



UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA  
NACIONAL  
*Educadora de educadores*

**MONOGRAFÍA DE PREGRADO:  
ESTRUCTURA CAUSAL DE LA SOLUCIÓN DE KERR.**

**AUTOR:**

**LUIS ESTEBAN HERNÁNDEZ CRISTANCHO.**

**UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL U.P.N**

**FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA**

**LICENCIATURA EN FÍSICA.**

**BOGOTÁ D.C**

**MAYO DE 2017**



**UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA  
NACIONAL**  
*Educadora de educadores*

**MONOGRAFÍA DE PREGRADO:  
ESTRUCTURA CAUSAL DE LA SOLUCIÓN DE KERR.**

**AUTOR:**

**LUIS ESTEBAN HERNÁNDEZ CRISTANCHO.**

**Documento de Monografía para optar al título de Licenciado en Física**

**DIRIGIDO POR:**

**YESID JAVIER CRUZ BONILLA.**

**UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL.**

**FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA**

**DEPARTAMENTO DE FÍSICA.**

**LÍNEA DE PROFUNDIZACIÓN:**

**LA ENSEÑANZA DE LA FÍSICA Y LA RELACIÓN FÍSICO MATEMÁTICA.**

**BOGOTÁ D.C**

**2017**

## **Dedicatoria**

*Este trabajo va dedicado principalmente a mi familia que con su apoyo incondicional y desinteresado, lograron que esto fuera posible.*

## **Agradecimientos**

*En mi opinión considero que es bastante complicado lograr agradecer a todas las personas que directa o indirectamente han contribuido a formar la persona que soy ahora. Sin embargo, quiero enunciar algunas de ellas, sabiendo que he dejado de un lado a muchas otras. A estas personas, les agradezco mucho.*

*En primera instancia quiero agradecer a Dios, por ser la guía, orientación y horizonte fundamental de mi vida. En segunda instancia, quiero agradecer a mis padres Luis Álvaro Hernández y Ghizell Cristancho por sus consejos, su experiencia, su sabiduría y apoyo incondicional en todo momento, sin ustedes no sería el ser humano que soy ahora. Quiero agradecer también a mis hermanos Karol y Felipe por compartir momentos de felicidad y de tristeza juntos. Los quiero. Es imposible dejar por fuera de estos agradecimientos a mi mejor amigo Kevin Correa, el cual se convirtió en mi parcerero, mi confidente, mi compañero de anécdotas, mi otro hermano.*

*Por otra parte, quiero agradecer al profesor Yesid Cruz, por sus consejos, su sabiduría y su paciencia. Es usted un gran profesor.*

*Finalmente, quiero agradecer profundamente a la Universidad Pedagógica Nacional, particularmente al Departamento de Física por la formación y el apoyo recibido durante estos años de carrera. Agradecer a mis profesores, que contribuyeron significativamente en mi crecimiento como ser humano y como profesional.*

# RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE

1. Información General	
<b>Tipo de documento</b>	Trabajo de grado
<b>Acceso al documento</b>	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
<b>Título del documento</b>	Estructura causal de la solución de Kerr
<b>Autor(es)</b>	Hernández Cristancho, Luis Esteban
<b>Director</b>	Cruz Bonilla, Yesid Javier
<b>Publicación</b>	Bogotá, Universidad Pedagógica Nacional, 2017. 64p.
<b>Unidad Patrocinante</b>	Universidad Pedagógica Nacional
<b>Palabras Claves</b>	CAUSALIDAD, ESPACIO/TIEMPO, TEORÍA GENERAL DE LA RELATIVIDAD, ECUACIONES DE CAMPO DE EINSTEIN, SOLUCIÓN DE KERR.

2. Descripción
<p>La noción de causalidad, es uno de los conceptos que ha sido ampliamente estudiado, investigado y debatido por múltiples filósofos, físicos y matemáticos destacados desde la antigüedad, con el objetivo de lograr demostrar uno de los principios fundamentales que permite explicar el hecho de buscar relaciones entre las cosas, específicamente entre las acciones y sus consecuencias. Desde el contexto de la física particularmente, dicho concepto constituye un referente teórico indispensable en la explicación de los diversos fenómenos naturales, por tal razón es que este merece ser estudiado y analizado a manera de reflexión en el presente trabajo de investigación.</p> <p>En ese orden de ideas, el presente trabajo tiene como objetivo fundamental realizar un análisis comparativo, acerca del concepto de causalidad, desde el contexto clásico Newtoniano y desde el contexto de la Teoría Especial y General de la Relatividad, considerando la configuración del espacio/tiempo como un concepto indispensable en el comportamiento de la causalidad.</p>

3. Fuentes
<p>[1] Álvarez Toledo Sebastián. (2008). Causalidad y tiempo: el sentido de una reducción. Teorema, XVII, 29-42.</p> <p>[2] Arenas, Juan Sebastián (2014), <i>Termodinámica de agujeros negros</i> (tesis de pregrado), Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá D.C, Colombia.</p> <p>[3] Carnap Rudolf. (1969). Causalidad y determinismo. En <i>Fundamentación lógica de la física</i> (249-296). Buenos Aires: Sudamericana.</p>

- [4] Davies Paul. (1995). Sobre el tiempo: la revolución inacabada de Einstein. Madrid: Crítica.
- [5] D'Inverno Ray. (1992). Introducing Einstein's Relativity. New York: Oxford University.
- [6] De Gortari Eli. (1960). Causalidad y determinismo. *Diánoia*, VI, 22-43.
- [7] Fernández, Guillermo (2015), *Órbitas materiales en agujeros negros* (tesis de pregrado), Universidad de Murcia, Murcia, España.
- [8] Fonseca, Diego Fernando (2016), *Horizontes de eventos del espacio-tiempo de Kerr* (tesis de maestría), Universidad Nacional de Colombia, Bogotá D.C, Colombia.
- [9] French. (1974). Relatividad Especial, Curso de física del MIT (Massachusetts Institute of Technology). New York: Reverté S.A.
- [10] Gamow George. (1971). Biografía de la física. Madrid: Alianza Editorial.
- [11] Granés Sellares José. (2005). Isaac Newton Obra y contexto. Una introducción. Bogotá D.C: Editorial.Ltda.
- [12] Hawking Stephen. (1977). Historia del tiempo "Del Big Bang a los agujeros negros". Cambridge University: Crítica.
- [13] Hawking.S & Ellis,G. (1973). The Large Scale Structure of Space-Time. Cambridge University: Cambridge University Press.
- [14] Hobson M.P, Estathiou G.P & Lasenby A. (2006). General Relativity An introducing for phisicists. London: Cambridge University Press.
- [15] Janssen Bert. (2013). Teoría General de la Relatividad. Granada: Universidad de Granada - España, Departamento de física teórica y del cosmos.
- [16] Kaufmann, W. (1977). Relatividad y Cosmología. London: Copyright.
- [17] Kerr, R.P. (1963). Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics. *Physical Review Letters*, II, 237-238.
- [18] Larrañaga, Edward. (2008). Agujeros Negros Clásicos. Bogotá D.C: Universidad Nacional de Colombia.
- [19] Minkowski Hermann. (1908). Space and Time: Minkowski Papers on Relativity. Moscú: Minkowski Institute Press.
- [20] Misner,C , Thorne.K & Wheeler.J. (1973). Gravitation. New York: W. H Freeman and Company.
- [21] Newman E.T & Janis A.I, \Note on the Kerr Spinning- Particle Metric," *J. Math. Phys.* 6, 915-7 (1965).
- [22] Nagel, Ernest. (2006). La estructura de la Ciencia - Problemas de la lógica de la investigación científica. Barcelona: Paidós.
- [23] Newton, Isaac. (1983). Principios matemáticos de la filosofía natural, Madrid: Alianza Editorial.

- [24] Pacheco C. & Pulido A.(2001), *Análisis formal de los conceptos de espacio y tiempo*, Universidad Pedagógica Nacional (tesis de Pregrado), Bogotá D.C, Colombia.
- [25] Pérez, Daniela (2016), *Agujeros negros astrofísicos* (tesis de doctorado en astronomía), Universidad Nacional de la Plata, Buenos Aires, Argentina.
- [26] Pérez Potayos José. (2016). Tipos de agujeros negros. 15 de abril 2017, de Universidad de Granada: Departamento de física y del cosmos Sitio web: <http://www.ugr.es/~bjanssen/text/TFGPerezPoyatos.pdf>
- [27] Quintana, Hernán (2004). *Espacio, Tiempo y Universo*. Tomo II, Ediciones Universidad Católica de Chile.
- [28] Ranea, Ignacio Francisco (2015), *Perturbaciones al espacio/tiempo de Kerr y Conjetura de Censura Cósmica* (tesis de doctorado en astronomía), Universidad Nacional de la Plata, Buenos Aires, Argentina.
- [29] Retolaza, A. (2011). ¿Induce a error el principio de causalidad? Norte de salud mental, IX, 72-89. 18 de octubre 2016, De Dial net Base de datos.
- [30] Rodríguez, Miguel Ángel (2012), *Estructura causal en el universo cosmológico de Godel (tesis de pregrado)*, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá D.C, Colombia.
- [31] Sepúlveda, Alonso (2003). *Los conceptos de la física. Evolución Histórica.* . Medellín: Universidad de Antioquía.
- [32] Schwarzschild, Karl, (1916). *Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie. Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften*. Vorgelegt von , I, 189-196.
- [33] Tejeiro, Juan Manuel. (2004). *Sobre la teoría especial de la relatividad*. Bogotá D.C: Universidad Nacional de Colombia - Unibiblos.
- [34] Tejeiro, Juan Manuel. (2005). *Notas de clase: Principios de Relatividad General*, Bogotá D.C: Universidad Nacional de Colombia - Unibiblos.
- [35] Thorne, Kip. (1995). *Agujeros negros y tiempo curvo*. Barcelona: Crítica.
- [36] Varela, Olga Lucía. (2005). *Causalidad y Mecánica Cuántica*. Versiones, IV, 1-6.
- [37] Vélez, Fabio. (2012). *Apuntes de Relatividad*. Bogotá D.C: Corcas Editores SAS.

#### 4. Contenidos

La presente monografía se compone de cuatro capítulos en los cuales se dará estudio al concepto de causalidad.

##### **Capítulo 0: Contextualización del problema.**

Este capítulo está orientado a presentar y exponer el planteamiento del problema de investigación. Inicialmente se realiza un contexto problemático en donde se introduce al lector en la problemática y

posteriormente se formula la pregunta problema que se desea resolver. Con base en lo anterior, se formula el objetivo general y los objetivos específicos de la monografía.

### **Capítulo I: Introducción a la causalidad en la Teoría Especial de la Relatividad.**

El primer capítulo está orientado a explicar la causalidad desde el contexto clásico Newtoniano, realizando inicialmente una breve introducción entorno ha dicho concepto como punto de partida, para luego abordar los conceptos de espacio y tiempo Newtoniano. Posteriormente se estudia la causalidad desde el contexto de la Teoría Especial de la Relatividad, considerando la caracterización de su espacio/tiempo y el cono de luz como referentes teóricos fundamentales en la explicación de las relaciones causales.

### **Capítulo II: La causalidad en la Teoría General de la Relatividad.**

El segundo capítulo, está orientado a realizar un análisis de la causalidad desde el contexto de la Teoría General de la Relatividad, explicando en primera instancia las ecuaciones de campo de Einstein como el concepto más importante de dicha teoría. Luego, se construye una explicación entorno a qué se entiende por estructura causal desde la Relatividad General, en aras de explicar la primera solución exacta de las ecuaciones de campo de Einstein propuesta en 1916, la solución de Schwarzschild, la cual constituye un concepto base en la descripción y análisis de la causalidad de la solución de Kerr. En dicha solución se resalta la caracterización de la misma, es decir la configuración del espacio/tiempo y posteriormente el comportamiento de los conos de luz o estructura causal.

### **Capítulo III: Descripción de la solución de Kerr.**

En el tercer capítulo, se realiza la caracterización del objeto de estudio principal del trabajo; la solución de Kerr que corresponde a una solución exacta de las Ecuaciones de campo de Einstein descubierta por el físico y matemático Neozelandés Roy P. Kerr en 1963 (Kerr, 1963). En dicho capítulo, se resaltan las características y propiedades fundamentales de la misma tales como: la métrica, las singularidades, los horizontes, la ergósfera, el límite estacionario, etc.

### **Capítulo IV: Análisis de la causalidad.**

En el último capítulo, se realiza un análisis a modo comparativo de la causalidad, comenzando con una corta reflexión acerca de los modelos de causalidad estudiados en los capítulos anteriores, para así analizar la estructura causal en la solución de Kerr. Finalmente, se realizaron unos cuadros comparativos de todos los modelos estudiados para así establecer las respectivas conclusiones del trabajo de investigación, las cuales se encuentran orientadas a encontrar las diferencias que se establecen en torno a la causalidad entre el contexto clásico Newtoniano y la solución de Kerr de la Relatividad General, a resaltar la importancia que adquiere el carácter absoluto de la velocidad de la luz en la interpretación de las relaciones y conexiones causales desde el contexto relativista que difieren del contexto clásico Newtoniano y finalmente a explicar que bajo el contexto de la Teoría General de la Relatividad **TGR** existen múltiples estructuras causales, considerando esta como las trayectorias que describen las partículas masivas y la luz (comportamiento de los conos de luz).

## **5. Metodología**

La Metodología con la cual se orientó el trabajo de investigación, va enfocada directamente desde un contexto problema, en donde se formula una pregunta que guíe la investigación de manera lógica y coherente, a través de un análisis descriptivo y explicativo, con el fin de obtener una mayor riqueza en la información y su interpretación (Hernández Sampieri, Fernández Collado, & Baptista Lucio, 1991), teniendo



en cuenta que el presente trabajo está orientado para que el estudiante fortalezca y profundice acerca de los conceptos fundamentales que orientan la Teoría General de la Relatividad.

La presente monografía fue estructurada en cuatro fases, que obedecen de manera óptima y eficaz la metodología mencionada anteriormente. Estas fases son:

**Fase 1:** Recopilación de información del fenómeno físico a estudiar, para nuestro caso particular el estudio de la causalidad desde el contexto clásico Newtoniano y la solución de Kerr relativista.

**Fase 2:** Identificación del problema teórico que se quiere investigar, en aras de construir un objetivo general y unos objetivos específicos que se irán desarrollando paulatinamente durante la monografía.

**Fase 3:** Construcción de un marco teórico consistente que se encuentre en coherencia con los antecedentes históricos sobre el tema, acudiendo en lo posible a fuentes primarias como los artículos originales de los autores, etc. Este a su vez se debe ir desarrollando entorno a los objetivos específicos propuestos.

**Fase 4:** Establecer las respectivas conclusiones del trabajo de investigación. En estas se da respuesta al objetivo general de la monografía y se reflexiona entorno al trabajo y a los objetivos específicos propuestos.

## 6. Conclusiones

**a.** Considerando que las configuraciones espacio/temporales sí afectan el comportamiento de la causalidad. Las diferencias encontradas entorno a dicho concepto entre el contexto clásico Newtoniano y la solución de Kerr de la Relatividad General son: Inicialmente, si se tiene en cuenta los conceptos de espacio y tiempo desde el contexto clásico Newtoniano específicamente, vemos que bajo esta perspectiva dichos conceptos son independientes el uno del otro, como consecuencia de que estos presentan un carácter absoluto, único y universal para todo los observadores, donde sus relaciones de causalidad obedecen exclusivamente el principio causal del tiempo, en el cual las causas preceden a sus efectos y que para la conexión causal entre dos eventos en dicho espacio/tiempo, considerando la ley de gravitación universal Newtoniana, debe ser instantánea, es decir, que se debe considerar una velocidad de la señal infinita. No obstante, con el segundo postulado de la Relatividad acerca de la constancia de la velocidad de la luz para cualquier marco o sistema de referencia, las características del espacio y tiempo cambian drásticamente, al considerar dichas entidades intrínsecamente dependientes, generando así el nuevo concepto de espacio/tiempo, lo que en consecuencia se considera que las conexiones causales también cambian al considerar que para que dos eventos se encuentren conectados causalmente la velocidad de la señal que los conecte debe ser menor o igual a la de la luz. Teniendo en cuenta, lo anteriormente escrito, desde el campo de la Relatividad general, particularmente desde la solución de Kerr, se observa que la configuración del espacio/tiempo es producida por la curvatura por un objeto astronómico de masa  $m$  que rota sobre su eje de simetría. En dicha solución se evidencia que esta adquiere unas características particulares tales como: horizontes de eventos, singularidades, etc. que hace que dicha solución presente un comportamiento de los conos de luz completamente distinto al espacio y tiempo Newtoniano, ya que la estructura causal de dicha solución se debe analizar a partir de regiones particulares donde esta es regular, tal y como se evidenció en el análisis realizado para la solución de Kerr Relativista.

**b.** El carácter absoluto que adquiere la velocidad de la luz, desde el contexto de la relatividad, es fundamental y de vital importancia en el análisis de la causalidad de los eventos, ya que las relaciones y conexiones causales específicamente a partir de dicho descubrimiento presentan algunas divergencias con

respecto a la concepción Newtoniana. En el espacio/tiempo Newtoniano las relaciones de causalidad obedecen el principio causal del tiempo, en el cual las causas preceden a sus efectos y sus conexiones causales se conciben de acuerdo a la ley de gravitación universal como un acción instantánea, es decir, que la señal que conecte dos posibles eventos en dicho espacio/tiempo debe poseer una velocidad infinita. Sin embargo, con el postulado de la constancia de la velocidad de la luz, las relaciones de causalidad a pesar de que obedecen en primera instancia el principio causal del tiempo, dicho principio sufre una pequeña modificación con respecto a la concepción clásica y es que todos los observadores presentan un cono de luz pasado y futuro que representaría la historia espacio/temporal de dicho evento, en el cual sus vértices serían la máxima velocidad a la cual estos podrían llegar a moverse, la velocidad de la luz  $c$ . En ese orden de ideas, para que un evento A sea causa de un evento B es que B se encuentre dentro del cono de luz futuro de A. Cabe resaltar, que dicho principio enunciado anteriormente se generaliza al contexto de espacio/tiempos curvos en el caso de la relatividad general (solución de Schwarzschild, solución Kerr, etc.), al considerar que un evento A sea causa de un evento B, es que B se encuentra dentro del cono de luz futuro curvado de A.

**c.** Teniendo en cuenta las conclusiones escritas anteriormente, se puede evidenciar, que bajo el contexto de la Teoría General de la Relatividad existen múltiples estructuras causales, las cuales surgen de la curvatura espacio/temporal que producen la distribución de masas particulares en el espacio/tiempo. Cabe resaltar que se hace referencia a estructura causal al comportamiento de los conos de luz, los cuales se obtienen de las trayectorias que realizan los haces de luz y las partículas masivas en el espacio/tiempo. Si se considera el caso específico de las soluciones de Schwarzschild y Kerr, estas son producidas por objetos astronómicos que distorsionan el espacio/tiempo, donde la configuración que adquiere cada una de estas soluciones es singular. Las propiedades que se obtienen a partir de la descripción de dichos espacio/tiempo son: singularidades, horizontes de eventos, etc. Como se analizó en la construcción de la investigación, estos últimos juegan un papel indispensable en la descripción de la causalidad de cada una de las soluciones.

**d.** El trabajo de monografía realizado ha sido construido con el objetivo fundamental de presentar una visión introductoria a modo de reflexión de un tema particular, el cual es el concepto de causalidad. Se espera que dicho documento constituya un aporte teórico para el programa de la Licenciatura en Física y además sirva como un referente inicial para la construcción de posteriores trabajos que se desarrollen dentro del Departamento de Física de la Universidad Pedagógica Nacional.

<b>Elaborado por:</b>	Luis Esteban Hernández Cristancho.
<b>Revisado por:</b>	Yesid Javier Cruz Bonilla.

<b>Fecha de elaboración del Resumen:</b>	06	06	2017
--	----	----	------

# Contenido.

	Pág.
Introducción.....	15
<b>Capítulo 0: Contextualización del problema.</b>	
0.1 Planteamiento del problema.....	17
0.2 Objetivos	
0.2.1 Objetivo general.....	18
0.2.2 Objetivos específicos.....	18
<b>Capítulo I: Introducción a la causalidad en la teoría especial de la relatividad.</b>	
1.1 La causalidad en la física clásica	
1.1.1 Introducción.....	20
1.1.2 Espacio y tiempo Newtoniano.....	21
1.2 La causalidad en la Teoría Especial de la Relatividad TER.	
1.2.1 Introducción.....	26
1.2.2 Espacio/tiempo de Minkowsky	
1.2.2.1 Diagramas espacio/tiempo.....	27
1.2.3 Relatividad de la simultaneidad.....	28
1.2.4 El cono de luz y relación entre eventos.....	32
1.2.5 La geometría de Minkowsky.....	34
1.2.5.1 Clasificación del intervalo cuadrado.....	37
<b>Capítulo II: La causalidad en la Teoría General de la Relatividad.</b>	
2.1 Introducción histórica.....	39
2.2 Las ecuaciones de campo de Einstein.....	39
2.3 Estructura causal en la Teoría General de la Relatividad.....	43
2.4 La solución de Schwarzschild.	
2.4.1 Caracterización de la solución.....	45
2.4.2 Estructura causal en la solución de Schwarzschild.....	48

### **Capítulo III: Caracterización de la solución de kerr.**

<b>3.1</b> Introducción.....	<b>52</b>
<b>3.2</b> Descripción de la métrica de Kerr.....	<b>52</b>
<b>3.3</b> Propiedades básicas de la solución de Kerr.....	<b>54</b>
<b>3.4</b> Caracterización de la solución de Kerr	
<b>3.4.1.</b> Singularidades y horizontes.....	<b>56</b>
<b>3.4.2.</b> La ergósfera o ergo esfera.....	<b>58</b>
<b>3.4.3.</b> Límite estacionario.....	<b>59</b>

### **Capítulo IV: Análisis de la causalidad.**

<b>4.1</b> Introducción.....	<b>61</b>
<b>4.2</b> Análisis de la causalidad.....	<b>61</b>
<b>4.3</b> Estructura causal en la solución de kerr.....	<b>64</b>
<b>4.3.1</b> Coordenadas nulas principales.....	<b>66</b>
<b>4.3.2</b> Extensión maximal en el caso sub extremo ( $a^2 < m^2$ ).....	<b>67</b>
<b>4.3.3</b> Extensión maximal en el caso extremo ( $a^2 = m^2$ ).....	<b>72</b>
<b>4.3.4</b> Extensión maximal en el caso súper extremo ( $a^2 > m^2$ ).....	<b>73</b>
<b>4.4</b> Cuadros comparativos.....	<b>74</b>

<b>Conclusiones.....</b>	<b>78</b>
--------------------------	-----------

<b>Lista de referencias y Bibliografía.....</b>	<b>81</b>
---	-----------

#### **Sección de anexos:**

<b>Anexo A:</b> Demostración de la métrica de Schwarzschild.....	<b>85</b>
<b>Anexo B:</b> Unidades geométricas en Relatividad General.....	<b>90</b>
<b>Anexo C:</b> Demostración de la métrica de Kerr.....	<b>93</b>

## Tabla de figuras.

<i><b>Figura 1.1:</b> Representación gráfica de la línea del Universo de una partícula en el plano (<math>z, x</math>).....</i>	<i>22</i>
<i><b>Figura 1.2:</b> Representación gráfica donde se evidencia que es enviado un destello de luz, cuando los centros de las naves coinciden.....</i>	<i>24</i>
<i><b>Figura 1.3:</b> Representación gráfica donde se evidencia el instante en que la señal luminosa llega primero al reloj D que al reloj C , observando desde la perspectiva del observador S.....</i>	<i>25</i>
<i><b>Figura 1.4:</b> Representación gráfica donde se evidencia el instante en que la señal luminosa llega primero al reloj B que al reloj A, observando desde la perspectiva del observador S.....</i>	<i>25</i>
<i><b>Figura 1.5:</b> Representación gráfica de un diagrama espacio/tiempo, donde se evidencia la ilustración geométrica del señor cenando en el restaurante de un tren para ambos dos marcos de referencia S. El evento <math>E_1</math> , representa el evento cuando se toma la sopa, el evento <math>E_2</math> cuando se come la carne y finalmente el evento <math>E_3</math> cuando consume el postre.....</i>	<i>26</i>
<i><b>Figura 1.6:</b> Representación gráfica de un cono de luz de Minkowsky donde el cono inferior y superior son pasado y futuro de un evento respectivamente; el observador se encuentra en la hipersuperficie del “presente” justo en la intersección de los dos conos.....</i>	<i>28</i>
<i><b>Figura 1.7:</b> Representación gráfica de un diagrama causal que representa la línea del universo sobre la cual un fotón de frecuencia <math>\gamma</math> colisiona y es absorbido por un átomo con masa en reposo <math>M_0</math>, para posteriormente ser dispersado siguiendo una línea del universo recta.....</i>	<i>33</i>
<i><b>Figura 2.1:</b> En la imagen izquierda se muestra la representación gráfica de los conos de luz en el espacio/tiempo de Minkowsky de la relatividad especial, donde los ejes temporales de los conos están en la misma dirección y sentido. En la imagen derecha se muestra la orientación no uniforme de los conos de luz, debido a que el espacio/tiempo está curvado.....</i>	<i>39</i>
<i><b>Figura 2.2:</b> Representación gráfica del comportamiento de los conos de luz en coordenadas de Schwarzschild.....</i>	<i>43</i>
<i><b>Figura 2.3:</b> Representación gráfica del comportamiento de los conos de luz en coordenadas avanzadas “entrantes” y en coordenadas retardadas “salientes” de Eddington – Finkelstein.....</i>	<i>44</i>

<b>Figura 2.4:</b> Representación gráfica del comportamiento de los conos de luz a medida que se acercan a la región $r = 2m$ (horizonte de eventos).....	45
<b>Figura 3.1:</b> Representación gráfica del marco de referencia primado $S'$ rotando sobre el eje $z$ del marco de referencia no primado $S$ .....	51
<b>Figura 3.2:</b> Representación gráfica de la singularidad esencial $\rho = 0$ en forma de anillo $x^2 + y^2 = r^2$ para la métrica de Kerr.....	52
<b>Figura 3.3:</b> Representación gráfica de la solución de Kerr resaltando las principales características que la describen, donde se incluyen: los horizontes de eventos “ $r-$ “, la singularidad esencial en forma de anillo, la ergósfera y el límite estacionario.....	54
<b>Figura 3.4:</b> Representación gráfica de la solución de kerr, resaltando todas sus características principales: parámetro de rotación “ $a$ “, singularidades en forma de anillo, horizontes de eventos $r+$ $r-$ , ergósfera y límite estacionario.....	55
<b>Figura 4.1:</b> Representación gráfica de las regiones regulares de la solución de Kerr, junto con la singularidad esencial en forma de anillo y los horizontes de eventos internos $r_-$ y externo $r_+$ .....	61
<b>Figura 4.2:</b> Representación gráfica de un diagrama causal de la solución de kerr para el caso sub extremo ( $a^2 < m^2$ ) en coordenadas avanzadas de Eddington-Finkelstein.....	63
<b>Figura 4.3:</b> Representación gráfica de un esquema espacial de la solución de kerr en plano ecuatorial $\theta = \frac{\pi}{2}$ , para el caso sub extremal ( $a^2 < m^2$ ).....	65
<b>Figura 4.4:</b> Representación gráfica de un diagrama causal de la solución de kerr para el caso extremo ( $a^2 = m^2$ ) en coordenadas avanzadas de Eddington - Finkelstein.....	67
<b>Figura 4.5:</b> Representación gráfica de un diagrama espacial para la solución de Kerr en el caso súper extremo ( $a^2 > m^2$ ).....	69
<b>Tabla 1.1:</b> Cuadro comparativo entre los modelos de causalidad del contexto clásico y la solución de Kerr de la Teoría General de la Relatividad.....	69
<b>Tabla 1.2:</b> Cuadro comparativo entre los modelos de causalidad de la Teoría Especial de la Relatividad y la solución de Schwarzschild de la Relatividad General.....	71

## Introducción

La noción de causalidad, es uno de los conceptos que ha sido ampliamente estudiado, investigado y debatido por múltiples filósofos, físicos y matemáticos destacados desde la antigüedad, con el objetivo de lograr demostrar uno de los principios fundamentales que permite explicar el hecho de buscar relaciones entre las cosas, específicamente entre las acciones y sus consecuencias. Desde el contexto de la física, particularmente, dicho concepto constituye un referente teórico indispensable en la explicación de los diversos fenómenos naturales, por tal razón es que este merece ser estudiado y analizado a manera de reflexión en el presente trabajo de investigación.

En ese orden de ideas, el presente trabajo tiene como objetivo fundamental realizar un análisis comparativo, acerca del concepto de causalidad, desde el contexto clásico Newtoniano y desde el contexto de la Teoría Especial y General de la Relatividad, considerando la configuración del espacio/tiempo como un concepto indispensable en el comportamiento de la causalidad.

Por lo tanto, la presente monografía se compone de cuatro capítulos en los cuales se dará estudio al concepto de causalidad. El primer capítulo está orientado a explicar la causalidad desde el contexto clásico Newtoniano, realizando inicialmente una pequeña introducción a dicho concepto como punto de partida, para luego abordar los conceptos de espacio y tiempo Newtoniano. Posteriormente se estudia la causalidad desde el contexto de la Teoría Especial de la Relatividad, considerando la configuración de su espacio/tiempo y el cono de luz como referente teórico principal en la explicación de las relaciones causales. El segundo capítulo, está orientado a realizar un análisis de la causalidad desde el contexto de la Teoría General de la Relatividad, explicando en primera instancia las ecuaciones de campo de Einstein como el concepto más importante de dicha teoría. Luego, se construye una explicación entorno a qué se entiende por estructura causal desde la Relatividad General, en aras de explicar la primera solución exacta de las ecuaciones de campo de Einstein propuesta en 1916, la solución de Schwarzschild, la cual constituye un concepto base en la descripción y análisis de la causalidad de la solución de Kerr. En esta se resalta la caracterización de la solución, es decir la configuración del espacio/tiempo y posteriormente

el comportamiento de los conos de luz o estructura causal. En el tercer capítulo, se realiza la caracterización del objeto de estudio principal de nuestro trabajo; la solución de Kerr que corresponde a una solución exacta de las Ecuaciones de campo de Einstein descubierta por el físico y matemático Neozelandés Roy P. Kerr en 1963 (Kerr, 1963). En dicho capítulo, se resaltan las características y propiedades fundamentales de la misma tales como: la métrica, las singularidades y horizontes, la ergósfera, el límite estacionario, etc. En el último capítulo, se realiza un análisis a modo comparativo de la causalidad, comenzando con una corta reflexión, acerca los modelos de causalidad estudiados en los capítulos anteriores, para así analizar la estructura causal en la solución de Kerr. Finalmente, se realizaron unos cuadros comparativos de todos los modelos estudiados para así establecer las respectivas conclusiones del trabajo de investigación, las cuales se encuentran orientadas a encontrar las diferencias que se establecen en torno a la causalidad entre el contexto clásico Newtoniano y la solución de Kerr de la Relatividad General, a resaltar la importancia que adquiere el carácter absoluto de la velocidad de la luz en la interpretación de las relaciones y conexiones causales desde el contexto relativista que difiere del contexto clásico y finalmente a explicar que bajo el contexto de la Teoría General de la Relatividad **TGR** existen múltiples estructuras causales, considerando esta como las trayectorias que describen las partículas masivas y la luz (comportamiento de los conos de luz).



## Capítulo 0

### Contextualización del problema:

#### 0.1: Planteamiento del problema:

En el campo de la física, la causalidad es uno de los temas fundamentales en la explicación de la relación causa y efecto de los diversos fenómenos de la naturaleza (Varela, Causalidad y Mecánica Cuántica., 2005). Si se analiza dicho concepto, desde la perspectiva clásica Newtoniana, las relaciones causales obedecen el principio causal de tiempo, el cual enuncia que las causas preceden temporalmente a sus efectos y que las conexiones causales entre dos eventos, de acuerdo a la Ley de Gravitación Universal Newtoniana, debe ser instantánea es decir, que se requiere una señal física con velocidad infinita para conectar dichos eventos. Este análisis de la causalidad, se evidencia en un espacio y tiempo donde estos tienen un carácter absoluto y que son independientes el uno del otro. Sin embargo, bajo el contexto de la Teoría Especial de la Relatividad, con la formulación del segundo postulado de la constancia de la velocidad de la luz, las relaciones causales a pesar de mantener el principio de causalidad, este sufre una pequeña modificación, debido a que sus conexiones causales difieren de la perspectiva clásica Newtoniana, ya que para que dos eventos estén conectados causalmente debe existir una señal física que debe ser menor o igual a la velocidad de la luz y no con velocidad infinita como afirma la perspectiva clásica. Dicha modificación al principio de causalidad surge a partir de una configuración donde el espacio y tiempo están intrínsecamente relacionados y forman una nueva entidad llamada espacio/tiempo. En consecuencia, la relación de causalidad bajo la relatividad especial a pesar de mantener el principio de causalidad básico se ve modificada de la siguiente manera: para que A sea causa de B, es que B sea un evento que pertenece al cono de luz de A (Vélez, 2012).

Por otra parte, dicho principio se extiende al marco de la Teoría General de la Relatividad, al considerar que el efecto debe permanecer en el cono de luz futuro de su causa, aún en espacio/tiempos curvos. En consecuencia con lo previamente escrito, la configuración del espacio/tiempo depende de las características del objeto masivo que produce la curvatura

espacio/temporal. Particularmente, si se considera la solución de Kerr, la cual es una solución exacta de las ecuaciones de campo de Einstein, descubierta en 1963, que describe la curvatura espacio/temporal producida por un objeto astronómico que rota sobre su eje de simetría, se evidencia que dicho espacio/tiempo adquiere múltiples propiedades singulares que son de vital importancia a momento de estudiar el comportamiento de los conos de luz o su estructura causal, la cual varía completamente a la causalidad desde la perspectiva clásica Newtoniana.

A partir de lo anterior, el presente trabajo pretende mostrar el comportamiento de la causalidad en una de las soluciones exactas de las Ecuaciones de Campo de Einstein de la Teoría General de la Relatividad, la solución de Kerr, realizando un análisis comparativo entre la perspectiva clásica Newtoniana de causalidad y la estructura causal de la solución de Kerr, con el objetivo de evidenciar cómo las configuraciones espacio/temporales afectan o cambia el comportamiento de la causalidad. Con base en lo previamente escrito, se formula la siguiente pregunta de investigación.

Considerando que las configuraciones espacio/temporales sí afectan el comportamiento de la causalidad *¿Cuáles son las diferencias que se establecen, entorno al comportamiento causal entre el contexto clásico Newtoniano y la solución de Kerr Relativista?*

## **0.2 Objetivos:**

### **0.2.1 Objetivo general:**

- ✓ Realizar un análisis comparativo entorno al comportamiento de la causalidad entre el contexto clásico Newtoniano y la solución de Kerr Relativista.

### **0.2.2 Objetivos específicos:**

- ✓ Enunciar las principales características de los conceptos de espacio y tiempo del modelo clásico Newtoniano.
- ✓ Explicar las características fundamentales del modelo de causalidad propuesto desde el contexto de la Teoría Especial de la Relatividad **TER**.

- ✓ Describir las propiedades fundamentales de la solución de Schwarzschild como referente teórico indispensable en la explicación de la solución de Kerr de la Relatividad General.
- ✓ Analizar conceptualmente el comportamiento de la causalidad en la solución de Kerr relativista.

## Capítulo I

### Introducción a la causalidad en la Teoría Especial de la Relatividad.

#### 1. La Causalidad en la Física Clásica:

##### 1.1 Introducción:

La causalidad es uno de los temas centrales en el actual estudio de la filosofía de las ciencias y ha concretado la atención de filósofos y científicos distinguidos desde la antigüedad hasta el presente<sup>1</sup>. El origen histórico de dicho concepto es un poco vago. Se dice que los primeros estudios acerca de la causalidad se desarrollaron en la antigua Grecia. Al parecer, surgió como una especie de proyección de la experiencia humana sobre la naturaleza. En las civilizaciones antiguas, se reprochaban algunos eventos que ocurrían en la naturaleza como por ejemplo, que una montaña provocara un derrumbe o que un rayo destruyera una aldea, entre otras. Para estas culturas primitivas, era muy simple pensar que los elementos de la naturaleza estaban animados, esto es absolutamente comprensible, con respecto a los fenómenos naturales que causaban grandes daños. Tal como menciona Carnap R. (1969), en su texto *Fundamentación lógica de la física*, en la actualidad los científicos ya no siguen esa concepción animista de la naturaleza. Sin embargo, al tratar de definir la causalidad, todavía persisten algunas concepciones del pensamiento animista. Un ejemplo que Carnap ilustra es el de una piedra que destroza una ventana, ¿Podrá la piedra tener intenciones de romper la ventana?, la respuesta más lógica es que sería que no, una piedra es una piedra y no tendría la intención de romper una ventana. Por otra parte, la mayoría de las personas pensaría que el suceso de romperse la ventana fue causado por el suceso del choque de la piedra con el vidrio. Pero queda un gran interrogante fundamental, ¿Qué significa que un suceso B fue causado por un suceso A?, se puede decir que un suceso A “produjo”, “provocó” o “efectúo” el suceso B, pero estas expresiones son inadecuadas en el caso de una piedra, debido a que son acciones que en primera instancia solo se aplican a las actividades humanas, es decir, no se pueden tomar dichas expresiones literalmente (Carnap, 1969). En consecuencia, estas

---

<sup>1</sup> Esta introducción fue construida con base al texto *Fundamentación Lógica de la Física* de Rudolf Carnap – Cuarta Parte “Causalidad y determinismo”.

acciones no responden satisfactoriamente a la pregunta, ¿Qué significa decir que un suceso causa otro suceso? Para considerar por qué ocurrió un suceso como consecuencia de uno anteriormente producido, es importante determinar su causa. Por ejemplo, si queremos averiguar la causa de un accidente automovilístico entre dos carros, podemos decir múltiples motivos, pero ninguna de estas posibles circunstancias define con certeza cuál fue la verdadera causa del accidente. En otras palabras, no se puede considerar ninguna circunstancia única, como la verdadera causa de un suceso. Por lo tanto, para considerar la relación causal entre un suceso producido (efecto) y un suceso previo (causa), hay que considerar la causa en su totalidad, es decir, todos los detalles o por menores y leyes<sup>2</sup> pertinentes al caso, con los cuales se pueda predecir la causa real de dicho evento (Carnap, 1969). Si continuamos considerando el ejemplo de la piedra que se desplaza hacia la ventana, choca con el vidrio y este se rompe. Es pertinente preguntar si, ¿Fue el impacto de la piedra el que rompió la ventana?, Lo más lógico sería contestar afirmativamente. No obstante, pueden existir sucesos de naturaleza similares que pudieron producir dicho suceso. Por ello, no es posible afirmar una relación causal únicamente sobre la base de una observación de un caso posible, sino que se debe establecer una ley general, la cual se basa en establecer repetidas múltiples observaciones de la naturaleza. Es decir, cuando se afirma que un suceso A causó un suceso B, afirma que realmente este es un caso particular de una ley general, con respecto al espacio y el tiempo (Carnap, 1969) y que en un orden temporal de los eventos las causas preceden a sus efectos.

Con base al escrito propuesto anteriormente, inicialmente se abordará con la explicación de las principales ideas de los conceptos de espacio y tiempo que se desarrollaron desde la perspectiva Newtoniana, como pilar fundamental en la explicación de la causalidad.

## **1.2. Espacio y tiempo Newtoniano:**

Las diferentes concepciones que se le han dado al espacio y al tiempo a través de la historia de la ciencia, han sido producto del trabajo múltiples y diversos estudiosos que han dejado huella en la historia. Las primeras concepciones acerca del espacio y el tiempo tienen

---

<sup>2</sup> En este contexto definimos ley como una relación existente entre los elementos que intervienen en un fenómeno particular.

sus raíces primitivas en la antigua Grecia, donde el filósofo Aristóteles de Estagira (384-322 a.c), consideraba que las leyes de la naturaleza se deducían a través del pensamiento intuitivo sin comprobación experimental alguna. Consideraba que un cuerpo se mantenía en reposo si no se aplicaba ninguna fuerza sobre él, y se movía con velocidad constante si se le aplica una fuerza constante. Esta filosofía Aristotélica de la naturaleza interpretada mucho tiempo después por la escuela escolástica<sup>3</sup>, implantaba un modelo estático del universo, donde cada objeto pertenecía a un lugar específico. Por ello, Aristóteles pensaba que en ausencia de fuerzas o agentes externos, el estado de preferencia de todos los cuerpos era el reposo. Luego, este estado de reposo da noción al marco de referencia absoluto y de espacio absoluto. Es decir, para Aristóteles y los pensadores medievales que retomaron sus ideas, existía un marco de referencia privilegiado o absoluto sobre el cual un observador en reposo en ese supuesto marco, obtenía valores absolutos de las diferentes cantidades físicas (Granés, 1991) & ( Pacheco & Pulido, 2001).

Posteriormente, a finales del siglo XVI, el físico y matemático italiano Galileo Galilei, con el trabajo del método experimental, demuestra la falta de veracidad de los planteamientos de Aristóteles, acerca de la existencia de un marco de referencia absoluto. Si existiese un marco de referencia absoluto, dos eventos que ocurrieran en tiempos diferentes podrían tener lugar el mismo lugar del espacio, pero, de acuerdo al principio de Relatividad de Galileo, las leyes físicas<sup>4</sup>se cumplen para cualquier marco de referencia inercial y la velocidad de un cuerpo es medida con respecto a un sistema de referencia cualquiera. Para Galileo no existe preferencia al elegir un sistema de referencia inercial en el estudio de un fenómeno particular, ya que estos sistemas se consideran en movimiento rectilíneo o en reposo uno con respecto a los otros, y de acuerdo con sus observaciones tanto el movimiento rectilíneo como el reposo son indetectables (Pulido & Pacheco, 2001). Por lo tanto, la noción de marco o sistema de referencia absoluto carece de sentido en la medida de que es imposible designar un sistema de referencia universal para relacionar todos los fenómenos terrestres.

---

<sup>3</sup> La escolástica desde este contexto se define como una corriente filosófica que influyó significativamente en el pensamiento medieval. Sus concepciones dominaron en las escuelas de la época y en estudios generales que dieron partida a las universidades medievales europeas, entre los siglos XI y XV.

<sup>4</sup> En la época de Galileo, la mecánica era considerada como la física de la época .Por ello la afirmación de que “las leyes de la física se cumple para cualquier marco inercial “, hace referencia a las leyes de la mecánica (Granés, Isaac Newton. Obra y contexto. Una introducción, 2005).

Sin embargo, fue el físico y matemático inglés Isaac Newton el primero en formular explícitamente las concepciones acerca del espacio y el tiempo. En su obra cumbre “ *Los principios matemáticos de la filosofía natural*” define dichos conceptos en un escolio que se encuentra ubicado después de las definiciones fundamentales y antes de las leyes, indicando que las nociones de espacio y tiempo son necesarias para comprender sus leyes. Newton enuncia los conceptos de espacio y tiempo en los principios así:

*El espacio absoluto, por su naturaleza y sin relación a cualquier cosa externa siempre permanece igual e inmóvil. El espacio relativo es cualquier cantidad o dimensión variable de este espacio, que nuestros sentidos determinan por su posición en relación con los cuerpos, espacio que el vulgo; toma por el espacio inmóvil; tal es la dimensión de un espacio subterráneo, aéreo o celeste, determinado por su posición con respecto a la tierra (Newton, 1687a, p.23).*

*El tiempo absoluto, verdadero y matemático, en si por su propia naturaleza y sin relación a algo externo, fluye uniformemente, y por otro nombre se llama duración; el relativo, aparente y vulgar es una medida sensible externa de cualquier duración, mediante el movimiento (sea precisa o no uniforme) y de la que el vulgo usa en la vida cotidiana cuando se refiere a horas, minutos, días y años (Newton, 1687b, p.6).*

Teniendo en cuenta la concepción del espacio de Newton, se puede decir que este es homogéneo, inmóvil y euclidiano. Cuando se dice que el espacio es homogéneo se hace referencia a que todos sus puntos son equivalentes, independientes de los cuerpos presentes en dicho lugar (Granés, 2005). En otras palabras, la materia no altera la estructura del espacio. La homogeneidad del espacio es una característica opuesta al pensamiento Aristotélico como se explicó anteriormente, debido a que el filósofo Griego consideraba que la posición de un cuerpo era absoluta, es decir el espacio era heterogéneo; y las convenciones de arriba y abajo son posiciones absolutas. Por otra parte, la perspectiva Newtoniana presenta la relatividad de la posición al considerar posiciones relativas de los cuerpos uno con respecto a los otros y la

relatividad de la dirección al considerar un espacio sin límites en el cual no existen lugares privilegiados ni direcciones privilegiadas. La homogeneidad del espacio se mantiene a través del tiempo, lo que indica que el espacio es idéntico en toda dirección. Por otra parte, si se acepta la noción de que el espacio es homogéneo se deduce que el espacio es infinito, debido a que si este fuera finito si existirían puntos privilegiados (puntos de frontera) y por lo tanto no cumpliría con el principio de homogeneidad.

Cuando se dice que el espacio es euclidiano, nos referimos a que se establece una geometría tridimensional 3D: de arriba hacia abajo de adelante hacia atrás, de izquierda a derecha. En un mundo euclidiano, todas las características del espacio tales como: la homogeneidad, la continuidad, la infinitud, etc., obedecen los postulados de la geometría de Euclides. La continuidad en el espacio, se encuentra implícita en el primer postulado, el cual expresa que es posible trazar una recta en cualquier pareja de puntos por cercanos o lejanos que se encuentren. La infinitud está implícita en el segundo postulado al expresar que siempre es posible extender un segmento de recta finito. En consecuencia, podemos evidenciar que en la concepción de espacio Newtoniana, la geometría Euclidiana es la que describe la caracterización de dicho espacio (Sepúlveda, 2003).

Por otra parte, de acuerdo a Granés J (2005) en su texto, *Isaac Newton Obra y contexto. Una introducción*, el físico Teórico Alemán Albert Einstein interpretaba las ideas del sabio inglés, acerca del concepto de espacio absoluto por medio de una analogía, la cual se trataba de una caja que posee una propiedad fundamental, la cual es la de contener objetos. El espacio de Newton bajo la interpretación de Einstein se concibe como una caja infinita que contiene todos los objetos del universo, y en el cual las paredes se han alejado indefinidamente. No podrían existir objetos si no existiese la caja y podría no haber objetos, dando la posibilidad de un espacio vacío (Granés J. , 2005).

Teniendo en cuenta lo anterior, Newton distinguía de las nociones de espacio y tiempo, las entidades que eran absolutas, verdaderas y matemáticas y aquellas que eran por el contrario, relativas, aparentes y vulgares. El tiempo según Newton es el tiempo que podemos denominar del “sentido común”. Para Newton sólo existe un tiempo universal que todo lo abarca, que simplemente se encuentra allí, que no puede ser afectado por nada; simplemente sigue fluyendo a un ritmo constante. Dondequiera y cuandoquiera que nos



encontremos, ya estemos o no en movimiento, y sea lo que sea que estemos haciendo, el tiempo marchará constantemente al mismo paso para todos, marcando sin falla alguna los instantes sucesivos de la realidad en todo el universo. Con base en lo previamente escrito, tal como lo menciona Davies P (1995) en su texto, *Sobre el tiempo. La revolución inacabada de Einstein*, la concepción Newtoniana del tiempo nos permite dividirla en pasado, presente y futuro de una manera absoluta y universal, es decir, el universo entero comparte un tiempo común y un ahora común, cualquier observador ubicado en cualquier lugar, coincidiría en lo que se estima que ya ha pasado y lo que aún se encuentra por venir. Por lo tanto, esta definición del tiempo define una visión de un mundo Newtoniano en lo que sucede en el “ahora o presente” es lo que verdaderamente se considera real.

Si se detiene a analizar en detalle las definiciones formales del espacio y tiempo absolutos propuestas por Newton, se evidencia que en cierta forma estas concepciones presentan ciertos problemas. La principal dificultad radica en que estos conceptos adquieren un cierto nivel de abstracción muy confuso que tiende a volverse imaginario, debido a que estas nociones escapan de toda experiencia sensible real, ya que si se quiere describir fenómenos físicos tales como: la curvatura del espacio-tiempo, la expansión del universo, entre otros, no pueden explicarse con base a una visión del espacio vacío, inmóvil, independiente de la materia, que no se curva ni se dilata, sino que se tiene que concebir a partir de observaciones empíricas que se contrasten y se interpreten de manera lógica en la realidad<sup>5</sup>.

Un argumento muy destacado en contra de la concepción Newtoniana del espacio y tiempo absolutos que influyó en el pensamiento del físico Alemán Albert Einstein, surgió a finales del siglo XIX con la propuesta planteada por el físico y filósofo Austríaco Ernst Mach, donde enunciaba que los conceptos de espacio y tiempo absolutos caen fuera de toda práctica experimental, ya que no son más que objetos del pensamiento, que no pueden ser

---

<sup>5</sup> Cabe aclarar que existen en la actualidad “teorías” o hipótesis que logran explicar algunos de los fenómenos previamente descritos sin concebir la idea de tiempo de la Teoría de la Relatividad de Einstein. Esta es la “teoría” MOND (Dinámica Newtoniana Modificada), la cual fue planteada por *Mordehai Milgrom* en 1981. Esta hace referencia a una hipótesis que propone una modificación de la segunda ley de Newton para explicar el problema de la velocidad de rotación de las galaxias de manera alternativa a la materia oscura. Se considera que la velocidad de rotación de las galaxias era uniforme e independiente de la distancia al eje de giro, predicción que se contradice con los planteamientos de la Mecánica Newtoniana y la Relatividad General al considerar que la velocidad de giro de rotación debía decrecer con la distancia.

producidos en la experiencia. Por lo tanto, deben ser abandonados y debe hablarse de espacios relativos, debido a que todos los movimientos e incluso los acelerados, deben ser siempre referidos a otros cuerpos. Por ende, todo movimiento se puede considerar relativo, ya sea respecto a otros cuerpos cercanos o a grandes objetos del universo.

Considerando lo anterior, en la siguiente sección se explicarán en detalle los conceptos de espacio y tiempo relativos propuestos por la Teoría Especial de la Relatividad T.E.R.

## **1.2. La causalidad en la Teoría Especial de la Relatividad:**

### **1.2.1 Introducción:**

Cuando se hace referencia al término causalidad se describe en primera instancia la relación existente entre las causas y efectos de los diferentes eventos físicos. En la mecánica clásica se proponía que los diferentes eventos están causados por unos ya anteriores y que esta causalidad puede ser expresable a través de leyes de la física. Dicha afirmación alcanzó su punto más alto, con la afirmación del físico y matemático francés Pierre Laplace, explicando que si se conoce el estado actual del mundo con total precisión, en consecuencia, se podría predecir cualquier tipo de evento en el futuro, siendo dicha perspectiva la del determinismo o más precisamente la del determinismo causal (De Gortari, 1960). Con base en lo anteriormente escrito, se puede concluir con respecto a los postulados de la física clásica, en que las causas preceden al efecto con relación al tiempo, y que con relación a la física moderna, el concepto de causalidad sufre una pequeña modificación, debido a la nueva interpretación del concepto de espacio/tiempo y la formulación segundo postulado de la Relatividad Especial acerca de la constancia de la velocidad de la luz.

Por lo tanto, en esta sección se describirá la causalidad según el modelo geométrico de Minkowsky<sup>6</sup>. Se expondrán los correspondientes aspectos teóricos que conforman su base geométrica. Por otra parte, se mostrará de manera ilustrativa y conceptual la estructura causal de dicho espacio/tiempo.

---

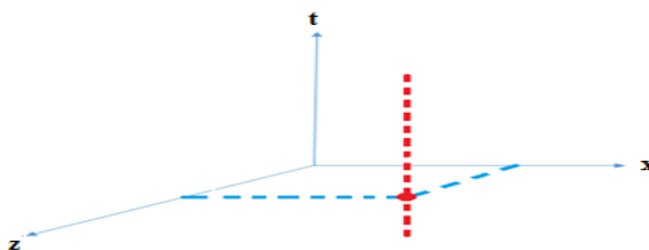
<sup>6</sup> **Hermann Minkowsky:** (22 junio de 1864 - 12 enero 1909). Matemático ruso de origen lituano que desarrolló la teoría geométrica de los números. Sus trabajos más destacados fueron realizados en las áreas de la teoría de números, la física matemática y la teoría de la relatividad.

## 1.2.2 Espacio/tiempo de Minkowsky:

### 1.2.2.1 Diagramas espacio/tiempo:

Tal como menciona Vélez (2012) en su texto, *Apuntes de Relatividad*, la aplicación del segundo postulado de la Teoría Especial de la Relatividad, que trata acerca de la constancia de la velocidad de la luz, conlleva a un nuevo grupo de transformaciones con una característica muy particular, en la cual las coordenadas espaciales y temporales no son independientes. La medición de la coordenada temporal de un evento en  $S$ , no depende solamente de la coordenada temporal del mismo evento  $S'$ , sino de su coordenada espacial, como se puede evidenciar en la ecuación de transformación de Lorentz correspondiente al tiempo. Mientras en la física clásica Newtoniana, era suficiente la información acerca de la posición espacial de la partícula, en la física relativista se necesita adicionalmente su posición temporal. El lugar de los fenómenos en la física Newtoniana es un lugar puramente espacial, euclidiano. En cambio en la física relativista es un lugar espacio/temporal de cuatro dimensiones descrito por una geometría Minkowskiana, que se ajusta perfectamente a los postulados de la Teoría Especial de la Relatividad (French, 1974; Vélez, 2012).

El ordenamiento de los eventos que ocurren en este espacio puede ser representado en un diagrama espacio/tiempo. Dicho diagrama pretende mostrar en primera instancia sólo dos coordenadas espaciales, por ejemplo  $(z, x)$ . La historia de una partícula en reposo en el plano  $(z, x)$  de  $S$  se representa por una línea paralela al eje  $t$ , como se muestra en la figura 1.1.



**Figura 1.1:** Representación gráfica de la línea del Universo de una partícula en el plano  $(z, x)$ .

Aquí se puede observar como la partícula no cambia su posición espacial, pero si su posición temporal. Por lo tanto, cualquier evento que tenga que ver con la partícula está

situado sobre su línea del universo. Supongamos, por ejemplo, que en un momento determinado ( $t$ ) la partícula colisiona con otra partícula, entonces las líneas de mundo<sup>7</sup> de las partículas se cortan en algún momento del espacio/tiempo (Rodríguez, 2012). El evento del impacto está sobre las líneas del universo de ambas partículas.

Por otra parte, en un diagrama espacio/tiempo, la coordenada  $x$  de una partícula nos indica la posición espacial en la cual se encuentra la partícula y  $ct$  el tiempo luz<sup>8</sup> de la misma, determinando así un evento o suceso. Por lo tanto, se representa la posición en el eje de las abscisas (eje horizontal) y el tiempo  $ct$  en las ordenadas (eje vertical), donde cada punto del plano ( $x, ct$ ) corresponde a un evento.

### **1.2.3. Relatividad de la simultaneidad:**

En la presente sección se explicará la noción de la simultaneidad propuesta desde el marco de la Teoría Especial de la relatividad. Según la concepción de la Teoría Newtoniana, si dos eventos son simultáneos para un marco de referencia inercial estos también lo serán para diferentes marcos de referencia inerciales, en otras palabras la simultaneidad es absoluta. No obstante, en el contexto de la Relatividad Especial el concepto de simultaneidad, difiere de la concepción Newtoniana, ya que lo que es simultáneo para un marco de referencia inercial desde sus propias mediciones, no lo sería para un marco de referencia inercial en movimiento, con respecto al primero, siendo esta relativa y no absoluta como pensaba Newton, lo anterior gracias a la constancia de la velocidad de la luz (Rodríguez, 2012). Para ilustrar la idea de simultaneidad se realizará un experimento mental<sup>9</sup>. Dicho experimento nos muestra como unos eventos que para un observador son simultáneos, no lo son para otro observador ubicado en un marco de referencia inercial que se mueve con respecto al primero. Supongamos dos naves espaciales que se mueven en direcciones opuestas y paralelas tal como se evidencia en la figura 1.2. En cada una de las naves se podrán encontrar 2 relojes, uno cerca la cabina de la nave que para el marco de referencia  $S'$  llamaremos  $A$  y para el

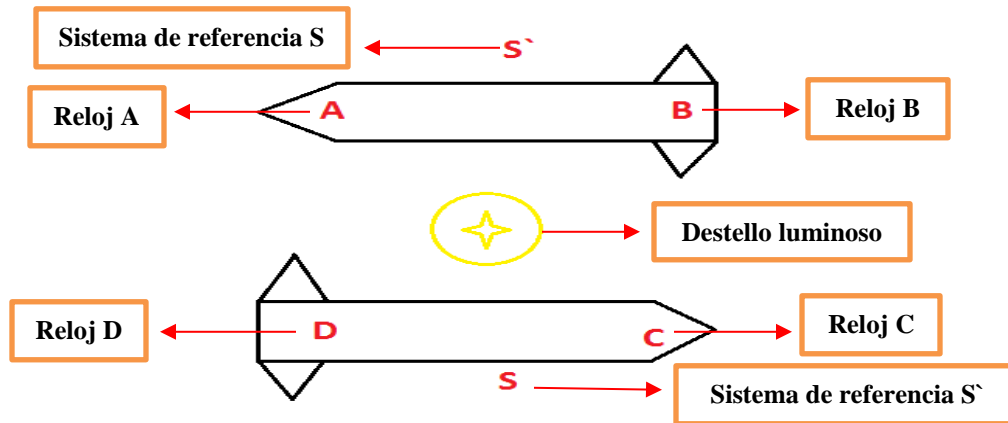
---

<sup>7</sup> Se entiende que la línea de mundo es la historia de una partícula en el espacio/tiempo.

<sup>8</sup> El tiempo luz expresa la relación entre la distancia y el tiempo para un movimiento con velocidad igual a la de la luz  $c$ .

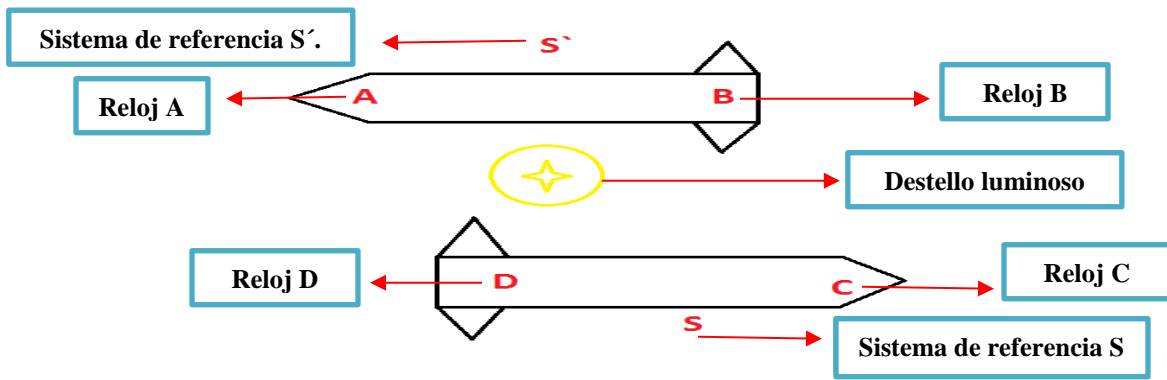
<sup>9</sup> Es un recurso de la imaginación empleado para investigar la naturaleza de las cosas. En su sentido más amplio es el empleo de un escenario hipotético que nos ayude a comprender cierto razonamiento o algún aspecto de la realidad.

marco de referencia  $S$  se llamará  $C$  y otro cerca al dispositivo de propulsión que para el marco de referencia  $S'$  se llamará  $B$  y para el marco de referencia  $S$  se llamará  $D$ . Cuando los centros de las naves se encuentren se producirá un destello de luz fuera de las naves, en el punto medio que une los dos centros (Vélez, 2012).



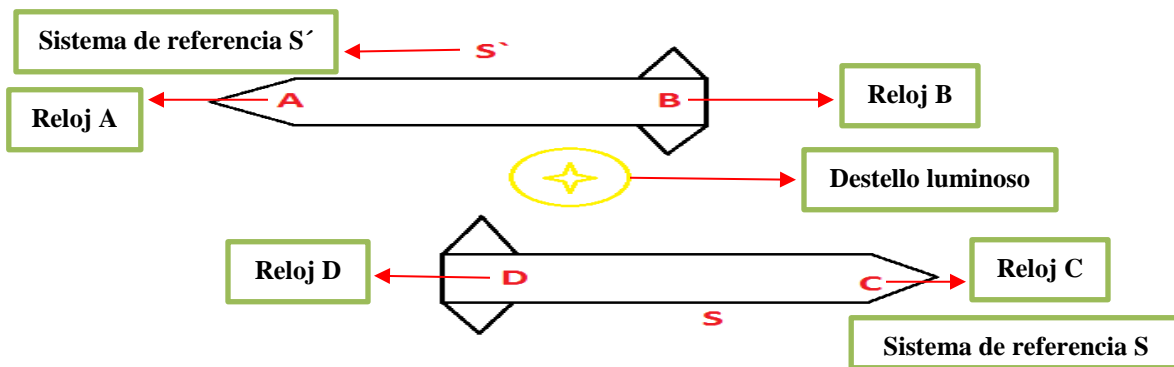
**Figura 1.2:** Representación gráfica donde se evidencia que es enviado un destello de luz, cuando los centros de las naves coinciden.

En el momento en el que se produzca el destello de luz, este enviará rayos luminosos a diferentes partes del espacio, en nuestro caso particularmente para los puntos **A, B, C y D**. El observador que se encuentra ubicado en el sistema de referencia  $S'$ , verifica que el destello fue emitido exactamente en la mitad de su nave. Por lo tanto, este deduce de acuerdo al segundo postulado de la relatividad acerca de la constancia de la velocidad de la luz que la señal llegará simultáneamente para los relojes ubicados en las posiciones **A y B**. Por otra parte, si suponemos que la señal al llegar reinicia los relojes, entonces el marco de referencia  $S'$  cuenta con la garantía teórica de que sus relojes marcan sincrónicamente (Vélez, 2012) (Ver. Figura 1.3). Por lo tanto, para el observador ubicado en el marco de referencia  $S$ , deduce que la puesta en marcha de los relojes situados en **C y D** es simultánea y por ende marcan sincrónicamente.



**Figura 1.3:** Representación gráfica donde se evidencia el instante en que la señal luminosa llega primero al reloj D que al reloj C, observando desde la perspectiva del observador  $S'$ .

Teniendo en cuenta lo anterior, surge un interrogante fundamental que debemos contestar y se enuncia: ¿Si los dos sucesos son simultáneos para el observador ubicado en el marco de referencia  $S$ , lo serán también para el marco de referencia  $S'$  y viceversa?. Para contestar a esta pregunta, inicialmente debemos ubicarnos en la posición del observador que se encuentra en el marco de referencia  $S'$ . Este observador dese sus propias mediciones afirmará que la señal no llega simultáneamente a los relojes de  $S$ , debido a que como se observa en la figura 1.4, mientras la señal viaja, el marco de referencia  $S$  se desplazará hacia la izquierda, lo que en consecuencia, determinará que la señal habrá llegado primero al reloj D que al C. De la misma forma se razona con el observador situado en el marco de referencia  $S$  (Ver figura 1.6).



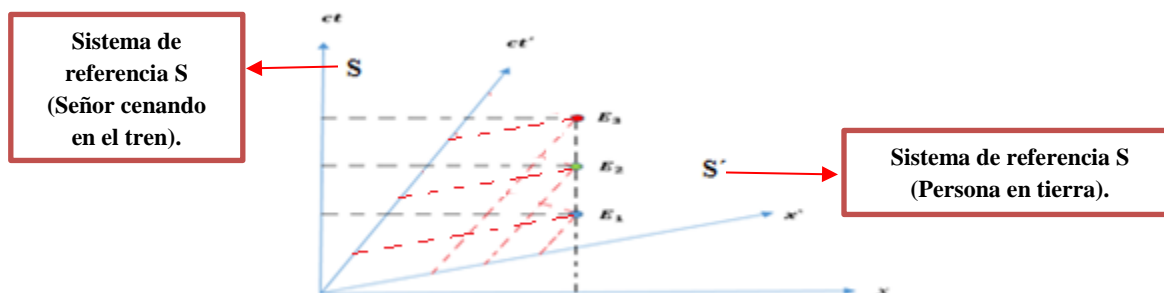
**Figura 1.4:** Representación gráfica donde se evidencia el instante en que la señal luminosa llega primero al reloj B que al reloj A, observando desde la perspectiva del observador  $S$ .

Considerando lo anteriormente escrito, con este experimento mental se llega a la conclusión que lo que es simultáneo para un observador, de acuerdo con sus mediciones en su sistema de referencia inercial, no lo es para otro observador en el cual su marco de

referencia se mueve con respecto al primero. En otras palabras, la simultaneidad de eventos separados, es por consiguiente relativa y no absoluta, todo esto si se acepta el segundo postulado acerca constancia de la velocidad de la luz  $c$ .

Si analizamos en detalle el resultado obtenido, podemos decir que una separacion espacial de dos sucesos se traduce en cierta forma a una diferencia de tiempo entre ellos, cuando lo consideramos desde otro sistema en movimiento. Para ilustrar esta afirmacion consideremos una persona que esta cenando en el restarante de un tren en movimiento<sup>10</sup>. Inicialmente se toma la sopa, después la carne y finalmente el postre. Todos estos sucesos ocurren en el mismo lugar (la misma mesa) respecto al tren, pero en tiempos diferentes. No obstante, desde un observador en tierra, el hombre toma su sopa y su postre a kilómetros de distancia (ver figura 1.5). De acuerdo a Gamow (1971), con el ejemplo planteado anteriormente, este puede ser interpretado de la siguiente manera: “*Sucesos que ocurren en el mismo sitio pero en diferentes tiempos en un sistema, acontecen en diferentes lugares cuando son observados desde otro sistema que se mueve respecto al primero*” (p.143).

Teniendo en cuenta la figura 1,5, un diagrama espacio/tiempo de Minkowski del ejemplo propuesto anteriormente se puede representar así:



**Figura 1.5:** Representación gráfica de un diagrama espacio/tiempo, donde se evidencia la ilustración geométrica del señor cenando en el restaurante de un tren para los dos marcos de referencia S y S'. El evento  $E_1$ , representa el evento cuando se toma la sopa, el evento  $E_2$  cuando se come la carne y finalmente el evento  $E_3$  cuando consume el postre.

<sup>10</sup> Gamow George (1971). Biografía de la física , Pág.143, Madrid: Alianza Editorial

La explicación de la figura 1.5 se resume en la siguiente afirmación: lo que para el sistema de referencia S (Señor cenando en el tren) ocurre en el mismo lugar y en tiempos diferentes, para el sistema de referencia S' (persona ubicada en tierra) ocurre en lugares y tiempos diferentes.

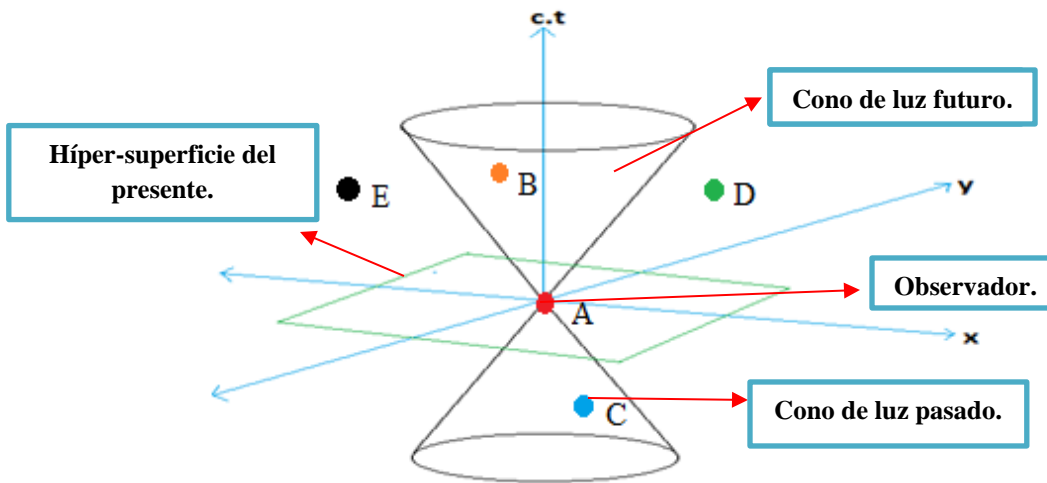
#### **1.2.4. El cono de luz y relación entre eventos:**

Tal como menciona Vélez (2012), un evento está conectado causalmente con otro evento, si lo que ocurre en el segundo, depende de la ocurrencia del primero en un marco de referencia inercial. Por lo tanto, las causas siempre preceden a sus efectos. Si se considera el segundo postulado acerca de la constancia de la velocidad de la luz  $c$ , se evidencia que está ligada a observadores inerciales, implicando que para que un evento A sea causa de B, es que B sea un evento que pertenece al cono de luz de A, es decir el tiempo va de la causa al efecto, siendo primero la causa y posterior el efecto, por lo que en consecuencia el evento B pertenece al futuro de A y el evento A tiene que ser el pasado de B. En ese orden de ideas, el evento A se encuentra conectado causalmente con el evento B, por medio de una señal física cuya velocidad es igual o menor a la velocidad de la luz, siendo el evento B un infinito número de posibles de eventos que se encuentren dentro del cono de luz del evento A (French, 1974; Vélez, 2012).

Cuando se abordó la causalidad desde el contexto de la física clásica Newtoniana, era posible hablar de un “ahora” universal. Podíamos hablar acerca de un “pasado” y “futuro” común universal, para todos los que habitamos en el universo, puesto que el tiempo absoluto marchaba constantemente, marcando sin falla alguna los instantes sucesivos de la realidad de la naturaleza. Con el surgimiento de la Relatividad Especial y en consecuencia el segundo postulado acerca de la constancia de la velocidad de la luz, se logró determinar que para cada observador existe un “pasado”, un presente y un “futuro”, delimitados por el cono de luz (ver. Figura 1.6). Teniendo en cuenta la figura 1.6, se puede observar la representación gráfica de un cono de luz, considerando a este como una representación geométrica que permite ilustrar la historia de un evento cualesquiera en el espacio/tiempo. El cono de luz superior representa el futuro de dicho evento y el cono inferior representa el pasado del mismo, por lo que la intersección de dichos conos va a indicar el “ahora” o “presente” de dicho evento u



observador. Teniendo en cuenta, que ningún evento puede viajar más rápido que la velocidad de la luz, los vértices del cono de luz representan dicha velocidad límite, es decir que la única manera para llegar al “presente” del observador desde el pasado es haciéndolo desde su cono de luz inferior, y la única forma de poder llegar a cierto punto del espacio/tiempo en el futuro es por medio de su cono superior.



**Figura 1.6:** Representación gráfica de un cono de luz de Minkowsky donde el cono inferior y superior son pasado y futuro de un evento respectivamente; el observador se encuentra en la hipersuperficie del “presente” justo en la intersección de los dos conos.

Por otra parte, vamos a explicar las relaciones causales entre diferentes eventos. Considerando la figura 1.6, se observa que un evento A que representa un observador en el “presente” puede tener relación causal con otros eventos en el espacio/tiempo. En ese orden de ideas, el evento B es considerado como el futuro causal del evento A, ya que se encuentra dentro de su cono de luz futuro y por lo tanto la señal física que se necesita para conectar dichos eventos es menor o igual a la velocidad de la luz. El evento C, representa el pasado del evento A, ya que encuentra dentro de su cono de luz pasado. En otras palabras, el pasado de un evento esta definido por el lugar en el espacio/tiempo (evento C) en el que todos los eventos que se relacionan como causa actual o posible de A. Finalmente, los eventos D y E se encuentran en regiones del espacio/tiempo externas del cono de luz del evento A, lo que en consecuencia se puede afirmar que dichos eventos no tiene conexión causal alguna con observadores que e encuentren dentro del cono de luz (eventos A y B), debido a que bajo el

contexto de la Teoría Especial de la Relatividad es imposible generar una señal con una velocidad mayor a la de la luz que logre conectar causalmente dichos eventos.

### 1.2.5 La geometría de Minkowsky:

Parafraseando a Minkowsky, H (1908), él afirma que la influencia de los estudios de Poincarè<sup>11</sup> y el análisis de la geometría, generan el rompimiento de los postulados de Euclides, surgiendo así las geometrías curvas relacionadas a coeficientes de curvatura negativos, como en el caso de la geometría hiperbólica<sup>12</sup>. Esta geometría fue retomada por el físico y matemático Alemán Herman Minkowsky y por medio de una solución puramente matemática destaca la unificación del espacio/tiempo a través de una representación; más precisamente, el cono de luz. Dicha geometría permite evidenciar de una manera más gráfica el principio de causalidad, como un concepto que se explica a través de los conos de luz y el formalismo de la geometría (Rodríguez, 2012). El espacio/tiempo de Minkowsky admite un tratamiento Pseudo-euclidiano. Esto se representa así:

$$r = (ct, x, y, z) \rightarrow r = (ict, x, y, z) \quad (1.1)$$

El objetivo fundamental de estudiar la Teoría especial de la Relatividad, por medio de este tipo de geometría Pseudo – euclidiana es básicamente estudiar los eventos u observadores (marcos de referencia) por medio de sistemas coordenados y considerar la trayectoria de las partículas y los haces de luz como un tipo de curvas particulares que denominaron líneas del universo en el espacio/tiempo.

Teniendo en cuenta el punto de vista algebraico, el tratamiento de un 4-espacio<sup>13</sup> es muy similar al tratamiento de un 3-espacio. Lo único que se necesita es una coordenada más. Minkowsky en su formalismo geométrico considera un espacio tetra dimensional que es

---

<sup>11</sup> El físico y matemático francés Henry Poincarè publica en 1905 un artículo acerca de la teoría del electrón, denominado << *Sur la dynamique de l'electron*>>, en donde introdujo un espacio cuatridimensional (x,y,z,ict), para buscar de forma sistemática todos los invariantes – Lorentz.

<sup>12</sup> Pertenece al estudio de la geometría no euclidiana descubiertas en el siglo XIX por matemáticos destacados de la época como Lobachevsky, Bolyai y Gauss. Se define como un sistema geométrico que satisface los cuatro postulados de Euclides a excepción del quinto postulado.

<sup>13</sup> Se refiere a un espacio cuatridimensional.

absoluto con coordenadas  $(ct, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ . Sin embargo, para considerar el tiempo como una autentica cuarta coordenada que complementa las otras coordenadas espaciales del espacio estándar tridimensional  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ , estrictamente debe tener sus mismas unidades. Esto puede obtenerse si consideramos multiplicar el tiempo por la velocidad de la luz, debido a que se ha demostrado bajo el contexto de la relatividad especial que esta es la misma para todos los marcos de referencia inerciales.

Para Minkowsky, el tiempo en un sentido estricto, se puede pensar como un imaginario, debido a que se logra considerar a este, como una dimensión espacial más, dentro de su base geométrica. Este enunciado escrito anteriormente es una de los aportes más importantes dentro de la geometría del espacio/tiempo propuesta por el matemático Ruso. Una interpretación de ello, es el moverse en el “tiempo imaginario” hacia atrás y hacia delante simplemente tal como nos movemos en el espacio de izquierda hacia derecha. Cabe resaltar que a pesar de que Minkowsky tuviera un gran interés por teorías particulares de la física y por tener una intuición geométrica formidable, su formación académica era como matemático. Por ello, toda su construcción geométrica es propuesta, con base a un formalismo matemático, que en palabras del propio Minkowsky explicaría una propiedad geométrica de la física (Minkowski, 1908).

La distancia  $S$  en un 4-espacio entre los puntos  $ct, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$  y  $ct', \mathbf{x}', \mathbf{y}', \mathbf{z}'$  viene dada por una relación Pseudo-pitagórica:

$$s^2 = c(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 \quad (1.2)$$

Si se considera que  $t, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$  y  $t', \mathbf{x}', \mathbf{y}', \mathbf{z}'$  se encuentran infinitesimalmente desplazados uno del otro. Por lo tanto, tenemos que:

$$ds^2 = cdt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (1.3)$$

Teniendo en cuenta la Ec. 1.3, se puede observar que en la primera coordenada expresada en la métrica es donde recae toda la interpretación física, en cuanto al principio causal. Inicialmente, consideremos la figura 1.6, aquí podemos observar que la

---

<sup>14</sup> La métrica de Minkowski tiene signos negativos o signatura (-2), debido a que dicho espacio/tiempo es tetra-dimensional Pseudo-euclidiano, donde la cuarta coordenada es el número imaginario  $ict$ , donde  $c$  representa la velocidad de la luz.

representación del cono de luz está ilustrada bajo 3 coordenadas. Esto ocurre debido a que es imposible lograr imaginar un esquema de un espacio tetra dimensional. Geométricamente se puede argumentar que no es posible trazar cuatro líneas perpendiculares unas con otras. Por ello, se omite la coordenada espacial  $z$  y se sustituye por la coordenada  $ct$ , para representar los sucesos en el espacio/tiempo. Por otro lado, la interpretación física de la primera coordenada de la métrica se debe a la unificación de los conceptos de espacio y tiempo, ya que no se puede considerar estos dos conceptos como entidades independientes. Lo anterior gracias a que se logró demostrar que la simultaneidad no es absoluta como afirmaba Newton, sino que es relativa a cada observador. Todo esto puede demostrarse con base al segundo postulado de la relatividad especial de la constancia de la velocidad de la luz. Esta afirmación que enuncia que la velocidad de la luz es la misma para todos los sistemas de referencia y que es cuantificable con un valor numérico finito, es de vital importancia en la explicación del principio causal desde el marco de la Teoría Especial de la Relatividad, debido a que en la teoría Newtoniana al existir un tiempo absoluto, se podía considerar que para conectar dos eventos cualesquiera en la naturaleza se necesitaría una señal física con velocidad infinita. Esta afirmación bajo la relatividad especial es incorrecta, ya que para que dos eventos se encuentren conectados causalmente se requiere de una velocidad menor o igual que la luz que los conecte o de lo contrario sería imposible su conexión causal.

Por otra parte, una característica o propiedad fundamental del modelo matemático del espacio/tiempo de Minkowsky es que este es Pseudo-plano<sup>15</sup> y vacío. Físicamente, esto indica que este espacio/tiempo, puede emplearse como una aproximación local del espacio/tiempo en regiones considerablemente pequeñas.

Con base en lo anteriormente escrito, se puede dar cuenta de la importancia que representan los conos de luz en el estudio de la Teoría Especial de la Relatividad, debido a que son representaciones geométricas que tienen para el entendimiento y correcta interpretación de las líneas del universo de la materia. No obstante, la verdadera importancia

---

<sup>15</sup> Hacemos referencia a que el espacio/tiempo de Minkowsky es Pseudo-plano, debido que no obedece en rigor la geometría euclidiana. Un ejemplo de ello es la desigualdad triangular. Para el caso de la geometría Euclidiana tridimensional los lados  $A$ ,  $B$  y  $C$  de un triángulo, cumplen con la relación:  $A + B > C$ . Por otra parte para las geometrías no euclidianas como la Minkowskiana tetra dimensional establece que la desigualdad triangular se define mediante la expresión  $A + B < C$ .

de los conos de luz radica en que estos permiten comprender fácilmente el principio causal, el cual relaciona la causa y el efecto de un evento. La descripción de un evento o la evolución de un objeto en el espacio/tiempo se conocen como geodésica, que se define como la distancia o ruta más corta entre dos puntos.

Teniendo en cuenta las geodésicas y la posición de los conos de luz, se puede comprender el principio de causalidad desde el contexto de la Teoría Especial de la Relatividad TER, como se enuncia a continuación.

### **1.2.5.1 Clasificación del intervalo cuadrado:**

Según Vélez (2012), el intervalo cuadrado se puede clasificar en primer lugar en intervalo nulo o luminoso, cuando el intervalo  $\Delta s^2$  entre dos eventos es igual a cero y la componente temporal  $(c\Delta t)^2$  es igual a la componente espacial. Es decir:  $ds^2 = 0$  ;  $(cdt)^2 = (dx^2 + dy^2 + dz^2)$ .

Por otra parte, existe el intervalo temporal o como de tiempo, cuando el intervalo  $\Delta s^2$  entre dos eventos es mayor a cero, entonces la componente temporal  $(c\Delta t)^2$  es mayor que la componente espacial y el intervalo se denomina intervalo temporal. Es decir:  $ds^2 > 0$  ;  $(cdt)^2 > (dx^2 + dy^2 + dz^2)$ .

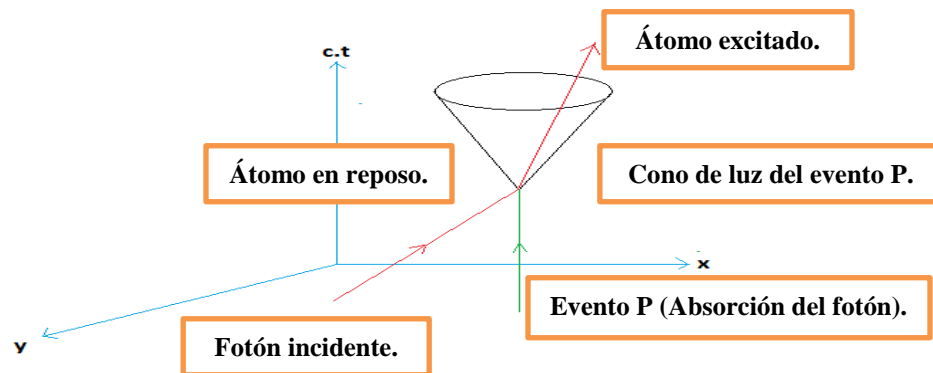
Finalmente, existe el intervalo espacial, el cual se presenta cuando el intervalo  $\Delta s^2$  entre dos eventos es menor a cero, entonces la componente temporal  $(c\Delta t)^2$  es menor que la componente espacial y el intervalo se denomina intervalo espacial. Por lo que:  $ds^2 < 0$  ;  $(cdt)^2 < (dx^2 + dy^2 + dz^2)$ .

Sin embargo, para dar explicación a las diferentes relaciones causales, se recurrirá a un ejemplo que permitirá ilustrar claramente dicho concepto escrito anteriormente. Tal como menciona Tejeiro (2005), el ejemplo a considerar es el de la absorción de un fotón por un átomo<sup>16</sup>. Consideremos una partícula no elemental (átomo, molécula, ion o núcleo) con masa

---

<sup>16</sup> Estos ejemplos fueron extraídos del texto “*Sobre la teoría Especial de la Relatividad*” de Juan Manuel Tejeiro Sarmiento - Observatorio Astronómico Nacional- Facultad de Ciencias Universidad Nacional de Colombia, 2004.

en reposo  $Mo^{17}$ , sobre el cual incide un fotón de frecuencia  $\gamma$ , el cual es absorbido por la partícula. En la figura 1.7, se puede evidenciar las líneas del universo del átomo inicialmente en estado de reposo, que intercepta la línea del universo del fotón, evento P (Presente) y se dispersa siguiendo una línea de universo recta, la cual está dentro del cono de luz futuro del evento P.



**Figura 1.7:** Representación gráfica de un diagrama causal que representa la línea del universo sobre la cual un fotón de frecuencia  $\gamma$  colisiona y es absorbido por un átomo con masa en reposo  $Mo$ , para posteriormente ser dispersado siguiendo una línea del universo recta.

En este ejemplo, se puede observar que la línea del universo que representa el momento posterior o después de la colisión inelástica entre el fotón y el átomo es menor a la velocidad de la luz. Se puede conectar causalmente con otro evento, debido a que se requiere una velocidad menor que la de la luz para conectar dos posibles eventos.

<sup>17</sup> Una partícula elemental está caracterizada por su masa propia y por otros números cuánticos como la carga, el spin, el isospín y basta que uno de estos parámetros sea diferente para que se tenga otra partícula elemental distinta. Por otra parte, un átomo se encuentra caracterizado por su número atómico (Número de electrones y protones que definen sus propiedades químicas). La masa propia de un átomo no es un parámetro estricto que determine una clase de átomo, dado que los átomos presentan estructura interna (como los niveles de energía). Es por ello, que un átomo no es considerado como una partícula elemental.

## Capítulo II

### La causalidad en la Teoría General de la Relatividad.

#### 2.1 Introducción histórica

Antes de que se construyera y formulara la teoría de la relatividad, la teoría que realizaba una descripción válida de la gravedad, era la concepción planteada por el físico y matemático inglés Isaac Newton en 1686, que denominó la ley de la Gravitación Universal. En este modelo, la gravedad se concebía como el resultado de una fuerza de atracción entre dos masas, que actuaban a distancia instantáneamente. Esto significaba que si uno movía uno de los objetos, la fuerza sobre el otro cambiaría inmediatamente. Sin embargo, dos siglos después, en 1905 un físico alemán que trabajaba como empleado de patentes en Berna, Suiza llamado Albert Einstein construye la Teoría de la Relatividad Especial en la que no es posible concebir la acción a distancia instantánea propuesta por Newton, debido a que cualquier señal física que conecte esos dos eventos debe propagarse a una velocidad menor o igual a la de la luz, atendiendo así al segundo postulado de la **TER** y por ende al cambio de concepción formal de los conceptos de espacio y tiempo (Davis, 1995). No obstante, a pesar de postular con éxito la constancia de la velocidad de la luz para cualquier sistema de referencia, Einstein con esta teoría no lograba reconciliar la relatividad especial con la teoría de la gravedad de Newton. Por ello, en 1915 publica la Teoría General de la Relatividad **TGR** donde incluye los efectos gravitatorios y sugiere que la gravedad no es una fuerza como las otras, sino que es una consecuencia de que el espacio y tiempo no sea plano, como se proponía desde la concepción Newtoniana. Einstein proponía que el espacio/tiempo estaba curvado, por la distribución de masa y energía presente en el mismo, de tal manera que la gravedad se debía considerar como un fenómeno geométrico.

#### 2.2 Las ecuaciones de campo de Einstein (E.C.E):

El físico teórico Alemán, Albert Einstein en la formulación de la relatividad especial, describe un espacio/tiempo vacío sin presencia de masas con una geometría plana tetra dimensional. No obstante, en la Teoría General de la Relatividad TGR incluye los efectos

gravitatorios que son producidos en primera instancia por las masas presentes, cuya distribución es la consecuencia fundamental de la curvatura del espacio/tiempo. Las ecuaciones que describen la relación entre la geometría y la presencia de materia en el espacio/ tiempo son las ecuaciones de campo de Einstein propuestas en 1915, las cuales representan el “corazón “o la base de dicha teoría. En estas ecuaciones se describe explícitamente cómo la distribución de masas es la determinante de la curvatura del espacio/tiempo en cada punto y, a su vez, cómo la geometría determina el movimiento de las masas (Rodríguez, 2012).

De acuerdo a Quintana (2004), *Espacio, tiempo y universo*, cuando hablamos de distribución de masas, el concepto abarca las posiciones, magnitudes, distancias y movimientos. Si se toma como ejemplo una estrella, nos estamos refiriendo a un objeto astronómico de gran masa que está contenida en un pequeño volumen. Lo anterior implica que la estrella genera en su vecindad una geometría distinta para el caso de que su volumen fuera mayor. Esto implica que la geometría cerca de la estrella puede ser sustancialmente distinta en uno u otro caso. Si se considera como ejemplo particular de estrella el Sol, se puede decir que se está hablando de una estrella con una masa de  $2 \times 10^{30} \text{ Kg}$  y un radio de  $700.000 \text{ Km}$ . Sin embargo, existen estrellas, como las de neutrones, donde esa misma masa está contenida en una esfera de  $10 \text{ Km}$  de radio. Es decir, se trata de un objeto astronómico con un radio  $70.000$  veces menor al del Sol y con un volumen también menor. Cerca de una estrella de neutrones tan densa el espacio/tiempo tiene una curvatura muy grande (Sepúlveda, 2003) . Por otra parte, si se detiene a observar la Tierra, que tiene una masa de  $6 \times 10^{24} \text{ Kg}$  y un radio de  $6.400 \text{ Km}$ ., ejerce en el espacio/tiempo una curvatura muy pequeña, prácticamente despreciable. Sin embargo, con el mismo tamaño pero con una masa cercana a la del Sol generaría una curvatura importante. Si con su misma masa se disminuyera su radio en forma significativa, hasta unos pocos centímetros, ocasionaría una gran curvatura en el espacio/tiempo cercano a su superficie, el cual asumiría propiedades muy particulares.

En cuanto al universo, dado su inmensidad, las distancias que se dan en él son casi inconmensurables<sup>18</sup>; no obstante, la cantidad de materia que aloja por unidad de volumen es

---

<sup>18</sup> En este contexto hacemos referencia al término inconmensurabilidad como un valor que es muy difícil o imposible de medir o valorar.



muy baja cuando se compara con un cuerpo como la Tierra. Tal como lo menciona, Sepúlveda (2003), si se observa al universo a grandes escalas astronómicas, es decir, a millones de años luz, el espacio lo observamos casi plano como una hoja de papel. Sin embargo, si la observación es orientada hacia lugares cercanos se encuentra un aspecto rugoso. Por otra parte, si se considera la totalidad del universo, el espacio se observa con una forma curva. La fuerza que ejerce una masa ubicada en un plano cercana a otra, desde la perspectiva de la mecánica clásica Newtoniana se expresa por medio de la ecuación de la ley de gravitación universal. Consiste de una fuerza determinada por el producto de las masas de los cuerpos interactuantes que es inversamente proporcional a la distancia al cuadrado entre ellas.

Si se tiene en cuenta la mecánica clásica Newtoniana, la acción gravitatoria de un cuerpo sobre otro es expresada a través de la ley de gravitación universal como se enunció anteriormente. Dicha ley se interpreta como la acción directa que genera una masa sobre otra. Es una acción que se transmite a través del espacio entre las masas que se encuentran en él. Esta fuerza decrece con el inverso al cuadrado de la distancia en que se encuentran ubicadas una de las otras. Su propagación entre las masas separadas en el espacio se efectúa a una velocidad infinita, debido a que su efecto se considera que es producido instantáneamente. En realidad, esto es imposible, ya que la máxima velocidad de propagación de cualquier señal es la de la luz  $c$ , de acuerdo con el segundo postulado de la Teoría Especial de la Relatividad TER. Esto pone de manifiesto una gran falla en la teoría Newtoniana, ya que no cuenta con ningún medio físico para considerar la velocidad de las acciones a distancia, lo que se constituye en un problema fundamental de la mecánica clásica.

Con base en lo anteriormente escrito, las ecuaciones de campo de Einstein establecen una relación entre la curvatura del espacio/tiempo en un punto y la distribución de masa y energía que existe allí. Por tanto dichas ecuaciones se expresan de la forma:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (2.1)$$

Donde  $R_{\mu\nu}$  es el tensor de Ricci, el cual constituye la contracción del tensor de curvatura de Riemann<sup>19</sup> y muestra el grado de curvatura del espacio/tiempo en las vecindades de una masa puntual, fuente de “campo gravitacional”.  $g_{\mu\nu}$  representa un tensor simétrico de 4x4 con 10 componentes independientes,  $R$  que representa el escalar de curvatura, el cual está asociado a la traza total de la curvatura de Ricci y del tensor de curvatura,  $G$  que representa a constante de gravitación universal,  $c$  la velocidad de la luz y finalmente  $T_{\mu\nu}$  que representa el tensor de materia/energía que se utiliza para describir el flujo de energía y momento lineal de una distribución continua de materia.

Estas ecuaciones representan una igualdad fundamental, la cual es que la curvatura del espacio/tiempo en cualquier lugar del universo (término izquierdo de la ecuación) debe ser igual a la distribución tanto de la materia como de la energía en esa parte del universo (término derecho de la ecuación) (ver Ec.2.1).

Sin embargo, con el objetivo de comprender mejor la estructura fundamental de las ecuaciones de campo de Einstein, se construye una expresión, la cual queda expresada de la siguiente manera:

$$(\textit{Curvatura geométrica espacio/tiempo}) = G \times (\textit{Densidad producida por una masa en espacio/tiempo}).$$

Donde  $G$  es la constante de gravitación universal de Newton. La expresión anteriormente escrita es de carácter dinámica e incluye el movimiento de las partículas masivas libres y la luz, además su desarrollo se efectúa en función de la ley de gravedad. Teniendo en cuenta la expresión, la curvatura geométrica del espacio/tiempo y la densidad producida por una masa en el espacio/tiempo se encuentran encerradas entre paréntesis, debido a que son entidades de cierta complejidad. En primera instancia, el paréntesis ubicado en la parte derecha de la expresión se encuentran cantidades tales como: el tensor de curvatura de Ricci  $R_{\mu\nu}$ , el tensor simétrico 4x4  $g_{\mu\nu}$  y el escalar de curvatura  $R$ . Por otra parte, el paréntesis ubicado en la parte izquierda de la ecuación representa todas las energías y presiones presentes en una

---

<sup>19</sup> El tensor de curvatura de Riemann se define como un tensor covariante de cuarto orden que con ayuda del tensor métrico  $g$  para subir el primer índice, se obtiene un tensor (1,3), es decir, un tensor covariante de orden 1 y contravariante de orden 3. En notación de índices lo anteriormente dicho se expresa:  $R^a_{bcd}$

región particular del espacio/tiempo, considerando la predicción de equivalencia de masa y energía, donde la masa se puede convertir en energía y la energía en masa. Sin embargo, si en una región del espacio/tiempo la densidad de materia es cero, significa que el espacio/tiempo está libre de materia. Por el contrario, si existe una gran cantidad de materia altamente comprimida, este término es muy grande. En conclusión la densidad de materia-energía del espacio/tiempo no es un número único, sino que varía en cada punto de dicha región (Quintana, 2004).

### **2.3. Estructura causal en la Teoría General de la Relatividad.**

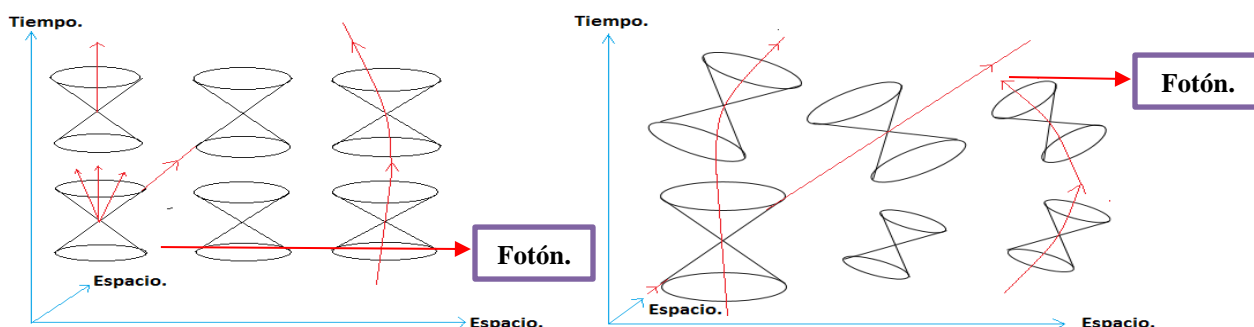
Cuando se habla de estructura causal desde el contexto de la Teoría General de la Relatividad, hacemos referencia a considerar todas las métricas obtenidas posibles que se pueden originar en el espacio/tiempo. En consecuencia, dicha estructura espacio/temporal desde este contexto es producida por la curvatura generada por la distribución de materia presente en dicha región. En otras palabras, según Hawking & Ellis (1973), si se analiza en detalle dicha afirmación, podemos considerar que la estructura causal se encuentra relacionada con la topología<sup>20</sup> del espacio/tiempo mismo.

En la Teoría General de la Relatividad, la distribución de los conos de luz ya no es uniforme, como sucedía en el espacio/tiempo de Minkowsky de la Relatividad Especial, debido a que en dicha teoría la curvatura del espacio/tiempo producida por un objeto masivo en dicha región, es fundamental en la explicación de las posibles trayectorias que describan las partículas masivas limitadas por su cono de luz. Considerando lo anterior, las posibles trayectorias que recorran las partículas masivas limitadas por su cono de luz se verán afectadas por la curvatura espacio/temporal producida (Misner Charles, 1973). En otras

---

<sup>20</sup> Se presenta coloquialmente a la topología como la “geometría de la página de goma”. Esto hace referencia, a que en la geometría Euclidiana dos objetos son equivalentes mientras se pueda transformar uno en otro mediante isomerías (rotaciones, traslaciones, reflexiones, etc.), es decir mediante transformaciones que conservan las medidas de ángulo, área, longitud, volumen, etc. Por otra parte, el topólogo considera los mismos objetos que el geómetra, pero en un sentido mucho más amplio: En topología está permitido doblar, estirar, encoger, retorcer, etc., los objetos, pero siempre y cuando se haga sin romper, ni separar lo que estaba unido, ni pegar lo que estaba separado. Desde este contexto un triángulo es topológicamente equivalente a una circunferencia; ya que podemos transformar uno en otro de forma continua y reversible. Sin embargo, una circunferencia no es topológicamente equivalente a un segmento, debido a que habría que partirla (o pegarla) por algún punto. Es por esta razón, que a la topología se le considera la “geometría de la página de goma”, ya que es como si estuviéramos estudiando la geometría sobre un papel de goma que pudiera contraerse, estirarse, etc.

palabras, tanto las partículas con masa como también la luz, se moverán recorriendo por una trayectoria dictada por la curvatura del espacio/tiempo, tal como se indica en la figura 2.1.



**Figura 2.1:** *En la imagen izquierda se muestra la representación gráfica de los conos de luz en el espacio/tiempo de Minkowsky de la relatividad especial, donde los ejes temporales de los conos están en la misma dirección y sentido. En la imagen derecha se muestra la orientación no uniforme de los conos de luz, debido a que el espacio/tiempo está curvado<sup>21</sup>.*

Con base a lo anteriormente expuesto, se puede decir que no existe una única estructura causal en el marco de la Teoría General de la Relatividad, debido a que dicha estructura varía dependiendo curvatura del espacio/tiempo producida por la distribución de materia/energía presente en dicha región. Si se considera el espacio/tiempo tetra dimensional de Minkowsky de la relatividad especial, podemos afirmar que solo existe una única estructura causal en la cual los conos de luz permanecen en la misma dirección y en el mismo sentido, debido a la ausencia de materia presente en dicho espacio/tiempo. Por otra parte, si se tiene en cuenta las soluciones exactas de las ecuaciones de campo de Einstein, que como se explicó en la sección anterior describen la interacción fundamental de la gravitación como resultado de que el espacio/tiempo está siendo curvado por la materia, se puede evidenciar que existen múltiples soluciones y en consecuencia estructuras causales diferentes para cada solución propuesta. Las soluciones exactas a las ecuaciones de campo desde el contexto de la relatividad general son: Solución de Schwarzschild, que muestra a curvatura espacio/temporal de un cuerpo simétricamente esférico y estático, la solución de Reissner -

<sup>21</sup> Cabe resaltar que la representación gráfica de los conos de luz ilustrada en la figura, no obedece a ninguna métrica en particular. Lo que se quiere representar con esta imagen es que bajo el contexto de la Teoría General de la Relatividad al existir un espacio/tiempo que se curva con la presencia de objetos masivos en dicha región, los conos de luz también se ven afectados y por tanto se curvan.

Nordstrom que describe la curvatura en el espacio/tiempo producida por un cuerpo simétricamente esférico, pero con presencia de carga eléctrica, la solución de Kerr que describe la curvatura de un cuerpo astronómico de masa  $m$  y que rota, es decir que cuenta con momento angular  $m$ . Finalmente se expresa la solución de Kerr - Newman que describe una curvatura espacio/temporal producida por un cuerpo masivo que rota y cuenta con presencia de carga eléctrica. Cabe resaltar, que la solución que vamos a considerar en el presente trabajo es la métrica de Kerr. Por lo tanto se realizará el análisis de dicha estructura causal.

## **2.4. La solución de Schwarzschild:**

### **2.4.1 Caracterización:**

Albert Einstein publica en noviembre de 1915 las ecuaciones de campo de la relatividad general, que describen el campo gravitacional en el espacio/tiempo. Sólo después de que Einstein formulara sus leyes de la gravedad en la TGR, los físicos de la época volvieron a confiar en que tenían un conocimiento suficiente de la gravitación y la luz. Por lo tanto volvieron al estudio de las estrellas oscuras propuestas por Mitchell y Laplace en el siglo XVII<sup>22</sup>. El primer paso fue dado por Karl Schwarzschild, uno de los astrofísicos alemanes más distinguidos en el siglo XX. Schwarzschild servía en el ejército alemán en el frente ruso de la primera guerra mundial y al tiempo intentaba descubrir nuevas predicciones de las leyes de la gravitación de Einstein aplicadas a las estrellas. Por ello, la primera solución exacta a las ecuaciones de campo de Einstein, fue desarrollada por Karl Schwarzschild en 1916. Esta solución describía la curvatura circundante de una masa simétricamente esférica que se considera puntual, y que estaba situada en el origen de coordenadas. Esta simetría esférica significa que la métrica del espacio/tiempo debe ser la misma para todos los puntos situados a la “misma distancia” del centro (D’Inverno, 1992). La importancia de esta solución

---

<sup>22</sup> En el siglo XVII un filósofo natural Británico llamado John Mitchell, se atrevió a combinar la descripción corpuscular de la luz con las leyes de la gravitación de Newton, para determinar la velocidad inicial que necesita una partícula para huir del campo gravitacional de la estrella donde fue emitida la. A esta velocidad se le denomina velocidad de escape. Mitchell encontró que esta velocidad es proporcional a la raíz cuadrada de la masa de la estrella dividida por su circunferencia. Por lo tanto, para una estrella de masa fija, cuanto más pequeña es la circunferencia, mayor es la velocidad de escape.

es evidente, ya que describe una gran parte de cuerpos encontrados en el universo: las estrellas no rotantes. Según el argumento original<sup>23</sup>, la solución de Schwarzschild, se encontraba fundamentada bajo las siguientes condiciones:

1. El cuerpo en cuestión permanece sin cambiar en el tiempo (estático) y por tanto también lo hacen las coordenadas de su elemento de línea.
2. La métrica es espacialmente simétrica, y por lo tanto es invariante ante rotaciones (simetría axial).
3. La solución se reduce a la de un espacio/tiempo de Minkowsky en el caso límite, es decir cuando  $r \rightarrow \infty$  (asintóticamente plana).
4. La solución se reduce a la de un espacio/tiempo plano de Minkowsky cuando la masa del objeto astronómico  $m \rightarrow 0$ , ya que el centro de atracción con masa cero es igual, a la ausencia del mismo.

El sistema de coordenadas elegido para esta solución es el sistema de coordenadas de esférico  $(t, r, \theta, \varphi)$ , debido a que se considera la curvatura espacio/temporal esféricamente simétrica<sup>24</sup>. Por lo tanto, la métrica que se debe encontrar una métrica debe representar una curvatura de este tipo.

Teniendo en cuenta lo anterior, la métrica que describe dicha curvatura se encuentra representado por el elemento de línea:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (2.3)$$

Por otra parte, por motivos de fluidez en la continuación del escrito, la demostración formal de este elemento de línea se encontrará en la sección de anexos del presente trabajo (Ver. Anexo A).

Describiendo el elemento de línea que representa la métrica de Schwarzschild (Ec 2.3), inicialmente se puede considerar que la coordenada  $t$  se define como el tiempo coordenado o el “tiempo lejano”, el cual corresponde al tiempo medido por un observador

---

<sup>23</sup> Artículo original de Karl Schwarzschild publicado en 1916 ante la academia Prusiana de Ciencias en Berlín: Schwarzschild, Karl, *Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie. Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften* Pág.189-196, 1916.

<sup>24</sup> Las coordenadas  $(t, r, \theta, \varphi)$  también son conocidas como coordenadas de Schwarzschild.

lejano de la región donde se produce la curvatura espacio/temporal. Por otra parte, la coordenada  $r$  o coordenada radial determina la distancia entre el centro de la masa  $m$  a cualquier punto en el espacio/tiempo. Las coordenadas  $\theta$  y  $\varphi$  son las coordenadas angulares utilizadas usualmente. Si se compara, el elemento de línea de Schwarzschild con la métrica definida para el espacio/tiempo plano de Minkowsky, el término angular no sufre modificaciones, debido a que se considera un cuerpo simétricamente esférico. Cabe aclarar, que  $m$  se define como la masa del cuerpo que genera la curvatura espacio/temporal.

Con el elemento de línea que describe la métrica de Schwarzschild, brinda una descripción completa del espacio/tiempo externo a un cuerpo esférico, estático y sin carga. Toda característica del espacio/tiempo alrededor de la curvatura producida por una masa  $m$ , está determinada por la métrica de Schwarzschild. En consecuencia, cada uno de los parámetros de masa, carga eléctrica y rotación han sido comprobados a partir de dicha solución.

Teniendo en cuenta la ecuación 2.3, que representa el elemento de línea de la solución Schwarzschild, se observa que cuando  $r = 2m$ , el coeficiente métrico  $dt^2$  es igual a cero, mientras que  $dr^2$  tiende a infinito y la solución se muestra como singular. La región espacio/temporal  $r = 2m$  se conoce como el radio de Schwarzschild, que forma una esfera que corresponde al lugar límite donde se puede predecir y obtener información. Por otro lado, en términos del estudio de la estructura causal, dicha región se conoce como horizonte de sucesos. Cuando las componentes métricas tienden al infinito, es decir cuando se vuelven singulares para ciertos valores o regiones en el espacio/tiempo existen dos posibles motivos: inicialmente que la geometría del espacio/tiempo es singular en esencia o que las coordenadas utilizadas para su descripción no son apropiadas para cubrir esa región.

No obstante, es posible por medio del cálculo de un escalar que nos permita definir entre estas dos posibilidades<sup>25</sup>. La ventaja fundamental de implementar esta herramienta matemática es que los escalares son invariantes para cualquier sistema de referencia. Con la aplicación de dicho escalar de curvatura, se muestra que la región definida en  $r = 2m$  es una

---

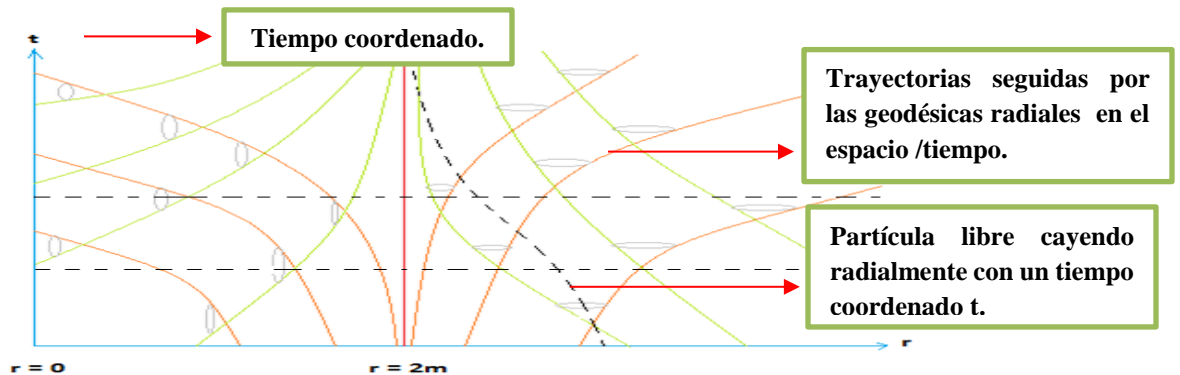
<sup>25</sup> Este escalar se conoce como el escalar de Ricci o escalar de curvatura que se define mediante la expresión matemática:  $R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{48M^2}{R^6}$

singularidad producida por un error en el sistema de coordenadas aplicado, sin embargo la región  $r = 0$  es una singularidad esencial que no puede ser removible de ningún forma matemática y corresponde al punto central de la solución, donde se encuentra toda la masa del objeto astronómico que produce una fuerte curvatura en el espacio/tiempo exterior a ella. Lo anterior, motivó a estudiosos destacados en relatividad general de la época tales como: Sir Arthur Eddington, Martin Kruskal, John Archibald Wheeler, entre otros a formular algunos sistemas de coordenadas que permitieran describir un comportamiento adecuado de la métrica en regiones del espacio/tiempo tales como el radio de Schwarzschild  $r = 2m$ .

### 2.4.2 Estructura causal en la solución de Schwarzschild.

Al evidenciar las irregularidades presentadas en el elemento de línea que describe la solución de Schwarzschild para ciertas regiones del espacio/tiempo  $r = 2m$  y  $r = 0$ , estudiosos destacados en relatividad general formularon sistemas de coordenadas que permitieran describir de manera regular el espacio/tiempo en la región del radio de Schwarzschild  $r = 2m$ , particularmente.

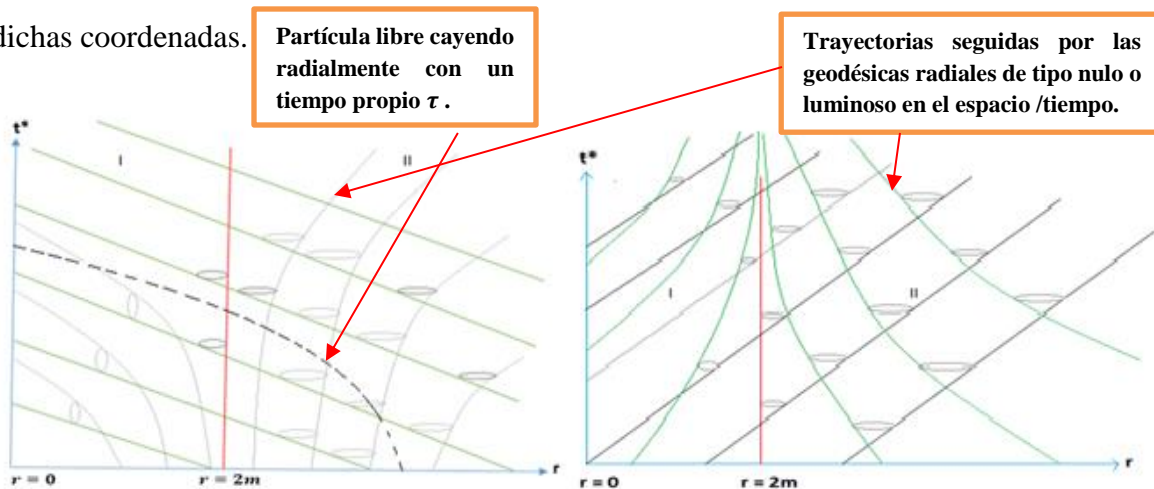
Cuando se estudia la estructura causal de una solución particular de las ecuaciones de campo de Einstein, implica en primera instancia conocer las trayectorias de los fotones y de las partículas con masa, lo que es semejante a calcular las geodésicas radiales nulas y temporales, respectivamente del espacio, que son las trayectorias seguidas por las partículas libres que se mueven en el espacio/tiempo (D'Inverno, 1992). Considerando la figura 2.3, podemos observar el comportamiento de los conos de luz en coordenadas de Schwarzschild.



**Figura 2.3:** Representación gráfica del comportamiento de los conos de luz en coordenadas de Schwarzschild.



Teniendo en cuenta la figura 2.3, se puede observar que la región  $r = 2m$ , actúa como un lugar singular en la métrica de Schwarzschild. Esto se puede evidenciar con las trayectorias de comportamiento asintótico que describen las partículas libres en el espacio/tiempo, cuando se acercan a dicha región. Posteriormente, se determinó que mediante la aplicación de cálculos matemáticos  $r = 2m$  (Radio de Schwarzschild), era una singularidad aparente, ya que ésta se producía por un error en el sistema de coordenadas utilizado<sup>26</sup>. Con el objetivo de describir un comportamiento más regular en la solución de Schwarzschild, se tenía que cambiar el sistema de coordenadas que se utilizaba hasta el momento. Por lo tanto, dos científicos británicos llamados Sir Arthur Eddington y David Finkelstein formularon otro sistema de coordenadas llamado de Eddington - Finkelstein, el cual consistía en geodésicas radiales de tipo nulo o luminosos entrantes y salientes. Considerando la figura 2.4, podemos observar el comportamiento de los conos de luz en dichas coordenadas.

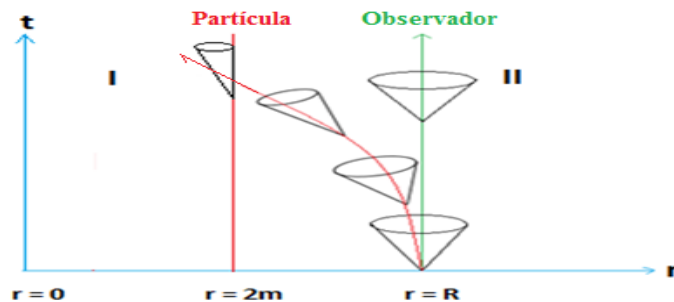


**Figura 2.4:** Representación gráfica del comportamiento de los conos de luz en coordenadas avanzadas “entrantes” y en coordenadas retardadas “salientes” de Eddington - Finkelstein.

Antes de comenzar a analizar en detalle la gráfica de la estructura causal en coordenadas de Eddington- Finkelstein es importante hacer énfasis que los conos de luz

<sup>26</sup> La singularidad aparente en  $r = 2m$ , surge a efecto de un error en el sistema de coordenadas utilizado. Este radica fundamentalmente en que las coordenadas de Schwarzschild  $(t, r, \theta, \varphi)$ , toman a  $t$  como un “tiempo lejano” el cual corresponde a un observador lejano de donde se produce la coordenadas espacio/temporal, por lo que un haz de luz desde las mediciones de ese observador requerirá un tiempo infinito en pasar la región del horizonte de eventos  $r = 2m$ . Lo que en consecuencia, dicho rayo luminoso quedara girando en torno al horizonte de eventos  $r = 2m$ , sin nunca ingresar al interior de este horizonte.

hacen referencia a los caminos seguidos en el espacio por destellos luminosos emitidos desde sus vértices. Teniendo en cuenta la figura 2.4 (región II), se puede observar inicialmente que los conos de luz que se encuentran lejos de la distribución de materia que produce la curvatura espacio/temporal, permanecen inalterados, ya que asintóticamente el espacio/tiempo es plano. Por otra parte, si se considera la figura 2.5, se puede observar que los conos de luz se cierran y se inclinan más a medida que nos acercamos a la región  $r = 2m$  y posteriormente a la región  $r = 0$ , indicando así una reducción de los rayos luminosos que emite cada observador limitado por su cono de luz. La representación gráfica de lo anteriormente expuesto es:



**Figura 2.5: Representación gráfica del comportamiento de los conos de luz a medida que se acercan a la región  $r = 2m$  (horizonte de eventos).**

Hasta el momento conocemos que el radio de Schwarzschild es una región muy particular. Sin embargo, podemos decir que cuando una partícula se encuentra en dicha región, ésta no podrá escapar de dicho lugar. A esta superficie se le conoce también como el horizonte de sucesos y se define como el camino en el espacio/tiempo donde la luz, la cual se define como el evento que más rápido puede viajar en el universo intenta de escapar, pero no lo consigue, es decir, que ninguna partícula material puede salir de dicha región. En otras palabras, es límite de todos los eventos que pueden ser detectados por un observador externo. Por otro lado, si se continúa observando la figura 2.5, en la región  $r < 2m$ , las geodésicas terminan cerrándose inevitablemente ante la singularidad esencial, debido a que esta se considera como una superficie atrapada, ya que no existe conexión causal entre un observador exterior a la región  $r = 2m$  y un observador que se encuentre dentro la región  $r = 2m$ , debido a que no hay señal física que conecte estos dos eventos u observadores, porque como se explicó anteriormente ni la luz que es lo más rápido que se transporta puede escapar

de dicha región a efecto de su importante curvatura espacio/temporal. En consecuencia, también las partículas con masa que se encuentran confinadas en su cono de luz caerán inevitablemente en la singularidad. En conclusión, si definimos el comportamiento de los conos de luz en la región  $r < 2m$  (Región I), se puede decir que cualquier evento masivo o luminoso que ingrese a dicha región, tendrá como futuro causal único la singularidad esencial  $r = 0$ . Si se tiene en cuenta lo anterior, se puede decir que el horizonte de eventos actúa como una región unidireccional. Por último, en la región  $r > 2m$  los fotones tienen opción de escapar de dicha región, es decir, existe una conexión causal de dos eventos ubicados dentro de dicha región.

Con base, a lo anteriormente expuesto plantearé algunos comentarios para resumir: Cuando se estudia el elemento de línea que describe la solución de Schwarzschild, inicialmente nos encontramos con una irregularidad en la métrica para la región  $r = 2m$ . Aplicando el escalar de curvatura invariante, se muestra que dicha región es una singularidad removible, es decir, que es producto de un error del sistema de coordenadas aplicado y que la región  $r = 0$  es una singularidad esencial y que no puede ser removible matemáticamente. De estas afirmaciones mencionadas anteriormente, se puede concluir que en primera instancia las coordenadas de Schwarzschild son inapropiadas para describir dichas regiones singulares del espacio/tiempo. Al introducir el sistemas de coordenadas de Eddington-Finkelstein, el cual se muestra la estructura causal con geodésicas entrantes y salientes se remueve la irregularidad en la región  $r = 2m$  y se logra evidenciar un comportamiento más regular de la solución de Schwarzschild. No obstante, existe un sistema de coordenadas que permite describir completamente toda la solución, tanto en el exterior como en el interior del horizonte de sucesos, que se llama Kruskal - Seekeres. Es importante resaltar que a partir del análisis de la solución del elemento de línea que describe la solución de Schwarzschild, se derivan posteriores soluciones exactas de las ecuaciones de campo tales como: Reissner - Nordstrom, Kerr, Kerr - (Newman), entre otras.

## Capítulo III

### Caracterización de la solución de Kerr.

#### 3.1 Introducción:

Las soluciones propuestas por Karl Schwarzschild y por Reissner – Nordstrom<sup>27</sup> se realizan para objetos astronómicos estáticos en el espacio/tiempo. No obstante, la realidad astrofísica en el universo muestra que dichos objetos tales como: galaxias, estrellas, etc. no permanecen inmóviles, por el contrario permanecen en constante rotación. Por ello, en 1963 un físico y matemático Neozelandés llamado Roy Patrick Kerr encuentra una solución exacta a las ecuaciones de campo de Einstein para un objeto astronómico que gira entorno a su mismo eje, a partir de la solución obtenida en 1916 por el físico y astrónomo Alemán Karl Schwarzschild, introduciendo el parámetro de rotación “a”<sup>28</sup>. Dicha solución corresponde a una visión más general y real del comportamiento de los diferentes objetos astrofísicos en el universo.

#### 3.2 Descripción de la métrica de Kerr:

Antes de realizar una descripción correcta y adecuada de una solución exacta de las ecuaciones de campo de Einstein es de vital importancia reconocer el elemento de línea que describa dicha solución. En el capítulo anterior se explicó de manera aproximada la métrica que describe la curvatura en espacio/tiempo de un objeto astronómico simétricamente esférico y estático de masa  $m$ . Sin embargo, dado que el objeto de masa  $m$  se encuentra en una constante rotación es considerable pensar que se debe caracterizar no solo con la masa  $M$ , sino con el momento angular  $J = M \cdot a$ . El sistema de coordenadas utilizado para dicha

---

<sup>27</sup> Hans Reissner (18 de enero de 1874 - 2 de octubre 1967). Físico, matemático e ingeniero Alemán. (Gunnar Nordstrom (12 de marzo 1881 -24 de diciembre de 1923). Físico teórico Finlandés. Estos dos científicos construyen una de las soluciones exactas de las ecuaciones de campo de Einstein en 1918, la cual describe la curvatura espacio/temporal producida por un objeto simétricamente esférico de masa  $m$  y con presencia de carga eléctrica  $Q$ .

<sup>28</sup> El significado físico asignado del parámetro de rotación “a” es indispensable en la descripción de la solución de Kerr, ya que es el encargado de que el espacio/tiempo rote, como consecuencia de que el objeto astronómico se encuentre girando en torno a su eje de simetría. Las unidades de dicho parámetro de rotación están en segundos. Para comprender el manejo de unidades desde el contexto de la Teoría General de la Relatividad, ver el Anexo B.

solución son las de Boyer – Lindquist <sup>29</sup>  $(t, r, \theta, \varphi)$ , las cuales son una generalización del sistema de coordenadas implementado para la solución de Schwarzschild. Con el objetivo de construir una métrica estacionaria y axialmente simétrica<sup>30</sup> para las coordenadas  $(t, r, \theta, \varphi)$ , es importante establecer las condiciones iniciales<sup>31</sup>:

- a. Que los coeficientes métricos sean independientes de  $t$  y  $\varphi$ . Por lo tanto dichos coeficientes deben depender de las coordenadas  $r$  y  $\theta$ .
- b. El elemento de línea debe ser invariante bajo la inversión simultánea  $t$  y  $\varphi$

$$t \rightarrow -t ; \varphi \rightarrow -\varphi$$

El significado físico que se le atribuye a esta definición va ligada fundamentalmente a la fuente de masa que se encuentra rotando alrededor de un eje de simetría.

Teniendo en cuenta lo anterior, la métrica que describe dicha curvatura se encuentra representado por el elemento de línea (en unidades geometrizadas  $C = G = 1$ ):

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2mr}{\rho^2}\right) dt^2 + \frac{4mr}{\rho^2} a \sin^2\theta dt d\varphi - \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 - \rho^2 d\theta^2 - \left( (r^2 + a^2) + \frac{2mr}{\rho^2} a^2 \sin^2\theta \right) \sin^2\theta d\varphi^2 \quad (3.1)$$

En dónde:

$$\rho^2(r, \theta) = r^2 + a^2 \cos^2\theta \quad (3.2)$$

$$\Delta(r) = r^2 - 2mr + a^2 \quad (3.3)$$

---

<sup>29</sup> Las coordenadas de Boyer – Lindquist fueron construidas por dos físicos y matemáticos estadounidenses en 1967, como una herramienta que permite estructurar el formalismo matemático en la métrica de Kerr. Estas se deducen a partir de una transformación realizada de las coordenadas de Eddington- Finkelstein de la solución permitiendo evidenciar que la métrica para la solución de Kerr presenta una geometría Pseudo-esferoidal.

<sup>30</sup> Para conocer en detalle las características de una solución estacionaria y axialmente simétrica se recomienda al lector ver Misner, C , Thorne, K & Wheeler, J. (1973). *Gravitation*. New York: W. H Freeman and Company .

<sup>31</sup> De acuerdo a Hobson M, Efstathiou G & Larembly A (2006), *General Relativity An introduction for physicists*, para este caso particular aplicar una simetría con simetría esférica no es posible, debido a que el eje de rotación del objeto define una dirección especial y en consecuencia esto implica que la isotropía se pierda.

Cabe resaltar, que de acuerdo al sistema de unidades geometrizadas ( $C = G = 1$ ) manejadas desde el contexto de la Relatividad general, los horizontes de evento interno y externo se miden en cm. Con el objetivo de aclarar el manejo de dichas unidades ver el anexo B. Por otra parte, con respecto a la demostración de la métrica que describe la solución de Kerr, por motivos de fluidez y continuidad del documento, esta se realizará en detalle en el Anexo C.

### 3.3 Propiedades básicas de la solución de Kerr:

Con el objetivo de brindar un acercamiento físico a la métrica que describe la solución de Kerr, representada por la ecuación 3.1, se observan algunas propiedades básicas de la misma a continuación:

1. La solución de Kerr, cuando el parámetro de rotación  $a \rightarrow 0$ , con masa ( $m \neq 0$ ):  $J \rightarrow 0$  se reduce a la descripción de un objeto astronómico sin rotación (solución de Schwarzschild).
2. La solución de Kerr, cuando no hay presencia de masa  $m \rightarrow 0$ , se reduce a la descripción de la métrica del espacio/tiempo Pseudoplano de Minkowsky, pero en coordenadas elipsoidales (Misner C, Thorne K & Wheeler J, 1973).
3. La solución de Kerr es asintóticamente plano cuando  $r \rightarrow \infty$ . Es decir, en dicha región límite la métrica de Kerr se reduce a la de Minkowski, cualquiera sea el valor de M y “a”.
4. Otra característica fundamental de la solución es que la métrica que describe su curvatura en el espacio /tiempo presenta un término oblicuo, es decir  $dt d\varphi$ . Esta particularidad tiene grandes implicaciones físicas en la solución de Kerr, en cuanto a la posibilidad de arrastre del espacio/tiempo en sus cercanías, debido a su efecto de rotación. La aparición de este término en la métrica es lo que hoy se conoce como el *efecto Lense- Thirring*, el cual consiste en que en las proximidades del centro del objeto en rotación los marcos de referencia son arrastrados junto con el espacio/tiempo (Misner C, Thorne K & Wheeler J, 1973).
5. La siguiente propiedad tiene como objetivo, presentar desde un punto de vista clásico por medio de un ejemplo que el potencial de Kerr proviene de una fuente de rotación,

esto en relación al término cruzado descrito por la propiedad explicada anteriormente (Ver Ec 3.1).

Teniendo en cuenta la figura 3.1, si se consideran dos marcos de referencia S y S' que coinciden y comparten la misma dirección para el eje z<sup>32</sup>. El marco de referencia S' rota con velocidad angular constante  $a\hat{k}$  respecto al marco inercial S, en donde las coordenadas cilíndricas circulares de un punto cualesquiera P, se definen para ambos sistemas así:  $(\rho', \varphi', z')$  y  $(\rho, \varphi, z)$ <sup>33</sup>. Además sus relaciones de transformación son:

$$\begin{aligned}r' &= r \\ \varphi' &= \varphi - at \\ z' &= z\end{aligned}$$

Se puede identificar que con la métrica del espacio/tiempo plano en coordenadas cilíndricas  $ds^2 = dt^2 - (dr^2 + r^2d\varphi^2 + dz^2)$  y las relaciones de transformación anteriormente escritas, para el marco rotante S', se obtiene el elemento de línea:

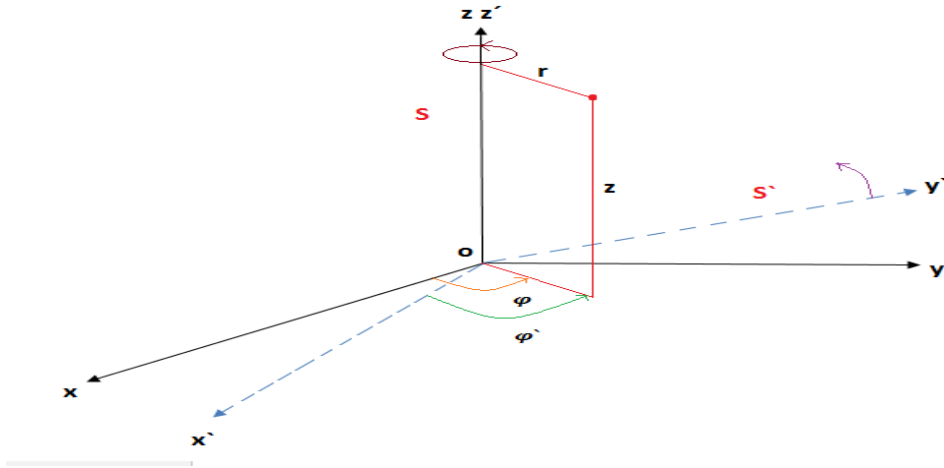
$$ds^2 = (1 - a^2r^2)dt^2 - 2ar^2d\varphi' dt - (dr^2 + r^2d\varphi'^2 + dz^2) \quad (3.4)$$

el cual posee el término cruzado  $d\varphi' dt$ . Cabe aclarar que este ejemplo tiene como objetivo ilustrar que la solución de kerr proviene de una fuente en rotación. No obstante, el ejemplo no es del todo preciso, debido a que no se ha considerado la rotación rígida desde el contexto de la relatividad especial.

---

<sup>32</sup> El presente ejemplo fue extraído del texto: “*Introducing Einstein’s Relativity*” de Ray D’Inverno, Copyright Material, 1992.

<sup>33</sup> Cabe resaltar, que la componente de  $\rho$  en este caso no es la misma a la descrita en la métrica de Kerr (ver.ec 3.1). Esta representa el vector posición en un marco de referencia en coordenadas polares cilíndricas.



**Figura 3.1:** Representación gráfica del marco de referencia primado  $S'$  rotando sobre el eje  $z$  del marco de referencia no primado  $S$ .

Por otra parte, es importante destacar que el objetivo fundamental del ejemplo presentado anteriormente era demostrar en primera instancia por medio de una analogía<sup>34</sup>, que la métrica de Kerr es semejante a la obtenida en el ejemplo propuesto, ya que aparecen términos cruzados u oblicuos. Por ende, se puede dar cuenta que el potencial de kerr proviene de una fuente de rotación.

### 3.4 Caracterización de la solución de Kerr:

En esta sección se describirán las principales características que describen la solución de Kerr:

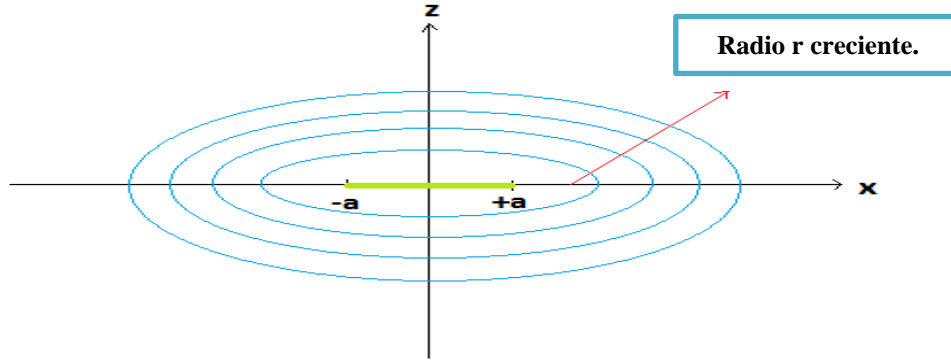
#### 3.4.1 Singularidades y horizontes:

A continuación vamos a presentar las singularidades y horizontes de la geometría de kerr. Inicialmente, si se tiene en cuenta la métrica que describe la solución (Ver. Ec 3.1), se puede evidenciar que esta presenta una singularidad esencial cuando  $\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta = 0$ . De acuerdo a Dinverno, *Introducing Einstein's Relativity* (1992), la igualdad anterior se

<sup>34</sup> En este contexto, se hace referencia a analogía a un tipo de ejemplo ilustrativo que en completo detalle no explica el fenómeno que se quiere interpretar. No obstante, con este tipo de herramientas “analogías” se realiza un acercamiento muy próximo al mismo que en rigor de la fácil y óptima comprensión del fenómeno, dichas herramientas contribuyen significativamente.



cumple cuando  $r = 0$  y cuando  $\theta = \frac{\pi}{2}$  y se observa que de esto se obtiene un anillo en el plano ecuatorial ( $\theta = \frac{\pi}{2}$ ) (Ver. figura 3.2).



**Figura 3.2: Representación gráfica de la singularidad esencial  $\rho = 0$  en forma de anillo**

**$x^2 + y^2 = r^2$  para la métrica de Kerr.**

Por otra parte, si se continúa analizando la métrica que describe la solución de Kerr, se puede evidenciar que al igual que en la solución de Schwarzschild, la irregularidad en la componente radial  $g_{rr}$  predice la existencia de un horizonte de eventos cuando:

$$g^{11} = -\frac{\Delta}{\rho^2} = 0$$

$$g^{11} = \frac{r^2 - 2mr + a^2}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} = 0$$

Es decir:

$$\Delta(r) = r^2 - 2mr + a^2 = 0 \quad (3.5)$$

Lo cual es una ecuación cuadrática, cuyas raíces son:

$$r_{h\pm} = m \pm \sqrt{m^2 - a^2} \quad (3.6)$$

Esto significa que la solución de Kerr presenta dos horizontes de sucesos que se denominan horizontes de eventos externo  $r_+$  y horizontes de eventos interno  $r_-$ . Para determinar si estas singularidades son aparentes o es esenciales se realiza el cálculo del

invariante escalar de Riemann  $R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta}$  y se demuestra que estos horizontes de eventos son singularidades aparentes<sup>35</sup>, por lo tanto estas son removibles a partir de la implementación de un nuevo sistema de coordenadas. Como se puede observar el proceso es semejante al realizado en el capítulo anterior con la solución de Schwarzschild.

Por otra parte, se evidencia que en límite de Schwarzschild ( $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ ),  $\rho^2 = r^2 = 0$ , por lo que esta singularidad es esencial, mientras que para  $r \neq 0$ ,  $\Delta = 0 = r(r - 2m)$  es la singularidad correspondiente al horizonte de eventos.

### 3.4.2 La ergósfera o ergoesfera:

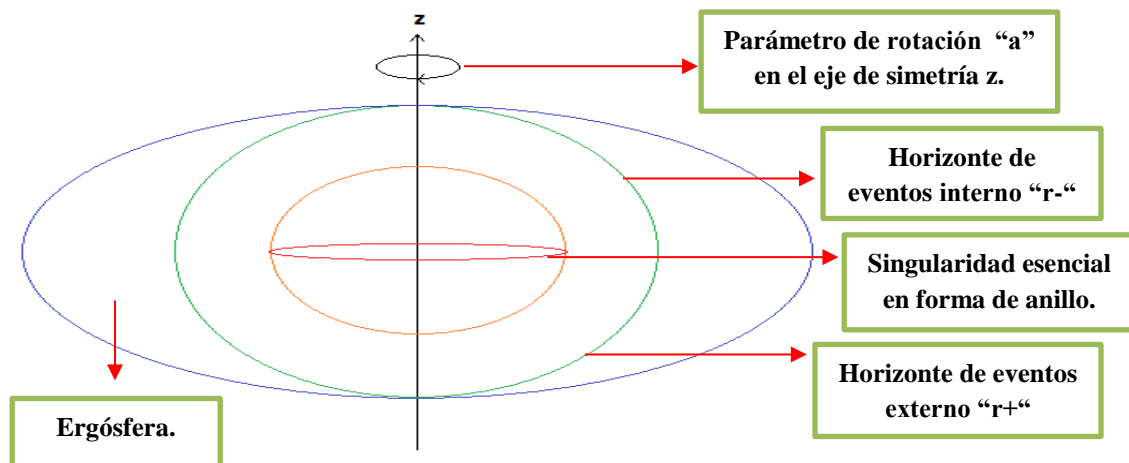
En la sección anterior, se estudiaron las singularidades y horizontes que presenta la métrica de Kerr. Al estudiar dichas regiones particulares, nos permite dar un punto de partida para describir una de las características fundamentales de esta solución, la ergósfera. Esta se define como una región ubicada fuera del horizonte de eventos externo  $r_+$ , producida por un objeto astronómico en rotación (Ver. figura 3.3). Presenta una forma elipsoidal en la cual su semieje menor coincide con su eje de rotación, generando así que se achate en la dirección del eje de giro. En general, todos los objetos astronómicos que son simétricamente esféricos en el universo se encuentran en constante rotación, generando así una forma de “achatamiento” en los polos. Un ejemplo muy sencillo que permite ilustrar lo escrito anteriormente es el movimiento de rotación de la Tierra sobre su propio eje. En dicho movimiento se observa como la Tierra no es esférica como se piensa, sino que presenta una forma de elipse que particularmente se denomina un geoide<sup>36</sup>.

---

<sup>35</sup> El escalar de curvatura de Riemann para la métrica de Kerr, se representa mediante la expresión:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{48m^2(r^2 - a^2 \cos^2 \theta)[(r^2 + a^2 \cos^2 \theta)^2 - 16r^2 a^2 \cos^2 \theta]}{(r^2 + a^2 \cos^2 \theta)^6}.$$

<sup>36</sup> Se hace referencia a Geoide al cuerpo sólido con forma casi esférica, aunque presenta un ligero achatamiento en los polos.



**Figura 3.3:** Representación gráfica de la solución de Kerr resaltando algunas de las principales características que la describen, donde se incluyen: los horizontes de eventos interno y externo “r-“, la singularidad esencial en forma de anillo, la ergósfera y el límite estacionario.

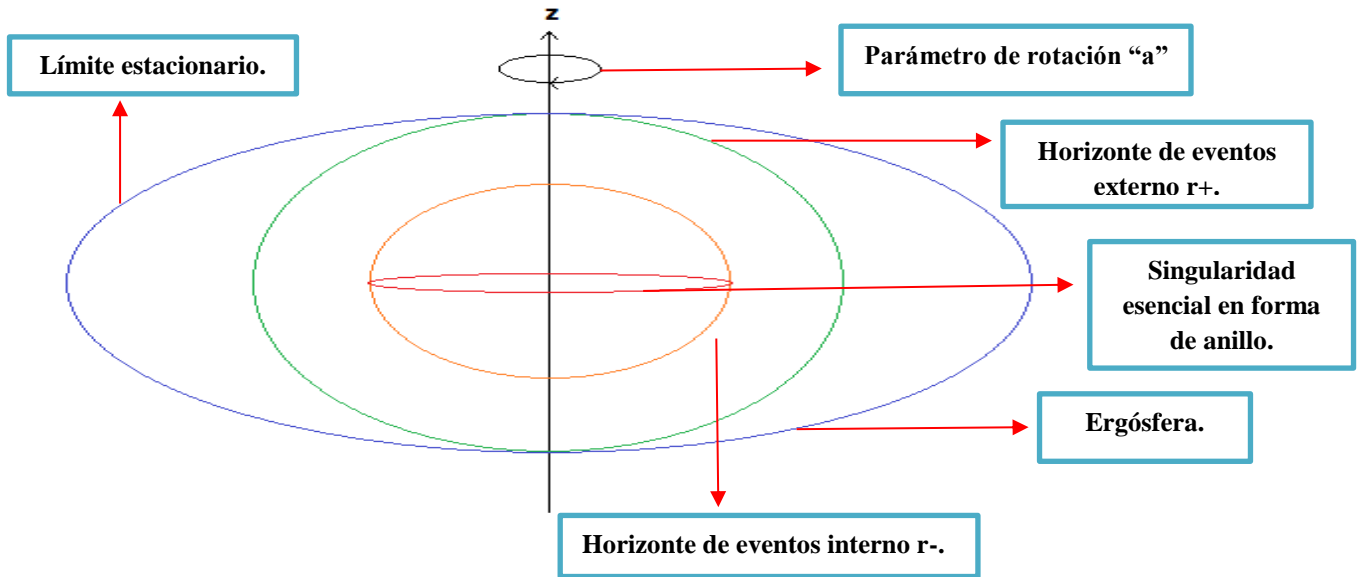
Una propiedad fundamental de la ergósfera es que todos los observadores ubicados en dicha región del espacio/tiempo, son arrastrados por el efecto de rotación del objeto astronómico. Considerando lo escrito anteriormente, se puede decir que en esta región no existe el reposo, es imposible pensar que un cuerpo no se mueva, debido a que el mismo espacio/tiempo rota entorno a la singularidad esencial y en consecuencia todo cuerpo material que se encuentre en dicha región rotará junto a ella. Si hablamos en términos de marcos de referencia, cualquier observador que se encuentre dentro de la ergósfera no permanecerá nunca en reposo con respecto a otros observadores del resto del universo, la única manera de que dichos observadores permanezcan estáticos, es que se estén moviendo a velocidades superiores a la de la luz y esto bajo el contexto de la Teoría de la Relatividad no es posible.

Por otra parte, dado que la aerósfera se encuentra fuera del horizonte de suceso  $r_-$ , se puede decir que los observadores que se encuentran en dicha región aún pueden escapar de interacción gravitacional producida por un objeto astronómico que rota en el espacio/tiempo.

### 3.4.3 Límite estacionario:

Al estudiar una de las principales características de la solución de Kerr, como la ergósfera se da inicio a la explicación de la última propiedad que posee dicha solución. Esta es el límite estacionario. Teniendo en cuenta la figura 3.4, se define como la región que

delimita la ergósfera. En el límite estacionario los marcos que se estén moviendo a la velocidad de la luz permanecen estacionarios con respecto al resto del universo, debido a que el espacio/tiempo justo en esa región límite está siendo arrastrado a una velocidad  $c$ .



*Figura 3.5: Representación gráfica de la solución de kerr, resaltando todas sus características principales: parámetro de rotación "a", singularidades en forma de anillo, horizontes de eventos  $r_+$   $r_-$ , ergósfera y límite estacionario.*

## **Capítulo IV**

### **Análisis de la causalidad.**

#### **4.1 Introducción:**

La noción de causalidad, es uno de los conceptos que ha sido ampliamente estudiado, investigado y debatido por filósofos, físicos y matemáticos destacados desde la antigüedad., con el objetivo de lograr demostrar uno de los principios fundamentales que permite explicar el hecho de buscar relaciones entre las cosas, y particularmente entre las acciones y sus consecuencias. Desde el contexto de la física particularmente, se puede evidenciar que el principio de causalidad es completamente válido, debido a que este se ha impuesto con gran coherencia y simplicidad en los diversos fenómenos de la naturaleza (Varela, Causalidad y Mecánica Cuántica, 2005). Por tal razón, en el presente capítulo se realizará un análisis a modo comparativo de los diversos modelos de causalidad que se han presentado durante el desarrollo del trabajo, para posteriormente mostrar el análisis de la estructura causal en la solución de Kerr de la Relatividad General. Finalmente, considerando todos los modelos explicativos se realizarán unos cuadros comparativos, con el objetivo de resaltar las principales diferencias entre cada uno de los modelos, acerca de la causalidad.

#### **4.2 Análisis de la causalidad:**

Las nociones de causalidad y tiempo son definiciones que comparten una estrecha relación. Dicha afirmación se puede argumentar por el hecho de que las causas preceden a sus efectos, en un orden temporal de los sucesos, conociendo que no podemos cambiar el pasado de un evento, pero que si se puede configurar el futuro, haciendo que este sea un territorio de infinitas posibilidades. Es por tal razón, que desde la antigüedad se han preguntado si la orientación temporal de antes y después o causa y efecto, se explica por las múltiples relaciones causales que se dan en la naturaleza. (Álvarez, 2008). Los filósofos y físicos desde aquella época han defendido la posición de la teoría causal del tiempo, una teoría que ha adquirido vital importancia en el contexto de la física. Teniendo en cuenta lo anterior, si se quiere explicar relaciones temporales de antes y después, en términos de la

causalidad se debe empezar considerando una premisa o principio fundamental, el cual es: un suceso A es anterior al suceso B, si A es causa de B. Dicha premisa se aplica, con el objetivo de tener un principio de causalidad donde se mantiene que la causa ocurre temporalmente primero al efecto.

En ese orden de ideas, los estudiosos más destacados en física, filosofía, matemáticas, etc., plantearon sus concepciones acerca del espacio y el tiempo como conceptos que se encuentran relacionados implícitamente a la causalidad. Inicialmente, el físico y matemático inglés Sir Isaac Newton, explicaba el espacio como un lugar infinito que contenía los objetos del universo, el cual se caracterizaba fundamentalmente por ser homogéneo, debido a que todos sus puntos son equivalentes, independiente de los cuerpos presentes en dicho lugar, en otras palabras, la materia presente no altera la estructura del espacio. Además, Newton consideraba que este no tenía direcciones privilegiadas por lo que la homogeneidad se mantiene con el tiempo, lo que indica que el espacio es idéntico en toda dirección. Si se acepta dicha característica del espacio, se despliegan múltiples propiedades del mismo tales como que es infinito y euclidiano. Es infinito, ya que si fuera finito existirían direcciones privilegiadas y por ende se incumpliría el principio de homogeneidad. Finalmente, es euclidiano, debido a que se basa en una geometría tridimensional, donde las propiedades escritas anteriormente se ajustan a los postulados de la geometría Euclidiana, donde la continuidad de espacio está implícita en el primer postulado, donde es posible trazar una recta entre dos puntos por cercanos o lejanos que se encuentren y la infinitud está implícita en el segundo postulado al expresar que siempre es posible extender un segmento de recta hasta el infinito. Con esto, se prueba que la geometría de Euclides es la que describe dicho espacio. Por otra parte, el tiempo para Newton es el que podemos llamar el tiempo del “sentido común”, el cual es único y universal y que todo lo abarca, que sencillamente se encuentra allí y que no puede ser afectado por nada, el cual marcha constantemente, registrando los instantes de todo lo que sucede en el universo, sin nunca detenerse. En conclusión, para el sabio inglés los conceptos de espacio y tiempo son independientes el uno del otro.

Considerando lo previamente escrito, se puede concluir que la concepción Newtoniana del tiempo presenta un pasado, presente y futuro universal, lo que en

consecuencia las relaciones temporales se producen en un solo marco de referencia privilegiado, por lo que comparten un tiempo común y un ahora común, donde cualquier observador ubicado en cualquier lugar, coincidiría en lo que se estima que ya ha pasado y lo que aún se encuentra por venir. Por otra parte, si se considera la ley de Gravitación Universal Newtoniana, la acción gravitatoria que existe entre dos masas separadas y ubicadas en cualquier parte del universo es instantánea, ya que, para que estos dos objetos u observadores se encuentren conectados causalmente en el espacio y tiempo Newtoniano, debe existir una señal física de velocidad infinita que los conecte. La afirmación escrita anteriormente, se constituyó en uno de los problemas fundamentales que presentó la mecánica clásica Newtoniana, que después de casi tres siglos fue solucionado por la Teoría Especial de la Relatividad propuesta por el físico Alemán Albert Einstein en 1905.

Bajo el contexto de la relatividad especial, la simultaneidad entre dos eventos no es absoluta como pensaba la teoría Newtoniana, por el contrario es relativa, y por tanto, una posible conexión causal depende del observador o marco de referencia. Esto ocurre, debido a que una de las mayores predicciones que formula la TER es la dependencia entre el espacio y el tiempo, la cual bajo esta teoría se convierte en el nuevo concepto de espacio/tiempo. Es importante mencionar que dicha predicción surge del planteamiento acerca del segundo postulado de la TER, el cual describe la constancia de la velocidad de la luz para cualquier marco o sistema de referencia. Al enunciar las principales características del espacio/tiempo en la relatividad especial, se puede dar cuenta que a diferencia de la teoría Newtoniana el concepto absoluto no son el espacio y el tiempo, sino la velocidad de la luz. Considerando lo anterior, se tiene para que un evento A sea causa de un evento B, es que B sea un evento que pertenece al cono de luz de A, hablando en términos de distancias espacio/temporales se dice que A y B están separados por un intervalo espacial o como de tiempo.

Si se tiene en cuenta lo escrito en el párrafo anterior, se observa que desde el contexto de la relatividad especial la conexión causal entre dos eventos se restringe, debido a que la señal física que se requiere para unir dos eventos debe ser menor o igual a la velocidad de la luz, ya que es la máxima velocidad que puede viajar una partícula en el universo. Como se puede observar, la conexión causal entre dos eventos cualesquiera en el universo difiere de la concepción clásica Newtoniana, ya que bajo esta teoría es imposible

conectar dichos eventos con una señal física que viaje a velocidad infinita. Por otro lado, también es importante concluir que las configuraciones del espacio y tiempo son un factor determinante en descripción de las conexiones causales, ya que para ambas la caracterización de dichos conceptos resaltados anteriormente son distintas, y como se puede evidenciar su conectividad causal también varía.

En el marco de la Teoría Especial de la Relatividad TER, cuando se habla del espacio/tiempo se asocia a que este es Pseudoplano y tetra dimensional, por lo que su estructura causal o comportamiento de los conos de luz no presenta ninguna alteración, es decir, permanecen uniformes en dicho espacio/tiempo, sin presentar ninguna modificación a efectos de curvatura del mismo. Sin embargo, bajo el contexto de la Teoría General de la Relatividad para describir la estructura causal de una de las soluciones exactas de las ecuaciones de campo de Einstein, es indispensable considerar la configuración que presenta el espacio/tiempo, ya que dicha teoría considera la gravedad, la cual desde el punto de vista del físico Alemán Albert Einstein es un fenómeno puramente geométrico que se manifiesta por una curvatura espacio/temporal producida por una masa que se encuentre en dicho lugar. En otras palabras, desde la Teoría General de la Relatividad TGR, la estructura causal depende de la curvatura espacio/temporal (gravedad) que genere un objeto astronómico de masa  $m$  en dicho espacio/tiempo.

#### **4.3 Estructura causal de la solución de Kerr:**

Cuando se estudia la estructura causal de una solución exacta de las ecuaciones de campo de Einstein, inicialen primera instancia se debe analizar las singularidades que presenta la métrica que describe cada solución. En el caso de la solución de Schwarzschild, cuando  $r = 0$  y  $r = 2m$ , la solución no es regular. A partir de que se logra determinar dichas regiones “irregulares” en el espacio/tiempo se comienza a estudiar la causalidad. Para el caso de la solución de kerr existe una singularidad intrínseca o esencial que se produce en su métrica cuando  $\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta = 0$ . Por lo tanto, si se considera a  $r = 0$  y  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , esta geoméricamente toma una forma de anillo  $x^2 + y^2 = r^2$  en el plano ecuatorial  $\theta = \frac{\pi}{2}$  (Ver Cap. 3.Sec 3.4.1).



Por otra parte, esta solución presenta dos horizontes de eventos, los cuales se obtienen cuando  $\Delta = r^2 - 2mr + a^2 = 0$ . Al solucionar esta ecuación cuadrática se obtiene las soluciones cuyas raíces son:

$$r_{h\pm} = m \pm \sqrt{m^2 - a^2} \quad (4.1)$$

Por lo tanto:

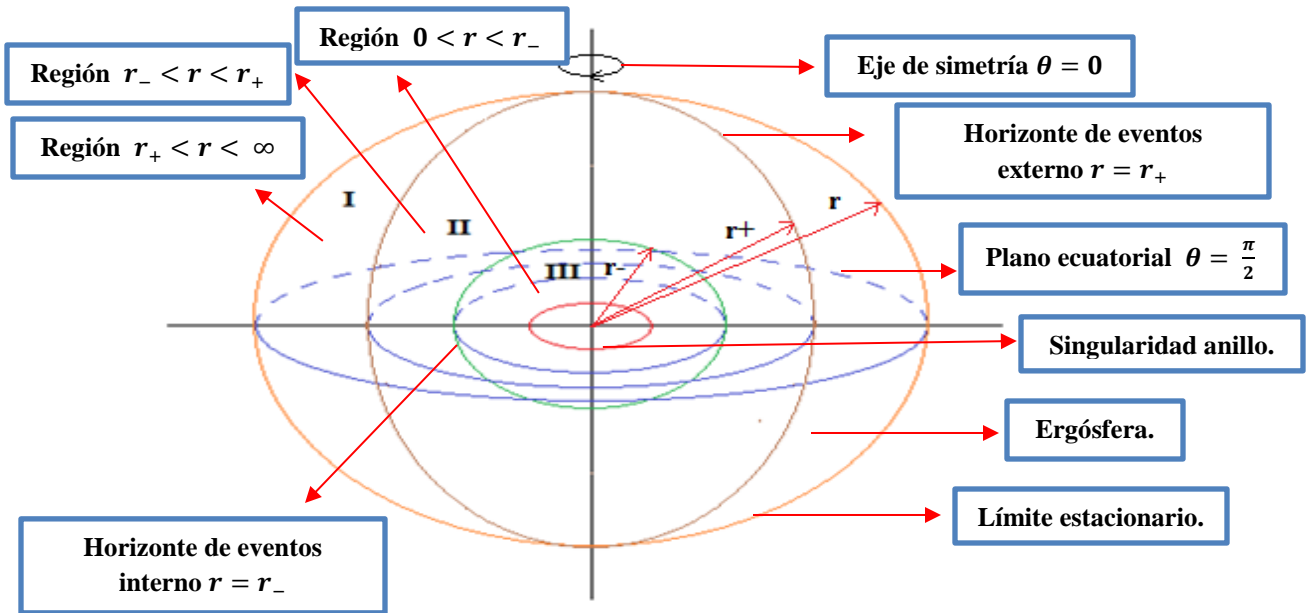
$$r_+ = m + \sqrt{m^2 - a^2} \quad (\text{Horizonte externo}) \quad (4.1 \text{ a})$$

$$r_- = m - \sqrt{m^2 - a^2} \quad (\text{Horizonte interno}) \quad (4.1 \text{ b})$$

Teniendo en cuenta lo anterior, dichos horizontes anteriormente mencionados son de carácter aparente, debido a que pueden ser removidos al implementar un cambio del sistema de coordenadas utilizado. Si se considera la relación entre los términos que se encuentran dentro de la expresión que definen dichos horizontes ( $a$  y  $m$ ), podemos determinar tres casos posibles, los cuales son fundamentales en el análisis de la estructura causal de la solución de kerr. Estos casos particulares son:

- I. Caso sobre extremo:** Cuando  $a^2 > m^2$ , no existen soluciones reales. Esto físicamente indica que la singularidad  $\rho = 0$  no tiene horizontes de eventos que la protejan.
- II. Caso extremo:** Cuando  $a^2 = m^2$ , solo hay una solución real. Esto físicamente indica que solo existe un horizonte de eventos.
- III. Caso sub extremo:** Cuando  $a^2 < m^2$ , existen dos soluciones reales. Esto físicamente indica que existen dos horizontes de eventos que cubren la singularidad esencial  $\rho = 0$ .

Para comenzar a estudiar la estructura causal para cada caso en particular, debemos en primera instancia definir las regiones en las cuales la solución de Kerr es regular. Teniendo en cuenta la figura 4.1, estas son: la región I ( $r_+ < r < \infty$ ), la región II ( $r_- < r < r_+$ ), la región III  $0 < r < r_-$ .



**Figura 4.1:** Representación gráfica de las regiones regulares de la solución de Kerr, junto con la singularidad esencial en forma de anillo y los horizontes de eventos interno  $r_-$  y externo  $r_+$ .

Con el objetivo de construir la extensión analítica máxima del espacio/tiempo de Kerr, particularmente para las regiones donde su solución es regular, se analizará su estructura causal, inicialmente definiendo el concepto de coordenadas nulas principales.

### 4.3.1 Coordenadas nulas principales:

Las coordenadas de Boyer - Lindquist que describen la métrica de Kerr, resultan ser singulares en los horizontes que define dicha solución. De manera análoga ocurre lo mismo en el espacio/tiempo de Schwarzschild cuando las coordenadas que llevan el nombre de la solución son singulares en la región  $r = 2m$ . Esta afirmación se puede argumentar en el hecho de que un observador requiere un intervalo de tiempo propio infinito para llegar al horizonte de eventos, lo que en consecuencia este observador nunca podrá ingresar a dicha región. Por lo tanto, la misión de buscar un sistema de coordenadas que permita extender la solución a través de los horizontes se convirtió en el objetivo principal. Para comenzar con esta tarea, es pertinente y ventajoso adaptar este nuevo sistema de coordenadas al comportamiento de las geodésicas de tipo nulo, particularmente a dos geodésicas de este tipo que reciben el nombre de coordenadas entrantes y salientes nulas principales. Todo esto en aras de facilitar el trabajo en la descripción de la estructura causal de la solución de Kerr.

Dichos tipos de geodésicas son la entrante definida con el signo (-) y la saliente con el signo (+). Definiendo las coordenadas entrante y saliente se define mediante las expresiones:

$$u^{\pm} = t \pm r \quad v^{\pm} = \varphi \pm r \quad (4.2)$$

Por lo tanto las expresiones que definen las nuevas coordenadas son:

$$t = r + \left( m + \frac{m^2}{(m^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}} \right) \ln(r - r_+) + \left( m + \frac{m^2}{(m^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}} \right) \ln(r - r_-) + cte \quad (4.3)$$

$$\varphi = \frac{a}{2(m^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}} \ln \left( \frac{r - r_+}{r - r_-} \right) + cte \quad (4.4)$$

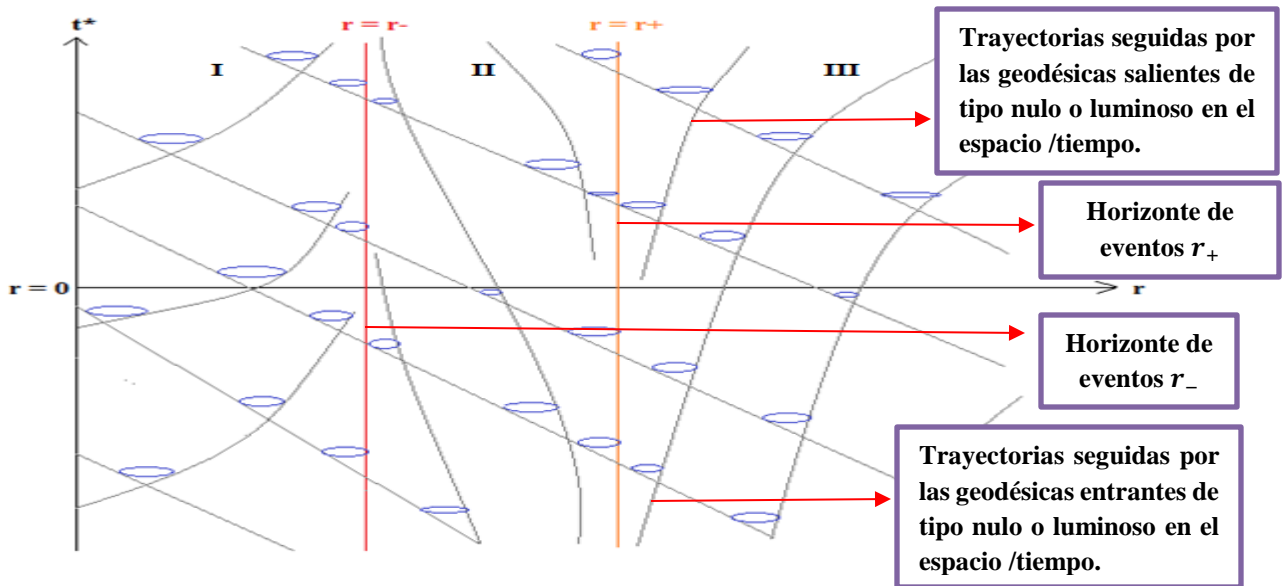
Con base a todo lo anteriormente escrito en el capítulo anterior acerca de la caracterización de la solución de kerr y los que se ha estudiado en el presente capítulo, ya se cuenta con las herramientas teóricas suficientes para comenzar a analizar la estructura causal o el comportamiento de los conos de luz para la solución de kerr.

#### 4.3.2 Extensión maximal en el caso sub extremo ( $a^2 < m^2$ )

Teniendo en cuenta la ecuación que define los horizontes de eventos aparentes de la solución de kerr (Ver. Ec 4.1), se puede evidenciar que para el caso sub extremo, existen dos horizontes. Cuando se introducen las nuevas coordenadas entrantes y salientes de Eddington- Finkelstein se logra extender la solución de kerr a través de dichas regiones, lo que en consecuencia permite estudiar la estructura causal de esta solución en su totalidad. Considerando la figura 4.2, se puede observar el comportamiento de los conos de luz para el caso sub extremo ( $a^2 < m^2$ ) en coordenadas avanzadas de Eddington- Finkelstein.

---

<sup>37</sup> Para encontrar la demostración de las coordenadas nulas principales ver la referencia: D' Inverno, Ray. *Introducing Einstein's Relativity*, New York. Oxford University, 1992. Pág 256-258.



**Figura 4.2:** Representación gráfica de un diagrama causal de la solución de Kerr para el caso sub extremo ( $a^2 < m^2$ ) en coordenadas avanzadas de Eddington - Finkelstein.

Si observamos el diagrama causal representado en la figura 4.2, se puede observar que para el caso sub extremo ( $a^2 > m^2$ ) existen los dos horizontes de eventos  $r_+$  y  $r_-$ , lo que en consecuencia indica que el comportamiento de los conos de luz se debe estudiar en cada una de las regiones donde la solución de Kerr es regular (Ver figura 4.1). Inicialmente si se considera la región I, ( $r_+ < r < \infty$ ) se puede observar que dicha región es estacionaria y asintóticamente plana, es decir cuando,  $r \rightarrow \infty$ , ya que los conos de luz permanecen inalterados como en el espacio/tiempo de Minkowsky, es decir, que en dicha región los fotones pueden escapar, por tal razón, existe una conexión causal temporal entre dos eventos ubicados en dicha región. Además se puede evidenciar que los conos de luz se van cerrando cada vez más a medida de que se acerca al horizonte de eventos externo  $r_+$ .

Considerando lo anteriormente escrito y observando de nuevo la figura 4.2, cuando  $r = r_+$  las geodésicas salientes tienen pendiente infinita, lo que en consecuencia se puede afirmar que en dicha región particular existe un horizonte de eventos externo  $r_+$ , con esto se comprueba en primera instancia su existencia. En ese orden de ideas, cualquier señal que se intente emitir desde adentro del horizonte de eventos externo, no podrá ser detectada por un observador externo, es decir, dicho observador no podrá tener conexión causal alguna con un

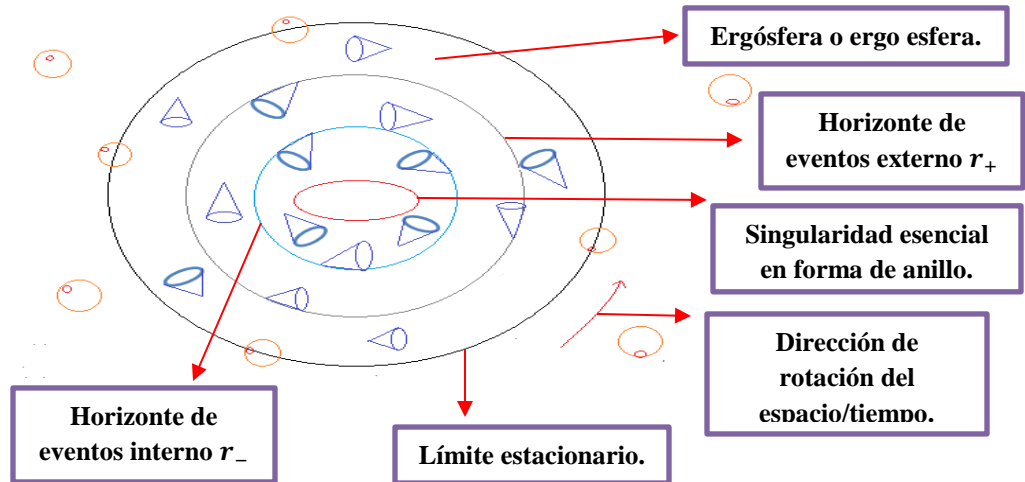
observador que ingrese al horizonte de eventos. En síntesis, ninguna señal que se emita desde adentro del horizonte de eventos externo podrá salir al exterior.

Por otra parte, la región II ( $r_- < r < r_+$ ) no es estacionaria ni asintóticamente plana, debido a que los conos de luz se inclinan más a medida de que se acerca al horizonte de eventos interno  $r_-$ , por lo que cualquier partícula masiva que ingrese a esta región tendrá como futuro causal inevitable dicha singularidad sin excepción alguna. Bajo este diagrama causal que describe el comportamiento de los conos de luz en la solución de Kerr para el caso sub extremo ( $a^2 > m^2$ ) en coordenadas avanzadas de Eddington- Finkelstein, la región II es considerada como una superficie atrapada, debido a la trayectoria que describen las geodésicas de tipo nulo o luminosas en dicha región se dirigen inevitablemente a cruzar horizonte de eventos interno  $r_-$ .

Hasta el momento hemos estudiado la estructura causal de la solución de Kerr para el caso sub extremal ( $a^2 > m^2$ ), solo de una manera parcial, debido a que los diagramas causales bidimensionales descritos anteriormente en coordenadas avanzadas y retardadas de Eddington – Finkelstein, no describen como tal el comportamiento de los conos de luz en dicha solución. Para terminar de describir el comportamiento de los conos de luz en la solución de Kerr es indispensable considerar el efecto de rotación del espacio/tiempo que es producido por el movimiento de giro sobre su propio eje de simetría del objeto astronómico que produce la curvatura espacio/temporal. Por lo tanto, los diagramas explicados previamente describen solo parcialmente la causalidad en la solución de Kerr sub extremal ( $a^2 < m^2$ ).

En ese orden de ideas, si se tiene en cuenta la caracterización realizada que describe las principales características y propiedades de la solución de Kerr, se debe considerar la causalidad en la región de la ergósfera, el límite estacionario y la región entre el horizonte de eventos interno  $r_-$  y la singularidad esencial en forma de anillo (Ver Cap. III, Sección 3.4 & figura 4.1). Estas características descritas anteriormente en los diagramas de Eddington-Finkelstein están ubicadas en la región I y III, lo que en consecuencia se tiene que la causalidad en región II ( $r_- < r < r_+$ ) queda descrita completamente a partir de dichos

esquemas. Por consiguiente, la manera de estudiar la causalidad en dichas regiones es realizando un esquema espacial de la solución de Kerr en el plano ecuatorial  $\theta = \frac{\pi}{2}$  así:



*Figura 4.3: Representación gráfica de un esquema espacial de la solución de kerr en plano ecuatorial  $\theta = \frac{\pi}{2}$  , para el caso sub extremal ( $a^2 < m^2$ ).*

Teniendo en cuenta la figura 4.3, se puede observar el comportamiento de los conos de luz en las regiones de la ergósfera y cerca de la singularidad en forma de anillo principalmente. Al considerar la solución de kerr hacemos referencia a la curvatura espacio/temporal producida por un objeto astronómico en rotación, por ende si se habla de giro de una masa  $m$ , sobre su eje de simetría en el espacio/tiempo, se está considerando implícitamente el arrastre del espacio/tiempo circundante, en otras palabras, el arrastre de los marcos de referencia u observadores a su alrededor. Por tal razón, el parámetro de rotación es indispensable para describir la estructura causal en la solución de kerr, particularmente en regiones estratégicas tales como la ergósfera y cerca de la singularidad esencial en forma de anillo.

Si se tiene en cuenta de nuevo la figura 4.3, se observa que en la ergósfera los conos de luz, se encuentran orientados en diferentes direcciones, debido a que en dicha región es una región dinámica, donde es imposible considerar el reposo. De acuerdo a la caracterización realizada en el capítulo anterior se describía que dicha región nunca permanecerá en reposo, gracias a la rotación del espacio/tiempo. Si hablamos de marcos de referencia, estos nunca estarán en reposo en dicha región, lo que en consecuencia genera que

cualquier observador limitado por su cono de luz rote y en diferentes posiciones de esta región estos tendrán orientación distinta. Esto en términos de la causalidad implica directamente que dicha región espacio/temporal es susceptible a que el principio de causalidad se infrinja o viole, debido a que un observador que rote dentro de la ergósfera podría alcanzar una velocidad mayor de la luz. En estos casos, dicho observador desaparecería al instante de la vista del observador externo, llegaría a su destino antes de que hubiera partido, lo que significaría que habría viajado al pasado. Considerando la figura 4.4, vemos que a medida de que un observador o marco de referencia limitado por su cono de luz se acerque al horizonte de eventos externo  $r_+$ , este se moverá en el espacio/tiempo rotatorio a una velocidad mayor a la de la luz. Esta definición es la que se conoce como el efecto Lense- Thirring<sup>38</sup>.

Cabe resaltar, que dichas afirmaciones o curiosidades escritas anteriormente, obtenidas a partir de las características singulares que presenta la solución de Kerr son reflexiones teóricas sin comprobación experimental, planteadas por estudiosos de la Teoría General de la Relatividad TGR.

Por otra parte, si se tiene en cuenta la caracterización de la solución de Kerr en el límite estacionario, se puede observar que dicha región es el borde límite de la ergósfera, por lo que los observadores que se encuentren en dicho lugar son estacionarios con respecto a otros observadores en el universo, debido a que viajan a la velocidad de la luz como el espacio/tiempo arrastrado a efecto de la rotación del objeto astronómico. Teniendo en cuenta lo anteriormente escrito, se puede afirmar que cualquier cuerpo en rotación que forme una curvatura espacio/temporal semejante a la solución de Kerr llegará a un punto estacionario.

Analizando en detalle dicha afirmación, se puede considerar que a partir de dicha región el comportamiento de los conos de luz es inalterado como en el espacio/tiempo de Minkowsky, debido a que cualquier observador que se encuentre fuera del límite estacionario, ya no percibirá o será afectado por la influencia de la curvatura espacio/temporal producida por el objeto astronómico en rotación. Por tal razón, los

---

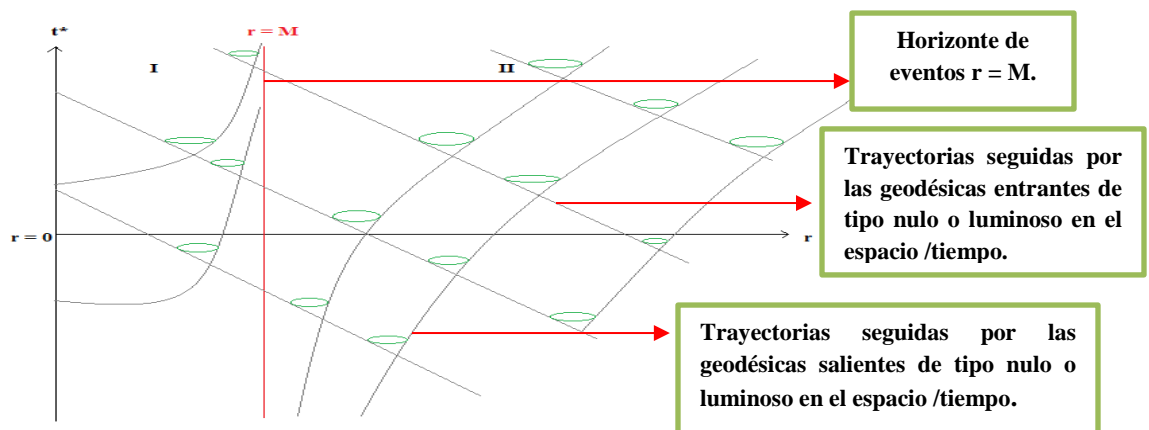
<sup>38</sup> Este efecto fue predicho por primera vez por dos físicos Austriacos llamados Joseph Lense y Hans Thirring en 1918. Dicho efecto fue aplicado a la solución rotante de Kerr en 1963, al considerar que los marcos de referencia cercanos a un horizonte de eventos son arrastrados junto con el espacio/tiempo circundante.

diagramas causales de Eddington-Finkelstein para la región III mostraban el comportamiento de los conos de luz como un espacio/tiempo asintóticamente plano. Es de aquí, donde radica la importancia de explicar e interpretar los diagramas causales en coordenadas avanzadas de Eddington- Finkelstein para la solución de Kerr.

Finalmente, explicando la causalidad en la solución de kerr para la región I ( $0 < r < r_-$ ), si se considera la singularidad esencial en forma de anillo, se puede evidenciar que el futuro causal de cualquier observador que ingrese a dicha región, al cruzar el evento de horizontes interno  $r_-$ , tendrán como futuro causal único dicha singularidad. Teniendo en cuenta, los diagramas causales esto se puede sustentar por el hecho de que las trayectorias de las geodésicas de tipo nulo o luminoso de las partículas apuntan sin excepción alguna hacia la singularidad esencial.

#### 4.3.3 Extensión maximal en el caso extremo ( $a^2 = m^2$ )

Teniendo en cuenta la ecuación que define los horizontes de eventos aparentes de la solución de kerr (Ver. Ec 4.1), se puede evidenciar que para el caso extremo, solo existe un horizonte, lo que en consecuencia se puede afirmar que los horizontes de eventos externo  $r_+$  e interno  $r_-$  coincidan, desapareciendo así la región intermedia II. Considerando la figura 4.4, se puede observar el comportamiento de los conos de luz para el caso sub extremo ( $a^2 < m^2$ ) en coordenadas avanzadas de Eddington- Finkelstein.



**Figura 4.4:** Representación gráfica de un diagrama causal de la solución de kerr para el caso extremo ( $a^2 = m^2$ ) en coordenadas avanzadas de Eddington - Finkelstein.



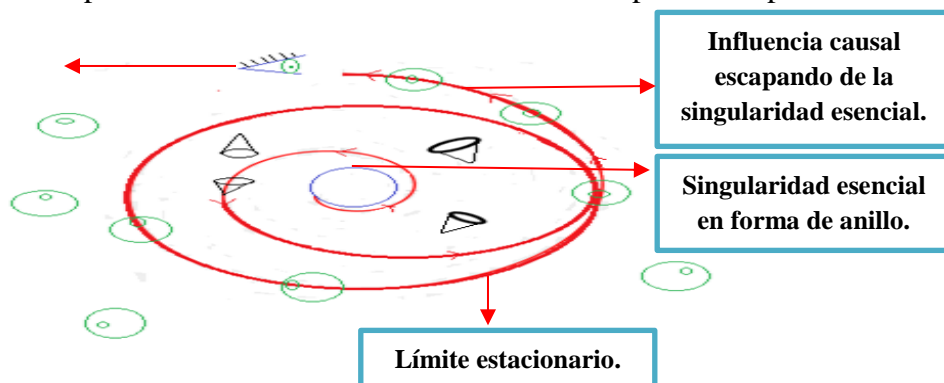
La estructura causal de la solución de Kerr para el caso extremal ( $a^2 = m^2$ ) es muy semejante al caso sub extremal ( $a^2 < m^2$ ), con la única diferencia de que solo existe un horizonte de eventos y por ende solo dos regiones: región I (interna) y región II (externa). Teniendo en cuenta, la figura 4.4, en la región II, los conos de luz lejos del horizonte se ven inalterados como en el espacio/tiempo de Minkowsky, por lo tanto en dicha región, los fotones o partículas con masa pueden escapar, es decir, que puede existir una conexión causal temporal entre dos eventos u observadores en dicha región. Sin embargo en la región II, los conos de luz se van cerrando cada vez más a medida de que se acercan al horizonte de eventos  $r = M$ . Por otra parte, si se continúa observando la figura 4.4, se puede evidenciar que las geodésicas de tipo nulo o luminoso pueden cruzar el horizonte de eventos  $r = M$ , pero que después de haber ingresado a dicha región estas no pueden salir. En términos de la causalidad, se puede decir que cualquier evento que ingrese a dicha región no tendrá conexión causal alguna con un observador externo a dicha región, independiente de que tan rápida sea la señal emitida desde el observador interno. Al igual que en la solución descrita en el capítulo II, la solución de Schwarzschild, el horizonte de eventos  $r = M$ , actúa como una membrana unidireccional.

Finalmente, es pertinente explicar que la causalidad en la región I, para el caso extremo es completamente semejante a la enunciada anteriormente para el caso sub extremo, debido a que estos dos casos se diferencian únicamente en que la región II (intermedia) no existe para el caso extremal (Ver. Cap IV, sección 4.2.2).

#### **4.3.4 Extensión maximal en el caso súper extremo ( $a^2 > m^2$ )**

Teniendo en cuenta la ecuación que define los horizontes de eventos aparentes de la solución de Kerr (Ver. Ec 4.1), se puede evidenciar que, para el caso súper extremo, no existen horizontes de eventos que cubran la singularidad esencial en forma de anillo. Esto bajo el contexto de la Teoría General de la Relatividad TGR es considerado como una singularidad desnuda. El caso súper extremo ( $a^2 > m^2$ ) para la solución de Kerr, es considerado por los físicos teóricos en Relatividad general como un caso no válido desde el contexto físico, gracias a la hipótesis formulada por el físico y matemático Inglés Roger Penrose en 1969 de la censura cósmica, donde considerar las singularidades desnudas no es posible. No obstante,

a pesar de que los teóricos realizan estas consideraciones, formulan un posible comportamiento de los conos de luz para el caso súper extremo ( $a^2 > m^2$ ), el cual es: Teniendo en cuenta la figura 4.5, se puede observar que en el caso particular de que exista una singularidad desnuda, se puede decir que algunas influencias causales pueden escapar de dicha región, debido de que un observador externo puede observar la singularidad esencial. Por otra parte, al no existir horizontes de eventos en el caso súper extremo, hace que no exista restricción alguna en el paso de influencias causales a través del espacio/tiempo.



**Figura 4.5:** Representación gráfica de un diagrama espacial para la solución de Kerr en el caso súper extremo ( $a^2 > m^2$ ).

#### 4.4 Cuadros comparativos:

Teniendo en cuenta, el análisis comparativo realizado de la causalidad, desde el contexto clásico, de la Teoría Especial de Relatividad TER y la Teoría General de la Relatividad TGR, se realizarán dos cuadros comparativos con el objetivo de sintetizar en un esquema lo previamente escrito. Considerando la figura 4.6, el primer cuadro comparativo será entre la causalidad desde el contexto clásico y desde la solución de Kerr de la Relatividad General.

<i>Modelo de Causalidad.</i>	<i>Causalidad desde el contexto clásico.</i>	<i>Causalidad en la solución de Kerr de la Relatividad General.</i>
Ítem.	-El espacio Newtoniano se caracteriza por ser Homogéneo en el tiempo, infinito, euclidiano, inmóvil y plano con una geometría tridimensional.	- El espacio/tiempo en la solución de Kerr de la Relatividad general, es una de las soluciones exactas de las Ecuaciones de campo de Einstein, que describe la curvatura

<p><b><i>Características del espacio/tiempo.</i></b></p>	<p>-El tiempo Newtoniano se caracteriza por ser el del sentido común, el cual es único y universal y que todo lo abarca, que sencillamente se encuentra allí y que no puede ser afectado por nada, el cual marcha constantemente, registrando los instantes de todo lo que sucede en el universo, sin nunca detenerse. Por lo tanto, todos los observadores poseen un pasado, presente y futuro universal. En síntesis, se puede decir que bajo la concepción Newtoniana acerca de las nociones del espacio y tiempo estos son independientes el uno del otro.</p>	<p>espacio/temporal producida por un objeto astronómico de masa <math>m</math> que rota sobre su eje de simetría.</p> <p>-Debido a la configuración espacio/temporal de la solución de Kerr, esta posee características bastante singulares. La primera de ellas es que posee dos horizontes de eventos (uno externo y uno interno), posee una singularidad esencial en forma de anillo, existe un arrastre del espacio/tiempo, debido a la constante rotación del objeto astronómico, existe una superficie límite donde los observadores logran percibir el efecto de la curvatura espacio/temporal llamada límite estacionario. Finalmente, para describir su estructura causal es pertinente describirla por regiones, donde la solución sea regular.</p>
<p><b><i>Relaciones de causalidad.</i></b></p>	<p>- En el espacio y tiempo Newtoniano las relaciones de causalidad siguen en rigor el principio causal del tiempo, donde las causas preceden a sus efectos.</p>	<p>- En el espacio/tiempo de la solución de Kerr, las relaciones de causalidad, debido a la curvatura espacio/temporal que produce la rotación del objeto astronómico, varía en cada región regular de la solución (ver.figura 4.1). En la región externa, se aplica en rigor el principio de causal del tiempo, donde las causas preceden a sus efectos. Es decir que un evento A es causa de un evento B, si B está dentro del cono de luz futuro curvado de A. En la región intermedia, debido a que esta se ubica en la mitad de los dos horizontes de eventos( interno y externo), las relaciones causales en dicha región se concibe de que un observador limitado por su cono de luz que ingrese al horizonte de eventos externo tiene como futuro causal único cruzar también el horizonte de eventos interno. Finalmente, cabe resaltar</p>

		que para la solución de Kerr se estudian tres casos específicos: sub extremo, extremo, y súper extremo que surgen de la relacionan del parámetro de rotación “a” y la masa m.
<b>Conexión causal.</b>	-Teniendo en cuenta, la ley de la Gravitación universal Newtoniana, la acción gravitatoria entre dos objetos ubicados en diferentes partes el universo es instantánea. Lo que en consecuencia, se puede concluir que para que dos eventos estén conectados causalmente, la velocidad de la señal que conecte dichos eventos debe ser infinita.	-Considerando la configuración del espacio/tiempo de la solución de Kerr, se puede decir que las conexiones causales deben explicarse como las relaciones de causalidad, es decir, a partir de donde las regiones son regulares. En la región externa para que dos eventos estén causalmente conectados, la velocidad de la señal debe ser menor o igual a la velocidad de la luz. En la región intermedia, también se aplica dicha explicación escrita previamente y en la región interna se aplica dicha conexión causal, con la excepción de que todos los observadores que ingresen a dicha región tendrán como futuro causal único la singularidad esencial en forma de anillo.

**Tabla 1.1: Cuadro comparativo entre los modelos de causalidad del contexto clásico y la solución de Kerr de la Teoría General de la Relatividad.**

Finalmente, si se considera la figura 4.7, el segundo cuadro comparativo será entre la causalidad desde el contexto de la Teoría Especial de la Relatividad TER y desde la solución de Schwarzschild de la Relatividad General.

<b>Ítem.</b> <b>Modelo de causalidad</b>	<b>Causalidad desde el contexto de la Teoría Especial de la Relatividad.</b>	<b>Causalidad en la solución de Schwarzschild de la Relatividad General.</b>
<b>Caracterización del espacio/tiempo.</b>	- El espacio/tiempo definido en la Relatividad especial es Pseudo-plano, tetra dimensional.	-El espacio/tiempo en la solución de Schwarzschild de la Relatividad general, corresponde a la primera solución exacta de las Ecuaciones de campo de Einstein,

	<p>- A partir de la predicción de que la simultaneidad de los eventos es relativa y no absoluta como en la Teoría Newtoniana, dichos conceptos son dependientes el uno del otro, por lo que se forma un nuevo concepto llamado el espacio/tiempo. El modelo matemático que define dicho espacio/tiempo es el de Minkowsky.</p>	<p>que describe la curvatura espacio/temporal producida por un objeto astronómico de masa <math>m</math> simétricamente esférico que se encuentra en el estático espacio/tiempo.</p> <p>- Debido a la configuración espacio/temporal que posee dicha solución esta posee un horizonte de eventos ubicado en <math>r = 2m</math>, descubierto a partir de las irregularidades en la componente radial de la métrica que describe dicha solución. Además existe una singularidad esencial o intrínseca de la solución en <math>r = 0</math>.</p>
<p><b><i>Relación de causalidad.</i></b></p>	<p>- Desde el contexto de la Relatividad Especial, las relaciones de causalidad se rigen exclusivamente bajo el principio causal del tiempo, donde la causa precede temporalmente al efecto.</p>	<p>- En el espacio/tiempo de la solución de Schwarzschild, debido a la curvatura espacio/temporal que produce el objeto astronómico simétricamente esférico y estático en dicho lugar, produce relaciones de causalidad que se deben analizar, en dos partes En la región <math>r &gt; 2m</math>, un evento A es causa de un evento B si B está dentro del cono de luz futuro curvado de A. Por otra parte, en la región <math>r &lt; 2m</math>, cualquier observador que cruce el horizonte de eventos, no podrá salir de dicha región y por lo tanto tendrá como futuro causal único la singularidad esencial <math>r = 0</math>, al ser considerada dicha región como una superficie atrapada.</p>
<p><b><i>Conexión causal</i></b></p>	<p>- Considerando el segundo postulado de la Teoría Especial Relatividad acerca de la velocidad de la luz todos los observadores se encuentran limitados por su cono de luz. Lo que en consecuencia, para que dos observadores se conecten causalmente debe existir una señal que conecte dichos</p>	<p>- Considerando la configuración del espacio/tiempo de la solución de Schwarzschild, se puede decir que las conexiones causales deben explicarse, en las dos regiones que definen dicha solución. En la región <math>r &gt; 2m</math>, para que dos observadores limitados por su cono de luz curvado se conecten causalmente, debe existir una señal que conecte dichos eventos</p>

	<p>eventos con una velocidad menor a igual a la de la luz, y no con velocidad infinita como asumía el modelo Newtoniano. En conclusión bajo la Teoría de la Relatividad el único absoluto no son los conceptos de espacio y tiempo, sino la velocidad de la luz.</p>	<p>con una velocidad menor o igual a la de la luz. Cabe destacar, que a medida un observador se acerque al horizonte de eventos <math>r = 2m</math>, su cono de luz se inclinará cada vez más restringiendo la cantidad de luz emitida desde sus vértices.</p> <p>Por otra parte, en la región <math>r &lt; 2m</math>, las conexiones causales con el exterior son imposibles debido a que este horizonte de eventos actúa como una membrana unidireccional, donde se puede ingresar señales causales, sin embargo después de que esta crucen dicha región no podrán salir. En consecuencia, es imposible generar algún tipo de conexión causal entre un observador ubicado en dicha región <math>r &lt; 2m</math> y un observador cualesquiera del exterior <math>r &gt; 2m</math>.</p>
--	--	--

**Tabla 4.2:** Cuadro comparativo entre los modelos de causalidad de la Teoría Especial de la Relatividad y la solución de Schwarzschild de la Relatividad General.

### Conclusiones:

Finalmente, se ha concluido el trabajo correspondiente al estudio de la estructura causal en la solución de Kerr, realizando un análisis reflexivo acerca de la causalidad desde el contexto clásico Newtoniano, desde el contexto de la Teoría Especial de la Relatividad y desde el contexto de la Relatividad general, como referentes teóricos fundamentales. Aunque en primera instancia no fue posible estudiar en detalle la totalidad de los conceptos fundamentales que permiten describir el concepto de causalidad, se realizó una aproximación introductoria y satisfactoria a modo de reflexión de dicho concepto fundamental de la física. Con base en lo anteriormente escrito, se proponen las siguientes conclusiones:

- a. Considerando que las configuraciones espacio/temporales sí afectan el comportamiento de la causalidad. Las diferencias encontradas entorno a dicho concepto entre el contexto clásico Newtoniano y la solución de Kerr de la Relatividad General son: Inicialmente, si se tiene en cuenta los conceptos de espacio y tiempo desde el contexto clásico Newtoniano específicamente, vemos que bajo esta perspectiva dichos conceptos son independientes el uno del otro, como consecuencia de que estos presentan un carácter absoluto, único y universal para todo los

observadores, donde sus relaciones de causalidad obedecen exclusivamente el principio causal del tiempo, en el cual las causas preceden a sus efectos y que para la conexión causal entre dos eventos en dicho espacio/tiempo, considerando la ley de gravitación universal Newtoniana, debe ser instantánea, es decir, que se debe considerar una velocidad de la señal infinita. No obstante, con el segundo postulado de la Relatividad acerca de la constancia de la velocidad de la luz para cualquier marco o sistema de referencia, las características del espacio y tiempo cambian drásticamente, al considerar dichas entidades intrínsecamente dependientes, generando así el nuevo concepto de espacio/tiempo, lo que en consecuencia se considera que las conexiones causales también cambian al considerar que para que dos eventos se encuentren conectados causalmente la velocidad de la señal que los conecte debe ser menor o igual a la de la luz. Teniendo en cuenta, lo anteriormente escrito, desde el campo de la Relatividad general, particularmente desde la solución de Kerr, se observa que la configuración del espacio/tiempo es producida por la curvatura por un objeto astronómico de masa  $m$  que rota sobre su eje de simetría. En dicha solución se evidencia que esta adquiere unas características particulares tales como: horizontes de eventos, singularidades, etc. que hace que dicha solución presente un comportamiento de los conos de luz completamente distinto al espacio y tiempo Newtoniano, ya que la estructura causal de dicha solución se debe analizar a partir de regiones particulares donde esta es regular, tal y como se evidenció en el análisis realizado para la solución de Kerr Relativista.

- b.** El carácter absoluto que adquiere la velocidad de la luz, desde el contexto de la relatividad, es fundamental y de vital importancia en el análisis de la causalidad de los eventos, ya que las relaciones y conexiones causales específicamente a partir de dicho descubrimiento presentan algunas divergencias con respecto a la concepción Newtoniana. En el espacio/tiempo Newtoniano las relaciones de causalidad obedecen el principio causal del tiempo, en el cual las causas preceden a sus efectos y sus conexiones causales se conciben de acuerdo a la ley de gravitación universal como un acción instantánea, es decir, que la señal que conecte dos posibles eventos en dicho espacio/tiempo debe poseer una velocidad infinita. Sin embargo, con el postulado de la constancia de la velocidad de la luz, las relaciones de causalidad a pesar de que

obedecen en primera instancia el principio causal del tiempo, dicho principio sufre una pequeña modificación con respecto a la concepción clásica y es que todos los observadores presentan un cono de luz pasado y futuro que representaría la historia espacio/temporal de dicho evento, en el cual sus vértices serían la máxima velocidad a la cual estos podrían llegar a moverse, la velocidad de la luz  $c$ . En ese orden de ideas, para que un evento A sea causa de un evento B es que B se encuentre dentro del cono de luz futuro de A. Cabe resaltar, que dicho principio enunciado anteriormente se generaliza al contexto de espacio/tiempos curvos en el caso de la relatividad general (solución de Schwarzschild, solución Kerr, etc.), al considerar que un evento A sea causa de un evento B, es que B se encuentra dentro del cono de luz futuro curvado de A.

- c. Teniendo en cuenta las conclusiones escritas anteriormente, se puede evidenciar, que bajo el contexto de la Teoría General de la Relatividad existen múltiples estructuras causales, las cuales surgen de la curvatura espacio/temporal que producen la distribución de masas particulares en el espacio/tiempo. Cabe resaltar que se hace referencia a estructura causal al comportamiento de los conos de luz, los cuales se obtienen de las trayectorias que realizan los haces de luz y las partículas masivas en el espacio/tiempo. Si se considera el caso específico de las soluciones de Schwarzschild y Kerr, estas son producidas por objetos astronómicos que distorsionan el espacio/tiempo, donde la configuración que adquiere cada una de estas soluciones es singular. Las propiedades que se obtienen a partir de la descripción de dichos espacio/tiempo son: singularidades, horizontes de eventos, etc. Como se analizó en la construcción de la investigación, estos últimos juegan un papel indispensable en la descripción de la causalidad de cada una de las soluciones.
- d. El trabajo de monografía realizado ha sido construido con el objetivo fundamental de presentar una visión introductoria a modo de reflexión de un tema particular, el cual es el concepto de causalidad. Se espera que dicho documento constituya un aporte teórico para el programa de la Licenciatura en Física y además sirva como un referente inicial para la construcción de posteriores trabajos que se desarrollen dentro del Departamento de Física de la Universidad Pedagógica Nacional.



## Lista de referencias:

- Álvarez Toledo Sebastián. (2008). Causalidad y tiempo: el sentido de una reducción. Teorema, XVII, 29-42.
- Carnap Rudolf. (1969). Causalidad y determinismo. En Fundamentación lógica de la física (249-296). Buenos Aires: Sudamericana.
- Davies Paul. (1995). Sobre el tiempo: la revolución inacabada de Einstein. Madrid: Crítica.
- D'Inverno Ray. (1992). Introducing Einstein's Relativity. New York: Oxford University.
- De Gortari Eli. (1960). Causalidad y determinismo. Diánoia, VI, 22-43.
- French. (1974). Relatividad Especial, Curso de física del MIT (Massachusetts Institute of Technology). New York: Reverté S.A.
- Gamow George. (1971). Biografía de la física. Madrid: Alianza Editorial.
- Granés Sellares José. (2005). Isaac Newton Obra y contexto. Una introducción. Bogotá D.C: Editorial.Ltda.
- Hawking,S & Ellis,G. (1973). The Large Scale Structure of Space-Time. Cambridge University: Cambridge University Press.
- Hobson M.P, Estathiou G.P & Lasenby A. (2006). General Relativity An introducing for phisicists. London: Cambridge University Press.
- Kerr, R.P. (1963). Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics. Physical Review Letters, II, 237-238.
- Minkowski Hermann. (1908). Space and Time: Minkowski Papers on Relativity. Moscú: Minkowski Institute Press.
- Misner,C , Thorne.K & Wheeler.J. (1973). Gravitation. New York: W. H Freeman and Company.

- Pacheco C. & Pulido A.(2001), *Análisis formal de los conceptos de espacio y tiempo*, Universidad Pedagógica Nacional (tesis de Pregrado), Bogotá D.C, Colombia.
- Quintana, Hernán (2004). *Espacio, Tiempo y Universo. Tomo II*, Ediciones Universidad Católica de Chile.
- Rodríguez, Miguel Ángel (2012), *Estructura causal en el universo cosmológico de Godel (tesis de pregrado)*, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá D.C, Colombia.
- Sepúlveda, Alonso (2003). *Los conceptos de la física. Evolución Histórica. .* Medellín: Universidad de Antioquía.
- Tejeiro, Juan Manuel. (2004). *Sobre la teoría especial de la relatividad*. Bogotá D.C: Universidad Nacional de Colombia - Unibiblos.
- Varela, Olga Lucía. (2005). *Causalidad y Mecánica Cuántica. Versiones, IV, 1-6*.
- Vélez, Fabio. (2012). *Apuntes de Relatividad*. Bogotá D.C: Corcas Editores SAS.

## Bibliografía:

- Arenas, Juan Sebastián (2014), *Termodinámica de agujeros negros* (tesis de pregrado), Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá D.C, Colombia.
- Fernández, Guillermo (2015), *Órbitas materiales en agujeros negros* (tesis de pregrado), Universidad de Murcia, Murcia, España.
- Fonseca, Diego Fernando (2016), *Horizontes de eventos del espacio-tiempo de Kerr* (tesis de maestría), Universidad Nacional de Colombia, Bogotá D.C, Colombia.
- Hawking Stephen. (1977). Historia del tiempo “Del Big Bang a los agujeros negros”. Cambridge University: Crítica.
- Janssen Bert. (2013). Teoría General de la Relatividad. Granada: Universidad de Granada - España, Departamento de física teórica y del cosmos.
- Kaufmann, W. (1977). Relatividad y Cosmología. London: Copyright.
- Larrañaga,Edward. (2008). Agujeros Negros Clásicos. Bogotá D.C: Universidad Nacional de Colombia.
- Newman E.T & Janis A.I, \Note on the Kerr Spinning- Particle Metric," J. Math. Phys. 6, 915-7 (1965).
- Nagel, Ernest. (2006). La estructura de la Ciencia - Problemas de la lógica de la investigación científica. Barcelona: Paidós.
- Newton, Isaac. (1983). Principios matemáticos de la filosofía natural, Madrid: Alianza Editorial.
- Pérez, Daniela (2016), *Agujeros negros astrofísicos* (tesis de doctorado en astronomía), Universidad Nacional de la Plata, Buenos Aires, Argentina.
- Pérez Potayos José. (2016). Tipos de agujeros negros. 15 de abril 2017, de Universidad de Granada: Departamento de física y del cosmos Sitio web: <http://www.ugr.es/~bjanssen/text/TFGPerezPoyatos.pdf>

- Ranea, Ignacio Francisco (2015), *Perturbaciones al espacio/tiempo de Kerr y Conjetura de Censura Cósmica* (tesis de doctorado en astronomía), Universidad Nacional de la Plata, Buenos Aires, Argentina.
- Retolaza, A. (2011). ¿Induce a error el principio de causalidad? Norte de salud mental, IX, 72-89. 18 de octubre 2016, De Dial net Base de datos.
- Schwarzschild, Karl, (1916). *Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie. Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften*. Vorgelegt von , I, 189-196.
- Tejeiro, Juan Manuel. (2005). Notas de clase: Principios de Relatividad General, Bogotá D.C: Universidad Nacional de Colombia - Unibiblos.
- Thorne, Kip. (1995). *Agujeros negros y tiempo curvo*. Barcelona: Crítica.

## Sección de anexos:

### Anexo A: Demostración de la métrica de Schwarzschild.

En el presente anexo, se realizará la demostración en detalle de la métrica que describe la primera solución exacta de las ecuaciones de campo de Einstein en 1916, la solución de Schwarzschild.

Inicialmente, debemos considerar que la solución de Schwarzschild es una solución estática, asintóticamente plana y esféricamente simétrica de las Ecuaciones de campo de Einstein expresadas por:

$$G_{\mu\gamma} = 8\pi T_{\mu\gamma} \quad (7.1)$$

Donde  $G_{\mu\gamma}$  es el tensor de Einstein y  $T_{\mu\gamma}$  el tensor de momento-energía. Teniendo en cuenta la ecuación 7.1, el lado izquierdo representa toda la configuración geométrica del espacio/tiempo y el lado derecho de la ecuación muestra la distribución de materia y energía presente en el espacio/tiempo. Considerando, que el tensor métrico de Einstein es equivalente a:

$$G_{\mu\gamma} = R_{\mu\gamma} - \frac{1}{2} g_{\mu\gamma} R \quad (7.2)$$

Donde el tensor de Ricci ( $R$ ) y el tensor momento-energía  $T_{\mu\gamma}$ , son iguales a cero, debido a que la solución de Schwarzschild, es una solución ideal, la cual se considera en el vacío. En consecuencia,

$$G_{\mu\gamma} = R_{\mu\gamma} \quad (7.3)$$

Equivalente a:

$$R_{\mu\gamma} = 0 \quad (7.4)$$

Debido a que la solución de Schwarzschild implica un objeto simétricamente esférico en el espacio/tiempo, se puede escribir la métrica de Minkowsky en coordenadas esféricas, así:

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (7,5)$$

Cuando se incluye la masa, existe una curvatura espacio/temporal, por lo que su métrica se transforma en:

$$ds^2 = A dt^2 - B dr^2 - r^2(C d\theta^2 + D \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (7,6)$$

Considerando que los coeficientes  $C = D = 1$ , debido a la simetría esférica, puesto que las componentes angulares no varían a efecto de que dicha solución es asintóticamente plana y debe conservar la signatura (-2). En otras palabras, si  $r \rightarrow \infty$ , los coeficientes  $A, B, C, D \rightarrow 1$ . Por otro lado los coeficientes A y B, se definen como dos funciones que dependen de la coordenada radial r.

$$A(r) = e^{V(r)} ; \text{ Si } r \rightarrow \infty, \text{ entonces } V(r) \rightarrow 0 \quad (7.7)$$

$$B(r) = e^{\lambda(r)} ; \text{ Si } r \rightarrow \infty, \text{ entonces } \lambda(r) \rightarrow 0 \quad (7.8)$$

Considerando, todo lo anteriormente escrito la métrica que obtenemos ahora es:

$$ds^2 = e^{V(r)} dt^2 - e^{\lambda(r)} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (7,9)$$

Por lo tanto la matriz obtenida del tensor métrico covariante es:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^{V(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{\lambda(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix} \quad (7.10)$$

Lo que en consecuencia, el tensor métrico contravariante se expresa así:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{e^{V(r)}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{e^{\lambda(r)}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \end{pmatrix} \quad (7.11)$$

Teniendo en cuenta, la ecuación (7.4), se halla el tensor de curvatura de Ricci, el cual se define mediante la expresión:

$$R_{\mu\gamma} = \frac{\partial \Gamma_{\beta\gamma}^{\beta}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\gamma}^{\beta}}{\partial x^{\beta}} + \Gamma_{\tau\mu}^{\beta} \Gamma_{\beta\gamma}^{\tau} - \Gamma_{\tau\beta}^{\beta} \Gamma_{\mu\gamma}^{\tau} \quad (7.12)$$

Donde los símbolos de Christoffel están definidos mediante la expresión:

$$\Gamma_{db}^a = \frac{1}{2} g^{ca} \left( \frac{\partial g_{dc}}{\partial x^b} + \frac{\partial g_{cb}}{\partial x^d} - \frac{\partial g_{bd}}{\partial x^c} \right) \quad (7.13)$$

Por lo tanto, los símbolos de Cristoffel diferentes de cero son:

$$\begin{aligned} \Gamma_{01}^0 &= \Gamma_{10}^0 = \frac{1}{2} v' & \Gamma_{23}^3 &= \Gamma_{32}^3 = \cot\theta \\ \Gamma_{00}^1 &= \frac{1}{2} e^{v-\lambda} v' & \Gamma_{01}^0 &= \frac{1}{2} \lambda' \\ \Gamma_{22}^1 &= -e^{-\lambda} r & \Gamma_{33}^1 &= -e^{-\lambda} \sin^2\theta \cdot r \\ \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r} & \Gamma_{11}^3 &= \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{r} \\ \Gamma_{33}^2 &= -\sin\theta \cos\theta & \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r} \end{aligned} \quad (7.14)$$

Con los símbolos de Cristoffel obtenidos, se tiene en cuenta la ecuación (7.13), para hallar  $R_{\mu\gamma}$ , donde  $R_{\mu\gamma} = 0$ , cuando  $\mu \neq \gamma$ .

Para  $R_{00}$ , tenemos:

$$\begin{aligned} R_{00} &= \frac{\partial \Gamma_{\beta 0}^{\beta}}{\partial x^0} - \frac{\partial \Gamma_{00}^{\beta}}{\partial x^{\beta}} + \Gamma_{\tau 0}^{\beta} \Gamma_{\beta 0}^{\tau} - \Gamma_{\tau\beta}^{\beta} \Gamma_{00}^{\tau} \\ R_{00} &= e^{v-\lambda} \left( -\frac{1}{4} (v')^2 + \frac{1}{4} v' \lambda' - \frac{1}{2} v'' - \frac{v'}{r} \right) \end{aligned} \quad (7.15)$$

Para  $R_{11}$ , tenemos:

$$\begin{aligned} R_{11} &= \frac{\partial \Gamma_{\beta 1}^{\beta}}{\partial x^1} - \frac{\partial \Gamma_{11}^{\beta}}{\partial x^{\beta}} + \Gamma_{\tau 1}^{\beta} \Gamma_{\beta 1}^{\tau} - \Gamma_{\tau\beta}^{\beta} \Gamma_{11}^{\tau} \\ R_{11} &= \frac{1}{2} v'' + \frac{1}{4} (v')^2 - \frac{1}{2} v' \lambda' - \frac{1}{r} \lambda' \end{aligned} \quad (7.16)$$

Para  $R_{22}$ , tenemos:

$$R_{22} = \frac{\partial \Gamma_{\beta 2}^{\beta}}{\partial x^2} - \frac{\partial \Gamma_{22}^{\beta}}{\partial x^{\beta}} + \Gamma_{\tau 2}^{\beta} \Gamma_{\beta 2}^{\tau} - \Gamma_{\tau \beta}^{\beta} \Gamma_{22}^{\beta} \quad (7.17)$$

$$R_{22} = e^{-\lambda} \left( -\frac{1}{2} \lambda' r + \frac{1}{2} v' r + 1 \right) - 1$$

Para  $R_{33}$ , tenemos:

$$R_{33} = \frac{\partial \Gamma_{\beta 3}^{\beta}}{\partial x^3} - \frac{\partial \Gamma_{33}^{\beta}}{\partial x^{\beta}} + \Gamma_{\tau 3}^{\beta} \Gamma_{\beta 3}^{\tau} - \Gamma_{\tau \beta}^{\beta} \Gamma_{33}^{\beta} \quad (7.18)$$

$$R_{33} = \sin^2 \theta \left( e^{-\lambda} - \frac{1}{2} r \lambda' e^{-\lambda} + \frac{1}{2} r v' e^{-\lambda} - 1 \right)$$

Ahora se resuelven las ecuaciones de campo, propuesta en la ecuación (7.4) así:

Para  $R_{00} = 0$ , tenemos:

$$e^{v-\lambda} \left( -\frac{1}{4} (v')^2 + \frac{1}{4} v' \lambda' - \frac{1}{2} v'' - \frac{v'}{r} \right) = 0 \quad (7.19)$$

$$\left( -\frac{1}{4} (v')^2 + \frac{1}{4} v' \lambda' - \frac{1}{2} v'' - \frac{v'}{r} \right) = 0$$

Para  $R_{11} = 0$ , tenemos:

$$\frac{1}{2} v'' + \frac{1}{4} (v')^2 - \frac{1}{2} v' \lambda' - \frac{1}{r} \lambda' = 0 \quad (7.20)$$

Sumando (7.19) y (7.20), obtenemos:

$$\left( -\frac{1}{4} (v')^2 + \frac{1}{4} v' \lambda' - \frac{1}{2} v'' - \frac{v'}{r} \right) + \frac{1}{2} v'' + \frac{1}{4} (v')^2 - \frac{1}{2} v' \lambda' - \frac{1}{r} \lambda' = 0$$

$$-\frac{1}{4} (v')^2 + \frac{1}{4} v' \lambda' - \frac{1}{2} v'' - \frac{v'}{r} + \frac{1}{2} v'' + \frac{1}{4} (v')^2 - \frac{1}{2} v' \lambda' - \frac{1}{r} \lambda' = 0$$

$$\lambda' + v' = 0$$

Integrando a ambos lados, se obtiene:



$$\int \lambda' = - \int v'$$

$$\lambda' = -v' + \text{constante}$$

Considerando constante = 0 (condición de frontera), se obtiene:

$$\lambda' = -v' \quad (7.21)$$

Ahora, para  $R_{22} = 0$ , tenemos:

$$e^{-\lambda} \left( -\frac{1}{2} \lambda' r + \frac{1}{2} v' r + 1 \right) - 1 = 0 \quad (7.22)$$

Reemplazando el resultado obtenido (7.21) en (7.22) y se obtiene:

$$e^v \left( -\frac{1}{2} (-v') r + \frac{1}{2} v' r + 1 \right) - 1 = 0$$

$$e^v \left( \frac{1}{2} v' r + \frac{1}{2} v' r + 1 \right) - 1 = 0$$

$$e^v (v' r + 1) - 1 = 0$$

$$e^v (v' r + 1) = 1$$

$$\frac{d}{dr} (r \cdot e^v) = 1$$

$$\int d(r \cdot e^v) = \int dr$$

$$r \cdot e^v = r + \text{constante}$$

$$e^v = 1 + \frac{\text{constante}}{r}$$

La constante  $r = 2m$ . Por lo tanto:  $e^v = 1 + \frac{2m}{r}$

Donde  $M$  es la masa en unidades geométricas (Ver anexo B). Finalmente se obtiene la métrica de Schwarzschild que se define mediante la expresión:

$$ds^2 = \left( 1 - \frac{2m}{r} \right) dt^2 - \left( 1 - \frac{2m}{r} \right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (7.23)$$

## Anexo B: Unidades geométricas en la Teoría General de la Relatividad

A continuación, en el presente anexo se desarrollará en detalle, las unidades geométricas o geometrizadas que son ampliamente utilizadas en el campo de la Teoría General de la Relatividad TGR.

Las unidades geométricas son un eficiente sistema de unidades que se utiliza en el marco de la TGR, al considerar la velocidad de la luz  $c$  y la constante gravitacional  $G$  como constantes equivalentes a 1, es decir,  $C = G = 1$ . De esta manera, cualquier unidad puede ser escrita en una única unidad previamente seleccionada. Con base a lo anteriormente escrito, en esta sección se explicará cómo convertir cualquier magnitud en este sistema de unidades geométricas.

La conversión a este sistema de unidades geométricas se basa básicamente en los valores que tenga la velocidad de luz  $c$  y a constante gravitacional  $G$  así:

$$c_{convertir} = 3 \times 10^{10} \frac{cm}{s} = 3 \times 10^8 \frac{m}{s}$$

$$G_{convertir} = 6,67 \times 10^{-8} \frac{cm^3}{g \cdot s^2} = 6,67 \times 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2}$$

Teniendo en cuenta que  $c = 1$ , se puede decir que distancia y tiempo se miden en las mismas unidades espaciales, un ejemplo muy conocido de esto desde el contexto de la relatividad es el de medir las distancias en años luz. Por lo tanto, para calcular el tiempo en unidades geométricas es así:

$$t_{unid.geom} = t_{convertir} \cdot c_{convertir}$$

En el caso de que se arroje una distancia, por ejemplo la distancia del sol a la tierra que es igual a  $x_{convertir} = 1,5 \times 10^{13} cm$ , se puede expresar dicha magnitud en segundos así:

$$x_{geometricas} = \frac{x_{convertir}}{c_{convertir}}$$

$$x_{geométricas} = \frac{1,5 \times 10^{13} \text{ cm}}{3 \times 10^{10} \frac{\text{cm}}{\text{s}}}$$

$$x_{geometricas} = 500 \text{ seg}$$

Por lo tanto, la velocidad será una magnitud que no tiene dimensión:

$$v_{geometricas} = \frac{v_{convertir}}{c_{convertir}}$$

Por ejemplo,  $v_{geometricas} = 0,5$ , se interpreta como:

$$v_{geometricas} = (0,5) \cdot c_{convertir}$$

$$v_{geometricas} = (0,5) \cdot (3 \times 10^{10} \frac{\text{cm}}{\text{s}})$$

$$v_{geometricas} = 1,5 \times 10^{10} \frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

Por otra parte, la masa también puede ser medida en las mismas unidades que la distancia y el tiempo. El factor de conversión se obtiene realizando:  $\frac{G_{convertir}}{c_{convertir}^2} = 7,42 \times 10^{-29} \frac{\text{cm}}{\text{g}}$ . Si convertimos la masa del sol  $m_{convertir} = 2 \times 10^{33} \text{ gr}$  a unidades geometrizadas, obtenemos:

$$m_{geometricas} = \frac{G_{convertir}}{c_{convertir}^2} \cdot m_{convertir}$$

$$m_{geometricas} = 14,8 \times 10^4 \text{ cm}$$

Y usando el segundo como unidad geométrica, obtenemos:

$$m_{geometricas} = \frac{14,8 \times 10^4 \text{ cm}}{3 \times 10^{10} \frac{\text{cm}}{\text{s}}}$$

$$m_{geometricas} = 4,9 \times 10^{-6} \text{ seg}$$

De la misma manera, la fuerza medida en  $\frac{cm \cdot g}{s^2}$  bajo el sistema internacional, al ser multiplicada por el factor de conversión  $\frac{G_{convertir}}{c^4_{convertir}}$  en  $\frac{s^2}{cm \cdot g}$ , pasaría a ser adimensional. Por último, la energía medida  $\frac{cm^2 \cdot g}{s^2}$  y usando el mismo factor de conversión  $\frac{G_{convertir}}{c^4_{convertir}}$ , su unidad geométrica es en cm.

Estas unidades son muy significativas y de gran utilidad, pues sirve para comparar distintas magnitudes de una partícula. Si observamos el caso del sol, su masa es menor a su radio  $m_{sol-geométricas} = 14,8 \times 10^4 \text{ cm} \ll r_{sol-geométricas} = 7,5 \times 10^5 \text{ km}$ .

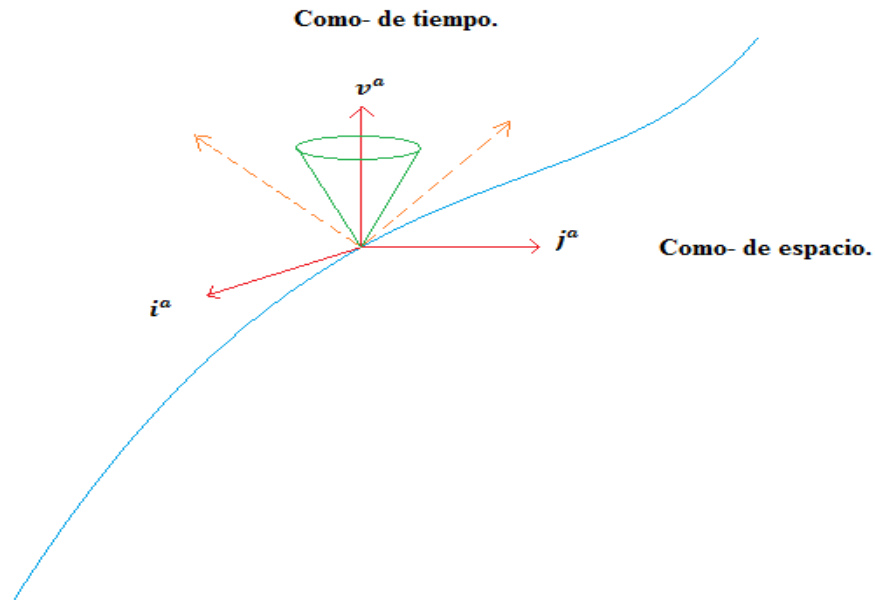
Considerando todo lo previamente explicado, a continuación se realizará un cuadro donde sintetiza, la unidad geométrica correspondiente para algunas magnitudes principales.

Magnitud.	Factor de conversión.	Unidad geométrica.
Tiempo (s)	c	cm
Velocidad (cm/s)	$\frac{1}{c}$	Adimensional.
Aceleración ( $\frac{cm}{s^2}$ )	$\frac{1}{c^2}$	$cm^{-1}$
Masa (gr)	$\frac{G}{c^2}$	cm
Fuerza ( $\frac{cm \cdot gr}{s^2}$ )	$\frac{G}{c^4}$	Adimensional.
Energía ( $\frac{cm^2 \cdot gr}{s^2}$ )	$\frac{G}{c^4}$	cm

Finalmente, si se tiene en cuenta el cuadro realizado anteriormente, se puede obtener que los horizontes de eventos para de las soluciones de Schwarzschild y Kerr se miden bajo las unidades geométricas en centímetros (cm)

### Anexo C: Demostración de la métrica de Kerr.

A continuación se desarrollará en detalle la demostración de la métrica de Kerr. Para comenzar con la obtención de la métrica que describe un objeto astronómico en rotación en el espacio/tiempo es necesario utilizar una herramienta muy implementada desde el contexto de la Teoría General de la Relatividad, la cual fue trabajada mucho por los físicos y matemáticos Newman y Roger Penrose en los años setentas. Dicho formalismo, utiliza las tétradas nulas, las cuales consisten en un conjunto de cuatro vectores linealmente independientes en el 4-espacio (uno como- de tiempo y tres como- de espacio) que funciona reproduciendo la métrica del espacio/tiempo desde un sistema de coordenadas fijo a un observador o evento determinado. Con base en lo anteriormente escrito, la representación gráfica es así:



De esta manera, por ejemplo para el espacio/tiempo de Minkowsky, se mantiene la relación:

$$g_{ab} = g_{ij} e_i^a e_b^j \quad (7.1)$$

Los índices de las tétradas se pueden subir o bajar utilizando la métrica del espacio/tiempo plano. Sin embargo, para un espacio/tiempo más general con la métrica  $g_{ab}$ , se tiene que:

$$g_{ab} = g_{ij} e_a^i e_j^b \quad (7.2)$$

Mientras que  $g_{ab}$  no sea regular, siempre es posible definir su inversa así:

$$g_{ij} = g_{ab} e_a^i e_j^b \quad (7.3)$$

Por lo tanto, asumiendo que:

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7.4)$$

Donde: *Diag*  $(-1, 1, 1, 1)$ ; *Signatura*  $(+2)$

$$g^{ab} = \frac{1}{g_{ab}}$$

$$U_a = (-1, 0, 0, 0) = (U_0, U_1, U_2, U_3)$$

$$i_a = (0, 1, 0, 0) = (i_0, i_1, i_2, i_3)$$

$$j_a = (0, 1, 0, 0) = (j_0, j_1, j_2, j_3)$$

$$k_a = (0, 1, 0, 0) = (k_0, k_1, k_2, k_3)$$

Que satisface las condiciones de orto-normalidad:

$$U^a U_a = -1 \quad (7.5)$$

$$U^a U_a = U^0 U_0 + U^1 U_1 + U^2 U_2 + U^3 U_3$$

Para realizar dicha operación debemos encontrar las componentes contravariantes a partir del tensor métrico de Minkowsky así:

$$U^a = g^{ab} U_b \quad (7.6)$$

$$U^0 = g^{0b}U_b$$

$$U^0 = g^{00}U_0 + g^{01}U_1 + g^{02}U_2 + g^{03}U_3$$

$$U^0 = (-1)(-1) + (0)(0) + (0)(0) + (0)(0)$$

$$U^0 = 1$$

Por lo tanto:

$$U^0U_0 = -1$$

Para encontrar las componentes contravariantes  $U^1, U^2, U^3$ , se realiza el mismo procedimiento así:

$$U^1 = g^{1b}U_b$$

$$U^1 = g^{10}U_0 + g^{11}U_1 + g^{12}U_2 + g^{13}U_3$$

$$U^1 = (0)(-1) + (1)(0) + (0)(0) + (0)(0) = 0$$

$$\text{Por lo que: } U^1U_1 = 0$$

$$U^2 = g^{2b}U_b$$

$$U^2 = g^{20}U_0 + g^{21}U_1 + g^{22}U_2 + g^{23}U_3$$

$$U^2 = (0)(-1) + (0)(0) + (1)(0) + (0)(0) = 0$$

$$\text{Por lo que: } U^2U_2 = 0$$

$$U^3 = g^{3b}U_b$$

$$U^3 = g^{30}U_0 + g^{31}U_1 + g^{32}U_2 + g^{33}U_3$$

$$U^3 = (0)(-1) + (0)(0) + (0)(0) + (1)(0) = 0$$

$$\text{Por lo que: } U^3U_3 = 0$$

De tal forma que:

$$U^a U_a = U^0 U_0 + U^1 U_1 + U^2 U_2 + U^3 U_3$$

$$U^a U_a = -1 + 0 + 0 + 0$$

$$U^a U_a = -1 \quad \text{q.e.d}$$

Teniendo en cuenta, lo anterior también se satisfcen la condiciones de normalización:

$$i^a i_a = j^a j_a = k^a k_a = 1 \quad (7.7)$$

La demostración de estas relaciones de orto-normalidad se obtienen exactamente de la misma forma a la realizada anteriormente para  $U^a U_a = -1$ .

Finalmente, demostraremos otras relaciones de orto-normalidad, estas son:

$$U^a i_a = U^a j_a = U^a k_a = 0 \quad (7.8)$$

$$U^a i_a = 0$$

$$U^a U_a = U^0 U_0 + U^1 U_1 + U^2 U_2 + U^3 U_3$$

Como ya se obtuvieron las componentes contravariantes de los vectores  $U_a, i_a, j_a, k_a$  anteriormente, tenemos:

$$U^a i_a = (1)(0) + (0)(1) + (0)(0) + (0)(0) = 0$$

$$* U^a j_a = 0$$

$$U^a j_a = U^0 j_0 + U^1 j_1 + U^2 j_2 + U^3 j_3$$

$$U^a j_a = (1)(0) + (0)(0) + (0)(1) + (0)(0) = 0$$

$$* U^a k_a = 0$$

$$U^a k_a = U^0 k_0 + U^1 k_1 + U^2 k_2 + U^3 k_3$$

$$U^a k_a = (1)(0) + (0)(0) + (0)(1) + (0)(0) = 0$$



Para construir una base de vectores nula (formalismo de Newman- Penrose), de manera que se definen los vectores nulos  $n_a$  y  $l_a$  a partir de la base utilizada en el espacio plano (combinando el vector como-de tiempo  $U_a$  y un vector como-de espacio  $i_a$ )

$$\begin{aligned} e_0^a &= l^a = \frac{1}{\sqrt{2}} (U^a + i^a) = \frac{1}{\sqrt{2}} U^a + \frac{1}{\sqrt{2}} i^a \\ e_1^a &= n^a = \frac{1}{\sqrt{2}} (U^a - i^a) = \frac{1}{\sqrt{2}} U^a - \frac{1}{\sqrt{2}} i^a \end{aligned} \quad (7.9)$$

Con inversas:

$$U^a = \frac{1}{\sqrt{2}} (l^a + n^a) \quad (7.10)$$

$$i^a = \frac{1}{\sqrt{2}} (l^a - n^a) \quad (7.11)$$

Las cuales satisfacen las relaciones de orto normalidad:

$$l^a n_a = -1 \quad (7.12)$$

$$l^a l_a = n^a n_a = 0 \quad (7.13)$$

$$* l^a n_a = \left( \frac{1}{\sqrt{2}} U^a + \frac{1}{\sqrt{2}} i^a \right) \left( \frac{1}{\sqrt{2}} U^a - \frac{1}{\sqrt{2}} i^a \right)$$

$$l^a n_a = \frac{1}{2} U^a U_a - \frac{1}{2} U^a i_a + \frac{1}{2} i^a U_a - \frac{1}{2} i^a i_a$$

$$l^a n_a = \frac{1}{2} (U^a U_a - U^a i_a + i^a U_a - i^a i_a)$$

$$l^a n_a = \frac{1}{2} (-1 + 0 + 0 - 1)$$

$$l^a n_a = \frac{1}{2} (-2)$$

$$* l^a l_a = \left( \frac{1}{\sqrt{2}} U^a + \frac{1}{\sqrt{2}} i^a \right) \left( \frac{1}{\sqrt{2}} U^a + \frac{1}{\sqrt{2}} i^a \right)$$

$$l^a l_a = \frac{1}{2} U^a U_a + \frac{1}{2} U^a i_a + \frac{1}{2} i^a U_a + \frac{1}{2} i^a i_a$$

$$l^a n_a = -1$$

$$l^a n_a = \frac{1}{2} (U^a U_a + U^a i_a + i^a U_a + i^a i_a)$$

$$l^a n_a = \frac{1}{2} (-1 + 0 + 0 + 1)$$

$$l^a n_a = \frac{1}{2} (0)$$

$$l^a n_a = 0$$

Para la relación la otra relación de orto - normalidad se realiza el mismo proceso, al explicado anteriormente.

Por otra parte, se constituyen dos vectores (usando los dos vectores restantes como-de espacio  $j_a$  y  $k_a$ , utilizando una combinación compleja de la forma con  $i = \sqrt{-1}$ )

$$\begin{aligned} e_2^a &= m^a = \frac{1}{\sqrt{2}} (j^a + ik^a) = \frac{1}{\sqrt{2}} j^a + \frac{1}{\sqrt{2}} ik^a \\ e_3^a &= \check{m}^a = \frac{1}{\sqrt{2}} (j^a - ik^a) = \frac{1}{\sqrt{2}} j^a - \frac{1}{\sqrt{2}} ik^a \end{aligned} \quad (7.14)$$

En donde  $\check{m}^a$  es el complejo conjugado de  $m^a$  con inversas:

$$j^a = \frac{1}{\sqrt{2}} (m^a + \check{m}^a) \quad (7.15)$$

$$k^a = -\frac{i}{\sqrt{2}} (m^a - \check{m}^a) \quad (7.16)$$

Las cuales satisfacen las relaciones de orto normalidad:

$$m^a m_a = \check{m}^a \check{m}_a = 0 \quad (7.17)$$

$$m^a \check{m}_a = 1 \quad (7.18)$$

$$* m^a m_a = \left( \frac{1}{\sqrt{2}} j^a + \frac{1}{\sqrt{2}} ik^a \right) \left( \frac{1}{\sqrt{2}} j^a + \frac{1}{\sqrt{2}} ik^a \right)$$

$$m^a m_a = \frac{1}{2} j^a j_a + \frac{1}{2} ij^a k_a + \frac{1}{2} ik^a j_a + \frac{1}{2} i^2 k^a k_a$$

$$m^a m_a = \frac{1}{2} j^a j_a + \frac{1}{2} ij^a k_a + \frac{1}{2} ik^a j_a - \frac{1}{2} k^a k_a$$

$$m^a m_a = \frac{1}{2} (j^a j_a + ij^a k_a + ik^a j_a - k^a k_a)$$

$$m^a m_a = \frac{1}{2} (1 + 0 + 0 - 1)$$

$$m^a m_a = \frac{1}{2} (0)$$

$$\mathbf{m^a m_a = 0}$$

Para demostrar la otra condición de orto normalidad  $\check{m}^a \check{m}_a = \mathbf{0}$  , se realiza el mismo procedimiento, al descrito anteriormente.

$$m^a \check{m}_a = \left( \frac{1}{\sqrt{2}} j^a + \frac{1}{\sqrt{2}} ik^a \right) \left( \frac{1}{\sqrt{2}} j^a - \frac{1}{\sqrt{2}} ik^a \right)$$

$$m^a \check{m}_a = \frac{1}{2} j^a j_a - \frac{1}{2} ij^a k_a + \frac{1}{2} ik^a j_a - \frac{1}{2} i^2 k^a k_a$$

$$m^a \check{m}_a = \frac{1}{2} j^a j_a - \frac{1}{2} ij^a k_a + \frac{1}{2} ik^a j_a + \frac{1}{2} k^a k_a$$

$$m^a \check{m}_a = \frac{1}{2} (j^a j_a - ij^a k_a + ik^a j_a + k^a k_a)$$

$$m^a \check{m}_a = \frac{1}{2} (1 - 0 + 0 + 1)$$

$$m^a \check{m}_a = \frac{1}{2} (2)$$

$$\mathbf{m^a \check{m}_a = 1}$$

Con los resultados obtenidos anteriormente, se puede evidenciar que los vectores que fueron construidos son nulos a excepción de las relaciones  $l^a n_a = -\mathbf{1}$  y  $m^a \check{m}_a = \mathbf{1}$  las cuales representan que cada par de vectores no son ortogonales. Lo que en consecuencia, genera que se pueda comprobar, dicha relación que satisface las condiciones de normalidad.

$$\mathbf{m^a l_a = m^a n_a = \check{m}^a l_a = \check{m}^a n_a = 0} \quad (7.19)$$

$$* m^a l_a = \left( \frac{1}{\sqrt{2}} j^a + \frac{1}{\sqrt{2}} ik^a \right) \left( \frac{1}{\sqrt{2}} U_a + \frac{1}{\sqrt{2}} i_a \right)$$

$$m^a l_a = \frac{1}{2} j^a U_a + \frac{1}{2} j^a i_a + \frac{1}{2} ik^a U_a + \frac{1}{2} ik^a i_a$$

$$m^a l_a = \frac{1}{2} (j^a U_a + j^a i_a + ik^a U_a + ik^a i_a)$$

$$m^a l_a = \frac{1}{2} (0 + 0 + 0 + 0)$$

$$m^a l_a = \frac{1}{2} (0)$$

$$\mathbf{m^a l_a = 0}$$

$$* m^a n_a = \left( \frac{1}{\sqrt{2}} j^a - \frac{1}{\sqrt{2}} ik^a \right) \left( \frac{1}{\sqrt{2}} U_a - \frac{1}{\sqrt{2}} i_a \right)$$

$$m^a n_a = \frac{1}{2} j^a U_a - \frac{1}{2} j^a i_a - \frac{1}{2} ik^a U_a + \frac{1}{2} ik^a i_a$$

$$m^a n_a = \frac{1}{2} (j^a U_a - j^a i_a + ik^a U_a + ik^a i_a)$$

$$m^a n_a = \frac{1}{2} (0 - 0 + 0 + 0)$$

$$m^a n_a = \frac{1}{2} (0)$$

$$\mathbf{m^a n_a = 0}$$

Las otras relaciones de orto-normalidad  $\mathbf{m^a n_a = \check{m}^a l_a = 0}$ , se demuestran de la misma manera a lo explicado anteriormente.

Ahora, se tiene que la métrica para el espacio/tiempo construido a partir de la tétrada nula, está dada por los coeficientes  $\mathbf{g_{ij} = e_i^a e_{(j)a} = e_i^0 e_{(j)0} + e_i^1 e_{(j)1} + e_i^2 e_{(j)2} + e_i^3 e_{(j)3}}$ .

Por lo tanto, se puede demostrar a partir de las condiciones de normalización demostradas anteriormente que el tensor métrico obtenido a partir de las componentes para la métrica comovil es:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.19)$$

Teniendo en cuenta que  $(e_i^a, e_i^a, e_i^a, e_i^a) = (l^a, n^a, m^a, \tilde{m}^a)$  y por ende:

$$\begin{aligned} e_0^a = l^a &= \frac{1}{\sqrt{2}} (U^a + i^a) = \frac{1}{\sqrt{2}} U^a + \frac{1}{\sqrt{2}} i^a & e_1^a = n^a &= \frac{1}{\sqrt{2}} (U^a - i^a) = \frac{1}{\sqrt{2}} U^a - \frac{1}{\sqrt{2}} i^a \\ e_2^a = m^a &= \frac{1}{\sqrt{2}} (j^a + ik^a) = \frac{1}{\sqrt{2}} j^a + \frac{1}{\sqrt{2}} ik^a & e_3^a = \tilde{m}^a &= \frac{1}{\sqrt{2}} (j^a - ik^a) = \frac{1}{\sqrt{2}} j^a - \frac{1}{\sqrt{2}} ik^a \end{aligned}$$

Finalmente, usando la expresión  $g_{ab} = g_{ij} e_a^i e_b^j$ , obtenemos la métrica de manera explícita en términos de la tétrada así:

$$\begin{aligned} g_{ab} &= -U_a U_b + i_a i_b + j_a j_b + k_a k_b \\ g_{ab} &= -\left(\frac{1}{\sqrt{2}} l_a + \frac{1}{\sqrt{2}} n_a\right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} l_b + \frac{1}{\sqrt{2}} n_b\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} l_a - \frac{1}{\sqrt{2}} n_a\right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} l_b - \frac{1}{\sqrt{2}} n_b\right) \\ &+ \left(\frac{1}{\sqrt{2}} m_a + \frac{1}{\sqrt{2}} \tilde{m}_a\right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} m_b + \frac{1}{\sqrt{2}} \tilde{m}_b\right) + \left(\frac{-i}{\sqrt{2}} m_a + \frac{i}{\sqrt{2}} \tilde{m}_a\right) \left(\frac{-i}{\sqrt{2}} m_b + \frac{i}{\sqrt{2}} \tilde{m}_b\right) \\ g_{ab} &= \left(-\frac{1}{2} l_a l_b - \frac{1}{2} l_a n_b - \frac{1}{2} n_a l_b - \frac{1}{2} n_a n_b\right) + \left(\frac{1}{2} l_a l_b - \frac{1}{2} l_a n_b - \frac{1}{2} n_a l_b + \frac{1}{2} n_a n_b\right) + \left(\frac{1}{2} m_a m_b + \frac{1}{2} m_a \tilde{m}_b + \frac{1}{2} \tilde{m}_a m_b + \frac{1}{2} \tilde{m}_a \tilde{m}_b\right) + \left(\frac{i^2}{2} m_a m_b - \frac{i^2}{2} m_a \tilde{m}_b - \frac{i^2}{2} \tilde{m}_a m_b + \frac{i^2}{2} \tilde{m}_a \tilde{m}_b\right) \\ g_{ab} &= \left(-\frac{1}{2} l_a l_b - \frac{1}{2} l_a n_b - \frac{1}{2} n_a l_b - \frac{1}{2} n_a n_b\right) + \left(\frac{1}{2} l_a l_b - \frac{1}{2} l_a n_b - \frac{1}{2} n_a l_b + \frac{1}{2} n_a n_b\right) + \left(\frac{1}{2} m_a m_b + \frac{1}{2} m_a \tilde{m}_b + \frac{1}{2} \tilde{m}_a m_b + \frac{1}{2} \tilde{m}_a \tilde{m}_b\right) + \left(-\frac{1}{2} m_a m_b + \frac{1}{2} m_a \tilde{m}_b + \frac{1}{2} \tilde{m}_a m_b - \frac{1}{2} \tilde{m}_a \tilde{m}_b\right) \\ g_{ab} &= \frac{1}{2} (-l_a l_b - l_a n_b - n_a l_b - n_a n_b + l_a l_b - l_a n_b - n_a l_b + n_a n_b + m_a m_b + m_a \tilde{m}_b + \tilde{m}_a m_b + \tilde{m}_a \tilde{m}_b \\ &- m_a m_b + m_a \tilde{m}_b + \tilde{m}_a m_b - \tilde{m}_a \tilde{m}_b) \\ g_{ab} &= \frac{1}{2} (-2l_a n_b - 2n_a l_b + 2m_a \tilde{m}_b + 2\tilde{m}_a m_b) \\ g_{ab} &= \frac{-2}{2} (l_a n_b + n_a l_b - m_a \tilde{m}_b - \tilde{m}_a m_b) \end{aligned}$$

$$g_{ab} = - (l_a n_b + n_a l_b - m_a \tilde{m}_b - \tilde{m}_a m_b)$$

Por lo tanto, el tensor métrico convariante queda expresado así

$$g_{ab} = - l_a n_b - n_a l_b + m_a \tilde{m}_b + \tilde{m}_a m_b \quad (7.20)$$

El tensor métrico contra variante queda expresado así:

$$g^{ab} = - l^a n^b - n^a l^b + m^a \tilde{m}^b + \tilde{m}^a m^b \quad (7.21)$$

### - Construcción de la tétrada:

Antes de comenzar a construir la tétrada que define la métrica de Kerr, es importante y pertinente resaltar que la información posteriormente escrita, proviene en primera instancia de fuentes de literatura acerca de Relatividad General tales como: *Gravitation* de Misner Charles, *Introducing Einstein's Relativity* de D'Inverno Ray y del artículo original "Note on the Kerr Spinning-Particle Metric" de Newmann y Janis, donde se explica su algoritmo para demostrar la métrica de Kerr. Además se consideró, la monografía de Pregrado de Juan Sebastián Arenas (2014), *Termodinámica de agujeros negros*, de la Universidad Pedagógica Nacional.

Aclarado eso, la construcción de la tétrada que sirve de base indispensable para la demostración de la métrica de Kerr puede ser escogida por medio de vectores tangentes provenientes de las trayectorias de las geodésicas radiales en la solución de Schwarzschild en coordenadas de Eddington- Finkelstein, como se estudió previamente en el capítulo II del trabajo (Ver. Cap. II). Se utiliza un parámetro afín<sup>39</sup> ( $\tau$ ) a lo largo de las geodésicas, obteniendo que a partir de la condición  $ds^2 = 0$ , es decir un intervalo luminoso, se tiene la siguiente relación:

---

<sup>39</sup> En la Teoría General de la Relatividad, un parámetro afín es la cantidad para parametrizar una geodésica, es decir, la trayectoria de un objeto o de una partícula bajo la influencia de una curvatura espacio/temporal producida por un objeto masivo.

$$\frac{du}{d\tau} \left[ \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{2m}{r} \right) \frac{du}{d\tau} - \frac{dr}{d\tau} \right] = 0 \quad (7.22)$$

Cuyas dos posibles soluciones determinan el primer par de vectores nulos adoptados a las geodésicas radiales, siendo estos:

$$l_a = (-1, 0, 0, 0) \quad n_b = \left( -\frac{1}{2} \left( 1 - \frac{2m}{r} \right), 1, 0, 0 \right) \quad (7.23)$$

Las coordenadas han sido enumeradas como:  $x^a = (u, r, \theta, \varphi)$

Ahora, el siguiente paso para obtener el siguiente par de vectores de la tétrada consiste en realizar un análisis del tensor métrico en una base orto normal de 1- formas diferenciales (Misner Charles, 1973). En esta base, el tensor métrico sigue siendo producto interno de los elementos de una base simplificado:

$$ds^2 = g_{ab} dx^a \otimes dx^b \quad (7.24)$$

$$ds^2 = n_{\tilde{a}\tilde{b}} \omega^{\tilde{a}} \otimes \omega^{\tilde{b}} \quad (7.25)$$

Donde  $\otimes$  se define como el producto tensorial y  $n_{\tilde{a}\tilde{b}}$  se define como la métrica de Minkowsky, en el cual se establecen los productos de las 1- formas ( $\omega^{\tilde{a}}$ ). En este caso, el elemento de línea que define la métrica es aquel es el de Eddington- Finkelstein, así:

$$ds^2 = \left( 1 - \frac{2m}{r} \right) du^2 - 2dudr - r^2(d\theta^2 - \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (7.26)$$

Al expandir la ecuación (7.25), se obtiene para la métrica de Eddington- Finkelstein:

$$ds^2 = \omega^{\hat{u}} \otimes \omega^{\hat{u}} - \omega^{\hat{r}} \otimes \omega^{\hat{r}} - \omega^{\hat{\theta}} \otimes \omega^{\hat{\theta}} - \omega^{\hat{\varphi}} \otimes \omega^{\hat{\varphi}} \quad (7.27)$$

Comparando las ecuaciones (7.26) y (7.27), se evidencia cuáles son las formas que se necesitan para completar la tétrada.

$$-\omega^{\hat{\theta}} = r d\theta \quad y \quad -\omega^{\hat{\varphi}} = r \sin \theta d\varphi \quad (7.28)$$

Finalmente, se procede a obtener el último par de vectores nulos (complejos), teniendo en cuenta la ecuación (7.14) reemplazando los vectores unitarios  $j^a y k^a$ , con las formas diferenciales obtenidas anteriormente (7.28) así:

$$m_a = \frac{1}{\sqrt{2}}(\omega^{\hat{\theta}} + i\omega^{\hat{\varphi}}) = \frac{-r}{\sqrt{2}}(d\theta + i\sin\theta d\varphi) \quad (7.29)$$

$$\tilde{m}_a = \frac{1}{\sqrt{2}}(\omega^{\hat{\theta}} - i\omega^{\hat{\varphi}}) = \frac{-r}{\sqrt{2}}(d\theta - i\sin\theta d\varphi) \quad (7.30)$$

De esta manera se concluye que los dos vectores nulos conjugados son:

$$m_a = -\frac{r}{\sqrt{2}}(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{1}, i\sin\theta) \quad \tilde{m}_a = -\frac{r}{\sqrt{2}}(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{1}, -i\sin\theta) \quad (7.31)$$

#### - Algoritmo de Newman – Janis:

Para obtener en completamente la métrica de Kerr, es importante considerar el algoritmo propuesto en 1965 por los físicos y matemáticos Newman y Janis, el cual fue establecido del estudio de las tétradas explícito previamente. Para comenzar con la explicación de este algoritmo, inicialmente se debe considerar los vectores nulos obtenidos en las (7.23), (7.29) & (7.30), en forma contravariante. Esto se obtiene por medio de la elevación de índices del tensor métrico  $g^{ab}$ , así:

$$g^{11} = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) \quad ; \quad g^{01} = -1 \quad ; \quad g^{22} = -\frac{1}{r^2} \quad ; \quad g^{33} = -\frac{1}{r^2 \sin^2\varphi} \quad (7.32)$$

Para el primer vector  $l^a$ , se obtiene las componentes contra variantes:

$$l^a = g^{ab}l_b \quad (7.33)$$

$$l^1 = g^{10}l_0 + g^{11}l_1 = g^{10}l_0 = 1 \quad (7.34)$$

Con esto se verifica que  $l^0 = l^2 = l^3 = 0$ .

Para  $n^a$  se tiene las componentes:

$$n^0 = g^{00}n_0 + g^{01}n_1 = g^{01}n_1 = -1 \quad (7.35)$$

$$n^1 = g^{10}n_0 + g^{11}n_1 = g^{01}n_1 = -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{2m}{r}\right) \quad (7.36)$$

$$n^2 = n^3 = 0$$

Finalmente, para los vectores complejos  $m^a$ :



$$m^2 = g^{22}m_2 = \left(\frac{-1}{r^2}\right)\left(\frac{-r}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}r \quad (7.37)$$

$$m^3 = g^{33}m_3 = \left(\frac{-1}{r^2\sin^2\theta}\right)\left(\frac{-irs\sin\theta}{\sqrt{2}}\right) = \frac{icsc\theta}{\sqrt{2}}r \quad (7.38)$$

$$m^0 = m^1 = 0$$

Siendo  $\widetilde{m}_a$  el complejo conjugado de  $m^a$ , se agrupan los vectores nulos contra variantes obtenidos:

$$l^a = (0, 1, 0, 0) \quad (7.39)$$

$$n^a = \left(0, -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{2m}{r}\right), 0, 0\right) \quad (7.40)$$

$$m^a = \frac{1}{\sqrt{2}}r(0, 0, 1, icsc\theta) \quad (7.41)$$

Una de las premisas fundamentales del algoritmo de Newman. Janis es que este permite que la coordenada real adquiera valores imaginarios. No obstante, los vectores  $l^a$  y  $n^a$ , deben permanecer reales, tal como se muestra, a continuación:

$$l^a = \delta_1^a \quad (7.42)$$

$$n^a = \delta_0^a - \frac{1}{2}\left[1 - m\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{\bar{r}}\right)\right]\delta_1^a \quad (7.43)$$

$$m^a = \frac{1}{\sqrt{2}}r[\delta_2^a + icsc\theta\delta_3^a] \quad (7.44)$$

Donde  $\check{r}$  es el complejo conjugado de  $r$ .

Hasta el momento, podemos observar que lo que se ha realizado no ha afectado a la métrica como tal. Sin embargo lo principal de la derivación, se encuentra en una última transformación compleja de coordenadas de la forma:

$$\check{r} = r + ia\cos\theta; \quad \check{u} = u - ia\cos\theta; \quad \check{\theta} = \theta; \quad \check{\varphi} = \varphi \quad (7.45)$$

Reemplazando estas transformaciones en la tétrada, se obtiene:

$$l^a = \delta_1^a \quad (7.46)$$

$$n^a = \delta_0^a - \frac{1}{2} \left[ 1 - \left( \frac{2mr}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} \right) \right] \delta_1^a \quad (7.47)$$

$$m^a = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{1}{(r + ia \cos \theta)} \right) [i a \sin \theta (\delta_0^a - \delta_1^a) + \delta_2^a + i \csc \theta \delta_3^a] \quad (7.48)$$

Finalmente, considerando la ecuación que describe la métrica en términos de la tétrada (7.20) se pueden obtener las componentes contra variantes de la métrica de Kerr. Las componentes no nulas son:

$$\begin{aligned} g^{00} &= \frac{a^2 \sin^2 \theta}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} & g^{11} &= \frac{-r^2 + 2mr - a^2}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} \\ g^{22} &= -\frac{1}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} & g^{33} &= \frac{-\csc^2 \theta}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} \\ g^{01} = g^{10} &= \frac{r^2 + a^2}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} & g^{03} = g^{30} &= -\frac{a}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} \\ g^{13} = g^{31} &= \frac{a}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} \end{aligned} \quad (7.49)$$

La cual se puede representar de manera más adecuada en forma matricial, omitiendo los términos que tengan primas y considerando  $\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$ , así:

$$g^{ab} = \begin{pmatrix} \frac{-a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} & \frac{r^2 + a^2}{\rho^2} & 0 & \frac{-a}{\rho^2} \\ \frac{r^2 + a^2}{\rho^2} & -\frac{r^2 + 2mr - a^2}{\rho^2} & 0 & \frac{a}{\rho^2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\rho^2} & 0 \\ \frac{-a}{\rho^2} & \frac{a}{\rho^2} & 0 & -\frac{1}{\rho^2} \end{pmatrix} \quad (7.50)$$

Las componentes covariantes se obtienen de la inversa de la matriz. No obstante, este procedimiento es bastante largo y tedioso, por lo que se deja al lector realizar dicho trabajo. En este tipo de ejercicio, es considerable encontrar las componentes covariantes, por medio del método de la matriz adjunta así:

$$g^{ab} = \frac{1}{|g|} \text{adj}(g_{ab})$$

Sin embargo, la matriz que expresa las componentes covariantes de la métrica de Kerr es:

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2mr}{\rho^2} & -1 & 0 & \frac{2mra \sin^2 \theta}{\rho^2} \\ -1 & 0 & 0 & a \sin^2 \theta \\ 0 & 0 & \rho^2 & 0 \\ \frac{2mra \sin^2 \theta}{\rho^2} & \frac{a}{\rho^2} & 0 & \sin^2 \theta ((r^2 + a^2) + \frac{2mra \sin^2 \theta}{\rho^2}) \end{pmatrix} \quad (7.51)$$

Finalmente, se puede concluir que el elemento de línea o la métrica que describe la solución de Kerr en coordenadas de Eddington- Finkelstein es:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2mr}{\rho^2}\right) du^2 - 2dudr + \frac{4mr}{\rho^2} a \sin^2 \theta dud\varphi - \rho^2 d\varphi^2 - 2a \sin^2 \theta drd\varphi - \left((r^2 + a^2) + \frac{2mr}{\rho^2} a^2 \sin^2 \theta\right) \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (7.52)$$

Si se quiere obtener la métrica en coordenadas de Boyer - Lindquist, tal como se presenta en el capítulo III del trabajo, se realiza la transformación de coordenadas utilizando, los diferenciales:

$$\begin{aligned} du &= dt_{BL} + \frac{r^2 + a^2}{\Delta} dr \\ d\varphi &= d\varphi_{BL} + \frac{a}{\Delta} dr \end{aligned} \quad (7.53)$$

Donde  $\Delta = r^2 - 2mr + a^2$ , y el índice “BL”, indica de Boyer – Lindquist. Realizando las respectivas operaciones es posible obtener el elemento de línea que describe la métrica de Kerr en coordenadas de Boyer – Lindquist, considerando que  $dt_{BL} \rightarrow dt$ .







