción de visualizar y los seis restantes aunque en su totalidad tienen en su enunciado o en las opciones de respuesta alguna representación gráfica, esta solo contribuye en dar información de otra manera.

Por otro lado también se puede ver que ocasionalmente se acude a una gráfica para llegar a encontrar una solución, y esto se evidenció en el hecho que de las ocho preguntas que conducen a visualizar, cuatro de estas se realizaron de esta manera, como se puede ver en la tabla 12.

⁴ Los ejercicios que movilizan la visualización se identifican en la tabla ya que en la parte izquierda tiene el color verde los que no son azul.

Numero de ejercicio	Representación Grafica	Significado de la fracción	Categoría de Arcavi o Emergente
8	No	Razón	Predicción de lo invisible para la resolución del problema
9	Si	Parte-todo	Representación de información
37	Si	Razón y Medida	Representación de información
38	Si	Medida	Ver lo invisible para la prueba
46	Si	Parte-todo	Representación de información
48	No	Razón	Ver lo invisible para la prueba
13	No	Parte-todo	Ver lo invisible para la prueba
18	Si	Medida	Ver lo invisible con símbolos y palabras
21	No	Razón	Predicción de lo invisible para la resolución del problema
23	Si	Parte-todo	Predicción de lo invisible para la resolución del problema
25	Si	Parte-todo	Representación de información
26	Si	Parte-todo	Representación de información
41	Si	Parte-todo	Representación de información
42	No	Operador	Predicción de lo invisible para la resolución del problema

Tabla 12 Relación de preguntas significados y categorías de Arcavi

Además otra forma muy común de visualizar es la predicción, pero generalmente es utilizada en los procesos algorítmicos para la solución de problemas. Como es el caso de los ejercicios 8, 21, 23 y 42, problemas que fueron solucionados de esta manera (ver tabla 12).

Estos resultados nos pueden indicar de alguna manera que las representaciones gráficas utilizadas dentro de la prueba Saber 5° de 2009, solo son una forma adicional para presentar información, y que a través de ella solo se busca que los estudiantes lean lo que ellas traen. Por dicha razón, bajo esta interpretación se aplicaron los ejercicios seleccionados en la segunda etapa a estudiantes de grado quinto en diferentes pruebas, buscando además con ellas identificar procesos de visualización usando representaciones en las soluciones, que se explicaran y desarrollaran a continuación.

3.6 Pruebas aplicadas.

Dado que los problemas seleccionados ya habían tenido un proceso de estudio preliminar, era necesario poner a prueba las preguntas con el ánimo de ratificar las posturas teóricas o analizar los nuevos resultados. Con este fin se realizaron tres pruebas, aplicadas a estudiantes de grado 5°, de una institución de calendario A de carácter no oficial.

Por otro lado por medio de estas pruebas se veía la posibilidad de estudiar a partir de una muestra, los procesos, análisis e inquietudes que se pueden generar en el propio momento en que los estudiantes se encuentran ante una prueba estandarizada.

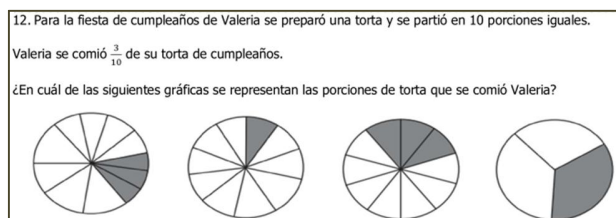
Además las pruebas aplicadas también tiene la intención de sustentar el objetivo general de esta investigación ya que nos interesa mirar la resolución del problema, y para esto se requiere del sujeto que lo resuelve, además se quiere ver las soluciones y no solo el enunciado. Por otro lado como lo exponen Llinares & Sánchez, (1997) y Parra & Flores (2008), en el proceso de solución de un problema la representación gráfica se convierte en una herramienta alternativa.

A continuación se describen las tres pruebas que fueron elaboradas para que los participantes las solucionaran:

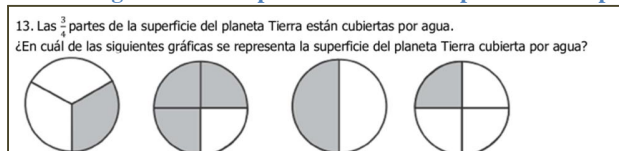
Sin Editar (p1): Esta prueba contaba con quince puntos, todos los que clasificaron en el nivel semántico y nivel de significado de la fracción, esto con la intención de ver posibles respuestas que tal vez no se hubieran tenido en cuenta en los anteriores estudios. La presentación, aunque modificada para solo mostrar los puntos que nos interesaban, era

similar a la presentada en el año 2009 en las pruebas Saber 5° por los estudiantes de calendario A y B, es decir contaba con las gráficas que tenían originalmente y las mismas opciones de respuesta, en esta prueba (Anexo 1) participaron siete estudiantes.

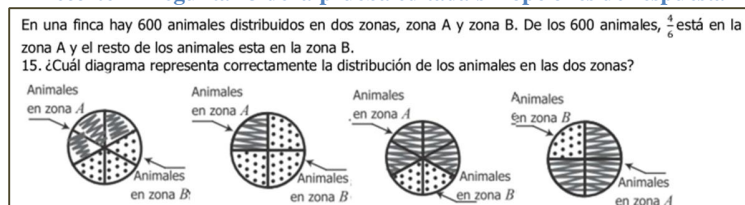
Editada con gráficas sin opciones de respuesta (p2): Tenía los mismos puntos de la prueba sin editar con la diferencia que no contaba con las opciones de respuesta buscando con esto que el estudiante utilizara sus propios medios para llegar a la respuesta y se evidenciaran los procedimientos utilizados. Sin embargo, existieron tres puntos a los cuales se les dejó las opciones de respuesta debido a que éstas eran parte necesaria para comprender el problema y además no se quería alterar o modificar el enunciado original, tal y como los muestra tanto el recorte 6, 7 y 8.(Anexo 2)



Recorte 6 Pregunta 12 de la prueba editada sin opciones de respuesta



Recorte 7 Pregunta 13 de la prueba editada sin opciones de respuesta



Recorte 8 Pregunta 15 de la prueba editada sin opciones de repuesta

En esta prueba participaron diez estudiantes.

Editada Sin Gráficas y Sin Opciones de Respuesta (p3): Aunque tenía las mismas preguntas que las pruebas anteriores, en esta se modificaron todos los ejercicios que tanto en su enunciado como en las opciones de respuesta incluían representaciones gráficas. Para este procedimiento se buscó no llegar a redundancias en las palabras y escoger el lenguaje

más adecuado manteniendo el sentido del ejercicio (Anexo 3). En esta prueba participaron ocho estudiantes.

3.6.1 Aplicación de las pruebas

El tiempo de desarrollo de la prueba no fue limitado para los estudiantes. Sin embargo, los tiempos de cada prueba revelaron un primer nivel de dificultad ya que en la prueba sin editar el último estudiante entregó pasados 55 minutos, en la prueba editada con gráficas sin opciones de respuesta, el último estudiante entregó pasados 83 minutos, y en la editada sin gráficas y sin opciones de respuesta el último estudiante salió pasados 120 minutos.

De acuerdo con estos tiempos se podría pensar que el hecho de seleccionar sobre un conjunto de respuestas facilita llegar a un resultado y por el contrario el no tener opciones de selección lleva al estudiante a realizar procesos que crea convenientes para obtener una solución. Sin embargo, aunque esto puede tener un análisis exhaustivo no profundizaremos ya que el propio objetivo es otro.

A los estudiantes presentados se les daba las siguientes instrucciones:

1. Lean detenidamente cada ejercicio
2. Den solución a cada ejercicio
3. Escriba el procedimiento que utilizó para realizarlo
4. No copie de ningún compañero
5. Las dudas respecto a algún problema, serán resueltas por el docente acompañante (En este caso el docente fue el autor del trabajo)

Estas instrucciones tenían la finalidad de crear un ambiente similar al que se desarrolla en esta clase de pruebas, no obstante la instrucción 5 daba la libertad de preguntar, acción que no se puede realizar en las pruebas Saber. Se daba esta libertad con el fin de indagar cuáles eran sus mayores dificultades, y tratar de analizar su forma de abordar los ejercicios.

Por otro lado, dentro del estudio de la prueba en todas sus categorías se eliminó la pregunta número 17 a saber:

17. Jhony tiene dos fichas. El color de las dos caras de cada ficha se muestra a continuación.

Ficha 1

Ficha 2

Jhony lanzó la Ficha 1 y sin levantarla miró el color de la cara. La probabilidad de que la cara sea roja es

- El doble de que sea verde.
- La mitad de que sea azul.
- Igual a la de ser verde.
- La cuarta parte de la de ser azul.

Recorte 9 Pregunta eliminada del estudio en todas sus categorías

Ésta se eliminó ya que ningún estudiante reconocía la palabra “Probabilidad”, se supo debido al motivo que al tener la opción los estudiantes de preguntar, todos manifestaron la misma inquietud, es decir si se mantenía esta pregunta solo arrojaría resultados obtenidos al azar. Por otro lado así como se argumenta dentro de los estudios preliminares de la pregunta, ésta fue mal redactada debido al hecho que dentro de los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas solo se acude al término de “Probabilidad” hasta el grado séptimo, antes se utiliza la palabra “Posibilidad”.

CAPÍTULO 5

4 Estudio

4.1 Análisis de las pruebas.

A continuación se hará una descripción de los resultados obtenidos a partir de la aplicación de las pruebas construidas, la forma del análisis será por pregunta ubicándola dentro del contexto de cada prueba.

Algunas de las preguntas contienen tablas en las que se relacionan las respuestas de los estudiantes y además en la parte izquierda de cada tabla están acompañadas con un número que las identificará dentro del proceso de análisis y un color que las caracteriza como verdes para las respuestas correctas y rojo para respuestas incorrectas. Por otro lado en las tablas solo se encontrarán las respuestas relevantes y representantes de las demás aunque existen algunas preguntas donde se encuentran todas repuestas de los estudiantes debido a la diversidad de soluciones.

Otro aspecto a tener en cuenta dentro de los análisis tienen que ver con las categorías establecidas para el estudio de las respuestas, ya que van a existir preguntas que no van a ser exploradas en estos aspectos, debido a que se considera que no se tiene las suficientes evidencias para creer que cumplan con los requisitos de cada categoría.

4.1.1 Pregunta 1

Para cada una de las preguntas que vienen a continuación, siempre se tomarán como referencia las originales que se encuentran en la prueba Saber 5° 2009, ya que éstas son las que proyectaron el estudio original.

Respecto a esta primera pregunta, en la prueba sin editar se encontró que la mayor parte de los estudiantes no realizó dentro de la hoja ningún procedimiento, ni algorítmico ni gráfico, únicamente hicieron uso de las opciones de respuesta y señalaron una de acuerdo a lo que para cada estudiante le pareciera conveniente. Se debe precisar que a los tres grupos se les pidió realizar algún procedimiento, facilitando para esto un espacio dentro de la

propia prueba. Debido a estos resultados no se puede garantizar o demostrar que los estudiantes hayan movlizado la visualización, sin embargo para los otros dos grupos, los resultados tomaron otra perspectiva.

La falta de opciones de respuesta, los estudiantes se vieron en la necesidad de resolver de alguna manera el ejercicio, ya que como la propia pregunta lo solicitaba se necesitaba llegar a un resultado, y como la pregunta era igual tanto para p2 como p3 ya que no contenía ninguna representación gráfica los procedimientos fueron muy similares, en ellos se encontraron procesos como:

$$6 \times 2 = 12 \text{ o } 6 + 6 = 12$$

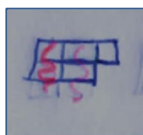
Aunque no se precisa por qué el procedimiento, se puede pensar que se hizo una relación entre los kilómetros y la gasolina, y como 480 es el doble (2) de 240, entonces la respuesta se encontrará duplicando la cantidad de galones consumidos inicialmente. A la luz de estos procedimientos se puede categorizar este problema dentro de los niveles de Arcavi (2003), como la predicción de lo invisible para la solución de problemas, ya que utilizaron un dato oculto para poder llegar a la solución del problema.

Por otro lado, a través del análisis de las respuestas se puede ver que en p2 y p3, en su mayoría fue necesario un procedimiento algorítmico, que en muchos casos no llevó a la solución, pero como no influyeron ni en el enunciado ni en las respuesta representaciones gráficas, lo dejaremos como un problema de la fracción bajo el significado de razón (Elguero, 2009), donde no influyó una representación gráfica.

4.1.2 Pregunta 2

Respecto a la pregunta 2 en p1 podemos también pensar que solo el estudiante tuvo la necesidad de seleccionar, ya que al igual que en la respuesta anterior no fue necesario realizar ninguna clase de procedimiento algorítmico. A diferencia del ejercicio anterior, éste contaba con una representación gráfica que le brindaba la información al estudiante, pero la misma no desarrollaba en el estudiante un profundo análisis ya que solo requería hacer un doble conteo de información (Escolano & Gairin, 2005).

Particularmente para este punto p2 y p3 tenían una clara diferencia ya que para la primera se contaba con una gráfica y esto facilitaba el proceso de respuesta mientras que para p3 era necesario realizar una representación gráfica, en este proceso aunque la mayoría obtuvo resultados satisfactorios se presentaron resultados como los siguientes:



Recorte 10 Representación gráfica para la solución de la pregunta 2



Recorte 11 Respuesta gráfica para la solución de la pregunta 2

En el recorte 10⁵ observamos que el estudiante realizó una gráfica que aunque no revela congruencia de las partes, verdaderamente representa la fracción $\frac{2}{5}$, por esto no caracteriza las representaciones gráficas generalmente usadas (Escolano & Gairin, 2005); se podría pensar que cada parte es una unidad y la representación de la fracción estaría en un contexto discreto. Por otro lado tenemos en el recorte 11 la representación de la fracción $\frac{5}{2}$, tomando como referencia los requerimientos del problema se puede apreciar que existió una mala interpretación del problema. Parra y Flores (2008) categorizan esta acción como una *representación no canónica*, acudimos a estos autores ya que se hizo uso de una representación gráfica.

Aunque en la forma original del problema se evidencia la necesidad de una representación gráfica como parte del enunciado del problema, ésta solo es necesaria para la presentación de información no origina en el estudiante acciones de visualización y no podríamos pensar en el aspecto de interpretación ya que solo es suficiente un doble conteo de los componentes de la gráfica. Es claro en este problema que si existe una pretensión de indagar sobre la forma de interpretar información de los estudiantes, ésta estructura no sería la más adecuada ya que solo se estaría verdaderamente sondeando sobre la lectura de información en gráficos.

⁵ En el fondo de la gráfica se observa una línea curva roja en un tono claro, esta línea fue borrada pero no de una manera total y el proceso de digitalización llevo a este resultado.

4.1.3 Pregunta 3

Esta pregunta tenía la particularidad de contar con dos gráficas, que definían tanto la situación inicial como la final. Debido a la estructura de las pruebas externas en p1 no hubo mayor dificultad para responder la pregunta o para seleccionarla, sin embargo varios estudiantes no seleccionaron adecuadamente, entonces podemos decir que para la mayoría de los estudiantes que respondieron p1 están en una *representación canónica no algorítmica* ya que no existe una evidencia de uso de procesos matemáticos.

Respecto a p2 tenemos las siguientes respuestas:

1	3. ¿Cuánto tiempo ha pasado desde que Juan llegó a la escuela? 1 hora y 15 minutos
2	3. ¿Cuánto tiempo ha pasado desde que Juan llegó a la escuela? han pasado cinco minutos desde que Juan a llegado al colegio

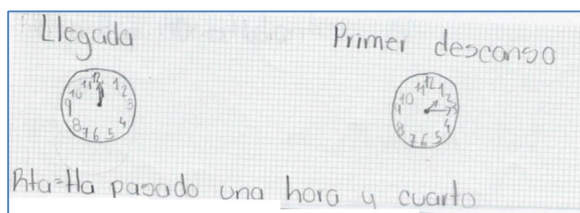
Tabla 13 Respuestas pregunta 3 p2

Teniendo en cuenta las categorías de Parra & Flores (2008), podemos decir que los dos estudiantes que respondieron de una manera correcta los ejercicios están en una *representación canónica no algorítmica* ya que le dieron una debida interpretación a los ejercicios sin llegar a utilizar algoritmos formales para la solución, por otro lado los estudiantes que respondieron de una manera incorrecta se encuentran en una *representación no canónica*, ya que no interpretaron de una manera adecuada los ejercicios y las soluciones planteadas corresponden a otro tipo de ejercicios.

Ahora desde la perspectiva de la visualización es claro que no hubo una movilización de esta acción ya que el objetivo principal de la pregunta es leer una información presentada por medio de una representación gráfica.

Para p3, se esperaban resultados diferenciadores, que de alguna manera mostraran la importancia de una representación gráfica dentro del contexto de un problema, no obstante

los resultados obtenidos por los estudiantes⁶, dejaron ver que esta herramienta solo se convierte en otra forma de brindar información, que no se busca en el estudiante, un nivel más allá de una lectura simple y rápida a través de una gráfica. En este grupo de estudiantes existió una respuesta diferente a las demás en la que se utilizó una representación gráfica, para modelar el problema.



Recorte 12 Respuesta de Angie

Se puede categorizar esta respuesta dentro del nivel de visualización *ver lo invisible para la prueba*, ya que de acuerdo con el proceso evidenciado en lo escrito, primero realizó las representaciones gráficas y luego lanzó la respuesta, es decir la gráfica fue un catalizador que le dio herramientas para responder de un forma acertada este problema. Por otro lado se puede categorizar como una *representación canónica no algorítmica*, ya que la respuesta corresponde a la pregunta planteada pero no se evidencia el uso de procesos algorítmicos.

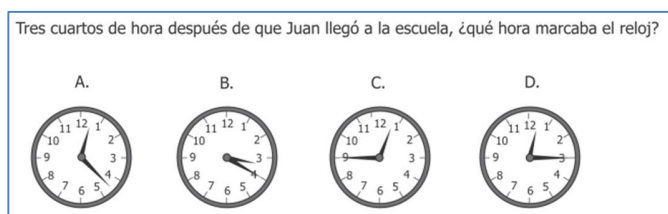
A pesar de la anterior respuesta, podemos pensar que los elementos adicionales como los estudiados, dentro de la prueba Saber y en el campo de los números fraccionarios, solo son una manera diferente de mostrar algún tipo de información.

Ahora teniendo en cuenta las categorías de Arcavi (2003), respecto a la visualización, no podríamos pensar que tal haya sido una acción constante (Esto debido a que solo 1 estudiante lo evidenció) en ninguna de las tres pruebas, debido a que no se demostró por parte de los estudiantes que la representación o el propio enunciado del problema motivaran acciones tendientes a esto. Por otro lado podemos afirmar que respecto a los niveles de interpretación por medio de una gráfica de Parra y Flores (2008), la mayoría de los estudiantes de p1 están en una *representación canónica no algorítmica* pues no existen evidencias de procesos matemáticos, de los estudiantes de p2 podemos pensar que se

⁶ En este punto y para esta prueba se obtuvieron 5 correctas y 3 incorrecta

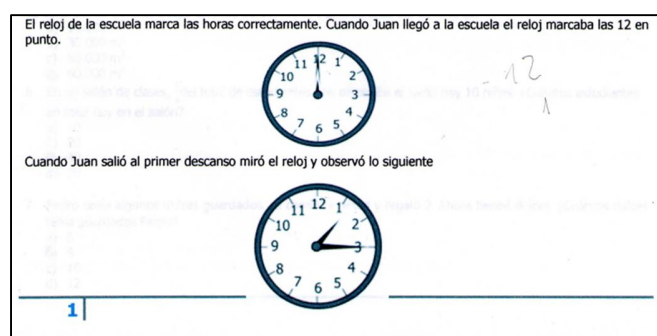
encuentran en una *representación no canónica*, debido a que la mayoría de las respuestas están erróneamente contestadas.

4.1.4 Pregunta 4



Recorte 13 Pregunta 4

Para poder responder esta pregunta era necesario saber la hora en que Juan llegó a la escuela, encontrábamos la información en el enunciado de la inicial.



Recorte 14 Enunciado Principal Pregunta 4

Una de las opciones escogidas por tres de los siete estudiantes⁷ fue la B, en ella el reloj está marcando las tres y veinte, sin embargo las manecillas apuntan a los números tres y cuatro, podemos pensar que los estudiantes hicieron una asociación entre el enunciado que decía “tres cuartos” y los números que señalaban las manecillas.

Como este problema incorpora en su enunciado y en sus opciones de respuesta representaciones gráficas, podemos acudir a los niveles planteados por Parra & Flores (2008) para este tipo de ejercicios. En este caso podemos decir que los estudiantes que escogieron la opción de respuesta B tenían una *representación no canónica* del problema ya que reconocía dentro de la pregunta el espacio de tiempo representado por tres cuartos, pero el error cometido fue relacionarlo con los números que señalaban las manecillas.

⁷ Las respuestas de este problema fueron 7 correctas y ninguna incorrecta.

Respecto al estudiante que no escogió ninguna de las opciones planteadas no se puede hacer una inferencia de lo que pudo haber pensado ya que la hoja no hacía evidencia de algún cálculo realizado.

Por otro lado respecto a las respuestas correctas, tomando como referencia a Parra & Flores (2008), se puede afirmar que dos de los tres estudiantes que seleccionaron la opción B se encuentran en una *representación canónica no algorítmica*, porque interpretaron bien el problema pero la solución depende únicamente de una representación gráfica, esto debido a que no existe dentro de las hojas recibidas evidencia alguna de procedimientos algorítmico realizados. No obstante, un estudiante se encuentra en una *representación canónica algorítmica basada en un esquema de solución no algorítmico*, porque como se puede ver en el recorte 15 se realizó un análisis de manera algorítmica del problema realizando una transformación de la equivalencia de tres cuartos de hora en minutos, además hizo una correcta selección de la representación gráfica, sin embargo, no se puede asegurar que el estudiante logre explicar porqué existe una equivalencia entre estos dos resultados (algorítmico y gráfico)

$$\begin{array}{r} 15 \\ 15 \\ 15 \\ \hline 45 \end{array}$$

Recorte 15 Proceso algorítmica para la pregunta 4

Análogamente algo que no se encuentra escrito en las respuestas de los tres estudiantes que respondieron correctamente, es que debieron imaginar los movimientos de las manecillas, pensar en la rotación que cada una de ellas hizo; a esto Arcavi (2003), lo denomina visualizar. En consecuencia podemos decir que este ejercicio logra movilizar en el estudiante la visualización y ratifica el nivel en el cual se clasificó en el estudio anterior denominado ver lo invisible para la prueba.

Respecto a p2 tenemos que los resultados obtenidos fueron:

1	<p>4. Tres cuartos de hora después de que Juan llegó a la escuela, ¿qué hora marcaba el reloj?</p> <p style="text-align: center;">3:15</p>
---	--


2	<p>4. Tres cuartos de hora después de que Juan llegó a la escuela, ¿qué hora marcaba el reloj?</p> 
3	<p>4. Tres cuartos de hora después de que Juan llegó a la escuela, ¿qué hora marcaba el reloj?</p> <p>45 minutos.</p>

Tabla 14 Respuestas pregunta 4 p2

Podemos observar que en esta pregunta dejan ver una mala interpretación del ejercicio ya que en las respuestas 1 y 2 el “tres cuartos de hora” es interpretado como 3 horas y 15 minutos, además de eso dejan de lado la hora de llegada. Por otro lado la respuesta 3 evidencia una buena interpretación del enunciado “tres cuartos de hora” sin embargo, solo toma en cuenta el tiempo que transcurrió y no lo agrega a la hora que se dice de llegada.

Dado que este ejercicio tiene dentro de su enunciado inicial una representación gráfica, las respuestas de los estudiantes las podemos categorizar dentro de los niveles de Parra & Flores, (2008). En primer lugar la respuesta correcta se encuentra en una *representación canónica no algorítmica* porque hizo una buena interpretación de la fracción $\frac{3}{4}$ de hora y la relación con la gráfica, la tradujo de una manera adecuada para el ejercicio supo dar una respuesta, pero no es posible que no reconozca la relación entre la representación gráfica y la algorítmica. Los estudiantes que respondieron de una manera equivocada al ejercicio se encuentran en una *representación no canónica* ya que hicieron una mala interpretación del ejercicio, llevándolos a soluciones que no eran adecuadas.

Para finalizar el análisis de este ejercicio debemos observar que aunque la mayoría de los estudiantes se equivocaron, es claro que por parte de todos existió la acción de visualizar, debido a que es necesario imaginar las posiciones de las manecillas del reloj, para lanzar una posible hora, además si no lo hiciera de esta manera sino a través de procedimientos algorítmicos también debe realizar un proceso que lo lleve al resultado, y esto también es visualizar; en otras palabras este ejercicio se encuentra en las categorías *ver lo invisible para la prueba y predicción de lo invisible para la solución de problemas*.

En la prueba p3 tenemos que las respuestas de los estudiantes para esta pregunta fueron:


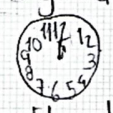
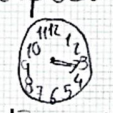
1	<p>4. Tres cuartos de hora después de que Juan llegó a la escuela, ¿qué hora marcaba el reloj?</p> <p>$\frac{1}{4} \rightarrow$ Cuarto $\frac{3}{4} \rightarrow$ # que se repiten los cuartos $\frac{3}{4} \times 45 = 135$</p> <p>El reloj marca 12:45</p>
2	<p>4. Tres cuartos de hora después de que Juan llegó a la escuela, ¿qué hora marcaba el reloj?</p> <p>12:45 tenía la hora del reloj</p> <p>$\frac{1}{4}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{3}{4}$</p>
3	<p>4. Tres cuartos de hora después de que Juan llegó a la escuela, ¿qué hora marcaba el reloj?</p> <p>El reloj marcaba las 3:15</p>
4	<p>4. Tres cuartos de hora después de que Juan llegó a la escuela, ¿qué hora marcaba el reloj?</p>  <p>$\frac{1}{4}$ $\frac{2}{4}$ $\frac{3}{4}$</p>
5	<p>4. Tres cuartos de hora después de que Juan llegó a la escuela, ¿qué hora marcaba el reloj?</p> <p>a) Llegada Después</p>   <p>pta=El reloj marca a las tres y un cuarto</p>

Tabla 15 Respuestas pregunta 4 p3

La particularidad de este ejercicio se debía a que no mostraba una representación gráfica del reloj a la hora de llegada de Juan, caso contrario a las dos pruebas anteriores. Sin embargo, dos de los ocho estudiantes que contestaron esta prueba vieron la necesidad de dibujar los relojes para marcar las horas, esto indica en sí, que aunque la respuesta sea errónea, están en una categoría de visualización y Arcavi (2003), la denomina *ver lo invisible para la prueba*. Estas dos respuestas nos dan un indicio de la necesidad de las representaciones gráficas, o el papel de las mismas ya que como se describió al principio esta prueba no contaba con ninguna representación gráfica.

Por otro lado aunque las dos primeras respuestas dadas que son correctas, tienen información sobre la solución algorítmica del ejercicio, para el estudio se convierten en solución de un problema bajo el significado de medida (Elguero, 2009), ya que requirió del uso de procedimientos algorítmicos cambiando la magnitud horas a minutos.

4.1.5 Pregunta 5

Esta pregunta tiene la particularidad de contar en su enunciado con una representación gráfica que alude de forma directa a los números fraccionarios debido a que se diferencian y se demarcan las partes de un hexágono regular. Por las características del problema se esperaba el uso de operaciones algorítmicas que incorporaran números fraccionarios sin embargo esto no fue del todo una constante ya que las operaciones realizadas no se aproximaron al uso de números fraccionarios de acuerdo con lo descrito seguidamente.

En primer lugar para p1 y como sucedió en los puntos anteriores las respuestas solo fueron señaladas dentro de las opciones dadas por la prueba, no obstante cabe señalar que los resultados⁸ fueron en su mayoría satisfactorios, pero no hay una evidencia que pueda respaldar que los procesos utilizados fueron acordes con el problema y no resultados del azar.

Respecto a p2 tenemos que los resultados fueron:

1	<p>La zona de los claveles ocupa un área de 10.000 m². El área total del terreno es:</p> <p style="text-align: center;">El terreno total es de 60.000 m²</p>
2	<p>La zona de los claveles ocupa un área de 10.000 m². El área total del terreno es:</p> <p style="text-align: center;">60000 m². todas las zonas de terrenos</p>
3	<p>La zona de los claveles ocupa un área de 10.000 m². El área total del terreno es:</p> <p style="text-align: center;">60000 m² 10.000 $\times 6$ <u>60.000</u></p>

⁸ Las respuesta para la pregunta 5 en p1 fueron 5 correctas y 1 incorrecta.

4	<p>La zona de los claveles ocupa un área de 10.000 m². El área total del terreno es: El total de la área es de 60000 m²</p>																		
5	<p>La zona de los claveles ocupa un área de 10.000 m². El área total del terreno es: 60.000 m²</p>																		
6	<p>La zona de los claveles ocupa un área de 10.000 m². El área total del terreno es:</p> <table style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td style="text-align: right;">50 000 m²</td> <td style="text-align: right;">10 000 m² claveles</td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td style="text-align: right;">10.000 m² Rosas</td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td style="text-align: right;">10.000 m² Jazmines</td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td style="text-align: right;">10.000</td> <td style="text-align: right;">Margaritas</td> </tr> <tr> <td></td> <td style="text-align: right;">10.000</td> <td style="text-align: right;">Violetas</td> </tr> <tr> <td></td> <td style="border-top: 1px solid black; text-align: right;">50.000 m²</td> <td></td> </tr> </table>	50 000 m ²	10 000 m ² claveles			10.000 m ² Rosas			10.000 m ² Jazmines			10.000	Margaritas		10.000	Violetas		50.000 m ²	
50 000 m ²	10 000 m ² claveles																		
	10.000 m ² Rosas																		
	10.000 m ² Jazmines																		
	10.000	Margaritas																	
	10.000	Violetas																	
	50.000 m ²																		

Tabla 16 Respuestas pregunta 5 p2

Al no contar con opciones de respuesta en esta pregunta el estudiante se veía en la obligación de realizar procedimientos, por tal razón en este ejercicio era necesario tener en cuenta que la zona de las rosas era el doble que cualquiera de las otras, y este era un factor que determinaba directamente la buena realización del ejercicio, ya que el resto se definía por un proceso algorítmico. La gráfica en este ejercicio tenía como objeto brindar información, la cual debía ser interpretada por el estudiante. En segundo lugar se puede ver que los que respondieron de una manera acertada se encuentran en una *representación canónica algorítmica, basada en un esquema de solución no algorítmico*, ya que utilizan de una manera adecuada la representación gráfica y le dan una buena interpretación a lo que esta tiene, como lo muestran las respuestas 1, 2 y 5, además 3 y 4⁹ demuestran un procedimiento algorítmico para la solución. Respecto a las respuestas incorrectas debemos decir que los estudiantes se encuentran en una *representación no canónica*, ya que no tradujeron de una manera adecuada la información de la representación gráfica y esto los llevó a realizar procedimientos algorítmicos inadecuados para la solución del ejercicio. Respecto a la visualización podemos localizar este problema y particularmente esta prueba en la categoría de *ver lo invisible en los datos*, ya que se condensa toda la información en

⁹ Cabe aclarar que en la respuesta 4 el estudiante borro el procedimiento realizado, y es por esto que la digitalización lo muestra.

una representación gráfica, y tal como lo veremos en la siguiente prueba su necesidad o uso se ve reflejada en los resultados de los estudiantes.

Para p3 tenemos resultados¹⁰ completamente diferentes a los dos iniciales las respuestas dadas por los estudiantes fueron:

1	<p>Un terreno tiene cinco cultivos de flores, cuatro de ellos de igual área (claveles, margaritas, violetas y jazmines); el otro cultivo, sembrado con rosas, ocupa el doble de área que los claveles. ¿Cuál es el área total del terreno si los claveles ocupan un área de 10.000 m²?</p> <p>20.000 m² es el area total de las rosas</p>
2	<p>Un terreno tiene cinco cultivos de flores, cuatro de ellos de igual área (claveles, margaritas, violetas y jazmines); el otro cultivo, sembrado con rosas, ocupa el doble de área que los claveles. ¿Cuál es el área total del terreno si los claveles ocupan un área de 10.000 m²?</p> <p>La área total del terreno es 50.000 m²</p> <p>10.000 x5 50.000</p>

Tabla 17 Respuestas pregunta 5 p3

Este es el primer caso donde ningún estudiante le dio respuesta al problema planteado, cabe resaltar que en la versión original tenía una representación gráfica que facilitaba la interpretación del ejercicio, por tal razón se evidencia que un problema dado únicamente en términos semánticos puede no ser entendido en su totalidad, ya que como lo aduce Arcavi (2003), las representaciones gráficas muestran lo invisible de los datos, y este ejercicio valida esta afirmación.

4.1.6 Pregunta 6

En esta pregunta se esperaba que los estudiantes realizaran procedimientos algorítmicos, o lo modelaran por medio de una representación gráfica, no obstante en p1, no existe evidencia de tales expectativas. En contraste los resultados obtenidos¹¹ reflejan un alto nivel de asertividad. No se utiliza el término comprensión ya que no existen evidencias que lo puedan reflejar, y visto de este modo estos resultados únicamente podrían ser discriminados como correctos e incorrectos.

¹⁰ Las respuestas para p3 en la pregunta 5 tenemos 8 incorrectas y ninguna correcta.

¹¹ La pregunta 6 en p1 fue respondida correctamente por 6 estudiantes e incorrecta por 1

Por otro lado tanto p2 como p3 al no contar con opciones de respuesta forzó a los estudiantes a realizar alguna clase de procedimiento tal y como se muestra a continuación.

Algunas de las respuestas aportadas se encuentran condensadas en la siguiente tabla, y debido a que la pregunta 6 era igual tanto en p2 como p3, se realizó un solo análisis.

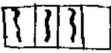
1	<p>6. En un salón de clases, $\frac{3}{4}$ del total de estudiantes son niños. En el salón hay 10 niñas. ¿Cuántos estudiantes en total hay en el salón?</p> <p>hay en total 40 estudiantes</p> <p>lo que yo creo que es que en la parte de arriba dice que hay $\frac{3}{4}$ o sea que el total de niños es mas de la mitad por eso digo que hay 40 estudiando</p>
2	<p>$\frac{3}{4}$ </p> <p>Rta: Hay 40 estudiantes.</p>
3	<p>6. En un salón de clases, $\frac{3}{4}$ del total de estudiantes son niños. En el salón hay 10 niñas. ¿Cuántos estudiantes en total hay en el salón?</p> <p>hay 55 estudiantes en total</p>

Tabla 18 Respuestas pregunta 6 p1 y p2

Como podemos ver en la mayoría de las respuestas no hay un procedimiento formal para especificar la cantidad de niños y de niñas, sin embargo, las respuestas 1, 2 y 3 resaltan sobre las demás; la primera en el sentido en que llegó al resultado de una manera muy intuitiva ya que hizo una relación de orden entre $\frac{3}{4}$ y $\frac{1}{2}$, y de esta manera asignó un valor a la primera fracción, fue un procedimiento bastante intuitivo pero generó una respuesta correcta. La segunda y con base en la respuesta dos seleccionada tenemos un estudiante que modeló adecuadamente la situación que de acuerdo a Arcavi (2003), vio lo invisible para la prueba, y además respecto a Parra y Flores (2008), se encuentra en una *representación canónica algorítmica basado en un esquema de solución no algorítmica* debido a que no sabemos si pueda explicar la relación entre la respuesta simbólica y la gráfica. Respecto a la respuesta 3, como se puede ver, asignó una representación gráfica correcta a la distribución del problema, es decir que vio lo invisible del problema, no obstante hizo una mala utilización de la información del ejercicio que lo llevaron al error, pero es el único

estudiante que puede categorizarse dentro de una *representación no canónica* planteado por Parra & Flores (2008).

4.1.7 Pregunta 7

Para p1 en esta pregunta tenemos que las categorías de Parra & Flores (2008) no pueden ser aplicadas a este ejercicio debido a que no incorpora representaciones gráficas, más aun ningún estudiante evidenció el hecho haberlas utilizado para buscar la solución, es decir estamos ante un ejercicio del cual se pueden estudiar procedimientos estrictamente algorítmicos. Por tal motivo no profundizaremos en el estudio de las respuestas, sin embargo este argumento no será descartado ya más adelante puede brindar información esencial para el análisis de los resultados.

Respecto a p2 y p3 tenemos que decir que esta pregunta era igual en las dos pruebas debido a que en su forma original no poseía ninguna representación gráfica por tal razón condensamos las respuestas en la siguiente tabla:

1	<p>Pedro tenía 12 dulces guardados</p> $\begin{array}{r} +6 \\ 12 \end{array}$ <p>6 > Pedro comió</p> $\begin{array}{r} -6 \\ 2 \end{array}$ <p>2 - Regalo</p> $\begin{array}{r} 4 \end{array}$ <p>4 - Dulces que tiene</p>
2	<p>pedro tenía 12 dulces guardados $6 \times 2 = 12$</p>
3	<p>el tenía guardados 10 dulces</p> $\begin{array}{r} 2 \text{ regalo} \\ 4 \text{ tiene} \\ 4 \rightarrow \text{De comió la mitad} \\ 10 \end{array}$
4	<p>Pedro tenía 11 dulces guardados</p>

Tabla 19 Respuestas pregunta 7 p1 y p2

En esta tabla se condensan las cuatro tendencias características para el problema, las dos primeras referentes a las respuestas correctas y la dos últimas incorrectas. En la primera

respuesta vemos cómo los estudiantes por medio de uso de números naturales, hacen una asignación numérica a los procesos planteados por el problema, llegando de manera acertada a un resultado satisfactorio. La segunda aunque muestra la respuesta correcta no se demuestra el proceso por el cual se llegó a ese resultado, y la tercera y cuarta muestran en primer lugar un proceso erróneo con una respuesta incorrecta y en segundo una respuesta equivocada sin proceso.

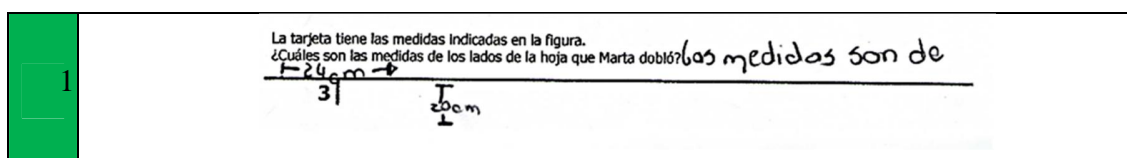
Es claro a la luz de estos resultados que este problema aunque clasificado como de uso de significados de la fracción, no llevó a los participantes a utilizar procedimientos algorítmicos que necesitaran su aplicación, más aun y de acuerdo a los procesos no se pueden clasificar dentro de los niveles de Parra y Flores (2008), por la falta de representaciones gráficas y además tampoco dentro de los niveles de Arcavi (2003) en el papel de la visualización ya que no se evidencia claramente esta acción en las respuestas aportadas.

4.1.8 Pregunta 8

Esta pregunta tenía dos características buscadas para este proyecto, en primera medida, que se hiciera alusión al uso del significado de la fracción encontrándose esto en el enunciado del problema, y en segunda que contara con una representación gráfica, esto hacía que se generara expectativa en los resultados que se lograrían obtener.

Así pues se aplicaron las pruebas a los participantes, pero como ha sucedido en las anteriores preguntas los resultados¹² de p1, solo se podrían catalogar como correctos e incorrectos, ya que en ninguna prueba presentada se evidencia proceso alguno realizado.

Respecto a p2 tenemos que los resultados fueron:



¹² Los resultados de p1 en la pregunta 8 fueron 5 correcta y 2 incorrectas.

2	<p>24cm tiene la tarjeta por el lado que doblo marta</p> $\begin{array}{r} 12 \\ \times 2 \\ \hline 24 \end{array}$
---	---

Tabla 20 Respuestas pregunta 8 p2

El problema tenía la finalidad que el estudiante interpretara la información aportada en la representación gráfica, y expresar como resultado las medidas de una hoja principal, es decir la respuesta que se esperaba era 24 centímetros de largo por 20 centímetros de alto. Esta aclaración se realiza debido a que en la respuesta 2 se realiza un procedimiento algorítmico adecuado para llegar a un resultado pero únicamente da las medidas de un solo lado.

Como la pregunta tiene una representación gráfica dentro del enunciado del problema podemos categorizarlo por medio de los niveles de Parra & Flores (2008) en primer lugar el estudiante que respondió de una manera correcta se encuentra en una *representación canónica algorítmica basado en un esquema de solución no algorítmica*, ya que le dio un adecuado uso a la información aportada por el problema, y además aunque no se encuentra plasmado de una forma escrita, utilizó procedimientos algorítmicos para la solución. Respecto a los que no respondieron lo esperado se pueden categorizar en una *representación no canónica*, ya que no interpretaron correctamente el ejercicio y las soluciones aportadas no correspondían a la pregunta planteada.

Por otro lado para p3 que no contaba con una representación gráfica tenemos que los resultados fueron:

1	<p>Para elaborar una tarjeta de felicitación, Marta dobló una hoja de papel por la mitad, las medidas de la tarjeta obtenida, luego del doblar, son de 12 cm de ancha y de 20 cm de larga. ¿Cuáles son las medidas de los lados de la hoja que Marta dobló?</p> <p>12 cm de lados</p>
2	<p>Para elaborar una tarjeta de felicitación, Marta dobló una hoja de papel por la mitad, las medidas de la tarjeta obtenida, luego del doblar, son de 12 cm de ancha y de 20 cm de larga. ¿Cuáles son las medidas de los lados de la hoja que Marta dobló?</p> <p>Las medidas de los lados de la hoja de Marta</p> $\begin{array}{r} 12 \text{ son } 240 \\ \times 10 \\ \hline 00 \\ 24 \\ \hline 240 \end{array}$

Tabla 21 Respuestas pregunta 8 p3

Este ejercicio aunque no aclara por cual mitad se dobló la hoja (por la mitad de lo largo o la mitad de lo ancho), ya que esto le daba dos opciones de respuesta (20cm × 24cm o 12cm × 40cm), ningún estudiante dio la respuesta esperada, haciendo procedimientos como hallar perímetros o áreas. No obstante esto nos brinda la evidencia que una representación gráfica, en primer lugar muestra lo que en palabras no se expresa y da contexto al ejercicio, en particular esta imagen hubiera hecho el papel de mostrar lo invisible para la prueba.

4.1.9 Pregunta 9

Este ejercicio tuvo la particularidad que en p1 la totalidad de los participantes contestaron satisfactoriamente, pero al igual que en los ejercicios anteriores no se cuenta con evidencia para clasificar las respuestas de acuerdo con los niveles establecidos.

Respecto a p2 los resultados obtenidos fueron:

1	<p>9. Con 15 metros de cinta amarilla, Claudia puede hacer 5 adornos del mismo tamaño, iguales, sin que sobre cinta. ¿Cuántos adornos del mismo tamaño de los amarillos puede hacer con 30 metros de cinta azul sin que sobre cinta?</p> <p>claudia puede hacer 10 adornos de cinta azul</p>
2	<p>9. Con 15 metros de cinta amarilla, Claudia puede hacer 5 adornos del mismo tamaño, iguales, sin que sobre cinta. ¿Cuántos adornos del mismo tamaño de los amarillos puede hacer con 30 metros de cinta azul sin que sobre cinta?</p> <p>30 a metro de cinta.</p> <p>nos dice que con 15 metros puede hacer 5 adornos</p> $\frac{30}{3} = 10 \text{ adornos}$
3	<p>9. Con 15 metros de cinta amarilla, Claudia puede hacer 5 adornos del mismo tamaño, iguales, sin que sobre cinta. ¿Cuántos adornos del mismo tamaño de los amarillos puede hacer con 30 metros de cinta azul sin que sobre cinta?</p> <p>10 adornos de 2 cm</p>

Tabla 22 Resultados pregunta 9 p2

El ejercicio 10 no contaba con ninguna representación gráfica, y además los estudiantes a los que les aplicó esta prueba no vieron la necesidad de utilizarla, es decir que el ejercicio planteado únicamente requería de procedimientos algorítmicos para llegar a su solución. Por esta razón no profundizaremos en el análisis del mismo, aunque sí se mantendrá para el

estudio general ya que aporta información sobre la solución sin tener como referente una representación gráfica.

Respecto a p3 tenemos:

1	<p>Claudia compró varios metros de cinta, unos de color amarillo y otros de color azul. Con 15 metros de cinta amarilla, Claudia puede hacer 5 adornos del mismo tamaño, iguales, sin que sobre cinta. ¿Cuántos adornos del mismo tamaño de los amarillos puede hacer con 30 metros de cinta azul sin que sobre cinta?</p>
2	<p>Claudia compró varios metros de cinta, unos de color amarillo y otros de color azul. Con 15 metros de cinta amarilla, Claudia puede hacer 5 adornos del mismo tamaño, iguales, sin que sobre cinta. ¿Cuántos adornos del mismo tamaño de los amarillos puede hacer con 30 metros de cinta azul sin que sobre cinta?</p>

Tabla 23 Resultados pregunta 9 p3

Al igual que el análisis realizado a la prueba p2, la mayoría de los estudiantes hicieron uso de procedimientos algorítmicos para llegar a la respuesta, sin embargo la respuesta 1 da una evidencia de un procedimiento de solución a través de las representaciones gráfica, el estudiante trata de describir por medio de varias cintas el tamaño al que deben ser cortadas, pero esto no le da solución al problema planteado, ya que la propia pregunta hace referencia a una cantidad mas no a un tamaño.

A pesar de todo el estudiante de la respuesta 1 es el único que puede categorizarse dentro de los niveles de Parra & Flores, (2008), como *representación no canónica*, ya que la respuesta hace alusión a otro tipo de pregunta, pero además se introdujo en un nivel de visualización denominado ver lo invisible (Arcavi, 2003), no completo la definición por el hecho de que no consiguió probar un resultado.

4.1.10 Pregunta 10

Al igual que las respuestas anteriores en esta pregunta respecto a p1 contamos con información cuantitativa¹³, dejando de esta forma de lado un análisis profundo de las posturas teóricas establecidas para la investigación.

Ahora las respuestas de p2 fueron:

1	<p>10. Claudia tomó 12 metros de cinta amarilla y 20 metros de cinta azul y los cortó de forma que resultaran pedazos del mismo tamaño, no sobrara cinta y fueran de la mayor longitud posible. ¿Cuál es la longitud de cada pedazo?</p> <p>la longitud de cada pedazo puede ser de 4 cm</p>
2	<p>10. Claudia tomó 12 metros de cinta amarilla y 20 metros de cinta azul y los cortó de forma que resultaran pedazos del mismo tamaño, no sobrara cinta y fueran de la mayor longitud posible. ¿Cuál es la longitud de cada pedazo?</p> <p style="text-align: center;">4cm</p> $\frac{12}{4} = \frac{20}{4}$
3	<p>10. Claudia tomó 12 metros de cinta amarilla y 20 metros de cinta azul y los cortó de forma que resultaran pedazos del mismo tamaño, no sobrara cinta y fueran de la mayor longitud posible. ¿Cuál es la longitud de cada pedazo?</p> <p>6 metros de cinta amarilla. 10 metros de cinta azul.</p>

Tabla 24 Respuestas pregunta 10 p2

Como se resaltó anteriormente en el estudio de la prueba bajo los significados de la fracción, este problema representaba un caso de Máximo Común Divisor y eso se ve reflejado en la forma de la solución de los problemas y particularmente en la respuesta 2 en la que se hace uso de la comprobación de este método algorítmico matemático, por tal razón la forma de respuesta no se analizara a profundidad ya que este campo no hace parte del trabajo.

Para p3 tenemos que las respuestas aportadas fueron:

1	<p>11. Claudia tomó 12 metros de cinta amarilla y 20 metros de cinta azul y los cortó de forma que resultaran pedazos del mismo tamaño, no sobrara cinta y fueran de la mayor longitud posible. ¿Cuál es la longitud de cada pedazo?</p> <p>4 cm. de longitud</p>
---	---

¹³ Para esta pregunta en p1 tenemos que las respuestas correctas fueron 4 e incorrectas 3.

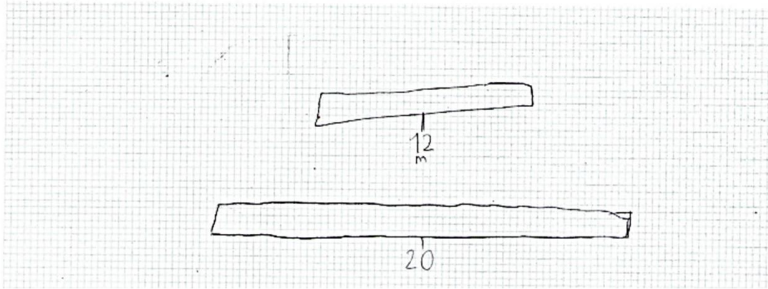
5	<p>11. Claudia tomó 12 metros de cinta amarilla y 20 metros de cinta azul y los cortó de forma que resultaran pedazos del mismo tamaño, no sobrara cinta y fueran de la mayor longitud posible. ¿Cuál es la longitud de cada pedazo?</p> 
---	---

Tabla 25 Respuestas pregunta 10 p3

Estas respuestas muestran en su gran mayoría procedimientos algorítmicos, procesos que los estudiantes creen pertinentes para llegar a la respuesta, pero esto no lo profundizaremos en este estudio. La respuesta importante fue aportada en 2 lugar ya que muestra de nuevo una necesidad de realizar una gráfica para ver de otra manera el ejercicio, al igual que la pregunta 9, esta pregunta la categorizaremos como *representación no canónica* y dentro de la visualización busca *ver lo invisible*.

4.1.11 Pregunta 11

Para p1 no se profundizará en esta pregunta por dos razones; la primera es que ningún estudiante argumentó el porqué de la respuesta aportada y la segunda porque en su mayoría los estudiantes acertaron en la respuesta¹⁴.

Las respuestas de p2 para esta pregunta fueron:

1	<p>En la clase se leerán los libros escogidos por más de 10 estudiantes. ¿Cuáles son estos libros?</p> <p>zoro • Harry Potter • la Isla del tesoro</p>
2	<p>En la clase se leerán los libros escogidos por más de 10 estudiantes. ¿Cuáles son estos libros?</p> <p>zoro porque lo escogieron mas niños</p>
3	<p>En la clase se leerán los libros escogidos por más de 10 estudiantes. ¿Cuáles son estos libros?</p> <p>la isla del tesoro y los hermanos grimm</p>

¹⁴ El total de las respuestas correctas fueron en esta pregunta y en esta prueba.

Tabla 26 Respuestas pregunta 11 p2

En el problema 11 la representación gráfica fue determinante para encontrar las respuestas al ejercicio. En ella se representaba por áreas sombreadas porcentajes que equivalían al total de estudiantes que votaron por cada libro, y esta es una de las razones por las cuales ninguno realizó procedimientos algorítmicos, solo seleccionaban lo que su sentido de la vista les proporcionaba. Sin embargo, la falta de realizar la transformación algorítmica hizo que el estudiante de la respuesta 2, no incluyera a *Harry Potter* y *La isla del tesoro*, los demás estudiantes que se identifican con la respuesta 3, no interpretaron de una manera adecuada la gráfica y el problema, ya que escogieron *Cuentos de los hermanos Grim*, que es una de las áreas con menor porcentaje de votación, es decir se encuentran en una *representación no canónico* (Parra & Flores, 2008), respecto a los estudiantes agrupados en la respuesta 3, están en una *representación canónico no algorítmico*, ya que sus respuestas están basadas en la lectura de la representación gráfica.

Con respecto a la movilización de la visualización, se puede entender que no se realizó ya que lo que se hizo fue una lectura o interpretación de la gráfica.

Las respuestas de p3 se pueden clasificar en dos categorías:

1	<ul style="list-style-type: none"> -2016 50% -Harry Potter 25% -La isla del tesoro 20%
2	<p>¡ps! lo estudiantes escogieron el zorro</p>

Tabla 27 Respuestas pregunta 11 p3

Como podemos ver en las respuestas aportadas, los estudiantes seleccionaron de acuerdo con la relación entre el valor dado como referencia (10) y los porcentajes presentados. Es por esta razón, que no queda claro cuál es la cantidad de estudiantes según el problema están en cada categoría. Aunque la respuesta 1 relaciona el libro con el porcentaje no todos contestaron de esta manera excluyendo los porcentajes pero manteniendo la respuesta correcta. Es así que podemos pensar que el factor determinó el nivel de las respuestas puede estar relacionado con los porcentajes presentados.

4.1.12 Pregunta 12

En esta pregunta tanto p1 como p2 tenían opciones de respuesta, debido a que al quitar las representaciones graficas quedaría incompleto e incoherente el problema, es decir que esta pregunta tanto en p1 como p2 se convertiría en una prueba de selección.

Los resultados¹⁵ fueron bastante altos en esta dos pruebas. Ahora respecto a p3, se les pedía a los estudiantes graficar la situación, aunque la mayor parte de las respuestas¹⁶ fueron correctas, estas se caracterizaron por no ser adecuadamente graficadas, es decir las proporciones en cada una de las partes no eran congruentes como lo vemos en las respuestas seleccionadas.


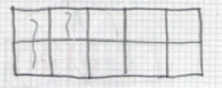
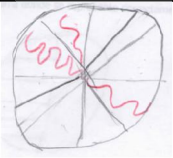
1	
2	
3	

Tabla 28 Respuestas pregunta 12 p3

Cabe resaltar que la respuestas 2, aunque no es la representación comúnmente realizada para una torta, sí representa la fracción pedida. De acuerdo con estos resultados, se clasificaron a los estudiantes que contestaron adecuadamente en una *representación canónica no algorítmica*, ya que solo se hace uso de representaciones gráficas, y los que no lo respondieron adecuadamente se encuentran en una de *representación no canónico*.

¹⁵ Los resultados para p1 en esta pregunta fueron 7 correctas y ninguna incorrecta y en p2 9 correctas y 1 incorrecta.

¹⁶ Los resultados de p3 en la pregunta 12 fueron 6 correctas y 2 incorrectas.

4.1.13 Pregunta 13

Esta pregunta tiene las mismas características de la pregunta 11, además de que en p3 las observaciones fueron similares, es por esta razón que no profundizaremos en su análisis.

4.1.14 Pregunta 14

De todos los estudiantes participantes esta pregunta fue respondida de manera incorrecta por solo 1 estudiante. La característica principal de este problema era la modelación de los datos dentro del enunciado del mismo.

Respecto a las respuesta aportadas por los estudiantes tenemos que en p1 como ha sucedido en las anteriores preguntas solo se basó en la selección de la respuesta pero no existió ningún procedimiento dentro de las pruebas. Para p2 y p3 aunque diferentes en su estructura del problema las falta de opciones llevó a los estudiantes a realizar algún procedimiento algorítmico, las respuestas más destacadas y representativas fueron:

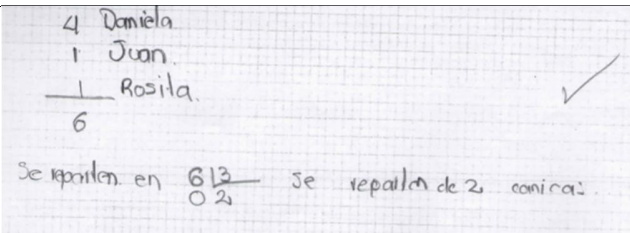
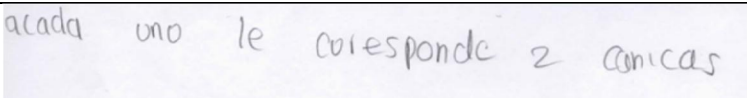
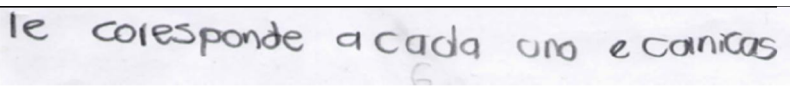
1	
2	
3	

Tabla 29 Respuestas pregunta 14 p2 y p3

En la primera respuesta vemos un proceso algorítmico que sustenta la respuesta es por tal razón que podemos decir que los estudiantes que respondieron de esta manera están en una *representación canónica algorítmica*; ya que como tanto en p1 como en p2 se respondió de manera semejante podemos conjeturar que se puede suprimir la representación gráfica e igual llegarán a un resultado, es decir que entienden la semejanza entre las representaciones gráficas y los procesos algorítmicos.

En la respuesta 2 vemos que se la da la solución al problema planteado pero no se sustenta un procedimiento, es claro que aunque haya sido de manera mental hubo la necesidad de realizarlo, por tal motivo también lo clasificamos como la pregunta 1, y para finalizar tenemos en la respuesta 3 la única incorrecta de las tres pruebas, que más que equivocada podemos pensar que es un problema de escritura en este punto particular.

4.1.15 Pregunta 15

Por la pretensión de la pregunta, tanto para p1 como para p2 solo se basó en una prueba de selección y en p3 de construcción, es decir que las situaciones vistas en el problema fueron similares a la pregunta 12 y 13, por esta razón no haremos énfasis en el análisis del problema.

4.1.16 Pregunta 16

Si $\frac{1}{4}$ de los animales que estaba en la zona A pasó a la zona B , ¿Cuántos animales están ahora en la zona B ?
A. 100
B. 150
C. 300
D. 400

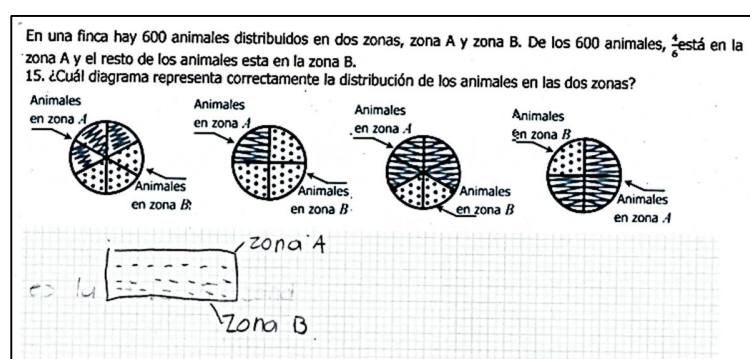
Recorte 16 Pregunta 16

Esta pregunta se caracteriza por contar con una estructura dentro del problema en forma fraccionaria que aduce un significado de la fracción y además le antecede una representación gráfica.

Para p1 tenemos que como podemos ver en esta pregunta, aunque contamos con una representación gráfica de la distribución original de los animales gracias a la pregunta 15, ésta no fue suficiente para darle una solución al ejercicio. Se esperaba que al igual que la pregunta 15 que tuvo unos resultados de 6 aciertos contra 1 desacierto, la pregunta 16 también obtuviera altos resultados, pero no sucedió de esa manera; una razón puede ser que en el primer ejercicio solo se pedía escoger un diagrama que representara la distribución de $\frac{4}{6}$ y $\frac{2}{6}$, mientras en la segunda pregunta se esperaba una transformación en los datos.

Como vimos en el análisis de los ejercicios respecto a la visualización, este ejercicio debía resolverse en términos algorítmicos acción que no sucedió ya que no se mostró ningún procedimiento, sin embargo también está la posibilidad de solucionarlo de una manera gráfica, ya que si se selecciona correctamente la opción en la pregunta 15, y se mira detalladamente la gráfica es claro que la zona A está dividida en cuartos, entonces al pasar uno de ellos a la zona B quedaría marcada exactamente la mitad de la gráfica, que representa 300 animales ya que el total es 600. Pero no hay evidencia del proceso gráfico ni algorítmico.

Para p2 tenemos que la representación gráfica sirvió para presentar la información de $\frac{4}{6}$ para la zona A de otra manera, lo que llevo a la mayoría de los estudiantes a escoger la opción C, categorizando así a los estudiantes en una *representación canónica no algorítmica* (Parra & Flores, 2008), ya que en ningún momento se hizo uso de procedimientos algorítmicos. Por otro lado como se presenta en la tabla, existe un estudiante que no respondió a pesar de que era de selección. Lo que el participante trató de hacer como se evidencia en el recorte 17, fue crear su propia respuesta a partir de la información dada. Sin embargo, no completó su propósito ya que faltó señalar las zonas para cada área.



Recorte 17 Representación gráfica de un estudiante para la pregunta 16.

Para finalizar en p3 encontramos Las respuestas obtenidas fueron:


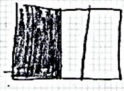

1	<p>Si $\frac{1}{4}$ de los animales que estaba en la zona A pasó a la zona B, ¿Cuántos animales están ahora en la zona B?</p> 
2	<p>Si $\frac{1}{4}$ de los animales que estaba en la zona A pasó a la zona B, ¿Cuántos animales están ahora en la zona B?</p> 
3	<p>Si $\frac{1}{4}$ de los animales que estaba en la zona A pasó a la zona B, ¿Cuántos animales están ahora en la zona B?</p>  <p>Rta=Hay 100 animales en la zona B</p>

Tabla 30 Respuestas pregunta 16 p3

Las características de este ejercicio en todas las pruebas (Sin editar, Editada con gráficas y sin opciones de respuesta, Editada sin gráficas y sin opciones de respuesta) requería que se realizaran procesos algorítmicos para llegar al resultado, ningún estudiante lo mostró como se hubiera esperado. No obstante se revelaron procesos interesantes que desarrollados totalmente tendrían éxito y más información para esta investigación, es el caso de la respuesta 3, que por medio de una representación gráfica *se vio lo invisible para la prueba* (Arcavi, 2003), no totalmente pero sí una parte importante. Las respuestas 1 y 2 aunque utilizaron representaciones gráficas no fueron acordes a lo esperado pero dejan ver la necesidad de “ver” el problema de otra manera.

Todos los que hicieron uso de la representación gráfica para este punto y esta prueba se encuentran en una *representación no canónica* ya que todas las respuestas hacen parte de otro tipo de pregunta.

Para finalizar se debe destacar que aunque no todas las preguntas estudiadas hicieron referencia a procesos de visualización o se categorizaron en algún nivel de representación de Parra & Flores (2008), no significa que no hallan brindado información importante al

trabajo, al contrario fueron una base para evidenciar aspectos que no fueron tenidos en cuenta en un principio.

5 Conclusiones

El objetivo de este estudio se centró en caracterizar el papel de las representaciones gráficas dentro de los problemas que incorporan los significados de la fracción en una prueba estandarizada, específicamente en la prueba Saber 5° del año 2009. Dentro de las conclusiones se establece que:

Para esto se diseñaron herramientas que incluyeron una prueba aplicada a estudiantes de grado quinto de cuyos resultados se establecen las siguientes conclusiones:

- Respecto a los problemas que movilizan algún significado de la fracción podemos decir que sus principales características son: acudir de una forma expresa a alguna frase o palabra que haga alusión al fraccionamiento y presentar una representación gráfica que haga alusión a este hecho.
- La mayor parte de los problemas que presentaban una representación gráfica, tenían como propósito expresar algún tipo de información de una manera diferente, para lo que se requería saber leerla y entenderla. Esto quedó ratificado en las preguntas 2, 12 y 13 donde los estudiantes lograron trabajar con mayor facilidad. En éstas se utilizaban representaciones gráficas que hacían referencia a algún significado de la fracción. Particularmente estas tres preguntas confirmaron el concepto aportado por Escolano & Gairin (2005) respecto al significado de la fracción como parte-todo, en la que solo es necesario hacer una relación entre partes sombreadas y total de las mismas.
- No fue un factor recurrente dentro de los dieciséis problemas seleccionados que las representaciones gráficas llevaran a los estudiantes a experimentar procesos de visualización, como se pudo ver en los análisis. Fueron pocos los puntos que se categorizaron dentro de este nivel y cabe aclarar que en su mayoría fueron dentro de las pruebas editadas.
- En los análisis previos a la aplicación de la prueba se hicieron conjeturas de las posibles soluciones para cada uno de los problemas y en ellos se identificaron las

movilizaciones de la visualización que podía llegar a tener, de estos, ocho de los dieciséis se clasificaron como movilizados de esta acción, pero en el momento de la aplicación solo uno de los mismos logró que los estudiantes realizaran esta acción en las tres pruebas; es decir que la mayor parte de los problemas seleccionados solo buscan que el estudiante identifique datos dentro de un problema y con ellos llegue a una solución. A pesar de esto, no significa que los ejercicios no promuevan la visualización; lo que verdaderamente quiere decir es que las pruebas por sus características de selección múltiple o por la forma en que presentan la información dentro de las imágenes utilizadas, no generan en el estudiante un estímulo para llevarlo a visualizar una situación.

- Es claro que respecto a las categorías de Arcavi, los resultados demuestran que el nivel privilegiado en la prueba Saber 2009 es *la predicción de lo invisible para la solución de problemas*, dado que la mayor parte de los problemas requieren de procesos algorítmicos secuenciales. Respecto a las otras categorías dentro de este estudio no se encuentra una mayor evidencia de movilización. Sin embargo cabe resaltar que en la prueba p1 no existió ningún proceso de visualización evidenciado, ya que las respuestas fueron inmediatas gracias a las opciones de respuesta.
- El hecho que las pruebas Saber sean de carácter censal, las puede convertir en una herramienta muy útil para valorar o evaluar procesos de visualización que no se limiten únicamente a *la predicción de lo invisible para la resolución del problema*, ya que como lo vimos en este estudio se tiene una gran tendencia hacia esta categoría. Se debería aprovechar la cobertura para indagar los otros procesos de visualización. Además, también se podría utilizar las representaciones gráficas no solo como instrumento de información o de conteo sino como generadora de procesos de visualización
- Respecto a las tres pruebas podemos concluir que la prueba que mayor información reveló fue la tercera (p3), debido a que su falta de ayudas, tanto en opciones de respuesta como representaciones gráficas, obligó a los estudiantes a realizar alguna acción para llegar a un resultado. Por el contrario p1 demostró que debido a su estructura se facilita la solución de los problemas y esto impedía

que el estudiante realizara una mayor profundización y acciones diferentes a las planteadas. Finalmente la tercera (p3) fue una prueba que en algunos casos ratificó la función de las representaciones gráficas como herramientas para brindar información y en otros generó la acción de visualizar, pero dentro de la predicción de lo invisible para la solución del problema, es decir las soluciones con procesos algorítmicos.

- Por otro lado tenemos que de los nueve ejercicios que involucraban representaciones gráficas, seis lo hacían en el enunciado y éstos solo lo hacían para presentar la información de una forma diferente, generándose así la nueva categoría emergente caracterizada por utilizar la representación gráfica como un elemento de brindar información. Además, tres ejercicios acudieron a las representaciones gráficas en las opciones de respuesta y para el caso particular de las fracciones solo eran bajo el significado parte-todo.
- Teniendo en cuenta los niveles de representación de Parra & Flores (2008), se puede afirmar que de los problemas que lograron ser clasificados dentro de esta categoría ninguno logro estar dentro de la *representacion Canonica Algoritmica*, queriendo evidenciar con este hecho que no hay una verdadera apropiación del concepto de fracción, tendiendo a separar por parte de los estudiantes; procesos algorítmicos por medio de representaciones simbólicas y las representaciones gráficas.
- Respecto a las pruebas Saber 5° 2009 y el uso que de las representaciones gráficas se hace dentro de esta prueba, encontramos dos escenarios; el primero de ellos sitúa a las representaciones gráficas en las opciones de respuesta, en este caso se evidencio que el único significado utilizado fue parte-todo ratificando la definición que aportaron Escolano y Gairin (2005). El segundo es la representación gráfica dentro del enunciado del problema, en este caso aunque solo el ejercicio 37 del cuadernillo 1 referido al problema del reloj, se clasificó como razón y medida, los demás también hacían referencia al significado de la fracción como parte-todo, es así que podríamos pensar que tanto en la escuela como en la prueba Saber 5° 2009 se privilegia éste significado.

- Finalmente a nivel personal este estudio me permitió estructurar el desarrollo de un proceso de estudio documental, me brindó las herramientas necesarias para definir los pasos y criterios para iniciar el análisis de información. Además en el caso particular de este trabajo me mostré nuevas fuentes de información y de análisis sobre una prueba estandarizada.
- Personalmente este estudio me brindó herramientas para la construcción de etapas sistemáticas, paulatinas y jerárquicas en el proceso de análisis de información.
- Finalmente este estudio me permitió iniciar un proceso de aprendizaje respecto a: el uso de la metodología de análisis de contenido para debelar y analizar de forma sistemática información documental, en particular el establecimiento de categorías de análisis; el estudio de marcos conceptuales referidos al papel de las representaciones en la resolución de problemas; el análisis del contenido de pruebas externas y el uso de dichos análisis en mi labor como profesor de matemáticas. De otra parte, la elaboración de este documento ha fortalecido mis procesos de lectura y escritura de documentos académicos.

6 Bibliografía

- Abela, J. A. (2002). *Las técnicas de Análisis de Contenido: una revisión actualizada*. Granada : Fundación Centro de Estudios Andaluces.
- Arcavi, A. (2003). The Role of Visual Representations in the Learnig of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 52(3), 215-241.
- Bishop, A. (2005). *Aproximacion Sociocultural a la Educacion Matematica*. Santiago de Cali: Universidad del Valle.
- Caro, V., & otros. (1982). *Matematica I Aritmetica y Geometria*. Bogota: PIME.
- Elguero, C. (2009). *Construccion social de ideas en torno al número racional en un escenario sociocultural de trabajo*. México: Instituto Politécnico Nacional.
- Escolano, R., & Gairin, J. M. (2005). Modelos de Medida para la enseñanza del número racional en Educacion Primaria. *Unión*(1), 17-35.
- Fernández, H. G. (2005). *¿Cómo interpretar la evaluación Pruebas Saber?* Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.
- Figueiras, L., & Deulofeu, J. (2005). Atribuir un significado a la matematica a través de la visulalizacion. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 23(2), 217-226.
- González, M. R., & Romero, J. H. (2007). *Validez de las inferencias acerca de la Competencia Matemática de los estudiantes Colombianos, a partir de los resultados del examen de estado aplicado en los años 2003 Y 2004*. Bogotá D. C.: Universidad Pedagogica Nacional.
- Llinares, S., & Sánchez, M. V. (1997). *Aprender a enseñar, modos de representación y número racional*. Zamora (España): Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.
- Meel, D. (2003). Modelos y teorías de la comprensión matemática: Comparación de los Modelos de Pirie y Kieren sobre el crecimiento de

la comprensión matemática y la Teoría APOE. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 6(3), 221-271.

MEN. (1998). *Lineamientos Curriculares*.

MEN. (2006). *Estandares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*. Ministerio de Educación Nacional.

Parra, Á. M., & Flores, M. R. (2008). Aprendizaje cooperativo en la solución de problemas con fracciones. *Educación matemática*, 20(1), 31-52.

Pedraza, F. P., Castillo, M. J., Ortiz, E. F., Toro, L. J., Castelblanco, Y. B., & Fernández, M. I. (2009). *Lineamientos Generales Saber 2009 Grados 5o y 9o*. Bogotá.

Peña, M. (2008). *Evaluación con pruebas de estado en Colombia*. Veracruz.

Ravela, P. (2008). *Fichas didácticas para comprender las evaluaciones educativas*. Uruguay: PREAL.

Saber, I. (Mayo de 2009). Icfes Saber 5° y 9°. *Cuadernillo MI 5°*. Bogotá.

Souto, R. B. (2009). *Visualización En Matemáticas Un Estudio Exploratorio Con Estudiantes De Primer Curso De Matemáticas*. Madrid (España).

Vázquez, M., Marmolejo, G., Torres, L., Valoyes, L., Malagon, M., & Garzón, D. (2002). *Pruebas Censales y Formación de Pensamiento Matemático en la Escuela*. Cali: Universidad del Valle.

Anexo 1

Prueba de Matemáticas (p1)

Lee detenidamente las instrucciones antes de iniciar la prueba

Cada ejercicio planteado tiene un espacio en el cual te solicitamos escribir los procedimientos que utilices para solucionarlo, puedes utilizar lápiz, si necesitas más espacio puedes utilizar el respaldo de la hoja, pero coloca el número de la pregunta que está respondiendo. Es muy importante que respondas todas las preguntas. Esta prueba es individual y por lo tanto no debes copiar de tus compañeros

1. El auto de Jorge necesita 6 galones de gasolina para recorrer 240 kilómetros. ¿Cuántos galones necesita para recorrer 480 kilómetros?

- a) 6
- b) 8
- c) 10
- d) 12

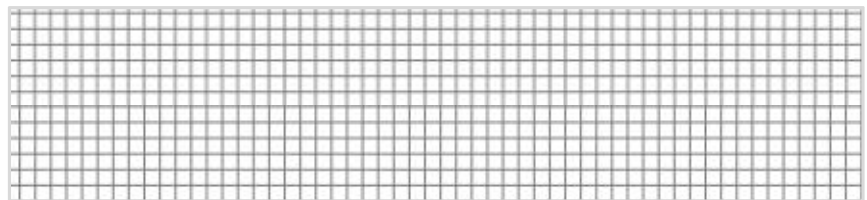


2. Observe la figura.



¿Cuál es la fracción que representa la figura?

- a) $\frac{1}{2}$
- b) $\frac{2}{5}$
- c) $\frac{5}{2}$
- d) $\frac{2}{1}$



RESPONDE LAS PREGUNTAS 3 Y 4 DE ACUERDO CON LA SIGUIENTE INFORMACIÓN

El reloj de la escuela marca las horas correctamente. Cuando Juan llegó a la escuela el reloj marcaba las 12 en punto.

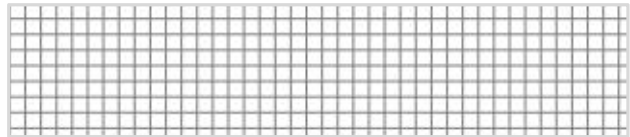


Cuando Juan salió al primer descanso miró el reloj y observó lo siguiente.



3. ¿Cuánto tiempo ha pasado desde que Juan llegó a la escuela?

- a) Media hora.
- b) Una hora y media
- c) Tres cuartos de hora.
- d) Una hora y cuarto.



4. Tres cuartos de hora después de que Juan llegó a la escuela, ¿Qué hora marcaba el reloj?

A.



B.



C.



D.

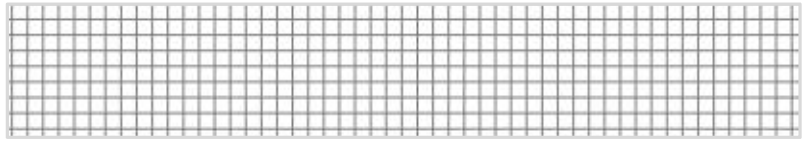


5. En la siguiente figura se representa las áreas que ocupan diferentes cultivos en un terreno:



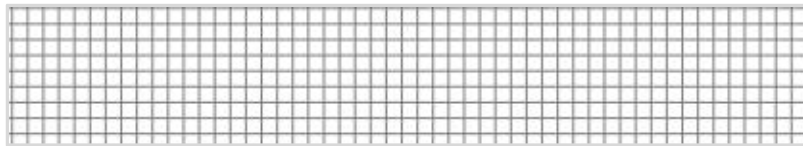
La zona de los claveles ocupa un área de 10.000 m^2 . El área total del terreno es:

- a) 10.000 m^2
- b) 30.000 m^2
- c) 50.000 m^2
- d) 60.000 m^2



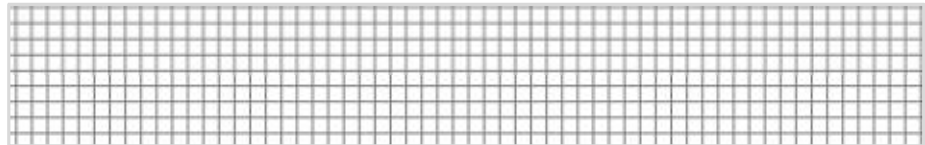
6. En un salón de clases, $\frac{3}{4}$ del total de estudiantes son niños. En el salón hay 10 niñas. ¿Cuántos estudiantes en total hay en el salón?

- a) 10
- b) 20
- c) 40
- d) 50



7. Pedro tenía algunos dulces guardados, se comió la mitad y regaló 2. Ahora tiene 4 dulces. ¿Cuántos dulces tenía guardados Pedro?

- a) 6
- b) 8
- c) 10
- d) 12



8. Para elaborar una tarjeta de felicitación, Marta dobló una hoja de papel por la mitad, como se indica a continuación:



Figura 1.

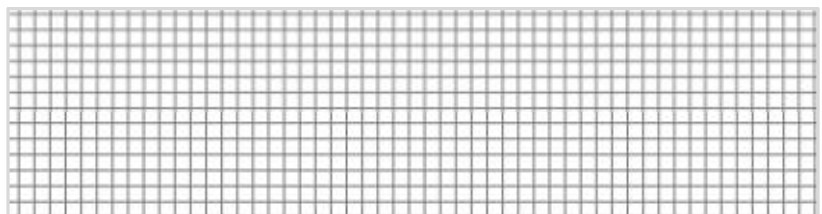


Figura 2.

La tarjeta tiene las medidas indicadas en la figura.

¿Cuáles son las medidas de los lados de la hoja que Marta dobló?

- a) 10 cm y 6 cm
- b) 20 cm y 24 cm
- c) 20 cm y 6 cm
- d) 10 cm y 12 cm

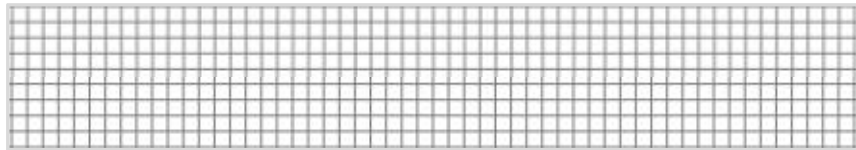


RESPONDE LAS PREGUNTAS 10 Y 11 DE ACUERDO CON LA SIGUIENTE INFORMACIÓN

Claudia compró varios metros de cinta, unos de color amarillo y otros de color azul.

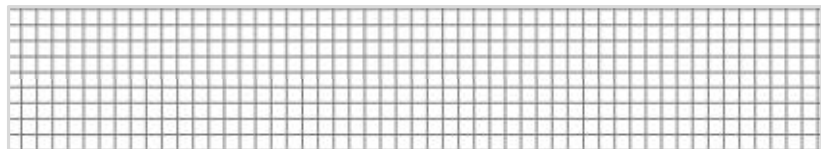
9. Con 15 metros de cinta amarilla, Claudia puede hacer 5 adornos del mismo tamaño, iguales, sin que sobre cinta. ¿Cuántos adornos del mismo tamaño de los amarillos puede hacer con 30 metros de cinta azul sin que sobre cinta?

- a) 3
- b) 5
- c) 10
- d) 15



10. Claudia tomó 12 metros de cinta amarilla y 20 metros de cinta azul y los cortó de forma que resultaran pedazos del mismo tamaño, no sobrara cinta y fueran de la mayor longitud posible. ¿Cuál es la longitud de cada pedazo?

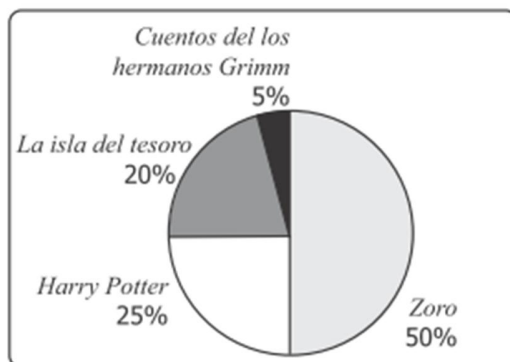
- a) 3 metros
- b) 4 metros
- c) 5 metros
- d) 6 metros



11. La profesora Diana les preguntó a 60 estudiantes de grado cuarto cuál de los siguientes libros preferían leer.

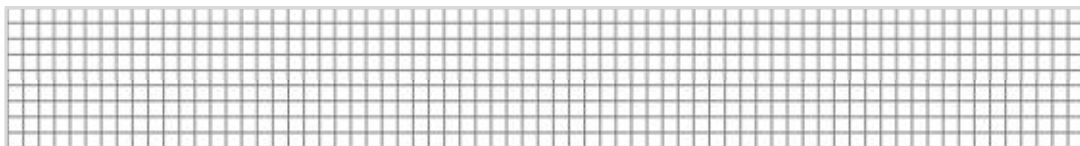
- *Zoro*
- *Harry Potter*
- *La isla del tesoro*
- *Cuentos de los hermanos Grimm.*

Con las respuestas obtenidas, la profesora Diana elaboró la siguiente gráfica:



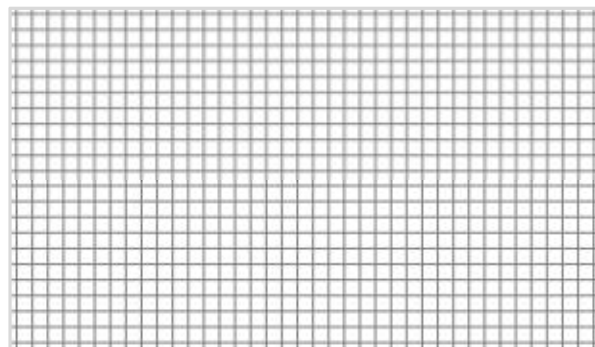
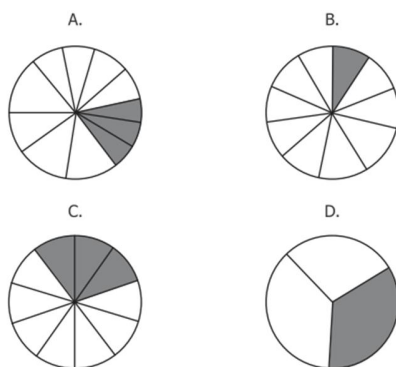
En la clase se leerán los libros escogidos por más de 10 estudiantes. ¿Cuáles son estos libros?

- a) *Zoro solamente*
- b) *Zoro y La isla del tesoro solamente*
- c) *Zoro, Harry Potter y la Isla del tesoro solamente.*
- d) *Zoro, Harry Potter, La isla del tesoro y Cuentos de los hermano Grimm.*



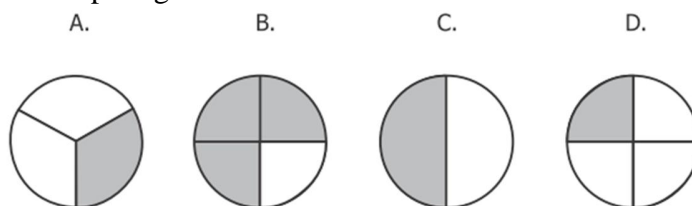
12. Para la fiesta de cumpleaños de Valeria se preparó una torta y se partió en 10 porciones iguales. Valeria se comió $\frac{3}{10}$ de su torta de cumpleaños.

¿En cuál de las siguientes gráficas se representan las porciones de torta que se comio Valeria?

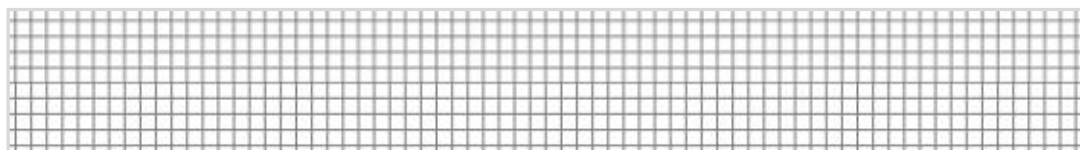


13. Las $\frac{3}{4}$ partes de la superficie del planeta Tierra están cubiertas por agua.

¿En cuál de las siguientes gráficas se representa la superficie del planeta Tierra cubierta por agua?



Superficie cubierta por agua



14. Observa el número de canicas que tienen Daniela, Juan y Rosita.



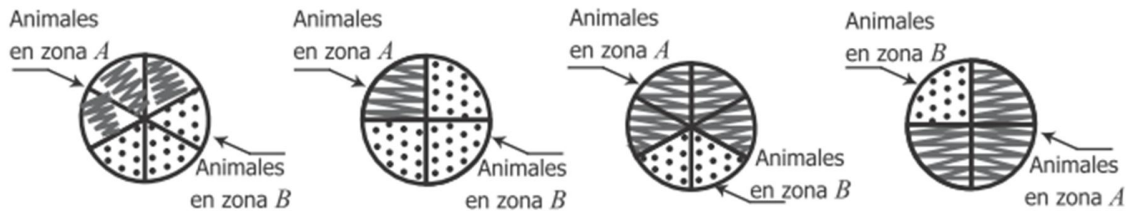
Daniela, Juan y Rosita reúnen todas las canicas y las reparten entre ellos en partes iguales. ¿Cuántas canicas le corresponden a cada uno?

- a) 1
- b) 2
- c) 3
- d) 4

RESPONDE LAS PREGUNTAS 15 Y 16 DE ACUERDO CON LA SIGUIENTE INFORMACIÓN.

En una finca hay 600 animales distribuidos en dos zonas, zona A y zona B. De los 600 animales, $\frac{4}{6}$ está en la zona A y el resto de los animales está en la zona B.

15. ¿Cuál diagrama representa correctamente la distribución de los animales en las dos zonas?



16. Si $\frac{1}{4}$ de los animales que estaba en la zona A pasó a la zona B, ¿Cuántas animales están ahora en la zona B?

- a) 100
- b) 150
- c) 300
- d) 400

Nombre: _____
 Grado: _____
 Institución: _____
 Edad: _____

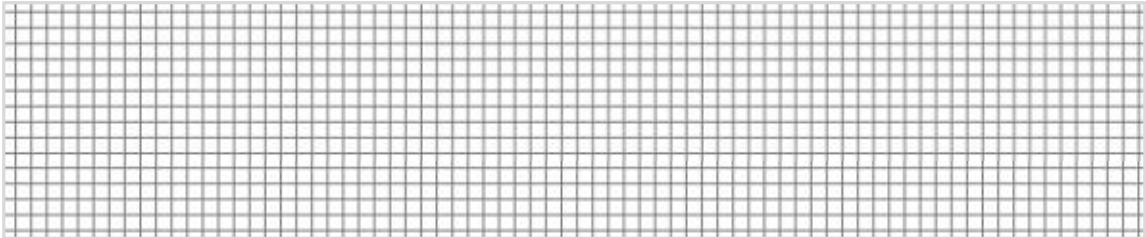
Anexo 2

Prueba de Matemáticas (p2)

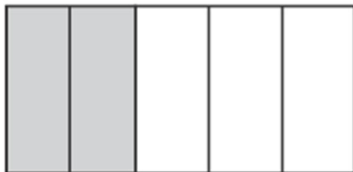
Lee detenidamente las instrucciones antes de iniciar la prueba

Cada ejercicio planteado tiene un espacio en el cual te solicitamos escribir los procedimientos que utilices para solucionarlo, puedes utilizar lápiz, si necesitas más espacio puedes utilizar el respaldo de la hoja, pero coloca el número de la pregunta que está respondiendo. Es muy importante que respondas todas las preguntas. Esta prueba es individual y por lo tanto no debes copiar de tus compañeros

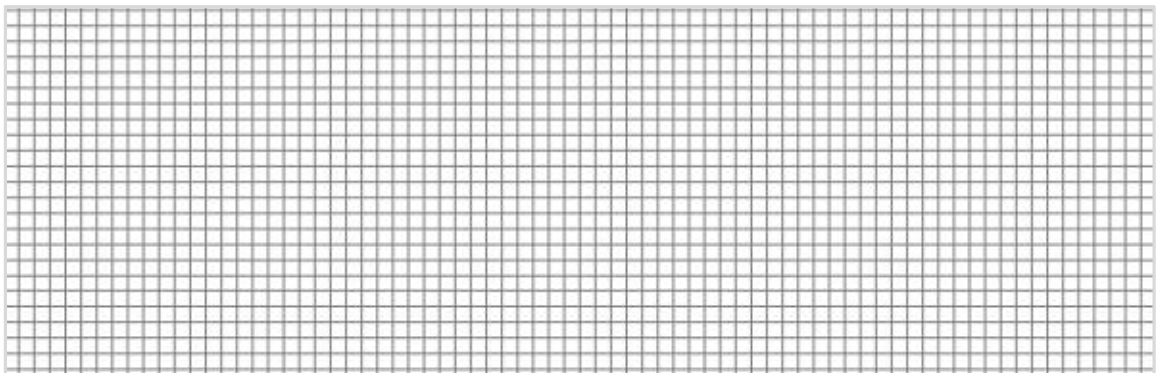
1. El auto de Jorge necesita 6 galones de gasolina para recorrer 240 kilómetros. ¿Cuántos galones necesita para recorrer 480 kilómetros?



2. Observe la figura.

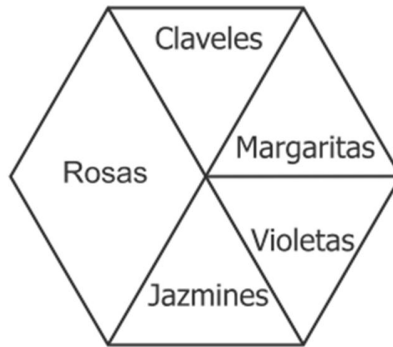


¿Cuál es la fracción que representa la figura?



RESPONDE LAS PREGUNTAS 3 Y 4 DE ACUERDO CON LA SIGUIENTE INFORMACIÓN

5. En la siguiente figura se representa las áreas que ocupan diferentes cultivos en un terreno:

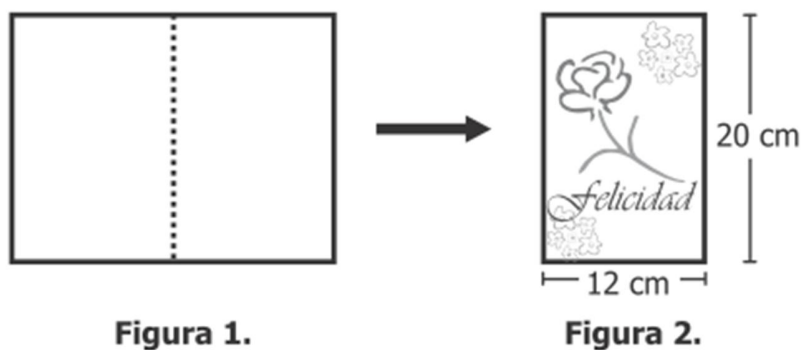


La zona de los claveles ocupa un área de 10.000 m^2 . El área total del terreno es:

6. En un salón de clases, $\frac{3}{4}$ del total de estudiantes son niños. En el salón hay 10 niñas. ¿Cuántos estudiantes en total hay en el salón?

7. Pedro tenía algunos dulces guardados, se comió la mitad y regaló 2. Ahora tiene 4 dulces. ¿Cuántos dulces tenía guardados Pedro?

8. Para elaborar una tarjeta de felicitación, Marta dobló una hoja de papel por la mitad, como se indica a continuación:



La tarjeta tiene las medidas indicadas en la figura.

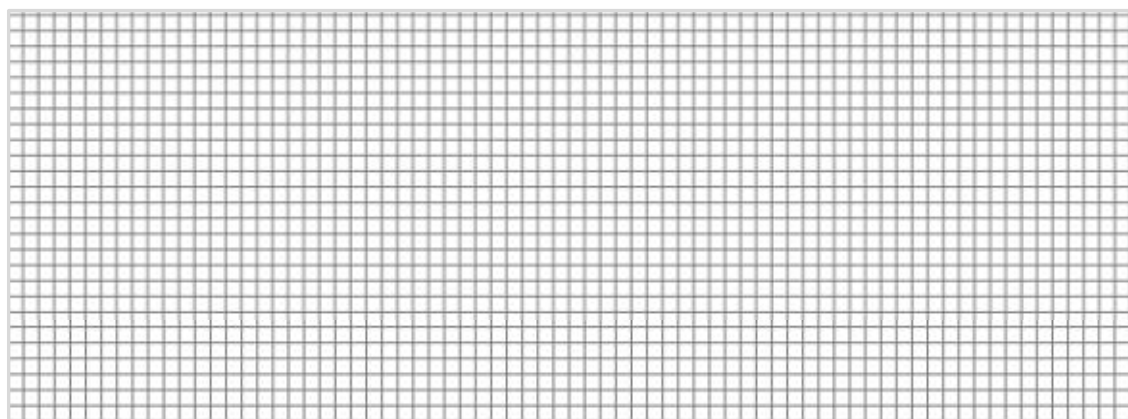


¿Cuáles son las medidas de los lados de la hoja que Marta dobló?

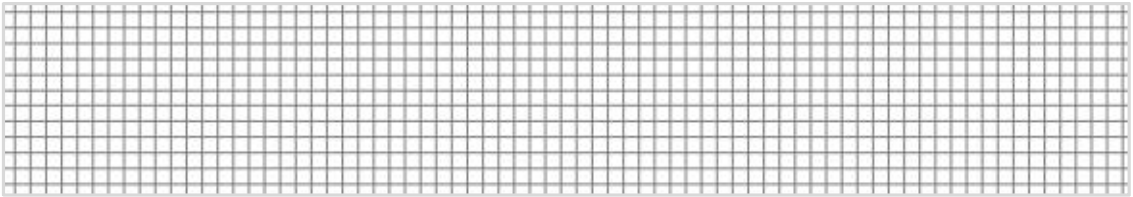
RESPONDE LAS PREGUNTAS 10 Y 11 DE ACUERDO CON LA SIGUIENTE INFORMACIÓN

Claudia compró varios metros de cinta, unos de color amarillo y otros de color azul.

9. Con 15 metros de cinta amarilla, Claudia puede hacer 5 adornos del mismo tamaño, iguales, sin que sobre cinta. ¿Cuántos adornos del mismo tamaño de los amarillos puede hacer con 30 metros de cinta azul sin que sobre cinta?



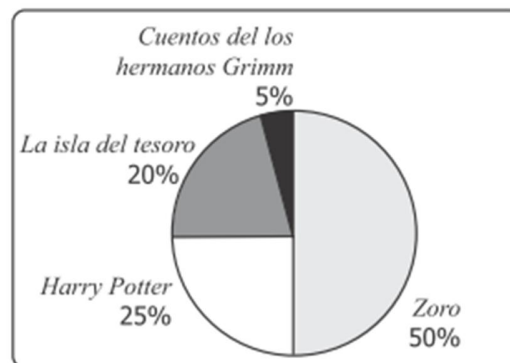
10. Claudia tomó 12 metros de cinta amarilla y 20 metros de cinta azul y los cortó de forma que resultaran pedazos del mismo tamaño, no sobrara cinta y fueran de la mayor longitud posible. ¿Cuál es la longitud de cada pedazo?



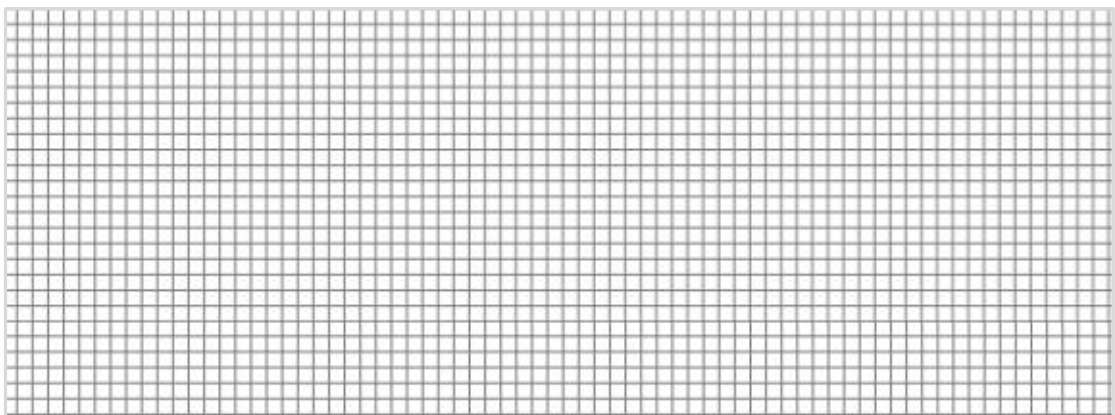
11. La profesora Diana les preguntó a 60 estudiantes de grado cuarto cuál de los siguientes libros preferían leer.

- *Zoro*
- *Harry Potter*
- *La isla del tesoro*
- *Cuentos de los hermanos Grimm.*

Con las respuestas obtenidas, la profesora Diana elaboró la siguiente gráfica:

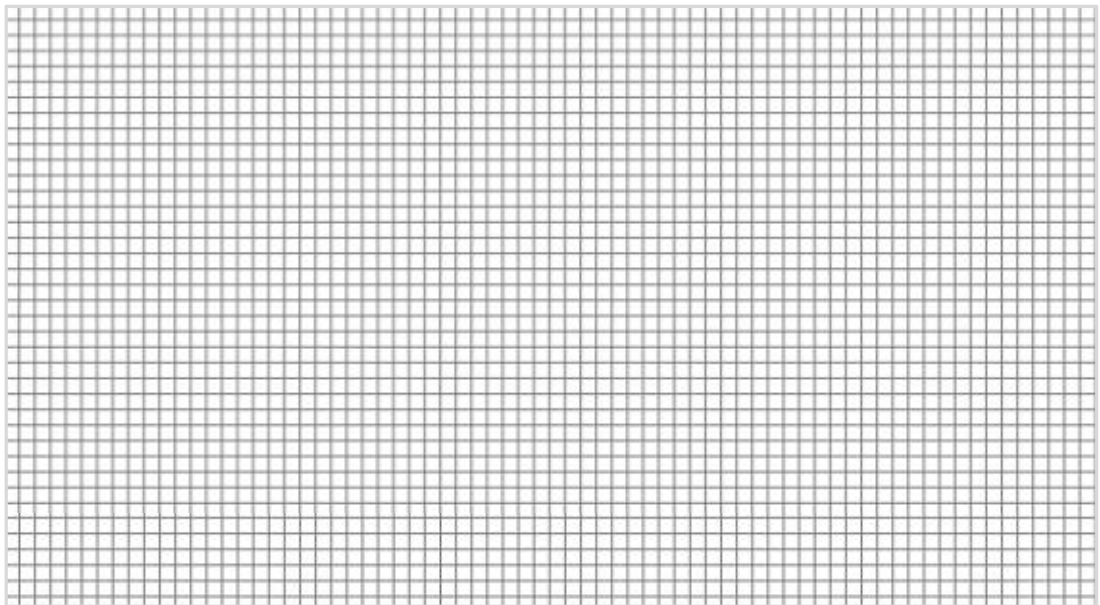
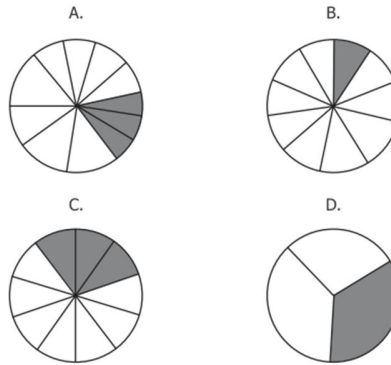


En la clase se leerán los libros escogidos por más de 10 estudiantes. ¿Cuáles son estos libros?



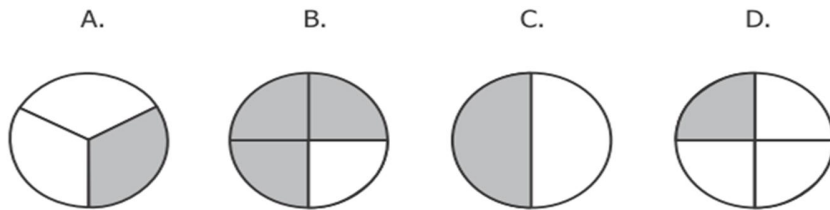
12. Para la fiesta de cumpleaños de Valeria se preparó una torta y se partió en 10 porciones iguales. Valeria se comió $\frac{3}{10}$ de su torta de cumpleaños.


¿En cuál de las siguientes gráficas se representan las porciones de torta que se comió Valeria?



13. Las $\frac{3}{4}$ partes de la superficie del planeta Tierra están cubiertas por agua.

¿En cuál de las siguientes gráficas se representa la superficie del planeta Tierra cubierta por agua?

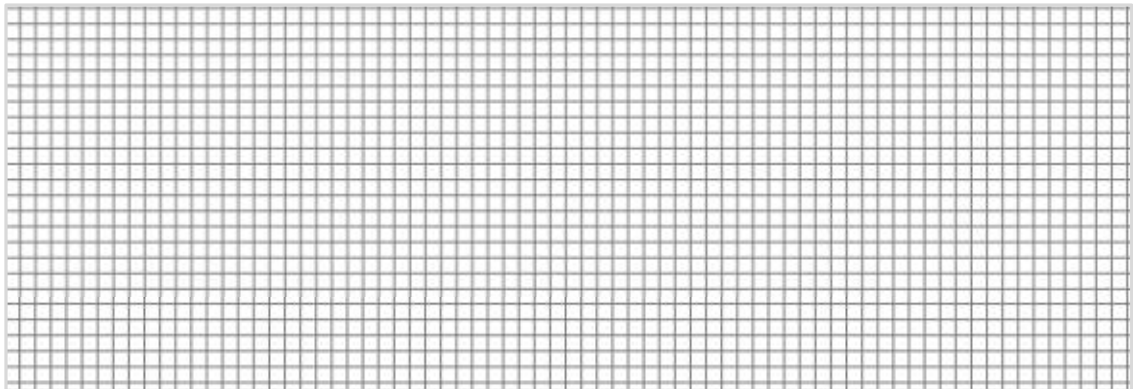


 Superficie cubierta por agua

14. Observa el número de canicas que tienen Daniela, Juan y Rosita.



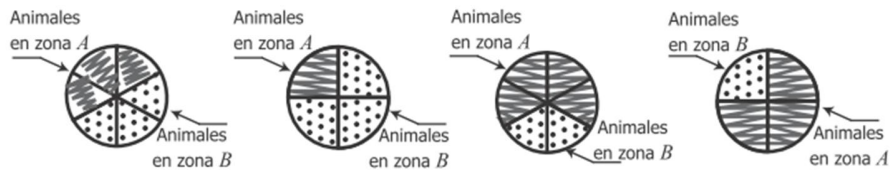
Daniela, Juan y Rosita reúnen todas las canicas y las reparten entre ellos en partes iguales. ¿Cuántas canicas le corresponden a cada uno?



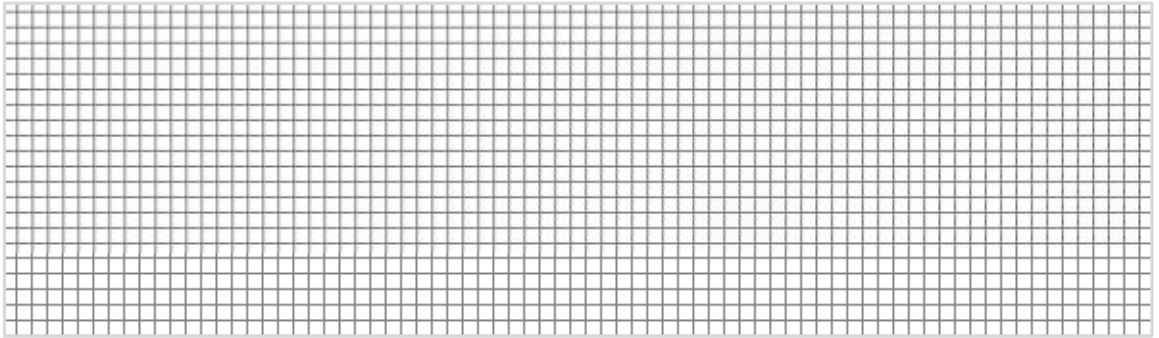
RESPONDE LAS PREGUNTAS 15 Y 16 DE ACUERDO CON LA SIGUIENTE INFORMACIÓN.

En una finca hay 600 animales distribuidos en dos zonas, zona A y zona B. De los 600 animales, $\frac{4}{6}$ está en la zona A y el resto de los animales está en la zona B.

15. ¿Cuál diagrama representa correctamente la distribución de los animales en las dos zonas?



16. Si $\frac{1}{4}$ de los animales que estaba en la zona A pasó a la zona B, ¿Cuántas animales están ahora en la zona B?



Nombre: _____

Grado: _____

Institución: _____

Edad: _____

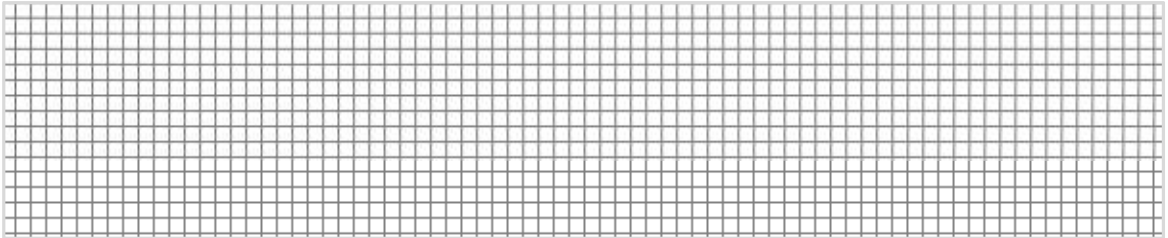
Anexo 3

Prueba de Matemáticas (p3)

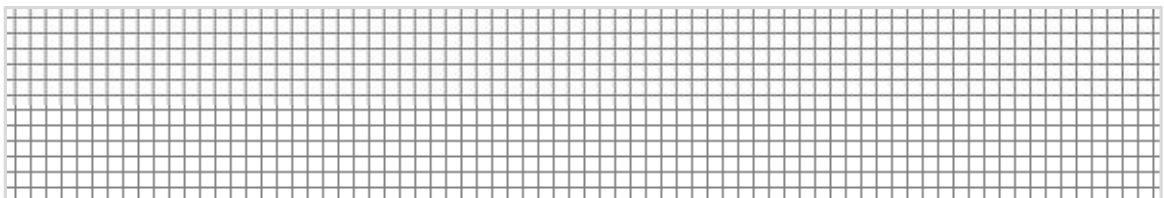
Lee detenidamente las instrucciones antes de iniciar la prueba

Cada ejercicio planteado tiene un espacio en el cual te solicitamos escribir los procedimientos que utilices para solucionarlo, puedes utilizar lápiz, si necesitas más espacio puedes utilizar el respaldo de la hoja, pero coloca el número de la pregunta que está respondiendo. Es muy importante que respondas todas las preguntas. Esta prueba es individual y por lo tanto no debes copiar de tus compañeros

1. El auto de Jorge necesita 6 galones de gasolina para recorrer 240 kilómetros. ¿Cuántos galones necesita para recorrer 480 kilómetros?



2. Representa la fracción $\frac{2}{5}$

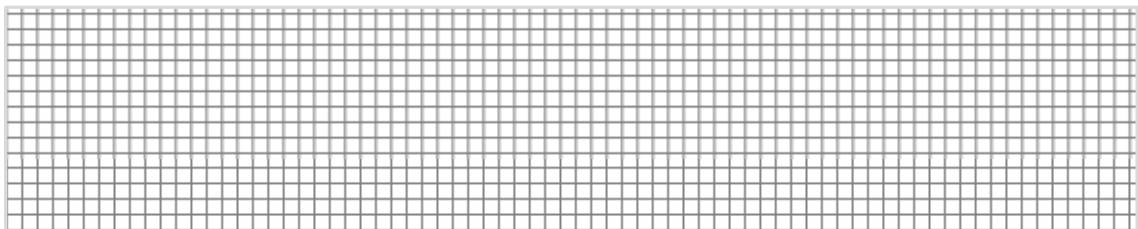


RESPONDE LAS PREGUNTAS 3 Y 4 DE ACUERDO CON LA SIGUIENTE INFORMACIÓN

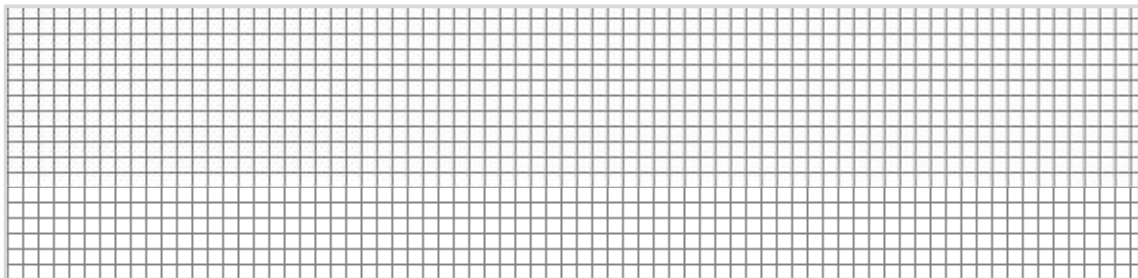
El reloj de la escuela marca las horas correctamente. Cuando Juan llegó a la escuela el reloj marcaba las 12 en punto.

Cuando Juan salió al primer descanso miró el reloj y observó que marcaba la una y cuarto.

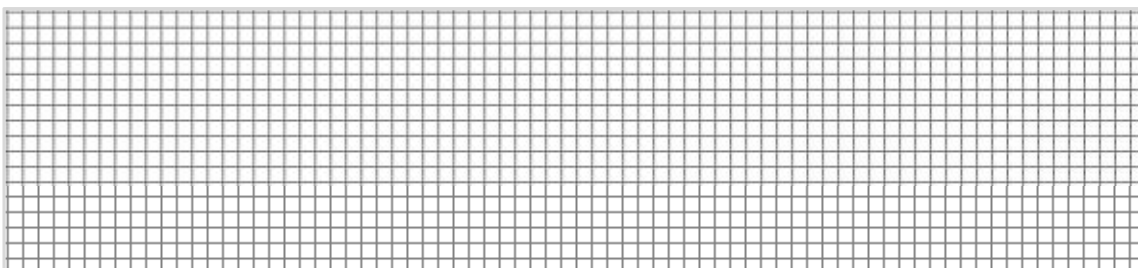
3. ¿Cuánto tiempo ha pasado desde que Juan llegó a la escuela?



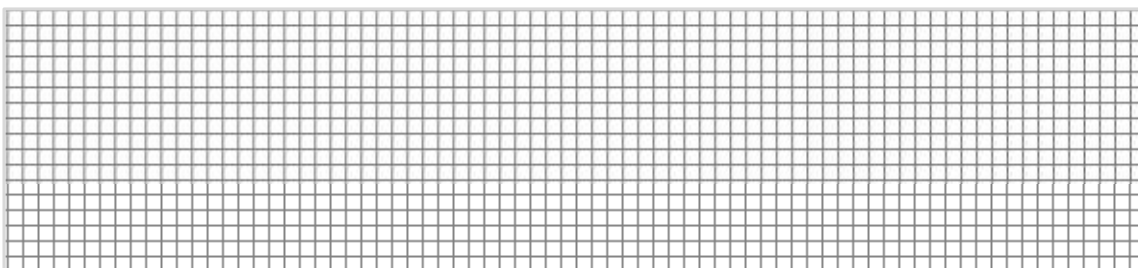
4. Tres cuartos de hora después de que Juan llegó a la escuela, ¿Qué hora marcaba el reloj?



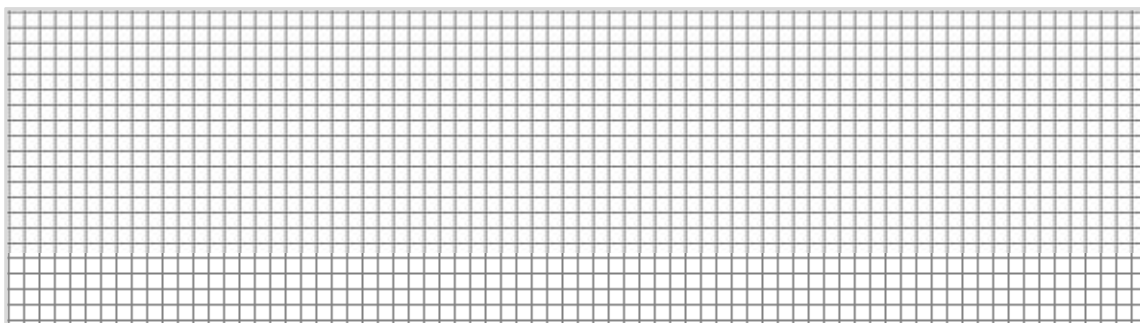
5. Un terreno tiene cinco cultivos de flores, cuatro de ellos de igual área (claveles, margaritas, violetas y jazmines); el otro cultivo, sembrado con rosas, ocupa el doble de área que los claveles. ¿Cuál es el área total del terreno si los claveles ocupan un área de 10.000 m²?



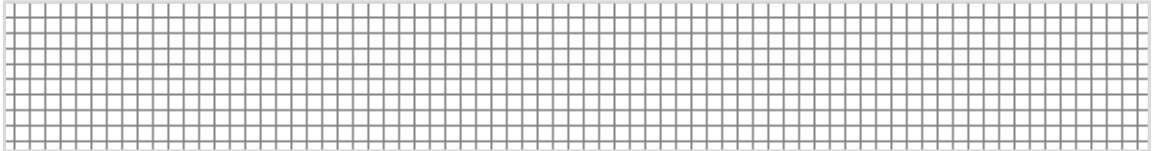
6. En un salón de clases, $\frac{3}{4}$ del total de estudiantes son niños. En el salón hay 10 niñas. ¿Cuántos estudiantes en total hay en el salón?



7. Pedro tenía algunos dulces guardados, se comió la mitad y regaló 2. Ahora tiene 4 dulces. ¿Cuántos dulces tenía guardados Pedro?



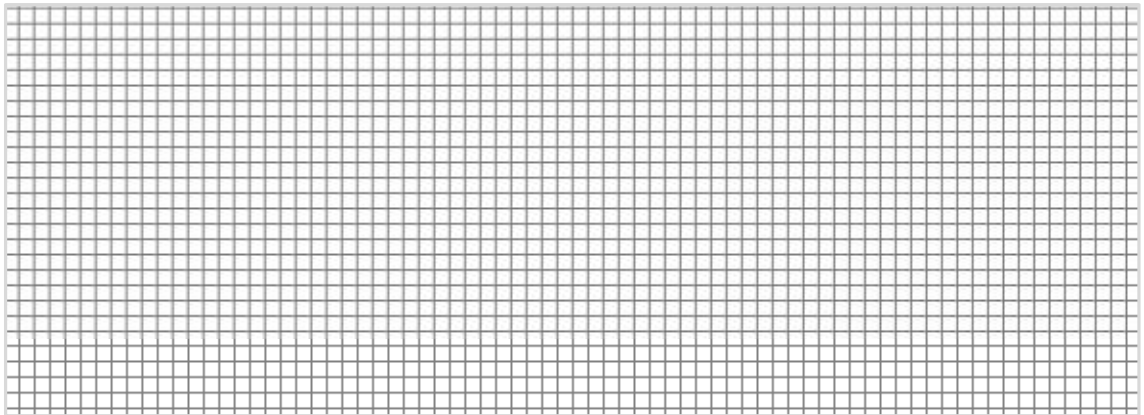
8. Para elaborar una tarjeta de felicitación, Marta dobló una hoja de papel por la mitad, las medidas de la tarjeta obtenida, luego del doblado, son de 12 cm de ancha y de 20 cm de larga. ¿Cuáles son las medidas de los lados de la hoja que Marta dobló?



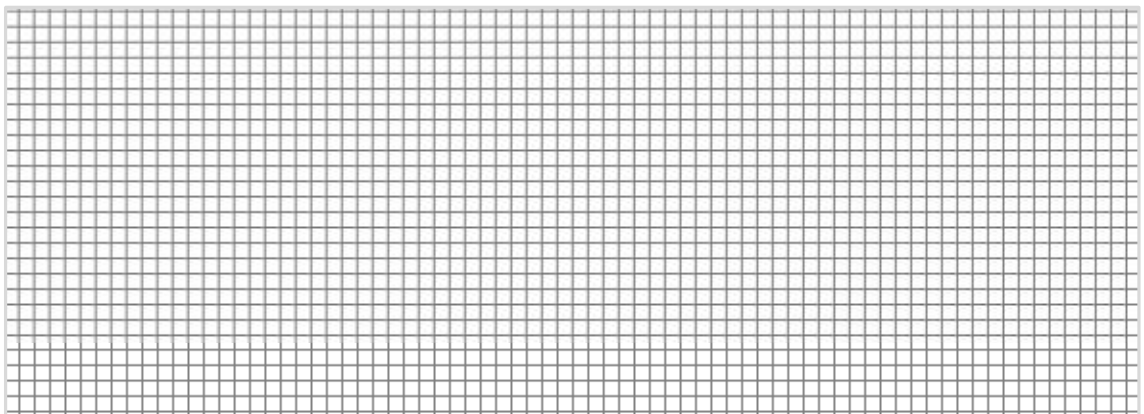
RESPONDE LAS PREGUNTAS 10 Y 11 DE ACUERDO CON LA SIGUIENTE INFORMACIÓN

Claudia compró varios metros de cinta, unos de color amarillo y otros de color azul.

9. Con 15 metros de cinta amarilla, Claudia puede hacer 5 adornos del mismo tamaño, iguales, sin que sobre cinta. ¿Cuántos adornos del mismo tamaño de los amarillos puede hacer con 30 metros de cinta azul sin que sobre cinta?



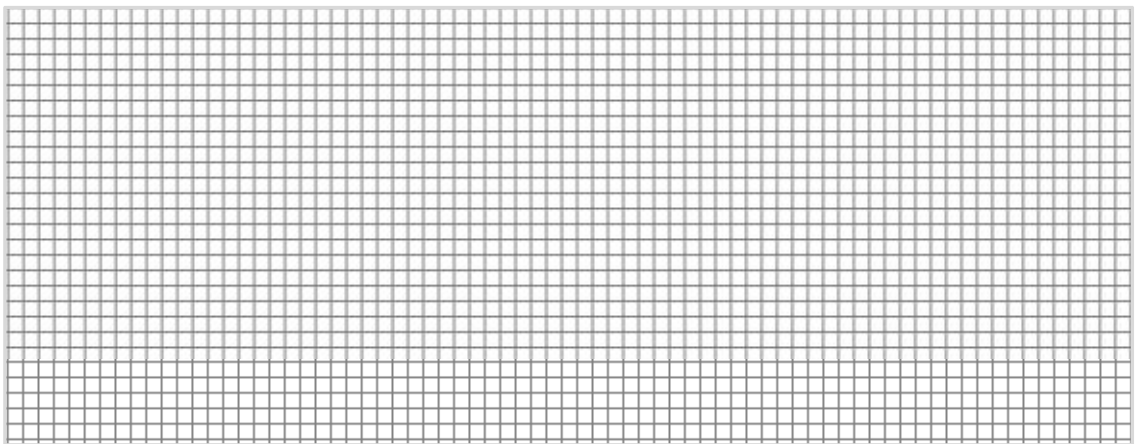
10. Claudia tomó 12 metros de cinta amarilla y 20 metros de cinta azul y los cortó de forma que resultaran pedazos del mismo tamaño, no sobra cinta y fueran de la mayor longitud posible. ¿Cuál es la longitud de cada pedazo?



11. La profesora Diana les preguntó a 60 estudiantes de grado cuarto cuál de los siguientes libros preferían leer. Las respuestas obtenidas fueron:

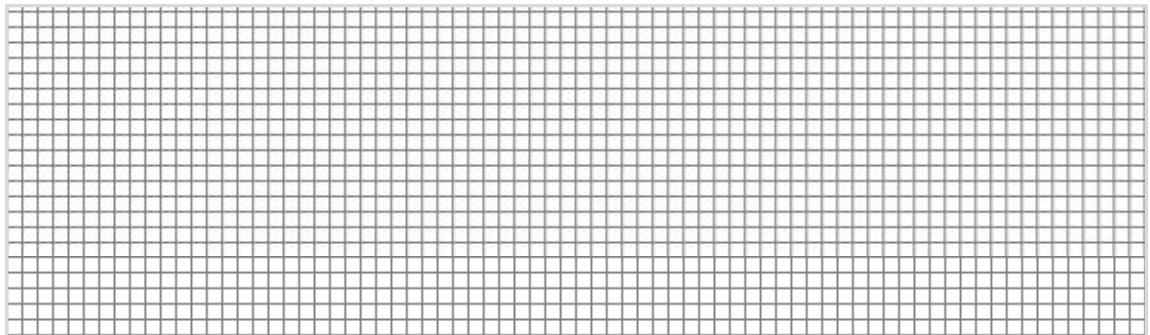
- *Zoro* 50%
- *Harry Potter* 25%
- *La isla del tesoro* 20%
- *Cuentos de los hermanos Grimm*. 5%

En la clase se leerán los libros escogidos por más de 10 estudiantes. ¿Cuáles son estos libros?



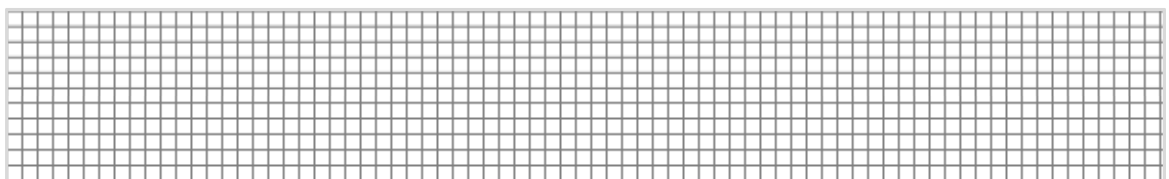
12. Para la fiesta de cumpleaños de Valeria se preparó una torta y se partió en 10 porciones iguales. Valeria se comió $\frac{3}{10}$ de su torta de cumpleaños.

Haga una gráfica donde se represente la torta indicando las porciones que comió.

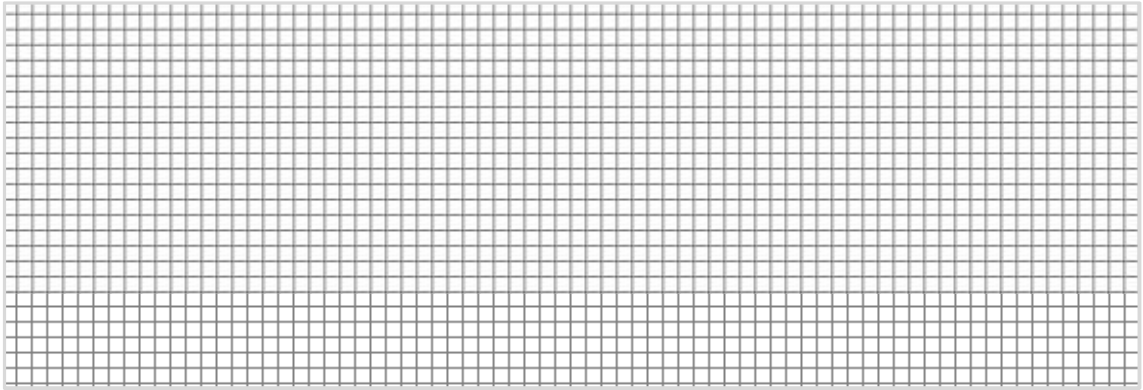


13. Las $\frac{3}{4}$ partes de la superficie del planeta Tierra están cubiertas por agua.

Haga una gráfica que represente la superficie del planeta Tierra, indicando la parte que ésta cubierta por agua.



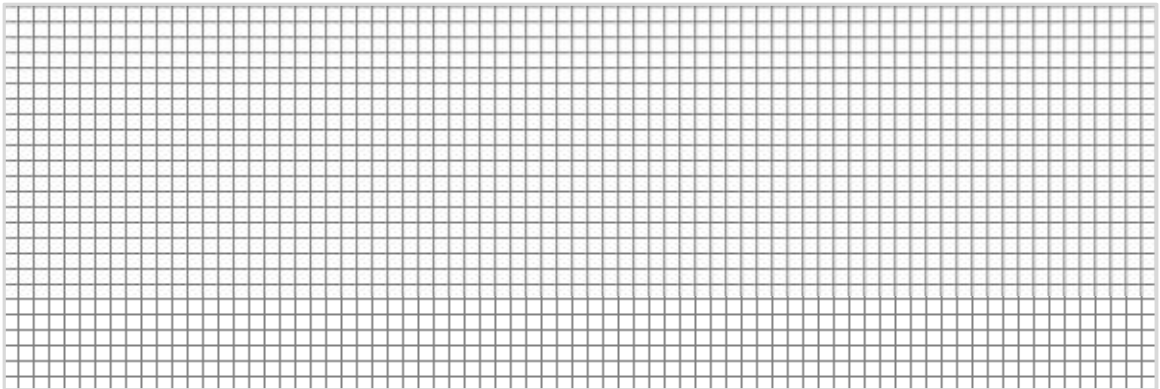
14. Daniela tiene 4 canicas, Juan 1 canica y Rosita 1 canica. Daniela, Juan y Rosita reúnen todas las canicas y las reparten entre ellos en partes iguales. ¿Cuántas canicas le corresponden a cada uno?



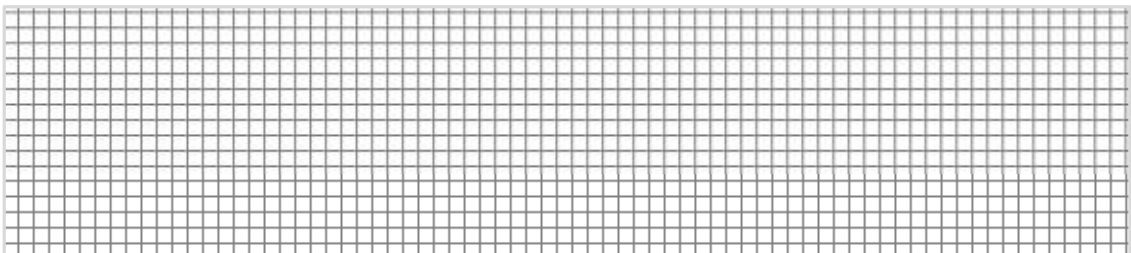
RESPONDE LAS PREGUNTAS 15 Y 16 DE ACUERDO CON LA SIGUIENTE INFORMACIÓN.

En una finca hay 600 animales distribuidos en dos zonas, zona A y zona B. De los 600 animales, $\frac{4}{6}$ está en la zona A y el resto de los animales está en la zona B.

15. Realice un diagrama donde se represente correctamente la distribución de los animales en las dos zonas.



16. Si $\frac{1}{4}$ de los animales que estaba en la zona A pasó a la zona B, ¿Cuántas animales están ahora en la zona B?



Nombre: _____

Grado: _____

Institución: _____

Edad: _____