

Diseño e implementación de un péndulo invertido doble lineal sobre base móvil como material de apoyo didáctico para el área de control 3 en la licenciatura en electrónica de la Universidad Pedagógica Nacional.

Una Tesis Presentada Para Obtener El Título De
Licenciados en Electrónica
Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá

Director

Diego Fernando Quiroga

Hector David Ariza & Jesus David García.

Febrero 2017

Resumen

Este proyecto de grado tiene como propósito el diseño e implementación de un péndulo invertido doble lineal sobre base móvil (PIDL) como material didáctico que fortalezca y complemente los conceptos adquiridos por los estudiantes en el área de control. El desarrollo del PIDL lo constituye: el modelamiento matemático, la linealización del sistema, su construcción, el análisis de controlabilidad para el diseño de los controladores y la simulación de los mismos. Además, se diseñan tres cartillas que tienen como intención proporcionar una herramienta que facilite los procesos de construcción, modelamiento y reconocimiento de sensores y actuadores.

Abstract

This degree project aims to design and implement a linear double inverted pendulum (PIDL) as teaching material that strengthens and complements the concepts acquired by students in the control area. The development of the PIDL consists of: the mathematical modeling, the system linearization, its construction, the controllability analysis in order to design the controllers and the simulation of them. In addition, three manuals are designed with the intention of providing a tool that facilitates the construction, modeling and sensors and actuators recognition.

RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN-RAE

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de grado
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento	Diseño e implementación de un péndulo invertido doble lineal sobre base móvil como material de apoyo didáctico para el área de control 3 en la licenciatura en electrónica de la Universidad Pedagógica Nacional.
Autor(es)	Ariza Betancur, Hector David; García Caro, Jesus David
Director	Quiroga, Diego Fernando
Publicación	Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional, 2017. p. 68
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional
Palabras Claves	DIDÁCTICA DE LA TECNOLOGÍA, PENDULO INVERTIDO DOBLE, SISTEMAS DE CONTROL, MATERIAL DIDÁCTICO

2. Descripción
<p>Este proyecto de grado tiene como propósito el diseño e implementación de un péndulo invertido doble lineal sobre base móvil (PIDL) como material didáctico que fortalezca y complemente los conceptos adquiridos por los estudiantes en el área de control. El desarrollo del PIDL lo constituye: el modelamiento matemático, la linealización del sistema, su construcción, el análisis de controlabilidad para el diseño de los controladores y la simulación de los mismos. Además, se diseñan tres cartillas que tienen como intención proporcionar una herramienta que facilite los procesos de construcción, modelamiento y reconocimiento de sensores y actuadores.</p>

3. Fuentes

Arcos, M. (2006). La elaboración de materiales didácticos en lengua inglesa: el caso de los formadores de profesores de educación primaria en España. **Universidad de Sevilla.**

Barrientos, A., Balaguer, C., Peñin, L., & Santoja, R. (2007). Fundamentos de robótica (2nd ed., pp. 39 - 41). S.A. McGraw-Hill.

Bautista, M., Martínez, A., & Hiracheta, R. (2014). El uso de material didáctico y las tecnologías de información y comunicación (TIC's) para mejorar el alcance académico. *Ciencia Y Tecnología*, 14, 188 - 189.

Bogdanov, A. (2004). Optimal Control of a Double Inverted Pendulum on a Cart, 1-2. Retrieved from <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.78.6105&rep=rep1&type=pdf>

Fandos, M., Jiménez, J., & González, A. (2002). Estrategias didácticas en el uso de las tecnologías de la Información y la Comunicación. *Acción Pedagógica*, 11(1), 39.

Janssen, B. (2006). *Mecánica Analítica*, 35-41

Madrid, D. & Mayorga, M. (2010). ¿Didáctica General en y para Educación Social? Puntos de encuentro desde la perspectiva del alumnado. *Educatio Siglo XXI*, 28(2), 248.

Messner, B., Hill, R., & Taylor, J. Control Tutorials for MATLAB and Simulink - Inverted Pendulum: State-Space Methods for Controller Design. [Ctms.engin.umich.edu](http://ctms.engin.umich.edu). Retrieved 10 January 2017, from <http://ctms.engin.umich.edu/CTMS/index.php?example=InvertedPendulum§ion=ControlStateSpace>

Morales, P. (2012). Elaboración de material didáctico (1st ed., pp. 10 - 28). Tlalnepantla: RED TERCER MILENIO S.C.

Ogata, K. (2010). Ingeniería de control moderna (5th ed.). Madrid: Pearson Educación.

Ornelas, F. (2015). Control Óptimo. División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería Eléctrica. Retrieved 25 February 2017, from http://dep.fie.umich.mx/~fornelas/data/uploads/propiedades_lqr.pdf

Quanser - Linear Double Inverted Pendulum. (2012). Quanser.com. Retrieved 17 August 2016, from http://quanser.com/products/linear_double_pendulum

Romero, A. (n.d.). Unidad Didáctica: Control y robótica. Retrieved 10 October 2016, from <http://cmapspublic2.ihmc.us/rid=1H2F7KSQB-DTVPLB-J47/potenciometro.pdf>

Vázquez, A. & Alarcón, M. (2010). Didáctica de la Tecnología (1st ed., pp. 70 -132). Madrid: Síntesis.

Yadav, S., Sharma, S., & Singh, N. (2012). Optimal Control of Double Inverted Pendulum Using LQR Controller. International Journal Of Advanced Research In Computer Science And Software Engineering, 2(2), 190 -192.

4. Contenidos

1. Aspectos Generales

Bases teóricas y conceptuales desde los que se asume el PIDL como un material didáctico, a partir de la didáctica en tecnología como principio didáctico.

2. Desarrollo del PIDL

El PIDL supone un reto de diseño y control, debido a la inestabilidad natural y la no-linealidad del sistema, esta sección tiene como objetivos mostrar la obtención del modelo matemático del sistema y luego el proceso de linealización.

3. Construcción del PIDL

Es posible hacer la construcción física del PIDL a través de un programa CAD, por otro lado, se puede armar usando un kit de mecatrónica pre-diseñado que cumpla con los parámetros requeridos. Para este caso en específico, se usaron en la mayoría elementos de la marca Fischertechnik®, sin embargo, algunas piezas fueron previamente diseñadas debido a la particularidad de su tarea, este capítulo aborda toda la construcción física del PIDL

4. Simulación y control

El PIDL es un sistema complejo por lo que se aborda desde el enfoque espacio estados para su análisis, se busca describir un sistema a partir de n ecuaciones diferenciales de primer orden con notación matricial para la representación matemática del sistema. Este capítulo aborda el análisis el diseño de 2 controladores diferentes; LQR y un control por asignación de polos, a través del software MATLAB 2015b.

5. Observaciones, conclusiones y trabajo a futuro.

Análisis cualitativos de los resultados obtenidos durante el proceso de diseño del PDIL: ventajas, contras, trabajo a futuro y elementos a resaltar.

5. Metodología

METODOLOGÍA R.U.P (Rational Unified Process)

1- FASE DE INICIO.

En esta fase se realizará la respectiva consulta bibliográfica sobre el diseño, construcción, modelamiento matemático, linealización, diseño de controladores y material didáctico para un péndulo invertido doble lineal de base móvil (PIDL). Asimismo se adquirirán los recursos necesarios para la elaboración del proyecto.

1.1- ACTIVIDADES DE INICIO.

- Recolección de información.
- Análisis e interpretación de la información.
- Compra de insumos.

2- FASE DE ELABORACIÓN.

En esta fase se diseñó el PIDL y sus respectivas cartillas.

2.1- ACTIVIDADES DE ELABORACIÓN.

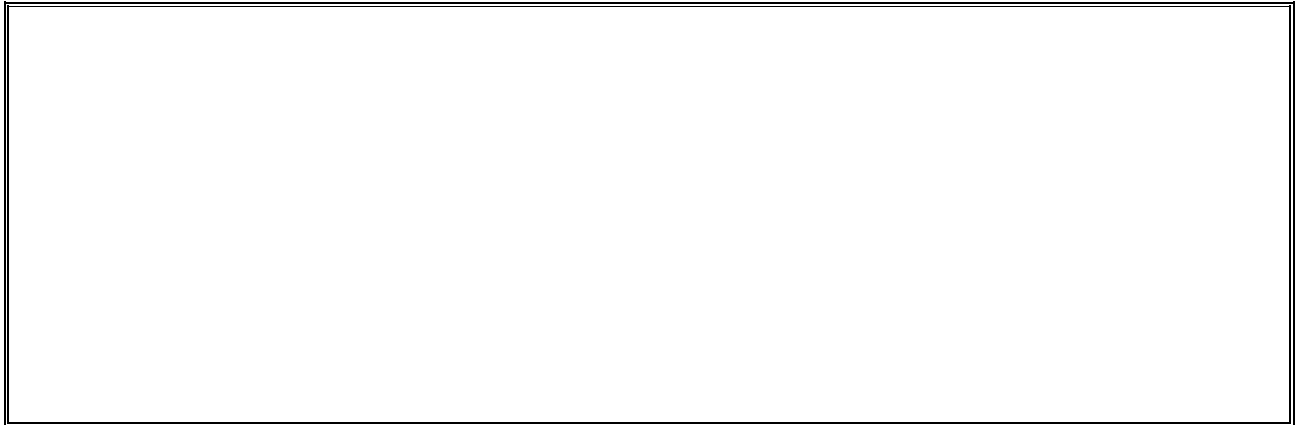
- Elección de sensores y actuadores.
- Selección de materiales para la construcción.

3- FASE DE CONSTRUCCIÓN.

En esta fase se construyó el PIDL, además del material didáctico (cartillas).

3.2- ACTIVIDADES DE CONSTRUCCIÓN.

- Construcción del PIDL.
- Modelamiento matemático del PIDL.
- Simulación y control del PIDL.



6. Conclusiones

Los materiales usados en la construcción del PIDL presentan una versatilidad en cuanto a su uso, porque además de ser un material desarmable y portable, permite desconectar el eslabón superior, convirtiendo la planta a un péndulo invertido, sirviendo como material de apoyo en otros cursos de control menos avanzados.

El uso de potenciómetros como sensores de posición afectan notoriamente la señal recibida por la tarjeta de adquisición ya que estos son susceptibles al ruido, por ejemplo, una mala soldadura causará que la señal presente alteraciones. En estos casos será necesario hacer uso de filtros para reducir las señales parasitas y mejorando la calidad de la lectura del sensor.

A pesar de las limitaciones de procesamiento y de calidad de adquisición de datos que poseen las boards Arduino vale destacar la importancia educativa que pueden llegar a tener no solo por su bajo costo y fácil acceso, pues éstas al vincularse con Simulink® proporcionan un trabajo más eficiente, pues posibilitan la modificación de parámetros en tiempo real, visualizando casi de forma inmediata los cambios de comportamiento que puede tener el sistema a estudiar o diseñar.

Entre los dos controladores diseñados y simulados, se evidencia que el control por LQR responde más rápido a una señal escalón e impulso (figura 19 y figura 20) que el control por asignación de polos (figura 23 y figura 24) aunque para la misma señal de ruido blanco las perturbaciones del control por LQR son mayores y no logra una estabilización adecuada (figura 21), por otro lado, el control por asignación de polos responde mejor, sobre todo el error de estado-estacionario del carro (m_0), donde casi no ve afectado por la perturbación (figura 26). Es necesario profundizar el análisis matemático del LQR ya que, a pesar de ser un control sencillo de implementar en simulación, debe tenerse muy claro las necesidades del controlador; si se quiere diseñar un controlador con gran desempeño requerirá mejores actuadores (esfuerzo y costo), diferente a querer diseñar un controlador que ahorre recursos, el cual no tendrá el mejor desempeño.

El campo de la didáctica en tecnología requiere mayor exploración, pues debido a su constante cambio y dinamismo se presta para la investigación permanente en las diferentes disciplinas que puede componer el saber tecnológico y científico, también es de resaltar que en el libro de didáctica de la tecnología publicado en el 2010, siete años después presenta elementos vigentes y aplicables en el contexto local como lo son el diseño de guías y unidades didáctica y temas a desarrollar en prácticas de laboratorio.

Aunque no se logró implementar el PIDL dentro de alguna práctica de control, se espera entonces que todo el avance en análisis, diseño, construcción y contenido pueda ser usado a futuro, corrigiendo las falencias técnicas que se puedan presentar en la adquisición de datos y las limitaciones del procesamiento computacional.

Elaborado por:	Hector David Ariza y Jesus David García
Revisado por:	Diego Fernando Quiroga

Fecha de elaboración del Resumen:	20	02	2017
--	-----------	-----------	-------------

Tabla de Contenidos

Capítulo 1. Aspectos Generales	1
1.1 Planteamiento del problema	1
1.2 Objetivos.	1
1.2.1 Objetivo general	1
1.2.2 Objetivos específicos.....	1
1.3 Antecedentes.....	2
1.4 Marco teórico	4
1.4.1 Didáctica	4
1.4.2 Modelo y metodología didáctica	6
1.4.3 Material didáctico	8
1.4.4 El péndulo doble invertido como material didáctico.....	10
1.5 Marco conceptual.....	11
1.5.1 Sistemas dinámicos	11
1.5.2 Variables de estado y espacio – estado	12
1.5.3 Lagrangiano	13
1.5.4 Sensores	13
1.5.5 Fischertechnik.....	13
1.5.6 Arduino IDE y Arduino Boards.....	14
 Capítulo 2. Desarrollo del PIDL	 15
2.1 Obtención del modelo matemático	15
2.2 Linealización	20
 Capítulo 3. Construcción del PIDL	 24
3.1 Base móvil	24
3.2 Actuador.....	25
3.3 Potencia y alimentación.....	26
3.4 Relación de transmisión.....	27
3.5 Selección de sensores de posición angular	29
3.5.1 Encoder óptico	29
3.5.2 Encoder magnético	30
3.5.3 Sincro – Resolvers	30
3.5.4 Potenciómetro lineal	31
3.5.5 Tabla Comparativa sensores	32
3.6 Diseño piezas CAD.....	33
 Capítulo 4. Simulación y control	 35
4.1 Representación en espacio estado del PIDL	35
4.2 Diseño del controlador	37
4.2.1 Controlabilidad	38
4.2.2 Controlador LQR	38
4.2.3 Controlador por realimentación del vector de estados mediante asignación de polos ..	41

	xi
Capítulo 5. Observaciones, conclusiones y trabajo a futuro	46
5.1 Observaciones	46
5.2 Conclusiones	47
5.3 Trabajo a futuro.....	49
Lista de referencias	50
Apéndice A.....	52
Apéndice B	56
Apéndice C	58
Apéndice D.....	60

Lista de tablas

Tabla 1. Especificaciones técnicas del encodermotor.....	26
Tabla 2. Características principales sensores de posición	32

Lista de figuras

Figura 1. Diagrama de fuerzas PIDL	15
Figura 2. Detalle Cadena-Riel	24
Figura 3. Piezas soporte y altura	25
Figura 4. Base móvil sin actuador	25
Figura 5. Encodermotor	26
Figura 6. Fuente de energía	27
Figura 7. Driver motor	27
Figura 8. Relación de transmisión PIDL	28
Figura 9. Disco encoder	29
Figura 10 Encoder del actuador	30
Figura 11. Esquema de funcionamiento de un resolver	31
Figura 12. Foto detalle potenciómetro	32
Figura 13. Pieza 1 modelo CAD	33
Figura 14. Pieza 2 modelo CAD	33
Figura 15. Pieza 1 Impresa	34
Figura 16. Pieza 2 Impresa	34
Figura 17. Ensamble completo del PIDL.....	34
Figura 18. Respuesta del sistema en lazo abierto	37
Figura 19. Respuesta del controlador LQR a un escalón unitario	40
Figura 20. Respuesta del controlador LQR a un impulso.....	41
Figura 21. Respuesta del controlador LQR a señal de ruido blanco.....	41
Figura 22. Sistema con realimentación de estados	42
Figura 23. Esquema final del controlador por asignación de polos.....	43
Figura 24. Respuesta del controlador por polos a un escalón unitario	44

Figura 25. Respuesta del controlador por polos a un impulso.....	xiv
Figura 26. Respuesta del controlador por polos a señal de ruido blanco.....	44
Figura 27. Mapa de la transición de polos del PIDL	45

1. Aspectos Generales

1.1 Planteamiento del problema

En el área de sistemas de control se usan programas que realizan simulaciones del diseño de controladores, con el fin de aplicar conceptos. Las prácticas de laboratorio presenciales y virtuales apoyan este proceso de formación. Dichos laboratorios a nivel virtual facilitan la simulación y modelamiento de plantas; aproximándolo a lo que sería un comportamiento real de las mismas. Sin embargo, los laboratorios in situ requieren la planta o en dado caso construirla, para demostrar y validar de manera tangible los resultados obtenidos en la simulación, en consecuencia, puede asumirse el reto de diseñar y construir la planta, para evidenciar los conocimientos en control, matemáticas, mecánica y diseño; teniendo en cuenta variables como los materiales, dimensiones, peso y costo para su construcción. Por lo anterior este trabajo de grado tiene como propósito diseñar e implementar una planta como es el péndulo invertido doble lineal sobre base móvil como material de apoyo en las prácticas de laboratorio en el área de sistemas de control.

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo general

Diseñar un péndulo invertido doble lineal como material de apoyo en el desarrollo de prácticas de laboratorio en la asignatura de sistemas de control.

1.2.2 Objetivos específicos

- Aportar un modelo físico y didáctico enfocados a la enseñanza teórico-práctica de control.
- Proporcionar una planta física validada y controlable.

- Entregar el material de apoyo con su respectivo manual de uso y especificaciones técnicas.

1.3 Antecedentes

A continuación, se presentan cuatro documentos, entre los cuales hay dos trabajos de grado de Universidad Pedagógica Nacional, donde se han propuesto material de apoyo en el área de control. El primero es un diseño y construcción de un módulo de temperatura para el área de control 1, el segundo documento es un brazo robótico modelado como péndulo invertido. Finalmente, los otros dos documentos son artículos de divulgación científica, que presentan el modelamiento y el diseño de controladores de un péndulo doble sobre base móvil de la universidad de Yamagata, Japón y de la Escuela de Ciencia e Ingeniería OGI de Estados Unidos.

- Pinilla, J.F. (2005). Diseño y construcción de un módulo de temperatura como material de apoyo para el aprendizaje de los sistemas de control I a través de una interfaz.
 - El objetivo de este trabajo de grado fue dejar un material interactivo en el área de control I para la aprehensión de conocimientos, se diseñó un módulo de temperatura: Planta, manual de operación, interfaz en Labview, guía para el docente y el estudiante. Fundamentado en el aprendizaje significativo
- Yadav, S., Sharma, S., & Singh, N. (2012). Optimal Control of Double Inverted Pendulum Using LQR Controller

En este artículo se realiza el modelamiento matemático de un péndulo invertido doble sobre una base móvil a través del método de Lagrange. Después se realiza el proceso de linealización y se hace el análisis de estabilidad, observabilidad y

controlabilidad, además se diseña un controlador LQR realizando algunas observaciones para una entrada de escalón unitario. Basados en este documento se sustenta y verifica toda la parte de modelamiento matemático del PIDL.

- Bogdanov, A. (2004). Optimal Control of a Double Inverted Pendulum on a Cart.

En este artículo también se realiza el modelamiento matemático de un péndulo invertido doble sobre una base móvil a través del método de Lagrange, además se diseñan 4 tipos de controladores diferentes: Por regulador cuadrático lineal (LQR), Ecuación Riccati de estado dependiente (SDRE), Redes neuronales (NN) y por la unión de los tres criterios anteriores denominada NN + LQR/SDRE control. Este artículo concluye que existe una gran variedad de técnicas para realizar el diseño de control de la planta, donde dependiendo de la calidad del sistema de control que se desee tener se puede usar desde un control PID hasta un sistema conjunto con redes neuronales, con este documento se evidencia la versatilidad de controladores que pueden ser aplicables al PIDL.

- Ardila, W. (2014). Brazo robótico de un grado de libertad modelado como péndulo invertido y operado por computadora.
 - El objetivo de este trabajo de grado fue desarrollar una herramienta para prácticas de laboratorio en el área de control. Planta con un control PID que puede ser modificado mediante una interfaz gráfica en Labview y Matlab en tiempo real para el entendimiento y validación de teorías de control. Se concluye en el trabajo que el prototipo presentó diversas fallas en su funcionamiento debido a problemas

relacionados con la logística, funcionando hasta un cierto punto de manera óptima.

- Quanser Inc. (2012). Linear Double Inverted Pendulum
 - o Quanser Inc es una empresa canadiense establecida en 1989 que surge respondiendo a la necesidad de tener equipos (plantas) con sistemas de control de alta precisión para uso educativo en universidades, entre su inventario de plantas esta el péndulo invertido doble lineal, lanzado en el 2012. La innovación del trabajo de quanser no está solamente en vender un producto físico de alta calidad, sino en proporcionar cursos, guías con actividades, guías con teoría de control y modelamiento, manuales técnicos, códigos de verificación (para MATLAB y Maple) y una tarjeta de adquisición de datos, es decir, todo un material didáctico para la enseñanza de la teoría de control. Además de poder comprar toda la planta, es posible comprar piezas por separado, como el riel, los péndulos o la tarjeta de adquisición de datos (en el caso de que fuera el PIDL). Entonces basados en el concepto de trabajo de quanser, se busca realizar un material didáctico a través del diseño del PIDL.

1.4 Marco teórico

1.4.1 Didáctica

Durante el proceso de enseñanza-aprendizaje existen diferentes mediadores que conllevan a influenciar la eficacia de la enseñanza, desde las instalaciones físicas de la institución hasta las metodologías para el desarrollo de la clase por parte del docente. “La didáctica se ha constituido como el ámbito de organización de las reglas para hacer que la enseñanza sea eficaz” (Fandos, Jiménez, Gonzáles, 2002, p.2)., es necesario dar una definición general de que es didáctica, en el

libro *Didáctica de la tecnología* de Vázquez y Alarcón (2010) determinan que: “La didáctica es una disciplina pedagógica cuyo objeto de estudio son los procesos que se desarrollan en el acto de enseñar, donde alguien aprende (discente) porque alguien o algo le enseña (docente)” (p.70).

Por otro lado, Madrid y Mayorga (2010) reflexionan en que no existe una única ni general definición de didáctica, pero consideran que, sin importar su carácter epistemológico, cualquier concepción de didáctica tiene que llegar a la de “ciencia de la educación”, es decir la ciencia que estudie todo lo relacionado a la enseñanza y para ello la didáctica debe ser teórico – práctica; es decir responder al qué, el cómo y cuándo enseñar.

Se ha visto entonces que la didáctica presenta un amplio campo de estudio, de análisis y teorías, pero mantiene ciertos elementos de contenido inalterables:

En resumen, aunque el estatus epistemológico de la didáctica tenga un aspecto de cierta controversia entre los autores, pues unos las consideran una teoría, otros un arte, otros una ciencia, otros una tecnología, etc... y las definiciones varían según diferentes visiones, sus contenidos generales (la enseñanza, el aprendizaje, la instrucción, la formación, la comunidad de conocimiento, en suma, los procesos de enseñanza-aprendizaje) y su fin global (la educación formativa integral de personas) son unánimemente reconocidos (Vázquez y Alarcón, 2010, p.73).

Siendo la didáctica una interventora de los procesos de enseñanza-aprendizaje no debe ser ajena al currículo de la institución, sino ser parte de el mismo (Vázquez y Alarcón, 2010), entonces cualquier elemento que se considere didáctico no puede estar desvinculado del contexto y del contenido curricular.

1.4.2 Modelo y metodología didáctica

Debido a que la didáctica (como disciplina o ciencia) es participe del currículo, responde a diferentes modelos y metodologías establecidas a lo largo del tiempo por diferentes educadores y autores, siendo un tema demasiado extenso, en consecuencia, se comentará algunas estrategias metodológicas.

El término “modelo didáctico” visto desde la perspectiva de la didáctica de la tecnología de Vázquez y Alarcón (2010) se define como una síntesis de conceptos generales relacionados con la enseñanza, “es una representación mental para la acción docente real en el aula, que suele incluir un conjunto de conocimientos y reglas que conducen a una acción docente determinada” (Vázquez y Alarcón, 2010, p.126). Un modelo didáctico posee tres rasgos principales: Un fundamento epistemológico (teoría que lo sustenta), una propuesta de acción (planificación y actividades de enseñanza) y un sistema social (roles y contexto). Por lo tanto, un modelo didáctico debe de contar con un principio metodológico, basado en estrategias diseñadas para que el estudiante logre lo propuesto en lo curricular.

Uno de los principios metodológicos más usado es el método de análisis – síntesis:

El análisis es un método que estudia independientemente o por separado cada una de las partes que componen un objeto; esta metodología es especialmente indicada para abordar el estudio de objetos complejos, cuyas partes son más sencillas que el todo. La síntesis es el método de sentido contrario al anterior, donde el objeto global se recompone a partir de sus componentes (Vázquez y Alarcón, 2010, p.129).

Otro principio metodológico es el método de interdisciplinariedad o integración curricular, el cual aborda el tema o el objeto de aprendizaje en su totalidad desde diferentes áreas del saber o perspectivas socioculturales permitiendo así una visión holística del mismo.

Teniendo el principio metodológico establecido, es necesario buscar un modelo metodológico, es decir una estrategia de enseñanza que sea acorde al principio. A continuación, se exponen dos estrategias que permiten un trabajo consecuente con los principios planteados.

El modelo por descubrimiento planteado por Jerome Bruner aún se mantiene en uso, donde el aprendiz construye su conocimiento por sí mismo, y el docente coordina y guía las actividades de aprendizaje, este proceso implica la búsqueda y la selección de recursos fomentando procesos autónomos en el estudiante (Vázquez y Alarcón, 2010). Como resultado se espera que el estudiante adquiera conocimiento, que contribuya a la solución de un problema o para su crecimiento personal.

Otro modelo o estrategia compatible es la de resolución de problemas, en la cual inicia con el planteamiento de un problema;” el concepto de problema es amplio (reales/académicos, abiertos/cerrados, cualitativos/cuantitativos, empíricos/mentales, mecánicos/creativos, heurísticos, ejercicios de aplicación, etc.)” (Vázquez y Alarcón, 2010, p.132). Luego se revisan los conocimientos previos y las necesidades; surge una hipótesis a desarrollar a través de la búsqueda de información nueva o complementaria y finalmente se valida la hipótesis. Vázquez y Alarcón (2010) resaltan su uso en varios campos aplicativos:

Esta estrategia se puede aplicar con diversas variantes en diferentes procesos educativos como los procesos de investigación, los centros de interés, los proyectos y las actividades prácticas en el taller o laboratorio o en entornos naturales (...) En la materia de tecnología la resolución de problemas y los proyectos tecnológicos son métodos específicos propios (p.132).

Estas dos estrategias permiten una interacción directa con el objeto de estudio o el problema, logrando producir una apropiación de conocimientos y una experiencia significativa tanto en el estudiante como en el docente o mediador.

1.4.3 Material didáctico

Dentro de la didáctica existe un apartado referente a los elementos físico o virtuales que intervienen en el proceso de enseñanza - aprendizaje, para algunos autores son recursos didácticos, medios didácticos o materiales educativos, pero el concepto más usado es el de material didáctico (Morales, 2012). Existen diferentes concepciones de que es un material didáctico. Para Bautista, Martínez e Hiracheta (2014):

Los medios o materiales didácticos son elementos curriculares que, por sus sistemas simbólicos y estrategias de utilización, propician el desarrollo de habilidades cognitivas en los sujetos, en un contexto, determinado, facilitando y estimulando la intervención mediada sobre la realidad, la captación y comprensión de la información por el alumno y la creación de entornos diferenciados que propician aprendizajes. (p.188)

Complementando la idea de Bautista, Martínez e Hiracheta, los materiales didácticos son definidos como: “cualquier elemento, físico o mental, utilizado expresamente por profesores y alumnos, incluso los elaborados o emitidos por ellos, para facilitar el proceso de enseñanza-aprendizaje” (Arcos, 2006, p.30). De esta definición se destaca que los estudiantes también pueden realizar materiales didácticos sin otro fin que el de mejorar y afianzar sus propios procesos, pero no por ello cualquier material puede considerarse “material didáctico” Morales (2012) establece algunas características fundamentales que deben tener los materiales didácticos:

- 1) Con respecto a los objetivos que se busca lograr; el material debe estar diseñado en la búsqueda de los mismos.
- 2) Los contenidos deben estar sincronizados con los temas de la asignatura.
- 3) Las características del diseñador del material didáctico: capacidades, estilos cognitivos, intereses, conocimientos previos, experiencia y habilidades requeridas para el uso de estos materiales.
- 4) La característica del contexto. Es importante tomar en cuenta el contexto en el que se va a desarrollar y donde se piensa emplear dicho material, se debe tomar en cuenta los recursos y temas que se desarrollan. (pp.10-11)

Ahora bien, teniendo el concepto y las características que definen un material didáctico, solo falta establecer las diferentes clases de material didáctico existentes. Morales (2012) afirma que existen 3 tipos de clasificación: Tipo modelo o maqueta, según el órgano receptor y el audiovisual.

El material tipo modelo o maqueta se utiliza como herramienta auxiliar en la muestra de proyectos de ingeniería o arquitectura, pero también puede ser usado como material didáctico en la enseñanza y aprendizaje de la lectura, la interpretación, identificación elementos de la reproducción física de algo real (Morales, 2012). Los modelos o maquetas pueden ser estáticos; que presentan solo detalles, dinámicos; aquellos que tienen movimiento, y controlados; poseen un sistema de control basado en dispositivos electrónicos.

La segunda forma de clasificación de materiales didácticos es según el órgano receptor, esta clasificación se basa específicamente en las necesidades y características de a quién va dirigido el material:

Se deben considerar los destinatarios a los cuales va dirigido el material, es decir, cuál es el grupo meta, cuál es su nivel de lectura y escritura, qué grado de familiaridad tienen con el manejo de la información, el lenguaje (texto, imágenes, audio), que va a ser utilizado en los materiales, además de otros aspectos: el número de participantes y los recursos con los que se cuentan. La edad es un aspecto de suma importancia, pues no es lo mismo elaborar material didáctico para niños que para adultos (Morales, 2012, p.26).

Finalmente, la tercera clasificación pertenece a los materiales audiovisuales, esta clasificación encierra una alta variedad de elementos visuales (dibujos, esquemas, fotografías, etc.), auditivos y los audiovisuales. Al ser un campo tan amplio Morales (2012) advierte que “sin embargo, el lenguaje visual requiere de un aprendizaje particular para su refinamiento y comprensión” (p.28).

Se puede concluir entonces que los materiales didácticos, bien diseñados, tienen un impacto positivo en la aprehensión de un conocimiento en particular, “no hay duda de que el uso de material didáctico facilita la enseñanza y constituye un elemento auxiliar en el proceso de aprendizaje funcionando como mediador en la educación de los estudiantes” (Bautista, Martínez e Hiracheta, 2014, p.193).

1.4.4 El péndulo doble invertido como material didáctico.

El péndulo doble invertido es un dispositivo físico que consta de 2 barras cilíndricas, una de las cuales esta aferrada a un pivote. El pivote puede ser fijo sobre una base móvil o anclado a un motor que le permite tener libertad en la oscilación. Aplicaciones similares reales de analizar esta clase de péndulo son: estabilizar el despegue de un cohete de múltiples etapas y modelar el sistema postura humana de un gimnasta sobre las barras paralelas (Quanser [Quanser Inc.], 2012).

Llegar a un área de profundización como es sistemas de control, en la Universidad Pedagógica Nacional requiere que el estudiante tenga bases de matemáticas avanzada y física (análisis y modelado matemático), programación (simulación), instrumentación (conocimiento de sensores y adquisición de datos a través de señales análogas o digitales), esto con el fin de comprender conceptos propios del área como linealización, control digital, control análogo, variables de estado, sistemas SISO, sistemas MIMO, entre otros.

Entonces al tener un material didáctico como el PIDL; que tiene como reto el diseño de un controlador que mantenga las dos barras cilíndricas de manera perpendicular mientras soporta pequeñas perturbaciones, implicará que el estudiante aplique los conocimientos previos adquiridos en diferentes áreas para la construcción del controlador (interdisciplinariedad y resolución de problemas) además de que no solo podrá evidenciar su funcionamiento a través de simulaciones, sino también logrará verificar sus diseños de forma tangible, llegando a enriquecer aún más su práctica de laboratorio logrando así una experiencia significativa.

1.5 Marco conceptual

1.5.1 Sistemas dinámicos.

La definición más precisa y aún vigente de sistema y de sistemas dinámicos; desde la perspectiva del control automático, la define Ogata (1978):

Un *sistema* es una combinación de componentes que actúan conjuntamente para alcanzar un objetivo específico. Una componente es una unidad particular en su función en un sistema. De ninguna manera limitado a los sistemas físicos, el concepto de sistema se puede ampliar a fenómenos dinámicos abstractos, tales como los que se encuentran en la economía, el transporte, el crecimiento de la población y la biología.

Un sistema se llama *dinámico* si su salida en el presente depende de una entrada en el pasado; si su salida en curso depende solamente de la entrada en curso, (. . .). En un sistema dinámico la salida cambia con el tiempo cuando no está en su estado de equilibrio (p.1).

Los sistemas dinámicos presentan parámetros internos, cuyos valores se modifican con respecto a alguna variable. A pesar de lo anterior es posible conocer la naturaleza del sistema a través de un modelamiento matemático que identifique las ecuaciones que rigen su comportamiento.

1.5.2 Variables de estado y espacio - estado

Las variables de estado hacen referencia a la mínima cantidad de variables que describen de una forma más general el comportamiento de un sistema dinámico, estas variables no necesariamente tienen que ser magnitudes físicas medibles (Ogata,1978, p.30).

El espacio de estados (espacio-estado) hace referencia a un espacio n-dimensional donde las coordenadas están dadas por la cantidad de variables de estado, el análisis de espacio-estado se enfoca en 3 tipos de variables: las variables de entrada, salida y de estado (Ogata,1978, p.31).

Una forma de representar las entradas, salidas y variables de estado es la siguiente:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad (1.5.6.1)$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \quad (1.5.6.2)$$

La ecuación 1.5.6.1 representa la ecuación de estado, donde \dot{x} son el vector de estados, A la matriz de estado, B la matriz de salida y u el vector de control o entrada. Mientras que la ecuación 1.5.6.2 representa la ecuación de salida, donde y es el vector de salida, C la matriz de salida y D la matriz de transmisión directa. Esta notación matricial favorece el análisis para el diseño de un controlador, ya que permite tener una visión total del comportamiento del sistema.

1.5.3 Lagrangiano

El Lagrangiano es una función escalar ($L = T - U$), parte de un formalismo matemático que permite describir el comportamiento de un sistema a través del análisis de la energía potencial y cinética. Su uso es recurrente en campos donde la concepción de fuerza no es la misma de la mecánica Newtoniana tal como lo son la mecánica de fluidos, la relatividad o fuerzas conservativas que, por ende, son derivables (Janssen,2007).

1.5.4 Sensores

Una parte importante que constituye una planta de control o un sistema de control son sus sensores, estos están encargados de proveer información sobre el ambiente donde están trabajando (externos) o sobre las condiciones propias del sistema (internos), los sensores para un robot o planta se asemejan a la función que tienen los cinco sentidos para el ser humano, luego son indispensables para poder desarrollar un sistema de control.

1.5.5 Fischertechnik

Fischertechnik es una empresa que desarrolla, produce y vende bloques, en su mayoría de ABS y aluminio, especializados para la construcción de diversos aparatos, no solamente como forma de entretenimiento sino también con un enfoque educativo. Cuenta con productos como motores, sensores y piezas para la creación de sistemas mecánicos y electromecánicos, entre otros.

1.5.6 Arduino IDE y Arduino Boards

Arduino es una compañía que cuenta con una plataforma electrónica de código abierto, donde software y hardware son especialmente diseñados para las personas que no se dedican a áreas afines a la programación o al uso de embebidos. Arduino cuenta con varias placas (Boards)

dependiendo de la necesidad de la persona y un entorno de desarrollo integrado (IDE) disponible de forma gratuita para Windows, Linux e iOS.

2. Desarrollo del PIDL

2.1 Obtención del modelo matemático

El PIDL supone un reto de diseño y control, debido a la inestabilidad natural y la no-linealidad del sistema. Por lo tanto, para realizar correctamente el modelamiento matemático deben de asumirse los siguientes parámetros:

- El diseño mecánico presenta un peso adecuado, sin altos niveles de fricción, y los eslabones poseen un cuerpo rígido.
- La correa o riel no presentará deformaciones durante el proceso.
- El centro de gravedad de cada eslabón se tomará en los extremos, teniendo en cuenta que las masas de los eslabones son entre cinco a diez veces menores que el peso ubicado en los extremos.

Debido a que el PIDL es un sistema dinámico complejo, el modelamiento requiere usar un método más eficaz que la cinemática de fuerzas de Newton, en este caso se usará el modelado a través del análisis de energías cinéticas y potenciales con el método de Lagrange.

Ya que la energía cinética es igual a un medio de la velocidad al cuadrado por la masa ($T = mv^2/2$), entonces el primer paso es hallar las velocidades del sistema.

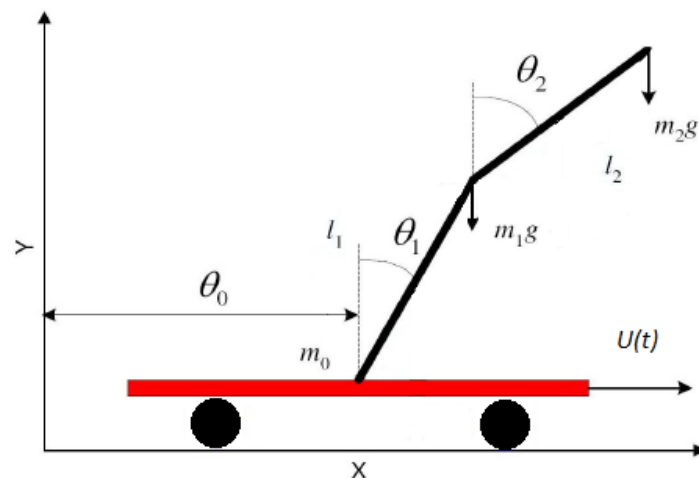


Figura 1: Diagrama de fuerzas PIDL. Elaboración propia.

La figura 1 muestra el diagrama de fuerzas del PIDL donde se evidencia, solo una fuerza de entrada $U(t)$ que actúa sobre la masa del carro (m_0) permitiendo el movimiento en el eje X, dicha fuerza actúa sobre el sistema que posee tres grados de libertad, teniendo en cuenta lo anterior, se asume:

$x = \theta_0(t)[m]$: Posición del carro.

$\theta_1(t)[rad]$: Angulo del péndulo inferior.

$\theta_2(t)[rad]$: Angulo del péndulo superior.

l_1 y $l_2[m]$: longitud de los eslabones en metros.

$m_0[Kg]$: Masa de la base móvil o carro

$m_1[Kg]$: Masa del eslabón inferior

$m_2[Kg]$: Masa del eslabón superior

Hallando las componentes de desplazamiento en X y Y para las 3 masas:

$$m_{0x} = x \quad (2.1.1a)$$

$$m_{0y} = 0 \quad (2.1.1b)$$

$$m_{1x} = x + l_1 \sin \theta_1 \quad (2.1.2a)$$

$$m_{1y} = l_1 \cos \theta_1 \quad (2.1.2b)$$

$$m_{2x} = x + l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2 \quad (2.1.3a)$$

$$m_{2y} = l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2 \quad (2.1.3b)$$

Como la velocidad es igual a la derivada del desplazamiento ($v = dx/dt$), se derivan las ecuaciones 2.1.1, 2.1.2 y 2.1.3 para ambas componentes (a y b):

$$vm_{0x} = \dot{x} \quad (2.1.4a)$$

$$vm_{0y} = 0 \quad (2.1.4b)$$

$$vm_{1x} = \dot{x} + l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 \quad (2.1.4a)$$

$$m_{1y} = -l_1\dot{\theta}_1 \sin\theta_1 \quad (2.1.5b)$$

$$vm_{2x} = \dot{x} + l_1\dot{\theta}_1 \cos\theta_1 + l_2\dot{\theta}_2 \cos\theta_2 \quad (2.1.6a)$$

$$m_{1y} = -l_1\dot{\theta}_1 \sin\theta_1 - l_2\dot{\theta}_2 \sin\theta_2 \quad (2.1.6b)$$

La velocidad resultante de cada masa estará dada por la raíz de suma de los componentes X y Y elevados al cuadrado, pero como se requiere el valor al cuadrado de la velocidad, eliminando la raíz cuadrada, deja la velocidad en términos de una suma al cuadrado.

$$V = \sqrt{vx^2 + vy^2} \rightarrow V^2 = vx^2 + vy^2 \quad (2.1.7)$$

Tomando la ecuación 2.1.7 como referencia se realiza el cálculo de la velocidad resultante para las ecuaciones 2.1.4, 2.1.5 y 2.1.6 a y b.:

$$Vm_0 = \dot{x}^2 \quad (2.1.8)$$

$$Vm_1^2 = \dot{x}^2 + 2\dot{x}l_1\dot{\theta}_1 \cos\theta_1 + l_1^2\dot{\theta}_1^2 \quad (2.1.9)$$

$$Vm_2^2 = \dot{x}^2 + l_1^2\dot{\theta}_1^2 + l_2^2\dot{\theta}_2^2 + 2\dot{x}l_1\dot{\theta}_1 \cos\theta_1 + 2\dot{x}l_2\dot{\theta}_2 \cos\theta_2 + 2l_1l_2\dot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) \quad (2.1.10)$$

Para llegar a los resultados de las ecuaciones 2.1.8, 2.1.9 y 2.1.10. Es necesario hacer uso de la factorización y de las identidades trigonométricas, con estos valores es posible empezar la construcción del Lagrangiano. El valor del Lagrangiano se define como la resta de la energía cinética y la energía potencial de los elementos del sistema. $L = T - U$ donde T es la energía cinética y U la energía potencial.

El cálculo total de la energía cinética del sistema será la suma de la energía de cada masa ($T = T_0 + T_1 + T_2$), lo mismo pasará para la energía potencial ($U = U_0 + U_1 + U_2$). Asumiendo $x = \theta_0$ la energía cinética será:

$$T_0 = \frac{1}{2} m_0 \dot{\theta}_0^2 \quad (2.1.11)$$

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 (\dot{\theta}_0^2 + 2l_1\dot{\theta}_0\dot{\theta}_1 \cos\theta_1 + l_1^2\dot{\theta}_1^2) \quad (2.1.12)$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2(\dot{\theta}_0^2 + l_1^2\dot{\theta}_1^2 + l_2^2\dot{\theta}_2^2 + 2l_1\dot{\theta}_0\dot{\theta}_1\cos\theta_1 + 2l_2\dot{\theta}_0\dot{\theta}_2\cos\theta_2 + 2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2)) \quad (2.1.13)$$

La energía potencial está vinculada a la energía que poseen los cuerpos al encontrarse bajo efecto de algún campo de fuerza, en el PDIL el campo de fuerza que se considera es la gravedad, es decir una energía potencial gravitatoria. Teniendo en cuenta lo anterior las masas que están en contacto con la superficie no poseerán energía potencial (ver figura 1), entonces las energías potenciales del sistema son:

$$U_0 = 0 \quad (2.1.14)$$

$$U_1 = m_1gl_1\cos\theta_1 \quad (2.1.15)$$

$$U_2 = m_2gl_1\cos\theta_1 + m_2gl_2\cos\theta_2 \quad (2.1.16)$$

Determinando el Lagrangiano, con la suma y simplificación de las ecuaciones 2.1.11, 2.1.12, 2.1.13, 2.1.14, 2.1.15 y 2.1.16:

$$L = \frac{1}{2} \dot{\theta}_0^2 (m_0 + m_1 + m_2) + \frac{1}{2} \dot{\theta}_1^2 (m_1l_1^2 + m_2l_1^2) + \frac{1}{2} \dot{\theta}_2^2 m_2l_2^2 + \dot{\theta}_0\dot{\theta}_1(m_1l_1\cos\theta_1 + m_2l_1\cos\theta_1) + \dot{\theta}_0\dot{\theta}_2m_2l_2\cos\theta_2 + \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2m_2l_1l_2\cos(\theta_1 - \theta_2) - m_1gl_1\cos\theta_1 - m_2gl_1\cos\theta_1 - m_2gl_2\cos\theta_2 \quad (2.1.17)$$

Al haber obtenido el Lagrangiano (ecuación 2.1.17) se toma como base para la ecuación de Lagrange. Es necesario hallar la derivada parcial y la derivada con respecto al tiempo para cada grado de libertad que posea el sistema. Observando la figura 2.1.1, se determinó que el PDIL posee tres grados de libertad y una sola fuerza de entrada que actúa directamente a la base móvil (m_0). Además de lo anterior se agrega la función de disipación de Rayleigh, que añade los valores de los elementos que causen disipación de energía dentro del sistema, haciendo que las ecuaciones a desarrollar queden de la siguiente forma:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{\theta}_0} \right) L - \left(\frac{\partial}{\partial \theta_0} \right) L + \left(\frac{\partial}{\partial \theta_0} \right) D = U(t) \quad (2.1.18)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{\theta}_1} \right) L - \left(\frac{\partial}{\partial \theta_1} \right) L + \left(\frac{\partial}{\partial \theta_1} \right) D = 0 \quad (2.1.19)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{\theta}_2} \right) L - \left(\frac{\partial}{\partial \theta_2} \right) L + \left(\frac{\partial}{\partial \theta_2} \right) D = 0 \quad (2.1.20)$$

Calculando la derivada parcial con respecto a $\dot{\theta}_0$ para la ecuación 2.1.18:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_0} = \dot{\theta}_0 (m_0 + m_1 + m_2) + \dot{\theta}_1 (m_1 l_1 \cos \theta_1 + m_2 l_1 \cos \theta_1) + \dot{\theta}_2 m_2 l_2 \cos \theta_2 \quad (2.1.21)$$

Derivando la ecuación 2.1.21 con respecto al tiempo:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_0} \right) = & \ddot{\theta}_0 (m_0 + m_1 + m_2) + \ddot{\theta}_1 (m_1 l_1 \cos \theta_1 + m_2 l_1 \cos \theta_1) + \ddot{\theta}_2 m_2 l_2 \cos \theta_2 - \\ & \dot{\theta}_1^2 (m_1 l_1 \sin \theta_1 + m_2 l_1 \sin \theta_1) - \dot{\theta}_2^2 m_2 l_2 \sin \theta_2 \quad (2.1.22) \end{aligned}$$

Debido a que el Lagrangiano (ecuación 2.1.17) no presenta ningún término para derivar con respecto a θ_0 se consideran las variables como constantes, por lo tanto, la derivada parcial con respecto a θ_0 del Lagrangiano es:

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \theta_0} \right) = 0 \quad (2.1.23)$$

Reemplazando los valores de las ecuaciones 2.1.22 y 2.1.23 en la ecuación 2.1.18:

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_0 (m_0 + m_1 + m_2) + \ddot{\theta}_1 (m_1 l_1 \cos \theta_1 + m_2 l_1 \cos \theta_1) + \ddot{\theta}_2 m_2 l_2 \cos \theta_2 - \dot{\theta}_1^2 (m_1 l_1 \sin \theta_1 + \\ m_2 l_1 \sin \theta_1) - \dot{\theta}_2^2 m_2 l_2 \sin \theta_2 = u(t) \quad (2.1.24) \end{aligned}$$

La ecuación 2.1.24 es una de las tres ecuaciones que muestra el modelado matemático del sistema, es necesario repetir este proceso para las ecuaciones 2.1.19 y 2.1.20.

Calculando la derivada parcial con respecto a $\dot{\theta}_1$ para la ecuación 2.1.19:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = \dot{\theta}_1 (m_1 l_1^2 + m_2 l_1^2) + \dot{\theta}_0 (m_1 l_1 \cos \theta_1 + m_2 l_1 \cos \theta_1) + \dot{\theta}_2 m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \quad (2.1.25)$$

Derivando la ecuación 2.1.25 con respecto al tiempo:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = & \ddot{\theta}_1 (m_1 l_1^2 + m_2 l_1^2) + \ddot{\theta}_0 (m_1 l_1 \cos \theta_1 + m_2 l_1 \cos \theta_1) + \ddot{\theta}_2 m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - \\ & \dot{\theta}_0 \dot{\theta}_1 (m_1 l_1 \sin \theta_1 + m_2 l_1 \sin \theta_1) - (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \dot{\theta}_2 m_2 l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \quad (2.1.26) \end{aligned}$$

Calculando la derivada parcial con respecto a θ_1 para la ecuación 2.1.19:

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \theta_1}\right) = -\dot{\theta}_0 \dot{\theta}_1 (m_1 l_1 \sin \theta_1 + m_2 l_1 \sin \theta_1) + m_1 g l_1 \sin \theta_1 + m_2 g l_1 \sin \theta_1 - \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 m_2 l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \quad (2.1.27)$$

Reemplazando y simplificando los valores de las ecuaciones 2.1.26 y 2.1.27 en la ecuación 2.1.19:

$$\ddot{\theta}_1 (m_1 l_1^2 + m_2 l_1^2) + \ddot{\theta}_0 (m_1 l_1 \cos \theta_1 + m_2 l_1 \cos \theta_1) + \ddot{\theta}_2 m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \dot{\theta}_2^2 m_2 l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - m_1 g l_1 \sin \theta_1 - m_2 g l_1 \sin \theta_1 = 0 \quad (2.1.28)$$

Calculando la derivada parcial con respecto a $\dot{\theta}_2$ para la ecuación 2.1.20:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = \dot{\theta}_2 m_2 l_2^2 + \dot{\theta}_0 m_2 l_2 \cos \theta_2 + \dot{\theta}_1 m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \quad (2.1.29)$$

Derivando la ecuación 2.1.29 con respecto al tiempo:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) = \ddot{\theta}_2 m_2 l_2^2 + \ddot{\theta}_0 m_2 l_2 \cos \theta_2 + \ddot{\theta}_1 m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \dot{\theta}_1 m_2 l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \quad (2.1.30)$$

Calculando la derivada parcial con respecto a θ_2 para la ecuación 2.1.10:

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \theta_2}\right) = -\dot{\theta}_0 \dot{\theta}_2 m_2 l_2 \sin \theta_2 + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 m_2 l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + m_2 g l_2 \sin \theta_2 \quad (2.1.31)$$

Reemplazando y simplificando los valores de las ecuaciones 2.1.30 y 2.1.31 en la ecuación 2.1.20:

$$\ddot{\theta}_0 m_2 l_2 \cos \theta_2 + \ddot{\theta}_1 m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \ddot{\theta}_2 m_2 l_2^2 - \dot{\theta}_1^2 m_2 l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - m_2 g l_2 \sin \theta_2 = 0 \quad (2.1.32)$$

2.2 Linealización

Las ecuaciones 2.1.24, 2.1.28 y 2.1.32, presentan una gran cantidad de constantes posibles de reorganizarse; creando unas variables más globales, facilitando así el proceso de linealización.

Sean entonces:

$$n_0 = m_0 + m_1 + m_2 \quad (2.2.1)$$

$$n_1 = m_1 l_1 + m_2 l_1 \quad (2.2.2)$$

$$n_2 = m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2 \quad (2.2.3)$$

$$n_3 = m_2 l_2 \quad (2.2.4)$$

$$n_4 = m_2 l_1 l_2 \quad (2.2.5)$$

$$n_5 = m_2 l_2^2 \quad (2.2.6)$$

Tomando las ecuaciones 2.2.1, 2.2.2, 2.2.3, 2.2.4, 2.2.5 y 2.2.6 se reemplazan donde corresponda cada valor, en las ecuaciones 2.1.24, 2.1.28 y 2.1.32. Obteniendo las siguientes ecuaciones:

$$\ddot{\theta}_0 n_0 + \ddot{\theta}_1 n_1 \cos \theta_1 + \ddot{\theta}_2 n_3 \cos \theta_2 - \dot{\theta}_1^2 n_1 \sin \theta_1 - \dot{\theta}_2^2 n_3 \sin \theta_2 = u(t) \quad (2.2.7)$$

$$\ddot{\theta}_0 n_1 \cos \theta_1 + \ddot{\theta}_1 n_2 + \ddot{\theta}_2 n_4 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \dot{\theta}_2^2 n_4 \sin(\theta_1 - \theta_2) - n_1 g \sin \theta_1 = 0 \quad (2.2.8)$$

$$\ddot{\theta}_0 n_3 \cos \theta_2 + \ddot{\theta}_1 n_4 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \ddot{\theta}_2 n_5 - \dot{\theta}_1^2 n_4 \sin(\theta_1 - \theta_2) - n_3 g \sin \theta_2 = 0 \quad (2.2.9)$$

Debido a la clase de controlador que se diseñará, es necesario realizar un ajuste en el comportamiento del PIDL, limitando su funcionalidad a un sector donde pueda considerarse que tendrá un comportamiento “lineal”. El proceso de linealización debe tener en cuenta que tanto θ_1 como θ_2 están bajo una misma vertical, es decir, formando un ángulo de noventa grados con respecto al eje X, por lo tanto $\theta_1 = \theta_2 = 90^\circ$, pero para facilitar su cálculo también es asumible que ese ángulo corresponde a cero grados ($\theta_1 = \theta_2 = 0$), por otro lado la primera derivada de θ_1 y θ_2 deben de igualarse a cero. Se realizará entonces la linealización a través de las Series de Taylor, truncando la serie en el primer grado se obtendrá una función que tenga un comportamiento parecido, pero no exacto a la función original ($f(x) \approx f_L(x)$).

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n \quad (2.2.10)$$

La ecuación 2.2.10 muestra la forma general de las Series de Taylor, si expandimos la serie hasta $n = 1$, es decir hasta el primer grado, se obtendrá:

$$f(x) \approx f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x - a)^1 \quad (2.2.11)$$

En la ecuación 2.2.11 el término a es el punto de equilibrio o el punto donde se desea linealizar la función, entonces la función a linealizar corresponde a la suma de la función evaluada en el punto de equilibrio y la derivada de la función evaluada en a , multiplicada por la resta entre el valor de x y el valor de a :

$$f(x) \approx f(a) + f'(x)|_{x=a}(x - a) \quad (2.2.12)$$

En este caso $x = \theta_1$, también se determinó que $\theta_1 = \theta_2$, entonces si $f(x) = \cos(x) \rightarrow f(x) = \cos(\theta_1)$ para un punto de equilibrio en $a = 0$, entonces al aplicar las series de Taylor a cada valor que contenga un coseno, llegaremos a lo siguiente:

$$f(a) \rightarrow \cos(0) = 1 \quad (2.2.13a)$$

$$f'(x) \rightarrow \left. \frac{d\cos(\theta_1)}{dt} \right|_{\theta_1=0} = -\sin(0) \quad (2.2.13b)$$

$$(x - a) \rightarrow (\theta_1 - 0) = \theta_1 \quad (2.2.13c)$$

Al reemplazar las tres secciones de la ecuación 2.2.13 en la ecuación general 2.2.12 dará como resultado:

$$\cos(0) - \sin(0) * \theta_1 = 1 \quad (2.2.14)$$

La ecuación 2.2.14 muestra que cualquier valor a linealizar que contenga $\cos(\theta_1)$ o $\cos(\theta_2)$ tendrá como resultado 1. Ahora bien, se realiza el mismo proceso para $f(x) = \sin(x) \rightarrow f(x) = \sin(\theta_1)$.

$$f(a) \rightarrow \sin(0) = 0 \quad (2.2.15a)$$

$$f'(x) \rightarrow \left. \frac{d\sin(\theta_1)}{dt} \right|_{\theta_1=0} = \cos(0) \quad (2.2.15b)$$

$$(x - a) \rightarrow (\theta_1 - 0) = \theta_1 \quad (2.2.15c)$$

Reemplazando las tres secciones de la ecuación 2.2.15 en la ecuación general 2.2.12:

$$\sin(0) + \cos(0) * \theta_1 = \theta_1 \quad (2.2.16)$$

Con la ecuación 2.2.16 queda evidenciado que los valores $\sin(\theta_1)$ o $\sin(\theta_2)$ resultarán en θ_1 o θ_2 . Finalmente, con estas dos aclaraciones del uso de las Series de Taylor y recordando que tanto $d\theta_1/dt$ como $d\theta_2/dt$ se deben igualar a 0, las ecuaciones generales del sistema (2.2.7, 2.2.8 y 2.2.9) tras realizar el proceso de linealización serán:

$$\ddot{\theta}_0 n_0 + \ddot{\theta}_1 n_1 + \ddot{\theta}_2 n_3 = u(t) \quad (2.2.17)$$

$$\ddot{\theta}_0 n_1 + \ddot{\theta}_1 n_2 + \ddot{\theta}_2 n_4 - n_1 g \theta_1 = 0 \quad (2.2.18)$$

$$\ddot{\theta}_0 n_3 + \ddot{\theta}_1 n_4 + \ddot{\theta}_2 n_5 - n_3 g \theta_2 = 0 \quad (2.2.19)$$

Teniendo las ecuaciones linealizadas que rigen el sistema para un punto de operación en específico, inicia el diseño del controlador. Vale comentar que este es solo uno de los métodos que existen para linealizar el PIDL, también se puede usar un arreglo matricial llamado matriz jacobiana, esta matriz se compone de las derivadas parciales de primer orden de la función, permitiendo realizar una aproximación lineal.

Para finalizar este apartado es pertinente tomar en cuenta la aclaración que hace Katsuhiko Ogata en el libro *Ingeniería de control moderna* con respecto a la linealización de sistemas dinámicos:

“(…) Sin embargo, si las condiciones de operación varían ampliamente, tales ecuaciones linealizadas no son adecuadas y deben manejarse ecuaciones no lineales. Es importante recordar que un modelo matemático determinado, que se use en el análisis y el diseño, puede representar con precisión la dinámica de un sistema real para ciertas condiciones de operación, pero puede no ser preciso para otras” (Ogata, 1978, p.43).

3. Construcción del PIDL

Es posible hacer la construcción física del PIDL a través de un programa CAD, por otro lado, se puede armar usando un kit de mecatrónica pre-diseñado que cumpla con los parámetros requeridos. Para este caso en específico, se usaron en la mayoría elementos de la marca Fischertechnik®, sin embargo algunas piezas fueron previamente diseñadas debido a la particularidad de su tarea.

3.1 Base móvil

Unos de los puntos decisivos en el PIDL tiene que ver con la forma en la que será construida la base móvil, porque dependiendo de factores como costo, peso, tamaño, durabilidad, entre otros, alterará en gran medida o no, los materiales a usar y por lo tanto el análisis de modelamiento previamente realizado. No es lo mismo el diseño sobre un riel de aluminio al impulsado por una cadena en ABS o el que usa un arreglo de engranajes con motores y ruedas, ya que en cada caso el actuador requerirá potencias diferentes para realizar el trabajo. En particular este PIDL fue construido usando eslabones que forman una cadena en plástico ABS, la cadena está sujeta a un bloque (refiérase a este como la masa m_o de la figura 1), a su vez el bloque esta guiado por medio de 2 barras de aluminio que sirven de rieles para el desplazamiento de forma lineal del PIDL (Figura 2).



Figura 2: Detalle Cadena-Riel. Elaboración propia.

Luego de tener la base y la cadena, la movilidad de la masa se da por los dos engranajes puestos en cada extremo, estos engranajes también ayudan a presionar las barras de aluminio, ajustándose con anillos de seguridad. Finalmente los bloques de la figura 3 son usados para darle altura y estabilidad a la base, la figura 4 muestra la forma final de la base del PIDL sin los péndulos y el actuador.

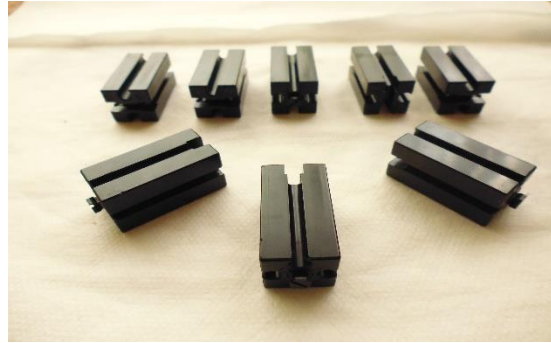


Figura 3: Piezas soporte y altura. Elaboración propia

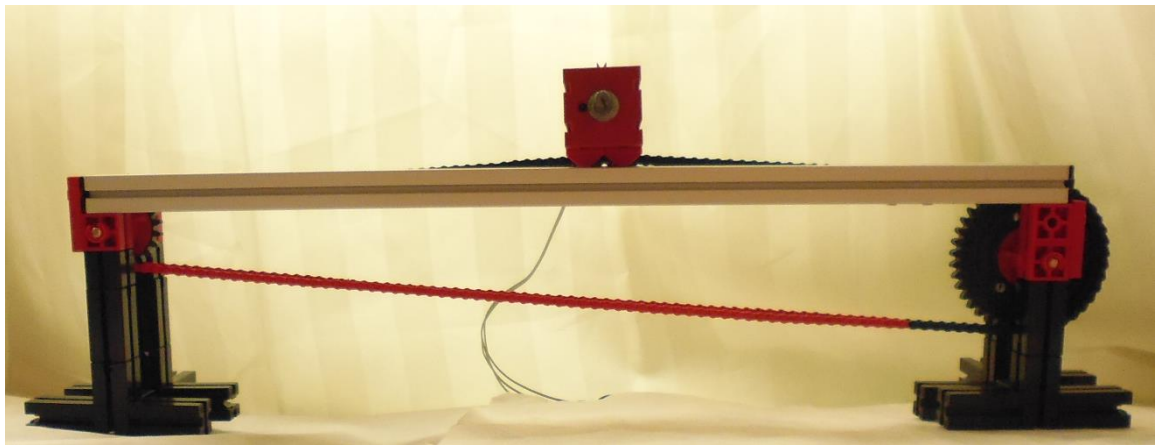


Figura 4: Base móvil sin actuador. Elaboración propia

3.2 Actuador

En la elección del actuador debe tenerse en cuenta el peso total del sistema que se piensa mover, para un motor, el valor que refleja esta medida es el torque, dado en Newtons por metro (N.m) o en Kilogramos por metro (Kg.m). En el caso del PIDL el actuador es un motor cd que provee movilidad a la cadena y al bloque que esta sobre el riel, a una velocidad considerable, permitiendo que los cambios de dirección en el giro del motor sean rápidos.

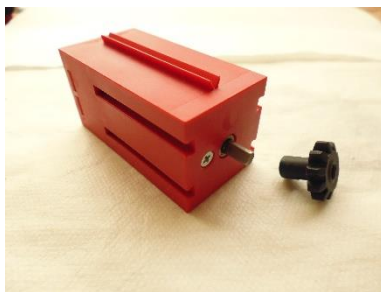


Figura 5: Encodermotor. Elaboración propia

El actuador seleccionado lo ilustra la figura 5, un encodermotor con las especificaciones técnicas mostradas en la tabla 1:

Tabla 1

Especificaciones técnicas del encodermotor

<i>Características</i>	<i>Valores</i>
Voltaje	24 Voltios
Corriente	0.6 Amperios
Rpm	440
Torque	Máximo de 176.5 Nm \approx 18Kg.m
Encoder	Señal de cuadratura de 0 a 24 Voltios

3.3 Potencia y alimentación

La etapa de potencia debe suplir totalmente las exigencias de voltaje y corriente del actuador, para ello una buena elección de la fuente de energía y el driver del motor asegurarán que no haya inconvenientes o accidentes en el momento de la implementación de la planta. La fuente de voltaje seleccionada se basa en un cargador AC/DC de 24V a 3 Amperios de corriente (Figura 6).



Figura 6: Fuente de energía. Elaboración propia

El driver para el encodermotor elegido fue un módulo basado en el Dual BTN7960B (Figura 7) que tiene como características principales, un voltaje de trabajo desde 5.5V hasta 28V y un máximo de corriente de carga de 43 Amperios, ver el Apéndice A para toda la información técnica.

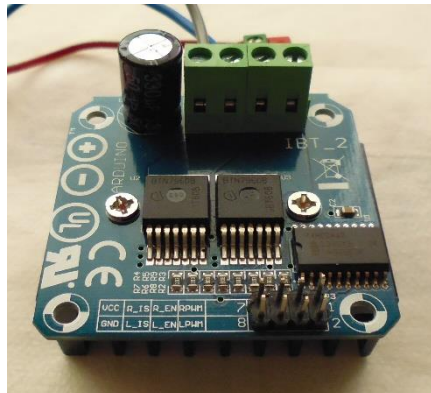


Figura 7: Driver motor. Elaboración propia

3.4 Relación de transmisión

Dentro del análisis mecánico, un punto importante a tener en cuenta es la relación de transmisión. Se entiende como la relación entre las velocidades de rotación de dos engranajes conectados entre sí, cuya función es transmitir movimiento rotatorio de unos ejes a otros dentro de una máquina, la figura 8 muestra la relación de transmisión entre el motor (engranaje M), los engranajes de 40 y 20 dientes que ejecutan el desplazamiento del carro en el eje x a través de la cadena.

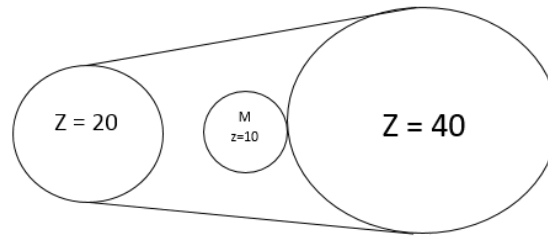


Figura 8: Relación de transmisión PIDL. Elaboración propia

La relación de transmisión total parte desde el elemento que ejerce la fuerza motora engranaje M (actuador) y el engranaje que posee 40 dientes, esta relación se denomina transmisión en engranajes acoplados, mientras que la relación entre el engranaje de 40 dientes con el engranaje de 20 dientes es conocida como transmisión de polea.

Para el cálculo de la relación de transmisión en engranajes acoplados se tiene en cuenta la siguiente ecuación:

$$d1 \cdot N1 = d2 \cdot N2 \quad (3.4.1)$$

Donde N y d hacen referencia a:

N = Numero de revoluciones por minuto.

d = Diámetro primitivo de la rueda dentada.

De la ecuación 3.4.1 se despeja la variable que hace falta, es decir N2:

$$\frac{d1 \cdot N1}{d2} = N2 \quad (3.4.2)$$

Reemplazando los valores conocido en la ecuación 3.4.2 se obtiene:

$$\frac{440 \cdot 10}{40} = 110 \text{ rpm} \quad (3.4.3)$$

Teniendo el valor hallado en la ecuación 3.4.3, se aplica nuevamente la ecuación 3.4.2 con el fin de saber el valor de la relación de transmisión total del PIDL.

$$\frac{40 \cdot 110}{20} = 220 \text{ rpm} \quad (3.4.4)$$

La velocidad final del PIDL es de 220 rpm (ecuación 3.4.4), concluyendo que pierde la mitad de velocidad producida por el actuador, pero ganando el doble de fuerza, entonces el PIDL tiene un sistema reductor con relación de 2:1.

3.5 Selección de sensores de posición angular

Como se ha analizado anteriormente en la sección 2 el PIDL posee tres variables de posición, dos de ellas angulares (θ_1 y θ_2) y una lineal (θ_0), estas deben estarse monitoreando de manera constante a través de sensores de posición. A continuación, se nombran algunos sensores de posición, su funcionamiento, características, ventajas y deventajas, basados en parte en la información brindada por Barrientos, Peñin, Balaguer y Santoja en el libro *Fundamentos de robótica*.

3.5.1 Encoder óptico

Los encoders se conforman de un disco transparente que tiene una serie de ranuras equidistantes distribuidas de manera radial alrededor del disco, de un sistema emisor de luz y un fotoreceptor separados por el disco (Barrientos *et al.*, 2007). Mientras el disco gira el haz de luz se ve interrumpido por las ranuras del mismo, lo que produce un tren de pulsos a la salida del sensor, la resolución del encoder dependerá de la cantidad de ranuras que tenga el disco. La figura 9 muestra el disco de un encoder óptico.



Figura 9: Disco encoder. Elaboración propia

3.5.2 Encoder magnético

A diferencia del óptico, en el encoder magnético la señal de salida es generada por la distribución equidistante de imanes que deben tener el mismo tamaño y estar situados aconsejablemente, colocando uno con polaridad N, después otro con polaridad S y así de manera sucesiva, esto para formar un tren de pulsos. Su resolución depende de la cantidad de imanes sujetos al disco, es decir, en una medida angular si se tienen distribuidos 8 imanes, el sensor hall en un giro completo (360°) recibirá un cambio de valor cada 45° ($360/8$).

El actuador del PIDL tiene un encoder magnético que consta de un disco magnético; unido al eje del motor y dos sensores de efecto hall (Fig.10).

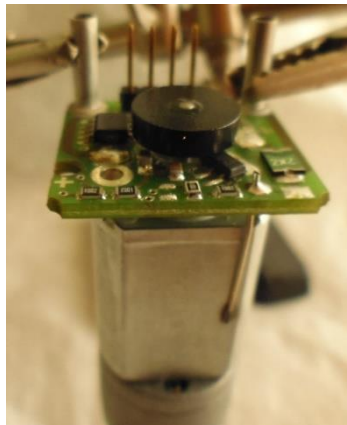


Figura 10: Encoder del actuador. Elaboración propia

3.5.3 Synchro – Resolvers

Son dos dispositivos analógicos de alta resolución que basan su funcionamiento en una bobina solidaria fija al eje, que es excitada por una señal portadora AC y 2 bobinas fijas (Barrientos *et al.*, 2007). La figura 11 ilustra el esquema de funcionamiento del synchro-resolver

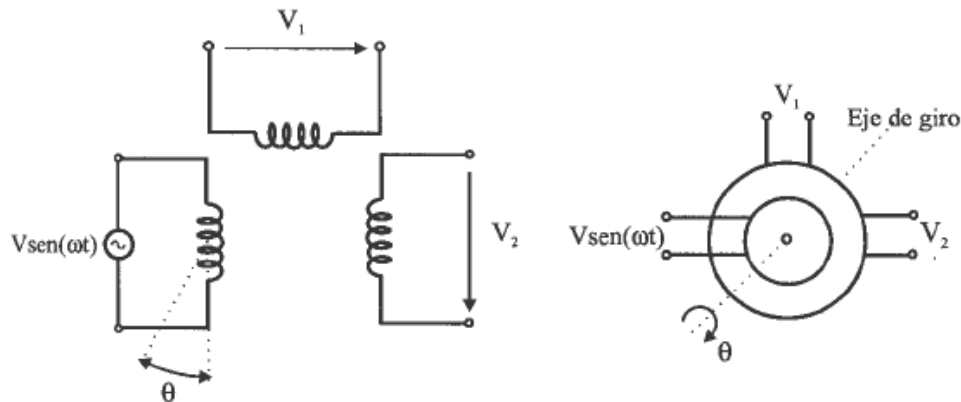


Figura 11: Esquema de funcionamiento de un resolver. Barrientos *et al.* 2007. p.39

La diferencia del synchro y el resolver es la forma en que se expresa la forma del voltaje de salida con respecto al ángulo de giro del eje (θ) y el desfase, ya que en el synchro se tienen 2 voltajes de salida expresados en las ecuaciones 3.4.3.1 y 3.4.3.2:

$$V_1 = V \sin(\omega t) \sin \theta \quad (3.4.3.1)$$

$$V_2 = V \sin(\omega t) \cos \theta \quad (3.4.3.2)$$

Por otro lado, la salida de los resolver forma un sistema trifásico de topología estrella, con lo que se tienen tres ecuaciones (3.4.3.3, 3.4.3.4 y 3.4.3.5) dependiendo de donde se tome el valor del voltaje.

$$V_{13} = \sqrt{3} V \cos(\omega t) \sin \theta \quad (3.4.3.3)$$

$$V_{32} = \sqrt{3} V \cos(\omega t) \sin(\theta + 120^\circ) \quad (3.4.3.4)$$

$$V_{21} = \sqrt{3} V \cos(\omega t) \sin(\theta + 240^\circ) \quad (3.4.3.5)$$

3.5.4 Potenciómetro lineal

Es otro dispositivo analógico que consta de una resistencia y un wiper, un contacto que está unido físicamente a la resistencia que al deslizarse alrededor de ella varía el valor óhmico a la salida (Romero, s.f). Generalmente se usan los potenciómetros de tres pines, los extremos dan el valor de resistencia total y el pin del medio que está conectado al wiper; es decir el pin que

varía su valor dependiendo de la posición en donde este. En la figura 12 se muestra una foto detalle de los 3 pines y la lámina de contacto que esta unida al wiper.

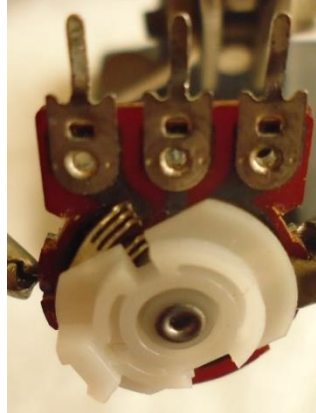


Figura 12: Foto detalle potenciómetro. Elaboración propia

3.5.5 Tabla comparativa sensores

La siguiente tabla (tabla 2) tiene como objetivo sintetizar las ventajas y desventajas de los diferentes sensores de posición angular que se pueden usar para realizar un sistema de control con un péndulo.

Tabla 2
Características principales sensores de posición

<i>Sensor</i>	<i>Robustez mecánica</i>	<i>Resolución</i>	<i>Estabilidad Térmica</i>	<i>Costo</i>	<i>Uso en el área de control</i>
Encoder óptico	Baja	Media o Alta	Buena	Medio o Alto	Industrial o educativo
Encoder Magnético	Alta	Media o Alta	Alta	Alto	Industrial o educativo
Sincro -Resolver	Alta	Alta	Alta	Alto	Industrial
Potenciómetro	Media	Baja	Baja	Bajo	Educativo

Para el desarrollo del PIDL se decidió el uso de potenciómetros como sensores de posición angular en cada eslabón, debido a su muy bajo costo y a su propósito educativo. El actuador (sección 3.2) ya posee un encoder magnético, el cual será usado como sensor de posición lineal, es decir el sensor que da la ubicación del carro sobre los rieles.

3.6 Diseño piezas CAD

A través de un programa CAD se diseñaron tres piezas necesarias en la construcción del PIDL, estas piezas tienen como objetivo acoplar los eslabones con los sensores de posición, al realizar dichos acoples finaliza la estructura del péndulo doble. En la figura 13 se observa el diseño de uno de los acoples usados tanto en el eslabón inferior como en el eslabón superior.

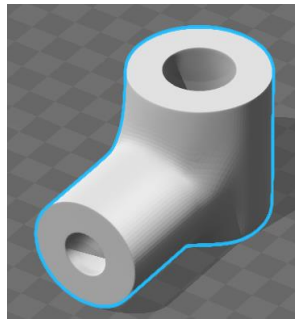


Figura 13: Pieza 1 modelo CAD. Elaboración propia

La figura 14 muestra el diseño del segundo acople que permite la unión del eslabón inferior con el sensor de posición del eslabón superior.

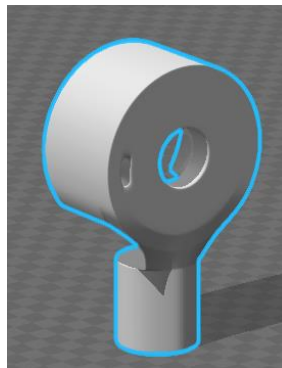


Figura 14: Pieza 2 modelo CAD. Elaboración propia

Estos modelos CAD fueron construidos a través de una impresión 3D, el material usado fue plástico ABS. La figura 15 y 16 evidencian los modelos impresos.

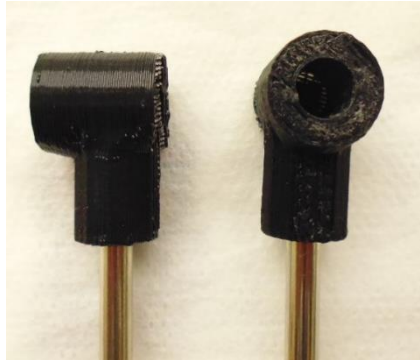


Figura 15: Pieza 1 Impresa. Elaboración propia

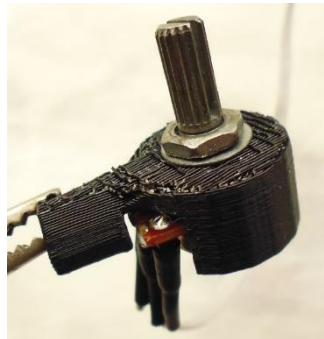


Figura 16: Pieza 2 Impresa. Elaboración propia

Finalmente, la figura 17 muestra al PIDL con todas sus piezas conectadas.

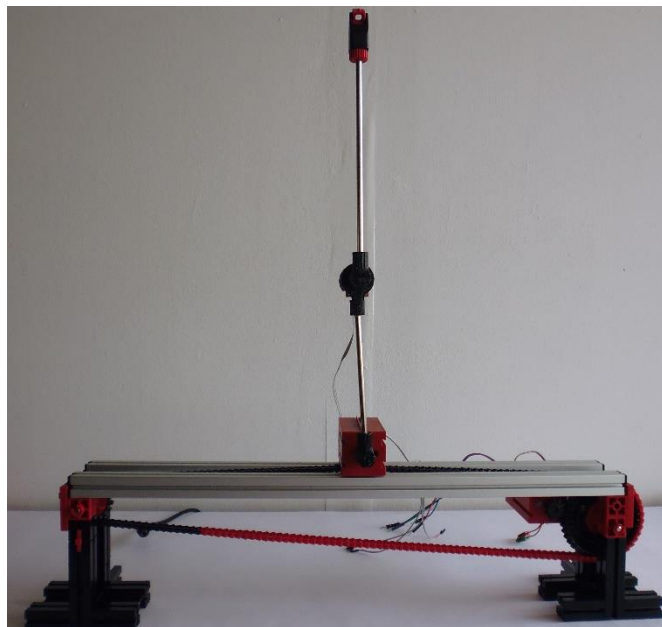


Figura 17: Ensamble completo del PIDL. Elaboración propia

4 Simulación y control

El PIDL es un sistema complejo por lo que se aborda desde el enfoque espacio estados para su análisis, se busca describir un sistema a partir de n ecuaciones diferenciales de primer orden con notación matricial para la representación matemática del sistema.

Este capítulo aborda el análisis y diseño de un controlador a través de la representación en espacio estado.

4.1 Representación en espacio estado del PIDL

Con los valores reales de peso y longitud del PIDL, se pueden sustituir en las ecuaciones linealizadas (2.2.17, 2.2.18 y 2.2.19) del capítulo 2 con el objetivo de identificar las variables de estado del sistema.

Medidas del PIDL:

$$m_0[\text{Kg}]: 0.045$$

$$m_1[\text{Kg}]: 0.018$$

$$m_2[\text{Kg}]: 0.016$$

$$l1[\text{m}]: 0.09$$

$$l2[\text{m}]: 0.15$$

$$g \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]: 9.8$$

Reemplazando en las ecuaciones linealizadas se tiene:

$$0.079 \cdot \ddot{\theta}_0 + 0.00402 \cdot \ddot{\theta}_1 + 0.0024 \cdot \ddot{\theta}_2 = u(t) \quad (4.1.1)$$

$$0.00402 \cdot \ddot{\theta}_0 + 0.0005058 \cdot \ddot{\theta}_1 + 0.000216 \cdot \ddot{\theta}_2 - 0.0039396 \cdot \theta_1 = 0 \quad (4.1.2)$$

$$0.0024 \cdot \ddot{\theta}_0 + 0.0002160 \cdot \ddot{\theta}_1 + 0.00036 \cdot \ddot{\theta}_2 - 0.02352 \cdot \theta_2 = 0 \quad (4.1.3)$$

Teniendo las 3 ecuaciones 4.1.1, 4.1.2 y 4.1.3, el siguiente paso requiere identificar los integradores.

Sea entonces:

$X_1 = \theta_0$; Desplazamiento del carro

$X_2 = \dot{X}_1 = \dot{\theta}_0$; Velocidad del carro

$\dot{X}_2 = \ddot{X}_1 = \ddot{\theta}_0$; Aceleración del carro

$X_3 = \theta_1$; Desplazamiento angular del péndulo inferior

$X_4 = \dot{X}_3 = \dot{\theta}_1$; Velocidad angular del péndulo inferior

$\dot{X}_4 = \ddot{X}_3 = \ddot{\theta}_1$; Aceleración angular del péndulo inferior

$X_5 = \theta_2$; Desplazamiento angular del péndulo superior

$X_6 = \dot{X}_5 = \dot{\theta}_2$; Velocidad angular del péndulo superior

$\dot{X}_6 = \ddot{X}_5 = \ddot{\theta}_2$; Aceleración angular del péndulo superior

Dentro de los cambios de variables realizados hay 3 que hacen referencia a $\ddot{\theta}_0$, $\ddot{\theta}_1$ y $\ddot{\theta}_2$, que son \ddot{X}_1 , \ddot{X}_3 y \ddot{X}_5 , se busca describir el PDIL a partir de n ecuaciones de primer orden, por lo tanto, usando las 3 ecuaciones linealizadas, deben hallarse los valores correspondientes a \dot{X}_2 , \dot{X}_4 y \dot{X}_6 que no estén en términos de \ddot{X}_1 , \ddot{X}_3 y \ddot{X}_5 . Para ello se puede usar un arreglo matricial o alguno de los métodos de solución a sistemas de ecuaciones. Después de hallar esos valores se puede construir la matriz de espacio estado (ecuaciones 1.5.6.1 y 1.5.6.2), quedando de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \\ \dot{X}_3 \\ \dot{X}_4 \\ \dot{X}_5 \\ \dot{X}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5.96341 & 0 & -1.32474 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 145.61833 & 0 & -28.42679 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -47.61488 & 0 & 91.22103 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 22.07202 \\ 0 \\ -151.371141 \\ 0 \\ -56.32414 \end{bmatrix} \quad (4.1.4)$$

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \\ Y_5 \\ Y_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.1.5)$$

Finalmente, la figura 18 muestra el comportamiento de las salidas en lazo abierto para un escalón unitario donde las salidas 1,2 y 3 corresponden al carro, al eslabón inferior y el eslabón superior respectivamente.

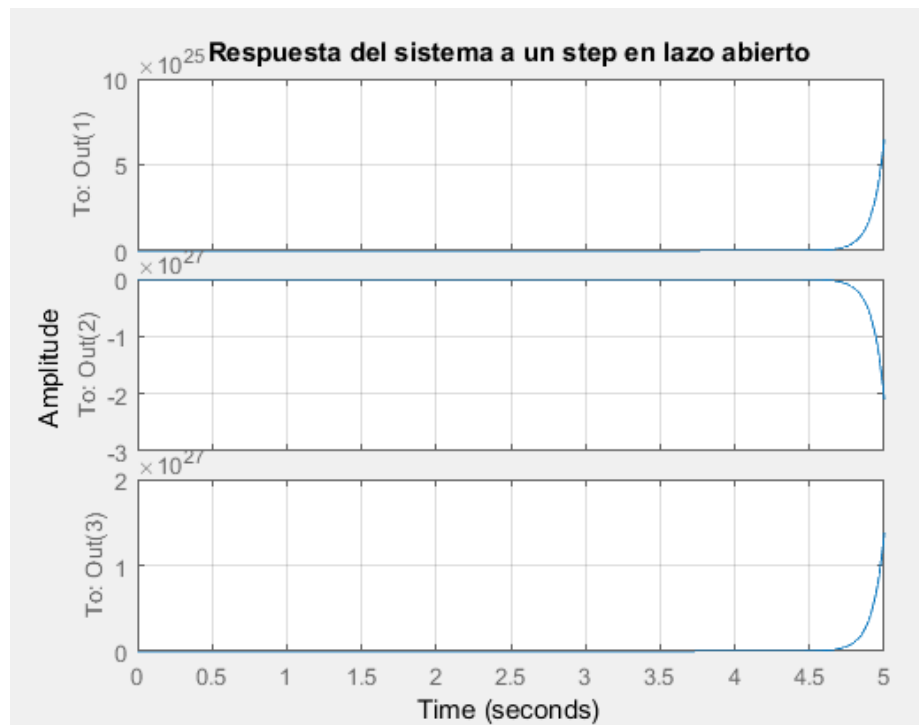


Figura 18: Respuesta del sistema en lazo abierto. Elaboración propia

4.2 Diseño del controlador

Teniendo la matriz de entrada y salida (4.1.4 y 4.1.5 respectivamente), es posible diseñar el controlador para el PIDL, en esta sección se diseñarán 2 controladores diferentes; LQR y un control por asignación de polos, a través del software MATLAB 2015b.

4.2.1 Controlabilidad

Antes de diseñar los controladores es necesario saber si la matriz de espacio estado es controlable o no, el concepto de controlabilidad dice: “que un sistema es controlable en el tiempo t_0 si se puede transferir desde cualquier estado inicial $\mathbf{x}(t_0)$ a cualquier otro estado, mediante un vector de control sin restricciones, en un intervalo de tiempo finito” (Ogata, 1978, p.675).

Retomando la ecuación de las variables de estado:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \quad (4.2.1.1)$$

Para que se cumpla el criterio de controlabilidad se debe usar una matriz de controlabilidad determinada por los valores de la ecuación 4.2.1.1 donde el valor del rango de esa matriz debe ser el rango máximo del tamaño de A para que el sistema pueda ser totalmente controlable, la ecuación 4.2.1.3 ilustra la forma de hallar el rango:

$$R = [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B] \quad (4.2.1.3)$$

En un software como MATLAB es sencillo hallar la controlabilidad del PIDL, teniendo el sistema en espacio estado se define primero el vector de controlabilidad de la siguiente forma:

$$U = [B \ A * B \ A^2 * B \ A^3 * B \ A^4 * B \ A^5 * B]$$

También es posible obtener el vector usando el comando *ctrb*, después, aplicando el comando *rank* al vector U, dará como respuesta: 6, lo que significa que la planta es totalmente controlable.

4.2.2 Controlador LQR

El regulador cuadrático lineal es un controlador de la línea de control óptimo, que presenta un uso práctico en la parte de simulación. Tras haber comprobado la controlabilidad del PIDL, usar un LQR requiere determinar una ganancia K de realimentación (ecuación 4.2.2.1).

$$u = -Kx \quad (4.2.2.1)$$

Donde u es la variable de control, en MATLAB el controlador LQR se puede realizar con el comando *lqr*, que produce una función que solicita 2 parámetros muy importantes Q (desempeño) y R (costo). Existen varios criterios para la selección de estos valores, uno de ellos es aplicando la regla de Bryson donde Q y R se determinan así (ecuaciones 4.2.2.2 y 4.2.2.3):

$$q_{ii} = \frac{1}{x_{i \text{ máx}}^2} \quad (4.2.2.2)$$

$$r_{jj} = \frac{1}{u_{j \text{ máx}}^2} \quad (4.2.2.3)$$

Para la regla de Bryson deben de asumirse los máximos valores deseados de x y u , dado que el enfoque para este caso esta en mejorar la respuesta sin importar el costo, puede tomarse $R=1$, entendiendo que se está minimizando el error de estado de las salidas del sistema, a través del mejoramiento del desempeño, en otras palabras, se están buscando los valores idóneos de la matriz Q . Entonces tomando un error máximo de 1cm en la posición del carro, es decir un error de 0,01mts (recordar que las unidades están en metros y radianes), da un valor de Q de:

$$Q_1 = \frac{1}{0.0001} = 10000 \quad (4.2.2.4)$$

Las otras 2 salidas del sistema son la posición de los eslabones, teniendo en cuenta que el eslabón inferior deberá tener una oscilación menor al superior, puede optarse que el error máximo del eslabón inferior sea de $1^\circ = 0,0174533 \text{ rad}$ y otorgándole más libertad de oscilación al eslabón superior, un valor de $5^\circ = 0,0872665 \text{ rad}$ es adecuado.

$$Q_2 = \frac{1}{3.04617^{-04}} = 3282.803536 \quad (4.2.2.5)$$

$$Q_3 = \frac{1}{7.61544^{-03}} = 131.3121 \quad (4.2.2.6)$$

Teniendo los valores de Q y R deseados solo queda construir el controlador, pero antes se había nombrado que la matriz Q está enfocada en las salidas de las variables, en código lo que eso implica es Q y C deben relacionarse, por lo que $Q = C' * C$, en MATLAB esto dará como

resultado una matriz de 6x6 donde la diagonal principal tiene ubicados las 3 salidas del sistema (ecuación 4.2.2.7)

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.2.2.7)$$

Básicamente este método del LQR permite que la matriz Q manipule los valores de salida del sistema directamente, reemplazando los valores obtenidos en la ecuación 4.2.2.4, 4.2.2.5 y 4.2.2.6 en Q (1,1), Q (3,3) y Q (5,5) respectivamente y ajustando R = 1 puede hallarse el vector K a través de la ecuación 4.2.2.8.

$$K = lqr(A, B, Q, R) \quad (4.2.2.8)$$

Resolviendo K, MATLAB arroja como resultado las siguientes ganancias: 100.0000, 61.1949, -222.7367, -8.1096, 405.4583 y 42.9031. Finalmente, con el comando `ss` se construye el nuevo sistema de espacio estado en lazo cerrado: $sys_lqr = ss(A-B*K, B, C, D)$.

Para comprobar el controlador se le aplican 3 señales diferentes: Un escalón unitario, un impulso y una señal de ruido blanco, las figuras 19, 20 y 21 muestran la respuesta del sistema a cada una de estas señales, siendo la señal roja la posición del carro, la señal azul la posición del eslabon inferior y la señal verde la posición del eslabon superior.

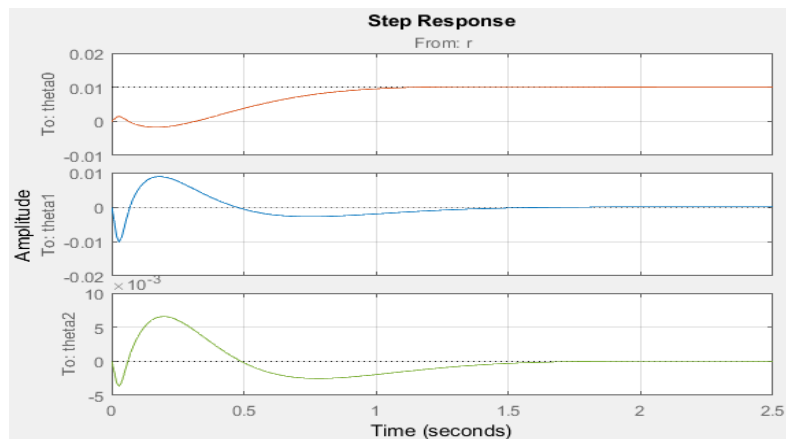


Figura 19: Respuesta del controlador LQR a un escalón unitario. Elaboración propia.

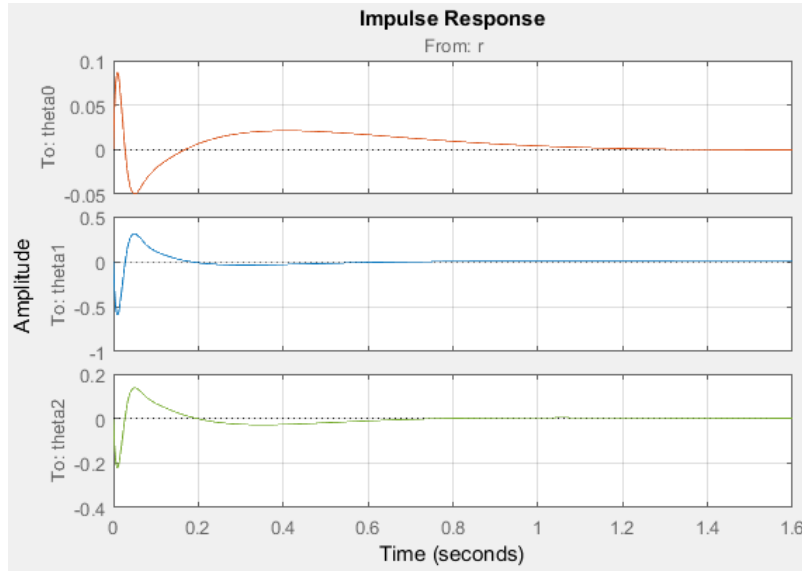


Figura 20: Respuesta del controlador LQR a un impulso. Elaboración propia.

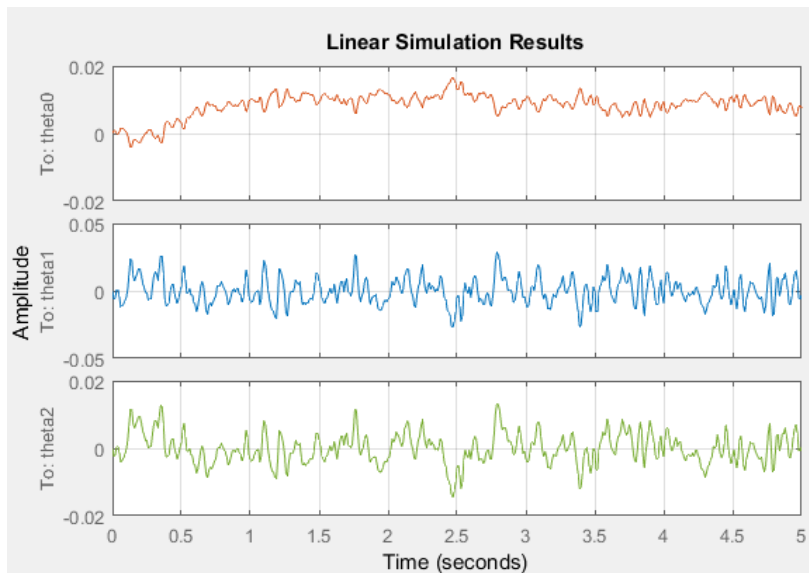


Figura 21: Respuesta del controlador LQR a señal de ruido blanco. Elaboración propia.

4.2.3 Controlador por realimentación del vector de estados mediante asignación de polos

Esta sección se enfocará en el diseño de un controlador mediante la asignación de polos en lazo cerrado, para ello el sistema debe cumplir el criterio de controlabilidad, descrito anteriormente, donde se evidenció que el PIDL si lo cumple.

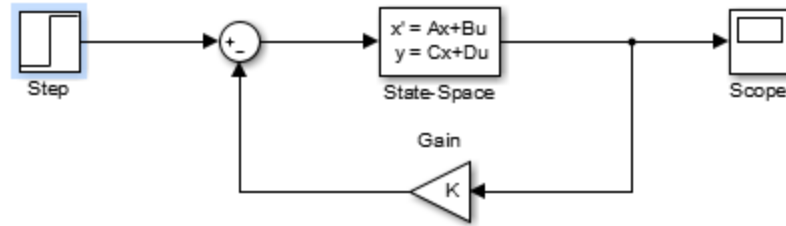


Figura 22: Sistema con realimentación de estados. Elaboración propia.

La figura 22 ilustra el diagrama de un sistema con realimentación de estados donde la variable de control también está regida por la ecuación 4.2.2.1. Como el sistema es controlable se pueden ubicar los polos de lazo en cualquier posición deseada del espacio de estados, primero se debe obtener los polos originales del sistema usando el comando $\text{eig}(A)$, MATLAB da como resultado los siguientes polos: 0, 0, -12.8130, -8.5245, 12.8130 y 8.5245. A través del lugar geométrico de las raíces se colocan un par de polos dominantes en lazo cerrado y otros polos lo suficientemente alejados hacia izquierda (semiplano negativo del eje x) de los polos dominantes en lazo cerrado.

Teniendo en cuenta lo anterior se toman los siguientes valores de polos en lazo cerrado $\text{poloDes} = [-20 \ -15 \ -10 \ -4 \ -3 \ -2]$. A partir de este vector se calcula el vector de ganancia de realimentación de estado K mediante el comando place en MATLAB (ecuación 4.2.3.1)

$$K = \text{place}(A, B, \text{poloDes}) \quad (4.2.3.1)$$

Dando como resultado valores para K de: 0.4768, 0.6198, -15.1033, -0.9118, 17.3797 y 1.7345. Al reemplazar la ecuación 4.2.2.1 en la matriz de entrada B dará que las variables de estado realimentadas están en términos de $A-BK$ ($\dot{x}(t) = (A - Bk)x(t)$), con el fin de confirmar si los polos deseados realmente están ubicados dentro del sistema, se puede volver a usar el comando eig pero no a la matriz A sino en $A-BK$. Finalmente es necesario ajustar otra ganancia N debido al error de estado estacionario, para ello hay que realizar 2 pasos: El primero

es usar el comando *norm* sobre el sistema que ya tiene la ganancia K, el valor escalar que resulte de esta operación será la ganancia N (ecuación 4.2.3.2):

$$N = \text{norm}(\text{sys_KGain}) \quad (4.2.3.2)$$

El segundo paso es determinar nuevamente el sistema con la ganancia K y N a través del comando *ss*, de la siguiente forma: $\text{sys_KNGain} = \text{ss}(A - B*(K*N), B, C, D)$, el esquema general del controlador con las ganancias incluidas lo muestra la figura 23.

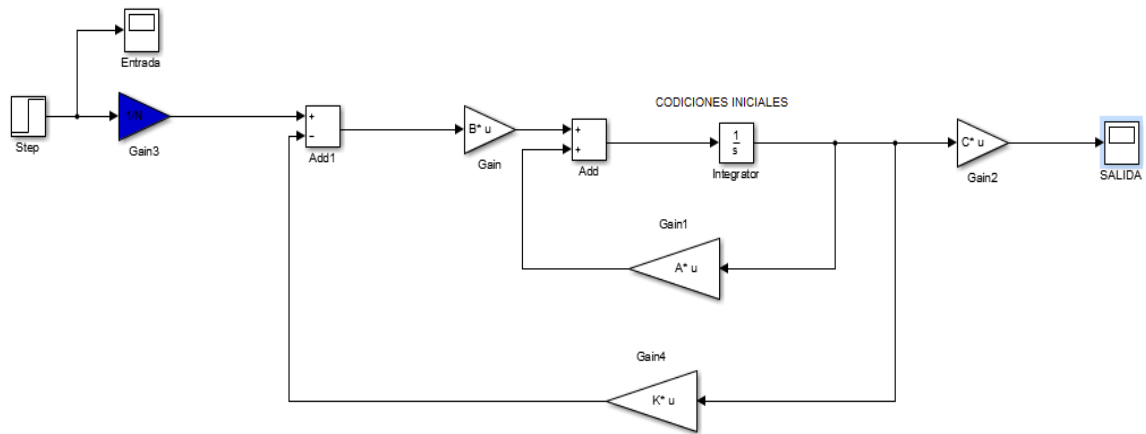


Figura 23: Esquema final del controlador por asignación de polos. Elaboración propia.

Para comprobar este controlador también se le aplican 3 señales diferentes: Un escalón unitario, un impulso y una señal de ruido blanco, las figuras 24, 25 y 26 ilustran la respuesta del sistema a cada una de estas señales, siendo la señal roja la posición del carro, la señal azul la posición del eslabon inferior y la señal verde la posición del eslabon superior.

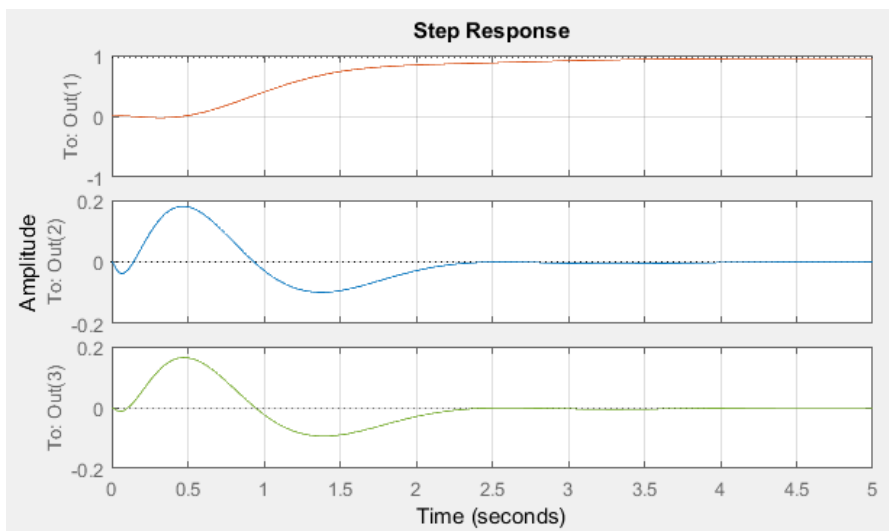


Figura 24: Respuesta del controlador por polos a un escalón unitario. Elaboración propia.

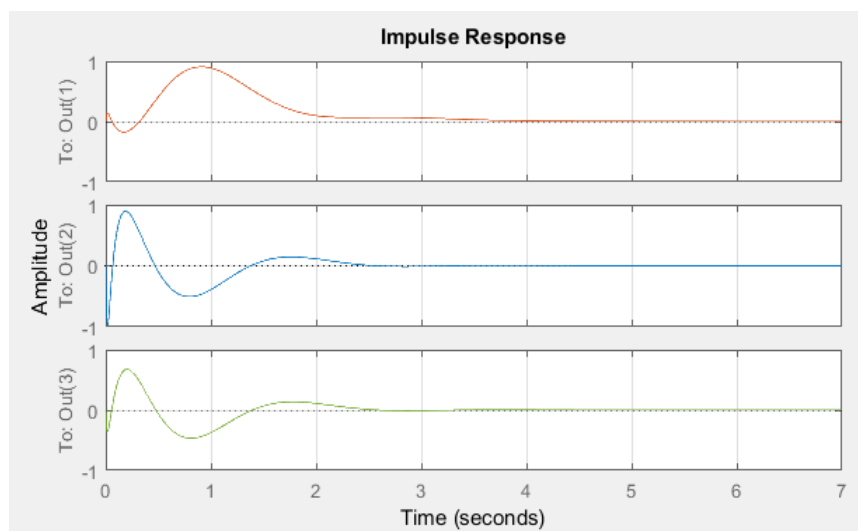


Figura 25: Respuesta del controlador por polos a un impulso. Elaboración propia.

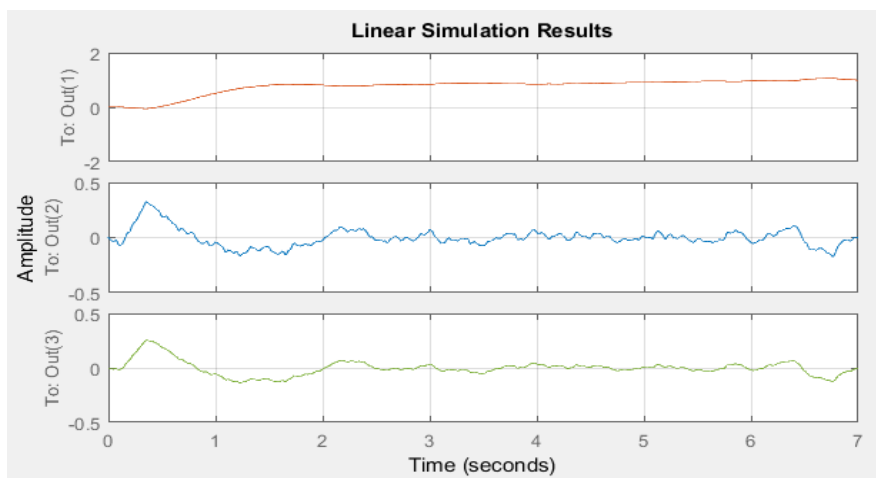


Figura 26: Respuesta del controlador por polos a señal de ruido blanco. Elaboración propia.

Finalmente la figura 27 tiene como objetivo mostrar la transición de polos del sistema de lazo abierto (inestable), a uno con ganancia K (estable de primer orden) y concluyendo en uno con una ganancia KN (estable de segundo orden).

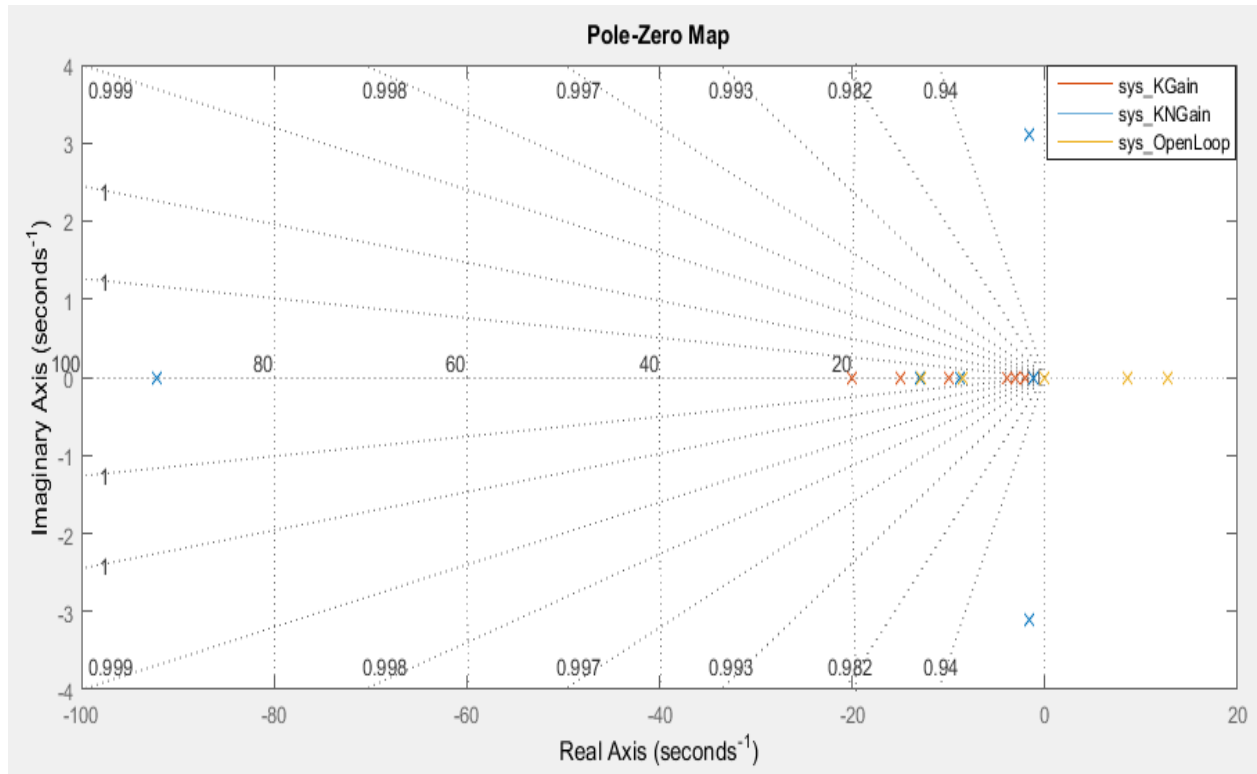


Figura 27: Mapa de la transición de polos del PIDL. Elaboración propia.

5 Observaciones, conclusiones y trabajo a futuro

5.1 Observaciones

- Durante la etapa de simulación de los controladores fue utilizada la herramienta *Linear System Analyzer* de MATLAB, que realiza el análisis en tiempo y frecuencia de sistemas lineales, en el tiempo muestra la respuesta del sistema para entradas como: escalón, impulso, onda sinodal, onda cuadrada y ruido blanco; teniendo en cuenta o no las condiciones iniciales del sistema. El análisis en frecuencia permite observar el diagrama de Bode, la distribución de polos y ceros, entre otros. *Linear System Analyzer* hace parte del toolbox de análisis y diseño de control, es de gran ayuda para analizar de manera rápida y simultánea diferentes respuestas de varios sistemas lineales.
- La adquisición de datos para las pruebas de implementación del controlador fue hecha por el kernel de *Simulink® Deskop Real-Time* a través de un compilador de lenguaje C por medio de *Microsoft Visual C++ Profesional*. Las boards manejadas fueron dos, una Arduino MEGA 2560 en la recepción y envío de datos de los sensores de posición y una Arduino UNO en la ejecución del actuador. Se eligió esta opción debido a que la librería Arduino IO presentó problemas de compatibilidad y ejecución, y el paquete para Arduino de Simulink® no cuenta con soporte para la lectura de encoders de cuadratura. Entre las ventajas de usar *Simulink® Deskop Real-Time* está el poder programar códigos en las tarjetas Arduino, leer esa información vía puerto serial por Simulink®, procesarla y enviarla de vuelta, con esto se logra usar librerías propias de Arduino disminuyendo los procesos hechos por Simulink®. Como principal

desventaja está el hecho de que la máxima frecuencia de muestreo es de 1Khz, asimismo debe tenerse cuidado en el envío y recepción de los datos.

- Además del manual de instrucciones se adjuntan 2 cartillas (Apéndice D) que tienen como objetivo dar a conocer la obtención del modelo matemático del PIDL y un par de códigos en Arduino sobre la lectura de los sensores de posición y las pruebas de funcionamiento del driver BTN7960B.

5.2 Conclusiones

- Los materiales usados en la construcción del PIDL presentan una versatilidad en cuanto a su uso, porque además de ser un material desarmable y portable, permite desconectar el eslabón superior, convirtiendo la planta a un péndulo invertido, sirviendo como material de apoyo en otros cursos de control menos avanzados.
- El uso de potenciómetros como sensores de posición afectan notoriamente la señal recibida por la tarjeta de adquisición ya que estos son susceptibles al ruido, por ejemplo, una mala soldadura causará que la señal presente alteraciones. En estos casos será necesario hacer uso de filtros para reducir las señales parasitas y mejorando la calidad de la lectura del sensor.
- A pesar de las limitaciones de procesamiento y de calidad de adquisición de datos que poseen las boards Arduino vale destacar la importancia educativa que pueden llegar a tener no solo por su bajo costo y fácil acceso, pues éstas al vincularse con Simulink® proporcionan un trabajo más eficiente, pues posibilitan la modificación de parámetros en tiempo real, visualizando casi de forma inmediata los cambios de comportamiento que puede tener el sistema a estudiar o diseñar.

- Entre los dos controladores diseñados y simulados, se evidencia que el control por LQR responde más rápido a una señal escalón e impulso (figura 19 y figura 20) que el control por asignación de polos (figura 23 y figura 24) aunque para la misma señal de ruido blanco las perturbaciones del control por LQR son mayores y no logra una estabilización adecuada (figura 21), por otro lado, el control por asignación de polos responde mejor, sobre todo el error de estado-estacionario del carro (m_0), donde casi no ve afectado por la perturbación (figura 26). Es necesario profundizar el análisis matemático del LQR ya que, a pesar de ser un control sencillo de implementar en simulación, debe tenerse muy claro las necesidades del controlador; si se quiere diseñar un controlador con gran desempeño requerirá mejores actuadores (esfuerzo y costo), diferente a querer diseñar un controlador que ahorre recursos, el cual no tendrá el mejor desempeño.
- La didáctica en tecnología es campo que puede seguir siendo explorado debido a que tanto el concepto de didáctica y tecnología están en constante cambio y dinamismo prestándose para la investigación permanente en las diferentes disciplinas que puede componer el saber tecnológico y científico, también es de resaltar que en el libro de *didáctica de la tecnología* publicado en el 2010, siete años después presenta elementos vigentes y aplicables en el contexto local como lo son el diseño de guías y unidades didáctica y temas a desarrollar en prácticas de laboratorio.
- Aunque no se logró implementar el PIDL dentro de alguna práctica de control, se espera entonces que todo el avance en análisis, diseño, construcción y contenido pueda ser usado a futuro, corrigiendo las falencias técnicas que se puedan presentar en la adquisición de datos y las limitaciones del procesamiento computacional.

5.3 Trabajo a futuro

- En relación al tipo de sensores de posición usados para el eslabón inferior y superior es posible adaptar otra clase de sensores como lo es el encoder de cuadratura que brinda mayor resolución en la lectura y menos interferencia en la señal de salida. Solo es necesario diseñar otro estilo de acople que cumpla esta función.
- Como trabajo alternativo se propone usar el PIDL como un péndulo invertido (desacoplando el eslabón superior) para así realizar nuevamente el modelamiento matemático, linealización del sistema, análisis de controlabilidad y el diseño e implementación de controladores
- Al ser el PIDL controlable y observable, y teniendo los sensores y actuadores funcionales queda abierta la posibilidad de implementar otra clase de controlador lineal o no lineal como por ejemplo: Un PID, control fuzzy, control adaptativo, uso de redes neuronales o un control óptimo LQG.

Lista de referencias

- Arcos, M. (2006). *La elaboración de materiales didácticos en lengua inglesa: el caso de los formadores de profesores de educación primaria en España*. Universidad de Sevilla.
- Barrientos, A., Balaguer, C., Peñin, L., & Santoja, R. (2007). *Fundamentos de robótica* (2nd ed., pp. 39 - 41). S.A. McGraw-Hill.
- Bautista, M., Martínez, A., & Hiracheta, R. (2014). El uso de material didáctico y las tecnologías de información y comunicación (TIC's) para mejorar el alcance académico. *Ciencia Y Tecnología, 14*, 188 - 189.
- Bogdanov, A. (2004). Optimal Control of a Double Inverted Pendulum on a Cart, 1-2. Retrieved from <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.78.6105&rep=rep1&type=pdf>
- Fandos, M., Jiménez, J., & González, A. (2002). Estrategias didácticas en el uso de las tecnologías de la Información y la Comunicación. *Acción Pedagógica, 11*(1), 39.
- Janssen, B. (2006). *Mecánica Analítica*, 35-41
- Madrid, D. & Mayorga, M. (2010). ¿Didáctica General en y para Educación Social? Puntos de encuentro desde la perspectiva del alumnado. *Educatio Siglo XXI, 28*(2), 248.
- Messner, B., Hill, R., & Taylor, J. *Control Tutorials for MATLAB and Simulink - Inverted Pendulum: State-Space Methods for Controller Design*. *Ctms.engin.umich.edu*. Retrieved 10 January 2017, from <http://ctms.engin.umich.edu/CTMS/index.php?example=InvertedPendulum§ion=ControlStateSpace>
- Morales, P. (2012). *Elaboración de material didáctico* (1st ed., pp. 10 - 28). Tlalnepantla: RED TERCER MILENIO S.C.
- Ogata, K. (2010). *Ingeniería de control moderna* (5th ed.). Madrid: Pearson Educación.
- Ornelas, F. (2015). *Control Óptimo*. División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería Eléctrica. Retrieved 25 February 2017, from http://dep.fie.umich.mx/~fornelas/data/uploads/propiedades_lqr.pdf
- Quanser - Linear Double Inverted Pendulum*. (2012). *Quanser.com*. Retrieved 17 August 2016, from http://quanser.com/products/linear_double_pendulum
- Romero, A. (n.d.). *Unidad Didáctica: Control y robótica*. Retrieved 10 October 2016, from <http://cmascriptpublic2.ihmc.us/rid=1H2F7KSQB-DTVPLB-J47/potenciometro.pdf>

Vázquez, A. & Alarcón, M. (2010). *Didáctica de la Tecnología* (1st ed., pp. 70 -132). Madrid: Síntesis.

Yadav, S., Sharma, S., & Singh, N. (2012). Optimal Control of Double Inverted Pendulum Using LQR Controller. *International Journal Of Advanced Research In Computer Science And Software Engineering*, 2(2), 190 -192.

Apéndice A

Especificaciones técnicas motor driver

Product Description

This H-Bridge module is based on Dual BTN7960B Half Bridge Driver chips. The module is designed for high power DC Motor and Solenoids drives. Interfacing this high current driver with Arduino, PIC and AVR is extremely easy. This driver module lets you control one DC motor with current as high as 43A. Maximum operating frequency is up to 25kHz.

Features

- Dual BTN7960B chip structure (max current 43A)
- 74HC244 buffer driver for better isolation.
- 5-wire connection from MCU to the module: GND, 5V, IN1, IN2, EN
- Operating Voltage: DC 8~24V
- Input max 25kHz frequency
- Size: 46mm (L) x 46 mm (W)
- Total Max Height : 38mm (including heatsink, capacitor and connector heights)

Features

- Driver: Dual BTN 7960 which forms Half bridge to drive DC motor. Each BTN 7960 chip contains one P-channel and one N-channel MOSFET with single driver IC.
- PWM based interface with current sensing capability.
- Under voltage shutdown, Over voltage lockout, Over temperature shutdown and overcurrent protection.
- Can interface directly with 3.3 V and 5 V systems
- Built-in 74HC244 8bit line driver chip to effectively isolate the microcontroller and the motor driver.

- Slew rate adjustment.
- Duty cycle 0-100 %

Technical Specifications

- Driver Chip: BTN7960B
- Operating Voltage range: 5.5v to 28 V
- Maximum Load Current: 43 A
- Combined Path Resistance for High and Low sides: 16mOhm (Typ) and 30.3mOhm (worst at 150C)
- Motor Type: DC motor
- Card size: 4*5*1.2cm

[!] Note

To reach the high current, junction temperature must remain low. The BTN7960 module has small heat sink which is not enough to reach 10A to 43A range on a consistent manner. If you need continuous high current capability, better cooling technique (e.g. air flow, water cooling, etc) should be employed.

Pinouts

Control Side

1. RPWM: Right Side Hi / Lo side Driver Enable (0=low side on, high side off; 1= high side on, low side off)
2. LPWM: Left Side Hi / Lo side Driver Enable (0=low side on, high side off; 1= high side on, low side off)
3. R_EN: Right Side Enable / PWM
4. L_EN: Left Side Enable / PWM
5. R_IS: Right side Current Sense
6. L_IS: Left side Current Sense
7. VCC: Logic VCC 3.0V/3.3V/5.0V Nominal (Can be 2.5V to 5.3V)

8. GND: 0V Logic Power Supply

Power Side

1. M-: Motor /Solenoid Negative Terminal
2. M+ : Motor /Solenoid Positive Terminal
3. B+: Battery Positive / High Current (Nominal: 8V – 18V, Extended: 5.5V – 28V)
4. B-: Battery Negative / High Current (0V)

How to use

Truth table

<i>R_EN + L_EN</i>	<i>RPWM</i>	<i>LPWM</i>	<i>MOTOR STATUS</i>
<i>PWM</i>	<i>DIR</i>	<i>DIR</i>	
0	X	X	OFF/STANDBY
1	0	0	Low Side-Breaking
1	0	1	CW Rotation
1	1	0	CCW Rotation
1	1	1	High Side-Breaking

Logic values explanation

- 1 = Logic High (3v to 5.0V)
- 0 = Logic Low (0v)
- x = Dont care (can be any value)

Connection scheme

- Connect RPWM with motor controller's CW output pin

- Connect LPWM with motor controller's CCW output pin
- Connect both R_EN and L_EN pins with motor controller's PWM output
- Connect Motor Controller GND with GND pin on P3 Header
- Connect Motor Controller VCC (3.0V/3.3V/5.0V) with VCC pin on P3 Header
- Supply 8V to 18V on B+ pin on P1 header
- Connect Motor between M+ and M- on P2 header
- Supply 0V on B- pin on P1 header

Applications

- Motor control for E-bikes, Segway
- 2Wheel drive / 4-Wheel drive robots requiring high torque
- High Torque Robotic Arms
- High Current Solenoids
- Inductive or Resistive Loads where PWM control and Current Direction reversal is needed

Apéndice B

Código MATLAB para el diseño de un controlador por realimentación del vector de estados mediante asignación de polos.

El siguiente código en MATLAB ejecuta el análisis de controlabilidad y el calculo del vector de ganancia de realimentación de estado K por el criteria de asignación de polos.

```

%% Matriz de espacio estado
%% MATRIZ A
clc
clear all
A = [0 1 0 0 0 0;
     0 0 -282338/47345 0 -12544/9469 0;
     0 0 0 1 0 0;
     0 0 1378860/9469 0 -807520/28407 0;
     0 0 0 0 0 1;
     0 0 -1352596/28407 0 863772/9469 0]
%%% MATRIZ B
B = [0;
     209000/9469;
     0;
     -4300000/28407;
     0;
     -1600000/28407]
%%% MATRIZ C
C = [1 0 0 0 0 0;
     0 0 1 0 0 0;
     0 0 0 0 1 0]
%%% MATRIZ D
D = [0;
     0;
     0]
Estados = {'posicion carro (X1P)' 'velocidad carro (X2P)' 'angulo eslabon1 (X3P)' 'velocidad angular eslabon1 (X4P)' 'angulo eslabon2 (X5P)' 'velocidad angular eslabon2 (X6P)'};
Entradas = {'u(t)'};
Salidas = {'posicion carro (X1P)' 'angulo eslabon1 (X3P)' 'angulo eslabon2 (X3P)'};
Matriz_Espacio_Estado =
ss(A,B,C,D,'statename',Estados,'inputname',Entradas,'outputname',Salidas)

% lazo abierto
figure(1)
step(A, B, C, D);
title('Respuesta del sistema a un step en lazo abierto')
grid on

%%% Polos de la planta

```

```
Polos_planta = eig(A) % c = eigen valores

%%% CONTROLABILIDAD
controlabilidad = ctrb(A,B); % controlabilidad
CONTROL1 = rank(controlabilidad)
%CANTIDAD_DE_ESTADOS_QUE_NO_SE_PUEDEN_CONTROLAR
NC1 = length(A) - rank(controlabilidad) %

%polos deseados
poloDes=[-20 -15 -10 -4 -3 -2]; %controlable

% calcula el valor de k controlable
K = place(A,B,poloDes)

Polos_planta_deseados = eig(A-B*K)

AmBK = A-B*K
% Tiempo continuo
SLC = ss(AmBK,B,C,D)
% Factor de escala N
N = dcgain(SLC)
```

Apéndice C

Código MATLAB para el diseño de un controlador LQR.

```

% MATRIZ A
clc
clear all
A = [0 1 0 0 0 0;
     0 0 -282338/47345 0 -12544/9469 0;
     0 0 0 1 0 0;
     0 0 1378860/9469 0 -807520/28407 0;
     0 0 0 0 0 1;
     0 0 -1352596/28407 0 863772/9469 0]

%%% MATRIZ B
B = [0;
     209000/9469;
     0;
     -4300000/28407;
     0;
     -1600000/28407]

%%% MATRIZ C
C = [1 0 0 0 0 0;
     0 0 1 0 0 0;
     0 0 0 0 1 0]

%%% MATRIZ D
D = [0;
     0;
     0]

%%% Polos de la planta
Polos_planta = eig(A)% c = eigen valores

%%Control LQR

Q = C'*C;
% Conversión grados a radianes para la posición
%de los eslabones

Api = degtorad(1)
Aps = degtorad(5)

%Asignando los valores deseados para las salidas
Q(1,1) = 1/(0.01^2);
Q(3,3) = 1/(Api^2)
Q(5,5) = 1/(Aps^2)
R=1;

%Hallando los valores de la ganancia K
K = lqr(A,B,Q,R)
Ac = [(A-B*K)];
Bc = [B];
Cc = [C];
Dc = [D];

```



```
estados = {'theta0' 'theta0_dot' 'theta1' 'theta1_dot' 'theta2'  
'theta2_dot'};  
entrada = {'r'};  
salidas = {'theta0'; 'theta1'; 'theta2'};  
  
%Creando la nueva matriz de espacio-estado  
sys_lqr=  
ss(Ac,Bc,Cc,Dc,'statename',estados,'inputname',entrada,'outputname',salidas);  
t = 0:0.01:5;
```

Apéndice D

Link de descarga cartillas PIDL versión digital:

<https://pedagogicaedu->

my.sharepoint.com/personal/dte_jgarcia660_pedagogica_edu_co/_layouts/15/guestaccess

.aspx?folderid=01959c5eb9425453184ac3c52aa1e7e8e&authkey=AfXhOu5_Y4HjoE4H

H-UxP_8

Nota: Al copiar el vinculo agregar manualmente el guion resaltado en amarillo.