ANÁLISIS DE UNA INNOVACIÓN EN LA FORMACIÓN DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS Y DE LA POSIBILIDAD DE TRANSFERENCIA A LA EDUCACIÓN BÁSICA Y MEDIA

ANDRÉS FELIPE CARVAJAL GÓMEZ
LAURA MARÍA MONROY HOYOS

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
BOGOTÁ, D. C.
2022

ANÁLISIS DE UNA INNOVACIÓN EN LA FORMACIÓN DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS Y DE LA POSIBILIDAD DE TRANSFERENCIA A LA EDUCACIÓN BÁSICA Y MEDIA

ANDRÉS FELIPE CARVAJAL GÓMEZ
LAURA MARÍA MONROY HOYOS

Trabajo de grado presentado como requisito parcial
para optar por el título de Licenciado en Matemáticas

Director:
Dr. ÉDGAR ALBERTO GUACANEME SUÁRES

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
BOGOTÁ, D. C.
2022

RESUMEN

Las problemáticas relacionadas con la enseñanza del Cálculo en la Educación Básica y Media como la falta de comprensión del contenido matemático y la actitud hacía el aprendizaje del mismo, se han visto reflejadas en los deficientes resultados académicos de los estudiantes en el área en cuestión. La preocupación latente en la comunidad de educadores matemáticos sobre estos resultados da lugar a diferentes propuestas que buscan replantear las formas en las que se enseña Cálculo. Sumados a esta preocupación, presentamos un estudio que pretende determinar la posibilidad de transferir una innovación curricular en la formación de profesores a la Educación Básica y Media. Para ello fue pertinente caracterizar dicha innovación junto con la propuesta curricular del Ministerio de Educación Nacional para esta área y determinar, a partir de las caracterizaciones, la compatibilidad de las propuestas. Aunque este estudio arrojó una respuesta negativa ante la transferencia planteada, fue posible generar reflexiones relacionadas con la formación de profesores de matemáticas y el desconocimiento de la política curricular de matemáticas en Colombia.

Palabras claves: pensamiento variacional, innovación curricular, enseñanza del Cálculo, paradigma, actividad demostrativa, modelación, currículo.

TABLA DE CONTENIDO

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE ANEXOS

INTRODUCCIÓN

El presente documento es resultado de un estudio que realizamos motivados en nuestro interés por buscar soluciones a una problemática que refiere a la enseñanza del Cálculo y a los resultados deficientes, en esta área, por parte de los estudiantes de la Educación Básica y Media. Como estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas (LM) de la Universidad Pedagógica Nacional (UPN) fuimos partícipes de los espacios académicos de la línea de Geometría, de los cuales nos llamó la atención la metodología empleada por los profesores para el desarrollo de estos, pues resulta interesante el cambio en la metodología, la evaluación, la secuenciación, los recursos y los propósitos, respecto a nuestro paso por la Educación Básica y Media, y respecto a los demás espacios académicos de nuestra formación para profesores de matemáticas. Teniendo en cuenta lo anterior, nos cuestionamos acerca de la posibilidad de transferir la metodología empleada en los cursos de Geometría de la LM titulada innovación curricular y propuesta por el equipo de investigación *Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría* (*Æ•G)*, a la enseñanza del Cálculo en la Educación Básica y Media.

Con esto en mente, hemos estructurado el documento en función de seis capítulos:

En el primer capítulo se presentan los aspectos generales de nuestro estudio, haciendo una descripción de la problemática; también, se expone la justificación del trabajo que plantea la pertinencia de este y, finalmente, se presentan los objetivos que buscan responder el cuestionamiento inicial.

Proponemos, en el segundo capítulo, una caracterización de la innovación curricular del equipo de investigación *Æ•G* en términos de sus elementos centrales. Para ello, se elaboró un marco de referencia acerca de los conceptos de innovación y currículo educativo, de tal forma que contribuyeran a observar los cambios que la innovación implicó y a establecer que la propuesta, efectivamente, se trata de una innovación centrada en cambios curriculares.

Posteriormente, se expone una aproximación panorámica al currículo de matemáticas en Colombia desde la segunda mitad del *siglo XX* en la cual se registran elementos importantes que permiten acercarse a los aspectos principales que describen la enseñanza del Cálculo en el país. Consecuencia de esto, identificamos una problemática de orden curricular que generó en nuestro trabajo un cambio importante. La aproximación lograda y la problemática en mención conforman el tercer capítulo.

Consecuencia de la problemática expuesta en el tercer capítulo, proponemos, en el cuarto capítulo, una caracterización del pensamiento variacional y de los sistemas algebraicos y analíticos[1] a partir de seis elementos; la variación y el cambio, las situaciones problema, la modelación, el razonamiento algebraico, los sistemas de representación y las tecnologías computacionales, y el contenido matemático. En el quinto capítulo, analizamos la compatibilidad entre la propuesta del MEN, relacionada con el pensamiento variacional, y la innovación curricular del equipo de investigación *Æ•G*.

Finalmente, en el sexto capítulo mostramos las conclusiones referidas al nivel de alcance de los objetivos planteados para este estudio y algunas reflexiones que surgen a partir de la respuesta al cuestionamiento principal, en relación con nuestra formación y nuestro quehacer docente.

[1] En adelante, nos referiremos al pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos solo como pensamiento variacional.

CAPÍTULO 1
ASPECTOS GENERALES DEL ESTUDIO

En este capítulo, se presentan los aspectos generales bajo los cuales se estructura el estudio presentado en este trabajo. En primer lugar, se expone la descripción de la problemática que se relaciona con implementar en las aulas metodologías aprendidas por los profesores en su etapa formativa y, respecto de ello, se plantea una inquietud referida a la posibilidad de llevar una propuesta universitaria para el aprendizaje de la Geometría, a la enseñanza del Cálculo en la Educación Básica y Media. En segundo lugar, se muestra la justificación del trabajo que responde al por qué este estudio es pertinente para la Educación Matemática en Colombia y, finalmente, se presentan el objetivo general y los objetivos específicos del estudio.

1.1 DESCRIPCIÓN DE LA PROBLEMÁTICA

A lo largo de nuestra experiencia como estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas (LM) de la Universidad Pedagógica Nacional (UPN) fue posible evidenciar los distintos metodologías de enseñanza y aprendizaje empleados por los profesores en el desarrollo de sus clases. Entre estos, destacamos la metodología aplicada en varios de los espacios académicos o cursos de la línea de formación en Geometría, debido a que, al haber estado bajo la influencia del modelo tradicional empleado por las instituciones de Educación Básica y Media de las que fuimos parte en calidad de estudiantes, logramos advertir un cambio significativo en la manera de enseñar y aprender matemáticas en tales espacios

Dicha metodología es resultado de las investigaciones e innovaciones realizadas por el equipo de investigación *Æ•G*, adscrito al Departamento de Matemáticas (DMA) de la UPN. La metodología en cuestión se ha venido desarrollando desde el año 2004 hasta la actualidad (Camargo, Echeverry, Molina, Perry & Samper, 2008) y tiene como propósito principal la formación de una empresa académica en pro de aprender a demostrar, impulsando la producción de argumentos formales e informales, entre los que se destacan los deductivos y los abductivos e inductivos, respectivamente (Molina & Samper, 2019). Para aprender a demostrar se hace pertinente, a grandes rasgos, la construcción de un sistema teórico local, el uso de un entorno de geometría dinámica (EGD) y la interacción social entre el profesor y los estudiantes y entre los estudiantes mismos (Camargo et al, 2008). El impacto que genera el desarrollo de esta propuesta, desde nuestro punto de vista, es realmente importante, pues la experiencia del aprendizaje de las matemáticas en el marco de la LM se convierte en agradable y motivadora. Esto también lo evidencian los trabajos de grado en la LM de la UPN, relacionados con el área de Geometría, por ejemplo, los elaborados por Calderón & Tamayo (2016), Cano (2020), Velandia & Miranda (2014), entre otros, debido a que tienen en cuenta aspectos de la metodología en sus propuestas.

Por otra parte, es notorio que los recién egresados de programas profesionales de educación, empleen, en el desarrollo de sus clases, metodologías de enseñanza en los que estuvieron inmersos, es decir, que enseñen de la misma manera en la que aprendieron (Ventura, 2016). En este sentido, nosotros, como futuros profesores de matemáticas, nos encontramos interesados en emplear, en nuestro quehacer docente, la metodología mencionada con anterioridad. No obstante, nos inquieta saber si es o no posible emplear dicha metodología en otras áreas del conocimiento matemático, diferentes de la Geometría, particularmente en la enseñanza del Cálculo en la Educación Básica y Media.

1.2 JUSTIFICACIÓN

En la política curricular colombiana se establecen los planteamientos curriculares para la enseñanza de las matemáticas. Tales planteamientos están registrados, en esencia, en dos documentos producidos por el Ministerio de Educación Nacional: Lineamientos Curriculares en Matemáticas (MEN, 1998), en adelante LC, y Estándares Básicos de Competencias (MEN, 2006), en adelante EBC. A través de estos se establece que uno de los objetivos principales de la enseñanza de las matemáticas es formar ciudadanos matemáticamente competentes. Para esto, se requiere desarrollar efectivamente aprendizaje de los cinco procesos generales establecidos por el MEN, a saber: formular y resolver problemas; modelar procesos y fenómenos de la realidad; comunicar; razonar; y, formular, comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos (MEN, 2006). Además, ser matemáticamente competente se relaciona estrechamente con el desarrollo del pensamiento matemático, el cual, según los LC (MEN, 1998), se divide en cinco tipos: el pensamiento numérico y sistemas numéricos, el pensamiento espacial y sistemas geométricos, el pensamiento métrico y sistemas de medida, el pensamiento aleatorio y sistemas de datos, y el pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos.

Dicha división atiende, entre otras razones, al desarrollo histórico del estudio de las matemáticas. En primer lugar, las concepciones griegas y medievales del hacer matemáticas en relación con el número y con el espacio, dan lugar al pensamiento numérico y al pensamiento espacial. Posteriormente, se evidenció que las nociones métricas eran aplicables a otras áreas, como la Física y la Química, por lo que se vio necesario diferenciar el pensamiento métrico del espacial y del numérico. Finalmente, mediante el avance de las teorías relacionadas con la Probabilidad y con el Cálculo Integral y Diferencial en el *siglo XVII*, junto con la observación de la presencia de algunas falencias en los estudiantes (vinculadas al uso e interpretación de algunos conceptos de aleatoriedad y variación), resultó pertinente distinguir los pensamientos aleatorio y variacional, de los otros tres mencionados anteriormente (MEN, 2006).

Por otro lado, el desarrollo del pensamiento variacional se hace imprescindible en la formación de sujetos matemáticamente competentes. Dicho pensamiento alude, según el MEN (2006), al incremento de habilidades vinculadas a la identificación, modelación y representación de situaciones ubicadas en diferentes contextos, en los que hace presencia la variación o el cambio. Además, Vasco (2006) menciona que “el principal propósito del pensamiento variacional es pues la modelación matemática. No es propiamente la resolución de problemas ni de ejercicios; al contrario, para mí, los mejores problemas o ejercicios deberían ser desafíos o retos de modelar algún proceso” (p. 7). Por su parte, Villa-Ochoa (2010, como se citó en Gómez, 2013) menciona que el desarrollo del pensamiento variacional no debe estar limitado únicamente a la modelación matemática.

Cualquiera que sea el enfoque seleccionado, el desarrollo del pensamiento variacional se considera como un proceso paulatino y arduo (MEN, 2006); esta condición, sumada a la actitud negativa que han construido muchos estudiantes respecto de las matemáticas, a la creencia errónea de que aprender es memorizar, a las prácticas poco innovadoras por parte de los profesores (Artigue, 1995), y a la anquilosada idea de que en la Educación Media hay que enseñar Cálculo, obstaculizan el adecuado desarrollo de este pensamiento a lo largo de la escolaridad.

Buena parte de la problemática referida se ha centralizado en la enseñanza del Cálculo; una perspectiva de dicha problemática es denominada por Alanís & Salinas (2009) como el paradigma tradicional en la enseñanza del Cálculo, quienes lo perciben como una consecuencia de la ejecución de ciertos modelos docentes en el aula, de los cuales haremos alusión en seguida.

Gascón (2001) menciona que los modelos docentes subyacen de modelos epistemológicos implícitos en la institución escolar, los cuales influyen directamente en la organización y gestión del proceso de enseñanza de las matemáticas. En el caso del paradigma tradicional de la enseñanza del Cálculo, Alanís & Salinas (2009) señalan que el modelo epistemológico que sobresale es el *euclidianismo,* que se percibe a las matemáticas como una teórica científica, es decir, plantea la organización del conocimiento matemático de forma lógica y fundamentada. Dicho modelo epistemológico da lugar a dos modelos docentes, por un lado, el *teoricismo* que se refiere a la enseñanza de las matemáticas como la presentación de teorías cristalizadas, y, por otro lado, el *tecnicismo* que reduce la enseñanza de las matemáticas a la enseñanza de técnicas algorítmicas.

No obstante, ante la problemática de reducir la enseñanza de las matemáticas a la enseñanza de técnicas algorítmicas o a la enseñanza de teorías cristalizadas, diferentes autores han mostrado una posibilidad de cambio en la enseñanza del Cálculo que se lleva a cabo a partir del reconocimiento de la historia del conocimiento y mediante la atención a las concepciones socioepistemológicas (Alanís & Salinas, 2009); estas apuestas se acompañan de propuestas que sugieren estrategias didácticas centradas en el estudiante (y específicamente en su actividad como aprendiz) y en el uso de tecnologías computacionales. Sin embargo, la implementación de estas en el aula no ha sido suficientemente efectiva, debido a factores como el contexto, la disponibilidad de materiales y herramientas en la institución e incluso por el desconocimiento de estas mismas estrategias por los profesores de matemáticas.

Ahora bien, como se mencionó al comienzo (en la descripción de la problemática), el objetivo principal de la metodología de enseñanza propuesto por el equipo de investigación *Æ•G* es fomentar la actividad demostrativa. Coincidencialmente, en la actividad matemática que promueve el desarrollo del pensamiento variacional “se dan múltiples oportunidades para la formulación de conjeturas, la puesta a prueba de estas, su generalización y la argumentación para sustentar o refutar una conjetura o una propuesta de generalización” (MEN, 2006, p. 68). Por tanto, es evidente la similitud entre dicho objetivo de la metodología de enseñanza empleada por el equipo de investigación en los cursos de Geometría y lo expresado por el MEN. Así, esta coincidencia se convierte en un sustento que respalda nuestro interés por relacionar tal modelo, con el desarrollo del pensamiento variacional y la enseñanza del Cálculo y delimita nuestro interés en establecer si es o no necesario y posible, realizar adaptaciones al modelo con el fin de proponer una alternativa de cambio, puesto que desde nuestra experiencia personal, en algunas instituciones educativas del país se observa, con seguridad, la existencia del paradigma tradicional en la enseñanza del Cálculo.

1.3 OBJETIVOS

1.3.1 Objetivo General

Determinar si la innovación curricular propuesta por el equipo de investigación *Æ•G*, es transferible a la enseñanza del Cálculo en la Educación Básica y Media.

1.3.2 Objetivos Específicos

- Caracterizar la innovación curricular empleada en algunos de los cursos de Geometría de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional y determinar sus elementos centrales.
- Identificar los elementos centrales propuestos por el Ministerio de Educación Nacional relacionados con el desarrollo del pensamiento variacional.
- Precisar las condiciones que se requieren para determinar, según sea el caso, la afinidad o incompatibilidad de emplear la innovación curricular del equipo *Æ•G* como derrotero para la enseñanza del Cálculo en la Educación Básica y Media.

CAPÍTULO 2

CARACTERIZACIÓN DE LA INNOVACIÓN CURRICULAR DEL EQUIPO DE INVESTIGACIÓN *Æ•Ǥ*

Este capítulo aborda los referentes teóricos que tienen relación con la innovación curricular propuesta por el equipo de investigación *Æ•Ǥ*, aludiendo, en primer lugar, al concepto de *innovación* a partir de las posturas de diferentes autores; en segundo lugar, bajo la misma estructura se aborda el concepto de *currículo educativo*; y, en tercer lugar, se caracteriza la *innovación curricular* en mención, en términos de los elementos que la constituyen a partir de nuestra propia interpretación. Finalmente, se analiza la innovación curricular propuesta por el equipo de investigación *Æ•Ǥ* y se determinan los cambios que esta suscitó en relación con los componentes de un currículo según De Zubiría (2002, como se citó en López, 2019).

2.1 CONCEPTO DE INNOVACIÓN

El concepto de innovación surgió alrededor de los inicios del *siglo XIX*. Una de las primeras personas en hablar de este fue el economista francés Jean Baptiste Say en 1803, quien, según Defelipe et al (2013), lo entiende como la acción de producir riqueza, la cual se consigue por la acción creadora del trabajo. Con el transcurso del tiempo, el concepto sufrió cambios en cuanto a su definición, manteniéndose sus acepciones fundamentalmente en un contexto económico. Diversos autores han propuesto diferentes definiciones.

Joseph A. Schumpeter (1883-1950), economista austriaco, reconocido por sus trabajos relacionados con la teoría de la economía evolucionista y por ser pionero en nombrar la importancia de los fenómenos tecnológicos en la economía, propone en 1934 una definición de innovación más rigurosa que las de sus predecesores, a saber: "la introducción en el mercado de un nuevo producto o proceso, capaz de aportar algún elemento diferenciador, la apertura de un nuevo mercado o el descubrimiento de una nueva fuente de materias primas o productos intermedios" (Muñoz & Espinosa, 2018, p. 214). Además, Cilleruelo, Sánchez y Begoña, (2008) mencionan que dicha definición comprende cinco casos:

- La introducción en el mercado de un nuevo bien, es decir, un bien con el cual los consumidores no están familiarizados, o de una nueva clase de bienes.

- La introducción de un nuevo método de producción, es decir, un método aún no experimentado en la rama de la industria afectada, que requiere fundamentarse en un nuevo descubrimiento científico.
- La apertura de un nuevo mercado en un país, tanto si el mercado ya existía en otro país como si no existía.
- La conquista de una nueva fuente de suministro de materias primas o de productos semielaborados, nuevamente sin tener en cuenta si esta fuente ya existe, o bien ha de ser creada de nuevo.
- La implantación de una nueva estructura en un mercado, como, por ejemplo, la creación de una posición de monopolio.

Por otra parte, Nelson & Winter (1982) mencionan, de manera más general, que el concepto de innovación está relacionado con un cambio en la rutina, es decir, con cambios que alteran la forma determinada de hacer las cosas, para generar el desarrollo de nuevas capacidades.

Perrin (1995, como se citó en Jimeno, 2020), señala que “la innovación puede definirse como formas nuevas de hacer las cosas mejor o de manera diferente, muchas veces por medio de saltos cuánticos, en oposición a ganancias incrementales” (p. 13). Cilleruelo (2008) explica que los saltos cuánticos pueden entenderse como cambios tecnológicos que surgen debido a la aparición de una nueva tecnología, de tal forma que sustituya una existente.

La Comisión Europea (1995), en el “Libro Verde de la Innovación”, establece que la innovación es el acto de producir, asimilar y explotar una idea con éxito en ámbitos económicos y sociales, de modo que produzca soluciones a diversos problemas, contribuyendo así a responder a las necesidades de las personas y la sociedad.

En el “Sexto Congreso de Economía de Navarra”, Mulat (2005) menciona que el concepto de innovación se puede considerar como todo cambio que genera valor, sin embargo, añade que, al ser esta definición muy general, es preciso limitarla; define entonces la innovación como “el resultado de un proceso complejo que lleva nuevas ideas al mercado en forma de productos o servicios y de sus procesos de producción o provisión, que son nuevos o significativamente mejorados” (Mulat, 2005, p. 21).

La mayoría de las definiciones mostradas con anterioridad, sintetizadas de manera esquemática en la Tabla 1, tienen dos aspectos en común. Por un lado, la innovación pretende tomar ideas o procesos ya existentes y mejorarlos; por otro lado, esta se realiza con la intención de generar resultados diferentes como el desarrollo de nuevas capacidades o para suplir las necesidades de las personas y la sociedad. Es preciso mencionar que estos aspectos en común corresponden a un punto de vista relacionado con el pensamiento de Schumpeter, quien considera la innovación como un proceso que hace referencia a una serie de acciones para obtener algo nuevo, enfatizando con ello la diferencia entre la innovación como proceso e innovación como objetivo (Palacios, 2008).

Tabla 1

Síntesis de las definiciones de innovación analizadas

Aspectos Autor u obra	Ideas ya existentes mejoradas o ideas nuevas	Generar resultados diferentes
Jean Baptiste Say	-	Producción de la riqueza
Schumpeter (1934, citado en Palacios, 2008)	Las ideas se someten a un proceso de renovación	Elementos diferenciadores, apertura de nuevo mercado, descubrimientos
Nelson y Winter (1982)	Cambios en la rutina	Desarrollo de nuevas capacidades
Perrin (1995)	Formas nuevas de hacer las cosas de mejor manera	-
Comisión Europea (1995)	Producir, asimilar y explotar una idea	Soluciones a diversos problemas de la esfera social
Mulat (2005)	Nuevas ideas llevadas al mercado	Cambio que genera valor

En este sentido, para el desarrollo de la caracterización objeto de este capítulo, adoptamos el pensamiento de Schumpeter, por lo que, en consecuencia, es importante resaltar que entre la innovación y la invención existe una gran diferencia. Aunque en muchas ocasiones se han considerado los dos conceptos como sinónimos, deben diferenciarse, pues uno hace parte del otro; inventar corresponde al surgimiento de un prototipo o desarrollo funcional que permita solucionar un problema, por medio de la ejecución de las funciones para las que fue diseñado (Cilleruelo et al, 2008). Dicho de otra forma, inventar consiste en la creación, el diseño o la producción de algo que es novedoso y que antes no existía. Por otro lado, innovar consiste en ejecutar de manera cuidadosa esos inventos en la práctica. De esta forma, es evidente que la innovación contempla las fases citadas y otras (*e.g.*, idea, generación de conocimiento, invención, industrialización, comercialización). Así, de manera más detallada, la innovación es:

> El resultado original exitoso aplicable a cualquier ámbito de la sociedad, que supone un salto cuántico no incremental, y es fruto de la ejecución de un proceso no determinista que comienza con una idea y evoluciona por diferentes estadios; generación de conocimiento, invención, industrialización y comercialización, y que está apoyado en un paradigma organizacional favorable, en el que la tecnología supone un papel preponderante, y el contexto social en el que se valora la inversión en creación de conocimiento una condición necesaria. (Cilleruelo et al, 2008, p. 64)

Bajo la perspectiva de esta definición y de otras como la propuesta por la Comisión Europea (1995), relacionadas ambas con el pensamiento de Schumpeter, es posible comprender la innovación en cualquier ámbito de la sociedad y no solamente en el ámbito económico. En este caso, es de nuestro interés particularizar la innovación en el ámbito educativo, razón por la cual, es preciso hacer referencia a algunas de las concepciones de *innovación educativa* que establecen diferentes autores, de manera tal que los distintos puntos de vista enriquezcan el análisis que se hará al final de este capítulo.

En este sentido, Escudero (1988) señala que la innovación educativa consiste:

> … en una batalla a la realidad tal cual es, a lo mecánico, rutinario y usual, a la fuerza de los hechos y al peso de la inercia. Supone, pues, una apuesta por lo colectivamente construido como deseable, por la imaginación creadora, por la transformación de lo existente. Reclama, en suma, la apertura de una rendija utópica en el seno de un sistema que, como el educativo, disfruta de un exceso de tradición, perpetuación y conservación del pasado. (...) innovación equivale, ha de equivaler, a un determinado clima en todo el sistema educativo que, desde la Administración a los profesores y alumnos, propicie la disposición a indagar, descubrir, reflexionar, criticar ... cambiar. (p. 88).

Por otro lado, Sein-Echaluce et al (2017) entienden la innovación educativa como “la aplicación de una idea que produce un cambio planificado en los procesos educativos, servicios o productos, que luego conducen a una mejora en la metas” (p. 596).

Imbernón (1996) comenta que la innovación educativa es “el proceso de indagación de nuevas ideas, propuestas y aportaciones, efectuadas de manera colectiva, para la solución de situaciones problemáticas de la práctica, lo que comportará un cambio en los contextos y en la práctica institucional de la educación” (p. 64).

Por último, Jiménez (1995) propone que la innovación educativa refiere a un proceso de acción, de carácter organizativo y didáctico, que se enfoca en la mejora de la calidad de la enseñanza, en particular, y del sistema educativo, en general.

Es indispensable tener en cuenta que, al hablar de innovación educativa, se hace referencia, particularmente, a cambios y mejoras en el entorno educativo, que son llevados a cabo a partir de un trabajo colectivo mediante el cual se realiza una búsqueda de ideas nuevas, en pro de brindar soluciones a situaciones problemáticas. En este sentido, consideramos la innovación educativa como lo antedicho, añadiendo que esta consideración, se corresponde con la definición de innovación propuesta por Cilleruelo et al (2008) puesto que en esencia, es evidente el desarrollo en fases de una innovación educativa, lo mismo que sucede con la definición de innovación señalada. Así la innovación educativa inicia con una *idea* centrada en un cambio o mejora la cual es sometida, para su evolución, a los estadios: *generación de conocimiento* o adquisición de conocimientos por una organización sean nuevos o no; *invención* o creación de un prototipo o desarrollo funcional para la solución de una problemática; *industrialización* o aplicación de cambios y mejoras llevadas a cabo con el trabajo colectivo; y *comercialización*.

Dependiendo de los tipos de alteraciones o cambios que se pretendan ejecutar, se han elaborado distintas categorizaciones de las innovaciones educativas: Elmore (1990, como se citó en Margalef & Arenas, 2006), establece que estos cambios corresponden a: (i) cambios estructurales que afectan al sistema educativo, por ejemplo, la situación ocupacional de los maestros, el licenciamiento de la escuela, las condiciones de trabajo, (ii) cambios curriculares, es decir, cambios en la enseñanza y el aprendizaje, la técnica central de escolarización o en las metodologías empleadas; y, (iii) cambios profesionales referidos a la formación, selección y desarrollo profesional de los docentes, relacionados específicamente con la distribución del poder en las instituciones, entre otros.

Para alcanzar los objetivos propuestos en este trabajo, nos enfocaremos en aquellos cambios que modifican la metodología de enseñanza y que alteran los elementos del currículo, es decir, en los cambios curriculares. Dichos cambios, coinciden con lo que CEUB (2014) considera como innovación curricular; en consecuencia, se puede considerar una innovación curricular como una innovación educativa centralizada en cambios curriculares.

Con el fin de generar un marco referencial para la identificación y el análisis de las innovaciones educativas, Blanco y Messina (2000, como se citó en Rimari, 2008), proponen una serie de criterios que debe satisfacer toda innovación educativa; seleccionamos, a nuestro juicio, algunos criterios que son importantes para identificar una innovación educativa centralizada en cambios curriculares, a saber:

a. *La innovación supone transformación y cambio cualitativo significativo, no simplemente mejora o ajuste del sistema vigente*. En este criterio, es preciso tener en cuenta que, aunque la innovación implica cambio, no todo cambio es una innovación. La innovación busca transformación respecto a la situación inicial de componentes o estructuras esenciales del proceso educativo. Si bien usar nuevos recursos didácticos, implementar nuevas tecnologías en el aula y considerar elementos didácticos que no se consideraban anteriormente, suponen cambios, para que estos lleguen a considerarse innovación, deben producir cambios significativos frente a la rutina tradicional en la escuela.
b. *Una innovación no es necesariamente una invención, pero sí algo nuevo que propicia un avance en el sistema hacia su plenitud, un nuevo orden o sistema*. Este principio coincide con la ya mencionada diferencia entre innovar e inventar referida por Cilleruelo et al (2008). Otra distinción importante entre los dos conceptos es que las trasformaciones o cambios producto de innovaciones no son necesariamente invenciones, sino que más bien, estas transformaciones buscan algo cualitativamente distinto o nuevo respecto a lo existente, por lo tanto, las innovaciones implican un nuevo modelo, orden o enfoque, una forma distinta de organizar y relacionar los componentes objeto de la innovación (Rimari, 2008, p. 13).
c. *La innovación no es un fin en sí misma sino un medio para mejorar los fines de la educación*. Varias reformas educativas tienen como objetivo mejorar la calidad y la equidad en el sistema educativo, sin embargo, es la innovación la que se centra especialmente en el mejoramiento de la calidad de la educación, más que la equidad.
d. *La innovación implica una intencionalidad o intervención deliberada y, en consecuencia, ha de ser planificada*. La planeación es el elemento principal que diferencia una innovación de

un cambio general. La innovación requiere ser planificada y debe tener una intencionalidad clara, de lo contrario, no puede ser considerada como tal.

2.2 CURRÍCULO EDUCATIVO

Dado que, como se mencionó con anterioridad, uno de los ámbitos de la innovación educativa se relaciona con cambios curriculares afines a su diseño y desarrollo, se hace preciso realizar una mirada al concepto de *currículo* y al de *currículo en matemáticas*.

Vílchez (2004) establece que fueron las universidades calvinistas de Holanda y Escocia las que brindaron por primera vez una doble definición de currículo dependiente de dos puntos de vista; uno, desde la posición del cuerpo estudiantil, referente al curso multianual que debía seguir cada estudiante para titularse y, el otro, desde la perspectiva de las instituciones en relación con la organización sistémica de las asignaturas de cada carrera. Estas concepciones estaban limitadas a la esfera escolar o universitaria; en el *siglo XIX* dicha limitación cambió y el currículo se empezó a entender en términos de regulaciones nacionales.

Por otra parte, el autor también señala que la división en disciplinas pedagógicas del conocimiento (*i.e*., Historia, Aritmética, Literatura, Educación Física, entre otras), la determinación de los niveles escolares y la asignación de títulos, fueron necesarios para la concepción que se tiene actualmente de currículo educativo. En este sentido, tomando a la pedagogía como un todo, se encuentran en orden el currículo, la didáctica y el aprendizaje; el currículo cumple el papel de mediador entre la pedagogía y la didáctica

Ahora bien, son diversas las definiciones y concepciones que se han propuesto alrededor del concepto de currículo, entre las que se encuentra la expuesta por Tyler (1973, como se citó en Angulo, 1994), quien establece, por una parte, que una definición restringida de currículo lo asume como un curso de estudio y, por otra parte, una concepción más amplia de este, lo considera como “todo aquello que transpira en la planificación, la enseñanza y el aprendizaje de una institución educativa” (p. 18). En consecuencia, el currículo comprende aquellas motivaciones que impulsan a la actuación, así como a las actuaciones mismas; dicho de otra forma, el currículo se desarrolla y transita entre un medio prescriptivo y uno interactivo.

Otra definición interesante de currículo es la planteada por Vílchez (2004), en la que señala que:

> [El] currículo es el conjunto de aprendizajes compartidos que la escuela, deliberada y espontáneamente, pone a disposición de estudiantes y maestros para que desarrollen plenamente sus potencialidades y participen en el proceso constante de transformación vital. Incluye el plan de enseñanza más la atmósfera escolar, al tiempo que es también proceso y resultado. (p. 201).

Este autor considera que es un *conjunto de aprendizajes* debido a que el currículo debe interpretarse como algo plural en lugar de singular, ya que este compromete dos o más experiencias de aprendizaje junto con la relación que se funda entre ellas. Este conjunto es *compartido* porque tanto estudiantes como profesores aprenden en el acto educativo. Es *deliberado y espontaneo,* puesto que los aprendizajes adquiridos no se limitan únicamente a lo establecido y programado en el plan de estudios llevado a cabo en los salones y laboratorios, sino que también son adquiridos o producto de la relación con sus pares y profesores, de los ambientes físicos (*e.g.*, biblioteca, canchas deportivas y pasillos) y, en general, del acto de estar inmersos en un entorno escolar.

Además, Tyler (como se citó en Alpírez et al, 1984), establece una caracterización del currículo en cuatro componentes. En primer lugar, *la definición de objetivos* que desea alcanzar la institución; estos deben formularse teniendo en cuenta tres aspectos, (i) las necesidades e intereses de los educandos, (ii) los elementos relacionados con la cultura y (iii) la sociedad en la que se encuentra inmerso. En segundo lugar, *la selección de actividades de aprendizaje* que se puede entender como el contenido; estas deben ser seleccionadas con base en fundamentos pedagógicos y en pro del alcance de los objetivos, además deben cumplir una coherencia vertical y horizontal, en relación con cada uno de los niveles educativos. En tercer lugar, *la organización de la experiencia de aprendizaje* que puede interpretarse como la metodología, referente al cómo se suministrarán los contenidos. Por último, *la evaluación de las experiencias,* en la que es necesario estimar el nivel de alcance de los objetivos, a partir de los cambios de comportamiento de los involucrados en el acto educativo.

En relación con lo anterior, De Zubiría (2002, como se citó en López, 2019), plantea la caracterización del currículo bajo seis componentes relacionados, en cierta medida, con los mencionados por Tyler. Cada uno de los componentes pretende dar respuesta a una pregunta diferente. En la Tabla 2 se muestra, a grandes rasgos, en qué consiste cada uno de ellos:

Tabla 2

Componentes del currículo según Julián de Zubiría

Componentes	Pregunta que busca responder	Consideraciones
Propósitos educativos	¿Para qué enseñar?	Para responder la pregunta debe tenerse en cuenta qué tipo de ciudadano se desea formar. Los propósitos deben garantizar la coherencia en los procesos de la formación de la persona.
Contenidos	¿Qué enseñar?	Es necesario contemplar la pertinencia de los contenidos; además, estos deben conservar un orden y deben estar jerarquizados en los procesos de formación.
Secuenciación	¿Cuándo enseñar?	Se hace importante tener en cuenta los niveles de complejidad de cada nivel de formación.
Metodología	¿Cómo enseñar?	Se presta atención al cómo se aprende y a la relación entre el estudiante, el docente y los saberes. Los fines, los contenidos y la secuenciación son elementos imprescindibles para la reflexión metodológica y curricular.
Recursos	¿Con qué enseñar?	Para dar respuesta a esta pregunta deben tenerse en cuenta tres criterios; su propósito, el juicio de elección del recurso y la realidad contextual.
Evaluación	¿Se aprendió?	Se busca responder a la pregunta a partir de la revisión y valoración de las acciones realizadas con el fin de emitir un juicio de valor que permita tomar decisiones.

Por otra parte, Rico (2014) establece que el currículo es un “Sistema organizado de conceptos relacionados, que atienden a las funciones básicas y fundamentales de un sistema educativo". Además, para él el currículo en matemáticas es el "plan de formación en matemáticas para los niños, jóvenes y adultos de un país, que tiene lugar en el Sistema Educativo, cuya puesta en práctica corresponde a profesores y especialistas, y del cual es parte destacable la Educación Obligatoria" (Rico,1998, p. 7). También señala, *grosso modo*, que para su diseño: debe darse una discusión acerca del conocimiento matemático; debe fundamentarse en una teoría o esquema conceptual; debe examinar en qué consiste la enseñanza de las matemáticas y las formas en las que esta se puede llevar a cabo; y, finalmente, se debe considerar la utilidad y pertinencia de dicho conocimiento. La concepción de currículo que adaptaremos en este trabajo corresponde a la dada por Rico (1998).

2.3 INNOVACIÓN CURRICULAR DEL EQUIPO DE INVESTIGACIÓN *Æ•G*

La LM de la UPN es un programa de formación de profesores de matemáticas para la Educación Básica, Secundaria y Media. La estructura del programa curricular está conformada por los ciclos de fundamentación y profundización, los cuales se encuentran constituidos por cuatro ejes que reúnen distintos espacios académicos relacionados con Álgebra, Geometría, Cálculo, y Estadística y Probabilidad; distribuidos en las líneas de formación en matemáticas y formación en pedagogía y didáctica.

Particularmente, la línea de Geometría en el ciclo de fundamentación, contempla hoy los cursos: Elementos de Geometría, Geometría Plana, Geometría del Espacio y Geometría Analítica. Debido a una serie de factores que se mencionarán posteriormente, en el año 2004 se hizo la estructuración del currículo de esta línea, en la que el equipo de investigación *Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría* (*Æ•G*) llevó a cabo la implementación de una innovación curricular con la conformación e implementación del curso de Elementos de Geometría y con la modificación curricular realizada al curso de Geometría Plana.

Una de las motivaciones que impulsó al equipo a realizar esta innovación curricular se centra en el cuestionamiento relacionado con qué tipo de ideas de demostración y de práctica demostrativa desarrollaban los estudiantes como producto de este curso. Precedente a la innovación, el profesor suministraba a los estudiantes un sistema axiomático basado en el texto guía del curso, mientras que los estudiantes se encargaban de estudiar de manera independiente el texto e imitaban demostraciones a partir de los ejemplos que allí se mostraban y que el docente proporcionaba. De este modo, las ideas que desarrollaban los estudiantes se encontraban ligadas a la creencia de que la demostración solo podría ser realizada por un experto, en cuanto se pensaba que el propósito de la demostración se reduce a validar un enunciado sin tener claro, en algunos casos, su significado (Camargo et al, 2013).

En este sentido, el equipo se vio impulsado a realizar la innovación curricular teniendo en cuenta otros asuntos relacionados, por un lado, con la formación de los futuros profesores de matemáticas y con la doble responsabilidad que esto conlleva, puesto que es necesario que los estudiantes desarrollen dos tipos de capacidades: de acción en contextos matemáticos y de generación de entornos de aprendizaje de las matemáticas escolares. Estas capacidades se obtienen como consecuencia del tipo de experiencias de aprendizaje en las que se encuentren inmersos los futuros profesores de matemáticas a lo largo de los cursos que ofrece el programa. Lo anterior, condujo a que el equipo se diera a la tarea de "revisar e introducir cambios en la meta y objetivos del curso Geometría plana, en el tipo de tareas propuestas a los estudiantes, en la gestión del contenido, y en el tipo de interacción social en el aula" (Camargo et al, 2008, p. 3).

Por otro lado, asignar el rol central de la práctica demostrativa en la labor matemática, implica que es imposible la formación matemática sin haber experimentado la actividad demostrativa. Esto tuvo como resultado que algunos de los cambios propuestos para la innovación, estuvieran relacionados con la conformación de experiencias que contribuyeran a la adquisición de aprendizajes significativos sobre tal actividad.

Los resultados deficientes de la formación matemática en los diferentes niveles de escolaridad también fueron un motivo para implementar esta innovación, por lo que fue necesario reconocer la importancia y necesidad de buscar estrategias de enseñanza para el tratamiento de esta problemática. Camargo et al. (2008) señalan que, para abordarla, es preciso tener en cuenta que esta se relaciona con la enseñanza y el aprendizaje de la demostración, debido a que, en las escuelas de Educación Básica Secundaria y Media, se ha dejado de lado esta práctica como consecuencia del reconocimiento de la complejidad misma del aprendizaje de la demostración. Este reconocimiento también hace parte de los motivos que impulsan el diseño de la innovación, debido a que el equipo considera que el aprendizaje de la demostración no puede estar únicamente bajo la responsabilidad del estudiante, sino que el profesor debe apoyar sistemáticamente a los estudiantes en su proceso de aprendizaje. Por último, el reconocimiento de que el uso de la geometría dinámica no pone en peligro la enseñanza de la demostración, sino que la favorece, permitió al equipo establecer que, con tareas geométricas bien diseñadas, la geometría dinámica se convierte en una herramienta de mediación para el aprendizaje de la demostración.

En este sentido, la innovación tiene como propósito "generar para los estudiantes un espacio y una oportunidad de aprendizaje de la demostración en Geometría euclidiana, no solo desde el punto de vista disciplinar de las matemáticas, sino también desde el punto de vista pedagógico" (Molina & Samper, 2013, p. 25). El objetivo general se enfoca en que los estudiantes aumenten su perspectiva de la demostración al mismo tiempo que aprenden a demostrar, que interpreten esta actividad como fundamental en el quehacer matemático y que comprendan que esta puede emplearse como instrumento para la comprensión y la argumentación.

Nosotros como estudiantes de la LM de la UPN, hemos sido partícipes de esta innovación; en consecuencia, desde nuestra experiencia junto con una revisión documental, hemos evidenciado cuatro elementos que caracterizan la innovación curricular en mención, de los cuales hablaremos posteriormente. Cabe mencionar que, en algún momento consideramos ocho elementos[2], sin embargo, en el desarrollo de cada uno de ellos, se encontró pertinente unificar algunos, razón por la cual los elementos se sintetizan en (i) la interacción social en clase, (ii) el *entorno favorable para aprender a demostrar*, (iii) la evaluación y (iv) *la actividad demostrativa*.

2.3.1 Actividad demostrativa[3]

Como se mencionó, una de las razones que motivó al equipo de investigación a realizar la innovación curricular fue el reconocimiento de la complejidad inherente al aprendizaje de la demostración, la cual se encuentra relacionada con aspectos como: comprender que algunas propiedades de los objetos geométricos tienen una relación de dependencia entre sí, identificar la forma en la que se enuncian los teoremas y reconocer el proceso deductivo necesario para construir las demostraciones (Camargo et al, 2008).

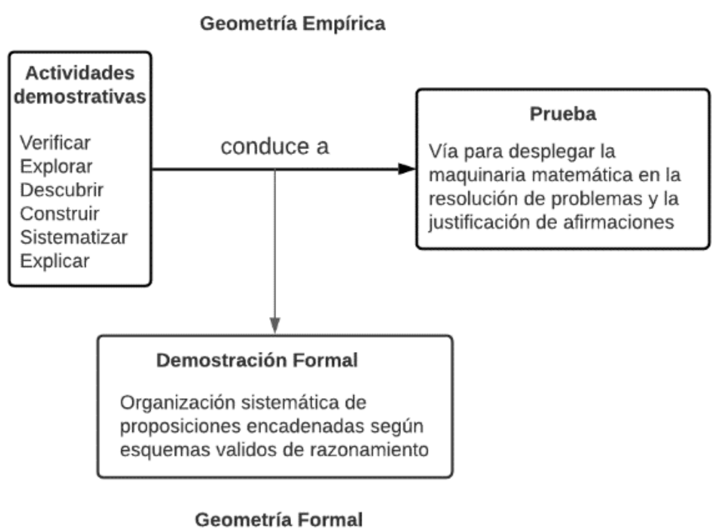
En este sentido, el equipo se dio a la tarea de establecer su propia concepción de actividad demostrativa en el marco del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas; para esto, elaboraron

[2] La interacción social en clase, las situaciones problema, la geometría dinámica, el descubrimiento, el sistema axiomático, las notas de clase, la evaluación y la actividad demostrativa.
[3] En el ámbito educativo.

un estado del arte considerando tres asuntos afines con la investigación que estaban desarrollando: (i) la actividad demostrativa en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, (ii) la geometría dinámica para la enseñanza de la demostración y (iii) la geometría dinámica en la formación de profesores.

Como resultado del análisis de la literatura especializada, el equipo considera que la actividad demostrativa no solo se enfoca en la elaboración de una demostración formal, sino que esta se direcciona hacia el uso de la justificación y formulación de conjeturas como insumo para la compresión, comunicación y validación de las ideas geométricas. El equipo elaboró un esquema en el que pretendían plasmar las ideas de Hanna y Mariotti (como se citó en Perry et al, 2006), mostrando la relación entre actividad demostrativa y justificación (Figura 1).

Figura 1
Relación entre actividad demostrativa y justificación



Tomado de Perry et al (2006, p. 22).

De esta forma, el equipo reconoció que había que establecer un lazo entre la "geometría formal", que alude a la producción de una demostración formal, y la "geometría empírica", relacionada con las acciones de índole heurístico, para fomentar la comprensión. Tuvieron en cuenta la relación entre actividad demostrativa y justificación, y las posturas de diferentes matemáticos y educadores matemáticos en relación con la demostración, para dar lugar a la primera versión del constructo de actividad demostrativa. En ella determinaron que no solamente se debe tener en cuenta el producto, es decir, las explicaciones, las pruebas y la presentación sistemática de resultados, sino que al momento de demostrar es necesario considerar otras acciones como visualizar, explorar, conjeturar, verificar y deducir.

En la segunda versión del constructo se introdujo la argumentación como una acción necesaria para producir una justificación, cuando esta se da en un ámbito académico, dinamizado por el profesor. Así pues, las justificaciones no tienen la forma característica de una explicación o de una prueba, más bien, estas son importantes para la validación de una afirmación (Perry et al, 2006). Esta versión del constructo se pretendía validar mediante una prueba piloto, por lo cual, el equipo consideró pertinente identificar niveles de desempeño para las acciones implicadas en los procesos y los productos de la actividad demostrativa. No obstante, posterior a la aplicación de la prueba piloto, fue posible evidenciar que en lugar de presenciar desempeños logrados, se apreciaron "diversas manifestaciones de trabajo frente al problema, sin ninguna connotación de mejor o peor desempeño" (Perry et al, 2006, p. 26). Junto con esto, el equipo se dio cuenta que no era posible desvincular la argumentación de los procesos ni de los productos, lo que los llevó a reconceptualizar la actividad demostrativa, esta vez afirmando que es la argumentación[4] la que establece el puente entre las acciones del proceso y las acciones del producto. Esta reorganización dio lugar a la caracterización de la actividad demostrativa a través de las manifestaciones de desempeño de las acciones (ver anexo A).

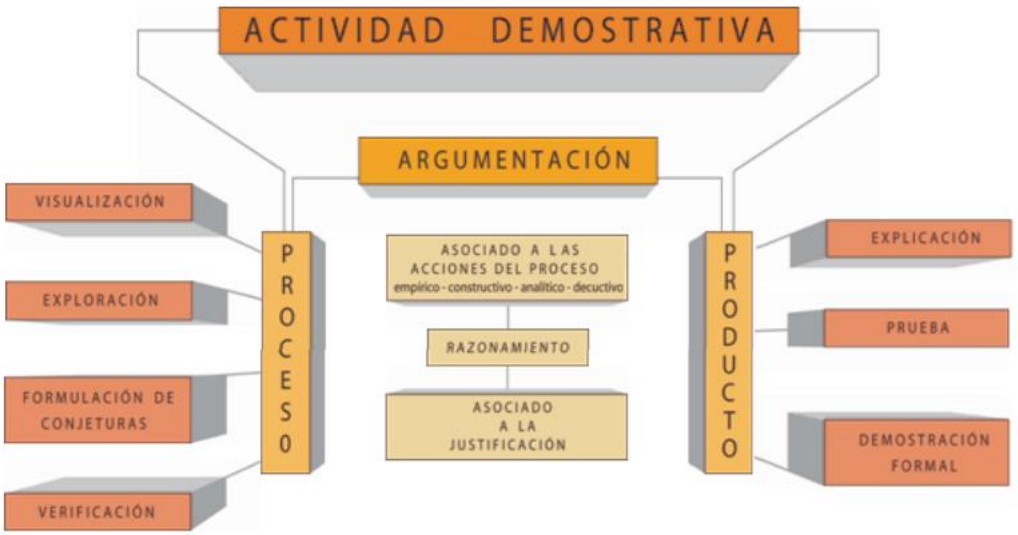
En conclusión, para el equipo de investigación el constructo *actividad demostrativa* abarca dos aspectos que se encuentran relacionados entre sí. Por un lado, el que se constituye a partir de las acciones cuyo objetivo es producir una conjetura (aspecto proceso) y, por otro lado, aquel que se conforma por las acciones destinadas a producir una justificación (aspecto producto). Por consiguiente, se considera que la demostración en el ámbito educativo pretende favorecer la compresión del contenido matemático implícito en los enunciados de los teoremas y sus correspondientes justificaciones, y direccionar a la validación de tales enunciados, en relación con un sistema axiomático en construcción (Perry et al, 2006).

[4] Entendemos la argumentación como una expresión (escrita u oral) de un razonamiento, con el que se pretende persuadir o convencer a otros sobre la validez de una idea.

Las acciones involucradas en el aspecto proceso son la visualización, la exploración, la formulación de conjeturas y la verificación (Figura 2), que corresponden a acciones de carácter heurístico. A continuación, se precisan cada una las acciones mencionadas.

Figura 2

La actividad demostrativa en la educación en matemáticas

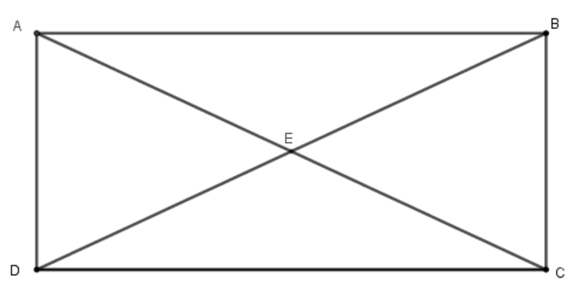


Tomado de Camargo et al (2005, p. 373)

Visualización: el propósito es encontrar relaciones geométricas subyacentes. Por ejemplo, en el rectángulo $ABCD$ (Figura 3) se pueden observar los triángulos AEB, BEC, CED y DEA. Solamente después de tener cierta práctica en la visualización es posible evidenciar que la figura es también la unión de dos parejas de triángulos: ADC y ABC; o, ADB y CBD. Pero para poder deducir la relación de congruencia de las diagonales del rectángulo es necesario identificar los triángulos que se traslapan: DAC y CBD, entre otros. (Perry et al, 2006).

Figura 3

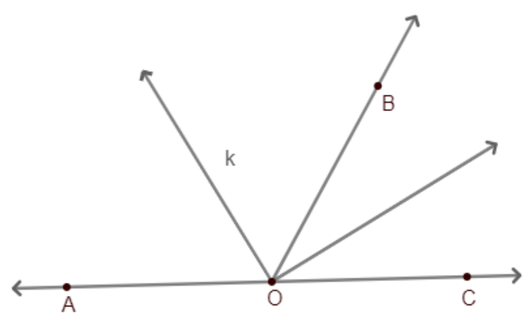
Visualización de diferentes figuras en un único dibujo



Tomado de Perry et al (2006, p. 59)

Exploración: investigación empírica hecha sobre una representación gráfica –a través de las acciones tales como medir, calcular, construir, constatar– en la que se consideran uno o más casos. Tiene como objetivo principal descubrir propiedades o relaciones entre propiedades, además de generar comprensión de la situación con respecto al propósito específico del problema. Por ejemplo, ante la tarea de establecer una relación entre las bisectrices de los $\angle AOB$ y $\angle BOC$ que conforman un par lineal[5] (Figura 4), acciones como representar el $\overrightarrow{OB}$[6] en distintas posiciones y medir el ángulo formado por las bisectrices[7] permitirán detectar la relación de perpendicularidad entre ellas (Perry et al, 2006).

Figura 4
Relación entre bisectrices de ángulos que conforman par lineal



Tomado de Perry et al (2006, p. 60).

Formulación de conjeturas: establecimiento de enunciados, de los que se tiene seguridad, expresados en forma general. Hace referencia al acto de postular una afirmación –fruto del convencimiento personal logrado a través de las acciones de visualización y exploración– estableciendo relaciones del tipo "si … entonces …" (Perry et al, 2006). Teniendo en cuenta el ejemplo anterior, es posible establecer una conjetura fruto de la visualización y exploración: Si dos ángulos son par lineal, entonces sus bisectrices determinan un ángulo recto.

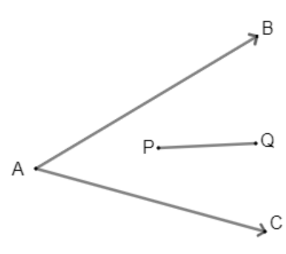
[5] Def. de ángulos par lineal: si $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AD}$ son rayos opuestos y C es un punto que no está en $\overleftrightarrow{AB}$, entonces el $\angle BAC$ y $\angle CAD$ forman un par lineal. (Samper & Molina, 2013).
[6] Def. de rayo: dados dos puntos de una recta A y B, el $rayoAB$ (que se denota $\overrightarrow{AB}$) es la unión del $\overline{AB}$ con el conjunto de puntos X de la recta para los cuales B está entre A y X. (Samper & Molina, 2013).
[7] Def. de bisectriz un ángulo: la bisectriz de un ángulo es un rayo con extremo en el vértice del ángulo y un punto en el interior del ángulo que determina con los lados del ángulo dos lados adyacentes congruentes (Samper & Molina, 2013).

Verificación: comprobación empírica mediante acciones visibles sobre una representación –como medir, construir, calcular– realizadas con el propósito de poner a prueba la conjetura establecida cuando un cuestionamiento suscita una duda frente a esta (Perry et al, 2006). Teniendo en cuenta el ejemplo anterior, para verificar que la relación de perpendicularidad entre las bisectrices siempre se cumple, es preciso representar la situación en un *software* de geometría dinámica, medir el ángulo determinado por las bisectrices y mediante el arrastre del punto B observar que para cualquier medida de $\angle AOB$ y $\angle BOC$, el ángulo determinado por las bisectrices siempre es recto.

Por otro lado, la actividad demostrativa circunscribe también, acciones enfocadas a la elaboración de un discurso argumentativo de tipo deductivo, el cual valida la conjetura en el marco del sistema axiomático en construcción. Las acciones, o en este caso justificaciones, asociadas al aspecto producto son la explicación, la prueba y la demostración formal.

Explicación: justificación de carácter empírico basada en la remisión a una figura para mostrar lo que en ella se ve y señalar resultados empíricos obtenidos ya sea en la exploración o por medio de información de fuentes externas (Perry et al, 2006). Por ejemplo, al responder la pregunta ¿el interior de un ángulo es un conjunto convexo? Puede generarse en clase la siguiente explicación: “se puede decir que en el interior del ángulo BAC es un conjunto convexo ya que al unir cualquier par de puntos P y Q del interior del ángulo por un segmento, los puntos que conforman este segmento hacen parte del conjunto de puntos que forman el interior del ángulo” (Perry et al, 2006, p. 61) como se muestra en la Figura 5.

Figura 5
Interior de un ángulo



Tomado de Perry et al (2006, p. 61).

Prueba: justificación parcial en la que se explicitan afirmaciones y razones, relacionadas con propiedades geométricas generales, obtenidas del conjunto de las posibilidades estudiadas y de nuevas relaciones de dependencia encontradas en las acciones realizadas sobre la figura. Esto hace que la prueba no sea algo acabado, sino que cambie con la evolución de los saberes en el tiempo. En relación con el ejemplo anterior:

Si tomamos dos puntos P y Q del interior del $\angle BAC$, se cumple que:

i) P, Q y B están en el mismo lado de $\overleftrightarrow{AC}$. Por lo tanto, $\overline{PQ}$ no interseca a $\overleftrightarrow{AC}$, específicamente al $\overrightarrow{AC}$.

ii) P, Q y A están en el mismo lado de $\overleftrightarrow{AB}$. Por lo tanto, $\overline{PQ}$ no interseca a $\overleftrightarrow{AB}$, específicamente al $\overrightarrow{AB}$.

Como $\overline{PQ}$ no interseca al $\angle BAC$, entonces el interior del ángulo es un conjunto convexo (Perry et al, 2006).

Demostración formal: justificación de carácter deductivo que explicita y encadena, en forma exhaustiva, una afirmación y sus respectivas razones, referidas a un sistema axiomático y que lleva desde la información dada hasta aquella que se desea demostrar. Se relaciona con la construcción de un discurso conformado por una serie de enunciados que se organizan, siguiendo un conjunto de reglas lógicas controladas por el profesor, con el objetivo de incorporar un hecho matemático al sistema axiomático, establecido en el aula (Perry et al, 2006). Así las cosas, se muestra en seguida la demostración formal del problema anterior (Tabla 3):

Tabla 3

Ejemplo de demostración en el formato a dos columnas Afirmación-Garantía

Afirmación	**Garantía**
$\angle BAC$	Dado
P y Q puntos del interior del $\angle BAC$	Dado
$P, Q \in S_1 \cap S_2$, donde S_1 es el semiplano de frontera $\overleftrightarrow{AB}$, que contiene a C y S_2 es el semiplano de frontera $\overleftrightarrow{AC}$, que contiene a B	Definición (D.) de interior de ángulo[8]

[8] Def. interior de ángulo: dado $\angle ABC$, el interior del $\angle ABC$ es la intersección del semiplano determinado por la $\overleftrightarrow{BC}$ en el cual está A con el semiplano determinado por la $\overleftrightarrow{BA}$ en el cual está C (Samper & Molina, 2013).

$P, Q \in S_1$ y $P, Q \in S_2$	D. de intersección
$S_1\ y\ S_2$ son conjuntos convexos	Postulado (P.) de la separación del plano[9]
$\overline{PQ} \in S_1$ y $\overline{PQ} \in S_2$	D. de conjunto convexo[10]
$\overline{PQ} \in S_1 \cap S_2$	D. de intersección
$\overline{PQ} \in int\angle BAC$	D. de interior de ángulo
$int\angle BAC$ es un conjunto convexo	D. de conjunto convexo

El formato usado para la demostración formal varía en los cursos de la línea de Geometría. En el primer curso, Elementos de Geometría, se emplea el diagrama-deducción (Tabla 4), propuesto por el mismo equipo de investigación: En seguida se muestra un ejemplo del uso del diagrama-deducción en relación con el problema: Sea $\angle JKL$ y Y un punto tal que $Y \in \angle JKL$. ¿ $Y \in \overrightarrow{KL}$?

Tabla 4

Ejemplo de demostración en el formato a tres columnas Diagrama-Deducción

¿Qué sé?	**¿Qué uso?**	**¿Qué concluyo?**
1. $\angle JKL$	D. de ángulo[11]	$\angle JKL = \overrightarrow{KJ} \cup \overrightarrow{KL}$ $\overrightarrow{KJ}$ y $\overrightarrow{KL}$ no son colineales
2. $Y \in \angle JKL$ $\angle JKL = \overrightarrow{KJ} \cup \overrightarrow{KL}$	Principio de sustitución	$Y \in \overrightarrow{KJ} \cup \overrightarrow{KL}$
3. $Y \in \overrightarrow{KJ} \cup \overrightarrow{KL}$	D. de ángulo	$Y \in \overrightarrow{KL}$ o $Y \in \overrightarrow{KJ}$

Para el curso Geometría Plana, se usa el formato mostrado en el apartado anterior (Tabla 3), sin embargo, se pueden presentar variaciones frente a los nombres de las dos columnas, por ejemplo, afirmación – garantía y datos, afirmación – justificación, esto depende del profesor que

[9] P. de la separación del Plano: sea α un plano, m una recta en plano y H y K los semiplanos determinados por m en α. (i) H y K son conjuntos convexos. (ii) Sea $A \in H$ y $B \in K$ entonces $\overline{AB} \cap m \neq \emptyset$ (Samper & Molina, 2013).

[10] Def. conjunto convexo: Sea A un conjunto de puntos. A es un conjunto convexo si la siguiente afirmación es verdadera para todo par de puntos del conjunto: Si X y Y son cualquier par de puntos de A entonces el $\overline{XY}$ es subconjunto de A (Samper & Molina, 2013).

[11] Def. de ángulo: un ángulo es la unión de dos rayos que tienen el mismo extremo y que no son colineales (Samper & Molina, 2013).

dirige el curso. En el curso Geometría del Espacio se usa el formato núcleos y pilares (Tabla 5) que tiene como finalidad hacer más económicas las demostraciones; en este se toman las afirmaciones y las justificaciones más relevantes de la demostración. Por ejemplo, mostramos a continuación la demostración del Teorema (T.) puntos en el mismo semiplano:

T. puntos en el mismo semiplano: Si los puntos A, B y C tal que $A - B - C$[12] y m recta, $A \in m$, entonces $C \in S_{m,B}$.

Tabla 5

Ejemplo de demostración en el formato a dos columnas Núcleos - Pilares

Núcleos	**Pilares**
A, B y C puntos no colineales en α	P. Plano-Puntos[13]
H punto, $H \in \overrightarrow{AC}$, tal que $AH = AB$	T. localización de puntos[14]
$H \notin \overleftrightarrow{AB}$	D. de semiplano[15]

2.3.2 Entorno favorable para aprender a demostrar

Uno de los elementos característicos de la innovación curricular, comentada en diferentes artículos y libros del equipo de investigación, es la generación de un entorno favorable para aprender a demostrar, conformado a la vez por tres elementos que funcionan en conjunto: la interacción social en clase, la geometría dinámica y las situaciones problema.

2.3.2.1 Interacción social en clase

Para una gran parte de la comunidad de educadores matemáticos, es cierto que el aprendizaje de las matemáticas tiene mejores resultados cuando la adquisición de conocimientos se hace mediante la interacción social. Consideramos que la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas son procesos que no se limitan solamente a la actividad individual, sino que, para

[12] Def. de interestancia: el punto B está entre los puntos A y C, si (i) A, B y C son colineales y (ii) $AB + BC = AC$. Se nota como $A - B - C$. (Samper & Molina, 2013).
[13] P. Plano-Puntos: un plano tiene por lo menos tres puntos no colineales. (Samper & Molina, 2013).
[14] T. localización de puntos: sea r un número real positivo y el $\overrightarrow{AC}$, entonces existe un único punto $D \in \overrightarrow{AC}$ tal que $AD = r$ (Samper & Molina, 2013).
[15] D. semiplano: una recta m separa al plano α en dos subjuntos H y K, llamados semiplanos tal que: (i) $H \cap m = \emptyset$ y $K \cap m = \emptyset$, (ii) $H \cap K = \emptyset$, (iii) $H \cup K \cup m = \alpha$ (Samper & Molina, 2013).

potencializar dichos procesos es necesaria la interacción social. Lo anterior se corresponde con la teoría sociocultural del aprendizaje propuesta por Lev Vygotsky (Patiño, 2007).

Por tal razón, "han surgido las teorías socioculturales del aprendizaje de las matemáticas que, basadas en los planteamientos de Vygotsky, sostienen que las dimensiones individuales de la experiencia son secundarias frente a las sociales y culturales" (Perry et al, 2006, p. 2). De ahí que el equipo de investigación asuma una perspectiva sociocultural del aprendizaje, comprendiendo la interacción social como un factor determinante del aprendizaje. Como consecuencia de dicha perspectiva, el equipo considera que la clase de matemáticas puede entenderse como una comunidad de práctica.

> *Comunidad*, por cuanto es una configuración social que se propone realizar conjuntamente una empresa: desarrollar un currículo local de matemáticas. *De práctica*, por cuanto el funcionamiento de la comunidad como tal es resultado del aprendizaje colectivo de sus miembros cuando interactúan entre sí y con el entorno para dar significado a la empresa que tienen entre manos y para participar en su consecución. (Perry, Samper, et al, 2006, p. 3)

Antes de la aplicación de la innovación, la interacción en clase realizada en los cursos de geometría entre el profesor y los estudiantes estaba restringida a las explicaciones de las demostraciones, mayoritariamente por parte del profesor; además, debido a que las actividades propuestas en el curso se desarrollaban de manera individual, no se llevaba a cabo una interacción entre los estudiantes mismos, ni entre los estudiantes y el objeto de estudio. El equipo de investigación sostiene que la comunicación de ideas y el análisis crítico de estas toman un papel importante, especialmente, cuando lo que se pretende es aprender a demostrar, debido a que, es en la argumentación colectiva en la que se generan los elementos teóricos para realizar una demostración (Camargo et al, 2013). A partir de estas consideraciones, encontramos la interacción social en clase como un elemento característico de la innovación curricular, debido a que a diferencia de lo que se realizaba antes, en la actualidad los estudiantes interactúan entre ellos mismos y con el profesor, quien es visto como miembro experto de la comunidad de clase que guía el proceso.

La interacción en clase está mediada por normas sociales y sociomatemáticas, las cuales el profesor deja explicitas al inicio de los cursos, como atender y respetar los argumentos de los otros participantes de la clase, producir justificaciones en conformidad con los parámetros establecidos y justificar todas las ideas (Camargo et al., 2008). Otras de las normas mencionadas en la clase son, por ejemplo, “los puntos se nombran con letras mayúsculas” o “no se puede concluir información basándose en las representaciones de los objetos geométricos, a no ser que dicha información esté explícita en la representación”.

El equipo de investigación propone dos tipos de interacción en clase. Por un lado, se encuentra *la interacción entre estudiantes,* y por el otro, *la interacción entre profesor y estudiantes.* El papel que cumplen los estudiantes es el de ser participantes activos de la clase ya que el desarrollo de esta depende de los resultados que consigan. Es mediante la solución de las situaciones problema que propone el profesor, que se pone en evidencia la interacción social en clase, debido a que los estudiantes suelen trabajar en grupos que son conformados al inicio del curso. Los estudiantes deben solucionar la tarea usando algún *software* de geometría dinámica, luego presentar ante la comunidad de clase los resultados que obtuvieron y posteriormente refutar o apoyar las ideas que presenten los demás participantes de la clase, con el fin de ser protagonistas en la construcción del conocimiento. Adicionalmente, la interacción entre estudiantes no se lleva a cabo solamente en el aula de clase, sino también fuera de esta mediante la solución, en grupo, de las tareas extra-clase asignadas por el profesor cada semana.

El rol del profesor se centra en proponer situaciones problema que fomenten el ejercicio de indagación, y ser promotor de las discusiones matemáticas. En la mayoría de las sesiones, el profesor propone una situación problema que debe ser resuelta en una parte de la sesión de clase y durante esta, ése encarga de recorrer el salón atendiendo a cada uno de los grupos con el fin de recolectar información acerca del avance de los estudiantes, para luego emplearla en la puesta en común y de esta forma alentar a aquellos estudiantes que no se animan a presentar, frente a los demás participantes de la clase, sus propuestas o conjeturas (Camargo et al., 2008). Otras de las acciones que cumple el profesor en la clase son: delegar a los estudiantes la tarea de justificar (teniendo presente que son ellos quienes toman las decisiones en el curso); mostrarse atento al desarrollo de la clase para darle un tratamiento oportuno a las propuestas que brindan los estudiantes y retroalimentar las intervenciones orales y las producciones escritas de los estudiantes; en aras de contribuir al desarrollo de procesos como la visualización, la argumentación, la conjeturación y la verificación, junto con la comunicación oral y escrita.

Además, el profesor es el mediador entre el conocimiento matemático y las producciones de los estudiantes; se encarga de hacer una organización de dichas producciones, con el fin de direccionar la discusión hacia el objeto matemático que se tiene presupuestado. Samper y Molina (2013) relatan lo expuesto haciendo alusión a un problema con el cual se pretendía desarrollar una conversación instruccional sobre qué es un ángulo, con el fin de establecer la definición del objeto geométrico e incluirla en el sistema axiomático que se reconstruye en la clase[16].

El problema propuesto es: Dados $\angle ABC$ y $\angle ACB$. Describa: $\angle ABC \cap \angle ACB$.

Se les pide a los estudiantes que escriban *su* definición de ángulo, obteniendo generalmente las siguientes:

Definición 1. Un ángulo es la región entre dos rayos que comparten su extremo.

Definición 2. Un ángulo es la amplitud resultante de la unión de un $\overrightarrow{AB}$ y otro $\overrightarrow{AC}$.

Definición 3. Es la abertura que se da entre dos rayos que comparten su punto inicial.

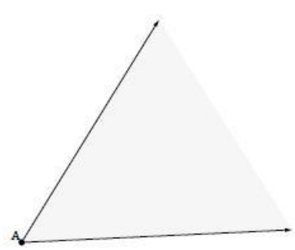
Definición 4. Son dos rayos que comparten un punto en común y la región entre ellos.

Definición 5. Dados AB y AD cuyo punto de origen es A, el ángulo está constituido por los dos rayos.

Una vez presentadas en clase las definiciones, el profesor interviene para analizar a qué se refiere exactamente cada una de ellas.

Así, las definiciones 1 y 4, se refieren a una región del plano (Figura 6).

Figura 6
Definiciones 1 y 4

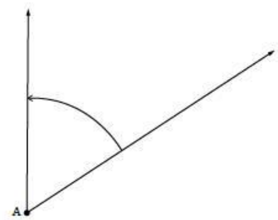


[16] Este problema, mencionan Samper y Molina (2013), pone en juego la *noción* de ángulo más que la definición, pues los estudiantes pueden enunciar una definición correcta sin comprenderla en su totalidad o comprenderla y no poder comunicarla por la falta de vocabulario.

Fuente: Samper & Molina (2013, p. 109).

Las definiciones 2 y 3 parecen tener en cuenta el tamaño del ángulo (Figura 7)

Figura 7
Definiciones 2 y 3

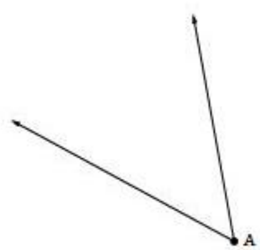


Fuente: Samper & Molina (2013, p. 109).

A la definición 5, le faltan condiciones para que corresponda a la definición ya presupuestada para el curso, que es precisamente la propuesta por Hilbert (Samper & Molina, 2013):

> **Definición de ángulo:** un ángulo es la unión de dos rayos que tienen el mismo extremo y que no son colineales (Figura 8).

Figura 8
Definición 5



Fuente: Samper & Molina (2013, p. 110).

Es preciso mencionar que el ejemplo mostrado corresponde a uno de los procedimientos para establecer una definición, a partir de las afirmaciones propuestas por los estudiantes. Un procedimiento similar ocurre cuando se pretende, con el problema, dar paso a un teorema, en este caso, los estudiantes no proponen una definición sino unas conjeturas, que serán objeto de discusión en clase junto con las de sus compañeros. Seguido al análisis de estas, que hace parte de dicha discusión, se elegirá una de las conjeturas para incluirla en el sistema axiomático, posterior a su demostración. La demostración de la conjetura elegida se realiza bajo la participación de los estudiantes, teniendo en cuenta los elementos que conforman, hasta ese momento, el sistema axiomático.

2.3.2.2 Geometría dinámica

Para el equipo de investigación la geometría dinámica es una herramienta de mediación en el proceso de aprender a demostrar; esta se refiere a la construcción de objetos matemáticos haciendo uso de diferentes *software* que posibilitan el arrastre y la deformación, conservando como invariantes a ciertas propiedades geométricas establecidas en la elaboración de la construcción (Arcavi; Hadas, 2000; Acosta Gempeler, 2005; Hohenwarter, 2014; Costa & Río, 2019). La geometría dinámica es uno de los medio mediante los cuales se pueden formular conjeturas sobre propiedades geométricas, teniendo amplias posibilidades de que estas sean verdaderas en el sistema axiomático que se pretende construir (Camargo et al, 2008).

La información que se muestra en seguida tiene que ver con las principales funciones que cumple la geometría dinámica en la actividad demostrativa, establecidas por el equipo de investigación (Camargo et al, 2008).

La geometría dinámica contribuye a la identificación de las condiciones requeridas en teoremas o definiciones para estudiar las consecuencias de eliminar partes de dichas condiciones, estableciendo así cuáles son necesarias y cuáles no, esto con el fin de elaborar conjeturas económicas, es decir, que cuenten solamente con las condiciones esenciales. Por ejemplo, en la tarea de establecer la definición de triángulo es posible que algunos estudiantes suministren una definición como: figura geométrica compuesta por tres segmentos, tres ángulos y tres vértices. Sin embargo, para definir triángulo, resulta más económico definirlo como la unión tres puntos no colineales mediante segmentos cuyos extremos son dichos puntos. Lo anterior contribuye a comprender que el cumplimiento de la tesis de un enunciado depende de todas las condiciones de la hipótesis, esto debido a que la mayoría de las definiciones, postulados y teoremas cumplen con la estructura lógica de la implicación, es decir, “sí… entonces...”.

Los *software* de geometría dinámica también permiten realizar construcciones auxiliares de distinta naturaleza con facilidad, contribuyendo al desarrollo de la creatividad por parte de los estudiantes; es posible además eliminar dichas construcciones si no se obtiene el resultado esperado. Tales acciones se convierten en un instrumento primordial en la búsqueda de una justificación; además, visualizar y manipular mediante el arrastre la figura geométrica posibilita recordar teoremas, definiciones o postulados, abordados con anterioridad, que puedan contribuir a la elaboración de la demostración formal de una conjetura.

Mediante la solución de una situación problema abierta que apunte a la exploración de propiedades geométricas, los estudiantes proveen diferentes conjeturas que se estructuran en el sistema axiomático según el orden que el profesor crea conveniente; en consecuencia, dichas situaciones dan lugar a diferentes resultados que constituyen un sistema axiomático local, es decir, una parte del sistema axiomático en construcción. Las figuras realizadas por los estudiantes, mediante comandos reproducidos en los *software* de geometría dinámica se corresponden, en cierta medida, con los postulados de la geometría euclidiana, razón por la cual el arrastre permite la identificación de propiedades geométricas invariantes. El arrastre cumple un papel importante en el momento de la exploración, puesto que favorece la producción de argumentos de diferentes tipos, provoca la construcción de conjeturas y contribuye a su demostración. En este sentido, para realizar la exploración, los estudiantes pueden emplear los siguientes tipos de arrastre:

> *arrastre libre*, consistente en mover los puntos base de la construcción aleatoriamente; *arrastre limitado/ligado*, consistente en mover un punto sólo sobre el objeto al que pertenece; *arrastre guiado*, consistente en mover los puntos base de la representación para darle una forma determinada; *arrastre de lugar ficticio*, consistente en mover un punto base para que el dibujo conserve una propiedad descubierta (el punto que se mueve sigue un camino sin que los usuarios se den cuenta de ello); *arrastre mantenido* (Baccaglini-Frank; Mariotti, 2010; Molina & Samper, 2019), consistente en mover un punto base para que el dibujo conserve una propiedad descubierta o deseada (el punto que se mueve sigue un camino que los usuarios perciben y que al poner traza al punto evidencian) (Molina & Samper, 2019, p.16).

Cuando los estudiantes enuncian sus conjeturas, producto de la exploración de una situación problema abierta, el profesor les pide a los estudiantes hacer un recuento de la construcción realizada en el *software* con el objetivo de determinar si estas cumplen o no con las condiciones de dependencia predeterminadas en la construcción. De esta forma, se validan las conjeturas formuladas por otros participantes de la clase. Además, en casos específicos en los que se pretende determinar la existencia de un objeto geométrico, el protocolo de construcción coincide con el desarrollo lógico de su demostración.

2.3.2.3 Situaciones problema

Para el equipo de investigación las situaciones problema que se les proponen a los estudiantes tienen un alto nivel de importancia, puesto que con estas se pretende la interacción social, además de favorecer las acciones involucradas en el aspecto proceso y en el aspecto producto. Las situaciones problema no son presentadas a los estudiantes de manera improvisada; el equipo de investigación las diseña cuidadosamente, puesto que estas son consideradas como parte del medio didáctico que busca el aprendizaje de los estudiantes. Tales situaciones deben ser: *interesantes* para provocar la actividad demostrativa; *abiertas*, de tal suerte que no revelen su solución o respuesta, para permitir a los estudiantes varias alternativas de exploración y solución, contribuyendo a la argumentación; *pertinentes* pues deben tenerse en cuenta los elementos constituyentes del sistema axiomático que se construye en clase; y deben tener una *intencionalidad* clara. (Camargo et al, 2008).

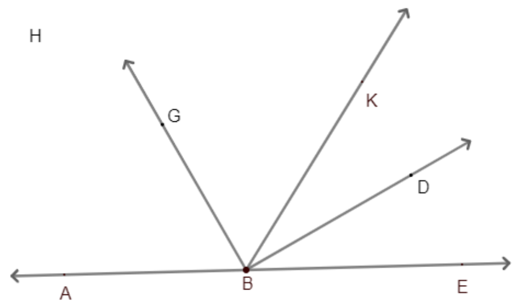
Cada una de las situaciones problema contiene el enunciado que la plantea, el objetivo y los requerimientos que demandan su realización en términos del contenido geométrico y del manejo de la geometría dinámica (Perry et al, 2006). Aunque a los estudiantes solamente se les presenta el enunciado de la situación, algunos de ellos anticipan a qué se quiere llegar con el desarrollo de la situación problema y los elementos del contenido geométrico que son necesarios para el desarrollo de esta.

A continuación, presentamos, a modo de ejemplo, una situación problema diseñada por el equipo de investigación[17]: Se plantearon cuatro enunciados que determinan tareas distintas, cada una (Tabla 6) asociada a la relación entre las bisectrices de ángulos que forman par lineal y a una misma instrucción que demandaba acciones encaminadas al aspecto producto de la demostración.

Tabla 6
Enunciado de una situación problema que pretende estudiar la relación entre las bisectrices de ángulos que forman par lineal

[17] La situación problema mostrada pertenece a Perry et al (2006, p. 208). Allí se muestran otras situaciones problema así como las consideraciones que sustentan el diseño de cada situación.

Enunciado 1. En el semiplano H, el $rayoBA$ y el $rayoBE$ son opuestos, $\angle ABG \cong \angle KBG$ y $\angle KBD \cong \angle DBE$. Hallar $m\angle GBD$[18]. [Sugerencia: sean $m\angle ABG = x$ y $m\angle DBE = y$].



Enunciado 2. Sean los rayos BA y BE, rayos opuestos y BK otro rayo. Sean los rayos BG y BD las bisectrices de $\angle ABK$ y $\angle KBE$ respectivamente. ¿Cuál debe ser la posición del $rayoBK$ para que la medida del $\angle GBD$ sea máxima?

Enunciado 3. Sean los rayos BA y BE, rayos opuestos y BK otro rayo. Sean los rayos BG y BD las bisectrices de $\angle ABK$ y $\angle KBE$ respectivamente. Determine cómo varía la medida del $\angle GBD$ cuando varía la posición del $rayoBK$.

Enunciado 4. En el tablero en una clase de geometría está escrito el enunciado incompleto de un teorema:

Si dos ángulos…………… entonces sus bisectrices son perpendiculares

Completen el enunciado.

El objetivo de la tarea es descubrir y justificar el teorema que establece que las bisectrices de ángulos que forman par lineal son perpendiculares. Los requerimientos para abordar la tarea, según Perry et al. (2006), en términos del contenido geométrico y de las acciones en la geometría dinámica (GD) son:

- **Definiciones:** rayos opuestos[19], semiplano, ángulos congruentes[20], medida de ángulo, bisectriz de un ángulo, ángulos suplementarios[21], ángulos complementarios[22], ángulos que forman par lineal, interior de ángulo.

[18] $m\angle GBD$ es la notación de la medida del $\angle GBD$.
[19] Def. de rayos opuestos: $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$ son opuestos si $A - B - C$ (Samper & Molina, 2013).
[20] Def. de ángulos congruentes: dos ángulos son congruentes si tienen la misma medida (Samper & Molina, 2013).
[21] Def. de ángulos suplementarios: si la suma de las medidas de dos ángulos es 180 entonces los ángulos son suplementarios (Samper & Molina, 2013).
[22] Def. de ángulos complementarios: dos ángulos son complementarios si la suma de sus medidas es 180 (Samper & Molina, 2013).

- **Postulados:** del suplemento, de la adición de medidas de ángulo[23], de la separación del plano.
- **Acciones GD:** Arrastre, medida de ángulos.

Investigaciones más recientes realizadas por el mismo equipo, enfocadas en las tareas y los tipos de problemas que se aborda en las clases, les permitió evidenciar una relación existente entre la tipología de los problemas con la tipología de argumentos (abductivos, inductivos y deductivos). El equipo establece que cierto tipo de problemas, generan un determinado tipo de argumento, así:

Problemas de búsqueda del consecuente: se denominan problemas de búsqueda del consecuente puesto que en este tipo de problemas se dan las condiciones suficientes y se deben encontrar las consecuencias necesarias de estas. Por ejemplo:

> Problema 1: *Dados tres puntos no colineales A , B y C . Sea m la mediatriz*[24] *del $\overline{AB}$ y n la mediatriz del $\overline{BC}$. Sea T el punto de intersección de tales mediatrices*. ¿Qué característica geométrica tiene el punto T al mover el punto B? Formule una conjetura y demuéstrela.

Para solucionarlo, los estudiantes deben realizar una construcción robusta que represente la situación y que cumpla con las condiciones dadas en el enunciado. Posteriormente, deben iniciar un proceso de exploración en el que consideren diferentes casos en los que varíe la posición de punto B, mediante un *arrastre libre* para establecer propiedades invariantes del punto T. A partir de esta exploración, los estudiantes pueden producir las siguientes conjeturas:

> Conjetura 1: Dados tres puntos no colineales A, B y C. Sea m la mediatriz del $\overline{AB}$, n la mediatriz del $\overline{CB}$ y T el punto de intersección entre m y n. Si B se mueve, entonces T pertenece a la mediatriz del $\overline{AC}$.

[23] P. de la adición de medida de ángulo: si $C \in int\angle DAB$, entonces la $m\angle DAC + m\angle CAB = m\angle DAB$ (Samper & Molina, 2013).

[24] Def. de mediatriz: dado un $\overline{PQ}$, la mediatriz del $\overline{PQ}$, en un plano, es la recta perpendicular al segmento, que contiene al punto medio de este (Samper & Molina, 2013).

Conjetura 2: Si A, B y C son tres puntos no colineales, m es la mediatriz del $\overline{AB}$, n es la mediatriz del $\overline{CB}$ y el punto de intersección entre m y n, entonces T pertenece a la mediatriz del $\overline{AC}$.

Así, el tipo de problemas de búsqueda del consecuente, contribuye a la generación de un argumento inductivo, puesto que el estudiante toma diferentes casos que cumplen con las condiciones dadas, descubre por medio de la exploración una propiedad invariante (T pertenece a la mediatriz del $\overline{AC}$) que depende de dichas condiciones e induce una conjetura. La geometría dinámica favorece de mejor manera la inducción pues mediante el *arrastre libre* es posible observar la propiedad invariante para infinitos casos (Molina & Samper, 2019).

Problemas de búsqueda del antecedente: son aquellos en los que se deben encontrar las condiciones suficientes para las cuales las propiedades mencionadas en el enunciado son la consecuencia necesaria. Por ejemplo:

Problema 2: *Sean $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ dos segmentos congruentes.* ¿Es posible determinar un punto E de forma tal que ΔABE y ΔCDE sean congruentes? Provea una conjetura y demuéstrela.

Para solucionar este tipo de problemas, generalmente, se requiere representar los objetos mencionados en el enunciado y realizar construcciones auxiliares para reconocer, mediante la exploración, las propiedades de un objeto existente o establecer las que afirman su existencia (Molina & Samper, 2019). Dichas propiedades son el antecedente de la conjetura, porque el consecuente está dado.

Los estudiantes, en primera instancia, deben identificar que una parte del enunciado conforma también parte del antecedente. Posterior al desarrollo del problema los estudiantes produjeron las siguientes conjeturas:

Conjetura 1: $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son congruentes y paralelos y E es la intersección $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$, entonces ΔABE y ΔCDE serán congruentes.
Conjetura 2: Si $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son congruentes y E es el punto de intersección de las mediatrices de $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$, entonces ΔABE y ΔCDE serán congruentes.

Las estrategias empleadas por los estudiantes son diferentes, sin embargo, ambas contribuyen a la producción de argumentos abductivos. La estrategia que produjo la primera conjetura se basa en aludir a elementos ya establecidos en el sistema axiomático de tal manera que su consecuente corresponda con las consecuencias planteadas en el enunciado, en este caso, se aludió al *teorema del paralelogramo*[25] para obtener las aserciones suficientes para emplear el criterio de congruencia de triángulos Lado-Lado-Lado. Por otra parte, para la segunda conjetura se empleó una estrategia diferente, basada en el *arrastre mantenido* en el que los estudiantes descubrieron, de forma empírica, las condiciones necesarias para obtener la congruencia de los triángulos (Molina & Samper, 2019).

Problemas de determinación de dependencia: en este tipo de problemas se proporciona en el enunciado un conjunto de figuras geométricas y una serie de propiedades. Se les solicita a los estudiantes determinar dependencias entre "*tipos de figuras del conjunto referencial*" y *las* "*propiedades dadas*" y, a partir de ello, formular una conjetura. Los estudiantes tienen la autonomía para determinar qué parte del enunciado se toma como antecedente o consecuente ya sea el conjunto de referencia o las propiedades. Por ejemplo:

> Problema 3: *Estudie la relación entre el tipo de cuadrilátero y propiedad las mediatrices de dos de sus lados coinciden. Provea una conjetura y demuéstrela*.

Para solucionar este problema, los estudiantes pueden seguir dos estrategias diferentes. La primera consiste en asumir los tipos de figuras como el antecedente, es decir, los tipos de cuadriláteros. La segunda se centra en tomar como antecedente la propiedad dada, esto es, las mediatrices de dos de sus lados coinciden. En las dos estrategias se debe realizar una construcción que puede ser robusta, o no (configuración blanda), de las propiedades del antecedente escogido, en búsqueda de las propiedades invariantes: para la primera estrategia, las mediatrices coinciden, o para la segunda estrategia, los tipos de cuadriláteros. En seguida se muestran las conjeturas-solución del problema, de acuerdo con la estrategia optada:

Estrategia 1 Conjetura 1: Si un cuadrilátero es un rectángulo, entonces las mediatrices de lados opuestos coinciden.

Conjetura 2: Si un cuadrilátero es un trapecio isósceles, entonces las

[25] T. del paralelogramo: si un cuadrilátero es un paralelogramo, entonces: (i) ambos pares de lados opuestos son congruentes, (ii) ambos pares de ángulos opuestos son congruentes, (iii) las diagonales se bisecan y (iv) los ángulos adyacentes son suplementarios (Samper & Molina, 2013).

mediatrices de sus lados paralelos coinciden.

Estrategia 2 Conjetura 1: Si $\overleftrightarrow{AC}$ es mediatriz de $\overline{BD}$ entonces $ABCD$ es una cometa[26].

En consecuencia, Molina y Samper (2019) mencionan que la estrategia 1 favoreció la producción de un argumento inductivo, mientras que en la estrategia 2, el argumento es inductivo debido a la similitud entre esta y los problemas de búsqueda del consecuente. De esta forma, los mismos autores concluyen que el tipo de problemas de determinación de dependencia contribuye a la generación de argumentos abductivos e inductivos, sin embargo, añaden que un análisis detallado de la situación puede dar lugar a un argumento deductivo.

2.3.3 Sistema axiomático

Un sistema axiomático es un conjunto de axiomas que se usan para demostrar teoremas por medio de deducciones. Según Samper y Molina, (2013), Hilbert en 1899 planteó un sistema axiomático para la geometría euclidiana, estableciendo como elementos básicos a los objetos geométricos punto, recta y plano. De este modo, el equipo de investigación adopta lo propuesto por Hilbert, pretendiendo construir, en el desarrollo de los cursos de geometría, un sistema axiomático que parta de las mismos elementos.

A pesar de que el grupo de investigación menciona que el contenido estudiado en dichos cursos hace parte de la geometría euclidiana, el contenido geométrico que se pretende axiomatizar corresponde al propuesto por George Birkhoff, que, según Samper y Molina (2013), modifica la propuesta de Euclides, introduciendo el uso de la regla con escala y del transportador, lo que lleva a establecer relaciones entre los números reales y las medidas de los ángulos, la asignación de una coordenada a un punto, entre otras[27].

Desde nuestro punto de vista, los estudiantes perciben que construyen un sistema axiomático, producto de la solución de las situaciones problema, las cuales los conducen a explorar y visualizar, y, en consecuencia, a descubrir propiedades. Así, el profesor percibe que los estudiantes descubren y reconstruyen un sistema axiomático que ya se tiene presupuestado. Esto no implica que el sistema axiomático construido en dos cursos distintos sea el mismo,

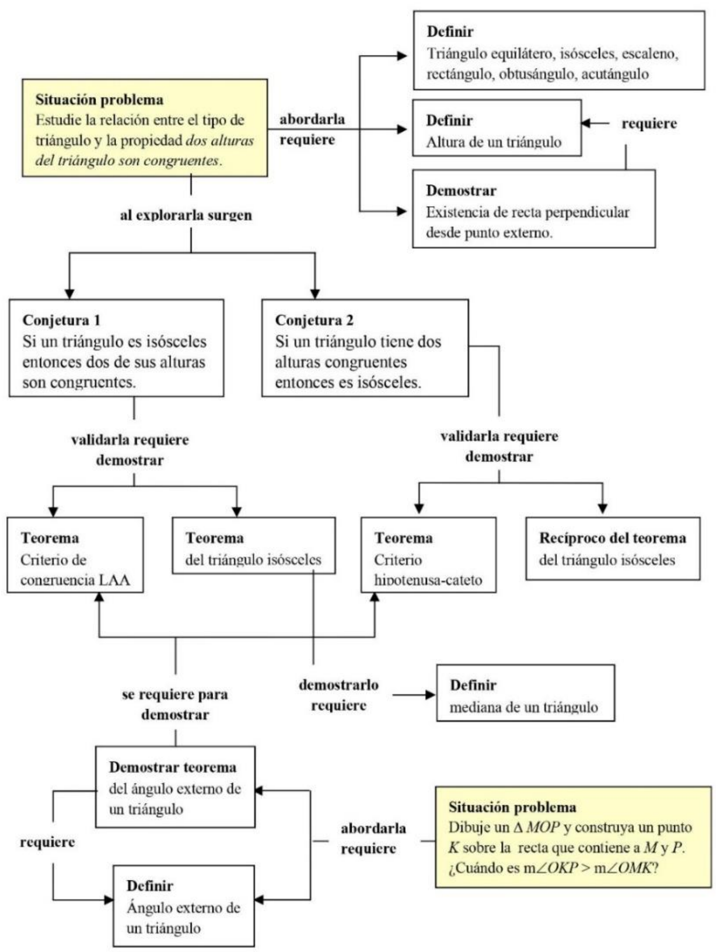
[26] D. de cometa: una cometa es un cuadrilátero con dos pares de lados adyacentes congruentes y ningún par de lados opuestos congruentes (Samper & Molina, 2013).
[27] Consecuencia de esto, consideramos que el contenido geométrico abordado en los cursos no corresponde a la geometría euclidiana.

debido a que la forma en la que se gestiona el contenido geométrico, que surge a partir de las situaciones problema y de los aportes oportunos de los estudiantes, no es el mismo en dos versiones del curso (Camargo et al, 2008). Las siguientes dos situaciones problema[28] pretenden mostrar los posibles caminos para construir parte de un sistema axiomático a partir de propiedades del triángulo isósceles (**Figura *9***):

- ¿Cuál es la relación entre el tipo de triángulo y la propiedad "dos alturas son congruentes"?
- Dibujar $\Delta MOP. K$ es un punto de $\overline{MP}$. ¿Cuándo es $m\angle OKP > m\angle OMK$?

Figura 9

Contenido geométrico tratado al resolver dos situaciones problema.



[28] Tanto las situaciones mostradas como el contenido geométrico tratado para resolver las dos situaciones problema mostrado en la (Figura 9), pertenecen a Camargo et al (2008)

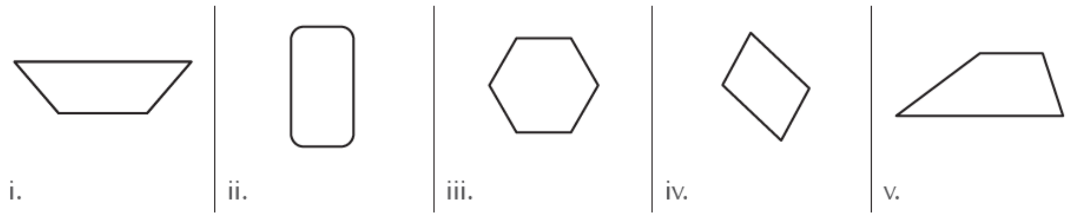
Fuente: Camargo et al (2008, p. 10)

Es preciso mencionar que, en ocasiones, son incorporados al sistema axiomático algunos elementos que son necesarios al momento de realizar la demostración de una conjetura, poniendo en pausa la demostración misma, para abordar otra situación en la que se obtengan como resultado los elementos teóricos necesarios para concluir la demostración inicial. Lo anterior es necesario puesto que corresponde a la hipótesis didáctica referente a la forma de gestionar el contenido geométrico, que consiste en construir un sistema axiomático a partir de situaciones problema.

El sistema teórico local que se desarrolla en el curso contiene teoremas, postulados, definiciones y axiomas. Se considera teoremas a aquellas conjeturas, producto de la solución de situaciones problema, validadas dentro del sistema axiomático. La forma en la que se introducen los teoremas al sistema axiomático se mencionó en el apartado "2.3.1 Actividad demostrativa". Los postulados, en su mayoría, cumplen con el formato de una proposición condicional, al igual que las definiciones y los teoremas. Los postulados se admiten como ciertos sin necesidad de ser demostrados en el momento en el que su uso es necesario para la realización de una demostración. Algunos de ellos afirman la existencia de objetos geométricos, de propiedades, establecen una relación entre el conjunto de los números reales y los puntos de una recta o asignan un número real a una cantidad de magnitud.

Las definiciones, por su parte, proporcionan información que permite reconocer propiedades fundamentales de un objeto geométrico. Las definiciones deben ser: *concisas*, es decir, deben hacer referencia a las características esenciales del objeto geométrico; *precisas*, en cuanto al uso de palabras con significado concreto; y, deben expresar lo que es y no es un objeto (Samper et al, 2013). Una de las maneras en las que se introducen las definiciones en el sistema axiomático fue presentada en el apartado "2.3.2 Entorno favorable para aprender a demostrar". Otra de ellas, se realiza a partir del análisis de ejemplos y contraejemplos del objeto geométrico en estudio: en el libro *Elementos de Geometría: Aprendizaje y enseñanza de la geometría*, (Samper et al, 2013), se presenta una situación problema en el que se les solicita a los estudiantes que determinen cuáles de las figuras presentadas son trapecios y cuáles no (**Figura *10***), y que, en caso de que su respuesta sea no, expliquen la razón por la cual rechazó la figura:

Figura 10
Ejercicio de tareas complementarias



Fuente Samper et al (2013, p. 39)

Para resolver el problema, los estudiantes deben tener presentes las propiedades que caracterizan el trapecio. Mencionar que el trapecio tiene cuatro lados o indicar que tiene cuatro lados y un par de lados paralelos no es suficiente. El primer caso da lugar a cualquier tipo de cuadrilátero, por ejemplo, a una "cometa". En el segundo, se puede considerar cualquier paralelogramo, debido a que estos cumplen con las condiciones establecidas, razón por la cual, para que no existan contraejemplos en la definición es indispensable aludir a un cuadrilátero con exactamente un par de lados paralelos. Samper et al (2013) presentan diferentes alternativas para establecer las definiciones de los objetos geométricos e introducirlas al sistema axiomático.

2.3.4 Evaluación

Antes de la innovación se realizaban solamente comprobaciones escritas para evaluar a los estudiantes; posterior a su implementación, se emplearon diferentes mecanismos (que persisten en la actualidad) como la valoración de tareas extra-clase, situaciones problema que se abordan en la clase en clase, comprobaciones escritas, participación y notas de clase. Las tareas extra-clase son asignadas por el profesor una vez por semana, deben ser desarrolladas por cada grupo[29], se conforman por tres o cuatro ítems en los cuales se propone una situación problema y se espera que la solución, producto de la exploración de la situación en el *software* de geometría dinámica y de la discusión entre los integrantes del grupo, de lugar a una conjetura y su respectiva demostración. Dicha conjetura será añadida al sistema teórico local luego de la socialización y revisión de la tarea en la clase. Las actividades en clase tienen una estructura

[29] Al comienzo del curso, los estudiantes se organizan en grupos de 3 a 4 personas y se les asigna una letra del alfabeto con el que serán reconocidos.

similar a las tareas extra-clase, la diferencia recae en que para su desarrollo, los estudiantes cuentan con la supervisión y el apoyo del profesor.

Las comprobaciones escritas refieren a exámenes parciales conformados por cuatro o cinco ítems que pueden corresponderse con alguna de las siguientes actividades. Se presentan situaciones problema cuya solución es la formulación de una conjetura y su demostración, se presenta un nuevo teorema y se solicita su demostración o se presenta un nuevo teorema del que se debe hace uso para la solución de otra situación problema. La participación en clase tiene que ver con los aportes oportunos de los estudiantes en clase, por ejemplo, proponiendo estrategias para el desarrollo de una demostración, refutando argumentos de sus compañeros con contraejemplos, entre otros.

De estos mecanismos de evaluación, merece particular atención las notas de clase, pues la metodología implementada en la innovación curricular, referente a la construcción de un sistema axiomático a partir de situaciones problema por parte de los estudiantes, da lugar a que a estos se les dificulte encontrar fuentes de información relacionadas con el contenido de la clase (*e.g.* formas de abordar y explorar una situación problema, demostraciones de teoremas, caracterización de los objetos geométricos, entre otros). Por tal razón, el equipo de investigación pone en marcha la estrategia de elaborar notas de clase, con el fin de que los estudiantes tengan a la mano la información para estudiar y realizar tareas extra-clase. Las notas de clase son un compendio de informes escritos por los estudiantes en el que se registran las principales acciones que se llevaron a cabo durante la clase y que contribuyeron a la ampliación del sistema axiomático; allí se reportan demostraciones, los elementos que se introdujeron al sistema axiomático, las propuestas hechas por los estudiantes para construir justificaciones, etc. En consecuencia, las notas de clase cumplen la función de ser la bitácora del curso.

Las notas de clase no solamente contribuyen a la formación del estudiante y a la mejora de sus habilidades comunicativas, sino que también a las planeaciones de clase elaboradas por el docente, ya que a partir de su revisión él puede evidenciar errores, dificultades o elementos que se hayan pasado por alto y que sea necesario tratarlos a profundidad.

Los estudiantes realizan las notas de clase teniendo en cuenta una plantilla dada por el profesor al comienzo del curso. El profesor revisa y envía a los autores del informe las correcciones que le parezcan pertinentes, en aras de producir la versión final de este.

Posteriormente, el informe definitivo se comparte con todos los estudiantes por medio del directorio electrónico del curso.

2.4 ANÁLISIS

A partir de la revisión de diferentes producciones del equipo de investigación, pudimos establecer los elementos que, a nuestra consideración, caracterizan la innovación curricular. Dichos elementos dependen unos de otros, por lo que es imposible que la innovación planteada pueda llevarse a cabo haciendo omisión a alguno de ellos. Por ejemplo, si no se diseñaran cuidadosamente las situaciones problema, no habría lugar para la interacción social en clase, o, sin el uso de un *software* de geometría dinámica, no sería posible una exploración que permitiera favorecer el proceso de conjeturación, lo cual afectaría directamente la elaboración de demostraciones y la construcción de un sistema axiomático.

La innovación diseñada por el equipo de investigación suscita un cambio en los componentes del currículo que atienden a la definición propuesta por De Zubiría. En la siguiente tabla se pone en evidencia el cambio que, consideramos, se efectuó en cada uno de los componentes del currículo a partir de la implementación de la innovación (Tabla 7):

Tabla 7
Elementos del currículo propuestos por De Zubiría, en relación con antes y en la innovación

Componentes del currículo según De Zubiría	Antes de la innovación curricular	En la innovación curricular
Propósitos educativos	Brindar a los estudiantes un espacio para el aprendizaje de cierto contenido geométrico.	Brindar a los estudiantes un espacio para la demostración en geometría euclidiana desde una perspectiva disciplinar y pedagógica.
Contenidos	Los contenidos abordados correspondían a los mencionados en el libro guía de la clase:	Se pretende la construcción de un sistema axiomático basado en la geometría euclidiana propuesta por George Birkhoff (Samper & Molina, 2013). Adicionalmente, como

	Geometría con aplicaciones y solución de problemas (Clemens et al, 1998).	consecuencia de la metodología usada, no es posible abarcar en su totalidad los contenidos que se tienen previstos para cada curso.
Secuenciación	El orden de los contenidos se establecía a partir del desarrollo del libro guía.	Aunque cada uno de los cursos en los que se implementa la innovación tiene un mismo punto de partida, no se tiene una secuencia establecida para abordar los contenidos, debido a que la construcción de conceptos y relaciones varía en cada curso según las producciones de los estudiantes.
Metodología	El profesor suministraba un sistema axiomático determinado, a partir de un texto guía del curso. Los estudiantes tenían que aprender individualmente, axiomas, definiciones y teoremas al mismo tiempo que elaboraban demostraciones reproduciendo los ejemplos de demostración mostrados por el profesor y el libro.	Mediante la interacción social en clase se busca la construcción de conceptos y relaciones geométricas. El profesor propone a los estudiantes una situación problema en la cual, como solución, empleando un *software* de geometría dinámica, se debe presentar una conjetura por cada grupo de estudiantes. Estas son puestas en discusión frente a la comunidad de clase, para escoger la que mejor represente la situación problema. Posteriormente se demuestra y se incluye en el sistema axiomático. Las definiciones y los postulados son incluidos en el sistema axiomático conforme se desarrolla el curso; cuando se quiere comenzar el estudio de un nuevo objeto geométrico para la clase o cuando se ve la necesidad de completar alguna demostración.
Recursos	Uso de un libro guía para la clase.	- Uso de *software* de geometría dinámica para la representación de objetos geométricos. - Implementación de situaciones problema. - Empleo de recursos didácticos: reglas, compás, entre otros.
Evaluación	Se llevaba a cabo mediante comprobaciones escritas.	Se tiene en cuenta: - tareas extra-clase

	- actividades en clase - comprobaciones escritas - participación - notas de clase.

De esta manera, los cambios efectuados por el equipo de investigación a cada componente del currículo se corresponden efectivamente con una innovación curricular. Adicionalmente, al comparar los criterios para la identificación y el análisis de innovaciones educativas con la innovación curricular en mención (Tabla 8), es posible evidenciar que cumple con cada uno de ellos. Así, a partir de lo mencionado por CEUB (2014), la innovación curricular puede considerarse también como una innovación educativa centralizada en los cambios curriculares.

Tabla 8
Análisis de la Innovación Curricular

Criterios para la identificación y el análisis de innovaciones educativas, según Rimari (2008)	**Análisis**
a. Innovación supone transformación y cambio cualitativo significativo, no simplemente mejora o ajuste del sistema vigente	Las modificaciones realizadas a cada componente del currículo, a partir de la innovación, dan lugar a cambios relevantes en la rutina tradicional de la clase (Tabla 7).
b. Una innovación no es necesariamente una invención, pero sí algo nuevo que propicia un avance en el sistema hacia su plenitud, un nuevo orden o sistema *c. La innovación no es un fin en sí misma sino un medio para mejorar los fines de la educación*	Los cambios propuestos por el equipo son novedosos frente a lo existente. El cambio en los propósitos, las metas y los objetivos del curso, el diseño de situaciones problema, la interacción social en clase, entre otros, promueven un avance en pro del mejoramiento de la formación de profesores de matemáticas.
d. La innovación implica una intencionalidad o intervención deliberada y en consecuencia ha de ser planificada	Las razones que impulsaron la innovación se centran, a grandes rasgos, en el favorecimiento del desarrollo de capacidades referentes a las necesidades de la formación profesional de los estudiantes –estas fueron mencionadas en una sección anterior–. Para ello, el equipo *Æ•G* realizó varias

	investigaciones que sustentaran y estructuraran la innovación, no solo desde una perspectiva teórica, sino también desde una práctica a partir de la aplicación de pruebas piloto, obversaciones sistemáticas y análisis de estas.

CAPÍTULO 3
LA ENSEÑANZA DEL CÁLCULO EN COLOMBIA

El siguiente capítulo se encuentra divido en dos partes. La primera alude a una aproximación panorámica a la evolución del currículo de Matemáticas en Colombia, a partir de la segunda mitad del *siglo XX*. En esta aproximación se recogen las modificaciones aplicadas al currículo de matemáticas, como resultado de la generación de propuestas curriculares y de la expedición de decretos, resoluciones y leyes. La segunda parte, se enfoca en describir, a partir de tal aproximación, cuál ha sido la historia del Cálculo en el currículo, de allí destacamos dos momentos generales que, desde nuestra perspectiva, se corresponden con un paradigma que repercute, de forma negativa, en el cumplimiento de las directrices actuales emanadas por el MEN para el área de matemáticas.

3.1. UNA APROXIMACIÓN PANORÁMICA DE LA EVOLUCIÓN DEL CURRÍCULO DE MATEMÁTICAS EN COLOMBIA

Uno de los intereses centrales que motivan este trabajo, se enfoca particularmente en realizar una descripción de lo que ha sido la enseñanza del Cálculo en la Educación Media en Colombia. Por esta razón, consideramos relevante el trabajo de Tapiero (2020), quien realizó un recuento histórico del tratamiento de la derivada en las matemáticas escolares colombianas, pues deja en evidencia varios momentos que permiten reconocer la evolución del currículo de matemáticas en Colombia, desde la segunda mitad del *siglo XX*.

En su estudio, Tapiero (2020) reporta que hacia la década de los 50 se expide el Decreto 0075 de 1951, mediante el cual se estableció el plan de estudios para la enseñanza secundaria. Sin embargo, este decreto no contemplaba algún curso de matemáticas relacionado con el estudio del Cálculo, incluso no se consideraba un curso de matemática para el sexto año escolar[30].

En 1962 se divulgó el Decreto 045 en el cual se constituyó la educación secundaria o bachillerato en dos ciclos. En el primero de ellos, denominado Ciclo Básico de Enseñanza Media y constituido por los años primero, segundo, tercero y cuarto de secundaria, no se contemplaban cursos de matemáticas relacionados, particularmente, con el contenido del Cálculo. No obstante,

[30] Los años primero a sexto, comentados en los decretos citados, corresponden en la actualidad a los grados sexto a undécimo, respectivamente.

en el segundo ciclo o periodo complementario de la cultura general, conformado por los años quinto y sexto, se incluyeron cursos de Trigonometría y Geometría Analítica, e iniciación al Análisis Matemático.

Posteriormente, en 1974, se emitió el Decreto 080 que anuló el Decreto 045 de 1962, estableciendo nuevas medidas relacionadas con la Educación Media. En desarrollo de este la Resolución 277 de 1975 implementa definitivamente parte de la Matemática Moderna en el bachillerato, con la aparición de la lógica, los conjuntos y las estructuras algebraicas (Pérez, 2018). Dado que los programas de matemáticas presentaban fallos en cuanto a su diseño curricular, debido a que se limitaban a ser un listado de contenidos (Gómez, 2014, como se citó en Tapiero, 2020), se expide el Decreto 1419 de 1978, que presentaba las normas y orientaciones básicas para la administración curricular de los diferentes niveles de educación formal, que constituyeron una renovación curricular centrada en el mejoramiento cualitativo de la educación.

Siguiendo a Tapiero (2020), en el mismo año (1978) comenzó la revisión y diseño de los programas de la Educación Básica, con la contribución del Dr. Carlos Vasco, quien se desempeñaba como asesor del Ministerio de Educación Nacional, dando como resultado nuevos programas de matemáticas bajo el enfoque de sistemas, que consistía en trabajar "las distintas regiones de las matemáticas, los números, la geometría, las medidas, los datos estadísticos, la misma lógica y los conjuntos, con un enfoque sistémico que los comprenda como totalidades estructuradas, con sus elementos, sus operaciones y sus relaciones" (Vasco, 1985, p. 49).

Posteriormente en el año 1984, se emite el Decreto 1002, estableciendo el plan de estudios para la Educación preescolar, básica primaría, básica secundaria y media vocacional. De esta manera, en febrero de 1985, en algunas instituciones los estudiantes de primer año de primaria en Colombia iniciaron con nuevos programas de matemáticas a partir del enfoque de sistemas establecido en este decreto, hasta el año 1989 (Pérez, 2018).

En ese mismo año, es decir 1989, se publicaron los programas de matemáticas de la Educación Básica Secundaria, con la intención de que estos se comenzaran a implementar desde el año 1990. Sin embargo, con la llegada de la Constitución Política de 1991, se expide la Ley General de Educación en 1994, que establece la regulación del currículo por medio de lineamientos generales, dejando de lado la potestad por parte del Ministerio de Educación Nacional de definir el currículo y los planes de estudio de las instituciones educativas (Pérez, 2018). En este sentido, no fue posible continuar la implementación de los programas curriculares de matemáticas con el enfoque de sistemas para la Educación Básica Secundaria y tampoco para la Educación Media. En consecuencia, el trabajo de renovación curricular elaborado por casi dos décadas, no se llevó a cabo en su totalidad, es decir, no hubo propuestas para los grados decimo y undécimo.

En ejercicio de las funciones conferidas en la Ley General de Educación, se emite la Resolución 2343 de 1996, mediante la cual se adopta un diseño de lineamientos generales de los procesos curriculares y se establecen los indicadores de logros para algunas áreas de la educación formal.

Dos años más adelante, en 1998, el MEN presenta los LC (MEN, 1998) mediante los cuales plantea un currículo organizado en relación con tres aspectos; los procesos generales, los contextos y los conocimientos básicos (estos últimos se desarrollan a través de cinco tipos de pensamiento matemático y sistemas).

Al inicio del *siglo XXI*, en el año 2000, el MEN emite los *Estándares para la Excelencia en la Educación*, que son resultado de la discusión sobre cómo mejorar la calidad de la educación, puesto que esta debe proporcionar a los estudiantes igualdad en oportunidades de aprendizaje y desarrollo individual y social (MEN, 2000). Para esto, propone el MEN, que es necesario que las instituciones y los docentes cuenten con ciertas pautas o normas comunes que contribuyan con este fin. Con estos estándares, se buscaba precisar lo establecido en los LC de 1998 y que las instituciones educativas tuvieran un referente para la formulación de sus Proyectos Educativos Institucionales (PEI).

Para el área de matemáticas, dichos estándares están formulados y organizados teniendo en cuenta los cinco tipos de pensamiento matemático, propuestos en los LC, involucrando solamente tres procesos matemáticos: Planteamiento y Resolución de Problemas, Razonamiento Matemático y Comunicación Matemática. Además, “Los estándares curriculares para matemáticas están formulados para cada grado, desde el grado primero hasta el grado undécimo, y contienen orientaciones generales para el grado obligatorio de preescolar” (MEN, 2000, p. 17).

Luego de la publicación de los *Estándares para la Excelencia en la Educación*, la comunidad educativa manifiesta inconformidades frente a lo que allí se propone. En primer lugar, porque la participación de la comunidad educativa en la generación de estos estándares fue reducida, en comparación con la producción de los LC. En segundo lugar, porque parte la comunidad consideró que estos no guardaban correspondencia con los, y en tercer lugar, porque las posiciones políticas de una parte de la comunidad se negaban a admitir estándares para la evaluación de los estudiantes.

Como consecuencia del rechazo de la comunidad educativa hacia estos estándares, el MEN, bajo el mismo discurso de la mejora continua a la educación, elaboró el documento *La Revolución Educativa: Estándares Básicos de Competencias de Matemáticas y Lenguaje para la Educación Básica y Media* (MEN, 2003), esta vez con la participación de un grupo amplio de expertos en el campo. La organización de dicho documento tiene en cuenta los cincos tipos de pensamiento matemático y los mismos tres procesos matemáticos tenidos en cuenta en los *Estándares para la Excelencia*. No obstante, como se pretendía que este documento estuviese, además, al alcance de los padres de familia o acudientes, los estándares se presentaron de forma reducida en tablas organizadas en cinco grupos de grados, de primero a tercero, cuarto a quinto, sexto a séptimo, octavo a noveno y décimo a once, acompañados de algunos ejemplos de actividades o problemas.

Posteriormente, en el año 2006, teniendo como referente a los LC y los dos documentos de estándares presentados en los años 2000 y 2003, surgen los EBC (MEN, 2006), particularmente en Matemáticas, debido a que las nuevas perspectivas sociales requerían que el sistema educativo proporcionara a los estudiantes herramientas para desarrollar capacidades necesarias para vivir, ser productivo y seguir aprendiendo. Es así como, se empieza a considerar como fundamental, para el desarrollo eficaz del país, la mejora continua de los sistemas escolares que garanticen una educación de calidad. De este modo, los EBC brindan parámetros relacionados con lo que el estudiante debe saber y saber hacer para alcanzar el nivel educativo de calidad esperado por el sistema educativo (MEN, 2006). En dicho documento, se muestran algunos elementos conceptuales y se propone de manera detallada, para cada uno de los pensamientos matemáticos, una serie de estándares dirigidos a los mismos cinco grupos de grados escolares establecidos en los estándares del año 2003.

En el año 2015, se expide la primera versión de los *Derechos Básicos de Aprendizaje* (MEN, 2015), en adelante DBA, como una herramienta útil para la comunidad educativa debido a que estos se plantean como un referente para el diseño de iniciativas curriculares de las instituciones educativas, razón por la cual no son una propuesta curricular general que deben adoptar las instituciones, sino que son un complemento para la formulación del currículo, del tal forma que este se estructure desde la equidad y la igualdad de oportunidades de aprendizaje. “Los DBA son una selección de saberes claves que indican lo que los estudiantes deben aprender en cada grado escolar desde 1° hasta 11° para las áreas de lenguaje y matemáticas" (MEN, 2015, p. 4).

A diferencia de los LC y de los EBC, los DBA no se presentan divididos explícitamente en los cinco tipos de pensamiento matemático, sin embargo, es posible identificar a qué tipo de pensamiento se refiere cada uno de ellos. Estos se encuentran organizados en una lista para cada grado, no obstante, no es necesario haber desarrollado el DBA anterior para abordar el siguiente, es decir, no son secuenciales. La estructura de un DBA de la primera versión se compone de un enunciado enumerado el cual se espera alcance el estudiante, unas ideas secundarias o palabras relevantes que le dan significado y un ejemplo del mismo que busca ampliar la compresión del enunciado (MEN, 2015). Estos apuntan al desarrollo de los EBC que hacen parte del grupo de grado al cual corresponden; esto significa que un DBA para grado primero apunta al desarrollo de un estándar del grupo de grados primero a tercero.

El proceso de elaboración general de la primera versión de los DBA se llevó a cabo en cuatro momentos: (i) la construcción inicial, (ii) presentación al país, (iii) talleres de retroalimentación y (iv) lanzamiento de la segunda versión.

Debido al descontento de una parte de la comunidad educativa por la ausencia de coherencia entre los DBA con los LC y EBC, se realiza el lanzamiento de la segunda versión de los DBA en el año 2016, resultado del análisis, discusión y reflexión de la primera versión de estos mediante mesas de discusión, que se realizaron en el tercer momento de la primera versión. La estructura de los DBA de la segunda versión cambia con respecto a la estructura de los de la primera; estos se componen, ahora, de un enunciado, de evidencias de aprendizaje y de un ejemplo.

Al siguiente año, el MEN publica las *Mallas de Aprendizaje* para los grados de primero a quinto de primaria. Estos documentos pretenden ser un insumo para las instituciones educativas a la hora de organizar sus propias mallas curriculares de tal forma que estas se fortalezcan y se actualicen, cualificando el trabajo en el aula, mientras que para los docentes, buscan aportar herramientas para realizar planeaciones de clase a lo largo del año escolar. Es por esto que, dichos documentos retoman los aprendizajes definidos en los DBA y los relaciona con la organización pedagógica y epistemológica de cada área establecida en los LC y los EBC, además de unas cuestiones didácticas que son útiles para su implementación en el aula (MEN, 2017).

Las *Mallas de Aprendizaje* para cada uno de los grados ya mencionados, contienen, en primer lugar, una introducción general del área para el grado, en la cual se presentan los aprendizajes adquiridos por los estudiantes en el grado anterior y los que se desarrollarán en el grado actual, con el fin de brindarle al docente una visión general sobre lo que puede evaluar al inicio del año escolar y lo que se esperar alcanzar al final de este. En segundo lugar, se muestra el mapa de relaciones, que presenta gráficamente "las relaciones desde los ejes y conceptos que estructuran el área hasta las acciones específicas que desarrollan los estudiantes en cada grado" (MEN, 2017, p. 11) con la intención de establecer de manera coherente la forma cómo se estructura cada área y los efectos de tal estructuración en el aula. En dicho mapa, se explicita el grado, las tres categorías organizadoras que corresponden a la agrupación de los cinco pensamientos matemáticos en tres grupos (Pensamiento Aleatorio, Pensamientos Numérico y Variacional y Pensamientos Métrico y Espacial), los ejes de progresión, la síntesis del enunciado del DBA y los procesos matemáticos sobre los cuales se espera trabajar.

En tercer lugar, se presenta la progresión de los aprendizajes en la cual se establece una relación progresiva entre los DBA del grado anterior, el grado actual y el grado siguiente, con el fin de que, a partir de la evaluación diagnóstica realizada al inicio del año, el docente evidencie la flexibilidad curricular en la que es preciso transitar, teniendo en cuenta las particularidades en el aprendizaje de los estudiantes. Finalmente se exhiben las consideraciones didácticas mediante las cuales se aclaran algunos conceptos fundamentales para el grado, se ofrece un marco de referencia relacionado con las dificultades de ciertos aprendizajes de los estudiantes y algunas maneras de atenderlas didácticamente. Además, se presentan varias situaciones, cuya complejidad es creciente, que promueven el aprendizaje y pueden interpretarse como sugerencias de actividades para ser incorporadas en las planeaciones de aula a lo largo del año.

Actualmente, los documentos curriculares que rigen el área de matemáticas para la Educación Primaria, Básica y Media son los LC (MEN, 1998) y los EBC (MEN, 2006); mientras que los DBA en su segunda versión (MEN, 2015) y las Mallas de Aprendizaje (MEN, 2017), se entienden como orientaciones pedagógicas.

3.2 LA HISTORIA DEL CÁLCULO EN EL CURRÍCULO COLOMBIANO

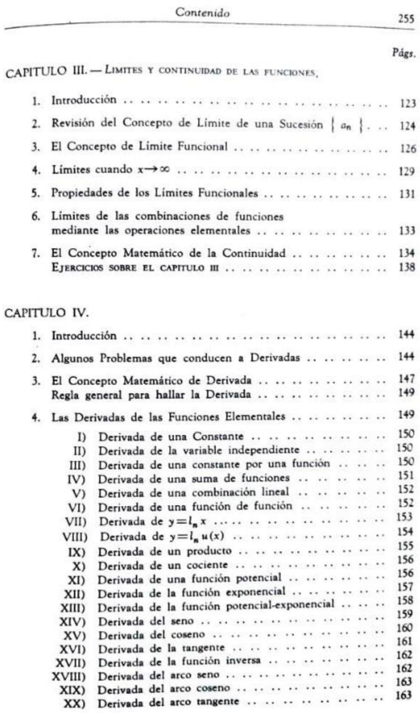
La historia del Cálculo en el currículo colombiano comienza con la emisión del Decreto 045 de 1962, en el que se estableció la implementación de contenidos relacionados con el estudio del Cálculo en la educación secundaria. Según Tapiero (2020), con base en este decreto se creó el libro *Introducción al Cálculo infinitesimal* de Viedma (1962), que fue usado por las instituciones educativas en su vigencia, en los grados 5º y 6º de bachillerato. Dicho libro se desarrolló paralelamente con una serie de libros de texto denominados "Colección Didáctica de Matemática Elemental Moderna" del mismo autor, los cuales atendían a las directrices de los programas de matemáticas elaborados en ese entonces en Colombia y en otros países americanos.

El libro citado está conformado por siete capítulos en los cuales se aborda, en orden: La Teoría Elemental de los Límites de Sucesiones de Números Reales, Las Funciones Elementales, Límites y Continuidad de las Funciones, Teoría de la Derivación, Aplicación de la Derivación, Los elementos del Cálculo Integral y Aplicaciones Geométricas y Físicas de la Integración.

De manera general, cada capítulo se desarrolla partiendo de nociones elementales junto con ejemplos sencillos y luego se presenta el contenido de forma rigurosa, siguiendo definiciones y teoremas, lo que en palabras del autor se entiende como: "de lo concreto nos elevamos a lo abstracto, para descender nuevamente a lo concreto mediante ejercicios de aplicación de los conceptos" (Viedma, 1962, p. 7). A continuación, se muestra un fragmento del índice del libro en el cual se evidencia lo mencionado (**Figura *11*** y **Figura *12***).

Figura 11

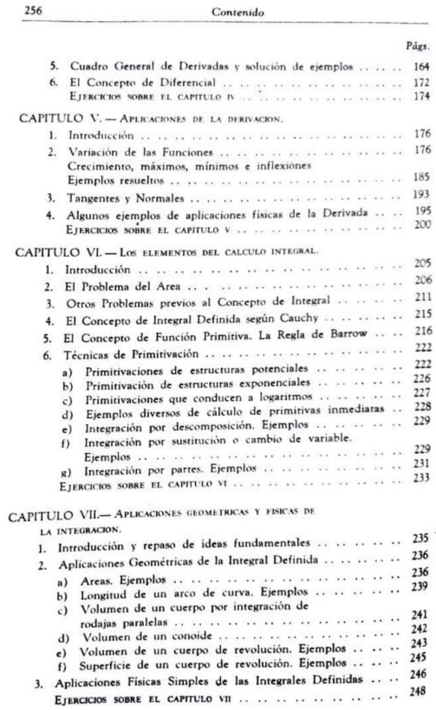
Facsímil de una parte del índice del libro Introducción al Cálculo Infinitesimal



Nota Parte del índice del libro Introducción al Cálculo infinitesimal que corresponde a los capítulos III y IV. Tomado de Viedma (1962)

Figura 12

Facsímil de una parte del índice del libro Introducción al Cálculo Infinitesimal

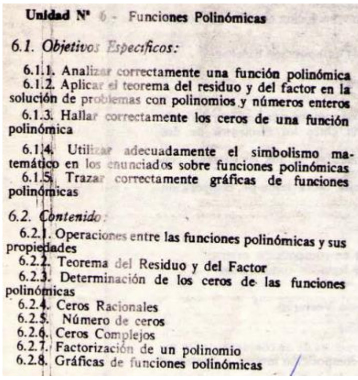


Nota Parte del índice del libro Introducción al Cálculo infinitesimal que corresponde a una parte del capítulo IV y a los capítulos V, VI y IV. Tomado de Viedma (1962)

Con la Resolución 277 de 1975, se estableció el programa de estudio para el área de matemáticas de la Educación Media. Dicho programa se encuentra seccionado por seis cursos que corresponden a los grados primero a sexto de bachillerato: cada uno de estos, se compone de unidades que reúnen los objetivos específicos para cada una de ellas y la lista de contenidos que deben abordarse. Para el caso del Cálculo, se inicia su estudio en el curso quinto, en el cual se abordan contenidos relacionados con la Geometría Analítica y la Trigonometría, específicamente, con las unidades Nº 6 Funciones Polinómicas (Figura 13), Nº 7 Funciones Trigonométricas (Figura 14) y Nº 9 Funciones y Transformaciones (Figura 15).

Figura 13

Facsímil tomado de la Resolución 277 de 1975



Unidad Nº 6 - Funciones Polinómicas

6.1. Objetivos Específicos:

6.1.1. Analizar correctamente una función polinómica

6.1.2. Aplicar el teorema del residuo y del factor en la solución de problemas con polinomios y números enteros

6.1.3. Hallar correctamente los ceros de una función polinómica

6.1.4. Utilizar adecuadamente el simbolismo matemático en los enunciados sobre funciones polinómicas

6.1.5. Trazar correctamente gráficas de funciones polinómicas

6.2. Contenido:

6.2.1. Operaciones entre las funciones polinómicas y sus propiedades

6.2.2. Teorema del Residuo y del Factor

6.2.3. Determinación de los ceros de las funciones polinómicas

6.2.4. Ceros Racionales

6.2.5. Número de ceros

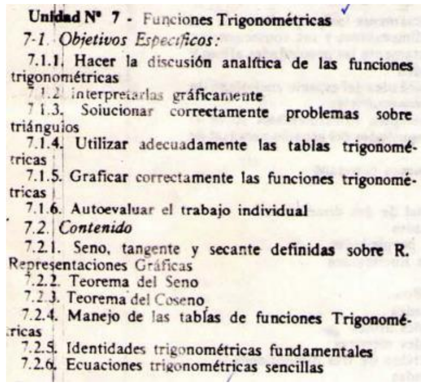
6.2.6. Ceros Complejos

6.2.7. Factorización de un polinomio

6.2.8. Gráficas de funciones polinómicas

Figura 14

Facsímil tomado de la Resolución 277 de 1975



Unidad Nº 7 - Funciones Trigonométricas

7-1. Objetivos Específicos:

7.1.1. Hacer la discusión analítica de las funciones trigonométricas

7.1.2. Interpretarlas gráficamente

7.1.3. Solucionar correctamente problemas sobre triángulos

7.1.4. Utilizar adecuadamente las tablas trigonométricas

7.1.5. Graficar correctamente las funciones trigonométricas

7.1.6. Autoevaluar el trabajo individual

7.2. Contenido

7.2.1. Seno, tangente y secante definidas sobre R. Representaciones Gráficas

7.2.2. Teorema del Seno

7.2.3. Teorema del Coseno

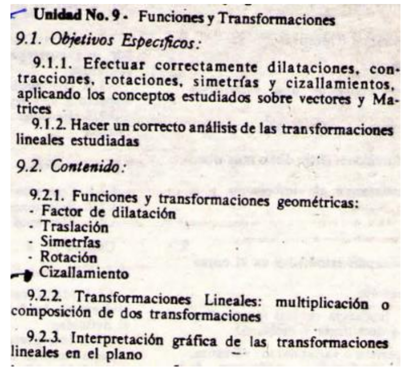
7.2.4. Manejo de las tablas de funciones Trigonométricas

7.2.5. Identidades trigonométricas fundamentales

7.2.6. Ecuaciones trigonométricas sencillas

Figura 15

Facsímil tomado de la Resolución 277 de 1975



Unidad No. 9 - Funciones y Transformaciones

9.1. Objetivos Específicos:

9.1.1. Efectuar correctamente dilataciones, contracciones, rotaciones, simetrías y cizallamientos, aplicando los conceptos estudiados sobre vectores y Matrices

9.1.2. Hacer un correcto análisis de las transformaciones lineales estudiadas

9.2. Contenido:

9.2.1. Funciones y transformaciones geométricas:
- Factor de dilatación
- Traslación
- Simetrías
- Rotación
- Cizallamiento

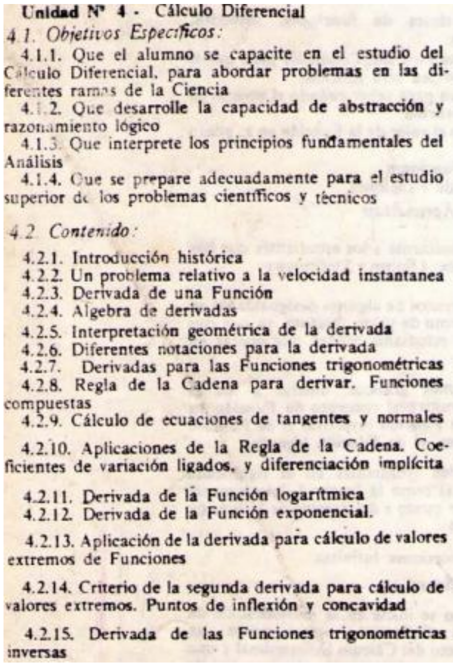
9.2.2. Transformaciones Lineales: multiplicación o composición de dos transformaciones

9.2.3. Interpretación gráfica de las transformaciones lineales en el plano

En estos facsímiles es posible observar que para abordar las unidades Nº 7 y Nº 9 es necesario haber abordado con anterioridad la unidad Nº 6, incluso es posible observar la regresión o progresión, como se quiera ver, de cada uno de los contenidos que componen cada unidad. El último curso de matemáticas para la educación media, corresponde al sexto curso, con nombre *Análisis Matemático*, en el que se esperaba tratar el contenido relacionado con Nociones sobre Conjuntos, Relaciones y Funciones, Sucesiones Infinitas, Cálculo Diferencial (Figura 16) y Cálculo Integral (Figura 17). A continuación, se explicitan las unidades correspondientes al Cálculo Diferencial y al Cálculo Integral:

Figura 16

Facsímil tomado de la Resolución 277 de 1975



Unidad Nº 4 - Cálculo Diferencial

4.1. Objetivos Específicos:

4.1.1. Que el alumno se capacite en el estudio del Cálculo Diferencial, para abordar problemas en las diferentes ramas de la Ciencia

4.1.2. Que desarrolle la capacidad de abstracción y razonamiento lógico

4.1.3. Que interprete los principios fundamentales del Análisis

4.1.4. Que se prepare adecuadamente para el estudio superior de los problemas científicos y técnicos

4.2. Contenido:

4.2.1. Introducción histórica
4.2.2. Un problema relativo a la velocidad instantanea
4.2.3. Derivada de una Función
4.2.4. Algebra de derivadas
4.2.5. Interpretación geométrica de la derivada
4.2.6. Diferentes notaciones para la derivada
4.2.7. Derivadas para las Funciones trigonométricas
4.2.8. Regla de la Cadena para derivar. Funciones compuestas
4.2.9. Cálculo de ecuaciones de tangentes y normales

4.2.10. Aplicaciones de la Regla de la Cadena. Coeficientes de variación ligados, y diferenciación implícita

4.2.11. Derivada de la Función logarítmica
4.2.12. Derivada de la Función exponencial.

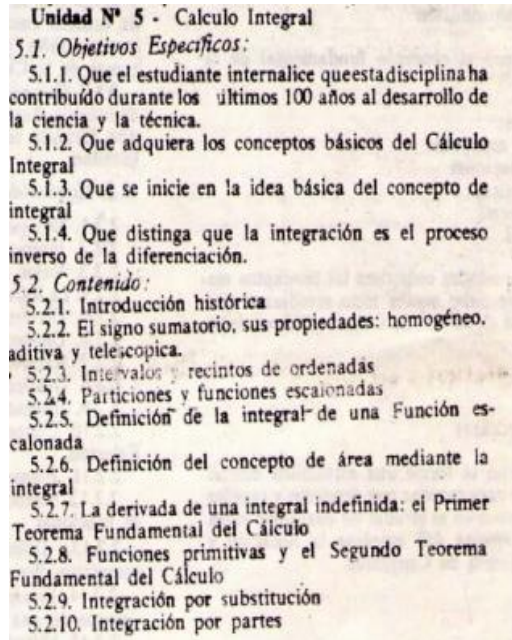
4.2.13. Aplicación de la derivada para cálculo de valores extremos de Funciones

4.2.14. Criterio de la segunda derivada para cálculo de valores extremos. Puntos de inflexión y concavidad

4.2.15. Derivada de las Funciones trigonométricas inversas

Figura 17

Facsímil tomado de la Resolución 277 de 1975



Unidad Nº 5 - Calculo Integral

5.1. Objetivos Específicos:

5.1.1. Que el estudiante internalice que esta disciplina ha contribuído durante los últimos 100 años al desarrollo de la ciencia y la técnica.

5.1.2. Que adquiera los conceptos básicos del Cálculo Integral

5.1.3. Que se inicie en la idea básica del concepto de integral

5.1.4. Que distinga que la integración es el proceso inverso de la diferenciación.

5.2. Contenido:

5.2.1. Introducción histórica
5.2.2. El signo sumatorio, sus propiedades: homogéneo, aditiva y telescopica.
5.2.3. Intervalos y recintos de ordenadas
5.2.4. Particiones y funciones escalonadas
5.2.5. Definición de la integral de una Función escalonada
5.2.6. Definición del concepto de área mediante la integral
5.2.7. La derivada de una integral indefinida: el Primer Teorema Fundamental del Cálculo
5.2.8. Funciones primitivas y el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo
5.2.9. Integración por substitución
5.2.10. Integración por partes

De la misma manera que en el quinto curso, en el sexto los contenidos se organizan de forma secuencial y se intuye, adicionalmente, que para abordar un contenido, es necesario haber abordado el anterior, y así sucesivamente. En este sentido, la organización general del contenido que se presenta en la Resolución 277 de 1975, propone abordar, en orden, Números Reales, Funciones, Sucesiones Infinitas, Límites, Cálculo Diferencial (Derivadas y aplicaciones de la derivada) y Cálculo Integral (Integrales y aplicaciones de la integral).

En el año 1978 se emite el Decreto 1419, el cual, en términos del contenido matemático, presentaba la misma organización que la Resolución 277 de 1975. Aunque en 1978, el Dr. Carlos Vasco y su equipo del MEN comenzaron a trabajar en la propuesta curricular basada en el enfoque de sistemas, no fue sino hasta 1985 que se dio la implementación de estas solamente para la educación primaria, pues aún no estaban listas las propuestas curriculares bajo este enfoque para la educación secundaria. Consecuencia de ello, la estructura de los contenidos referidos al estudio del Cálculo, era semejante a la establecida en la Resolución 277 de 1975.

Posteriormente, en el año 1989 se publican las propuestas para la educación secundaria, sin embargo, estas no se aplican debido a la consolidación de la Constitución Política de 1991, a partir de la cual se estableció la Ley General de Educación de 1994. En este sentido, fue hasta 1998 que la estructura de los contenidos relacionados con el Cálculo, seguía siendo la misma que la propuesta en la resolución citada. Por esto, es posible afirmar que desde 1975 hasta 1998, no se realizaron cambios en la enseñanza del Cálculo.

Con la llegada de los LC de 1998 se evidencia un cambio en lo que se concibe como el currículo de matemáticas, no solo en su formulación, dado que ahora son las instituciones quienes se encargan de ello, sino que también se establecen propósitos diferentes ya que se plantea el desarrollo de los cinco tipos de pensamientos, en lugar de la transmisión de una lista de contenidos matemáticos, como había venido siendo, al menos, a lo largo de los 36 años previos a su creación.

De manera particular, en los LC (MEN, 1998) se propone un cambio considerable en lo que tiene que ver en la enseñanza del Cálculo ya que "presupone superar la enseñanza de contenidos matemáticos fragmentados y compartimentalizados" (p.49). Este cambio se centra particularmente en el desarrollo del *pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos*, el cual, a grandes rasgos, se enfoca en el estudio, percepción, reconocimiento, representación e identificación de la variación y el cambio, presentes en contextos cotidianos, de las ciencias y propios de las matemáticas. Además, proponen que puede iniciarse su desarrollo en los primeros grados de la educación, dado que sus estructuras conceptuales se desarrollan en el tiempo y su aprendizaje es un proceso paulatino que busca consolidarse a lo largo de los grados escolares (MEN, 1998).

Posterior a la publicación de los Estándares para la Excelencia en la Educación en el año 2000, García et al. (2012) realizaron una reflexión acerca de los estándares curriculares que pertenecen al componente del pensamiento variacional, en la cual concluyen que, a pesar de que estos estándares recopilan bases propuestas en los Lineamientos, relacionadas con la variación, parecía ser que estos priorizaban muchos más aspectos relacionados con el estudio del álgebra. Por otro lado, los estándares relacionados con el pensamiento variacional publicados en La Revolución Educativa del 2003, no presentaron cambios notables frente a los *estándares para la Excelencia*.

No obstante, las ideas de los LC se refuerzan con la llegada de los EBC en el 2006, ya que estos muestran de manera más precisa lo que debe entenderse por cada uno de los pensamientos, además formulan una serie de estándares que buscan dar un alcance para el desarrollo de cada uno de ellos.

En el caso del pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos se espera que los estudiantes de grado 1º a 3º describan, reconozcan y construyan patrones, regularidades, equivalencias y situaciones de variación y cambio en diferentes contextos (numéricos, geométricos, cotidianos, entre otros); de 4º a 5º predigan, representen y expliquen patrones de variación en una secuencia y relaciones entre diferentes datos (igualdades y desigualdades numéricas, y dependencias entre cantidades que varían); 6º a 7º describan, representen e identifiquen las características de situaciones de variación, teniendo en cuenta diferentes representaciones (diagramas, expresiones verbales generalizadas, tablas y gráficas) y que, además, reconozcan y analicen las variables ligadas entre sí, las propiedades de correlación positiva y negativa entre variables y empleen métodos formales e informales para la solución de ecuaciones; de 8º a 9º modelen (MEN, 2006) "situaciones de variación con funciones polinómicas" (p. 87) y que analicen "en representaciones gráficas cartesianas los comportamientos de cambio de funciones específicas pertenecientes a familias de funciones polinómicas, racionales, exponenciales y logarítmicas" (p. 87); y de 10º a 11 utilicen (MEN, 2006) "las técnicas de aproximación en procesos infinitos numéricos" (p. 89) y que modelen "situaciones de variación periódica con funciones trigonométricas" (p. 89) e interpreten y utilicen sus derivadas.

En el caso de los DBA relacionados con el pensamiento variacional, sucede algo similar y es que al estar diseñados con base en los EBC, pretenden apuntar al desarrollo de los mismos estándares por grupos de grados; sin embargo, los DBA muestran de manera específica lo que se espera que aprenda, como mínimo, el estudiante en cada grado. Las *Mallas de Aprendizaje*, en relación con la categoría organizadora del pensamiento numérico y variacional, busca desarrollar los DBA relacionados con cada grado, señalando la transición entre un grado y el otro.

En orden cronológico, es posible evidenciar una concreción en las ideas curriculares respecto al pensamiento variacional; los LC hacen planeamientos generales acerca del pensamiento variacional, pero estas ideas se consolidan en los EBC tanto en el apartado teórico, el cual explicita de manera más detallada qué es el pensamiento variacional, como en el apartado que presenta la lista de estándares. Posteriormente, estas ideas se solidifican grado a grado con los DBA y, para el caso de la educación primaria, se proponen las Mallas de Aprendizaje que permiten evidenciar la coherencia vertical de lo establecido en los DBA, EBC y LC.

En síntesis, la historia del Cálculo en el currículo colombiano, que mencionamos, puede ser percibida en dos momentos generales. El primero, que data de 1962 hasta 1998 y el segundo desde 1998 hasta la actualidad. Con relación al primer momento, identificamos que algunos de los elementos de esa historia se corresponden con lo que Alanís & Salinas (2009) denominan el *Paradigma Tradicional en la Enseñanza del Cálculo*, que profundizaremos a continuación.

3.2.1 Paradigma tradicional en la enseñanza del Cálculo

Diferentes investigaciones en Didáctica de las Matemáticas, como las de Artigue (1995) y las de García (2013), han sacado a la luz problemáticas latentes en la enseñanza del Cálculo, que se reflejan en la deserción estudiantil, en la falta de comprensión del contenido matemático por parte de los estudiantes, en la manera en la que los profesores enseñan y en la actitud de los mismos estudiantes hacia el aprendizaje del Cálculo. Tales problemáticas, se deben en gran medida, a lo que Alanís y Salinas (2009) denominan el *Paradigma tradicional en la enseñanza del Cálculo*.

Los autores basan su trabajo en el estudio teórico de Gascón (2001) quien propone una relación entre los modelos epistemológicos de las matemáticas y los modelos docentes; los primeros se refieren a la estructura del contenido matemático, mientras que los últimos se originan a partir de efectuar dichas estructuras del contenido, en el aula. En este sentido, “la consecuencia del ejercicio normalizado de ciertos modelos docentes” (Salinas y Alanís, 2009, p.360) es lo que los autores identifican como el Paradigma tradicional en la enseñanza del Cálculo.

Gascón (2001), propone tres teorías epistemológicas de la organización de las matemáticas: las euclídeas, las cuasi-empíricas y las constructivistas; además, presenta cómo de cada una de estas resultan diferentes tipos de prácticas docentes. Interesa, de manera particular, profundizar en el modelo epistemológico del euclidianismo, pues, este y los modelos docentes que se desprenden de él, son característicos del paradigma en cuestión.

El modelo epistemológico del euclidianismo, que considera la organización de las matemáticas como un todo y que al mismo tiempo es el modelo general del saber matemático, "busca detener el regreso infinito y llevar a cabo una justificación lógica de las teorías matemáticas" (Gascón, 2001, p.131); esto también es conocido como los fundamentos de las matemáticas, los cuales pretender dar a estas una base firme para constituirlas como una teoría científica (Salinas y Alanís, 2009). De esta manera, se propone que, por medio de la conformación de un conjunto finito de axiomas compuestos por términos primitivos, sea posible deducir todo el conocimiento matemático.

El modelo epistemológico en mención, que se caracteriza por intentar trivializar el conocimiento matemático, da origen a dos modelos docentes clásicos: el teoricismo y el tecnicismo. Según Gascón (2001), estos dos se caracterizan por ser simplistas y arraigados a las creencias de que la enseñanza de las matemáticas es un asunto meramente procedimental y es ejercido solamente por el profesor. Son dos modelos esencialmente diferentes, pero con aspectos en común.

Por un lado, el modelo docente teoricista, o solamente teoricismo, sustenta que la enseñanza de las matemáticas se reduce a la reproducción o replicación del contenido matemático como una teoría, pues es suficiente presentar a los estudiantes lo ya producido. Este modelo docente se basa en las ideas del euclidianismo, es decir, en la axiomatización del conocimiento a través de términos primitivos, o como lo llama Gascón (2001), términos perfectamente conocidos. La resolución de problemas juega un rol secundario en el teoricismo, pues una de las características de este, es considerar, precisamente, que los problemas son ajenos a las teorías matemáticas y que estos no se relacionan con su constitución, ni con su estructura organizacional (Gascón, 2001). El teoricismo ignora los procesos propios de la actividad matemática, y, en consecuencia, no le da importancia alguna al desarrollo de los conocimientos matemáticos.

Por otro lado, en el modelo docente tecnicista, o simplemente tecnicismo, se considera una equivalencia entre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas con enseñar y aprender técnicas algorítmicas. Similarmente como ocurre en el teoricismo, la resolución de problemas tiende a dejarse de lado y, en este caso, se enfatiza especialmente en el dominio de ciertas técnicas que favorecen la solución de ejercicios muy particulares; las otras técnicas, relacionadas con estrategias de resolución complejas que no son algorítmicas, no son tenidas en cuenta dentro de lo que se espera enseñar. Nuevamente, menciona Gascón (2001), se evidencia que, en este modelo, al igual que en el teoricismo, se trivializa la enseñanza de las matemáticas.

Al respecto, Salinas & Alanís (2009) comentan que el tecnicismo se estructura como reacción al ejercicio del modelo docente teoricista, al ver el fracaso del teoricismo frente al aprendizaje de aquello que enseña (teorías), las instituciones optan por emplear el modelo tecnicista, pues este ofrece una alternativa frente al fracaso.

En palabras de los autores, el paradigma tradicional en la enseñanza del Cálculo se caracteriza por el contenido que es objeto de enseñanza y las estrategias que se usan para llevar este proceso a cabo. El contenido se presenta en una estructura que responde a las ideas del euclidianismo: es hipotético-deductivo y, por tanto, riguroso; es así organizado secuencialmente por definiciones, teoremas y demostraciones lógicas. Un claro ejemplo de esto son algunos de los libros de texto [*e.g.* Stewart (2012) y Larson & Edwards, (2010)] usados en la enseñanza del Cálculo, los cuales cumplen con la estructura del contenido ya mencionada, razón por la cual, el índice común de estos corresponde a números reales, funciones, límites, derivada, aplicaciones de la derivada, integral y aplicaciones de la integral. La enseñanza, por tanto, se vincula a esta estructura del contenido, por lo que es usual que la estrategia de enseñanza se reduzca a mostrar (enseñar) la estructura de contenidos, ya que se da por hecho que así se generará el aprendizaje (Alanís & Salinas, 2009).

El estudiante, bajo este paradigma, memoriza procedimientos que son resultado de la repetición de ejercicios, como, por ejemplo: "para encontrar el punto máximo o el mínimo, se deriva y se iguala a 0" o "para encontrar los puntos de corte con el eje x, se iguala y o $f(x)$ a 0"; entre otras reglas ya conocidas. El papel del estudiante es completamente pasivo y es el profesor quien transfiere el contenido organizado de forma rigurosa. Se espera que el estudiante domine esa estructura enseñada y cuente con la habilidad de solucionar ejercicios de carácter algorítmico. En consecuencia, son muchos los estudiantes que creen que, para dominar los contenidos, no es necesario tratar de comprenderlos, sino solamente basta con funcionar mecánicamente (Artigue, 2001: Salinas & Alanís, 2009).

Ahora bien, es posible evidenciar que este paradigma ha estado presentante desde que se implementaron, en el currículo colombiano, los contenidos relacionados con el estudio del Cálculo en 1962. Evidencia de ello es que varias instituciones educativas emplearon libros como *Introducción al Cálculo infinitesimal* de Viedma (1962), que estructura su contenido de forma deductiva y rigurosa, de tal forma que para abordar algún contenido, siempre es necesario haber abordado los del capítulo anterior. Por ello, no es extraño que la enseñanza del Cálculo se haya reducido a mostrar, en el orden que el libro indica, los contenidos. De la misma manera sucede con la Resolución 277 de 1975, pues no hubo cambio en la organización del contenido, ni en la forma en cómo estos se enseñaban. Por lo tanto, el primer momento general de la historia del Cálculo en el currículo colombiano corresponde con el paradigma en mención.

Por otro lado, en el segundo momento general de la historia es evidente un cambio de paradigma, debido a que, con la publicación de los LC ya no se propone la enseñanza del Cálculo en la Educación Media, sino que se le apunta al desarrollo del pensamiento variacional durante toda la escolaridad.

No obstante, el pensamiento variacional, desde nuestra perspectiva como estudiantes de la Educación Secundaria y estudiantes para profesores de matemáticas, no se desarrolla como se plantea en la política curricular vigente, sino que, al parecer, aún se conservan directrices curriculares que anteceden a la presentación de dichos documentos, las cuales hacen énfasis especial en la presentación sistemática de contenidos referentes al Cálculo, haciendo a un lado los procesos generales establecido en los LC, las competencias y estándares propuestas en los EBC, los DBA y lo sugerido en las Mallas Curriculares.

Consideramos lo anterior como una problemática que se evidencia en una gran cantidad de instituciones educativas de la Educación Básica Primaria, Básica Secundaría, Media e incluso en la Educación Superior, puesto que los profesores de matemáticas no consideran la diferencia entre el desarrollo del pensamiento variacional y la enseñanza del Cálculo. Esta es la razón por la cual, para ellos, el desarrollo de dicho pensamiento se centra exclusivamente en la enseñanza del Cálculo. Consecuencia de ese pensamiento, afirmamos que en la actualidad sigue practicándose el Paradigma tradicional en la enseñanza del Cálculo en las instituciones educativas.

Es esta una de las causas por las cuales son escasos los registros que ilustran la historia del desarrollo del pensamiento variacional en Colombia, a pesar de que la última reforma curricular se realizó hace poco más de 22 años. Es evidente que lo propuesto en los currículos de matemáticas de las instituciones educativas, se contrapone con lo que es el desarrollo del pensamiento variacional (Vasco, 2006). En este sentido, teniendo en cuenta que lo propuesto en la política curricular colombiana es el desarrollo del pensamiento variacional y no la enseñanza del Cálculo, en adelante enfocaremos nuestro estudio en términos de este pensamiento.

CAPÍTULO 4
CARACTERIZACIÓN DEL PENSAMIENTO VARIACIONAL

En el capítulo anterior se pudo evidenciar que en el currículo de matemáticas de la educación Básica y Media en Colombia hubo un cambio en 1998, pues, con la llegada de los LC la discusión comenzó a girar en torno al desarrollo del pensamiento variacional, haciendo a un lado las propuestas tradicionales referidas a la enseñanza del Cálculo. Posteriormente, con la publicación de los demás documentos curriculares se concretizaron algunas ideas del pensamiento Variacional, pero infortunadamente estos documentos no proporcionan suficientes detalles al respecto. Por esta razón, a modo de profundización, proponemos una caracterización del pensamiento variacional en términos de sus elementos constitutivos a la luz de los referentes curriculares y teóricos.

4.1 REREFENTES CURRICULARES DEL PENSAMIENTO VARIACIONAL

Para determinar los seis elementos que, desde nuestra perspectiva, constituyen el pensamiento variacional a partir de los referentes curriculares, se tuvieron en cuenta los LC, los EBC, los DBA en su segunda versión y las Mallas de Aprendizaje, además de considerar otros documentos generados por la Universidad de Antioquia y la propuesta realizada por Caballero-Pérez & Cantoral (2017) relacionada con el pensamiento y lenguaje variacional, entre otros autores.

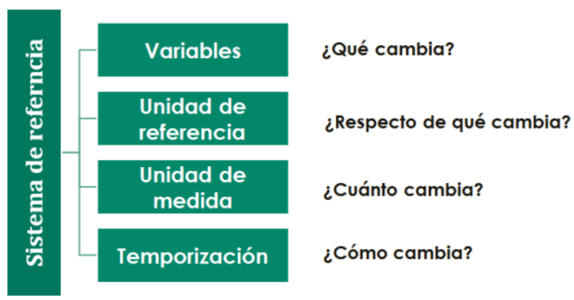
4.1.1 La variación y el cambio

En los documentos curriculares se propone el estudio de la variación y el cambio, atendiendo a su reconocimiento, percepción, identificación, etc., teniendo en cuenta diferentes registros semióticos ya sean verbales, gráficos o algebraicos (MEN, 2006). Estos documentos no proporcionan información adicional acerca de las nociones de variación y cambio. Sin embargo, consideramos que es de vital importancia tener estas nociones claras ya que como lo mencionan Caballero-Pérez & Cantoral (2017), el manejo de estas contribuye a la significación y aprendizaje de conceptos matemáticos propios del Cálculo.

En este sentido, el trabajo de Caballero-Pérez & Cantoral (2017), en relación con lo que denominan pensamiento y lenguaje variacional, se asemeja a la propuesta hecha por el MEN respecto al pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos; es por esta razón que aludimos a las nociones propuestas por Caballero-Pérez & Cantoral (2017) acerca de la variación y el cambio. Bajo esta óptica, el cambio consiste en las modificaciones de estados, mientras que la variación se concibe como la cuantificación de dichos cambios, tanto en la asignación de unidades a números, como el reconocimiento de aspectos medibles en las situaciones o fenómenos de estudio que pueden ser de naturaleza cualitativa o cuantitativa.

A grandes rasgos, los mismos autores sostienen que, para el reconocimiento, la organización y comunicación de la variación y el cambio es necesaria la articulación de dos nociones (la causalidad y la temporalización) las cuales, a su vez, configuran un sistema de referencia para el estudio de situaciones que involucran la variación y el cambio, compuesto por cuatro elementos (Figura 18).

Figura 18
Elementos de un sistema de referencia



Fuente: Caballero-Pérez & Cantoral (2017, p. 1061)

De esta forma, identificar la causalidad entre variables, permite reconocer el cambio y, por tanto, la variación (establecer *¿qué cambia?*). Por otro lado, para cuantificar el cambio es importante el uso de estrategias variacionales[31] que den respuesta a las preguntas *qué se compara* y *con qué se compara*, lo cual lleva al establecimiento de un referente para percibir el cambio. En consecuencia, no sería posible reconocer la variación, si no se han establecido con anterioridad referentes para percibir el cambio (*¿respecto de qué cambia?*) y para cuantificarlo (*¿cuánto cambia?*).

No obstante, para cuantificar el cambio es necesario identificar estados intermedios de los fenómenos de variación, con el propósito de usar estrategias variacionales que exhiban la

[31] Las estrategias variacionales son una forma particular de razonar y actuar ante una situación para tratar con el cambio y la variación (Caballero-Pérez & Cantoral, 2017).

evolución del cambio, esto es, establecer una temporalización (Caballero-Pérez & Cantoral, 2017). Para los fenómenos de variación continua, es preciso, considerar la temporización porque con ella es posible describir, caracterizar y cuantificar el comportamiento de las variables de una función, es decir, establecer el *¿cómo cambia?* Esto puede entenderse como una forma de discretizar los fenómenos de variación, paso indispensable para llevar a cabo el estudio del cambio, pues mediante las estrategias variacionales, los estados intermedios identificados van más allá de una imagen estática, se vuelen estados por los cuales transita el fenómeno, lo que pone en evidencia su variación (Caballero-Pérez & Cantoral, 2017).

Desde nuestra perspectiva, tanto los documentos curriculares, como la propuesta comentada anteriormente hacen alusión al estudio de la variación; sin embargo, consideramos que la variación, salvo en una excepción, se da en dos variables o más (una de estas puede ser, y a menudo es, el tiempo). En el caso del pensamiento variacional siempre están relacionas dos variables o más en los fenómenos de variación, aunque en ocasiones en las situaciones problemas o tareas se muestra de manera explícita solo una variable. En este sentido, más que el estudio de la variación, se realiza es el estudio de la covariación, ya que se propone el estudio de los fenómenos de variación en los cuales una variable cambia con respecto a la otra.

4.1.2 Situaciones problema

Desde los LC se propone el uso de situaciones problema centradas en contextos de la vida diaria, de las matemáticas y de otras ciencias, con el fin de poner en práctica el aprendizaje activo y darle sentido al uso de las matemáticas. También, sugieren que estas situaciones no sean consideradas como problemas de aplicación efectuadas solamente al final del estudio de un tema, sino que sean empleadas a lo largo de la formación ya que estas contribuyen a que los estudiantes puedan explorar problemas, formular conjeturas, plantear preguntas y reflexionar sobre modelos (MEN, 1998, como se citó en Tapiero, 2020).

De manera más general, en los EBC se alude a la formulación, el tratamiento y la resolución de los problemas como un proceso general. Al respeto, el MEN (2006) menciona que las situaciones problema que promueven la formulación, el tratamiento y la resolución de problemas,

> permiten desarrollar una actitud mental perseverante e inquisitiva, desplegar una serie de estrategias para resolverlos, encontrar resultados, verificar e interpretar lo razonable de

> ellos, modificar condiciones y originar otros problemas. Es importante abordar problemas abiertos en los que sea posible encontrar múltiples soluciones o tal vez ninguna. También es muy productivo experimentar con problemas a los cuales les sobre o les falte información, o con enunciados narrativos o incompletos, para los que los estudiantes mismos tengan que formular las preguntas. (p. 52).

El desarrollo del pensamiento variacional se propone, precisamente, desde la resolución de situaciones problema que involucren contextos del entorno de los estudiantes, centrados particularmente en los fenómenos de variación y cambio.

4.1.3 La modelación

En la conformación de un currículo armonioso se contempla el desarrollo de cinco procesos generales que están presentes en toda actividad matemática; entre estos procesos destacamos la modelación pues tiene una estrecha relación con el desarrollo del pensamiento variacional, ya que permite describir la interrelación entre el mundo real y las matemáticas (MEN, 1998), en particular, aquellas situaciones que se relacionan con fenómenos de variación y cambio con los que interactúan los estudiantes en la vida diaria.

Un modelo alude a sistemas gráficos, figurativos mentales, tridimensionales, estructuras o artefactos materiales, que representan situaciones de la vida diaria de forma esquemática para hacerlas más comprensibles. El modelo tiene como propósito establecer ideas cercanas y concretas de aquello que se desea entender para su posterior manejo, contribuye a la formulación de conjeturas y el razonamiento; con él es posible operar transformaciones y experimentos de situaciones u objetos sin repercutirlos (MEN, 1998).

De este modo, la modelación "puede entenderse como la detección de esquemas que se repiten en las situaciones cotidianas, científicas y matemáticas para reconstruirlas mentalmente" (MEN, 2006, p. 53). La modelación permite simplificar y explorar situaciones problema a partir de representaciones mentales, gestuales, gráficas o simbólicas, contribuyendo así a la formulación y resolución de dichas situaciones; además, contribuye a la determinación de las variables y relaciones relevantes en la situación problema, dando lugar a la conformación de modelos cada vez más complejos, mediante los cuales se pueden realizar predicciones y verificar y obtener resultados. En este sentido, consideramos importante que las situaciones problema que se les propongan a los estudiantes, enfocadas a la obtención de un modelo como solución, deben formularse de tal forma que el modelo obtenido no corresponda solamente a la representación simbólica, sino que también impulsen el uso de otras representaciones.

En relación con el pensamiento variacional, la modelación se propone en términos de la covariación, centrando el estudio en cómo esta, la covariación, se puede capturar. Por ejemplo, esto último es posible al menos con dos lenguajes conocidos; por un lado, las razones y las proporciones que capturan momentos concretos de la covariación de magnitudes, y por otro lado, las funciones que capturan la continuidad de esta.

Adicionalmente, para Vasco (2002) la modelación es el principal propósito del pensamiento variacional y establece que esta se puede esquematizar en varias fases o momentos: momento de captación de patrones de variación, lo que cambia y lo que permanece; momento de creación de un modelo mental; momento de echar a andar el modelo; momento de comparar los resultados con el proceso modelado y momento de revisión del modelo.

4.1.4 El razonamiento algebraico

El razonamiento algebraico cumple un papel importante en el desarrollo del pensamiento variacional pues, como lo indican Posada & Obando (2006) este "alude al conjunto de procesos, procedimientos y esquemas que dan forma y sentido al pensamiento variacional" (p. 16). El razonamiento algebraico se enfoca en los procesos de generalización, que dan lugar al favorecimiento de actividades como la simbolización, la modelación, la justificación, la formulación de conjeturas, la argumentación, entre otras, de tal forma que estas permitan acceder a un nivel mayor de formalización (Hernández & Tapiero, 2014).

Algunas características del razonamiento algebraico tienen que ver con el estudio de la generalidad, con el trabajo con cantidades no conocidas y con el uso de símbolos para operarlas. No obstante, el razonamiento algebraico no consiste solamente en el manejo simbólico del álgebra y no debe entenderse exclusivamente como la generalización de la aritmética, sino que, a partir de los sistemas de representación, este debe propiciar contextos de aprendizaje significativos para el análisis de situaciones que contribuyan al desarrollo de los procesos de generalización.

4.1.5 Sistemas de representación y tecnologías computacionales

Las investigaciones relacionadas con la representación de conceptos matemáticos ocupan un papel preponderante en la Educación Matemática pues buscan precisar cómo se produce el conocimiento en los estudiantes (Blázquez & Ortega, 2001). En este sentido, para Castro y Castro (1997, como se citó en Blázquez & Ortega, 2001), los conceptos matemáticos pueden expresarse mediante varios sistemas de representación y se sugiere utilizarlos de forma sistemática y simultánea, a partir de los primeros años de la educación, con el fin de favorecer la conformación de ideas cada vez más complejas sobre los conceptos (Dreyfus, 1991, como se citó en Blázquez & Ortega, 2001).

Particularmente, para el desarrollo del pensamiento variacional, los LC y los EBC señalan la importancia de trabajar con sistemas de representación asociados a la variación tales como: las representaciones verbales, las representaciones algebraicas, las representaciones tabulares, las representaciones gráficas, y las representaciones pictóricas o icónicas. A continuación, detallamos cada una de estas, e incluimos algunas observaciones sobre el paso de una representación a otra:

Representaciones verbales: Los sistemas de representación verbal refieren específicamente al uso del lenguaje retórico, incluyendo terminología específica del lenguaje matemático académico (Cañadas, 2007, como se citó en Rodríguez, 2015). Dentro de este sistema de representación se consideran tanto el lenguaje escrito, como el lenguaje oral, siendo el último el más complejo, debido a que en este se deben tener en cuenta diferentes aspectos como la entonación y las pausas, a diferencia del lenguaje escrito, pues el enunciado se estructura de manera más adecuada por la puntuación (Freudenthal, 1983, como se citó en Rodríguez, 2015). De esta manera, a modo de ejemplo, al referirse al carácter creciente de una función, se suele decir "mientras una de las variables aumenta, la otra también lo hace", lo cual se puede expresar en lenguaje algebraico como $\forall x \in R, si\ x_1 < x_2\ entonces\ f(x_1) < f(x_2)$.

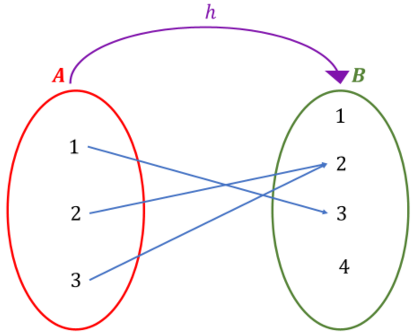
Representaciones algebraicas: Este tipo de representación se relaciona estrechamente con el álgebra, particularmente con el uso de símbolos empleados con el propósito de expresar ideas matemáticas desligadas, temporalmente, de sus contextos originarios. Aunque este tipo de representación es la más empleada en las escuelas, no debe ser la única representación estudiada porque es posible que no se logre una apropiación adecuada de los conceptos, sino más bien una carente de significado. A este sistema de representación pertenecen las fórmulas y las expresiones analíticas $f(x) = 3x + 1$, $A = \frac{bh}{2}$, $m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$, entre otras.

Representaciones tabulares: Dentro del pensamiento variacional, estas suelen utilizarse para representar las coordenadas de algunos puntos de la gráfica de una función, que son ubicados generalmente en tablas de dos columnas y que expresan la correspondencia entre valores de dos variables. En la primera columna se ubican los valores numéricos que se le asignan a la variable independiente x y en la segunda los valores que se obtienen para la variable dependiente y. Además, la representación tabular de una función es una herramienta útil frecuentemente usada como antesala para la elaboración de la representación gráfica de esta.

Para la elaboración de una tabla de valores, no siempre es necesario contar con la representación algebraica de la función; por ejemplo, se puede realizar una tabla de valores registrando diariamente y durante un mes, el tamaño de una magnitud vinculada al crecimiento de una planta; en este caso, la variable independiente corresponde al tiempo (día en el que se realiza la medición de la altura de la planta) y la variable dependiente se relaciona con la altura de la planta en el día de la medición.

Representaciones gráficas: Se pueden realizar gráficas de tipo sagital o cartesiano, particularmente para la representación de funciones. Por un lado, las gráficas sagitales permiten representar las relaciones entre los elementos de dos conjuntos por medio de flechas. Usualmente, los conjuntos son representados con óvalos o círculos y las fechas parten de un elemento de un conjunto (preimagen) y apuntan hacia uno y solo un elemento del otro conjunto (imagen), como se observa en la Figura 19.

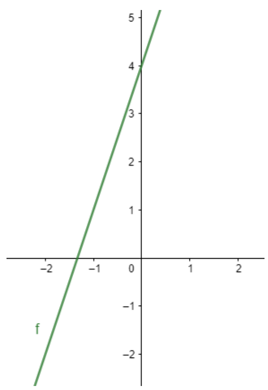
Figura 19
Ejemplo de representación sagital de una función



Este tipo de representación prioriza la correspondencia, más que la covariación. Por otro lado, las gráficas de tipo cartesiano corresponden a una curva o sucesiones de puntos que representan la función, ubicada en un plano cartesiano compuesto por dos ejes perpendiculares x e y. Para la elaboración de una gráfica cartesiana, es preciso, en ocasiones, disponer de la tabla de valores, ya que esta representa algunos puntos que pertenecen a la función, conformados por la *abscisa*, que se ubica en el eje x y la *ordenada*, en el eje y (Figura 20).

Figura 20

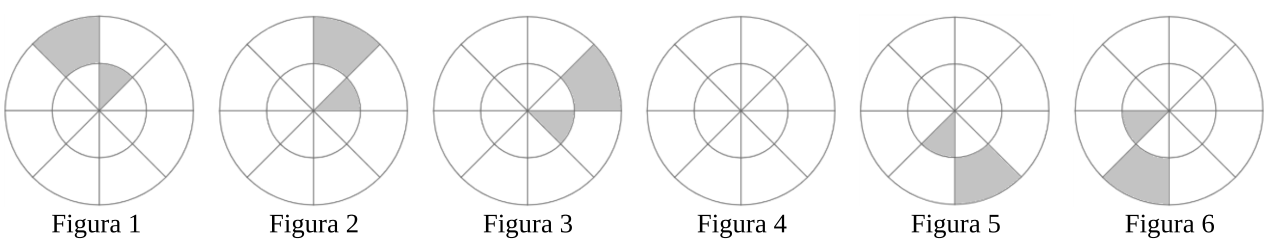
Ejemplo de representación cartesiana de una función



Representaciones pictóricas o icónicas: la representación pictórica o icónica refiere a una forma de representar, interpretar y relacionar información de manera visual. Este tipo de representaciones carecen de símbolos (Paladinez, 2018) como se muestra en la Figura 21. El MEN sugiere el uso de representaciones pictóricas para el inicio del desarrollo del pensamiento variacional con el estudio de los patrones y las regularidades, porque este tipo de exploraciones permiten hacer descripciones verbales de las cantidades existentes que intervienen en una transformación (MEN, 1998).

Figura 21

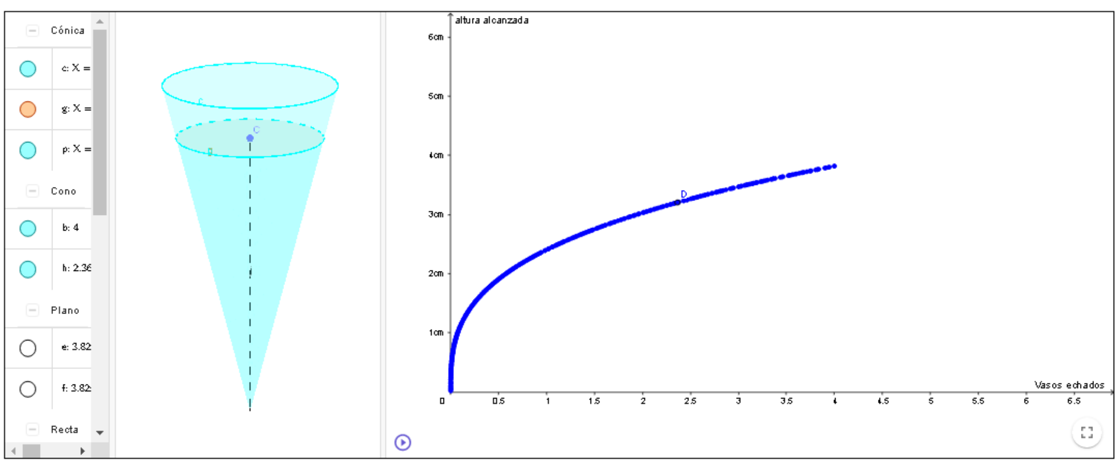
Ejemplo de la representación pictórica de una función, específicamente de una sucesión



Como ya se ha mencionado, para la conformación de ideas complejas sobre los conceptos se precisa la movilidad entre diferentes sistemas de representación. Una herramienta que facilita dicha movilidad son las tecnologías computacionales, pues con la implementación de estas en el currículo "se ampliaron las posibilidades de representación de los fenómenos de variación y de poder pasar de manera versátil de un sistema de representación a otro" (MEN, 2004, p. 27).

En la actualidad, estas tecnologías computacionales se sintetizan en simuladores y *software* que integran programas de geometría dinámica y calculadoras gráficas, como GeoGebra, Derive, Winplot, entre otros. Una de las ventajas del uso de estos *software*, es que permiten ver, de manera simultánea, en diferentes ventanas, distintas representaciones de una misma función, constituyendo así un ambiente propicio para la comprensión de la covariación de las variables que intervienen, por ejemplo, al trabajar con el llenado de recipientes es posible programar en GeoGebra la situación, de tal manera que se pueda visualizar en paralelo la forma en cómo se llena un determinado recipiente y la representación gráfica de la función que captura la covariación entre la *altura alcanzada* y la cantidad de *vasos echados* al recipiente[32] (Figura 22).

Figura 22
Llenado de un recipiente en GeoGebra



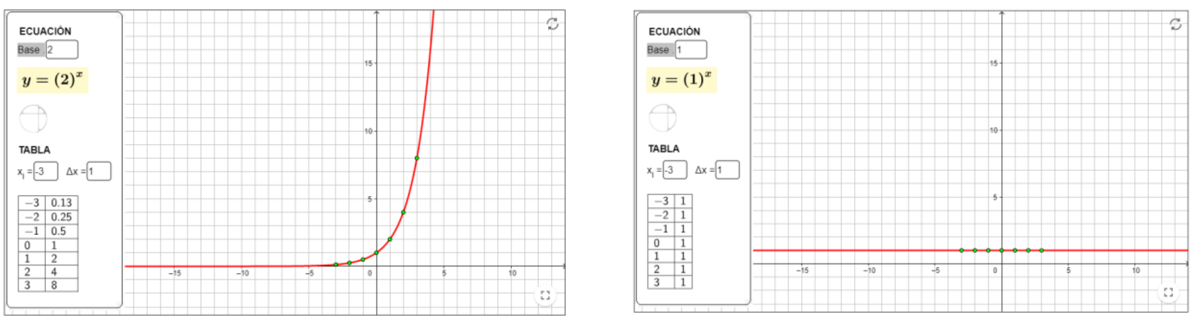
Nota imágenes tomadas del aplicativo en GeoGebra, perteneciente a Pablo Montero. Tomado de https://www.geogebra.org/m/stu62bbd

[32] Cabe señalar que la covariación señalada no es la única que se puede analizar de la situación, también es posible analizar la covariación entre altura alcanzada y el tiempo que tarda en llenarse, entre la cantidad de vasos echados y el volumen, entre la altura alcanzada y el volumen, etc.

Además de esto, un *software*, desde el punto de vista del pensamiento variacional, actúa "como una manera de indagar no sólo por procesos asociados a la modelación desde fenómenos de variación en otras ciencias; sino también, como una forma de producir y reproducir las relaciones variacionales que se dan entre algunos objetos matemáticos" (Villa & Ruiz, 2010, p. 516).

En la Figura 23 se muestra otro ejemplo de lo mencionado. Allí se puede evidenciar un aplicativo de GeoGebra, que posibilita estudiar la función exponencial y sus formas de representación simbólica, tabular y gráfica. El estudiante puede explorar las transformaciones de la función cambiando el valor de la base, el primer valor de x en la tabla de valores y el incremento de sus valores.

Figura 23
Ejemplo de aplicativo en el software GeoGebra



Nota imágenes tomadas del aplicativo en GeoGebra, perteneciente a Guillermo Tinoco. Tomado de https://www.geogebra.org/m/uaHedU28

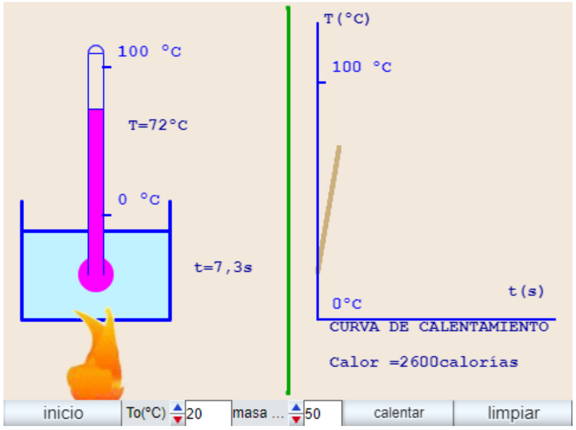
Los simuladores, por otra parte, permiten recrear situaciones de variación y cambio tales como variaciones de la temperatura, intensidad lumínica, Ph, crecimiento de una planta, fenómenos naturales, etc. Estos conforman un entorno favorable para la representación de la covariación y de los fenómenos, sin embargo también en es posible representarlos en *software* (Figura Y), a pesar de que esto no sea siempre necesario.

Los laboratorios virtuales como *PhET Colorado*, *Tinkercad*, entre otros, permiten lo mencionado. A modo de ejemplo, se muestra a continuación un simulador de EducaLAB[33] en el

[33] Puede consultarse en http://recursostic.educacion.es/secundaria/edad/4esofisicaquimica/4quincena7/4q7_contenidos_1c.htm

cual es posible estudiar la relación que existe entre el calor y la temperatura que va adquiriendo una cierta cantidad de agua (Figura 24).

Figura 24
Ejemplo de simulador para estudiar la relación existente entre el calor y la temperatura



4.1.6 Contenido matemático

Los LC proporcionan una lista de núcleos conceptuales matemáticos en los que está involucrada la variación, vinculados al desarrollo del pensamiento variacional:

- Continuo numérico, números reales, en su interior los procesos infinitos, su tendencia, aproximaciones sucesivas, divisibilidad;
- La función como dependencia y modelos de función;
- Las magnitudes;
- El álgebra en su sentido simbólico, liberada de su significación geométrica, particularmente la noción y significado de la variable es determinante en este campo;
- Modelos matemáticos de tipos de variación: aditiva, multiplicativa, variación para medir el cambio absoluto y para medir el cambio relativo. La proporcionalidad cobra especial significado.

En los EBC es posible evidenciar que en el apartado del pensamiento variacional, a pesar de que los núcleos conceptuales establecidos en los LC no se mencionan de manera explícita, cada uno de los estándares se relaciona con alguno de los núcleos enunciados. De la misma forma sucede con los DBA y las Mallas Curriculares.

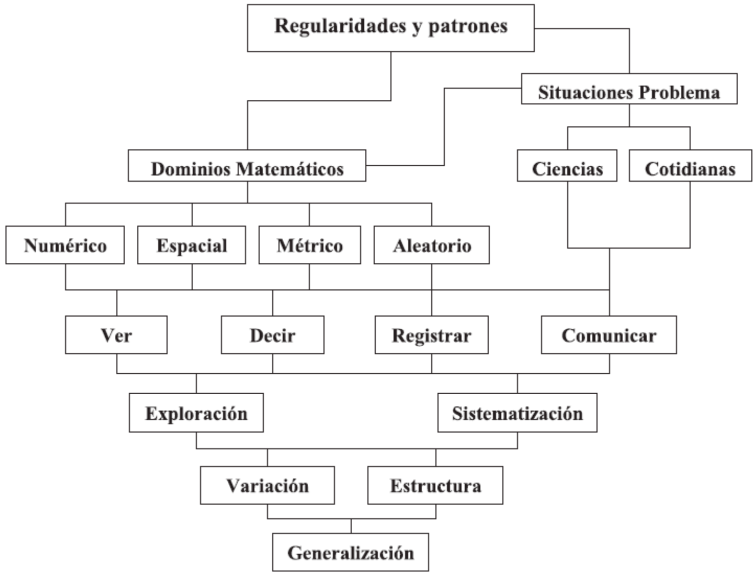
Previamente, Múnera et al (2006) realizaron una propuesta de reorganización de los Estándares Básicos de Competencias de Matemáticas y Lenguaje (MEN, 2003), en un trabajo desarrollado por un grupo de estudio de la Universidad de Antioquia. En ella presentan una estructura conceptual organizada en tres ejes temáticos que recogen los diferentes estándares por grupos de grados. Es preciso mencionar que mostramos dicha estructura conceptual porque tiene como base los LC, y en particular, los núcleos conceptuales matemáticos establecidos en estos, para el desarrollo del pensamiento variacional de grado primero a undécimo. Así, los ejes temáticos citados son (*i*) Patrones y Regularidades, (*ii*) Procesos Algebraicos y (*iii*) Análisis de Funciones.

Como en los documentos curriculares vigentes no se describen de manera precisa y clara los contenidos matemáticos que desarrollan el pensamiento variacional, mencionamos a continuación, algunos elementos de la propuesta de Múnera et al (2006) que tienen este propósito. Para cada uno de los ejes temáticos también se proponen esquemas que sintetizan las ideas planteadas para cada uno de ellos, mostrando una perspectiva conceptual que brinda herramientas para el diseño de tareas o situaciones problemas que fomenten el desarrollo del este pensamiento.

El estudio de *Patrones y Regularidades* se considera uno de los ejes temáticos que posibilitan la evolución de habilidades relacionadas a contextos de variación, además de ser una herramienta necesaria para iniciar el desarrollo del pensamiento variacional en la escuela. Entre tales habilidades se encuentran: *Ver*, que hace referencia a identificar el patrón, lo siguiente a la identificación de algo común; *Decir*, que alude a expresar verbalmente lo que se ha identificado; y, *Registrar*, que apunta a hacer visible el lenguaje, para lo que es indispensable el uso de símbolos, letras, dibujos, entre otros. Así, el estudio de los *Patrones y Regularidades* puede darse desde escenarios de la vida práctica, de otros campos de estudio y desde las matemáticas mismas (*e.g.* contextos numéricos, estocásticos o geométricos). De este último, se evidencia la relación del estudio de patrones con los demás tipos pensamientos matemáticos, pues estos deben integrarse para un mejor aprendizaje de las matemáticas (Múnera et al, 2006). En la Figura 25 se muestra el esquema que orienta este eje temático.

Figura 25

Esquema orientador del eje temático Patrones y Regularidades

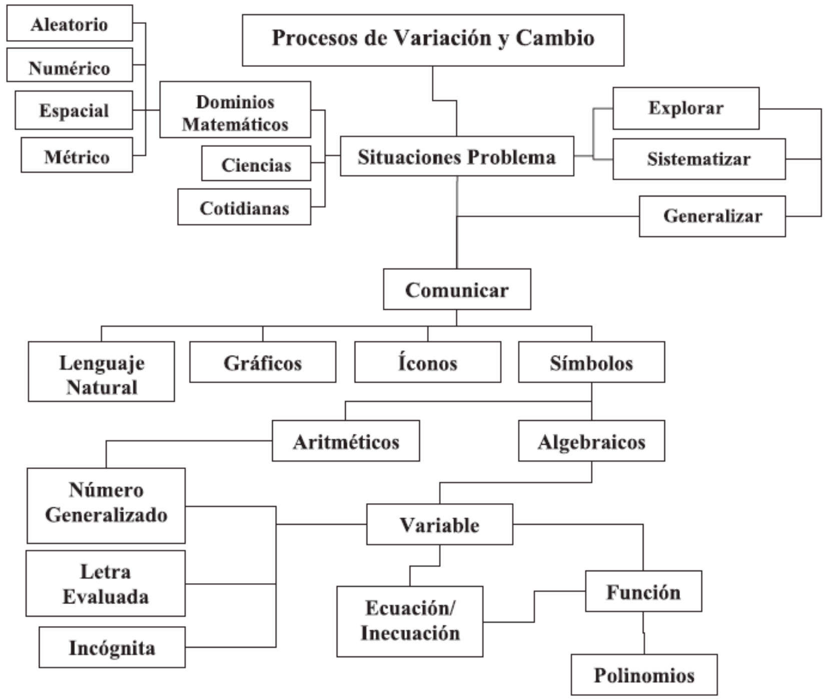


Tomado de Múnera et al (2006, p. 52).

Por otro lado, los *Procesos Algebraicos* son importantes pues vistos desde los contextos de variación y cambio, hacen posible comunicar la generalización a partir de las expresiones algebraicas. Los autores señalan que no se trata de presentar el Álgebra como una forma abstracta de la Aritmética, sino que esta debe apuntarle a una forma diferente de pensar las matemáticas, es decir, la expresión de la generalidad. Así, cuando los estudiantes aborden situaciones problema que involucren la variación y el cambio, es importante permitirles reflexionar acerca de lo que cambia, de lo que se conserva, y fundamentalmente "que comuniquen lo que observan y que expliciten dichas relaciones, que las transformen, que las expresen de diferentes formas, que hagan conjeturas y por tanto, que formulen hipótesis sobre la situación que analizan" (Múnera et al, 2006, p. 53). De esta manera, los estudiantes se involucran en procesos de análisis, exploración, sistematización y comunicación para expresar lo que ven, lo que tiene que ver con la generalización. Además, teniendo como referencia a Mason (1999, como se citó en Múnera et al, 2006), proponen que el desarrollo de procesos algebraicos en la escuela debe promover la búsqueda de significados y relaciones, la reflexión y comunicación de las ideas, para introducir formas de generalización desde las vivencias personales y los procesos sociales. En la Figura 26 se evidencia el esquema que orienta este eje temático.

Figura 26

Esquema orientador del eje temático Procesos Algebraicos



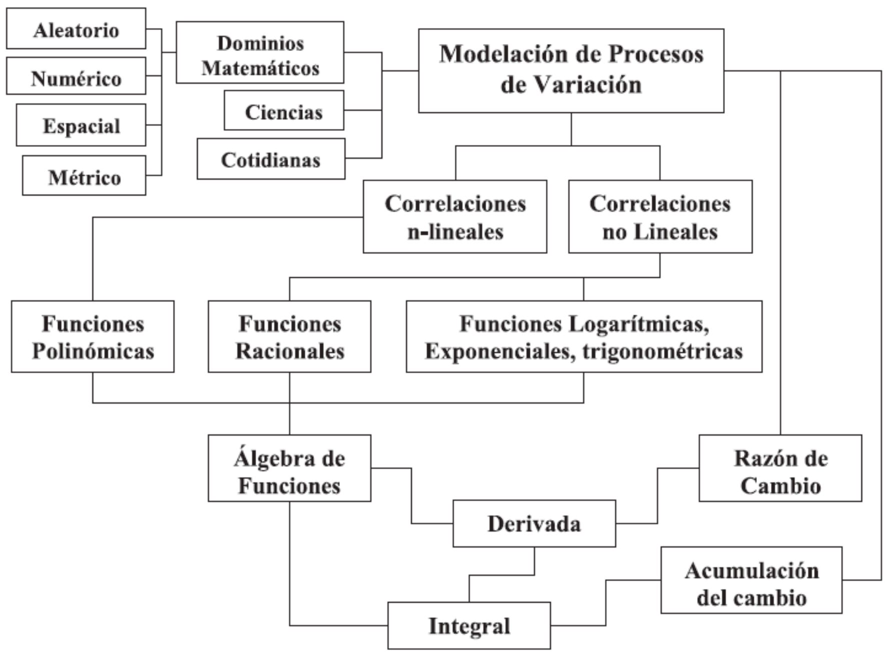
Tomado de Múnera et al (2006, p. 54).

Finalmente, el *Análisis de Funciones*, estudiado desde la variación y el cambio, está relacionado con los procesos de modelación matemática que son producto de la experimentación, reflexión, construcción de significados y formas de expresar la generalidad (Múnera et al, 2006). De esta manera, el análisis de funciones juega un papel importante en el desarrollo del pensamiento variacional debido a que permiten estudiar las situaciones de variación y cambio desde las diferentes representaciones que el Álgebra provee. Es así como abordar las situaciones problema, relacionadas con el análisis de funciones, desde los diferentes sistemas de representación contribuye al desarrollo del proceso matemático modelación y permite realizar predicciones en un fenómeno de variación y cambio. Mostrar situaciones problemas que requieran, para su solución, exploraciones en sistemas de representación diferentes al simbólico evita un tratamiento mecánico de los conceptos relacionados con las funciones.

Por lo tanto “es necesario enfrentar a los estudiantes a situaciones donde la función no exhiba una regularidad, con el fin de alejar la idea de que su existencia o definición está determinada por la existencia de la expresión algebraica" (MEN, 1998, p. 74). En la Figura 27 se especifica el esquema que orienta este eje temático.

Figura 27

Esquema orientador del eje temático Análisis de funciones.



Tomado de Múnera et al (2006, p. 56).

4.2 REFERENTES TEORICOS DEL PENSAMIENTO VARIACIONAL

Con el fin de formar una idea más amplia y global acerca del pensamiento variacional es preciso tener en cuenta las investigaciones realizadas por Carlson et al (2003), pues estas brindan elementos que contribuyen a una mejor comprensión del razonamiento covariacional. En este trabajo, asumimos las ideas de Carlson et al (2003) relacionadas con el razonamiento covariacional, como equivalentes a las del pensamiento variacional, pues consideramos que, a pesar de tener nombres diferentes, buscan los mismos fines: cultivar en los estudiantes herramientas para construir caminos y acercamientos significativos, útiles para la comprensión y uso de los conceptos y procedimientos principales del Cálculo.

En este sentido, Carlson et al (2003) definen el razonamiento covariacional como "las actividades cognitivas implicadas en la coordinación de dos cantidades que varían mientras se atienden a las formas en que cada una de ellas cambia con respecto a la otra" (p. 124); además proponen un marco teórico para el estudio del razonamiento covariacional basado en la categorización de los estudiantes en *niveles* a partir de ciertas *acciones mentales* del razonamiento covariacional y los comportamientos asociados, manifestados por los estudiantes. De esta manera, las acciones mentales son un puente que permiten clasificar los comportamientos de los estudiantes cuando desarrollan tareas relacionadas con la covariación (Tabla 9).

Tabla 9
Acciones mentales del marco conceptual para la covariación

Acción Mental	Descripción de la Acción Mental	Comportamientos
AM1	Coordinación del valor de una variable con los cambios en la otra.	Designación de los ejes con indicaciones verbales de coordinación de las dos variables (e.g., y cambia con cambios en x).
AM2	Coordinación de la dirección del cambio de una variable con los cambios en la otra variable.	Construcción de una línea recta creciente. Verbalización de la consciencia de la dirección del cambio del valor de salida mientras se consideran los cambios en el valor de entrada.
AM3	Coordinación de la cantidad de cambio de una variable con los cambios en la otra variable.	Localización de puntos/construcción de rectas secantes. Verbalización de la consciencia de la cantidad de cambio del valor de salida mientras se consideran los cambios en el valor de entrada.
AM4	Coordinación de la razón de cambio promedio de la función con los incrementos uniformes del cambio en la variable de entrada.	Construcción de rectas secantes contiguas para el dominio. Verbalización de la consciencia de la razón de cambio del valor de salida (con respecto al valor de entrada) mientras se consideran incrementos uniformes del valor de entrada.
AM5	Coordinación de la razón de cambio instantánea de la función con los cambios continuos en la variable independiente para todo el dominio de la función.	Construcción de una curva suave con indicaciones claras de los cambios de concavidad. Verbalización de la consciencia de los cambios instantáneos en la razón de cambio para todo el dominio de la función (los puntos de inflexión y la dirección de las concavidades son correctos).

Tomada de Carlson et al (2003, p. 128).

Los estudiantes se clasifican en cinco niveles diferentes (Tabla 10) a partir de las acciones mentales que se sustentan en la solución de problemas o tareas relacionadas con el razonamiento covariacional. Un estudiante alcanza un nivel cuando es capaz de sustentar las acciones mentales de ese nivel y de los inmediatamente anteriores. Cuando esto se logra, se dice que el estudiante ha desarrollado parte de la habilidad del razonamiento covariacional. Por lo tanto, a medida que se desarrolla la imagen de covariación con la que cuenta un estudiante, ella sustenta un razonamiento covariacional más sofisticado.

Tabla 10

Marco conceptual para los niveles de la covariación

Niveles del razonamiento covariacional	
El marco conceptual para la covariación describe cinco niveles de desarrollo de las imágenes de la covariación. Estas imágenes de covariación se presentan en términos de las acciones mentales sustentadas por cada imagen.	
Nivel 1 (N1). Coordinación	En el nivel de coordinación, las imágenes de la covariación pueden sustentar a la acción mental de coordinar el cambio de una variable con cambios en la otra variable (AM1).
Nivel 2 (N2). Dirección	En el nivel de dirección, las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la dirección del cambio de una de las variables con cambios en la otra. Las acciones mentales identificadas como AM1 y AM2 ambas son sustentas por imágenes de N2.
Nivel 3 (N3). Coordinación cuantitativa	En el nivel de la coordinación cuantitativa, las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la cantidad de cambio en una variable con cambios en la otra. Las acciones mentales identificadas como AM1, AM2 y AM3 son sustentadas por las imágenes de N3.
Nivel 4 (N4). Razón promedio	En el nivel de la razón promedio, las imágenes de covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la razón de cambio promedio de una función con cambios uniformes en los valores de entrada de la variable. La razón de cambio promedio se puede descomponer para coordinar la cantidad de cambio de la variable resultante con los cambios en la variable de entrada. Las acciones mentales identificadas como AM1 hasta AM4 son sustentadas por imágenes de N4.
Nivel 5 (N5). Razón instantánea	En el nivel de la razón instantánea, las imágenes de covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la razón de cambio instantánea de una función con cambios continuos en la variable de entrada. Este nivel incluye una consciencia de que la razón de cambio instantánea resulta de refinamientos más y más pequeños en la razón de cambio promedio. También incluye la consciencia de que el punto de inflexión es aquel en el que la razón de cambio pasa de ser creciente a decreciente o al contrario. Las acciones mentales identificadas como AM1 a AM5 son sustentadas por imágenes de N5.

Tomada de Carlson et al (2003, p. 129).

CAPÍTULO 5
COMPATIBILIDAD ENTRE LAS PROPUESTAS Y CONCLUSIONES

A partir de los elementos identificados tanto en la innovación curricular realizada por el grupo de investigación *Æ•G*, como en la propuesta del MEN (1998) y MEN (2006) en relación con el desarrollo del pensamiento variacional, realizaremos en este capítulo un análisis acerca de la compatibilidad de las propuestas desde las similitudes de sus elementos centrales, para determinar si es posible o no, realizar la transferencia señalada en los objetivos.

5.1. ESTUDIO DE COMPATIBILIDAD ENTRE LAS PROPUESTAS

En la justificación de este trabajo, mencionamos que, en el desarrollo del pensamiento variacional "se dan múltiples oportunidades para la formulación de conjeturas, la puesta a prueba de estas, su generalización y la argumentación para sustentar o refutar una conjetura o una propuesta de generalización" (MEN, 2006, p. 68), lo cual permitió establecer una primera similitud entre lo expresado por el MEN y el objetivo de la innovación curricular en Geometría. No obstante, esto no es suficiente para determinar si es o no posible realizar la transferencia de una propuesta a otra, pues hay otros factores que intervienen y requieren de un análisis detallado para determinar la posibilidad de realizarla. Teniendo en cuenta esto, se analizó en capítulos anteriores, cada una de las propuestas destacando los elementos característicos que las conforman (Tabla 11 y Tabla 12), con la intención de evidenciar, posteriormente, otras similitudes o diferencias entre ellas.

Tabla 11
Elementos de la innovación curricular

	Innovación Curricular
1	Entorno Favorable para aprender a demostrar:
	Interacción social en clase, Actividad demostrativa y Geometría Dinámica
2	Situaciones problema
3	Sistema axiomático
4	Evaluación

Tabla 12
Elementos del Pensamiento Variacional

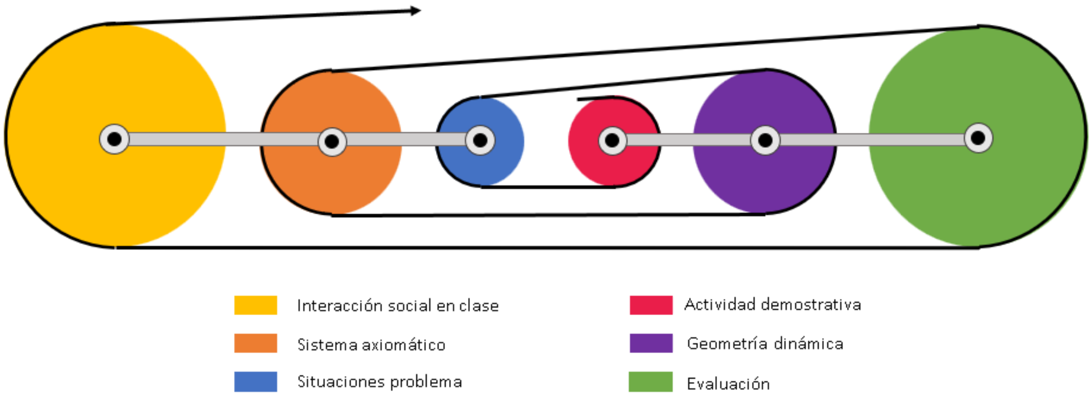
	Pensamiento Variacional
1	La variación y el cambio
2	Situaciones problema
3	La modelación
4	El razonamiento algebraico
5	Sistemas de representación y tecnologías computacionales
6	Contenidos matemáticos

Teniendo en cuenta que, a grandes rasgos, la innovación curricular se centra en fomentar la actividad demostrativa, y el pensamiento variacional en el estudio de la variación y el cambio, es preciso determinar la expresión correspondiente de los elementos de la innovación curricular en el pensamiento variacional y establecer si existe o no una relación entre los elementos de una propuesta y la otra, que permita afirmar la afinidad o incompatibilidad de las mismas.

Para llevar a cabo este análisis, proponemos el esquema que se muestra en la Figura 28, que estructura los elementos de la innovación curricular mediante un sistema de poleas, dado que, consideramos que los elementos constituyen un sistema en el que unos dependen de otros para su correcto funcionamiento. Este esquema permitirá, posteriormente, observar si el pensamiento variacional puede "funcionar" bajo la estructura mencionada. Se hace importante señalar que, no se alude de forma explícita a los elementos propuestos para el pensamiento variacional, es decir, *Modelación, La Variación y el Cambio, el Razonamiento Algebraico y el Contenido Matemático,* porque la intención de este trabajo es tomar la innovación curricular y aplicarla al pensamiento variacional, y no al revés.

Figura 28

Estructura de la innovación curricular a partir de los elementos centrales



En este sentido, abordaremos individualmente, aunque no en el mismo orden que se muestra en la Tabla 10, cada uno de los elementos de la innovación curricular para establecer si son o no compatibles con el pensamiento variacional; si lo son, precisaremos cómo estos pueden llevarse a cabo, si no lo son, mencionaremos las razones por los cuales no son compatibles.

5.1.1 Sistema Axiomático

En la innovación curricular el sistema axiomático juega un papel trascendental, porque es en este en el que se consolida, de forma deductiva, una teoría que permite dar avance al curso, mientras que, en los elementos propuestos del pensamiento variacional, no es posible evidenciar que alguno de ellos haga alusión o se relacione con la construcción de un sistema axiomático. Esto implica determinar la expresión de este elemento en el pensamiento variacional, es decir, darse a la tarea de determinar un sistema axiomático para dicho pensamiento, sin embargo, esto no resulta sencillo. Veamos por qué.

En primer lugar, porque la conformación de un sistema axiomático relacionado con el pensamiento variacional no se corresponde con lo establecido en la política curricular colombiana; tampoco con los referentes teóricos comentados en el capítulo anterior. En segundo lugar, conformar un sistema axiomático implica que las situaciones problema propuestas para el desarrollo de pensamiento variacional giren en torno únicamente a los contextos propiamente matemáticos, pues estos son el ambiente ideal para la construcción de dicho sistema. No obstante, para propiciar la comprensión de los conceptos relacionados con el pensamiento variacional y encontrar sentido a la utilidad de las matemáticas, establece el MEN que es necesario involucrar a los estudiantes en contextos diferentes que incluyan tanto los contextos matemáticos, como los de la vida diría y los de otras ciencias. Además, contemplando la idea de que se pudiera formular un sistema axiomático relacionado con el pensamiento variacional, surgen preguntas que no son fáciles de responder, por ejemplo: ¿Cuáles son las proposiciones primitivas que permitirían construir un sistema axiomático en el pensamiento variacional?, ¿Teniendo en cuenta que se propone el inicio del desarrollo del pensamiento variacional desde los primeros años escolares, habría que iniciar la construcción del sistema axiomático desde la primaría?, ¿Qué tan posible sería esto último?

Dado que hay inconvenientes que se presentan tanto en la formulación de un sistema axiomático, como en lo estipulado por el MEN en relación con el pensamiento variacional, afirmamos que, determinar la expresión correspondiente al elemento sistema axiomático de la innovación curricular en el pensamiento variacional no es posible y, en consecuencia, este elemento no es compatible con la propuesta del MEN.

5.1.2Actividad demostrativa

La actividad demostrativa en la innovación curricular hace parte de un entorno favorable para aprender a demostrar y es esencial en la misma porque permite el cumplimiento de sus objetivos. Este constructo se constituye de dos aspectos que involucran, cada uno, diferentes acciones que le apuntan; por un lado, a la producción de una conjetura (aspecto proceso) y, por otro, a la producción de una justificación (aspecto producto), ambos aspectos relacionados entre sí por medio de la argumentación.

Las acciones involucradas en el aspecto proceso, es decir, la visualización, la exploración, la formulación de conjeturas y la verificación, se realizan con la intención de comprender el contenido geométrico y de buscar cómo justificar la conjetura que da solución al problema. Por otro lado, el aspecto producto involucra acciones relacionadas con la práctica de justificar como lo son la explicación, la prueba y la demostración formal (Perry et al, 2006).

Para determinar si este elemento es compatible con la propuesta del MEN, es preciso ver su expresión correspondiente en el pensamiento variacional, dado que la demostración no está explícita en ninguno de los elementos de este último, pues, según lo estipulado en la política curricular colombiana, el desarrollo del pensamiento variacional no alude a la demostración formal. No obstante, evidenciamos que se relaciona con algunas acciones del constructo actividad demostrativa, por lo tanto, es importante examinar el papel de cada una de estas en dicho pensamiento.

En relación con las acciones del aspecto proceso, la *visualización* en el desarrollo del pensamiento variacional puede darse a través del estudio de los patrones, las secuencias geométricas y las representaciones gráficas de funciones y de otros conceptos relacionados con el estudio de este pensamiento. Por su parte, la *exploración* se puede realizar acudiendo a investigaciones empíricas sobre las distintas representaciones de los conceptos que favorecen el desarrollo del pensamiento variacional, con el fin de determinar qué cambia y qué no, qué depende de qué, qué varía respecto a algo, la forma en cómo se da esa variación, entre otras. A partir de la visualización y la exploración de las representaciones, es posible la *formulación de conjeturas* que expresen, de manera general, aquello de lo que se está convencido. Posterior a la formulación de conjeturas, puede haber cabida a la *verificación* de las mimas en el momento en el que haya dudas sobre estas, poniéndolas a prueba buscando contraejemplos o manipulando las representaciones.

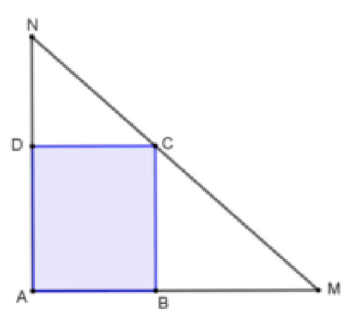
Reproducir, en el pensamiento variacional, las acciones del aspecto proceso de la innovación curricular tal cual se expresaron en el Capítulo 2 no representa gran dificultad, pues los propósitos de cada acción del aspecto proceso puede transferirse al desarrollo del pensamiento variacional sin problema. No obstante, es importante considerar que la diferencia entre los contenidos que se estudian en cada propuesta implica el uso de diversos sistemas de representación, diferentes al gráfico, en los que también es posible visualizar y explorar, y en consecuencia, formular conjeturas y verificarlas.

En el caso de las acciones del aspecto producto, que se relacionan con la justificación de una conjetura, los estudiantes en el pensamiento variacional también pueden hacer *explicaciones* refiriéndose a aspectos visuales o relacionados con fenómenos de variación y cambio con los cuales interactúan. Para la *prueba* los estudiantes pueden presentar justificaciones basadas en argumentos de tipo variacional, refiriéndose al análisis del cambio y su cuantificación. La *demostración formal*, entendida por el equipo de investigación como una “justificación de carácter deductivo que explicita y encadena, en forma exhaustiva, una afirmación y sus respectivas razones, referidas a un sistema axiomático y que lleva desde la información dada hasta aquella que se desea demostrar” (Perry et al, 2006. p.62), no es viable dentro del pensamiento variacional. Para la elaboración de una demostración formal, es indispensable un sistema axiomático de referencia, pero como se mencionó con anterioridad, la elaboración de un sistema axiomático en dicho pensamiento no es sencilla y, por lo tanto, sin este, la demostración formal, tal y como se propone en la innovación curricular, no sería posible.

En este sentido, en el pensamiento variacional es posible reproducir varias de estas acciones (*i.e.* visualización, exploración, formulación de conjeturas, verificación, explicación y prueba), sin embargo, con otras (*i.e.* demostración formal) se presentan limitantes que interfieren directamente con parte del objetivo de la actividad demostrativa. Aunque en el pensamiento variacional se den las oportunidades para la formulación de conjeturas y su justificación, no necesariamente esto le apunta a su demostración formal, en consecuencia, el elemento actividad demostrativa es compatible parcialmente con el pensamiento variacional.

Con la intención de ejemplificar la posibilidad de transferir algunas de las acciones que son compatibles con el pensamiento variacional, mostramos a continuación una tarea propuesta por Nieto, Chavira & Viramontes (2010, como se citó en Garavito & Gómez, 2017). La tarea tiene como propósito la introducción de la idea de función haciendo uso de un *software* de geometría dinámica, a partir del estudio de la variación de la longitud de uno de los lados de un rectángulo inscrito en un triángulo rectángulo con su área respectiva (Figura 29), las cuales se producen al arrastrar el punto B sobre el segmento AM.

Figura 29
Representación de la situación problema

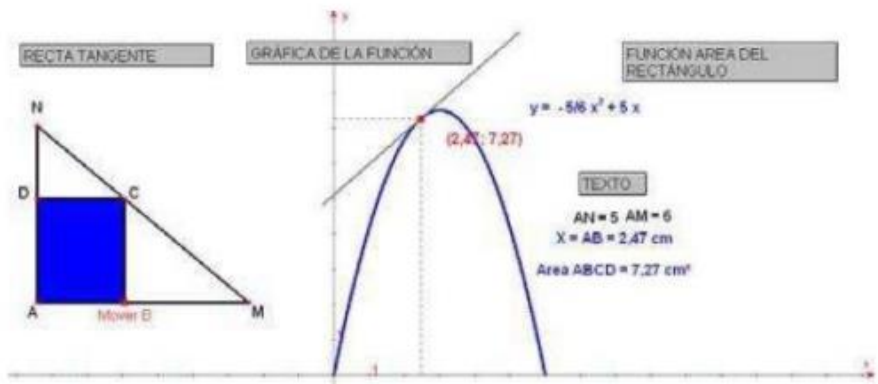


Tomado de Nieto, Chavira & Viramontes (2010, como se citó en Garavito & Gómez, 2017, p. 33)

En el desarrollo de la actividad, el estudiante, *visualiza* una representación estática de la situación que se le presenta y al mover el punto B se produce en el *software* una gráfica que modela la función superficie del rectángulo a medida que el punto se mueve (exploración), como se muestra en la Figura 30. A partir de la visualización y la exploración por medio del *software*, el estudiante puede establecer cuáles son las variables que intervienen en la situación y, haciendo uso de las herramientas que brinda la aplicación, determinar la representación simbólica de la función en cuestión. A partir de estos resultados, el estudiante puede *formular conjeturas*, *verificarlas*, *explicarlas* y *probarlas*.

Figura 30

Otras representaciones de la situación problema



Tomado de Nieto, Chavira & Viramontes (2010, como se citó en Garavito & Gómez, 2017, p. 34)

5.1.3 Geometría Dinámica

En la innovación curricular, la geometría dinámica tiene como propósito ser una herramienta de mediación en el proceso de aprender a demostrar, en el cual es indispensable el uso de un *software*, ya que favorece procesos como la visualización, la exploración, la formulación de conjeturas y la puesta a prueba de estas. En la caracterización realizada al pensamiento variacional, el elemento Sistemas de Representación y Tecnologías Computacionales tiene relación con el elemento en mención de la innovación curricular, el cual comprende dos aspectos diferentes; los sistemas de representación que fomentan la compresión de los conceptos, y las tecnologías computacionales que refieren al uso de *software* (incluyendo los simuladores) que permiten la movilidad entre diferentes sistemas de representación.

Mientras que el elemento Geometría Dinámica de la innovación curricular, por una parte, le apunta al uso de un *software* para la representación gráfica de los objetos geométricos y el trabajo con esta, el elemento con el que se relaciona en el pensamiento variacional, le apunta a la representación no solamente gráfica, sino también algebraica y tabular, además de sugerir el uso de simuladores para representar situaciones problema centradas en fenómenos de variación y cambio.

Aunque existen algunas diferencias entre los dos elementos que subyacen, particularmente, del uso del *software* (como el manejo de simuladores), los elementos terminan siendo compatibles, pues, consideramos que uno de los propósitos principales del uso de estos es representar los objetos matemáticos o las situaciones problema, permitiendo el desarrollo de acciones como la visualización, la exploración, la formulación de conjeturas y la puesta a prueba de las mismas, acciones que también son posibles en el pensamiento variacional. Cabe señalar que en los *software* de geometría dinámica también es posible programar simuladores que recreen situaciones problemas centradas en la variación y el cambio en diferentes contextos; un ejemplo de ello se mostró en el apartado 4.1.5 Sistemas de representación y tecnologías computacionales.

5.1.4 Situaciones Problema

Los elementos Situaciones Problema en ambas propuestas tienen propósitos similares; las situaciones problema planteadas en la innovación curricular buscan la interacción social en clase entre los estudiantes mismos y entre los estudiantes y el profesor, además del desarrollo de las acciones involucradas en la actividad demostrativa. Las situaciones problema para el desarrollo del pensamiento variacional pretenden que los estudiantes pongan en práctica sus aprendizajes y por medio de esta, le encuentren sentido a la utilidad de las matemáticas; estas situaciones deben promover el desarrollo de procesos tales como la exploración de problemas, la formulación de conjeturas, el planteamiento de preguntas y la reflexión sobre modelos.

A pasar de que las situaciones problema de la innovación curricular están diseñadas en contextos propiamente matemáticos, y que las planteadas en el desarrollo del pensamiento variacional se estructuran bajo contextos de la vida diaria, de las ciencias y de las matemáticas mismas, las intenciones de ambas propuestas coinciden en un aspecto: favorecer el desarrollo de varios procesos matemáticos en común (acciones de la actividad demostrativa), es decir, la exploración, la visualización, la formulación de conjeturas, la verificación, la explicación y la prueba.

Es importante destacar que una diferencia entre los elementos de ambas propuestas se centra en el objetivo de las situaciones problema, ya que en la innovación curricular la mayoría de estas buscan la formulación de una conjetura para ser introducida, luego de su justificación formal, en el sistema axiomático. Por otro lado, las situaciones problema involucradas en el desarrollo del pensamiento variacional no buscan, en todos los casos, la formulación de una conjetura, pueden buscar también, una predicción, una regularidad o la construcción de un modelo del fenómeno. Esto último, en la innovación curricular, no parece ser lo más usual, debido a que cada propuesta le apunta al desarrollo de un proceso matemático distinto; la *actividad demostrativa*, por el lado de la innovación curricular, y la *modelación*, por el lado del pensamiento variacional.

No obstante, la solución de las situaciones problema del pensamiento variacional pueden orientarse a la formulación de conjeturas; por ejemplo, se puede proponer a los estudiantes una situación centrada en descubrir la forma en cómo varían los $f(x)$ en una función cuadrática, para que una de las posibles soluciones sea la conjetura: si f es una función cuadrática entonces, los valores que toma $f(x)$ varían de forma lineal. Una exploración más profunda de este problema que tenga en cuenta otras funciones diferentes a la cuadrática puede permitir obtener un resultado más general: la derivada captura la forma de covariación entre los valores de x y los de $f(x)$.

De lo anterior, concluimos que los elementos Geometría Dinámica y Sistemas de Representación y Tecnologías Computaciones son compatibles, aunque ellas expresen diferencias entre sí: independientemente del contexto en el que se sitúen las situaciones problema en el pensamiento variacional, estas pueden apuntarle al desarrollo de las acciones de la actividad demostrativa, exceptuando la demostración formal.

5.1.5 Interacción Social en Clase y Evaluación

Ninguno de estos tres elementos tiene relación directa con alguno de los que conforman el pensamiento variacional debido a que esos son de orden metodológico y no están condicionados con la temática matemática ni la organización curricular en cuestión, por lo tanto, es posible emularlos sin problemas en dicho pensamiento.

En primer lugar, la Interacción Social en Clase en el pensamiento variacional se puede llevar a cabo proponiendo situaciones problema o actividades (de clase y extra-clase), de tal forma que los estudiantes interactúen entre sí y en entre ellos y el profesor. Lo anterior se corresponde con lo establecido en el MEN (1998), en relación con el desarrollo de los cinco procesos generales, en particular, la comunicación y la resolución y planteamiento problemas. En segundo lugar, la Evaluación puede proponerse tal cual se plantea en la innovación curricular, es decir, se puede considerar la valoración de tareas extra-clase, actividades en clase, comprobaciones escritas, participación, notas de clase, entre otros. En tercer lugar, las Notas de Clase pueden implementarse en el pensamiento variacional también como herramienta para que los estudiantes repasen los procedimientos, análisis, razonamientos y resultados importantes obtenidos en la clase. En consecuencia, sí existe la expresión correspondiente de estos elementos en el pensamiento variacional, por lo tanto, consideramos que son compatibles con el mismo.

CAPÍTULO 6

CONCLUSIONES Y REFLEXIONES

En este capítulo presentamos el alcance de los objetivos planteados al inicio y las reflexiones referidas a los aprendizajes adquiridos a lo largo del desarrollo del presente documento; estos dos aspectos conforman las conclusiones de nuestro trabajo. De esta manera, es preciso tener en cuenta que el objetivo general de este estudio corresponde a:

- Determinar si la innovación curricular propuesta por el equipo de investigación *Æ•G*, es transferible a la enseñanza del Cálculo en la Educación Básica y Media.

Así, para dar alcance a este objetivo, fue necesario plantear una ruta de acción que favoreciera la búsqueda de argumentos; dicha ruta se corresponde con los objetivos específicos referidos a:

- Caracterizar la innovación curricular empleada en algunos de los cursos de Geometría de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional y determinar sus elementos centrales.
- Identificar los elementos centrales propuestos por el Ministerio de Educación Nacional relacionados con el desarrollo del pensamiento variacional.
- Precisar las condiciones que se requieren para determinar, según sea el caso, la afinidad o incompatibilidad de emplear la innovación curricular del equipo *Æ•G* como derrotero para la enseñanza del Cálculo en la Educación Básica y Media.

Así las cosas, en el Capítulo 2 caracterizamos, a partir de una revisión documental y de nuestra experiencia como estudiantes de los cursos de geometría, la innovación curricular propuesta por el equipo de investigación *Æ•G*, en términos de los elementos que, a nuestra consideración, la constituyen. De esta manera, fue posible evidenciar que esta innovación representó cambios sustanciales respecto a lo que se realizaba antes de la implementación de la innovación, reflejados en la metodología y propósitos de los cursos, en el rol del docente y del estudiante, la evaluación y los demás elementos que, según De Zubiría, conforman el currículo.

Posteriormente, con la intención de hacer un recuento histórico acerca de la enseñanza del Cálculo en Colombia, evidenciamos que desde el año 1998 hubo un cambio en el currículo de matemáticas; este deja de lado la enseñanza del Cálculo como propósito, para proponer en su lugar, el desarrollo del pensamiento variacional, que, de manera general, pretende brindar a los estudiantes herramientas que contribuyan con el abordaje de algunos conceptos y procedimientos del Cálculo. Por tal razón, fue necesario identificar los elementos que constituyen el pensamiento variacional desde una perspectiva tanto curricular, como teórica. Identificamos que ya no se considera la transmisión de contenidos matemáticos fragmentados y compartimentalizados, sino que, se propone el dominio de un campo conceptual que abarque conceptos y procedimientos que posibiliten distintos caminos y acercamientos significativos para la comprensión del Cálculo Diferencial e Integral en la Educación Media (MEN, 1998; MEN, 2006).

Con el propósito de determinar si es posible realizar la trasnferencia[34] señalada en el objetivo general, nos dimos a la tarea de establecer las similitudes y diferencias entre las dos propuestas, lo que nos llevó a determinar la expresión correspondiente de cada elemento de la innovación curricular en el pensamiento variacional, como se muestra en el "Capítulo 5.1".

Este análisis nos permitió establecer que los elementos Interacción Social en Clase, Evaluación y Geometría Dinámica de la innovación curricular, tienen su respectiva expresión en el pensamiento variacional. Aunque estos elementos no se encuentran explícitos en los elementos de dicho pensamiento, es posible emularlos sin mayor problema, puesto que el docente puede generar estrategias para hacerlo y estas no afectan negativamente el desarrollo del pensamiento variacional, sino que, por el contrario, lo favorecen. En primer lugar, porque la Interacción Social en Clase, tal y como se propone en la innovación curricular, corresponde a los planteamientos de la teoría sociocultural del aprendizaje, es decir, pone en un primer plano las interacciones colectivas en el aula favoreciendo así, no solo la adquisición de conocimientos, sino también al desarrollo del proceso general de comunicación.

En segundo lugar, las Notas de Clase empleadas para el desarrollo del pensamiento variacional funcionarían como una herramienta que posibilita el estudio de procedimientos, conceptos y estrategias empleadas en la solución de situaciones problemas propuestas en las clases, por ejemplo sería de gran utilidad consignar en un documento al cual los estudiantes tengan acceso, la forma en cómo se estudia la variación y el cambio entre variables para la

[34] Entendemos por transferencia la acción de tomar los elementos de carácter metodológico de una propuesta y replicarlos con otros contenidos matemáticos.

elaboración de un modelo, la exploración en un *software* para determinar las variables que covarían, los argumentos que justifican la veracidad del modelo, entre otras.

En tercer lugar, la Evaluación que se propone en la innovación curricular, desde nuestra perspectiva, se puede aplicar en el desarrollo del pensamiento variacional de tal manera que esta sea continua y contemple aspectos como los aportes de los estudiantes, las comprobaciones escritas, el desarrollo de actividades en clase y extra-clase, y la elaboración de notas de clase. Por último, el elemento Geometría Dinámica se relaciona con el elemento Sistemas de Representación y Tecnología Computacionales del Pensamiento Variacional, a pesar de que difieren en el tipo de representación que brindan; mientras que para el primero se emplea para la representación gráfica de los objetos geométricos, el segundo no solo se utiliza para la representación gráfica, sino que, se contemplan los otros tipos de representación como el tabular, simbólico, pictórico, entre otros. Sin embargo, consideramos que esta diferencia no representa un problema mayor, pues lo *software* de Geometría Dinámica permiten realizar dichas representaciones.

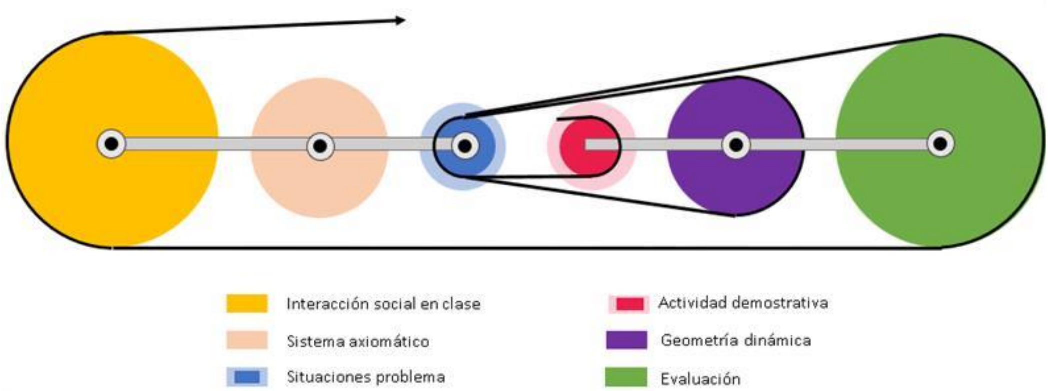
Por otro lado, el elemento Situaciones Problema de la innovación curricular se relaciona con el elemento del mismo nombre del pensamiento variacional; de manera general, en las dos propuestas se alude al uso de situaciones problema para el tratamiento de los contenidos establecidos en cada currículo, además de impulsar la interacción social en clase y el desarrollo de diferentes acciones matemáticas (*i.e.* visualización, exploración, formulación de conjeturas, verificación, explicación y prueba).

No obstante este elemento, presenta algunos inconvenientes relacionados con el tipo de respuesta o solución que se espera en cada propuesta. En la innovación curricular, generalmente, las situaciones problema le apuntan a la obtención de una conjetura, puesto que los procesos que se pretenden desarrollar aluden a la actividad demostrativa. Mientras que, por otro lado, en el pensamiento variacional no todas las situaciones problema tienen esta intención, pues como se desea favorecer el proceso de modelación y, a su vez, los demás procesos generales mencionados en los LC, resulta eficaz que las situaciones problema se enfoquen en obtener, no solo resultados como conjeturas, sino también modelos, ejercitar procedimientos, entre otros. Aunque en la sección anterior mencionamos que es posible direccionar las situaciones problemas del pensamiento variacional solamente hacia la formulación de conjeturas, no es lo que el MEN sugiere. En este sentido, dicha diferencia entre las situaciones problema, consecuencia de los distintos tipos de procesos que abarca cada propuesta, representa un primer obstáculo para realizar la transferencia.

Ahora, el elemento Sistema axiomático de la innovación curricular no cuenta con una expresión correspondiente en el pensamiento variacional, ni en los referentes curriculares, ni en los teóricos, y al intentar establecer esta expresión surgen interrogantes que dificultan la posibilidad de transferir este elemento al pensamiento variacional. De esta manera, la falta de un sistema axiomático para dicho pensamiento representa un segundo obstáculo para la ejecución de la transferencia. Por consiguiente, el elemento actividad demostrativa se ve afectado ya que, a pesar de que el aspecto proceso puede emularse en el pensamiento variacional sin problema, la falta de un sistema axiomático influye negativamente en el desarrollo del aspecto producto ya que no podría darse la demostración formal, lo que implica un tercer obstáculo para efectuar la transferencia.

Teniendo en cuenta lo anterior y el esquema presentado al comienzo del Capítulo 5 (Figura 28), presentamos a continuación, el esquema de la Figura 31 que muestra la transferencia de la innovación curricular al pensamiento variacional en términos de los elementos que son compatibles.

Figura 31
Esquema de la transferencia



Así, como se observa, el sistema de poleas no funciona ya que hace falta el cuerpo de la polea correspondiente al Sistema Axiomático, además el cuerpo de las poleas referidas a Situaciones Problema y Actividad Demostrativa cuentan con menor tamaño puesto que, aunque parte de ellos puede transferirse al pensamiento variacional, presentan obstáculos que impiden que dicha transferencia sea haga en su totalidad. En consecuencia, hacer la transferencia de la innovación curricular al pensamiento variacional no es posible. Sin embargo, hay elementos de la innovación curricular, que pueden emularse en el pensamiento variacional de tal manera que estos contribuyan a su desarrollo de forma satisfactoria, puesto que tienen una estrecha relación con lo que propone el (MEN, 1998).

Por otro lado, las condiciones bajo las cuales sería posible aplicar la innovación curricular al pensamiento variacional, recaen en la superación de los tres obstáculos mencionados con anterioridad. Dicha superación implica la conformación de un sistema axiomático para el pensamiento variacional, pues con este sería posible realizar la demostración formal de las conjeturas, obtenidas a partir de la solución de unas situaciones problema muy particulares, es decir, aquellas que apuntan únicamente a la obtención de conjeturas para su solución, pues limitarlas a este aspecto supondría la superación del primer obstáculo. No obstante, son cuestionables las condiciones bajo las cuales realizar la transferencia es posible, ya que, en primer lugar, hay una problemática respecto a la generación de un sistema axiomático que concuerde con lo mencionado por el MEN, para el pensamiento variacional, y en segundo lugar, consideramos que, limitar así las situaciones problema, afecta de forma negativa el desarrollo de tal pensamiento.

Una de las reflexiones que consideramos, a propósito de la respuesta negativa relacionada con la transferencia, se centra en que esta respuesta no solamente depende de la compatibilidad de las propuestas, sino que, también influye una problemática que evidenciamos y sistematizamos en el Capítulo 3, referida a un problema real que tienen los profesores de matemáticas y que se relaciona con su formación matemática y su actividad como profesores de matemáticas. La problemática en cuestión surge a raíz del cambio curricular dado en el año 1998 con la publicación de los LC y tiene que ver con la pregunta ¿se dicta o no Cálculo en la Educación Básica y Media?

Adicionalmente, consideramos que las matemáticas en la escuela pueden percibirse de dos maneras. Una de estas maneras hace referencia a las matemáticas como una teoría y la otra, hace alusión a la aplicación de las matemáticas. Bajo la primera percepción, la construcción de un sistema teórico, como parte del aprendizaje, sería oportuno. Sin embargo, la otra percepción le apunta al desarrollo del pensamiento matemático que puede, o no, estar asociado a un sistema teórico.

En ese sentido, interpretamos que los LC y EBC, perciben a las matemáticas, y en especial al pensamiento variacional, de la segunda manera, pues su propósito se centra en el desarrollo de dicho pensamiento. Así, en el caso de considerar un sistema teórico para el pensamiento variacional, el lugar que ocuparían los elementos teóricos dependerá de qué aspectos de dicho pensamiento se desean desarrollar. No obstante, esto no parece ser lo fundamental porque, si así fuera, los documentos curriculares plantearían el sistema teórico a construir. En consecuencia, confirmamos nuevamente, la imposibilidad de realizar la transferencia propuesta en los objetivos.

Por otra parte, en la elaboración de este documento ganamos conciencia acerca de algunos aspectos que se relacionan con experiencias de nuestro proceso formativo. Por un lado, en la participación como estudiantes de los cursos en los que se desarrolla la innovación curricular, nos percatamos que para su conformación fue necesario un arduo trabajo investigativo por parte del equipo de investigación *Æ•G,* en el cual fueron necesarios la búsqueda de sustentos teóricos, la realización, aplicación y análisis de pruebas piloto, el ajuste al diseño y al desarrollo curricular de los cursos, entre otros. Además, no fue hasta el estudio de los documentos elaborados por el equipo de investigación que observamos que, en el desarrollo mismo de las clases, para favorecer la actividad demostrativa, se involucran diferentes acciones que abarcan los aspectos proceso y producto vinculados entre sí por la argumentación.

Además, este estudio bridó herramientas de carácter metodológico que pueden llegar a ser implementadas en nuestro quehacer docente para la enseñanza de las matemáticas en la escuela, esto muestra el cumplimiento de uno de los propósitos que impulsaron la innovación curricular; que los maestros en formación desarrollen capacidades para generar ambientes de aprendizaje de las matemáticas escolares (Camargo et al, 2008).

Otro aspecto en el que ganamos conciencia sobre nuestro proceso formativo en LM fue que, a partir del estudio realizado entorno al desarrollo del pensamiento variacional, pudimos comprender que los documentos curriculares proponen el desarrollo de pensamientos y en lugar del estudio de contenidos fragmentados y compartimentalizados, además de reconocer cuáles son los procesos y conceptos que favorecen su desarrollo. Para nosotros esto resulta importante ya que este fue el primer acercamiento que tuvimos relacionado con el pensamiento variacional, a lo largo de nuestra formación en la LM. En consecuencia, resulta alarmante, por un lado, que en los cursos relacionados con la línea de formación en pedagogía y didáctica del programa curricular no se realice un acercamiento significativo hacia la política curricular colombiana y, por otro lado, que en la formulación misma del programa parece no existir coherencia con las propuestas del MEN (1998), pues, a pesar de que la última renovación curricular del programa se realizó en el año 2018, aún se habla de la enseñanza del cálculo en lugar del desarrollo del pensamiento variacional.

Puede que lo anterior sea una de las causas por las cuales todavía, en varias instituciones educativas del país, se emplee el *paradigma tradicional de la enseñanza del cálculo*, pues es evidente que tanto las instituciones, como los profesores, desconocen el cambio profundo que experimentó el currículo escolar de matemáticas, promulgado hace más de dos décadas. Este asunto entorpece no solo el desarrollo del pensamiento variacional, sino que, nos aleja cada vez más de la idea de la formación de ciudadanos matemáticamente competentes propuesta por el MEN (2006).

BIBLIOGRAFÍA

Alanís, J. A., & Salinas, P. (2009). Hacia un nuevo paradigma en la enseñanza del cálculo dentro de una institución educativa. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *12*(3), 355-383.

Alpírez, W., Batista, C., Castillo, E., Foumier, P., Reyes, L., Solís, V., & Villegas, W. (1984). Principios Básico del Currículo: Ralph Tyler. *Eduación*, *8*(1 y 2), pp. 145-152.

Angulo, J. F. (1994). ¿A qué llamamos currculum? En *Teoría y Desarrollo del Currículum* (Primera Edición, pp. 17-29). Aljibe.

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del Cálculo: Problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En R. Douady, L. Moreno, P. Gómez, & M. Artigue, *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática* (1.ª ed.). Grupo Editorial Iberoamérica.

Berrón, M. (2015). Claves para una lectura alternativa de la axiomática en Aristóteles. El caso de acerca del cielo I. *Ideas y Valores*, *64*(159), pp. 7-32.

Blázquez, S., & Ortega, T. (2001). Los Sinstemas de Representación en la Enseñanza del Límite. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *4*(3), pp. 219-236.

Caballero-Pérez, M., & Cantoral, R. (2017). Una caracterización de la noción Sistema de Referencia para el tratamiento del cambio y la variación. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 9.

Calderón, M., & Tamayo, J. (2016). *Actividad demostrativa en problemas de construcción con estudiantes de grado sexto*. Universidad Pedagógica Nacional.

Camargo, L., Echeverry, A., Molina, O., Perry, P., & Samper, C. (2008). Innovación en la enseñanza de la demostración en un curso de geometría para formación inicial de profesores. En A. Cano, F. Contreras, & E. Olvera, *Libro electrónico del XVII Simposio Iberoamericano de Enseñanza de las Matemáticas: "Innovando la enseñanza de las matemáticas"*.

Camargo, L., Samper, C., Molina, O., & Perry, P. (2013). Innovación en el aula de geometría de nivel universitario. En C. Samper & O. Molina, *Geometría plana: Un espacio de aprendizaje* (Primera edición). Universidad Pedagógica Nacional.

Camargo, L., Samper, C., & Perry, P. (2005). Una visión de la actividad demostrativa en geometría plana para la educación matemática con el uso de programas de geometría dinámica. *Lecturas Matemáticas*, *27*(especial), pp. 371-383.

Cano, J. (2020). *Construcciones geométricas como puente entre la visualización y el razonamiento geométrico, utilizando regla, compás y hoja calco como plano auxiliar*. Universidad Pedagógica Nacional.

Carlson, M., Jacobs, S., & Coe, E. (2003). *Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: un marco conceptual y un estudio*. *8*, 36.

CEUB. (2014). *XII Congreso Nacional de Universidades*. Http://www.uajms.edu.bo/deva/wp-content/uploads/sites/42/2018/05/XII-Congreso-de-Universidades-CEUB.pdf

Cilleruelo, E., Sánchez, F., & Begoña, E. (2008). Compendio de definiciones del concepto «innovación» realizadas por autores relevantes: Diseño híbrido actualizado del concepto. *Revista de dirección, organización y administración de empresas*, *octubre*(36), 61-68.

Clemens, S., O'Daffer, P., & Cooney, T. (1998). *Geometría con aplicaciones y solución de problemas.* Addison-Wesley Publishing Company, Inc.

Comisión Europea. (1995). *Libro Verde de la Innovación*. Recuperado de: https://sid.usal.es/idocs/F8/FDO11925/libroverde.pdf

Costa, V. A., & Río, L. S. Del. (2019). Aportes de la Geometría Dinámica al estudio de la noción de función a partir de un problema geométrico: Un análisis praxeológico. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *33*(63), 67-87. Https://doi.org/10.1590/1980-4415v33n63a04

Defelipe, M. R., Serpa, I., Castiblanco, S., & Cardona, M. (2013). Evolución del concepto de innovación y sus implicaciones en el sector hotelero: Revisión de la literatura. *Suma de Negocios*, *4*(2), 21-38.

Escudero, J. M. (1988). La innovación y la organización escolar. En R. Pascual & B. M. Bass, *La gestión educativa ante la innovación y el cambio*. Narcea.

Garavito, J., & Gómez, W. (2017). *Catálogo de tareas que potencian el desarrollo del pensamiento variacional*. Pedagógica Nacional.

García, G., Guacaneme, E. A., & Pinzón, W. J. (2012). Pensamiento Vriacional y Sistemas Alebraicos y Analíticos: Reflexión sobre los estándares curriculares del área de Matemáticas. En ASOCOLME, *Estandares curriculares área de Matemáticas. Aportes para el análisis.* (p. 10).

García, J. Á. (2013). La problemática de la enseñanza y el aprendizaje del cálculo para ingeniería. *Revista Educación*, *37*(1), 29. Https://doi.org/10.15517/revedu.v37i1.10627

Gascón, J. (2001). Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *2*(4), 129-159.

Gómez, O. (2013). Desarrollo del pensamiento variacional en estudiantes de grado noveno. *Revista científica*, *2*, 115. Https://doi.org/10.14483/23448350.5966

Hernández García, K. L., & Tapiero Castellanos, K. J. (2014). *Desarrollo del razonamiento algebraico a partir de la generalización de patrones gráficos - icónicos en estudiantes de educación básica primaria* [Pregrado]. Universidad del Valle.

Imbernón, F. (1996). *En buscal del discurso educativo. La escuela, la innovación educativa, el curriculum, el maestro y su formación.* (Ministerio de Cultura y Educación).

Jiménez, B. J. (1995). *La formacion del profesorado y la innovacion*. *19*, 33-46.

Jimeno, R. (2020). *Construccionismo social e investigación. Un binomio indispensable para la creación de innovación en mercadotecnia*. *41*(2), 9-28.

Larson, R., & Edwards, B. (2010). *Cáculo 1: De una variable* (9.ª ed.). Mcgraw-Hill/Interamericana editores, S.A. de c.v.

López, J. (2019). Modelos pedagógicos y elementos del currículo. En *Ratio Formationis prenoviciado: Una propuesta curricular* (Primera Edición, pp. 59-78). USTA.

Margalef, L., & Arenas, A. (2006). ¿Qué entendemos por innovación educativa? A próposito del desarrollo curricular. *Perspectiva Educaciona*, *47*, 13-31.

MEN. (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas*. Republica de Colombia. Ministerio de Educacion Nacional.

Http://www.mineducacion.gov.co/1759/w3-article339975.html

MEN. (2000). Estándares para la excelencia en la educación: Estándares curriculares para las áreas de matemáticas, lengua castellana y ciencias naturales y educación ambiental para la educación preescolar, básica y media. *Documento de estudio.* Republica de Colombia. Ministerio de Educacion Nacional.

MEN. (2003). La Revolución Educativa: Estándares Básicos de Competencias de Matemáticas y Lenguaje para la Educación Básica y Media. Republica de Colombia. Ministerio de Educacion Nacional.

MEN. (2004). *Pensamiento variacional y tecnologías computacionales.* República de Colombia. Ministerio de Educación Nacional.
MEN. (2006). *Estándares Básicos de Competencias.* República de Colombia. Ministerio de Educación Nacional.
Https://www.mineducacion.gov.co/portal/Preescolar-basica-y-media/Referentes-de-calidad/340021:Estandares-Basicos-de-competencia
MEN. (2015). *Derechos Básicos de Aprendizaje V1*. República de Colombia. Ministerio de Educación Nacional.
MEN. (2017). *Documento Fundamentación Teórica de los Derechos Básicos de Aprendizaje (V2) y de las Mallas de Aprendizaje para el Área de Matemáticas.* República de Colombia. Ministerio de Educación Nacional.
Molina, O., & Samper, C. (2019). Tipos de Problemas que Provocan la Generación de Argumentos Inductivos, Abductivos y Deductivos. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *33*(63), 109-134. Https://doi.org/10.1590/1980-4415v33n63a06
Mulat, J. (2005). *La innovación, concepto e importancia económica*. 21-36.
Múnera, John Jairo, Marín, A. D. J., Cárdenas, M., Carvajal, B. A., & Bastidas, M. A. (2006). Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos. En M. E. (Ed.) Posada, *Interpretación e implementación de los estándares básicos de matemáticas* (pp. 47-68). Secretaría de Educación para la Cultura de Antioquia.
Muñoz, G. D., & Espinosa, D. G. (2018). *La innovación: Baluarte fundamental para las organizaciones Innovation: Fundamental bulwark for organizations*. *3*(10), 212-229.
Nelson, R., & Winter, S. (1982). *An Evolutionary Theory Of Economic Change*. The Belknap Press of Harvard University Press Cambridge, Massachusetts and London, England. Recuperado de: http://inctpped.ie.ufrj.br/spiderweb/pdf_2/Dosi_1_An_evolutionary-theory-of_economic_change..pdf
Palacios, C. (2008). *Desafíos en la Gestión de la Innovación*. Itelligence 4 Innovation. Recuperado de https://www.yumpu.com/es/document/read/14817421/desafios-en-la-gestion-de-la-innovacion-in4in
Paladinez, D. (2018). *Desarrollo del Pensamiento Variacional en Estudiantes de Primaria, a través de Actividades de Aprendizaje basadas en Problemas*. Universidad Nacional de Colombia.
Patiño Garzón, L. (2007). Aportes del enfoque histórico cultural para la enseñanza. *Educación y Educadores*, *10*(1), 53-60.
Pérez, A. (2018). *Aproximación histórica al saber escolar matemático en Colombia segunda mitad del siglo XX* [Tesis de Doctorado]. Universidad Santo Tomás.
Perry, P., Camargo, L., Samper, C., & Rojas, C. (2006). *Actividad demostrativa en la formación inicial del profesor de matemáticas* (Primera edición). Universidad Pedagógica Nacional.
Perry, P., Samper, C., & Camargo, L. (2006). Dos episodios que plasman rasgos de una comunidad de práctica en la que Cabri juega un papel clave. *Ponencia presentada en Iberocabri. Próxima aparición en formato digital en: www.iberocabri.org.*
Posada, F., & Obando, G. (Eds.). (2006). *Pensamiento Variacional y Razonamiento Algebraico, Módulo 2*. Gobernación de Antioquia.
Rico, L. (1998). Concepto de Currículum desde la Educación Matemática. *Revista de Estudios del Currículum*, *1*(4), 7-42.
Rico, L. (2014, julio 17). *Los Procesos de Cambio en Matemática: Fundamentos y Resultantes*.

Rimari, W. (2008). *Formulación, monitoreo, evaluación y sistematización de proyectos educativos innovadores*. Universidad Católica Sedes Sapientiae. Https://docs.google.com/file/d/0b0ncja_pmkimnwkzounomvzpzkk/edit

Rodríguez, S. (2015). *Traducción Entre los Sistemas de Representación Simbólica y Verbal: Un estudio con alumnado que inicia su formación en secundaria*. Universidad de Granada.

Samper, C., & Molina, O. (Eds.). (2013). *Geometría plana: Un espacio de aprendizaje* (Primera edición). Universidad Pedagógica Nacional.

Samper, C., Molina, Ó., & Echeverry, A. (2013). *Elemento de Geometría: Aprendizaje y enseñanza de la geometría* (Segunda edición). Fondo Editorial Universidad Pedagógica Nacional.

Sein-Echaluce, M. L., Fidalgo-Blanco, Á., & Alves, G. (2016). Technology behaviors in education innovation. *Computers in Human Behavior*, *72*, 596-598. Https://doi.org/10.1016/j.chb.2016.11.049

Stewart, J. (2012). *Single variable calculus: Early transcendentals* (7th ed., Student ed). Brooks/Cole Cengage Learning.

Tapiero. (2020). *Análisis de una propuesta para el aprendizaje del concepto de derivada desde la razón de cambio* [Maestría]. Universidad del Valle.

Vasco, C. (2002). *El pensamiento variacional, la modelación y las nuevas tecnologías*. 10.

Vasco, C. E. (1985). *El enfoque de sistemas en el nuevo programa de matemáticas. 1*(2), 45-51.

Vasco, C. E. (2006). *El pensamiento variacional y la modelación matemática*. Cali, Colombia. Http://pibid.mat.ufrgs.br/2009-2010/arquivos_publicacoes1/indicacoes_01/pensamento_variacional_VASCO.pdf

Velandia, M., & Miranda, A. (2014). *El proceso de conjeturación a través de viñetas animadas*. Universidad Pedagógica Nacional.

Ventura, A. C. (2016). ¿Enseño como aprendí?: El rol del estilo de aprendizaje en la enseñanza del profesorado universitario. *Aula Abierta*, *44*(2), 91-98. Https://doi.org/10.1016/j.aula.2016.05.001

Viedma Castaño, J. A. (1962). *Introducción al Cálculo Infinitesimal*. Norma.

Vílchez, N. G. (2004). *Una revisión y actualización del concepto de Currículo*. *6*(2), 194-208.

Villa, J., & Ruiz, H. (2010). Pensamiento variacional: Seres-humanos-con-geogebra en la visualización de nociones variacionales. *Pontificia Universidad Católica de São Paulo*, *12*(3), 514-528.

ANEXO A

Caracterización de la actividad demostrativa a través de las manifestaciones de desempeño de las acciones. Tomado de Perry et al, (2006)