

**Y sobre la argumentación abductiva, ¿el profesor qué debería  
conocer?**

Andrés C. Bello

Cristian F. Raigoso

Universidad Pedagógica Nacional  
Maestría en Docencia de la Matemática  
Dra. Leonor Camargo

2021

## **Agradecimientos**

*A Dios, por haberme guiado y acompañado en el transcurso de la maestría, por ser mi fortaleza en momentos de debilidad y por permitir seguirme formando como profesor.*

*A la Universidad Pedagógica Nacional, por haberme brindado la oportunidad de formarme y transformar aspectos de mi conocimiento didáctico matemático.*

*A nuestra asesora, la Dra. Leonor Camargo Uribe, por su paciencia, dedicación y aportes, sin los cuales este trabajo de grado no hubiese sido posible.*

*A mi familia, por su apoyo incondicional en los momentos difíciles, por los valores inculcados, por ser un ejemplo de vida y por haberme dado la oportunidad de tener una excelente educación en el transcurso de mi vida.*

*A Cristian Raigoso, por haber sido un excelente compañero de tesis, por haberme tenido la paciencia necesaria y por la motivación que me brindo en diferentes momentos.*

*A Diana, por ser mi fuente de inspiración y motivación.*

**Andrés Camilo Bello Rocha**

*Agradezco a Dios en primer lugar por la oportunidad de permitirme cumplir uno de mis grandes sueños.*

*A Tatiana por su amor y apoyo, quien siempre estuvo fortaleciéndome para lograr este reto y a mi madre, siempre presente e incondicional.*

*A nuestra asesora, Dra. Leonor Camargo Uribe, por su dedicación, colaboración y apoyo para el desarrollo de este trabajo.*

*A la Universidad Pedagógica Nacional por haberme brindado la oportunidad de continuar formándome como profesor y a los profesores de la Maestría que me permitieron reflexionar sobre mi ejercicio como profesor.*

*A mi compañero Andrés Bello, por el compromiso y dedicación para que esta meta se vuelva una realidad.*

**Cristian Ferney Raigoso**

## Resumen

El presente proyecto nace de la necesidad de enfocarnos en el diseño de tareas en Entornos de Geometría Dinámica (EGD) para la clase de geometría con las cuales se privilegie la argumentación abductiva. Esto, porque consideramos débiles los intentos de adaptar problemas y ejercicios pensados para papel y lápiz a estos entornos. Al estar vinculados al grupo *Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría* de la Universidad Pedagógica Nacional, fundamentamos el proyecto en una caracterización del modelo del Conocimiento Didáctico Matemático (CDM) propuesto por el Enfoque Onto semiótico de Godino y Pino-Fan. De esta manera reflexionamos acerca de nuestro propio conocimiento didáctico matemático como profesores en ejercicio, develando cambios, principalmente en nuestros referentes sobre argumento, argumentación y argumentación abductiva con el fin de poder diseñar tareas en EGD para nuestros estudiantes que promuevan la argumentación abductiva. El trabajo se desarrolló desde una estrategia de investigación acción a través de un estudio participativo y colaborativo de autorreflexión. A partir de esto logramos una mayor comprensión y profundización de los elementos anteriormente citados, identificamos evidencias de la transformación de nuestro conocimiento didáctico matemático y evaluamos la pertinencia de ciertas acciones para movilizar dicho conocimiento.

## Tabla de contenido

Introducción .....	10
1. Problemática del trabajo .....	13
1.1 Delimitación del problema.....	13
1.2 Justificación .....	16
1.3 Revisión de estudios acerca del modelo del conocimiento didáctico matemático del profesor (CDM) .....	18
1.4 Objetivos.....	25
1.4.1 General.....	25
1.4.2 Específicos .....	25
2. Marco de referencia.....	26
2.1 Modelo de CDM de la EOS .....	26
2.2 Interpretación del modelo para dar cuenta del CDM sobre la argumentación abductiva para el diseño de tareas con apoyo de EGD .....	30
3. Metodología .....	32
3.1 Posicionamiento investigativo .....	32
3.2 Estrategia investigativa.....	33
3.3 Registro de información y construcción de datos investigativos .....	35
3.4 Análisis de los datos en los tres ciclos de la investigación.....	37
4. Informe sobre el Ciclo 1 de la investigación .....	40
4.1 Fase 1- Ciclo 1: Identificación del problema que dio lugar al Ciclo 1.....	40
4.2 Fase 2- Ciclo 1: Plan de acción para movilizar el conocimiento .....	41
4.3 Fase 3- Ciclo 1: Implementación de acciones y recolección de información.....	41
4.4 Fase 4 – Ciclo 1: Proceso de análisis de los datos .....	45

4.4.1	Caracterización del conocimiento didáctico matemático a partir del Texto narrativo Base	45
4.4.2	Caracterización del conocimiento didáctico matemático a partir del Texto narrativo Uno	47
4.4.3	Cambios identificados en nuestro conocimiento didáctico matemático derivados del plan de acción del Ciclo 1.....	53
5.	Informe sobre el Ciclo 2 .....	57
5.1	Fase 1 – Ciclo 2: Identificación del problema que dio lugar al Ciclo 2 .....	57
5.2	Fase 2 – Ciclo 2: Plan de acción para movilizar el conocimiento .....	58
5.3	Fase 3 – Ciclo 2: Implementación de acciones y recolección de información .....	59
5.4	Fase 4 – Ciclo 2: Proceso de análisis de los datos .....	61
5.4.1	Caracterización de nuestro conocimiento didáctico matemático a partir del Texto Narrativo Dos.....	61
5.4.2	Comparación de la faceta epistémica entre Texto Narrativo Uno y Texto Narrativo Dos	67
5.4.3	Cambios en el conocimiento didáctico matemático que se aprecian en el Texto Narrativo Dos, fruto de la implementación del Plan acción del Ciclo 2 .....	69
5.4.4	Cambios identificados en nuestro conocimiento didáctico matemático entre el Ciclo 1 y el Ciclo 2 .....	73
6.	Descripción del Ciclo 3 .....	80
6.1	Fase 1- Ciclo 3: Identificación del problema que dio lugar al Ciclo 3.....	80
6.2	Fase 2-Ciclo 3: Plan de acción para movilizar el conocimiento .....	81
6.3	Fase 3-Ciclo 3: Implementación de acciones y recolección de información.....	82
6.4	Fase 4 - Ciclo 3: Proceso de análisis de los datos .....	84
6.4.1	Caracterización de nuestro conocimiento didáctico matemático a partir del Texto Narrativo Tres .....	85

6.4.2	Comparaciones del conocimiento tablas de Ciclo 1 Ciclo 2 y Ciclo 3 referidos a los descriptores .....	89
6.4.3	Cambios en el conocimiento didáctico matemático que se aprecian en el Texto Narrativo Tres, fruto de la implementación del plan acción.....	91
6.4.4	Cambios identificados en nuestro conocimiento didáctico matemático entre el Ciclo 1, el Ciclo 2 y el Ciclo 3 .....	96
7.	Resultados y conclusiones .....	99
7.1	Resultados .....	99
7.2	Conclusiones .....	107
8.	Referencias bibliográficas incluidas en el cuerpo principal del trabajo .....	113
9.	Referencias bibliográficas incluidas en los anexos .....	117
10.	Anexos .....	119
10.1	Anexo 1: tabla apuntes .....	119
10.2	Anexo 2: Tablas de depuración.....	121
10.3	Anexo 3: Texto Narrativo Base.....	132
10.4	Anexo 4: Texto Narrativo Uno .....	136
	<i>Conocimiento didáctico-matemático sobre el diseño de tarea.....</i>	<i>138</i>
	<i>Conocimiento didáctico matemático sobre la conceptualización de argumento .....</i>	<i>141</i>
	<i>Conocimiento didáctico matemático sobre la estructura de argumento.....</i>	<i>142</i>
10.5	Anexo 5: Texto Narrativo Dos.....	147
10.6	Anexo 6: Texto Narrativo Tres .....	164

## Listado de tablas

<b>Tabla 2.1</b> <i>Categorías para el análisis</i> .....	30
<b>Tabla 3.1</b> <i>Rótulos para realizar la comparación de fragmentos</i> .....	38
<b>Tabla 4.1</b> <i>Ejemplo de insumos de apuntes de clase</i> .....	43
<b>Tabla 4.2</b> <i>Ejemplo de primera versión de la tabla de Excel</i> .....	43
<b>Tabla 4.3</b> <i>Ejemplo de segunda versión de la tabla de Excel</i> .....	44
<b>Tabla 4.4</b> <i>Fragmentos del Texto Narrativo Base</i> .....	46
<b>Tabla 4.5</b> <i>Fragmentos del Texto Narrativo Uno</i> .....	48
<b>Tabla 4.6</b> <i>Fragmentos rotulados con respecto a la definición de argumentación y argumento</i> ..	53
<b>Tabla 4.7</b> <i>Fragmentos rotulados sobre la relación entre argumentación y demostración</i> .....	54
<b>Tabla 4.8</b> <i>Fragmentos rotulados con la asignación del descriptor “Caracterización de tareas que favorecen la argumentación”</i> .....	55
<b>Tabla 5.1</b> <i>Fragmentos del Texto Narrativo Dos</i> .....	62
<b>Tabla 5.2</b> <i>Fragmentos rotulados con la asignación del descriptor “Caracterización de los elementos de un argumento” parte 1</i> .....	70
<b>Tabla 5.3</b> <i>Fragmentos rotulados con la asignación del descriptor “Caracterización de los elementos de un argumento” parte 2</i> .....	71
<b>Tabla 5.4</b> <i>Fragmentos rotulados con la asignación de los descriptores “Ejemplo de argumento o reformulación de ejemplo de argumento” y “Conectores usados en la escritura de un argumento”</i> .....	72
<b>Tabla 5.5</b> <i>Rotulación de fragmentos con respecto al descriptor “propuesta de definición de argumento”</i> .....	74
<b>Tabla 5.6</b> <i>Rotulación de fragmentos con respecto al rótulo “Propósito de argumento”</i> .....	75
<b>Tabla 5.7</b> <i>Rotulación de fragmentos con respecto al descriptor “Caracterización de los elementos de un argumento”</i> .....	76

<b>Tabla 5.8</b> Rotulación de fragmentos con respecto al descriptor “Propuesta de definición de argumento abductivo” .....	78
<b>Tabla 6.1</b> Fragmentos del Texto Narrativo Tres .....	85
<b>Tabla 6.2</b> Fragmentos rotulados con la asignación del descriptor “Componentes del enunciado de una tarea para promover argumentación abductiva” .....	91
<b>Tabla 6.3</b> Fragmentos rotulados con la asignación del descriptor “Ejemplificación de enunciado de tarea que promueve argumentación abductiva” .....	93
<b>Tabla 6.4</b> Fragmentos rotulados con la asignación del descriptor “Esquema de argumento abductivo” .....	94
<b>Tabla 6.5</b> Fragmentos rotulados respecto al establecimiento de relación entre un argumento y exploración .....	96
<b>Tabla 6.6</b> Fragmentos rotulados respecto al descriptor “Tipos de argumento abductivo” .....	97
<b>Tabla 6.7</b> Fragmentos rotulados respecto al descriptor “Ejemplificación de argumento abductivo o reformulación de ejemplo” .....	98
<b>Tabla 7.1</b> Facetas y descriptores asignados en fragmentos en cada uno de los ciclos.....	99
<b>Tabla 7.2</b> Descriptores asignados relacionados a argumento .....	101
<b>Tabla 7.3</b> Descriptores asignados relacionados a argumento abductivo .....	102
<b>Tabla 7.4</b> Cambios al interior de cada Ciclo y relación con el plan de acción.....	103
<b>Tabla 7.5</b> Cambios entre ciclos y relación con el plan de acción.....	105
<b>Tabla 9.1</b> Definiciones de argumento .....	148
<b>Tabla 9.2</b> Definiciones de elementos de un argumento. ....	151

## **Listado de figuras**

<b>Figura 1.1</b> Facetas y niveles del conocimiento del profesor (Tomado de Godino 2009).....	20
<b>Figura 3.1</b> Espiral de ciclos de la Investigación Acción. Elaboración propia .....	34
<b>Figura 6.1</b> Diagrama de comparación facetas entre ciclos .....	90



## Listado de cuadros

<b>Cuadro 2.1</b> <i>Modelo del CDM (Fuente: elaboración que toma elementos de Pino-Fan y Godino, 2015)</i> .....	27
<b>Cuadro 4.1</b> <i>Fragmento de Texto Narrativo Uno</i> .....	45
<b>Cuadro 5.1</b> <i>Fragmento de Texto narrativo Dos</i> .....	60
<b>Cuadro 6.1</b> <i>Fragmento de Texto Narrativo Tres</i> .....	84

## Introducción

Por varios años, las investigaciones en Educación Matemática se concentraron en lo que era posible que los estudiantes de los diferentes niveles educativos aprendieran, o hicieran en el aula, en cómo enseñarles o en circunstancias que rodean el acto educativo. Pero últimamente las investigaciones en esta área del conocimiento han dado un giro hacia el profesor y su propio conocimiento, dando lugar al campo de la Formación del profesor de matemáticas, (Pino-Fan, Godino, Font y Castro, 2012). Entre las diferentes opciones de desarrollo del campo, hoy se asume que en la medida en que el profesor se examine a sí mismo puede empezar a gestar cambios en sus prácticas educativas (Chehaybar, 2007). Este supuesto ha llevado a los profesores a procesos reflexivos que se convierten en un motor de transformaciones y, aun cuando no se busca influir directamente en el conocimiento de los niños y adolescentes, se provoca una influencia indirecta en ellos, al transformar su práctica docente, fruto de tales procesos.

Considerando las apreciaciones mencionadas, en este trabajo nos propusimos develar cambios en aspectos de nuestro conocimiento didáctico matemático sobre argumento, argumentación y argumentación abductiva, como fundamentos importantes para el diseño de tareas mediadas por Entornos de Geometría Dinámica (EGD), que promuevan la argumentación abductiva. Para atender este objetivo, usamos como fundamento teórico algunas facetas de la dimensión didáctica del modelo del conocimiento didáctico matemático (CDM) del profesor, que proponen Godino y Pino-Fan (2015). Con base en este, llevamos a cabo una investigación en la que usamos una adaptación de la estrategia de Investigación Acción. Desarrollamos tres ciclos de reflexión, a partir de la identificación de una problemática inicial que conllevó a la determinación de un primer plan de acción, su desarrollo e identificación de dos sucesivas nuevas problemáticas para atender en los siguientes dos ciclos.

En el Ciclo 1, atendimos la problemática sobre la falta de profundización de nuestro conocimiento didáctico matemático, acerca de los elementos que se requieren para poder diseñar tareas que promuevan la argumentación abductiva en EGD. En el Ciclo 2, la problemática sobre la cual trabajamos fue la necesidad de aclarar aspectos de la conceptualización de argumentación

abductiva, en los que deberíamos ganar una profundización. En el Ciclo 3 nos centramos en la necesidad de ahondar sobre el uso de los EGD como apoyo en el diseño de tareas que movilicen el proceso de argumentación abductiva con ayuda de un EGD.

El documento se divide en 7 capítulos. A continuación, mencionamos el contenido de cada uno.

El Capítulo 1 contiene la delimitación del problema general que pretendemos abordar en este trabajo y a partir del cual formulamos nuestra pregunta de investigación. Damos evidencias que justifican nuestra investigación, presentamos una revisión de literatura, la cual está relacionada con el modelo del CDM del profesor y presentamos los objetivos.

En el Capítulo 2, presentamos el marco de referencia que fundamenta este estudio investigativo. Iniciamos con la presentación del modelo del CDM, enfocándonos en la dimensión didáctica. Luego, realizamos una interpretación del modelo para dar cuenta de nuestro conocimiento didáctico matemático, proponiendo descriptores de conocimiento para realizar el análisis. Aun cuando en el trabajo se referencian otros autores, para conceptualizar argumento, argumento abductivo, uso de EGD para el diseño de tareas, etc., ellos no se incluyen en el marco de referencia general porque hacen parte de los ejercicios de fundamentación que se mencionan en capítulos posteriores.

En el Capítulo 3, describimos la metodología utilizada. Damos a conocer el posicionamiento investigativo, la estrategia empleada, las fuentes para el registro de información y el proceso de construcción de datos investigativos. Además, suministramos una descripción del análisis realizado en los diferentes ciclos de la investigación.

En el Capítulo 4, realizamos un informe sobre el Ciclo 1 de la investigación que consta de cuatro fases. En la primera fase, identificamos el problema que dio lugar al Ciclo 1; en la fase dos, diseñamos un plan de acción para movilizar nuestro conocimiento; en una tercera fase, realizamos una descripción de las acciones y de la información recopilada durante el desarrollo del plan de acción del ciclo y en la fase 4 realizamos el proceso de análisis de los datos investigativos. En los Capítulos 5 y 6 realizamos sendos informes sobre los Ciclos 2 y 3 de la

investigación. El desarrollo de cada uno de estos Ciclos también se dio en cuatro fases, como lo mencionamos para el Ciclo 1.

En el Capítulo 7 presentamos los resultados del análisis y las conclusiones de la investigación. Organizamos los resultados de acuerdo con el análisis realizado en cada uno de los ciclos. La discusión está organizada de acuerdo con los resultados. Exponemos las conclusiones, teniendo en cuenta los siguientes aspectos: la pregunta de investigación planteada, los objetivos, nuestro conocimiento didáctico matemático y su transformación, el proceso que seguimos para movilizar nuestro conocimiento, los productos de este trabajo de grado y las proyecciones que tenemos.

# 1. Problemática del trabajo

## 1.1 Delimitación del problema

Como profesores de matemáticas escolares, nuestro interés por cursar estudios de maestría inicialmente se encontraba encaminado a fortalecer nuestro conocimiento sobre el diseño de tareas con el apoyo del uso de EGD. Queríamos promover una actividad lo suficientemente rica en donde los estudiantes descubrieran propiedades matemáticas y no solo se informaran sobre estas. Lo anterior, porque usualmente las tareas que proponíamos en clase de geometría eran desarrolladas por los estudiantes con lápiz y papel y con el uso de un texto guía. Veíamos que este recurso no favorecía prácticas de descubrimiento.

Iniciamos nuestro estudio de posgrado en el programa de Maestría en Docencia de la Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional, con la necesidad y el interés de replantear las tareas que usualmente proponíamos en nuestras clases, con el fin de incentivar su desarrollo en un EGD y de aprender cómo hacerlo. Decidimos optar por el uso de EGD, porque en las instituciones educativas donde laboramos disponemos de recursos informáticos para la clase de geometría, pero hemos desaprovechado su potencial para promover procesos, como por ejemplo, de conjeturación y argumentación.

Nuestras debilidades sobre el conocimiento requerido para el diseño de tareas se hicieron evidentes al iniciar la Maestría, cuando optamos por tomar una tarea de un texto escolar y tratamos de adaptarla para desarrollarla en un EGD, de la siguiente manera. “Construya en un EGD dos segmentos  $AC$  y  $BD$  tal que se intersequen en  $E$  y  $E$  sea punto medio de los segmentos. ¿Qué características tiene el cuadrilátero  $ABCD$ ?”. Al revisar la tarea planteada, nos dimos cuenta de que el tratamiento que proponíamos para estudiar el objeto geométrico involucrado seguía siendo estático y los estudiantes no tenían que realizar exploraciones ni tampoco proponer conjeturas.

Al vincularnos a la línea Argumentación y Prueba en Geometría y recibir el apoyo del grupo de investigación *Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría*, de la Universidad Pedagógica Nacional,

por recomendación de los miembros del grupo concretamos el interés que teníamos de lograr que los estudiantes descubrieran y justificaran propiedades, centrando la atención en la argumentación abductiva. Sobre este tipo de argumentación, Cristian tenía algún conocimiento puesto que había comenzado a participar de un grupo de investigación, *Razonamiento abductivo*, pero Andrés no.

En el Seminario de Profundización en Matemáticas Elementales, del programa de Maestría, nos propusieron la siguiente tarea, que fue muy reveladora del tipo de diseño que queríamos hacer: Dados cuatro puntos  $A, B, C$  y  $D$ . ¿Cuántas circunferencias contienen a los puntos  $A, B, C$  y  $D$ ?

Para resolver esta tarea en un EGD, algunos estudiantes del seminario iniciamos ubicando cuatro puntos  $A, B, C, D$  sobre una circunferencia para tratar de identificar qué condición debían cumplir los cuatro puntos para que existiera al menos una circunferencia. Luego construimos el cuadrilátero  $ABCD$  y las mediatrices de cada uno de sus lados y verificamos que las mediatrices se intersecaban siempre en un mismo punto. El profesor del curso señaló que habíamos partido del cumplimiento de la conclusión de una proposición condicional, y que por lo tanto habíamos realizado un proceso abductivo para descubrir las condiciones que debían tener los cuatro puntos.

Después de vivir esta experiencia, intentamos emularla con una tarea que propusimos a nuestros estudiantes de grados séptimo y octavo en las dos instituciones en donde trabajamos. El enunciado del problema era el siguiente: ¿Qué tipo de triángulos tienen dos ángulos agudos y uno obtuso? Desde nuestra perspectiva, esperábamos que los estudiantes, construyeran un triángulo que creyeran cumplía la propiedad “dos ángulos agudos y uno obtuso” y luego descubrieran que podría ser isósceles o escaleno. Es decir, creíamos que iban a realizar un proceso de argumentación abductiva.

Los estudiantes comenzaron por recordar qué son ángulos obtusos y agudos. Luego, teniendo en cuenta la medida de los ángulos, construyeron diferentes triángulos que cumplían la condición del enunciado y dieron por terminada la tarea. Contrario a lo esperado, los estudiantes realizaron algunas representaciones y mencionaron algunas clasificaciones, pero no encontramos evidencia de que algún estudiante realizara un descubrimiento, producto de un proceso de argumentación

abductiva. Esto pudo haber ocurrido porque como profesores no teníamos el conocimiento suficiente para diseñar tareas de este tipo ni guiar el desarrollo de la tarea, de tal forma que les permitiera expresar el tipo de argumento que queríamos. El uso de EGD no fue considerado cuidadosamente por nosotros al diseñar la tarea.

Un acercamiento inicial a la bibliografía nos mostró que uno de los problemas que tienen las tareas que comúnmente les presentamos a los estudiantes, para favorecer la argumentación, es que están diseñadas en ambientes donde la única herramienta con la que cuentan es el papel y el lápiz. En ese tipo de ambientes, según Baccaglini (2010)

las propiedades geométricas son estáticas y “al mismo nivel” con respecto a la percepción del estudiante; [...] más aun, ningún elemento de la figura es privilegiado con respecto a los otros, y el razonamiento en un único dibujo específico que representa una clase de figuras, requiere una alta armonización entre el componente figurativo y el componente conceptual (p. 28).

De acuerdo con lo dicho por esta autora, los estudiantes a quienes le propusimos la tarea habían podido adelantar un proceso de exploración si hubieran construido los triángulos en un EGD, posibilitándoles encontrar los atributos de los lados de los triángulos. Como lo señala la autora, el uso de un EGD permite la diversidad de representaciones de los objetos geométricos, formas de arrastre y permite tener una mayor riqueza durante el desarrollo de la tarea.

Teniendo en cuenta que como profesores desempeñamos un papel importante en el diseño e implementación de tareas, es necesario que contemos con herramientas conceptuales y metodológicas para desempeñar esta labor. Joubert (2017) nos indica lo difícil y complejo que es para los profesores el diseño de las tareas en EGD, de manera que promuevan la argumentación y una actividad que lleve al aprendizaje matemático de los estudiantes. Por tanto, como profesores no debemos limitarnos solo al estudio de las herramientas sino también a profundizar sobre cómo diseñar tareas y actividades que la acompañan (Drijvers, 2015).

Por todo lo anterior, decidimos centrar nuestro trabajo en una profundización de nuestro conocimiento sobre argumento, argumentación y argumentación abductiva, considerando que

este será apoyo para el diseño de tareas que favorezcan la argumentación abductiva. Al fundamentar teóricamente el proyecto en el modelo del conocimiento didáctico matemático (CDM) del Enfoque Ontosemiótico (EOS) (Godino y Pino-Fan, 2015), esto por solicitud de los profesores responsables de la cohorte, formulamos la siguiente pregunta de investigación: ¿Sobre qué aspectos del conocimiento didáctico matemático acerca de la argumentación abductiva debería profundizar un profesor para poder diseñar tareas que promuevan dicha argumentación con apoyo de EGD?

## 1.2 Justificación

La presente investigación se sustenta en las orientaciones curriculares sugeridas por el Ministerio de Educación Nacional de Colombia y en los avances de la comunidad matemática en en la línea de argumentación matemática, así como en la interacción académica con el Grupo de Investigación *Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría* de la Universidad Pedagógica Nacional. A continuación se presentan cinco apartados que justifican este ejercicio investigativo: Lineamientos Curriculares (MEN,1998, 17); Estándares Básicos de Competencias Matemáticas (MEN,2006); Pruebas Saber 11° de Matemáticas (ICFES, 2019), referidas a la importancia de favorecer la argumentación en la clase de matemáticas; señalamientos de investigadores sobre la importancia de diseñar tareas que favorezcan la argumentación abductiva; y participación activa, como experiencia de autoformación profesor a nivel de maestría de los investigadores, en el grupo de *Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría*, de la Universidad Pedagógica Nacional, en la línea de investigación, conocimiento didáctico matemático del profesor acerca de la argumentación.

Con referencia a las orientaciones curriculares, hacer un trabajo que permita el desarrollo del conocimiento del profesor sobre la argumentación es relevante, dado que este proceso es central en la enseñanza de la geometría. Como lo estipulan los Lineamientos Curriculares, la geometría es una herramienta que “...por excelencia desarrolla el pensamiento espacial y procesos de nivel superior y, en particular, formas diversas de argumentación...” (MEN, 1998, p. 17).



Los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006) establecen el razonamiento y específicamente la argumentación, como uno de los procesos generales en la enseñanza de la geometría. Teniendo en cuenta que estos procesos, no siempre son acogidos y abordados por las instituciones educativas, se considera la necesidad de fortalecer el conocimiento de los profesores sobre el diseño de tareas para la clase de geometría con el apoyo de EGD que favorezca un mejor proceso argumentativo de los estudiantes, en el marco de esta propuesta de lineamientos oficiales. Este trabajo busca contribuir a la aplicación en la clase de matemáticas de las orientaciones curriculares mencionadas buscando una ruta para fortalecer este conocimiento entre nuestros colegas.

Otra razón curricular que evidencia la importancia del trabajo es la necesidad de mejorar los indicadores educativos exhibidos en los resultados de las pruebas externas. Como ejemplo, las pruebas Saber 11° de Matemáticas evalúan tres competencias: *interpretación y representación, formulación y ejecución, y argumentación*. El 23% de las preguntas formuladas en 2019, estaban relacionadas con la argumentación con una distribución de entre el 20% y 35% del total de las preguntas en geometría (ICFES, 2019). En nuestros colegios observamos bajos desempeños en geometría, particularmente referidos a los procesos argumentativos. Como la argumentación es un concepto central de este trabajo, pretendemos contribuir a mejorar nuestro conocimiento de ese proceso; quizás así, podríamos ayudar a mejorar los resultados de los estudiantes.

En cuanto a la necesidad de adelantar trabajos en relación con el estudio del conocimiento adquirido para poder diseñar tareas, diversos autores reconocen la importancia de diseñar tareas para desarrollar argumentación abductiva. Arzarello y sus colaboradores (2012), Pedemonte (2002), Baccaglini (2011), recalcan que con diseños didácticos adecuados la abducción puede favorecerse cuando se usa un ~~en~~ EGD. Estos diseños pueden tender un puente entre los hechos perceptivos de las representaciones que se exploran y su transposición al conocimiento geométrico.

Sobre tareas en general, Ponte, (2004), Kilpatrick (2001), Watson y Sullivan (2008), Sullivan et al. (2010) (citados por Zakaryan, 2013) consideran que el diseño de tareas esta relacionado con el

conocimiento matemático que los profesores tienen y que es importante porque potencia la creación de oportunidades efectivas de aprendizaje en los estudiantes.

Además de lo mencionado, al vincularnos al grupo de investigación *Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría*, como estudiantes de Maestría, participamos en la línea de investigación, conocimiento didáctico matemático del profesor acerca de la argumentación. Con nuestra propuesta pretendemos realizar un aporte a la línea referida.

### **1.3 Revisión de estudios acerca del modelo del conocimiento didáctico matemático del profesor (CDM)**

Un aspecto que contribuyó a la delimitación del estudio fue la revisión inicial de la literatura, la cual estuvo relacionada con el modelo del conocimiento didáctico matemático del profesor (CDM) que proponen Godino y Pino-Fan (2015), en el marco del Enfoque Ontosemiótico (EOS) de la Didáctica de la Matemática. Inicialmente, realizamos una búsqueda de documentos en Internet usando los siguientes términos claves: conocimiento didáctico matemático, conocimiento matemático didáctico, conocimiento didáctico matemático del profesor, conocimiento didáctico-matemático, conocimiento didáctico-matemático del profesor, model del EOS (Enfoque Ontosemiótico), modelo del EOS del conocimiento del profesor, enfoque de la EOS del conocimiento del profesor, entre otras. Posteriormente, usando las mismas palabras claves, buscamos algunos documentos que fueron propuestos en la bibliografía del *syllabus* del curso Educación del Profesor de Matemáticas, de la Maestría, propuesto en el periodo 2020-2 y en las páginas oficiales de Godino y Pino-Fan. Estas búsquedas nos arrojaron veintisiete documentos. A partir de la lectura de sus resúmenes, seleccionamos siete documentos que consideramos presentaban un panorama útil para nuestro estudio sobre el modelo. Adicionalmente, compañeros de la maestría nos compartieron tres documentos de interés de los cuales seleccionamos uno. A continuación, reseñamos los ocho documentos que recogen los principales elementos investigativos del modelo.

De los documentos revisados, el artículo de mayor antigüedad que habla sobre el modelo del CDM propuesto por el Enfoque Ontosemiótico (EOS) es el propuesto por Godino (2009). Este autor hace un recorrido por varios modelos del conocimiento del profesor e identifica algunas limitaciones de estos, lo que le hace proponer un modelo que comprende categorías de análisis minuciosas sobre el conocimiento didáctico matemático del profesor, con base en el EOS (Godino, 2009).

Al revisar el documento, encontramos en este una contextualización de los modelos propuestos por Shulman (1986), Ball (2000) y Schoenfeld y Kilpatrick (2008) y cuestionamientos a estos modelos, porque incluyen categorías muy generales. Godino presenta un ejemplo de tarea sobre comparación de números racionales, que Sullivan (2008; citado en Godino 2009) propone a un grupo de profesores. Encuentra que la tarea promueve la reflexión del profesor sobre la actividad matemática que los alumnos realizan al resolverla y sobre la que hay que pensar, además de los conocimientos matemáticos que se ponen en juego y otras facetas que condicionan los aprendizajes (Godino 2009). El ejercicio de reflexión que realiza Godino nos sirvió para ubicar nuestro trabajo en una línea de investigación sobre el conocimiento del profesor.

A partir de su análisis, Godino (2009) propone un primer modelo del CDM que contempla unas facetas y niveles. Este modelo permite categorizar y analizar los conocimientos didácticos matemáticos del profesor, mediante la aplicación del Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. El modelo estaba configurado por una estructura poliédrica cuya planta indica las diversas facetas a tener en cuenta en un proceso de estudio sobre el conocimiento. La parte superior indica cuatro niveles de análisis sobre los cuales se puede fijar la atención (Godino, 2009) (ver Figura 1.1).

## Figura 1.1

*Facetas y niveles del conocimiento del profesor (Tomado de Godino 2009)*



El autor define las facetas: epistémica, cognitiva, afectiva, interaccional, mediacional y ecológica para analizar los procesos de instrucción matemática. También conceptualiza los niveles de análisis: prácticas matemáticas y didácticas, configuraciones de objetos y procesos, normas y metanormas e idoneidad. Además, incluye una estrategia de evaluación de los conocimientos didáctico matemáticos basada en el modelo propuesto.

En el año 2011, Pino-Fan, Godino y Font, ponen en práctica el modelo sobre el objeto matemático derivada, para abordar aspectos relativos al componente epistémico del conocimiento didáctico matemático. Utilizando la faceta epistémica presentan una reconstrucción del significado de derivada y establecen cuál es el conocimiento didáctico que necesita un profesor de secundaria en relación con la enseñanza de dicha noción. El resultado de este estudio es útil para el diseño de instrumentos de evaluación y desarrollo de conocimientos didácticos matemáticos sobre la derivada (Pino-Fan, Godino y Font, 2011).

En el año 2013, Godino alude a la noción de idoneidad didáctica como criterio sistémico para el diseño, implementación y valoración de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Presenta cómo es la articulación coherente de las seis facetas del conocimiento del profesor que había propuesto en su primer modelo. Para cada una de estas facetas, distingue diversos componentes e indicadores empíricos de la noción de idoneidad didáctica, que expresan un

conjunto de principios didácticos, concordantes con otros marcos teóricos usados en educación matemática (Godino, 2013).

El trabajo propuesto por Godino (2013) muestra la aplicación de algunas herramientas teóricas del modelo del EOS acerca del conocimiento y la instrucción matemática para el diseño y análisis de tareas dirigidas a la formación matemática y didáctica de profesores. El autor se enfoca en la idoneidad didáctica para proporcionar criterios sobre el diseño de tareas y usa la herramienta configuración de objetos y procesos para realizar análisis detallados de los conocimientos (Godino, 2013).

Pino-Fan, Castro, Godino y Font (2013) presentan un trabajo en el que realizan una contextualización del modelo del conocimiento didáctico matemático (CDM) propuesto en 2009. Ejemplifican cada una de las facetas y luego, gracias a los resultados de algunas investigaciones, Pino-Fan y sus colaboradores van un paso más allá respecto del modelo inicial tratando de concretar los conocimientos en tópicos matemáticos específicos. Lo anterior los lleva a replantear el modelo, para dar cuenta de aquellos aspectos específicos del conocimiento especializado y extendido del contenido que debe tener un profesor, y a plantear dos niveles del conocimiento especializado del contenido. El primer nivel corresponde a la *aplicación*, con el cual los futuros profesores pueden usar no sólo diferentes representaciones, conceptos, proposiciones, procedimientos y justificaciones, sino usar el rango de significados de objetos matemáticos del concepto matemático en estudio. El segundo nivel corresponde al conocimiento sobre la *identificación*, con el cual se identifican los conocimientos (elementos lingüísticos, conceptos/definiciones, propiedades/proposiciones, procedimientos y justificaciones) puestos en práctica durante la resolución de tareas.

El nivel uno incluye las facetas interaccional, mediacional y epistémica, en la cual se enfoca nuestro trabajo, puesto que la reflexión está dirigida hacia el nivel de la aplicación de nuestro conocimiento. Dominar este nivel de conocimiento de contenido especializado sobre temas específicos, le proporciona al profesor los recursos para realizar sus futuras tareas de mejor manera. El nivel dos incluye las facetas cognitiva y afectiva; se refiere al análisis de aspectos de

los estudiantes que tienen relación con: los conocimientos matemáticos involucrados, objetos y significados matemáticos, conflictos y errores (Pino-Fan et al., 2013).

Pino-Fan, Assis y Castro (2015) ponen en práctica algunas dimensiones y herramientas sugeridas por el modelo del CDM para analizar, caracterizar y desarrollar el conocimiento que los profesores deben tener para desempeñarse de manera eficiente en su práctica. Para esto, explican el modelo del conocimiento didáctico matemático junto con sus dimensiones y facetas y contextualizan al lector sobre cómo se hace el análisis de los datos. Dicho análisis se realiza tomando cada una de las dimensiones y facetas del CDM. Concluyen que el modelo puede ser útil para analizar el conocimiento de los profesores teniendo como foco las tareas que los maestros proporcionan a los estudiantes como método para promover cierto nivel de conocimiento. Al revisar el acercamiento metodológico que proponen estos autores, nos damos cuenta que tiene relación con parte del ejercicio profesor que realizaron los profesores que imparten algunos de los seminarios de la Maestría en Docencia de la Matemática de la UPN y con el ejercicio llevado a cabo en el desarrollo de esta investigación. En el transcurso de la maestría, nos propusieron solucionar tareas y analizar partes de su solución para incluirlas dentro de alguna faceta del conocimiento didáctico matemático. Además, en uno de los seminarios profundizamos sobre el modelo CDM. En nuestra investigación, nos valemos de fuentes de registro de información y construcción de datos investigativos parecidas a las abordadas por Pino-Fan, Assis y Castro en este artículo (apuntes de discusiones, solución de tareas, grabaciones) y realizamos un análisis siguiendo un procedimiento similar al usado por los autores, con la diferencia de que nosotros nos valemos de técnicas de rotulación propuestas por Strauss y Corbin (2002) y realizamos un análisis basado en las facetas epistémica y mediacional.

En el 2015, Godino y Pino-Fan presentan un nuevo artículo con una versión revisada y ampliada del sistema de categorías de conocimiento didáctico–matemático del profesor, basada en la aplicación de las herramientas de análisis del Enfoque Ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemática (Godino y Pino-Fan, 2015). En el documento presentan un recorrido de antecedentes de modelos del conocimiento del profesor de matemáticas y comparan su modelo ampliado del conocimiento didáctico–matemático con otros modelos propuestos en educación

matemática para identificar concordancias y complementariedades. Al final, presentan una versión del modelo en el cual se distinguen las dimensiones *matemática*, *didáctica* y *meta didáctico–matemática*.

La dimensión matemática del CDM incluye dos subcategorías de conocimientos: conocimiento común del contenido y conocimiento ampliado del contenido. El conocimiento común del contenido es aquel conocimiento sobre un objeto matemático concreto que se considera suficiente para resolver los problemas o tareas propuestas en el currículo de matemáticas y en los libros de texto. El conocimiento ampliado del contenido es el que provee al profesor las bases matemáticas necesarias para plantear nuevos retos matemáticos en la clase de matemáticas, enlazar el objeto matemático que se está aprendiendo con otras nociones matemáticas y encaminar a los estudiantes al estudio de las nociones matemáticas subsecuentes a la noción que es centro de estudio (Godino y Pino-Fan, 2015).

La dimensión Didáctica del CDM incluye seis subcategorías: la primera es del conocimiento especializado de la dimensión matemática que denominan faceta epistémica; la segunda es el conocimiento sobre los aspectos cognitivos de los estudiantes que llaman faceta cognitiva; la tercera es el conocimiento sobre los aspectos afectivos, emocionales y actitudinales de los estudiantes que denominan faceta afectiva; la cuarta es del conocimiento sobre las interacciones que se suscitan en el aula que llaman faceta interaccional; la quinta es del conocimiento sobre los recursos y medios que pueden potenciar los aprendizajes de los estudiantes que llaman faceta mediacional; y la sexta es del conocimiento sobre los aspectos curriculares, contextuales, sociales, políticos, económicos entre otros, que influyen en la gestión de los aprendizajes de los estudiantes que denominan faceta ecológica.

La dimensión Meta didáctico-matemática del CDM aborda criterios de idoneidad que permiten al profesor reflexionar sobre su propia práctica y determinar mejoras potenciales de la misma. Esta dimensión se refiere a conocimientos relativos a las normas, metaformas, restricciones contextuales, reflexión sobre la práctica y valoración sobre la idoneidad didáctica.

En el 2018, Godino, Giacomone, Font y Pino-Fan presentan un artículo sobre conocimientos profesionales en el diseño y gestión de una clase sobre semejanza de triángulos contextualizando la aplicación de algunas herramientas del modelo teórico de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemático CCDM. En este documento los autores describen y analizan una actividad para la formación de profesores de matemáticas orientada al desarrollo de dicha competencia.

El modelo CCDM que aplican en el análisis es una ampliación del modelo CDM el cual propone que los conocimientos didáctico-matemáticos de los profesores pueden organizarse o desarrollarse de acuerdo con las dimensiones matemática, didáctica y meta didáctico-matemática. En el modelo CCDM se aborda dos competencias clave del profesor de matemáticas, la competencia matemática y la competencia de análisis e intervención didáctica (Godino, Giacomone, Font y Pino-Fan, 2018).

Godino, Giacomone, Font y Pino-Fan (2018), analizan un conjunto de actividades de iniciación a la investigación en educación matemática que consta de tres fases: comentario de un texto, puesta en práctica de los diferentes momentos de una clase grabada e introducción de una herramienta para la reflexión. Los autores se centran en realizar un análisis de normas y metanormas y un análisis de la idoneidad didáctica. Indican que el documento puede ayudar en el diseño de planes de formación de profesores de matemáticas y de secuencias de acciones formativas específicas para el desarrollo profesional con relación a la competencia de análisis de la idoneidad didáctica, “esto es, su competencia para la reflexión global de procesos de enseñanza y aprendizaje” (Godino, Giacomone, Font y Pino-Fan, 2018, 77). Nosotros estamos interesados en la dimensión didáctica de conocimiento didáctico matemático del profesor. Por tanto, el documento reafirma información útil para la investigación.

En el 2019, Molina en su tesis doctoral pone en práctica el modelo CDM sobre el proceso de argumentación. El autor tiene el propósito de caracterizar el sistema de normas que influyen en la práctica de argumentación y fomentan la producción de varios tipos de argumentos específicos (Molina 2019). La estrategia de investigación se basa en un análisis didáctico siguiendo los elementos sugeridos por el Enfoque Ontosemiótico. Esta tesis doctoral nos sirve como apoyo para el proceso de análisis en nuestro trabajo de grado, ya que esta propone algunos descriptores



para las facetas del modelo del CDM propuesto por Godino (2015) acerca del proceso de argumentación. Es el único trabajo en donde encontramos una aplicación del modelo que está dirigida a un proceso, porque estudios previos se enfocan en objetos matemáticos. Algunos de estos descriptores nos sirvieron de listado inicial para configurar una herramienta analítica en nuestra investigación.

## **1.4 Objetivos**

### **1.4.1 General**

Develar cambios en aspectos del conocimiento didáctico matemático de dos profesores, sobre argumento, argumentación y argumentación abductiva que sirvan como apoyo para el diseño de tareas mediadas por Entornos de Geometría Dinámica, impulsados a raíz de una estrategia de investigación acción.

### **1.4.2 Específicos**

- Adaptar un modelo de conocimiento didáctico matemático del profesor al que se puede recurrir para lograr identificar conocimientos profesionales dirigidos al diseño de tareas mediadas por EGD que promuevan la argumentación abductiva.
- Establecer y poner en juego diversas estrategias que permitan ir apropiando conocimiento didáctico matemático sobre argumento, argumentación y argumentación abductiva que sirvan como apoyo para el diseño de tareas mediadas por EGD.
- Elaborar textos narrativos sobre el conocimiento didáctico matemático de los autores de la tesis, sobre argumento, argumentación y argumentación abductiva que sirvan como apoyo para el diseño de tareas mediadas por EGD y que sirvan de fuente para develar el conocimiento en diferentes momentos del proceso investigativo.
- Elaborar análisis, teniendo como instrumento textos narrativos, en donde se dé cuenta de aquellos aspectos del conocimiento didáctico matemático sobre argumento, argumentación y argumentación abductiva que sirvan como apoyo para el diseño de tareas mediadas por EGD, en los que se promovió un cambio.

## 2. Marco de referencia

En este capítulo presentamos el fundamento conceptual con el que organizamos el análisis acerca de los aspectos de nuestro conocimiento didáctico matemático sobre los que buscamos promover un cambio a lo largo del estudio. Corresponde a algunas facetas de la Dimensión didáctica del modelo de Conocimiento Didáctico Matemático (CDM) del profesor, basado en la propuesta del enfoque Ontosemiótico (Pino-Fan y Godino, 2015). A continuación, presentamos la descripción general del modelo y la interpretación del modelo a la luz de los intereses investigativos.

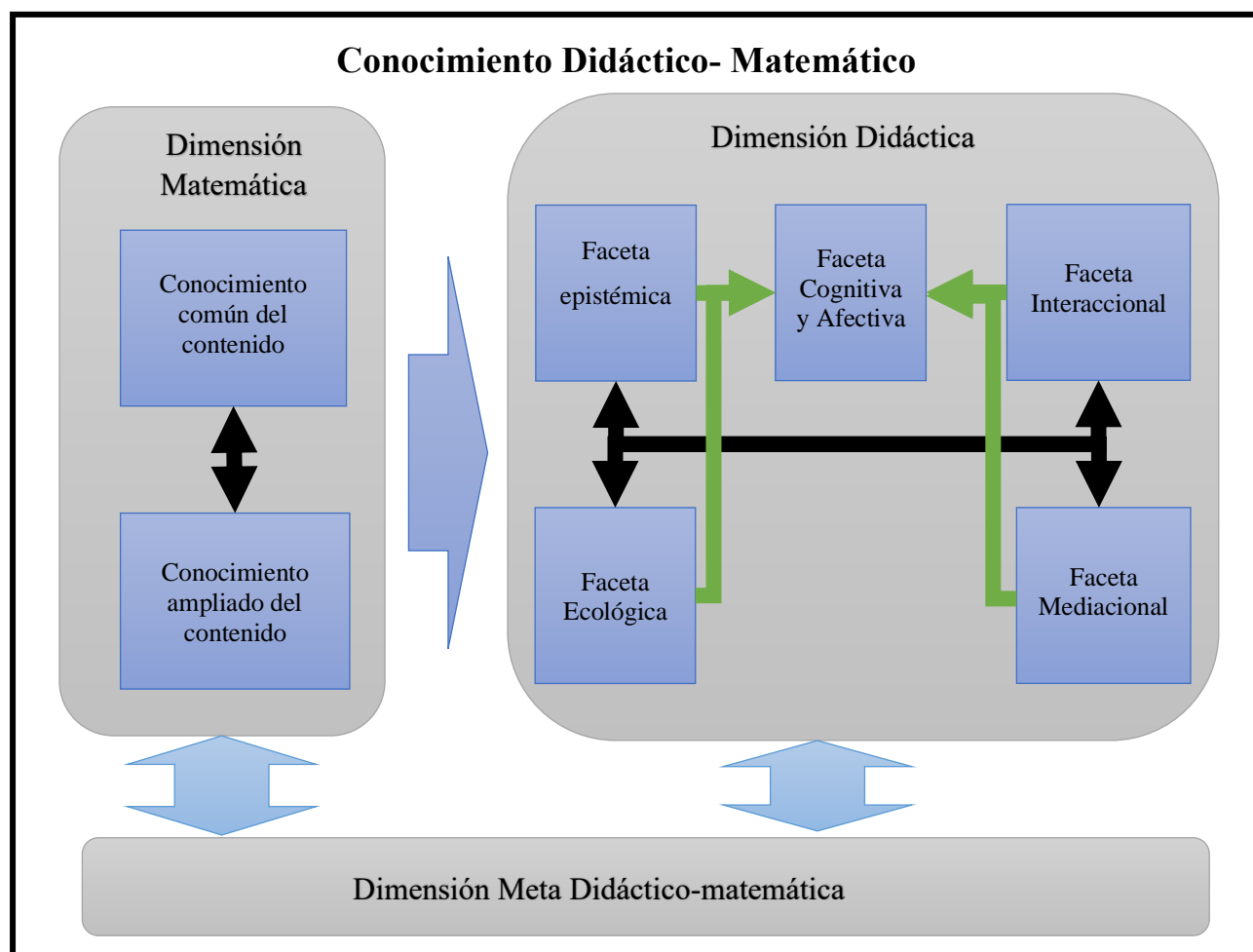
### 2.1 Modelo de CDM de la EOS

El modelo del CDM intenta agrupar el conocimiento de las matemáticas que un profesor debe tener para diseñar, implementar y evaluar los procesos de enseñanza de las matemáticas (Pino-Fant y Godino, 2015). Este interpreta y caracteriza el conocimiento del profesor de matemáticas a partir de tres dimensiones: dimensión matemática, dimensión didáctica y dimensión meta didáctico-matemática. En el Cuadro 2.1 ilustramos el modelo.

La dimensión matemática del CDM se enfoca en el conocimiento del contenido, e incluye dos subcategorías de conocimientos: conocimiento común del contenido y conocimiento ampliado del contenido. El conocimiento común del contenido se refiere al conocimiento sobre los objetos matemáticos que se consideran suficientes para resolver problemas o tareas propuestas. Respecto del conocimiento ampliado del contenido, es el conocimiento que tiene el profesor sobre las nociones matemáticas para poder vincular los objetos matemáticos que está enseñando con otras nociones matemáticas. En nuestro análisis no consideramos la dimensión matemática porque no vamos a ver el argumento como un objeto matemático primario. Nos interesa el conocimiento que tiene el profesor sobre el objeto argumento para favorecer el diseño de tareas de argumentación.

**Cuadro 2.1**

*Modelo del CDM (Fuente: elaboración que toma elementos de Pino-Fan y Godino, 2015)*



La dimensión didáctica del CDM se refiere al conocimiento pedagógico del contenido. Esta dimensión incluye seis facetas (epistémica, cognitiva, afectiva, interaccional, mediacional y ecológica) que pueden considerarse para analizar, describir y desarrollar el conocimiento de los profesores (Pino-Fant y Godino, 2015). A continuación, describimos las facetas de acuerdo con los niveles propuestos por Pino-Fan, Castro, Godino y Font (2013).

En el nivel uno, que corresponde al conocimiento sobre la aplicación encontramos las siguientes facetas:

*Faceta epistémica:* esta faceta se refiere al conocimiento especializado en la dimensión matemática. El profesor organiza los conocimientos matemáticos “configurados” para la enseñanza. Por ejemplo, es indispensable que el profesor sea capaz de realizar varias representaciones de un objeto matemático, encontrar diferentes procedimientos para llevar a cabo una tarea, relacionar temas con diferentes temáticas de otros niveles educativos, y comprender y poner en práctica los diferentes significados de un objeto matemático. Para el caso de los procesos, debería poder proponer una definición, establecer relaciones o diferencias, entre otros.

*Faceta mediacional:* esta faceta se refiere al conocimiento de los recursos y medios que pueden favorecer el proceso de aprendizaje de los estudiantes. En esta faceta se evalúa la pertinencia del uso de los materiales y recursos tecnológicos en la solución de una tarea y en el aprendizaje de un nuevo objeto matemático, además de asignar un tiempo prudente a las diferentes acciones y procesos de aprendizaje. Aun cuando Pino-Fan y Godino (2015) no considera a las tareas como parte de la faceta mediacional, nosotros decidimos incluirlas porque las vemos como recursos para favorecer la argumentación. En comunicación personal con Pino-Fan, sostenida en noviembre de 2021, el investigador nos indicó que esta opción era posible pues no iba en contra del modelo.

*Faceta interaccional:* esta faceta se refiere al conocimiento sobre las interacciones que se suscitan en el aula, como parte fundamental en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Incluye aquellos conocimientos que permiten prever, implementar y evaluar las interacciones que se dan entre los agentes que participan en el proceso de enseñanza aprendizaje y así orientar a los estudiantes. Estas interacciones no solo se dan entre el maestro y los estudiantes (maestro-estudiante), sino que también pueden ocurrir entre estudiantes (estudiante-estudiante), estudiantes-recursos y maestros-recursos-estudiantes (Pino-Fan y Godino, 2015).

En el nivel dos, que corresponde a al conocimiento sobre la identificación, encontramos las siguientes facetas:

*Faceta cognitiva:* esta faceta se refiere a los conocimientos sobre los aspectos cognitivos del estudiante. Incluye los conocimientos sobre los significados de los objetos matemáticos de los

estudiantes. Además, en esta faceta se informa sobre el conocimiento del profesor para ser capaz de anticipar posibles respuestas a una determinada situación, conceptos fallidos que tienen los estudiantes o posibles errores en el proceso de solución del problema, y también sobre vínculos entre distintos objetos matemáticos que se están estudiando.

*Faceta afectiva:* esta faceta se refiere a conocimientos sobre los aspectos afectivos emocionales y actitudinales de los estudiantes. Incluye aquellos conocimientos necesarios para para entender los cambios de humor de los estudiantes, cambios en su comportamiento y aquellos aspectos que los motivan a resolver o no una determinada tarea. Siendo un poco más específicos, la faceta permite describir las experiencias y sensaciones de los estudiantes en una clase y las experiencias y sensaciones del estudiante en el momento de la resolución de un problema matemático en cualquier nivel educativo.

Con respecto a la faceta ecológica, encontramos que Pino-Fan, Castro, Godino y Font (2013), no la tienen presente en alguno de los dos niveles. Por tanto, nosotros no la incluimos en algún nivel, pero la describimos a continuación.

*Faceta ecológica:* esta faceta se refiere al conocimiento sobre los aspectos curriculares, contextuales, sociales, políticos, económicos, que influyen en el proceso de aprendizaje de los estudiantes. Incluye el conocimiento sobre el currículo de matemáticas del nivel educativo en el cual se está desempeñando, posibles relaciones con otros currículos y aspectos sociales y políticos que pueden influir en el proceso de enseñanza aprendizaje.

La dimensión meta didáctico-matemática se refiere a conocimientos relativos a las normas, metaformas, restricciones contextuales, reflexión sobre la práctica y valoración sobre la idoneidad didáctica. No entramos en detalle sobre esta dimensión, porque no se constituyó en fundamento de nuestro estudio. Esto porque nuestro trabajo no apunta a analizar las normas que implican el favorecimiento de la argumentación en el aula, ni a valorar nuestra idoneidad didáctica, por ejemplo, respecto a la valoración en el diseño o gestión de tareas de argumentación.

## 2.2 Interpretación del modelo para dar cuenta del CDM sobre la argumentación abductiva para el diseño de tareas con apoyo de EGD

Como fundamento de nuestro trabajo de grado, utilizamos dos facetas de la dimensión didáctica del CDM que nos sirven para realizar el análisis sobre aspectos de nuestro conocimiento didáctico matemático sobre la argumentación abductiva para el diseño de tareas con apoyo de EGD. Por los propósitos del estudio, nos vamos a enfocar en las facetas epistémica y mediacional. Dejamos de lado la faceta ecológica porque apunta a elementos del diseño del currículo sobre los que no reflexionamos. De igual forma no consideramos las facetas cognitiva, afectiva e interaccional porque tienen que ver más con una mirada del aprendizaje de los estudiantes o interacciones entre estudiante-profesor no contempladas en este estudio.

En el curso Educación del Profesor de Matemáticas de la Maestría trabajamos colectivamente una tabla de indicadores del conocimiento didáctico matemático del profesor, sobre el proceso de argumentación, con base en la propuesta de Molina (2019). Nosotros usamos algunos de tales indicadores para construir descriptores iniciales con los que identificaríamos aspectos de nuestro conocimiento didáctico matemático. Adicionalmente, a medida que fuimos haciendo el análisis, agregamos nuevos descriptores que emergieron durante el ejercicio y no estaban contenidos en el listado, pero que considerábamos importantes en los análisis. En la Tabla 2.1 presentamos los descriptores de cada faceta que pusimos en funcionamiento en los análisis de nuestro conocimiento. En total, nos resultaron 28 descriptores. La mayoría de los descriptores corresponden a la faceta epistémica.

**Tabla 2.1**

*Categorías para el análisis*

<b>Dimensión didáctica</b>	<b>Componente</b>	<b>Descriptores de conocimiento didáctico matemático</b>
Faceta epistémica	Argumento y argumentación	Conectores usados en la escritura de un argumento Caracterización de los elementos de un argumento Diferenciación entre argumentación y demostración Ejemplo de argumento o reformulación de ejemplo de argumento Establecimiento de relación entre un argumento y una exploración

		<p>Establecimiento de relación entre argumento, argumentación, justificación, razonamiento, demostración y prueba</p> <p>Esquemización de un argumento</p> <p>Identificación o reformulación de los elementos de un argumento</p> <p>Interpretación de la estructura de un argumento</p> <p>Propósito de un argumento</p> <p>Propuesta de definición de argumento</p> <p>Propuesta de definición de argumentación</p> <p>Valoración de propuestas de definiciones de argumento</p>
	Argumentación abductiva	<p>Comparación entre argumento abductivo y otros argumentos</p> <p>Ejemplificación de argumento abductivo o reformulación de ejemplo</p> <p>Esquema de un argumento abductivo</p> <p>Esquemización de tipos de argumento abductivo</p> <p>Propuesta de definición de argumento abductivo</p> <p>Proceso de argumentación que da origen a un argumento abductivo</p> <p>Tipos de argumentos abductivo</p>
Faceta mediacional	EGD	<p>Caracterización del proceso de exploración en EGD</p> <p>Diferenciación entre tipos de construcciones geométricas en un EGD</p>
	Diseño de tareas para favorecer la argumentación	<p>Caracterización de tareas que favorecen la argumentación</p> <p>Criterios para diseñar tareas de argumentación</p> <p>Ejemplificación de enunciado de tarea que promueve argumentación abductiva</p> <p>Principios de tareas que buscan promover la argumentación</p>
	Diseño de tareas en EGD para favorecer la argumentación	<p>Componentes del enunciado de una tarea para promover argumentación abductiva</p> <p>Relación entre los invariantes del arrastre mantenido y los elementos de un argumento abductivo</p>

### **3. Metodología**

En el presente capítulo presentamos la metodología utilizada en el desarrollo de la investigación. En los apartados, hacemos explícitos los siguientes aspectos: el posicionamiento investigativo, la estrategia que utilizamos para desarrollar nuestra investigación y la descripción de las principales acciones adelantadas con el fin de alcanzar nuestro propósito, que consiste en identificar los cambios de nuestro conocimiento didáctico matemático sobre argumento, argumentación y argumentación abductiva, como apoyo para el diseño de tareas mediadas por EGD que promuevan argumentación abductiva.

#### **3.1 Posicionamiento investigativo**

Nuestra investigación se ubica en un enfoque fenomenológico, ligado a una aproximación interpretativa o hermenéutica. Según Camargo, (2021) el enfoque fenomenológico pretende obtener descripciones, explicaciones e inferencias, fundamentadas y suficientemente significativas de los fenómenos en estudio. En particular, en nuestro trabajo este enfoque nos permite identificar aspectos de nuestro conocimiento didáctico matemático sobre la argumentación abductiva, con el fin de diseñar tareas en EGD que promuevan la argumentación. Lo anterior nos conduce a reflexionar sobre nuestra experiencia personal y nuestra labor profesional, como profesores.

Con respecto a la aproximación interpretativa o hermenéutica, el interés principal de la aproximación es rastrear, sin juzgar, las diversas descripciones que subyacen a las acciones, interacciones y discursos de las personas (Camargo, 2021). Esta aproximación permite al investigador profundizar en los significados de los objetos, procesos matemáticos y en las prácticas educativas. En nuestro caso, observamos, describimos y dotamos de significado a nuestro conocimiento didáctico matemático, con el fin de interpretar el efecto de nuestras acciones al promover un cambio cualitativo de este y responder al interrogante de este trabajo.



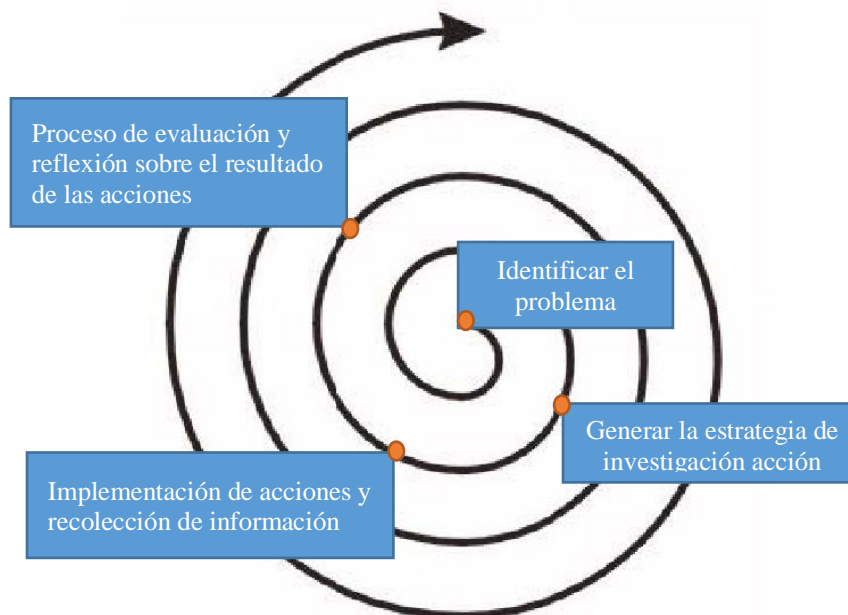
### 3.2 Estrategia investigativa

La estrategia utilizada en nuestra investigación se corresponde con una adaptación de la estrategia Investigación Acción. Generalmente, esta estrategia es un estudio participativo y colaborativo de autorreflexión, emprendido por un conjunto de personas que llevan a cabo una práctica, con el objetivo de mejorar la racionalidad de esta (Carr y Kemmis, 1988, citado por Martínez, 2000). La estrategia Investigación Acción implica una reflexión sobre la práctica de los participantes, así como un cambio en esta. En nuestro caso, el estudio no se enfoca directamente en analizar nuestra práctica, sino en analizar nuestro conocimiento que ponemos en juego en una práctica, y por esto es una adaptación. Cuando los profesores participan en una Investigación Acción son capaces de analizar y superar sus dificultades, limitaciones y problemas en el aula o fuera de esta, para propiciar espacios de reflexión acerca de sus acciones y sus conocimientos (Martínez, 2000).

Adoptar y adaptar la estrategia de Investigación Acción, nos permite una reflexión crítica, que procede en ciclos, fundamentada sobre el conocimiento que deberíamos poner en juego para la práctica de diseño de cierto tipo de tareas. Al identificar una problemática general al respecto, comenzamos un primer ciclo reflexivo generando e implementando un plan de acción para intentar enfrentar la problemática. Una vez finalizada la implementación, reflexionamos sobre los resultados de las acciones emprendidas y evaluamos los cambios producidos en nuestro conocimiento. Al identificar nuevas situaciones problemáticas sobre dicho conocimiento, generamos un nuevo ciclo de Investigación Acción y procedemos como en el primer ciclo. Este proceso cíclico avanza hasta donde sea posible. Elliott (2000) denomina a esto una espiral de investigación acción, que va generando ciclos para atender una problemática y generar estrategias de acción y reflexión sobre el cambio (ver Figura 3.1).

**Figura 3.1**

*Espiral de ciclos de la Investigación Acción. Elaboración propia*



En este trabajo de investigación adoptamos algunas características de la Investigación Acción.

Estas son:

- La Investigación Acción avanza en ciclos en forma de espiral en la identificación de problemas, generación de planes de acción de acción, implementación de acciones, recolección de información y reflexión sobre el resultado de las acciones. El comienzo de un nuevo ciclo se da a partir de la identificación de problemas que provienen del ciclo anterior. En nuestra investigación adelantamos tres ciclos de Investigación Acción, todos encaminados a identificar cambios en nuestro conocimiento didáctico matemático sobre argumentación, argumento y argumentación abductiva para el diseño de tareas apoyadas en un EGD.
- La estrategia de Investigación Acción es participativa y colaborativa. En nuestro caso, nosotros como autores de este proyecto fuimos participantes informantes e investigadores.

También fuimos participantes colaborativos: nuestra directora del trabajo de grado, quien nos asesoró en el curso de la investigación; los profesores de la cohorte de la Maestría en Docencia de la Matemática 2020-1, al brindarnos algunos conocimientos indispensables para el desarrollo de esta investigación; el grupo de *Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría* de la Universidad Pedagógica Nacional, al aportarnos documentos que abarcan asuntos de interés en la investigación como la argumentación, tareas y EGD; y las instituciones educativas donde trabajamos al darnos el espacio y los momentos de encuentro con otros profesores.

- La Investigación Acción permite obtener resultados con base en evidencias recogidas por los propios investigadores. Estas no provienen de la teoría, sino de las afectaciones de la vida profesional de los participantes de la investigación. En nuestro caso, las evidencias obtenidas fueron textos narrativos en donde informamos sobre el resultado de poner en funcionamiento los planes de acción tendientes a movilizar nuestro conocimiento.
- La Investigación Acción, no solo busca mejorar las prácticas educativas, sino hacer de los profesores agentes de cambios críticos y autocríticos. En nuestro caso, en esta investigación, con la modificación de nuestro conocimiento no solo buscamos incidir en nuestra práctica profesional sino en la de nuestros compañeros.

### **3.3 Registro de información y construcción de datos investigativos**

Los escenarios de donde recogimos la información para el análisis son de dos tipos: uno, los espacios académicos que ofrece la Maestría en la que se desarrolló este trabajo y que están directamente relacionados con el objetivo del estudio; dos, espacios de interacción que tuvimos entre nosotros (los autores del estudio), con los profesores, con la directora del trabajo, con los compañeros de la maestría y con colegas de las instituciones donde laboramos. En general, recopilamos la información a partir de los siguientes recursos, aunque en cada ciclo privilegamos algunos en favor de otros:

- *Apuntes de clase*: tomamos apuntes, en cada una de las clases de los espacios académicos de la Maestría, sobre lo que decían los profesores y sobre las interacciones que teníamos nosotros u otros compañeros con los profesores. Íbamos registrando en un cuaderno apuntes que considerábamos relevantes en cada una de las clases.
- *Resúmenes de lecturas*: registramos síntesis de ideas importantes de lecturas encontradas en bases de datos o sugeridas en clase.
- *Tareas extra clase*: registramos información del desarrollo de situaciones que los profesores solicitaban para ser resueltas en momentos diferentes a la clase.
- *Propuesta inicial de anteproyecto y anteproyecto*: escribimos un documento de propuesta inicial de trabajo de grado con la que ingresamos a la Maestría y otro documento con el anteproyecto de trabajo de grado.
- *Diario de campo*: registramos ideas y pensamientos personales fruto de discusiones entre los dos integrantes, conversaciones en las asesorías, etc.
- *Tareas de asesorías*: preparamos presentaciones o escritos para explicar a otras personas algún tema relacionado con la investigación, a solicitud de la directora.
- *Grabaciones en video*: registramos las interacciones sostenidas durante las asesorías de trabajo de grado, con un grupo de profesores de la institución donde trabaja Cristian, uno de los autores del estudio y con algunos compañeros de la maestría.

Sometimos la información recolectada a un proceso de organización, reducción, depuración y fragmentación para lograr obtener los datos investigativos, como explicamos al informar cada uno de los ciclos. Fruto de este proceso, escribimos un texto narrativo acerca de nuestro conocimiento sobre los elementos de interés, en cada ciclo, que sirvió de insumo para cada análisis. Al presentar el análisis de cada ciclo, damos detalles de cada texto.

### 3.4 Análisis de los datos en los tres ciclos de la investigación

Los textos narrativos que se construyeron como datos de investigación nos permitieron realizar un análisis sobre nuestro conocimiento didáctico matemático posterior al desarrollo de los planes de acción de cada ciclo. Para analizar tal conocimiento adelantamos el siguiente procedimiento:

- Usamos los descriptores considerados en la Tabla 2.1 (ver Capítulo 2) para fragmentar y clasificar partes de cada texto narrativo. Como ya explicamos, a partir de un listado inicial de descriptores sugeridos por Molina (2019), fuimos construyendo nuestra propia herramienta analítica para agregar nuevos descriptores en caso de necesidad. El proceso realizado fue el siguiente: (i) A medida que hacíamos la lectura de cada texto narrativo, resaltábamos oraciones o párrafos en donde se hiciera explícito algún aspecto de nuestro conocimiento. (ii) Extraíamos el fragmento para ubicarlo en una tabla (iii) Clasificábamos cada fragmento en un descriptor del conocimiento didáctico matemático correspondiente a un componente y una faceta. Si no encontrábamos un descriptor, lo creábamos para incluirlo en la Tabla 2.1 del Capítulo 2. En el caso en el que un fragmento correspondiera a varias facetas, lo separamos a conveniencia, señalando con paréntesis cuadrados los lugares en donde eliminamos información. Al seguir este procedimiento, pudimos identificar en qué aspectos de cada faceta se centraba nuestro conocimiento didáctico matemático en cada ciclo.
- Utilizamos la herramienta de rotulación propuesta por Strauss y Corbin (2002) para identificar detalles del fragmento que nos permitieran obtener una particularidad con la cual comparar los aspectos del conocimiento identificados en algunos descriptores y poder ver si hubo un cambio en el conocimiento al respecto, al interior de un ciclo o entre ciclos. En la Tabla 3.1 presentamos los rótulos que usamos para realizar el análisis; cada rótulo se compone de dos palabras: la primera se refiere al aspecto de la faceta que queremos comparar y el segundo a la particularidad con la que hacemos la comparación. Por ejemplo, las palabras en rojo y resaltadas en negrilla, en la siguiente oración, son rótulos con los que analizamos la esencia de un argumento “ Un argumento es una

expresión discursiva, escrita u oral, elaborada de acuerdo con normas compartidas, compuesta por un conjunto de proposiciones y que tiene como propósito mostrar que una de ellas está justificada [*Esencia-Justificación*] por las restantes”.

- Organizamos la presentación de los análisis de cada ciclo por capítulos. En cada uno, explicamos cada fase del proceso y agrupamos los análisis según aspectos que queremos destacar.

**Tabla 3.1**

*Rótulos para realizar la comparación de fragmentos*

Faceta	Rótulo	
Epistémica	Naturaleza	Mental
		Comunicativa
		Actuacional
		Información
		Justificación
		Proceso
		Razón
		Hecho
		Declaración
		Particularización
		Defensa
		Conexión
		Empírica
	Soporte	
	Relación	Apoyo
		Validez
	Alcance	Limitado
		Mayor nivel
	Origen	Externo
		Teórico
		Empírico
	Función	Justificar
		Legitimar
	Caracterización	Particularidad
	Enunciado	Formulación de criterio
		Afirmación y razón

	Uso de conectores	Objetos generales
		Objetos particulares
	Especificidad	Forma de expresarse
		Origen
		Normas
		Elementos
		Propósito
	Esencia	Convencimiento o persuasión
		Justificación
	Aserción	Resultado
		Conclusión
		Propiedad
	Motivo	Causa segura
		Inferencia plausible
		Causa factible
	Garantía	Proposiciones relacionadas
		Proposición general mpp
		Una terna
		Varias ternas
	EGD	Ayuda
		Construcción
		Arrastre
	Justificación	Causa
		Condiciones
	Hechos	Inferir
	Condiciones	Incompletas
		Completas
	Conjeturar	Validar
	Explorar	Conjeturar
	Comentario	Reflexión
		Propuesta
Identificación		
Exploración	Argumentación independencia	
	Argumentación dependencia	
Cantidad	Dos (tipos de argumentaos abductivos)	
	Tres (tipos de argumentaos abductivos)	
Argumento	Sin proceso	
	Con proceso	

## **4. Informe sobre el Ciclo 1 de la investigación**

A continuación, describimos el Ciclo 1 de esta investigación, a partir del relato de cada una de sus fases. En la Fase 1, nos referimos a la identificación del problema que dio lugar a este Ciclo. En la Fase 2, mencionamos el plan de acción para movilizar nuestro conocimiento didáctico matemático. En la Fase 3, damos a conocer la implementación de las acciones del plan y cómo hicimos la recolección de información. En la Fase 4, realizamos el proceso de análisis de los datos.

### **4.1 Fase 1- Ciclo 1: Identificación del problema que dio lugar al Ciclo 1**

En las propuestas iniciales que todos los aspirantes presentamos, como parte del proceso de admisión a la Maestría en Docencia de la Matemática en 2020-1, los profesores del programa identificaron que los aspirantes hacíamos una mención superficial a conceptualizaciones de tareas, argumentación y Entornos de Geometría Dinámica (EGD). En estas propuestas iniciales, los autores de este trabajo escribimos algunos propósitos de las tareas de geometría, el efecto de la tecnología en la educación para la motivación y desarrollo de procesos de aprendizaje en el ámbito educativo, y nos referimos a la importancia de la argumentación para exponer y defender ideas en la clase de matemáticas. No aludimos de manera explícita al papel de los EGD para favorecer la argumentación y menos para la argumentación abductiva; la información más cercana al respecto aludía a tecnología digital en general.

Dado lo anterior, los profesores del programa de Maestría evidenciaron un conocimiento no especializado en la conceptualización, propósitos y uso de la argumentación, y en el efecto que tiene la implementación de EGD en el diseño de tareas de geometría para favorecer la argumentación. Lo anterior llevó a los profesores del programa a identificar, como problemática que dio lugar al Ciclo 1 de la estrategia investigativa, la falta de especialización en el conocimiento didáctico matemático, acerca de los elementos que se requieren para poder diseñar tareas que promuevan la argumentación apoyadas en el uso de EGD. Por tanto, la identificación del problema del Ciclo 1, en correspondencia con el problema general formulado para el trabajo



de grado, no fue establecida por nosotros como investigadores, sino por los profesores del programa de maestría, los cuales estaban interesados en el abordaje de estos elementos.

#### **4.2 Fase 2- Ciclo 1: Plan de acción para movilizar el conocimiento**

El plan de acción en el Ciclo 1 también fue elaborado por los profesores de la Maestría responsables de la cohorte 2020. Ellos decidieron involucrarnos a los estudiantes en la construcción de un anteproyecto que llevará a la formulación de un objetivo general, con respecto a la transformación del conocimiento didáctico matemático acerca de la argumentación y cómo favorecerla mediante el uso de EGD y con tareas diseñadas para tal fin. Este ejercicio se desarrolló en el curso Innovación e Investigación. Adicionalmente, invitaron a parejas de estudiantes a optar por una especificidad relacionada con las inquietudes investigativas con las que nos inscribimos a la Maestría. En nuestro caso, decidimos enfocarnos en la argumentación abductiva. A la par con la construcción del anteproyecto, los estudiantes nos inscribimos en otros dos espacios académicos de formación en el posgrado, que contribuyeran a generar conocimiento especializado, sobre diseño de tareas, sobre EGD y sobre argumentación. En el seminario Diseño y Desarrollo Curricular se trabajó sobre la conceptualización de tarea, diseño de tareas y análisis de tareas de geometría. En el seminario Profundización en Matemáticas Elementales se trabajaron asuntos relacionados con argumentos, tipologías de argumentos y solución de problemas abiertos de conjeturación que involucraban el uso de EGD.

#### **4.3 Fase 3- Ciclo 1: Implementación de acciones y recolección de información**

La implementación del plan de acción del Ciclo 1 se realizó en el primer semestre de 2020, en el marco del programa de formación. A continuación, nos referimos a los escenarios, los eventos y recursos específicos de este Ciclo para el proceso de registro de información y obtención de datos investigativos.

Los escenarios en donde se registró la información del plan de acción del Ciclo 1 fueron principalmente los espacios académicos de Investigación e Innovación, Profundización en Matemáticas Elementales y Diseño y Desarrollo Curricular. Adicionalmente, recogimos información en el espacio de reuniones de Cristian Raigoso (uno de los autores de este trabajo) con el grupo de trabajo de la institución en la que labora. Esta información se recopiló a partir de los siguientes recursos: apuntes de las clases, resúmenes y síntesis de lecturas, tareas extraclase, propuesta inicial con la que ingresamos a la maestría y anteproyecto de trabajo de grado.

Luego de haber recolectado la información, realizamos un proceso de organización, reducción, depuración y fragmentación, para lograr obtener los datos investigativos. En cuanto a la organización de la información, con los archivos digitales creamos una carpeta compartida en la nube. En esta carpeta, dividimos la información según el espacio académico, las diferentes versiones de la propuesta de anteproyecto y las producciones de Cristian con el grupo de trabajo de la institución. Respecto a los archivos físicos, cada uno tenía una agenda con los apuntes de cada uno de los seminarios por fechas y de anotaciones de información relevante de lecturas, exposiciones y discusiones en clase. Esta información se extrajo de la agenda y la recopilamos en un único archivo. La organizamos por fechas y según el escenario.

Teniendo la información en archivos digitales y físicos, realizamos el proceso de reducción. Para ello construimos tablas de información, enfocándonos únicamente en fragmentos de escritos en donde se mencionará algo relativo a: tareas, argumentación y EGD. Esta información la clasificamos según el seminario, el anteproyecto, producciones de Cristian con sus colegas y el mes del registro. En la Tabla 4.1 se evidencia un ejemplo de la información de los apuntes del seminario Profundización en Matemáticas Elementales. La tabla completa se encuentra en el Anexo 1.

**Tabla 4.1***Ejemplo de insumos de apuntes de clase*

Insumo	Febrero	Marzo	Abril	Mayo
Apuntes curso Profundización en matemáticas elementales	El resultado del proceso de argumentar es denominado argumento	Un argumento es un enunciado oral o escrito, de estructura ternaria, que relaciona proposiciones particulares (datos y aserción) y una general (garantía).	La demostración es un argumento matemático, una secuencia conectada de afirmaciones a favor o en contra de una afirmación matemática. En un argumento abductivo, la proposición particular que se tiene se refiere a un hecho que se observa $q_1$ (caso de $q$ ). Se conocen proposiciones generales $r_1: p \rightarrow q, r_2: s \rightarrow q, \dots$ y, por ejemplo, se concluye que es posible el hecho $p_1$ (caso de $p$ )	Los diferentes tipos de arrastre y la posibilidad de ver, en tiempo real, muchos casos de una situación, favorece la producción de argumentos de diversos tipos (inductivos, abductivos) cuando abordan un problema.  Para diseñar tareas se deben tener en cuenta: Procedimientos, metas, requisitos, lenguajes proposiciones, argumentos, posibles soluciones de la tarea.

Para una mejor visualización de la información, realizamos una nueva tabla en donde colocamos la transcripción textual de oraciones, junto con la fuente de información, la fecha del registro, el número del registro, una abreviatura para identificar sobre qué asuntos hay información explícita: tareas (TAR), argumentación (ARG) o EGD (ver Tabla 4.2). Esta no es toda la tabla sino un fragmento de 3 celdas. La tabla completa se encuentra en el Anexo 2, aún cuando hay que tener en cuenta que inicialmente no aparecía la columna “nuestra interpretación”.

**Tabla 4.2***Ejemplo de primera versión de la tabla de Excel*

Fuente de información	Fecha	Número	Transcripción textual	Asunto
Apunte de lectura en seminario Profundización en matemáticas elementales	14 de marzo del 2020	2	El resultado del proceso de argumentar es denominado argumento (Krummheuer, 1995)	ARG
Apunte de lectura en seminario Innovación e Investigación	22 de febrero del 2020	3	Tecnología digital: dispositivo diseñado para manipular información representada en forma digital (software especializado en geometría dinámica)	TIC

Apunte de lectura en seminario Diseño y Desarrollo Curricular	21 de marzo del 2020	6	Las tareas en geometría deben tener las condiciones suficientes para realizar construcciones auxiliares que provean las condiciones para permitir la exploración de propiedades de un objeto existente.	TAR-EGD
---	----------------------	---	---	---------

En el proceso de depuración revisamos, releímos y descartamos información que no apuntaba a los elementos de interés (argumentación, EGD y tareas) del conocimiento didáctico matemático obtenido en el primer semestre. Para la depuración de esta información realizamos una tercera tabla de información, donde incluimos una nueva columna que nos ayudara a caracterizar nuestro conocimiento. En la Tabla 4.3, mostramos dos ejemplos de apuntes de lecturas realizadas en el marco del seminario Profundización en Matemáticas Elementales, agregando como nuevo elemento nuestra interpretación de lo dicho en el apartado textual. La tabla completa se encuentra en el Anexo 2.

### Tabla 4.3

*Ejemplo de segunda versión de la tabla de Excel*

Insumo	Fecha	Número	Apartado textual	Nuestra interpretación	Asunto
Apunte de lectura en seminario Profundización en Matemáticas Elementales	Abril de 2020	11	Los diferentes tipos de arrastre y la posibilidad de ver, en tiempo real, muchos casos de una situación, favorece la producción de argumentos de diversos tipos (inductivos, abductivos) cuando abordan un problema. (Molina y Samper, 2019)	Los diferentes tipos de arrastre en un EGD permiten observar y explorar del objeto geométrico diversas situaciones y representaciones, esto favorece la producción de argumentos para justificar un problema.	EGD
	14 de marzo del 2020	5	"La forma como se relacionan las proposiciones particulares (p y q) y la general (r) define el tipo de argumento: deductivo, inductivo o abductivo. "	Los tipos de argumentos abductivo, deductivo e inductivo se pueden establecer mediante la relación que exista entre los datos (p), la garantía (r) y la aserción (q), usando el modelo de Toulmin (2003).	ARG

Luego de haber realizado varias depuraciones, realizamos la integración de la información que teníamos en las tablas, en dos textos narrativos, de acuerdo con las inquietudes investigativas y la aproximación conceptual, con base en la columna de asuntos. El primer texto narrativo lo construimos tomando los fragmentos depurados, que permitieron dar cuenta de nuestro conocimiento inicial sobre tareas, argumentación y EGD al ingresar al programa de maestría. A este documento lo hemos llamado "Texto Narrativo Base". El segundo texto narrativo recoge las

evidencias correspondientes al conocimiento logrado en el plan de acción del Ciclo 1. Este documento lo hemos denominado “Texto Narrativo Uno”. Un fragmento del Texto Narrativo Uno se encuentra en el Cuadro 4.1. Los textos completos se encuentran en los Anexos 3 y 4.

#### **Cuadro 4.1**

##### *Fragmento de Texto Narrativo Uno*

Con relación a la conceptualización de argumento, encontramos en apuntes del seminario Innovación e Investigación una distinción entre argumento y argumentación. Escribimos que la argumentación es un proceso mediante el cual se produce un discurso oral o escrito, que tiene como objetivo llegar a una conclusión mutuamente aceptable acerca de una declaración, en donde se debate la veracidad de dicha declaración. Mientras que por argumento entendimos que este es el resultado del proceso de argumentar. La conceptualización de argumentación guarda relación con lo que se mencionó en una de las propuestas iniciales sobre la función de la argumentación. Andrés escribió que este es un proceso mediante el cual se busca exponer y defender ideas en la clase de matemáticas y al mismo tiempo favorecer procesos de demostración en el aula. La relación que vemos evidencia que Andrés tenía cierto conocimiento sobre la conceptualización de argumentación y su función en la clase de matemáticas.

#### **4.4 Fase 4 – Ciclo 1: Proceso de análisis de los datos**

El proceso de análisis de los datos del Ciclo 1 se adelantó en tres etapas. La primera corresponde a la caracterización de nuestro conocimiento didáctico matemático a partir del Texto Narrativo Base. La segunda, también es una caracterización del conocimiento didáctico matemático a partir del Texto Narrativo Uno. La tercera, la identificación de cambios identificados en nuestro conocimiento didáctico matemático, comparando las caracterizaciones de los dos textos narrativos.

##### **4.4.1 Caracterización del conocimiento didáctico matemático a partir del Texto narrativo Base**

Utilizando como insumo el Texto Narrativo Base, realizamos una caracterización de nuestro conocimiento didáctico matemático del que podemos dar cuenta por la información que escribimos. Para realizar el análisis, nos basamos en los descriptores de las facetas del CDM que presentamos en el Capítulo 2. Para adelantar la caracterización procedimos como sigue: (1)

resaltamos fragmentos en el Texto Narrativo Base que se refirieren a argumento, argumentación, tarea, EGD o nociones relacionadas; (2) clasificamos cada fragmento en una faceta del CDM; (3) asignamos el descriptor correspondiente al fragmento de aquellos contemplados para cada faceta (Tabla 4.4); (4) interpretamos la tabla globalmente para hacer una caracterización de nuestro conocimiento con base en esta.

**Tabla 4.4**

*Fragmentos del Texto Narrativo Base*

	<b>Fragmento del Texto narrativo Base</b>	<b>Faceta</b>	<b>Descriptor de la faceta</b>
1	[...] la argumentación es el razonamiento lógico que permite pasar de una proposición a otra.	Epistémica	Propuesta de definición de argumentación
2	[...] en [...] se señala que este proceso [la argumentación] está vinculado al desarrollo del razonamiento que permite llegar a generar estrategias, proponer conclusiones y comunicar ideas.	Epistémica	Propuesta de definición de argumentación Establecimiento de relación entre argumentación y razonamiento
3	[...] la función que desempeña la argumentación para exponer y defender ideas en la clase de matemáticas y al mismo tiempo para favorecer procesos de demostración en el aula.	Epistémica	Propuesta de definición de argumentación Diferenciación entre argumentación y demostración
4	[Las tareas] estas son importantes porque: impulsan al estudiante hacia nuevos espacios de aprendizaje, a obtener su propio conocimiento a partir de la exploración, a descubrir propiedades y relaciones de los objetos geométricos.	Mediacional	Caracterización de tareas que favorecen la argumentación
5	La argumentación depende del razonamiento. [...] el razonamiento es la facultad de resolver una situación y obtener una conclusión. [Los propósitos son]: son generar argumentos, construir ideas y participar en las actividades; [...] la creatividad como elemento del razonamiento para abordar diferentes soluciones de una tarea.	Epistémica	Establecimiento de relación entre argumentación y razonamiento

Como se puede ver en la Tabla 4.4, cuatro de los descriptores están relacionados con la faceta epistémica. En ellos, tres de los fragmentos corresponden al descriptor “Propuesta de definición de argumentación”. La información del Texto narrativo Base se sacó del documento en el que escribimos nuestra propuesta de trabajo de grado referida a la argumentación. Además, asociamos dos de tales fragmentos a los descriptores “Relación entre argumentación y razonamiento” y “Diferenciación entre argumentación y demostración” dado que en el Texto

narrativo Base comparábamos la argumentación con otros procesos. Por último, uno de los descriptores lo ubicamos en el descriptor “Relación entre argumentación y razonamiento”. Lo anterior nos deja ver que establecíamos desde el comienzo de la Maestría relaciones entre argumentación, razonamiento y demostración, pero no hacíamos una diferenciación de estas.

Un fragmento corresponde a la faceta mediacional. Le asignamos el descriptor “Caracterización de tareas que favorecen la argumentación” porque en el fragmento hay un listado de razones por las cuales consideramos que las tareas son importantes. Entre esas razones mencionamos algunas características de tareas que favorecen la argumentación.

En el Texto narrativo Base no encontramos información sobre otros descriptores de la faceta mediacional porque estos están referidos a los EGD y al diseño de tareas que promuevan la argumentación. En nuestros escritos solo hicimos alusión de manera general a la importancia de usar la tecnología, la gestión del profesor y la tecnología como medio motivador.

#### **4.4.2 Caracterización del conocimiento didáctico matemático a partir del Texto narrativo Uno**

Para caracterizar el conocimiento didáctico matemático que teníamos al terminar el primer semestre de la Maestría, a partir de la información que nos proporciona el Texto narrativo Uno, seguimos un procedimiento similar a lo descrito en la sección 4.4.1. En la Tabla 4.5, encontramos 16 fragmentos que ubicamos en alguna de las facetas y le asignamos un descriptor, de acuerdo con la interpretación del modelo del CDM. Una vez realizada la tabla, pudimos asociar fragmentos y realizar una interpretación de nuestro conocimiento con base en esta.

**Tabla 4.5***Fragmentos del Texto Narrativo Uno*

	<b>Fragmento del texto narrativo</b>	<b>Faceta</b>	<b>Descriptor de la faceta</b>
1	[...] las tareas de geometría no solo deben permitir hacer construcciones y exploraciones, sino también poder exponer argumentos y generar discusiones. [...]	Mediacional	Principios de tareas que buscan promover la argumentación
2	[...] las tareas que propone el profesor buscan brindar oportunidades para que los estudiantes logren las expectativas de aprendizaje y superen sus limitaciones.	Mediacional	Principios de tareas que buscan promover la argumentación
3	En cuanto a los componentes de una tarea de geometría, encontramos [...] mención a dos de ellos: un enunciado y una solicitud al estudiante que realice un procedimiento de construcción, una exploración, una conjetura o una demostración.	Mediacional	Criterios para diseñar tareas de argumentación
4	En cuanto a los principios para el diseño de una tarea, [...] mencionamos principios para tres tipos de tarea: de conjeturar, de probar y tareas que apuntan al tránsito entre conjeturar y probar.	Mediacional	Principios de tareas que buscan promover la argumentación
5	Los principios de diseño de tarea para la prueba se refieren a la necesidad: de impulsar la clasificación de diferentes enunciados matemáticos según la información dada; de presentar argumentos de diferentes formas; de colocarse en el papel del estudiante para mirar diferentes formas de proceder; de darse la posibilidad de explorar como un medio para obtener insumos suficientes para probar; y permitir que se expongan y compartan diferentes pruebas.	Mediacional	Principios de tareas que buscan promover la argumentación
6	Los principios de diseño de tarea que apuntan al tránsito entre conjeturar y probar aluden a establecer normas en el aula que generen discusiones en las cuales se den argumentos. Estos argumentos buscan convencer, persuadir y establecer la necesidad de que el estudiante participe en la prueba	Mediacional	Principios de tareas que buscan promover la argumentación
7	Con relación a la conceptualización de argumento, encontramos [...] una distinción entre argumento y argumentación. [...] la argumentación es un proceso mediante el cual se produce un discurso oral o escrito, que tiene como objetivo llegar a una conclusión mutuamente aceptable acerca de una declaración, en donde se debate la veracidad de dicha declaración. [...] un argumento [...] es el resultado del proceso de argumentar	Epistémica	Propuesta de definición de argumento Propuesta de definición de argumentación  Establecimiento de relación entre argumento y argumentación
8	En una síntesis del documento de Durand-Guerrier, Boero, Douek, Epp, & Tanguay, (2012) encontramos alusiones sobre los usos de un argumento, que se puede usar para establecer certidumbre o para buscar persuadir. Cuando se busca establecer certidumbre, es porque el individuo quiere eliminar dudas propias sobre la veracidad o falsedad de una declaración. Cuando se busca persuadir, es porque se quiere eliminar dudas que tengan los demás sobre la verdad o falsedad de una declaración.	Epistémica	Propósito de un argumento
9	En cuanto a la relación entre argumento y demostración, encontramos [...] que la demostración es la prueba de un argumento, fundamentada por afirmaciones matemáticas para dar validez.	Epistémica	Establecimiento de relación entre argumento y demostración
10	Respecto de la relación entre argumento y razonamiento, escribimos que [...] el argumento es la expresión discursiva del razonamiento.	Epistémica	Propuesta de definición de argumento



			Establecimiento de relación entre argumento y razonamiento
11	Sobre la relación entre argumento y prueba, mencionamos que [...] la prueba puede ser vista como un argumento o afirmación con ciertas características para validar una afirmación matemática. Estas características son: declaraciones aceptadas por la comunidad en el aula, formas de razonamiento válidas y conocidas o que están dentro del alcance conceptual y se comunican con formas de expresión que son apropiadas y conocidas por la comunidad.	Epistémica	Establecimiento de relación entre argumento y prueba
12	Sobre los elementos que componen un argumento, escribimos que un argumento tiene una estructura ternaria, compuesta por: el dato, la aserción y la garantía. El dato es una proposición particular que se expresa verbalmente o a través de imágenes, que busca apoyar la aserción. La aserción es la tesis o conclusión que se va a defender, el asunto a debatir o a sostener de forma oral o escrita. La garantía es un conjunto de proposiciones aceptadas como válidas en un sistema teórico propuestas por el que enuncia el argumento, que juegan el papel de conectar los datos con las aserciones.	Epistémica	Interpretación de la estructura de un argumento Caracterización de los elementos de un argumento
13	Argumento abductivo: inicia a partir de la observación de un resultado, se cuestiona acerca de qué datos pudieron ocasionarlo, busca reglas generales que tienen que ver con el resultado, y extrae unas posibles condiciones iniciales. Para un argumento abductivo le orden es aserción, garantía y dato.	Epistémica	Propuesta de definición de argumento abductivo
14	[...] la abducción: “se construye a partir un conjunto de sentencias dadas, asumiendo encontrar una solución a partir de una hipótesis explicativa”. Según la interpretación las aserciones son el conjunto de sentencias, justificar una solución sería la garantía y la hipótesis explicativa a la que se llega sería el dato.	Epistémica	Propuesta de definición de argumento abductivo
15	Sobre los tipos de construcciones en EGD, [...]son dos: blandas y robustas.	Mediacional	Diferenciación entre tipos de construcciones geométricas en EGD
16	[...] aludimos a las condiciones de las tareas para generar argumentación. [...] una tarea de geometría [debe permitir] que el estudiante genere diferentes tipos de argumentos. Esto depende del enunciado que se proponga y de si la tarea lleva a generar una conjetura.	Mediacional	Caracterización de tareas que favorecen la argumentación
17	[...] un EGD permite que los estudiantes usen herramientas para la exploración, la construcción y el descubrimiento de propiedades de los objetos geométricos, así mismo el de favorecer procesos de argumentación.	Mediacional	Caracterización del proceso exploración en EGD

En la Tabla 4.5, ubicamos a ocho de los fragmentos en la faceta epistémica y nueve fragmentos en la faceta mediacional. A continuación, realizamos una descripción de cada grupo de fragmentos ubicados en una misma faceta.

Con respecto a los fragmentos asignados a la faceta epistémica, hacemos las siguientes consideraciones. En el fragmento 7, asignamos los primeros descriptores correspondientes a esta faceta: “Propuesta de definición de argumentación”, “Propuesta de definición de argumento” y “Relación entre argumento y argumentación”. En este fragmento encontramos una definición de

argumentación distinta a la que estaba en la Tabla 4.4 y la primera definición explícita que damos de argumento. Además, establecemos la relación de proceso-producto que tienen estas dos. Este conocimiento didáctico matemático mencionado es fruto de lo trabajado en los espacios académicos cursados en el primer semestre de la maestría, puesto que los profesores buscaban que nosotros tuviéramos claro una primera conceptualización de argumento y argumentación y así mismo su relación y diferencia. La conceptualización de argumentación guarda relación con lo que se mencionó en una de las propuestas iniciales sobre la función de la argumentación. Andrés escribió que este es un proceso mediante el cual se busca exponer y defender ideas en la clase de matemáticas y al mismo tiempo favorecer procesos de demostración en el aula. La relación que vemos evidencia que Andrés tenía cierto conocimiento sobre la conceptualización de argumentación y su función en la clase de matemáticas.

En el Fragmento 8, asignamos el descriptor “Propósito de un argumento”. En este fragmento cuando se alude a buscar establecer certidumbre o buscar persuadir, nos referimos al propósito que tiene el argumento. Esta idea tiene relación con lo dicho por Andrés antes de iniciar la maestría (Tabla 4.4, fragmento 3) puesto que dijo que los argumentos se usaban con la idea de exponer y defender ideas en la clase de matemáticas.

A los fragmentos 9 y 11, les asignamos los descriptores “Relación entre argumento y demostración” y “Relación entre argumento y prueba”. En el curso Profundización en Matemáticas Elementales surgió la necesidad de tener clara las posibles relaciones, semejanzas o diferencias entre los procesos mencionados.

Al fragmento 12, le asignamos el descriptor “Interpretación de la estructura del argumento”, porque intentamos relacionar en este, de manera funcional, el dato, la garantía y la aserción que son los elementos de un argumento. Queríamos mencionar cómo es la organización de un argumento. También le asignamos el descriptor “Caracterización de los elementos de un argumento” porque el fragmento menciona que un argumento tiene una estructura ternaria y que está compuesta por tres elementos. Para cada uno de los elementos mencionamos una explicación de su función.

Los fragmentos 13 y 14, están asociados al descriptor “Propuesta de definición de argumento”. Esto, dado que en nuestro anteproyecto de trabajo de grado decidimos enfocarnos en la argumentación abductiva. Estos dos fragmentos nos dan a conocer las primeras conceptualizaciones que teníamos de argumento abductivo, fruto del seminario de Profundización en Matemáticas Elementales y las reuniones de Cristian con el grupo de trabajo donde labora. En general, considerábamos que un argumento abductivo era aquel en el que se debía encontrar una hipótesis para una conclusión mencionada.

Sobre los fragmentos asignados a la faceta mediacional hacemos la siguiente descripción. A los fragmentos 1, 2, 4, 5 y 6 le asignamos el descriptor “Principios de tareas que buscan promover la argumentación”. Encontramos en estos fragmentos del texto narrativo algunos elementos necesarios para el diseño de tareas para argumentar. Estos fragmentos germinan de la lectura y posterior síntesis del documento de Gómez (2016) propuesto en el curso Diseño y desarrollo curricular. La lectura buscaba que estudiáramos aquellos principios necesarios para el diseño de tareas de geometría que favorecieran la argumentación. El fragmento 2 guarda una relación de similitud con lo que Andrés consignó en la propuesta inicial sobre la importancia de las tareas. Él dijo que las tareas son importantes porque impulsan al estudiante hacia nuevos espacios de aprendizaje y así obtener su propio conocimiento. En relación con estos principios para el diseño de tareas, podemos decir que no teníamos ningún conocimiento antes de ingresar a la Maestría. En nuestros estudios de pregrado, no vimos algún curso que nos mencionara estos principios y tampoco los habíamos encontrado en lecturas de documentos educativos.

El fragmento 3, lo asociamos con el descriptor “Criterios para diseñar tareas de argumentación”, puesto que se refiere a aquellos elementos que deben incluirse en una tarea de geometría para favorecer la argumentación; en este caso, un enunciado y una solicitud al estudiante para que realice alguno de los siguientes procedimientos: una exploración, una construcción, una conjetura o una demostración.

Al fragmento 15, le asignamos como descriptor “Diferenciación entre tipos de construcciones geométricas en EGD”, ya que este menciona dos tipos de construcciones en EGD, específicamente las construcciones blandas y robustas. Esta diferenciación nos da a entender que existen tipos de construcciones y que una de estas podría promover de mejor manera la argumentación abductiva.

El fragmento 16, lo asociamos con el siguiente descriptor “Caracterización de tareas que favorecen la argumentación”. Lo anterior, ya que asumimos que las tareas que se proponen deben tener un enunciado que lleve a generar una conjetura. Es importante mencionar que no profundizamos en las condiciones necesarias para que una tarea genere argumentación, y no teníamos claridad acerca del tipo de enunciado que se debe proporcionar y si necesariamente la tarea debe ser de conjeturación para que el estudiante argumente.

Finalmente, al fragmento 17, le asignamos el descriptor “Caracterización de procesos en un EGD”, dado que en el fragmento se menciona que algunas de las herramientas de los EGD promueven procesos de exploración y construcción, y estos procesos conllevan a favorecer los procesos de argumentación. Esta función se relaciona con lo consignado en la propuesta inicial de Cristian sobre TIC. En ella, afirma que las TIC aportan a la sociedad educativa nuevas formas, contenidos, herramientas y posibilidades de comunicación que se han venido convirtiendo en una base fundamental, principalmente para el buen desarrollo de la educación. Desde nuestro punto de vista, cuando se hace mención a nuevas herramientas, se alude a las ventajas que brinda un EGD para realizar construcciones y exploraciones.

En el Texto narrativo Uno hay fragmentos que no tienen relación con un descriptor y por eso no los incluimos en la Tabla 4.5. Estos fragmentos aluden a la diferenciación entre tarea y actividad, la importancia del diseño de tareas que favorecen la argumentación, elementos para el diseño de una tarea, principios para el diseño de tareas de modelación, momentos para el análisis de una tarea, propuesta de definición de argumento deductivo e inductivo, y efectos de los EGD en la actividad.

### 4.4.3 Cambios identificados en nuestro conocimiento didáctico matemático derivados del plan de acción del Ciclo 1

En esta sección, analizamos los cambios que se hacen evidentes en nuestro conocimiento didáctico matemático cuando comparamos fragmentos correspondientes al mismo descriptor en el Texto narrativo Base y el Texto narrativo Uno. Para dar cuenta de estos cambios, primero agrupamos los fragmentos que corresponden a un mismo descriptor que estén en la caracterización de ambos textos narrativos. Segundo, hacemos uso de las herramientas analíticas de rotulación propuesta por Strauss y Corbin (2002) para marcar y rotular partes de la enunciación que nos permitan evidenciar cualidades o propiedades para realizar la comparación. A continuación, vamos a presentar el análisis por grupos temáticos según los descriptores.

#### *Sobre la temática de argumentación y argumento*

En la caracterización del conocimiento didáctico matemático a partir de los Textos narrativos Base y Uno, encontramos tres fragmentos que se refieren a argumentación y argumentos, que ubicamos en la faceta epistémica. Usamos la herramienta rotulación para encontrar formas de comparación entre lo dicho como se muestra en la Tabla 4.6. En paréntesis y color rojo, incluimos un código que nos permite establecer semejanzas y diferencias. El código tiene dos palabras: la primera agrupa expresiones según un asunto; la otra palabra establece un matiz diferenciador con el cual damos cuenta de un cambio en nuestro conocimiento.

**Tabla 4.6**

*Fragmentos rotulados con respecto a la definición de argumentación y argumento*

Texto narrativo Base	[...] la argumentación es el razonamiento lógico que permite pasar de una proposición a otra <i>[Naturaleza - Mental]</i> .
Texto narrativo Uno	Respecto de la relación entre argumento y razonamiento, escribimos que [...] el argumento es la expresión discursiva del razonamiento <i>[Naturaleza-Comunicativa]</i> .
	un argumento [...] es el resultado del proceso <i>[Naturaleza-Actuacional]</i> de argumentar

En los tres fragmentos asignamos el rótulo “**Naturaleza**” refiriéndonos a la especificidad de la expresión “argumento” y buscando cualidades en cada enunciación. Cuando mencionamos lo dicho en el fragmento 1, nos estamos refiriendo a una forma de pensar. A diferencia del fragmento 2, nos estamos refiriendo a una forma de comunicar. Y en el fragmento 3, nos estamos refiriendo a una forma de actuar.

En la definición de argumentación propuesta en el Texto narrativo Base, la naturaleza se refiere a una acción *Mental*, mientras que las definiciones de argumento propuestas en el Texto narrativo Uno, están referidas a un sustantivo, es decir al producto de esa acción mental. Una de las definiciones está asociada a una naturaleza *Comunicativa* y la segunda a la naturaleza de *Actuación* como producto de esa acción.

### ***Sobre la relación entre argumentación y demostración***

En la caracterización del conocimiento didáctico matemático a partir de los Textos narrativos Base y Uno, encontramos dos fragmentos asignados en la faceta epistémica con el descriptor “Relaciones entre argumentación y demostración”. Usamos el rótulo **Relación** para ver como estábamos asociando estos dos procesos.

#### **Tabla 4.7**

##### *Fragmentos rotulados sobre la relación entre argumentación y demostración*

Texto narrativo Base	[..] la función que desempeña la argumentación para exponer y defender ideas en la clase de matemáticas y al mismo tiempo para favorecer procesos de demostración <b>[Relación-Apoyo]</b> en el aula.
Texto narrativo Uno	En cuanto a la relación entre argumento y demostración, encontramos [...] que la demostración es la prueba de un argumento <b>[Relación-Validez]</b> , fundamentada por afirmaciones matemáticas para dar validez.

En los dos fragmentos asignamos el rótulo “**Relación**”, buscando cambios en cada conceptualización. En cuanto a la relación entre demostración y argumentación mencionada en el Texto narrativo Base, la relación es de *Apoyo*, porque mencionamos que la argumentación favorece los procesos de demostración. Mientras que, en la relación entre demostración y

argumento mencionada en el Texto narrativo Uno, la relación es *Validez*, dado que la demostración da validez al argumento con afirmaciones matemáticas.

Antes de ingresar a la maestría, decíamos que la relación de apoyo era de argumentación a la demostración porque la favorecía, pero no dimos las razones del por qué. Pero a raíz del trabajo en el primer semestre de la maestría la relación se invirtió, ahora la relación de apoyo es la demostración al argumento y estamos dando una razón específica.

### ***Sobre el descriptor “Caracterización de tareas que favorecen la argumentación”***

Por último, en la caracterización de nuestro conocimiento didáctico matemático a partir de los dos Textos narrativos, asignamos a dos fragmentos de la faceta mediacional el descriptor “Caracterización de tareas que favorecen la argumentación”. Con el fin de realizar una comparación entre ellos, usamos el rótulo **Alcance** para observar la función que tienen las tareas.

#### **Tabla 4.8**

*Fragmentos rotulados con la asignación del descriptor “Caracterización de tareas que favorecen la argumentación”*

Texto narrativo Base	[Las tareas] estas son importantes porque: impulsan al estudiante hacia nuevos espacios de aprendizaje, a obtener su propio conocimiento a partir de la exploración, a descubrir propiedades y relaciones de los objetos geométricos [ <i>Alcance – Limitado</i> ].
Texto narrativo Uno	[...] aludimos a las condiciones de las tareas para generar argumentación. [...] una tarea de geometría [debe permitir] que el estudiante genere diferentes tipos de argumentos [ <i>Alcance – Mayor nivel</i> ]. Esto depende del enunciado que se proponga y de si la tarea lleva a generar una conjetura

Una vez asignado el rótulo “**Alcance**” buscamos un cambio en nuestro conocimiento didáctico matemático. En el Texto narrativo Base hacíamos referencia al alcance que tienen las tareas, por que impulsan al estudiante a explorar y descubrir propiedades y relaciones; es decir, que los estudiantes llegan hasta un punto; quiere decir que *Limita* al estudiante. Mientras que en el Texto narrativo Uno, expresamos que el alcance de las tareas es de *Mayor nivel*, porque no solamente es generar una afirmación o buscar propiedades y relaciones, sino darles sustento a dichas propiedades, relaciones o afirmaciones. Evidenciamos un cambio en nuestro conocimiento,

porque el alcance de las tareas que favorecen la argumentación no solo es explorar y encontrar propiedades, sino llegar a generar argumentos.



## 5. Informe sobre el Ciclo 2

A continuación, presentamos el Ciclo 2 de esta investigación, a partir del relato de cada una de sus fases. Teniendo como referencia lo realizado en el Capítulo 4, en este capítulo realizamos el mismo procedimiento respecto de las fases. En la Fase 1, nos referimos a la identificación del problema que dio lugar a este Ciclo. En la Fase 2, mencionamos el plan de acción para movilizar nuestro conocimiento. En la Fase 3, damos a conocer aspectos de la implementación de las acciones y recolección de información. En la fase 4, realizamos el proceso de análisis de los datos.

### 5.1 Fase 1 – Ciclo 2: Identificación del problema que dio lugar al Ciclo 2

Una vez realizado el análisis correspondiente a la Fase 4 del Ciclo 1, nos dimos a la tarea de identificar el problema que atenderíamos en el Ciclo 2. En una interacción con la directora del trabajo de grado, nos preguntamos en qué aspectos tendríamos que profundizar de manera específica, después de haber concluido un análisis preliminar del Ciclo 1. Revisando el análisis, nos dimos cuenta de los siguientes asuntos respecto de la faceta epistémica: sobre la conceptualización de argumento, en cuanto notamos cambios relacionados con la naturaleza del argumento. Vimos que nos faltaba profundizar en ella, dado que aún confundíamos la definición de argumento con la de argumentación. No teníamos claro el propósito de un argumento, ni la relación entre los procesos de argumentación y demostración. Además, nos dimos cuenta de que, en los fragmentos que incluimos en la Tabla 4.5, sólo mencionamos una vez: los elementos de un argumento, los tipos de argumento, su estructura y la conceptualización de argumento abductivo. Al respecto, nos faltó hacer una mayor profundización en el Ciclo 1, por lo que consideramos que podría ser pertinente realizar un trabajo de profundización sobre ellos.

En cuanto a la faceta mediacional, encontramos que, probablemente la caracterización de las tareas de argumentación tenía un alcance mayor al que pensábamos, pero no sabíamos si tal alcance estaba relacionado con procesos de argumentación abductiva de manera específica. Además, en la Tabla 4.5 mencionamos algunos aspectos relacionados a los principios de tareas y

criterios para el diseño de tareas en los que tampoco ahondamos ni identificamos un impacto sobre ello en nuestro conocimiento.

Inicialmente pensamos que debíamos tomar como asunto problemático aspectos de la faceta mediacional y profundizar en la idea de tarea y en cómo diseñar tareas para favorecer argumentos abductivos, pero nos dimos cuenta de que primero tendríamos que abarcar asuntos relativos a los EGD, y la argumentación abductiva, porque no nos interesaba profundizar en el diseño de cualquier tipo de tarea, sino de unas tareas específicas: aquellas en las que se pretende impulsar la argumentación abductiva con el apoyo de un EGD. A partir de estas consideraciones, optamos por profundizar, en el Ciclo 2, sobre aspectos de la faceta epistémica y nos interesamos por responder la pregunta: ¿sobre qué aspectos de la argumentación abductiva deberíamos ganar una profundización de nuestro conocimiento didáctico matemático?

## **5.2 Fase 2 – Ciclo 2: Plan de acción para movilizar el conocimiento**

Para atender a la pregunta correspondiente a este ciclo, construimos el siguiente plan de acción. Primero, decidimos construir una interpretación compartida de lo que entendíamos por argumento, estructura de un argumento, elementos de un argumento y argumento abductivo, a partir de nuestras primeras enunciaciones mencionadas en la Tabla 4.5. Por tanto, nos propusimos realizar un rastreo de información en bases de datos a partir de un conjunto de palabras clave (argumento, argumento abductivo, tipos de argumento, elementos de argumento, estructura de argumento, entre otros) y documentos conocidos (Pedemonte (2002) Pedemonte (2011), Molina y Samper (2019), Durand-Guerrier, Boero, Douek, Epp y Tanguay (2012), entre otros). Decidimos crear fichas bibliográficas y realizar discusiones en las asesorías para llegar a nuevas conceptualizaciones de estos aspectos.

Segundo, decidimos poner en uso las definiciones construidas por nosotros, de argumento, elementos de argumento y argumento abductivo construyendo un conjunto de ejemplos de cada uno. Para ello, además de construir y analizar los ejemplos nos propusimos hacer mejoras de cada uno ellos. Luego consideramos necesario elaborar un escrito reportando este proceso y contrastándolo con nuestras conceptualizaciones.

Tercero, decidimos poner a prueba nuestro conocimiento sobre los aspectos mencionados, dirigiendo un curso corto. En este curso decidimos presentar las conceptualizaciones, ejemplos y conocimientos nuevos adquiridos en el Ciclo 2 a una comunidad de profesores, procurando fomentar un cambio en el conocimiento de ellos. Como producto de esta acción esperábamos consolidar nuestro conocimiento didáctico matemático de argumento, elementos de argumento, argumento abductivo y ejemplos ilustrativos. Consignamos estos conocimientos en un texto llamado Texto narrativo Dos (Anexo 4).

### **5.3 Fase 3 – Ciclo 2: Implementación de acciones y recolección de información**

La implementación del Plan de acción de la Fase 3 del Ciclo 2 se realizó entre enero y abril del 2021. Los escenarios, los eventos y recursos, el proceso de registro de información y obtención de datos investigativos difirieron del Ciclo 1 por las acciones que contemplamos en el plan. A continuación, vamos a referirnos a estos.

Con respecto a la acción de construcción compartida de lo que entendíamos por argumento, elementos de argumento y argumento abductivo, el escenario fue de tipo documental, ya que nos concentramos en estudiar artículos encontrados en la red o sugeridos por profesores en el semestre inmediatamente anterior. En relación con la acción dos, sobre poner en uso las definiciones construidas por nosotros de argumento, elementos de un argumento y argumento abductivo, el escenario fue un trabajo conjunto entre los autores de trabajo de grado, que presentábamos en las reuniones con la directora y cotejábamos en discusiones con ella. Para la acción tres, en el curso corto, los escenarios fueron: el primero, el espacio de interacción con la directora que nos pedía preparar presentaciones dirigidas a los profesores con los que íbamos a trabajar; y el segundo, el espacio en la institución en donde trabaja Cristian, específicamente con los profesores que conforman el grupo de investigación sobre razonamiento abductivo.

La información se recopiló a partir de los siguientes recursos:

- Apuntes personales: registramos ideas importantes de lecturas, ideas de discusiones entre los dos autores del trabajo de grado y en conversaciones realizadas con la directora.
- Síntesis de lecturas: registramos información de las lecturas que seleccionamos, sobre argumento y argumento abductivo.
- Tareas de asesorías: hicimos registros de las preparaciones de presentaciones o escritos para explicar qué es un argumento y qué es un argumento abductivo a los profesores con quienes interactuaríamos.
- Grabaciones: registramos las interacciones sostenidas en las asesorías, con el grupo de profesores y con los compañeros de la maestría.

A diferencia del Ciclo 1, en este caso, el proceso de organización, reducción, depuración y fragmentación para lograr obtener el Texto narrativo Dos, no se hizo a partir de tablas sino de escritos en los que íbamos consignando el conocimiento que adquirimos. Los escritos se iban presentando en cada asesoría con la directora, para su revisión, posterior reducción y depuración. Por razón de las actividades contempladas en el plan de acción, la información que se fue obteniendo tenía un nivel de elaboración que no requirió realizar un proceso previo a la escritura del texto narrativo. Durante el desarrollo del Ciclo 2, realizamos varias versiones de escritos, mejorando su redacción y agregando nuevos conocimientos. En el Cuadro 5.1 exponemos un fragmento del texto narrativo. El texto completo se encuentra en el Anexo 3.

### **Cuadro 5.1**

#### *Fragmento de Texto narrativo Dos*

Sin haber consultado lo escrito en el Texto narrativo Uno, inicialmente propusimos nuestras interpretaciones de lo que entendíamos en este momento del Plan de acción por dato, garantía y aserción. Cristian dijo que entendía el dato como la información que se da y justifica la aserción; aserción como la declaración a la que se llega; y garantía como la regla general o regla evocada que justifica el puente entre el dato y la aserción. Andrés mencionó que entendía el dato como la información del enunciado de un ejercicio o de lo que quiere decir el ejercicio; la aserción como la información que justifica el dato; y la garantía como la información que justifica al dato y a la aserción. [...] Como resultado de esta comparación, propusimos las siguientes definiciones: Dato: conjunto de razones que justifican la aserción; Aserción: declaración o conclusión a la que se llega; Garantía: regla general o regla evocada que justifica el uso de los datos como soporte para la aserción.

## **5.4 Fase 4 – Ciclo 2: Proceso de análisis de los datos**

El proceso de análisis de los datos correspondientes al Ciclo 2 se adelantó en cuatro etapas. En la primera etapa, realizamos una caracterización del conocimiento didáctico matemático a partir del Texto narrativo Dos, utilizando la herramienta analítica propuesta en la Tabla 2.1 (del Capítulo 2). En una segunda etapa, comparamos la caracterización hecha sobre el conocimiento didáctico matemático a partir del Texto narrativo Dos con la caracterización hecha sobre el conocimiento didáctico matemático a partir del Texto narrativo Uno, con relación a la faceta epistémica. Una tercera etapa fue la identificación de cambios en nuestro conocimiento didáctico matemático al interior del mismo Ciclo 2, derivados de los diferentes momentos de ejecución del plan de acción. En una cuarta etapa, analizamos cambios identificados en nuestro conocimiento didáctico matemático, comparando información proveniente de la Tabla 5.1 del Ciclo 2 con las Tablas 4.4 y 4.5 del Ciclo 1.

### **5.4.1 Caracterización de nuestro conocimiento didáctico matemático a partir del Texto Narrativo Dos**

Usamos como insumo el Texto Narrativo Dos, para realizar la caracterización de nuestro conocimiento didáctico matemático, siguiendo un procedimiento parecido al descrito en la sección 4.4 del Capítulo 4 del Ciclo 1. Nos basamos en nuestra conceptualización de las facetas del CDM cuyos descriptores presentamos en el Capítulo 2 (Tabla 2.1) para resaltar fragmentos del Texto Narrativo Dos que nos parecían ilustrativos de nuestro conocimiento (ver Tabla 5.1). Luego, a cada fragmento le asignamos el descriptor correspondiente. Después interpretamos la tabla para hacer una caracterización de nuestro conocimiento con base en esta.

Ubicamos los fragmentos tomados del Texto Narrativo Dos en la Faceta epistémica, dado que el Plan de acción del Ciclo 2 se centró en lograr una mejor fundamentación sobre argumentación y argumentación abductiva.

Tabla 5.1

## Fragmentos del Texto Narrativo Dos

	Fragmento del texto narrativo	Descriptor
1	Un argumento es una expresión discursiva, escrita u oral, elaborada de acuerdo con normas compartidas, compuesta por un conjunto de proposiciones y que tiene como propósito mostrar que una de ellas está justificada por las restantes.	Propuesta de definición de argumento Propósito de argumento
2	[...] Andrés entendía el dato como la información del enunciado de un ejercicio o de lo que quiere decir el ejercicio; la aserción como la información que justifica el dato; y la garantía como la información que justifica al dato y a la aserción.	Caracterización de los elementos de un argumento
3	[...] Cristian entendía el dato como la información que se da y justifica la aserción; aserción como la declaración a la que se llega; y garantía como la regla general o regla evocada que justifica el puente entre el dato y la aserción.	Caracterización de los elementos de un argumento
4	[...] Como resultado de esta comparación, propusimos las siguientes definiciones: Dato: conjunto de razones que justifican la aserción; Aserción: declaración o conclusión a la que se llega; Garantía: regla general o regla evocada que justifica el uso de los datos como soporte para la aserción.	Caracterización de los elementos de un argumento
5	“Aplicando la fórmula $\frac{n(n+1)}{2}$ donde n es la posición del número de puntos de una secuencia de números triangulares, en la posición 30 el número triangular que corresponde es 465	Ejemplo de argumento
6	Cristian consideró que el dato es “n es la posición del número de puntos de una secuencia de números triangulares”; la aserción “en la posición 30 el número triangular que corresponde es 465”; y la garantía “la formula $n(n + 1)/2$ .”	Identificación de los elementos en un argumento
7	[...] hicimos una reformulación [definición de dato, aserción y garantía] Dato: son hechos empíricos que apoyan la aserción. [...] Aserción: declaración que se pretende soportar. [...] Garantía: regla general que actúa como puente entre los datos y la aserción (legitima el paso de la aserción a la garantía). [...]	Caracterización de los elementos de un argumento
8	[...] reformulación del ejemplo propuesto anteriormente Dato: [...] “ $(30 \times 31)/2$ ” Aserción: [...] “en la posición 30 el número triangular es 465”. Garantía: [...] “la formula $n(n + 1)/2$ donde n es la posición, nos permite hallar los números triangulares para cada n”.	Reformulación de identificación de los elementos en un argumento
9		Esquematización de un argumento
10	Argumento abductivo: cuando conociendo la conclusión, se infieren los posibles datos y con ello la garantía que permite deducir dicha conclusión. (Lara, 2014)	Propuesta de definición de argumento abductivo

11	[...] en un argumento abductivo en la argumentación se parte de la aserción, se infiere en dato y se justifica el paso del dato a la aserción, mediante la garantía.	Proceso de argumentación que da origen a un argumento abductivo
12	[...]existen dos [tipos de argumento abductivo]: teórico y creativo. Un argumento abductivo teórico se establece cuando a partir de la conclusión se infiere el dato y lo respalda una regla general que está avalada por la comunidad y se reconoce como proposición verdadera, elegida en una exploración teórica. Un argumento abductivo creativo se establece cuando a partir de la conclusión se infiere un posible dato y se inventa una regla hipotética que proviene de una exploración empírica.	Tipos de argumento abductivo
13		Esquematación de tipos de argumento abductivo
14	[...]Dado el criterio Lado Angulo Lado de congruencia de triángulos, los $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ son congruentes si $\overline{AB} \cong \overline{EF}$ , $\angle A \cong \angle D$ , $\overline{AC} \cong \overline{DE}$ . En el enunciado [ejemplo de argumento] usamos los conectores “dado” y “si” pero, [...] estos conectores no llevan a generar una expresión que muestre que una proposición se está soportando con otras.	Ejemplo de argumento o reformulación de ejemplo de argumento Conectores usados en la escritura de un argumento
15	Según el criterio Lado Angulo Lado de congruencia de triángulos, los $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ son congruentes porque $\overline{AB} \cong \overline{EF}$ , $\angle A \cong \angle D$ , $\overline{AC} \cong \overline{DE}$ . [...]un enunciado que sea un argumento los conectores que articulen las proposiciones deben ser de tal forma que la expresión refleje cómo dos de ellas justifican la otra.	Ejemplo de argumento o reformulación de ejemplo de argumento Conectores usados en la escritura de un argumento
16	Por definición de paralelogramo, el cuadrilátero ABCD es paralelogramo porque $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ y $\overline{BC} \parallel \overline{DA}$ y $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ y $\overline{BC} \cong \overline{DA}$ .	Ejemplificación de argumento abductivo o reformulación de ejemplo
17	[...]una distinción entre un argumento abductivo y uno deductivo es que el primero expresa la plausibilidad de un dato mientras que el segundo señala la necesidad de la relación entre el dato y la aserción.	Comparación entre argumento abductivo y otros argumentos
18	El cuadrilátero ABCD tiene un ángulo recto, posiblemente sea un rectángulo por el teorema que afirma que, si un cuadrilátero tiene tres ángulos rectos, es rectángulo.	Ejemplificación de argumento abductivo o reformulación de ejemplo
19	Dos compañeras la consideraban como argumento ya que una proposición justifica la otra, pero nosotros decíamos que no porque no había mínimo tres proposiciones	Caracterización de los elementos de un argumento
20	[...]un argumento puede tener dos proposiciones siempre y cuando el dato y la aserción estén presentes y la garantía esté implícita.	Caracterización de los elementos de un argumento

21	Aura: “es una explicación, justificación frente a una situación problema o ejercicio” Desde nuestro punto de vista, Aura consideró el contexto del aula en donde se proponen problemas que favorecen la producción de argumentos. Pero, en relación con lo que nosotros conocemos, Aura no profundizó en la caracterización del tipo de problemas que se proponen para establecer unas razones con el propósito de mostrar que una de ellas está justificada por las restantes.	Valoración de propuestas definiciones de argumento
22	Janeth: “es una explicación justificada” La profesora Janeth usó esta palabra “explicación” haciendo referencia a una expresión discursiva que es diferente a la que nosotros consideramos que es argumento, porque desde nuestro punto de vista en una explicación no necesariamente se exponen razones que sustenten una declaración.	Valoración de propuestas definiciones de argumento
23	Janeth intentó articular las respuestas de sus compañeros diciendo: “un argumento tiene que ser verbal o escrito porque si se usa para refutar o justificar debe comunicar”. En este sentido, al referirse a una expresión discursiva oral o escrita descartando que sea un proceso mental, coincide con lo que nosotros escribimos como definición de argumento y se ubica en el ámbito netamente discursivo.	Valoración de propuestas definiciones de argumento
24	Cristian preguntó si la siguiente definición recogía lo conversado: “un argumento es una explicación escrita u oral que busca justificar o refutar una situación”. Los profesores contestaron que sí podía ser una definición de argumento. Ellos no se dieron cuenta que esta definición puede quedar confusa porque se usaron las palabras explicación y justificación. Además, tiene otro problema que es la inclusión de la palabra “refutar” porque está contradiciendo el propósito del argumento que es justificar y la palabra rechaza la validez de una declaración.	Valoración de propuestas definiciones de argumento

En la Tabla 5.1, encontramos 24 fragmentos tomados del Texto Narrativo Dos a los que hemos asignado descriptores de la faceta epistémica. A continuación, describimos las razones por las cuales se asignó cierto descriptor (o descriptores) a cada uno de los fragmentos.

Al fragmento 1, le asignamos dos descriptores: “Propuesta de definición de argumento” y “Propósito del argumento”. En este dato se encuentra la definición de argumento establecida por nosotros. Esta definición es producto de la búsqueda de definiciones que proponían otros autores y la interpretación que les dábamos nosotros a estas. Por tanto, uniendo lo que nos pareció importante de cada una de las definiciones estudiadas, propusimos la siguiente definición de argumento e implícitamente el propósito que tiene: “Un argumento es una expresión discursiva, escrita u oral, elaborada de acuerdo con normas compartidas, compuesta por un conjunto de proposiciones y que tiene como propósito mostrar que una de ellas está justificada por las restantes”.



A los fragmentos 2, 3, 4 y 7, les asignamos el descriptor “Caracterización de los elementos de un argumento”. En estos fragmentos intentamos mostrar el proceso de mejora de nuestra conceptualización de los elementos de un argumento: dato, aseveración y garantía. En los fragmentos 2 y 3 enunciamos lo que entendíamos en ese momento por cada elemento, sin revisar previamente lo mencionado en la Tabla 4.5. En el fragmento 4, enunciamos el resultado de la comparación y discusión de los fragmentos 2 y 3. En el fragmento 7, la enunciación corresponde a la reformulación de la conceptualización de los elementos de un argumento, producto de la comparación, ejemplificación e ideas de otros autores.

A los fragmentos 5, 14 y 15, les asignamos el descriptor “Ejemplo de argumento o reformulación de ejemplo de argumento de argumento”. En el fragmento 5, mencionamos un primer ejemplo de argumento elaborado por nosotros y nos concentramos en identificar que este tuviera los elementos de un argumento, aunque no consideramos si este cumplía nuestra definición. En el fragmento 14, con base a nuestro conocimiento didáctico matemático sobre la definición de argumento, mencionamos un ejemplo que creíamos era un argumento. Pero al estudiarlo nos dimos cuenta de que este ejemplo no lo era, porque estábamos enunciando un criterio de congruencia. Vimos que el error en la formulación del ejemplo de argumento estaba en los conectores y no se evidenciaba que fuera una expresión en la que una proposición justificara a las restantes. Por tanto, en el fragmento 16 hicimos la reformulación del ejemplo de argumento de tal forma que cumpliera nuestra definición. Si bien, esta reformulación tiene las mismas proposiciones, los conectores son diferentes.

Al fragmento 6, le asignamos el descriptor “Identificación de elementos en un argumento”. En este fragmento buscábamos identificar los elementos de un argumento basados en el ejemplo del fragmento 5 y observar si realmente era clara nuestra diferenciación de estos. Al fragmento 8 le asignamos como descriptor “Reformulación de identificación de elementos en un argumento”. En este fragmento logramos identificar de manera correcta los elementos del argumento, retomando como ejemplo de argumento el mencionado en el fragmento 5.

Al fragmento 9, le asignamos el descriptor “Esquematización de un argumento”, puesto que buscábamos una forma adecuada de representarlo mediante un esquema que permitiera identificar

los elementos del argumento. Esta esquematización fue tomada de Molina (2019). Al estudiarla caímos en cuenta que la habíamos usado en los primeros semestres de la Maestría y así mismo en nuestros cursos de pregrado, pero al reportar nuestro conocimiento didáctico matemático en el Ciclo 1 no aludimos a esta.

Al fragmento 10, le asignamos el descriptor “Propuesta de definición de argumento abductivo”, porque allí mencionamos una definición de argumento abductivo. Esta es fruto de la claridad lograda en la búsqueda de una conceptualización de argumento abductivo, elemento importante de nuestro trabajo de grado. Además, cuando estábamos profundizando sobre lo que es un argumento abductivo, nos encontramos con el fragmento 11 al que le asignamos el descriptor “Proceso de argumentación que da origen a un argumento abductivo” porque en este mencionamos que el carácter abductivo surge del argumento en el proceso de su formulación y no en la formulación de la expresión discursiva resultante.

Al fragmento 12, le asignamos el descriptor “Tipos de argumento abductivo” y al fragmento 13 el descriptor “Esquematización de argumentos abductivos”. Como el propósito de nuestro trabajo de grado es provocar cambios en nuestro conocimiento didáctico matemático sobre argumentación abductiva, buscamos bibliografía que nos permitió ampliar la caracterización para incluir dos tipos de argumento abductivo y a proponer esquemas diferenciadores para cada uno.

A los fragmentos 16 y 18, les asignamos el descriptor “Ejemplificación de argumento abductivo o reformulación de ejemplo”. En el fragmento 16, buscábamos proponer un ejemplo de argumento abductivo que cumpliera nuestra definición de argumento y además de argumento abductivo. En el fragmento 18 hicimos una reformulación del ejemplo de argumento abductivo presentando una mejora del ejemplo del fragmento 16 que cumpliera con la definición de argumento abductivo. Este ejemplo menciona la plausibilidad del dato a través de la palabra “posiblemente”.

Al fragmento 17, le asignamos el descriptor “Comparación entre argumento abductivo con otros argumentos”. Esto, dado a que buscábamos una evidencia del argumento abductivo que hiciera diferencia con otros argumentos. En el fragmento estamos enunciando una distinción entre un

argumento abductivo y uno deductivo, señalando que un argumento abductivo debe expresar la plausibilidad del dato, mientras que el argumento deductivo debe señalar la necesidad de la relación entre el dato y la aserción.

A los fragmentos 19 y 20, les asignamos el descriptor “Caracterización de los elementos de un argumento”. En estos fragmentos mencionamos cuántas proposiciones como mínimo debe tener un argumento. En el fragmento 19, mencionamos que un argumento está compuesto por 3 proposiciones, mientras que en el fragmento 20, comparando un ejemplo de argumento con nuestra definición, nos dimos cuenta que nosotros no habíamos incluido en la definición la cantidad de proposiciones que debía tener un argumento y nos dimos cuenta que podían ser dos. Lo anterior con la condición de que hubiese la aserción y una justificación de esa aserción.

A los fragmentos del 21 al 24, les asignamos el descriptor “Valoración de propuestas de definiciones de argumento”. En estos fragmentos realizamos una valoración de las definiciones propuestas por el grupo de profesores de la institución en donde trabaja Cristian, en el curso corto que hicimos, teniendo en cuenta nuestro conocimiento didáctico matemático de argumento. Por ejemplo, en el fragmento 21 valoramos la definición de Aura, señalando que ella se enfoca en el contexto de la realización de la tarea, pero no desarrolla la especificidad de un argumento en términos de que tenga unas razones y la justificación entre ellas. Otro caso es en el fragmento 22, el cual valoramos la definición propuesta por Janeth, porque según nuestro conocimiento en ese momento, en una explicación no necesariamente se exponen razones que sustenten una declaración. En los fragmentos 23 y 24, presentamos la valoración de la articulación de las definiciones propuestas por el grupo de profesores durante el transcurso del curso.

#### **5.4.2 Comparación de la faceta epistémica entre Texto Narrativo Uno y Texto Narrativo Dos**

En esta sección hacemos una comparación de nuestro conocimiento didáctico matemático en la faceta epistémica de acuerdo con la información consignada en los documentos Texto Narrativo Uno y Texto Narrativo Dos. Para hacer esa comparación, examinamos la Tabla 4.5 que tiene los

fragmentos del Texto narrativo Uno, y la Tabla 5.1 que tiene los fragmentos correspondientes al Texto Narrativo Dos. En la primera hay 8 datos y en la segunda 24.

Al comparar los descriptores notamos que en la Tabla 4.5 y 5.1 encontramos cuatro descriptores comunes, de la faceta epistémica. Estos son: “Propuesta de definición de argumento, Caracterización de los elementos de un argumento, Propuesta de definición de argumento abductivo y Propósito del argumento”. Con respecto a los primeros tres descriptores, estos dejan ver que intentábamos cumplir la primera acción del plan de trabajo del Ciclo 2, porque, aunque teníamos una primera conceptualización de argumento, elementos de un argumento y argumento abductivo, mencionadas en el Ciclo 1, consideramos importante construir una interpretación compartida de lo que entendíamos por cada uno de estos.

Con respecto al cuarto descriptor común “Propósito del argumento”, en el Ciclo 1 mencionamos como propósito lo que algunos autores consideran como los usos de un argumento. Dijimos que el propósito era establecer certidumbre o buscar persuadir. Pero al formular el propósito de esta manera, no es claro cómo se alcanza el propósito. Mientras que en el Ciclo 2 decimos que el propósito es que una proposición sea justificada por las restantes.

En la Tabla 4.5 del Ciclo 1 encontramos los descriptores “Establecimiento de relación entre argumento y argumentación”, “Establecimiento de relación entre argumento y demostración”, “Establecimiento de relación entre argumento y razonamiento”, “Establecimiento de relación entre argumento y prueba” e “Interpretación de la estructura de un argumento” que no están en la Tabla 5.1 del Ciclo 2. En el Ciclo 1 decidimos establecer comparaciones entre argumentación y otros procesos, porque inicialmente pensábamos que eran similares y necesitábamos estudiarlos. Desafortunadamente, en el Ciclo 2 no hubo oportunidad de retomar el tema y no avanzamos en nuestro conocimiento didáctico matemático al respecto.

En la Tabla 5.1 establecimos catorce nuevos descriptores “Esquematización de un argumento”, “Proceso de argumentación que da origen a un argumento abductivo”, “Diferenciación de tipos de argumento abductivo”, “Esquematización de tipos de argumento abductivo”, “Conectores usados en la escritura de un argumento”, “Comparación entre argumento abductivo con otros

argumentos”, “Caracterización de los elementos de un argumento”, “Ejemplo de argumento”, “Reformulación de ejemplo de argumento”, “Identificación de los elementos en un argumento”, “Reformulación de identificación de los elementos en un argumento”, “Ejemplo de argumento abductivo”, “Reformulación de ejemplo de argumento abductivo” y “Valoración de propuestas de definiciones de argumento”. Estos fragmentos reflejan que al desarrollar nuestro plan de acción realizamos un estudio sobre el tema específico de argumento y argumento abductivo. El Texto Narrativo Dos no tiene solamente ideas tomadas de diferentes textos, sino que incluye elaboraciones propias.

Al revisar estos nuevos descriptores podemos concluir que nuestro conocimiento didáctico matemático se amplió en las siguientes direcciones: además de tener nuevas interpretaciones y conceptualizaciones, intentamos ponerlas en juego al evaluar argumentos, tratar de dar ejemplos, reformularlos e identificar los elementos que hacen parte del argumento. Al mismo tiempo, avanzamos en poder evaluar y juzgar propuestas de definición de argumento, establecer los conectores usados en el momento de generar un argumento y lograr una esquematización de argumento abductivo y de los tipos de argumentos abductivos.

#### **5.4.3 Cambios en el conocimiento didáctico matemático que se aprecian en el Texto Narrativo Dos, fruto de la implementación del Plan acción del Ciclo 2**

Para realizar este ejercicio tomamos fragmentos de la Tabla 5.1 a los que le asignamos el mismo descriptor. Hicimos esta comparación para revisar si, fruto del plan de acción, encontramos cambios en nuestro conocimiento didáctico matemático al interior de este Ciclo. Usamos el siguiente procedimiento: tomamos fragmentos a que clasificamos con el mismo descriptor, asignamos un rótulo basado en la herramienta analítica propuesta por Strauss y Corbin (2002) y describimos los cambios de nuestro conocimiento didáctico matemático. A continuación, presentamos el análisis por grupos de fragmentos que tienen el mismo descriptor.

##### ***Con respecto al Descriptor “Caracterización de los elementos de un argumento”***

En la caracterización del conocimiento didáctico matemático a partir del Texto Narrativo Dos, encontramos seis fragmentos a los que asignamos el descriptor “Caracterización de los elementos

de un argumento”. Agrupamos cuatro fragmentos relacionados con la definición que le dábamos a los elementos de un argumento (Tabla 5.2) y dos fragmentos que se refieren al uso de los elementos en un argumento (Tabla 5.3). Usamos la herramienta rotulación para encontrar formas de comparación entre lo dicho, como se muestra en las Tablas 5.2 y 5.3. Por último, describimos los cambios de nuestro conocimiento didáctico matemático a partir de las diferencias o cambios.

**Tabla 5.2**

*Fragmentos rotulados con la asignación del descriptor “Caracterización de los elementos de un argumento” parte 1*

Fragmento 2	[...] Andrés entendía el dato como la información [ <i>Naturaleza – Información</i> ] del enunciado de un ejercicio [ <i>Origen – Externo</i> ] o de lo que quiere decir el ejercicio; la aserción como la información que justifica el dato [ <i>Naturaleza – Justificación</i> ]; y la garantía como la información que justifica al dato y a la aserción [ <i>Función - Justificar</i> ].
Fragmento 3	[...] Cristian entendía el dato como la información [ <i>Naturaleza – Información</i> ] que se da [ <i>Origen - Externo</i> ] y justifica la aserción [ <i>Función - Justificar</i> ]; aserción como la declaración a la que se llega [ <i>Naturaleza – Proceso</i> ]; y garantía como la regla general o regla evocada [ <i>Origen – Teórico</i> ] que justifica un puente entre el dato y la aserción [ <i>Función - Justificar</i> ].
Fragmento 4	[...] Como resultado de esta comparación, propusimos las siguientes definiciones: Dato: conjunto de razones [ <i>Naturaleza – Razón</i> ] que justifican la aserción [ <i>Función – Justificar</i> ]; Aserción: declaración o conclusión a la que se llega [ <i>Naturaleza – Proceso</i> ]; Garantía: regla general o regla evocada [ <i>Origen - Teórico</i> ] que justifica el uso de los datos como soporte para la aserción [ <i>Función – Justificar</i> ].
Fragmento 7	[...] hicimos una reformulación [definición de dato, aserción y garantía] Dato: son hechos [ <i>Naturaleza – Hechos</i> ] empíricos [ <i>Origen - Empírico</i> ] que apoyan [ <i>Función – Justificar</i> ] la aserción. [...] Aserción: declaración que se pretende soportar [ <i>Naturaleza – Declaración</i> ]. [...] Garantía: regla general que actúa como puente entre los datos y la aserción. [...] [ <i>Función - Legítimar</i> ].

Con respecto al cambio en nuestro conocimiento didáctico matemático sobre el rótulo **Naturaleza** del dato como elemento del argumento, en los fragmentos 2 y 3 lo caracterizamos como *Información*, aunque no hay ninguna especificidad en términos del tipo de información. En los fragmentos 4 y 7, cuando mencionamos el dato como las *Razones* o *Hechos*, estamos enfocándonos en lo esencial del dato y dándole especificidad a la enunciación. Con respecto al rótulo **Origen**, en los fragmentos 2 y 3 centramos nuestra atención en mencionar el agente *Externo* que presenta la información. Por ejemplo, en el fragmento 3 cuando nos referimos a “se da”, queríamos caracterizar el dato refiriéndonos al hecho de que alguien lo dice y en el fragmento 7 cambiamos de idea porque no importa quien da la información, sino que su origen es *Empírico*. En cuanto al rótulo **Función**, en el fragmento 2 no mostramos la función del dato, en

los fragmentos 3, 4 y 7 empezamos a aludir a la función de *Justificar*. Cabe aclarar que en el fragmento 7 entendemos “apoyo” en el sentido de dar razones o de justificar.

Con respecto a los cambios en nuestro conocimiento didáctico matemático sobre aserción también colocamos el rótulo **Naturaleza**. En el fragmento 2 la naturaleza es *Justificativa*, pero se hace evidente que teníamos una confusión entre dato y aserción, porque le estábamos dando a la aserción la connotación de ser una razón o una justificación de algo y no de aquello que se tiene que soportar. En los fragmentos 3 y 4, la naturaleza de la aserción es de carácter *Procesual* ya que se hace alusión a las declaraciones a las que se llega como resultado de una acción. Mientras que en el fragmento 7 la naturaleza es *Declarativa* que es lo que se afirma o se va a defender en el argumento.

Con respecto a los cambios en nuestro conocimiento didáctico matemático sobre garantía, examinamos las que tienen como rótulo **Función**. En los cuatro fragmentos mencionamos que la función que cumplía la garantía es poder justificar algo. Pero en el fragmento 2, aunque se menciona que “justifica el dato y la aserción” no se dice qué se está *Justificando*. En el fragmento 3 decimos que “justifica un puente” y esto es erróneo porque la garantía busca es servir de puente. En el fragmento 4, mencionamos que “justifica el uso de los datos” y ya sabemos que estamos justificando el uso de los datos como soporte para la aserción. En el fragmento 7, la función es más refinada porque *Legítima* el paso entre los datos y la aserción.

### Tabla 5.3

*Fragmentos rotulados con la asignación del descriptor “Caracterización de los elementos de un argumento” parte 2*

Fragmento 19	Dos compañeras consideraban como argumento [No es una circunferencia porque el centro no tiene la misma distancia hacia arriba o hacia los lados] ya que una proposición justifica la otra, pero nosotros decíamos que no porque no había mínimo tres proposiciones [ <i>Caracterización-Particularidad</i> ].
Fragmento 20	[...]un argumento puede tener dos proposiciones [ <i>Caracterización-Particularidad</i> ] siempre y cuando el dato y la aserción estén presentes y la garantía esté implícita

Respecto de nuestro conocimiento didáctico matemático sobre la caracterización de los elementos en un argumento asignamos como rótulo **Caracterización**. En el fragmento 19 mencionamos que una *Particularidad* del argumento es que este debería tener exactamente tres proposiciones (dato, aserción y garantía). Pero a medida que avanzamos en el plan de acción del Ciclo 2 y

examinamos nuestra definición de argumento, nos dimos cuenta que esta no menciona una cantidad de proposiciones, pero sí menciona el propósito. Por tanto, en el fragmento 20 mencionamos una *Particularidad* del argumento y es que puede constar solamente de dos proposiciones, que son el dato y la aserción.

***Con respecto a los Descriptores “Ejemplo de argumento o reformulación de ejemplo de argumento” y “Conectores usados en la escritura de un argumento”***

En la caracterización del conocimiento didáctico matemático a partir del Texto Narrativo Dos, encontramos dos fragmentos relacionados a los descriptores “Ejemplo de argumento o reformulación de ejemplo de argumento” y “Conectores usados en la escritura de un argumento”. En ellos presentamos un ejemplo de argumento y la reformulación de este explicando el uso de los conectores en la escritura de los enunciados. Usamos la herramienta rotulación para encontrar formas de comparación, como se muestra en la Tabla 5.4. Por último, describimos los cambios de nuestro conocimiento didáctico matemático a partir de las diferencias.

**Tabla 5.4**

*Fragmentos rotulados con la asignación de los descriptores “Ejemplo de argumento o reformulación de ejemplo de argumento” y “Conectores usados en la escritura de un argumento”*

Fragmento 14	[...] <i>Dado el criterio Lado Angulo Lado de congruencia de triángulos, los <math>\Delta ABC \cong \Delta DEF</math> son congruentes si <math>\overline{AB} \cong \overline{EF}, \angle A \cong \angle D, \overline{AC} \cong \overline{DE}</math> [Enunciado-Formulación de criterio ]</i> En el enunciado [ejemplo de argumento] usamos los conectores “dado” y “si” pero, [...] estos conectores no llevan a generar una expresión que muestre que una proposición se está soportando con otras. <i>[Uso de conectores- objetos generales]</i>
Fragmento 15	Según el criterio Lado Angulo Lado de congruencia de triángulos, los $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ son congruentes porque $\overline{AB} \cong \overline{EF}, \angle A \cong \angle D, \overline{AC} \cong \overline{DE}$ <i>[Enunciado- Afirmación y razón ]</i> [...]un enunciado que sea un argumento los conectores que articulen las proposiciones deben ser de tal forma que la expresión refleje cómo dos de ellas justifican la otra. <i>[Uso de conectores- Objetos particulares]</i>

Con respecto al cambio de nuestro conocimiento didáctico matemático sobre ejemplos de argumento y la reformulación de estos ejemplos, asignamos un primer rótulo llamado **Enunciado**. En el fragmento 14, con la idea de tener clara nuestra definición de argumento decidimos realizar el ejercicio de formular un ejemplo de argumento. Al analizarlo detenidamente



con nuestra directora nos dimos cuenta de que estamos dando una información y no estamos argumentando, porque *formulamos un criterio* de congruencia y no hay evidencia de que una proposición justifique a las restantes. En el fragmento 15, decidimos realizar una reformulación del ejemplo de argumento. Evidenciamos que una proposición justifica a las demás porque estamos dando una *Afirmación y una razón*. De esta manera podemos afirmar que dicha formulación corresponde a un argumento.

También asignamos a los fragmentos el rótulo **Uso de conectores** para caracterizar elementos de nuestro conocimiento didáctico matemático, en relación con la explicación que realizamos a la escritura de los enunciados. En el fragmento 14, el estilo de la escritura y los conectores se están refiriendo a cualquier tipo de triángulo que tenga ciertas características en *general* y por esto el enunciado no es un ejemplo de argumento. Esto nos llevó a la reformación del ejemplo que presentamos en el fragmento 15, en el cual se ven las mismas tres proposiciones, pero con diferentes conectores. En el enunciado, los triángulos mencionados no son cualquier clase de triángulos, sino unos *específicos* que deben cumplir las características que aparecen en lo que vamos a considerar como elementos de un argumento. Este análisis nos deja ver una cierta complejidad en el hecho de que uno formula enunciaciones generales usando simbología que pareciera que se referiera a objetos particulares y no ha unos genéricos. Lo único que nos da la clave para evidenciar si nos referimos a triángulos específicos o triángulos generales son los conectores.

#### **5.4.4 Cambios identificados en nuestro conocimiento didáctico matemático entre el Ciclo 1 y el Ciclo 2**

En esta sección analizamos los cambios que se hacen evidentes en nuestro conocimiento didáctico matemático, cuando comparamos fragmentos correspondientes al mismo descriptor derivados del análisis del Ciclo 1 y el Ciclo 2. Realizamos un procedimiento similar al que efectuamos en el análisis presentado en el capítulo anterior. Primero, agrupamos los fragmentos que corresponden a un mismo descriptor. Segundo, hacemos uso de las herramientas analíticas de rotulación propuestas por Strauss y Corbin (2002) para marcar y rotular partes de la enunciación que nos dejan ver cambios en nuestro conocimiento didáctico matemático. Tercero, realizamos

una comparación que nos permita evidenciar cualidades o propiedades para poner de manifiesto los cambios. A continuación, presentamos el análisis por descriptores.

### ***Respecto al descriptor “Propuesta de definición de argumento”***

En la caracterización del conocimiento didáctico matemático a partir del Ciclo 1 y Ciclo 2, encontramos dos fragmentos asignados en la faceta epistémica con el descriptor “propuesta de definición de argumento”. En la Tabla 5.5 presentamos dos fragmentos que corresponden al descriptor.

**Tabla 5.5**

*Rotulación de fragmentos con respecto al descriptor “propuesta de definición de argumento”*

Ciclo 1	Respecto de la relación entre argumento y razonamiento, escribimos que [...] el argumento es la expresión discursiva [ <i>Especificidad -Forma de expresarse</i> ] del razonamiento [ <i>Especificidad - Origen</i> ].
Ciclo 2	Un argumento es una expresión discursiva, escrita u oral, [ <i>Especificidad -Forma de expresarse</i> ] elaborada de acuerdo con normas compartidas [ <i>Especificidad -Normas</i> ], compuesta por un conjunto de proposiciones [ <i>Especificidad - Elementos</i> ] y que tiene como propósito [ <i>Especificidad - Propósito</i> ] mostrar que una de ellas está justificada por las restantes.

Respecto del cambio en nuestro conocimiento didáctico matemático sobre la definición de argumento, en el Ciclo 1 y Ciclo 2 asignamos el rótulo **Especificidad** a varias partes de los fragmentos. En ambos ciclos nos referimos a la *forma de expresar* un argumento. En el Ciclo 1, cuando nos referimos a “es la expresión discursiva” esta no es limitada porque puede ser oral, verbal, gestual o gráfica, mientras que en el Ciclo 2 si se limita a una forma específica. En el Ciclo 2 estamos siendo más explícitos porque el argumento tiene un carácter discursivo mientras que el uso de gestos o señas con los dedos es más difícil de interpretar.

En el Ciclo 1, en la definición de argumento además de mencionar la forma de expresarse, solo se refiere a su *Origen*: proviene del razonamiento. En el Ciclo 2, incluimos en la definición una mención a las *Normas* compartidas, a los *Elementos* que la componen y al *Propósito*. Con la definición que proponemos en el Ciclo 2 y las especificaciones incluidas, logramos diferenciar entre algunas expresiones discursivas que son argumento y otras que no. Además, la definición

de argumento del Ciclo 2, nos sirvió como herramienta para poder identificar argumentos y verificar si estamos redactando y elaborando argumentos de manera correcta.

### ***Respecto al descriptor “Propósito de un argumento”***

En la caracterización del conocimiento didáctico matemático a partir del Ciclo 1 y del Ciclo 2, encontramos dos fragmentos asignados en la faceta epistémica con el descriptor “Propósito de un argumento”. En la Tabla 5.6 presentamos los fragmentos y el rótulo **Esencia**, para observar un cambio de nuestro conocimiento didáctico matemático.

**Tabla 5.6**

### ***Rotulación de fragmentos con respecto al rótulo “Propósito de argumento”***

Ciclo 1	En una síntesis del documento de Durand-Guerrier, Boero, Douek, Epp, & Tanguay, (2012) encontramos alusiones sobre los usos de un argumento, que se puede usar para establecer certidumbre o para buscar persuadir [ <i>Esencia- Convencimiento o persuasión</i> ]. Cuando se busca establecer certidumbre, es porque el individuo quiere eliminar dudas propias sobre la veracidad o falsedad de una declaración. Cuando se busca persuadir, es porque se quiere eliminar dudas que tengan los demás sobre la verdad o falsedad de una declaración.
Ciclo 2	Un argumento es una expresión discursiva, escrita u oral, elaborada de acuerdo con normas compartidas, compuesta por un conjunto de proposiciones y que tiene como propósito mostrar que una de ellas está justificada [ <i>Esencia-Justificación</i> ] por las restantes.

En cuanto al cambio en nuestro conocimiento didáctico matemático sobre el propósito del argumento, en el Ciclo 1, hacemos referencia a la **Esencia** del propósito de un argumento, el cual es *Convencer o Persuadir*. En el Ciclo 2 hacemos referencia a la **Esencia** del propósito de un argumento, que en este caso es *Justificar*. Notamos que hay un cambio en nuestro conocimiento, ya que en el Ciclo 2 establecemos el propósito de un argumento, no necesariamente para lograr convencer o persuadir sino para validar afirmaciones en el marco de un sistema teórico. En el Ciclo 2, los argumentos en matemáticas superan la intención psicológica de convencimiento para pasar a una validez teórica.

### ***Respecto al descriptor “Caracterización de los elementos de un argumento”***

A continuación, comparamos dos fragmentos, uno correspondiente al Ciclo 1 y el otro correspondiente al Ciclo 2. Vamos a comparar cómo describíamos los elementos de un argumento en ambos ciclos. El fragmento que corresponde al Ciclo 1 no había sido rotulado en

alguna de las secciones de este trabajo, pero el fragmento del Ciclo 2 ya había sido rotulado. Para realizar la comparación, asignamos a los fragmentos que se muestran en la Tabla 5.7 nuevos rótulos respecto de los asignados en la Tabla 5.2. Esto permite analizar el cambio en nuestro conocimiento didáctico matemático sobre la caracterización de los elementos de un argumento entre el Ciclo 1 y Ciclo 2.

### Tabla 5.7

*Rotulación de fragmentos con respecto al descriptor “Caracterización de los elementos de un argumento”*

Ciclo 1	<p>Sobre los elementos que componen un argumento, escribimos que un argumento tiene una estructura ternaria, compuesta por: el dato, la asección y la garantía.</p> <p>El dato es una proposición particular que se expresa verbalmente o a través de imágenes [<i>Naturaleza – Particular</i>], que busca apoyar la asección.</p> <p>La asección es la tesis o conclusión que se va a defender [<i>Naturaleza –Defender</i>], el asunto a debatir o a sostener de forma oral o escrita.</p> <p>La garantía es un conjunto de proposiciones aceptadas como válidas en un sistema teórico propuestas por el que enuncia el argumento, que juegan el papel de conectar los datos con las asecciones [<i>Función - Conectar</i>]</p>
Ciclo 2	<p>[...]hicimos una reformulación [definición de dato, asección y garantía]</p> <p>Dato: son hechos empíricos [<i>Naturaleza - Empírico</i>] que apoyan la asección. [...]</p> <p>Asección: declaración que se pretende soportar [<i>Naturaleza – Soportar</i>]. [...]</p> <p>Garantía: regla general que actúa como puente entre los datos y la asección. [...] [<i>Función - Legitimar</i>].</p>

Respecto del cambio en nuestro conocimiento didáctico matemático sobre la caracterización de los elementos de un argumento, en el Ciclo 1 nos referimos a la **Naturaleza** del dato siendo este un enunciado particular. Cuando decimos que es una proposición particular nos estamos refiriendo a una proposición que dice algo acerca de un caso específico, en oposición a un conjunto general de datos. En el Ciclo 2, vemos los datos con naturaleza empírica. Cuando decimos que un dato es empírico nos referimos a algo susceptible de ser exhibido, señalado o mostrado a otras personas. Es importante mencionar que respecto a la caracterización del dato en el Ciclo 1 le asignamos el código *Particular* a la enunciación y en el Ciclo 2 le asignamos el adjetivo código *Empírico*.

En cuanto a la aserción, en ambos Ciclos asignamos el rótulo **Naturaleza**. En el Ciclo 1 mencionamos que esta tiene como naturaleza defender mientras que en el Ciclo 2 la naturaleza es soportar. En el Ciclo 1 le asignamos el código *Defender*; esto no necesariamente significa que se deben expresar razones, sino que esto se puede lograr por otros medios ya sea por autoridad, coacción o incluso por amenaza. En el Ciclo 2, asignamos el código *Soportar*, porque cuando mencionamos que la aserción tiene como naturaleza soportar nos estamos enfocando en que se necesitan brindar las razones.

En cuanto a la garantía, en ambos ciclos el rótulo asignado es **Función**. En el Ciclo 2, asignamos el código *Legitimar*, dado que la garantía tiene un carácter útil dentro de un sistema teórico de conocimientos, puesto que lo que se dice debe estar de acuerdo con lo que se razona previamente. Mientras que en el Ciclo 1 asignamos el código *Conectar*, porque establecemos que la garantía solo tiene como función conectar, juntar o relacionar.

Lo que decimos en el Ciclo 1 está enfocado en el marco de argumentos que tienen que ver con lo cotidiano, mientras que en el Ciclo 2 estamos enfocándonos en la razonabilidad de lo que se afirma. El fragmento del Ciclo 2 tiene más relación con la idea de dato y aserción que teníamos en el Ciclo 1 y su relación con un sistema teórico matemático.

### ***Respecto al descriptor “Propuesta de definición de argumento abductivo”***

En la caracterización del conocimiento didáctico matemático a partir de los Ciclos 1 y 2, encontramos dos fragmentos asignados en la faceta epistémica con el descriptor “Propuesta de definición de argumento abductivo”. En la Tabla 5.8 presentamos los fragmentos y los rótulos que usamos para observar un cambio de nuestro conocimiento didáctico matemático.

**Tabla 5.8**

*Rotulación de fragmentos con respecto al descriptor “Propuesta de definición de argumento abductivo”*

Ciclo 1	Argumento abductivo: inicia a partir de la observación de un resultado [ <i>Aserción- Resultado</i> ], se cuestiona acerca de qué datos pudieron ocasionarlo [ <i>Motivo – Causa-segura</i> ], busca reglas generales que tienen que ver con el resultado [ <i>Garantía - Propositiones relacionadas</i> ], y extrae unas posibles condiciones iniciales [ <i>Motivo- Causa factible</i> ]. Para un argumento abductivo el orden es aserción, garantía y dato [ <i>Orden</i> ].
Ciclo 2	Argumento abductivo: cuando conociendo la conclusión, [ <i>Aserción- Conclusión</i> ] se infieren los posibles datos [ <i>Motivo – Inferencia-Plausible</i> ] y con ello la garantía que permite deducir [ <i>Garantía – Proposición general mpp</i> ] dicha conclusión.

Respecto del cambio en nuestro conocimiento didáctico matemático sobre la definición de argumento abductivo, podemos afirmar que este es bastante amplio, especialmente por la claridad en la formulación. El primer rótulo asignado a los fragmentos del Ciclo 1 y del Ciclo 2 lo llamamos **Aserción**. En el Ciclo 1 nos referimos a la aserción como el *Resultado* de una observación, es decir, estamos introduciendo la caracterización de argumento empírico en situaciones experimentales en donde se resuelve un problema. En el Ciclo 2 no, porque puede que esto surja de una situación experimental pero no necesitamos referirnos a esto; simplemente se propone una afirmación a manera de *Conclusión*, sea o no sea el producto de una experimentación. Lo anterior muestra que en el Ciclo 2 hay un avance en la transformación de la definición en un argumento abductivo respecto a la aserción porque es más corta, clara y concisa respecto de lo mencionado en el Ciclo 1.

El segundo rótulo que usamos fue **Motivo**. En el Ciclo 1, el motivo de la producción de un argumento abductivo es buscar las *Causas* que dan lugar al resultado, mientras que en el Ciclo 2 el motivo es *Inferir* los datos a partir de una proposición. En el Ciclo 1, seguimos en el contexto experimental de búsqueda de causas, mientras que en el Ciclo 2 estamos suponiendo posibles datos que nos permitan hacer la inferencia a partir de los datos para obtener a la aserción. En el Ciclo 1 tenemos un segundo motivo; inicialmente decimos que se buscan datos que puedan ocasionar la aserción y luego decimos que se extraen posibles condiciones. Esto es confuso ya que en el primer caso hablamos de *Causas seguras* y en el segundo de *Causas factibles*.

Un tercer rótulo asignado es **Garantía**. En el Ciclo 1, hablamos de manera general y vaga, afirmando que son *Proposiciones relacionadas*. En el Ciclo 2, estamos diciendo que podemos

realizar un proceso deductivo, de tal forma que la regla general nos permita inferir la aserción a partir de los datos, mediante un esquema *Modus Ponendo Ponens*. Adicionalmente, en el Ciclo 1 confundíamos un argumento abductivo con un proceso argumentativo que da lugar a un argumento abductivo y entendíamos que los argumentos abductivos presentaban un orden en su estructura. Pero ahora sabemos que el orden en el que se establecen los elementos en un argumento no indica el tipo de argumento.

## **6. Descripción del Ciclo 3**

En lo que sigue, describimos el Ciclo 3 de esta investigación, a partir del relato de cada una de sus fases, teniendo como referencia lo realizado en el Capítulo 5. En este capítulo realizamos el mismo procedimiento respecto de las fases. En la primera fase, identificamos el problema que da lugar a este Ciclo. En la segunda fase, planteamos el plan de acción para movilizar el conocimiento. En la tercera fase, damos a conocer la implementación de las acciones y recolección de información. En la cuarta fase, realizamos el proceso de análisis de los datos.

### **6.1 Fase 1- Ciclo 3: Identificación del problema que dio lugar al Ciclo 3**

Fruto del trabajo que adelantamos en el Ciclo 2 tenemos una definición propia de argumento y reconocemos de manera más precisa los elementos que componen un argumento y la estructura funcional de un argumento. También diferenciamos un argumento abductivo de otros tipos de argumento según lo que se infiere en la argumentación, distinguimos dos tipos de argumento abductivo (teórico y creativo) y diferenciamos entre el proceso argumentativo que da lugar a un argumento abductivo y el argumento abductivo mismo.

Además de esta conceptualización, en el análisis de nuestro conocimiento realizado en el ciclo anterior respecto de la faceta epistémica, notamos cambios en la caracterización de los elementos de un argumento, la formulación de ejemplos de argumento y en la propuesta de definición de argumento abductivo. Aun cuando teníamos claridad respecto de la función de los elementos en un argumento abductivo, notamos que un asunto de interés es la naturaleza de los datos que soportan una aserción cuando se propone un argumento abductivo. Nos dimos cuenta que este tipo de argumento surge a partir de procesos de exploración de construcciones o configuraciones geométricas que se dan en el proceso de argumentación, y que, dada una aserción, se buscan los posibles datos que podrían constituir parte de un argumento y que son plausibles.

Con respecto al proceso de exploración, en el pregrado y en el seminario PME tuvimos una aproximación al uso de EGD que promueven este proceso. Además, en el Ciclo 1 en la faceta mediacional, mencionamos que un EGD permite que los estudiantes usen herramientas para la



exploración, la construcción y el descubrimiento de propiedades de los objetos geométricos, así mismo el de favorecer procesos de argumentación. También, Mariotti y Antonini (2009, citados por Molina y Samper, 2019) afirman que los EGD promueven la exploración visual y el descubrimiento.

Dado lo anterior y teniendo en cuenta el objetivo de nuestro trabajo de grado, un elemento que nos llamó la atención es el proceso de exploración y cómo este favorece la producción de argumentos abductivos. En el Ciclo 2, mencionamos que el proceso de argumentación abductiva sucede cuando estamos buscando hechos para justificar la aseercción; pero estos hechos no son seguros, sino que son plausibles. Este planteamiento, relacionado con el Ciclo 1 en el que mencionamos que los EGD favorecen la exploración, nos lleva a generar la siguiente pregunta: ¿Cuál debería ser el conocimiento didáctico matemático del profesor acerca de EGD que sirva como apoyo para el diseño de tareas que movilicen el proceso de argumentación específicamente los argumentos abductivos?

## **6.2 Fase 2-Ciclo 3: Plan de acción para movilizar el conocimiento**

Para dar solución a la problemática que identificamos en la Fase 1 del Ciclo 3, establecimos el Plan de acción que presentamos a continuación.

Inicialmente decidimos profundizar en lo que diversos autores mencionan sobre el papel de los EGD para producir argumentos abductivos. Para esto realizamos un rastreo de información en bases de datos, identificamos los siguientes textos claves: Pedemonte y Reid (2011), Baccaglini (2011, 2019) y Molina y Samper (2019), realizamos la extracción de las diferentes posturas de cómo favorecer la producción de argumentos abductivos y comparamos las posturas para generar una general. Decidimos leer y resaltar información de los artículos, grabar las interacciones entre Andrés y Cristian y las asesorías en las que se tocó el tema y generar fichas bibliográficas. Esta información la usamos para generar un escrito que responda a la pregunta de este ciclo sobre el papel del EGD para favorecer argumentación abductiva.

También decidimos elaborar un mapa conceptual a partir de la revisión bibliográfica sobre el papel de los EGD para producir argumentos abductivos, establecer unas particularidades y organizarlas para lograr explicar cómo se producen argumentos abductivos con ayuda de EGD.

Otra acción en este ciclo de investigación fue describir ejemplos de situaciones de exploración en las que se emplea EGD para promover argumentos abductivos. Para esto identificamos diferentes situaciones para posteriormente proponerlas al compañero de trabajo de grado. En este proceso se registraron las construcciones en GeoGebra (EGD), fichas con las soluciones y grabamos las interacciones entre Andrés y Cristian, para también realizar un escrito con la descripción de la solución y la relación con lo mencionado acerca de ~~en~~ la caracterización de nuestro conocimiento.

Una última acción fue idear situaciones geométricas que emplean EGD para favorecer argumentos abductivos. Para esto, se siguió el mismo procedimiento de los ejemplos de situaciones aplicadas al compañero de trabajo de grado, como se menciona en la anterior acción. Esto es con el propósito de comprobar si la situación planteada permite promover argumentos abductivos. Para dar evidencia, registramos el procedimiento de solución de la tarea y grabamos las interacciones entre Andrés y Cristian y las discusiones finales con la directora. A partir de la información obtenida, realizamos un escrito propio de la propuesta de la situación y su solución.

### **6.3 Fase 3-Ciclo 3: Implementación de acciones y recolección de información**

La implementación de este Plan de acción de la fase 3 del Ciclo 3 se llevó a cabo entre mayo y julio del 2021. A continuación, presentamos un procedimiento similar al Ciclo 2 en el que mencionamos los escenarios, los eventos y recursos, el proceso de registro de información y obtención de datos investigativos.

Los escenarios en los cuales se recopiló la información fueron los siguientes:

Documental: extrajimos artículos en bases de datos o páginas oficiales de investigadores.

Encontramos los siguientes documentos: Baccaglioni (2011, 2019), Pedemonte (2011), Kniping y Reid (2011), y Molina y Samper (2019). Esto con el propósito de profundizar en lo dicho por distintos menciones de autores sobre el papel de los EGD para producir argumentos abductivos. También extrajimos ejemplos de situaciones que emplean EGD para promover argumentos abductivos y posturas de los autores sobre cómo debe ser el diseño de una tarea en EGD para favorecer la producción de argumentos abductivos.

Interaccional: este escenario es el espacio donde nosotros inventamos situaciones que promovieran argumentos abductivos con ayuda de EGD. También cuando adelantamos discusiones sobre sobre lo que entendíamos acerca del papel de los EGD para favorecer argumentos abductivos.

La información se recopiló a partir de los siguientes recursos:

- Apuntes personales: Registramos apuntes de los documentos encontrados en las bases de datos, ideas de discusiones entre los integrantes y conversaciones que se daban en las asesorías con la directora de este trabajo.
- Resúmenes y síntesis de lecturas: registramos ideas y ejemplos importantes de autores que mencionaran el papel del EGD como apoyo en el diseño de tareas que promueven argumentos abductivos.
- Tareas de asesorías: describimos la solución de situaciones de tareas de EGD que promuevan argumentos abductivos y las contrastamos con las ideas de los autores.

Al igual que el ciclo anterior, realizamos un texto narrativo de nuestro conocimiento didáctico matemático cuyas versiones presentábamos en cada asesoría para su revisión, posterior reducción y depuración. Durante el desarrollo del Ciclo 3, realizamos varias versiones de escritos mejorando su redacción y agregando nuevos conocimientos didácticos matemáticos a medida que los íbamos identificando.

Como resultado del proceso descrito anteriormente, obtuvimos el “Texto Narrativo Tres”, que recoge evidencias correspondientes al conocimiento logrado gracias al Plan de acción de este Ciclo y que se centra especialmente en el conocimiento didáctico matemático sobre el uso de EGD como apoyo para el diseño de tareas que promuevan argumentos abductivos. En el Cuadro 6.1 exponemos un fragmento del Texto Narrativo Tres. El texto completo se encuentra en el Anexo 6.

### **Cuadro 6.1**

#### *Fragmento de Texto Narrativo Tres*

En el mapa conceptual encontramos cierta relación entre el lado izquierdo y el derecho, porque si intencionalmente se induce una propiedad, existe algo en el enunciado que invita a inducirlo. Entonces, hay una cierta coincidencia en las propuestas porque se debería tener en cuenta la solicitud expresa del enunciado para inducir una propiedad. De esta manera el enunciado debe invitar a realizar una construcción en el EGD que permita la exploración por medio del arrastre. Además, el enunciado debe pedir que se explore y se determinen ciertas condiciones para que se cumpla una propiedad que se hace explícita.

## **6.4 Fase 4 - Ciclo 3: Proceso de análisis de los datos**

El proceso de análisis de los datos correspondientes al Ciclo 3 de nuestro trabajo de grado se adelantó de forma similar a lo realizado en el Capítulo 5, también en cuatro etapas. En la primera etapa, realizamos una caracterización del conocimiento didáctico matemático a partir del Texto Narrativo Tres, utilizando la herramienta analítica propuesta en la Tabla 2.1. En la segunda etapa, realizamos una comparación de los descriptores asignados en el Ciclo 3 con los descriptores asignados en los ciclos anteriores con relación a las facetas epistémica y mediacional. En la tercera etapa identificamos los cambios en nuestro conocimiento didáctico matemático dentro del mismo Ciclo 3, derivados de los diferentes momentos del plan de acción. En la cuarta etapa, analizamos cambios identificados en nuestro conocimiento didáctico matemático, comparando los fragmentos derivados de los Ciclos 1 y Ciclo 2 con el Ciclo 3 que correspondan a temáticas relacionadas o descriptores iguales.


### 6.4.1 Caracterización de nuestro conocimiento didáctico matemático a partir del Texto Narrativo Tres

Usamos como insumo el Texto Narrativo Tres, para realizar la caracterización de nuestro conocimiento didáctico matemático siguiendo un procedimiento parecido al descrito en el Capítulo 5, sección 5.4. En este sentido, nos basamos en nuestra conceptualización de las facetas del CDM cuya descripción presentamos en el Capítulo 2 (Tabla 2.1) y utilizamos el proceso de rotulación para resaltar fragmentos del Texto Narrativo Tres que nos parecían importantes. Luego clasificamos el fragmento en una faceta y asignamos el descriptor correspondiente a la faceta (ver Tabla 6.1). Por último, interpretamos la tabla para hacer una caracterización de nuestro conocimiento con base en esta.

**Tabla 6.1**

*Fragmentos del Texto Narrativo Tres*

	<b>Fragmento del texto narrativo</b>	<b>Faceta</b>	<b>Descriptor</b>
1	[...] para favorecer argumentos abductivos con ayuda de un EGD es importante la forma como se presenta el enunciado de la tarea, el problema o la situación que se propone a los estudiantes. Ellos [Molina y Samper, 2019] mencionan que en el enunciado de la situación se debe incluir la propiedad que constituiría la aserción de un argumento que se quiere justificar y una pregunta sobre las posibles propiedades que pueden causarla.	Mediacional	Componentes del enunciado de una tarea para promover argumentación abductiva
2	[...] enunciado como pregunta para una tarea “Sean $mAB = 2mCD$ . ¿Es posible determinar una condición para el $\overline{CD}$ tal que $\Delta ABE$ y $\Delta CDE$ sean semejantes? Provea una conjetura y demuéstrela”.	Mediacional	Ejemplificación de enunciado de tarea que promueve argumentación abductiva
3	<div style="text-align: center;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 0 auto;">           Definición de circunferencia            Teorema fundamental de la proporcionalidad            Teorema de semejanza de triángulos         </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center; margin-top: 10px;"> <div style="border: 1px dashed black; padding: 5px;"> <math>mAB = 2mCD</math>  <math>C \in \odot_{E, EA/2}</math> </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <math>\Delta ABE \approx \Delta CDE</math> </div> </div> </div>	Epistémica	Esquema de un argumento abductivo
4	[...] encontramos una relación entre el proceso de exploración con arrastre mantenido y el proceso que lleva a un argumento abductivo. [El arrastre mantenido involucra dos tipos de invariantes]. Desde nuestro punto de vista, el invariante intencionalmente inducido [por arrastre] corresponde a la aserción. El invariante observado corresponde a un posible dato que sustenta el invariante inducido. Cuando	Mediacional	Relación entre los invariantes del arrastre mantenido y los elementos del

	se descubre el invariante observado se establece una regla que es la garantía del argumento.		argumento abductivo
5	[...] [para] promover argumentos abductivos [...] el enunciado [de la tarea] debe tener una caracterización particular, específicamente en la forma cómo se presenta al resolutor, porque debe incluir unos elementos esenciales. En el enunciado debe estar explícita la conclusión y debe preguntarse por unos hechos de los que se podría inferir la conclusión. Estos elementos están relacionados con la aserción y posibles datos de un argumento abductivo.	Mediacional	Componentes del enunciado de una tarea para promover argumentación abductiva
6	[...] [para] promover procesos de argumentación y argumentos abductivos, nos podemos valer de recursos como los EGD, que suscitan procesos de exploración.	Mediacional	Establecimiento de relación entre un argumento y exploración
7	[...] [en la resolución de un problema] si intencionalmente se induce una propiedad, [es porque] existe algo en el enunciado [del problema] que invita a inducirlo. Entonces, hay una cierta coincidencia en las propuestas [de los autores estudiados] porque [según ellos] se debería tener en cuenta la solicitud expresa del enunciado para inducir una propiedad. De esta manera el enunciado debe invitar a realizar una construcción en el EGD que permita la exploración por medio del arrastre. Además, el enunciado debe pedir que se explore y se determinen ciertas condiciones para que se cumpla una propiedad que se hace explícita.	Mediacional	Componentes del enunciado de una tarea para promover argumentación abductiva
8	[...] mencionamos que, [según Pedemonte (2011)] un argumento abductivo puede ser creativo, teórico o subcodificado. Un argumento abductivo teórico se establece cuando a partir de la conclusión se infiere el dato y lo respalda una regla general que está avalada por la comunidad y se reconoce como proposición verdadera, elegida en una exploración teórica. Un argumento abductivo creativo se establece cuando a partir de la conclusión se infiere un posible dato y se inventa una regla hipotética que proviene de una exploración empírica. Un argumento abductivo subcodificado es cuando a partir de la conclusión se infiere un dato y lo respalda un conjunto de reglas.	Epistémica	Tipos de argumento abductivo
9	[...] Andrés entró en un proceso argumentativo que lo llevó a producir un argumento abductivo. A partir de la aserción <i>DFCE</i> es paralelogramo y realizando una exploración, descubrió un hecho posible (dato) que es que el punto <i>E</i> pertenece a la circunferencia con centro en <i>A</i> y radio <i>AF</i> .	Epistémica	Ejemplificación de argumento abductivo
10	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-bottom: 10px; text-align: center;">       Teorema triangulo isósceles        Teorema suma de medidas de ángulos en triángulo        Criterio LAL     </div>  <p>[...] tuvimos problemas para esquematizar porque no sabíamos cómo colocar la garantía y no entendíamos cuál era la garantía para pasar exactamente del dato a la aserción.</p>	Epistémica	Esquema de un argumento abductivo

11		Epistémica	Esquema de un argumento abductivo
12	<p>Dadas las siguientes condiciones <math>\Delta ABC</math> y <math>\Delta DEC</math>, <math>2mDC = mAC</math> y <math>2mEC = mBC</math> ¿Qué condiciones debe cumplir el <math>\overline{DE}</math> para que <math>\Delta ABC \sim \Delta DEC</math>? Realice una construcción en un EGD y presenta una conjetura.</p>	Mediacional	Ejemplificación de enunciado de tarea que promueve argumentación abductiva
13	<p>Al proponer esta conjetura, el colega realizó un proceso argumentativo que lo llevó a producir un argumento abductivo teórico ya que no realizó ninguna exploración y se basó en su conocimiento previo.</p>	Epistémica	Tipos de argumentos abductivos
14	<p>En las dos exploraciones Andrés generó argumentos abductivos, dado que encontró dos hechos posibles para justificar la asección. Por ejemplo, el argumento abductivo de la primera exploración sería el siguiente:</p> <p>En la esquematización del argumento, encontramos que es un argumento abductivo subcodificado. Las garantías son diferentes y no están dentro de un mismo respaldo. Por lo tanto, este corresponde a la segunda forma de un argumento subcodificado como lo propone Pedemonte y Reid (2011).</p>	Epistémica	Esquema de un argumento abductivo

En la Tabla 6.1, encontramos 14 fragmentos tomados del Texto Narrativo Tres. Siete de ellos los hemos clasificado en la faceta mediacional y siete en la faceta epistémica. Aun cuando en este ciclo pretendíamos enfocarnos en el papel de los EGD y en el diseño de tareas para generar argumentos abductivos, los fragmentos que dan cuenta del cambio en nuestro conocimiento didáctico matemático no solo están enfocados en la faceta mediacional sino también en la faceta

epistémica. A continuación, describimos las razones por las cuales hemos asignado a cada fragmento la faceta indicada y el correspondiente descriptor.

A los fragmentos 1, 5 y 7, les asignamos el descriptor “Componentes del enunciado de una tarea para promover argumentación abductiva”. En el fragmento 1 buscamos en los escenarios documentales para identificar aspectos importantes para favorecer argumentos abductivos con ayuda de un EGD. Encontramos que debe haber un enunciado de una situación o problema, pero a la vez que este debe tener unas características específicas. En el fragmento 5, mencionamos un discurso propio sobre lo que entendíamos acerca de la caracterización de los enunciados producto del mapa conceptual elaborado en este ciclo. En el fragmento, hablamos específicamente sobre la solicitud o lo que dice el enunciado de un problema para llegar a inferir o inducir una propiedad durante el proceso de solución.

A los fragmentos 2 y 12, les asignamos el descriptor “Ejemplificación de enunciado de tarea que promueve argumentación abductiva”. En el fragmento 2, presentamos un ejemplo de enunciado de una situación que creíamos favorecía la argumentación abductiva. Al fragmento 12 le asignamos el mismo descriptor, porque estamos presentando una versión mejorada del ejemplo presentado en el fragmento 2. Este fragmento 12 tiene más explícita la información y se hace fácil para el resolutor entender la situación y así mismo elaborar argumentos abductivos.

A los fragmentos 3, 10, 11 y 14, les asignamos el descriptor “Esquema de argumento abductivo”. En estos fragmentos ponemos en práctica nuestro conocimiento didáctico matemático adquirido en los anteriores ciclos e intentamos dar evidencia del manejo de representaciones de argumentos abductivos en esquemas. En los fragmentos 11 y 14, presentamos un cambio en la representación, usando nuevos esquemas para algunas situaciones que no habíamos tenido en cuenta.

Al fragmento 4, le hemos asignado el descriptor “Relación entre los invariantes del arrastre mantenido y los elementos del argumento abductivo”. En este fragmento, producto de la revisión de literatura, mencionamos cómo opera el arrastre mantenido para provocar un argumento abductivo.



Al fragmento 6, le asignamos el descriptor “Establecimiento de relación entre un argumento y exploración” porque mencionamos que el proceso de exploración puede llegar a potenciar la producción de argumentos abductivos. Este fragmento es producto de la resolución de una situación en la que se pedía usar un EGD para observar si se promovían argumentos abductivos.

A los fragmentos 8 y 13, les asignamos el descriptor “Tipos de argumento abductivo”. En el fragmento 8 mencionamos que existe otro tipo de argumento abductivo que no habíamos tenido en cuenta en el anterior ciclo. En el fragmento 13, logramos identificar cómo se produce un argumento abductivo teórico gracias a la solución de una situación.

Al fragmento 9, le asignamos el descriptor “Ejemplificación de argumento abductivo”. En este fragmento mostramos un ejemplo de argumento abductivo acompañado del proceso. En esta ejemplificación buscábamos que un lector comprendiera cómo surge el argumento abductivo, dando a conocer aquellas características esenciales del proceso que nos llevan a construir un argumento.

#### **6.4.2 Comparaciones del conocimiento tablas de Ciclo 1 Ciclo 2 y Ciclo 3 referidos a los descriptores**

En esta sección hacemos una comparación de nuestro conocimiento didáctico matemático respecto a las facetas y descriptores, de acuerdo con los fragmentos extraídos de los tres ciclos. Para hacer esta comparación examinamos la Tabla 4.5 que tiene los fragmentos del Texto Narrativo Uno, la Tabla 5.1 que tiene los fragmentos correspondientes al Texto Narrativo Dos y la Tabla 6.1 que tiene los fragmentos del Texto Narrativo Tres.

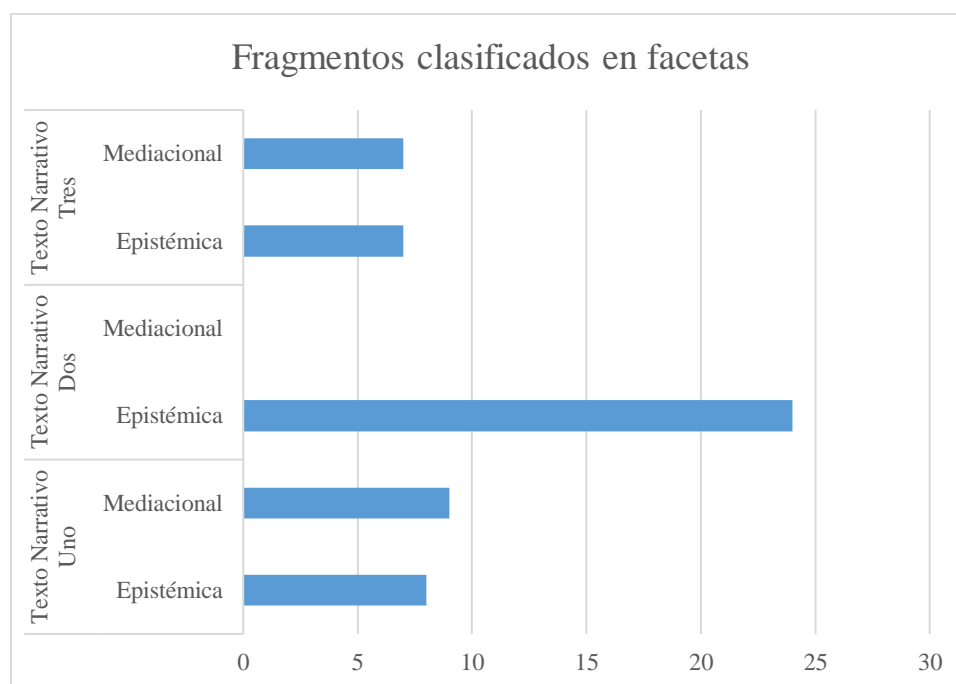
Para encontrar una relación entre la clasificación de las facetas en los tres ciclos y la cantidad de descriptores asignados en cada una, realizamos un gráfico de barras (ver Figura 6.1) que nos permite observar el comportamiento de asignación de descriptores en cada uno de los ciclos.

En el Texto Narrativo Uno, observamos que la asignación de facetas a los fragmentos es casi igual, ya que asignamos a la faceta epistémica 8 fragmentos y la faceta mediacional 9 fragmentos. En el Texto Narrativo Dos, a todos los fragmentos les asignamos descriptores de la faceta

epistémica, dado que en el Ciclo 2 proponíamos una fundamentación de argumento y argumento abductivo. En el Texto Narrativo Tres del Ciclo 3, pretendíamos enfocarnos en el diseño de tareas y el papel de los EGD para favorecer argumentos abductivos y pensábamos que todos los fragmentos iban a estar clasificados en la faceta mediacional. Sin embargo, en este texto narrativo les asignamos descriptores de la faceta mediacional a 7 fragmentos y descriptores de la faceta epistémica también a 7 fragmentos.

### Figura 6.1

*Diagrama de comparación facetas entre ciclos*



Al realizar una comparación de los descriptores asignados los fragmentos en el Ciclo 1 y Ciclo 3, no encontramos alguno en común. Esto ocurrió porque en el Ciclo 1, la transformación de nuestro conocimiento se dirigió al diseño de tareas de geometría en general ¿y? a la importancia del uso de los EGD en la solución de una tarea. En cambio, en el Ciclo 3, la investigación se dirigió a la transformación de nuestro conocimiento específicamente sobre el uso de los EGD para diseñar tareas que promuevan la argumentación abductiva.

Entre los fragmentos del Ciclo 2 y los fragmentos del Ciclo 3, encontramos los siguientes descriptores en común, “Tipos de argumento abductivo” y “Ejemplificación de argumento abductivo o reformulación de ejemplo”. Estos descriptores nos dan a entender que en el proceso de desarrollo del Plan de acción del Ciclo 3 adquirimos nuevos conocimientos que no habíamos alcanzado en el Ciclo 2. No encontramos más descriptores en común dado que en el Ciclo 2 buscábamos una transformación de nuestro conocimiento respecto de la faceta epistémica, mientras en el Ciclo 3 pretendíamos profundizar en la faceta mediacional.

#### **6.4.3 Cambios en el conocimiento didáctico matemático que se aprecian en el Texto Narrativo Tres, fruto de la implementación del plan acción**

Para determinar los cambios en el conocimiento didáctico matemático en el Ciclo 3, tomamos fragmentos a los que hubiéramos asignado el mismo descriptor en la Tabla 6.1. La comparación se realizó de la siguiente manera: asignamos un rótulo basados en la herramienta analítica propuesta por Strauss y Corbin (2002) y describimos los cambios en nuestro conocimiento didáctico matemático.

##### ***Respecto del descriptor “Componentes del enunciado de una tarea para promover argumentación abductiva”***

En la caracterización del conocimiento didáctico matemático a partir del Texto narrativo Tres, encontramos tres fragmentos a los que asignamos el descriptor “componentes del enunciado de una tarea para promover argumentación abductiva”. Usamos la herramienta rotulación para encontrar formas de comparación entre lo dicho como se muestra en la Tabla 6.2.

#### **Tabla 6.2**

*Fragmentos rotulados con la asignación del descriptor “Componentes del enunciado de una tarea para promover argumentación abductiva”*

Fragmento 1	[...] para favorecer argumentos abductivos con ayuda de un EGD [ <i>EGD-Ayuda</i> ] es importante la forma como se presenta el enunciado de la tarea, el problema o la situación que se propone a los estudiantes. Ellos [Molina y Samper, 2019] mencionan que en el enunciado de la situación se debe incluir la propiedad que constituiría la aserción [ <i>Aserción-Propiedad</i> ] de un argumento que se quiere justificar y una pregunta sobre las posibles propiedades que pueden causarla [ <i>Justificación – Causa</i> ].
-------------	---

Fragmento 5	[...] [para] promover argumentos abductivos [...] el enunciado [de la tarea] debe tener una caracterización particular, específicamente en la forma cómo se presenta al resolutor, porque debe incluir unos elementos esenciales. En el enunciado debe estar explícita la conclusión [ <i>Aserción-Conclusión</i> ] y debe preguntarse por unos hechos de los que se podría inferir la conclusión [ <i>Hechos-Inferir</i> ]. Estos elementos están relacionados con la aserción y posibles datos de un argumento abductivo.
Fragmento 7	[...] [en la resolución de un problema] si intencionalmente se induce una propiedad, [es porque] existe algo en el enunciado [del problema] que invita a inducirlo. Entonces, hay una cierta coincidencia en las propuestas [de Baccaglioni (2011) y Pedemonte (2011)] porque [según ellas] se debería tener en cuenta la solicitud expresa del enunciado para inducir una propiedad. De esta manera el enunciado debe invitar a realizar una construcción en el EGD que permita la exploración por medio del arrastre [ <i>EGD-Construcción-Arrastre</i> ]. Además, el enunciado debe pedir que se explore y se determinen ciertas condiciones [ <i>Justificación-Condiciones</i> ] para que se cumpla una propiedad que se hace explícita [ <i>Aserción-Propiedad</i> ].

En cuanto al cambio en nuestro conocimiento didáctico matemático sobre componentes del enunciado de una tarea para promover argumentación abductiva, este corresponde a la manera como mencionamos los componentes. Con respecto al rótulo **EGD** en el fragmento 1, estamos mencionando que para favorecer argumentos abductivos necesitamos *Ayuda* del recurso, pero no explicamos cómo debería ser abordado, mientras que en el fragmento 7 sí profundizamos en el uso del EGD, mencionando la *Construcción* geométrica y los procesos de exploración mediados por la herramienta arrastre. En este sentido observamos un cambio en nuestro conocimiento porque entendemos de mejor manera cómo proponer situaciones en un EGD.

En relación con el rótulo **Justificación**, en los tres fragmentos mencionamos cómo armar la justificación (dato). En el fragmento 1 mencionamos que es una propiedad la cual es la *Causa*, en el fragmento 5 estamos considerando por los **Hechos** de los que se puede inferir la aserción; mientras que en el fragmento 7, cuando concretamos esta idea en un mapa conceptual, hablamos de las *Condiciones*. Entre el fragmento 1 y 5, hay un cambio significativo en el papel que juega el dato, porque se asume que los hechos son esas causas llevan a inferir la aserción. En cambio, en el fragmento 7, volvemos a decir que son condiciones para que se cumpla la propiedad.

Respecto al rótulo **Aserción**, en los tres fragmentos mencionamos que en un argumento esta debe estar explícita. En el fragmento 1, nos fijamos en que debía estar explícita una *Propiedad*, que sería la proposición que se va a justificar, pero cuando hicimos la síntesis de lo leído (fragmento 5) solamente nos referimos a que debía haber una aserción o *Conclusión*, pero sin decir que esta

debía ser una propiedad, lo cual podría ser impreciso. En el fragmento 7, volvimos a considerar nuevamente la naturaleza de la aserción incluyendo que debía ser una *Propiedad*.

***Respecto del descriptor “Ejemplificación de enunciado de tarea que promueve argumentación abductiva”***

En la caracterización de nuestro conocimiento didáctico matemático a partir del Texto Narrativo Tres, asignamos a dos fragmentos de la faceta mediacional el descriptor “Ejemplificación de enunciado de tarea que promueve argumentación abductiva”. Con el fin de realizar una comparación entre ellos, usamos los rótulos **Condiciones** y **Conjeturar**, como se muestra en la Tabla 6.3.

**Tabla 6.3**

*Fragmentos rotulados con la asignación del descriptor “Ejemplificación de enunciado de tarea que promueve argumentación abductiva”*

Fragmento 2	[...] enunciado como pregunta para una tarea “Sean $mAB = 2mCD$ [ <b>Condiciones-Incompletas</b> ]. ¿Es posible determinar una condición para el $\overline{CD}$ tal que $\triangle ABE$ y $\triangle CDE$ sean semejantes? Provea una conjetura y demuéstrela [ <b>Conjeturar-Validar</b> ]”.
Fragmento 12	Dadas las siguientes condiciones $\triangle ABC$ y $\triangle DEC$ , $2mDC = mAC$ y $2mEC = mBC$ [ <b>Condiciones-Completas</b> ]; ¿Qué condiciones debe cumplir el $\overline{DE}$ para que $\triangle ABC \sim \triangle DEC$ ? Realice una construcción en un EGD y presenta una conjetura [ <b>Explorar - Conjeturar</b> ]”.

En cuanto al cambio en nuestro conocimiento didáctico matemático sobre los enunciados que promueven argumentación abductiva, encontramos uno respecto de las **Condiciones**. En el fragmento 2 las condiciones presentadas están incompletas, mientras que en el fragmento 12 las condiciones están completas. El hecho de que las condiciones en el enunciado estén completas (fragmento 12) favorece procesos de exploración, porque queda más clara la representación y el resolutor se puede conducir de manera más eficiente el proceso. Además, notamos un cambio en nuestro conocimiento didáctico matemático en cuanto a lo que se pide en el enunciado. En el fragmento 2 se pide proveer una **Conjetura** y demostrar; en el fragmento 12 se pide realizar una construcción y realizar una **Conjetura**. En este caso nos damos cuenta que la argumentación abductiva se da en el marco de un proceso exploratorio que busca llegar únicamente a la conjetura, más no busca su demostración.

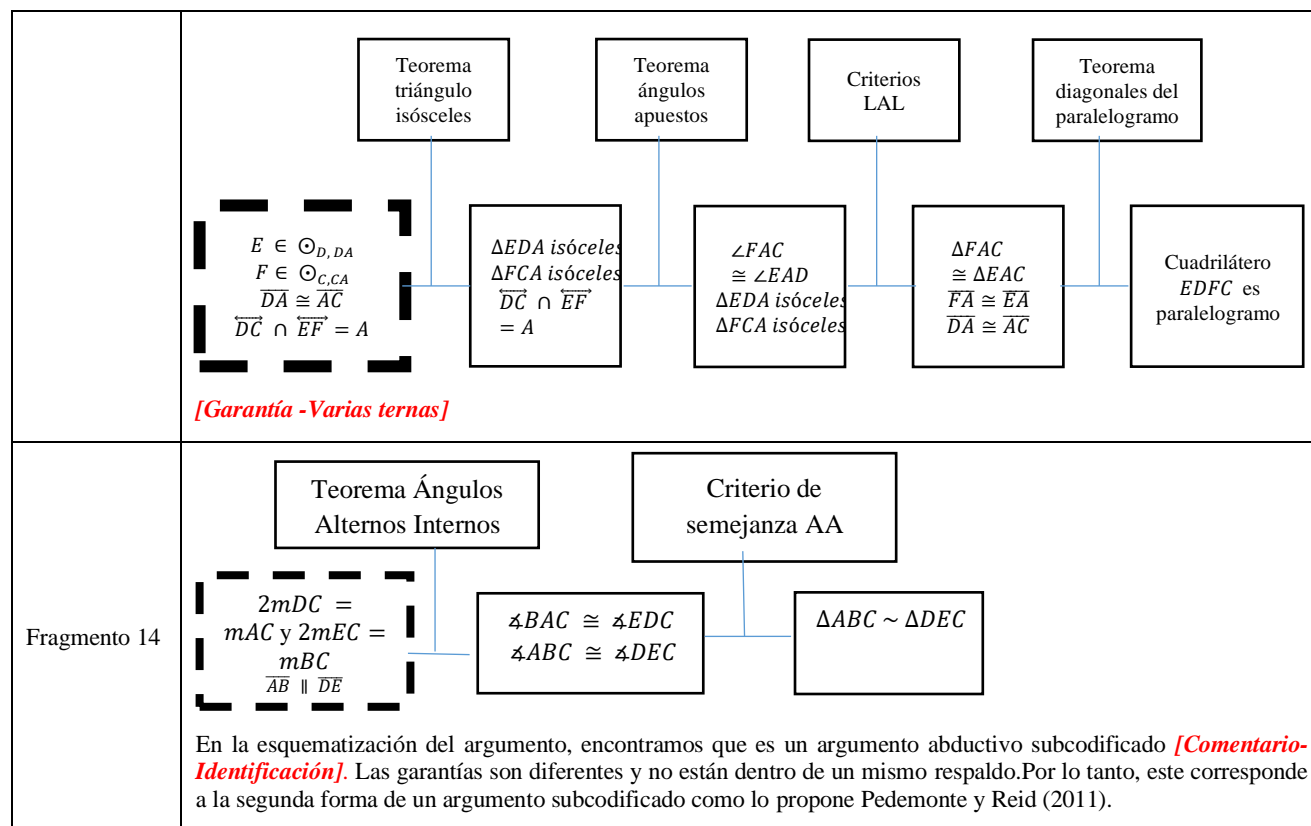
**Respecto del descriptor “Esquema de argumento abductivo”**

En la caracterización de nuestro conocimiento didáctico matemático en el Texto Narrativo Tres, encontramos cuatro fragmentos en la faceta epistémica a los que le asignamos el descriptor “Esquema de argumento abductivo”. En la Tabla 6.4, presentamos los fragmentos con la respectiva rotulación para evidenciar cambios en nuestro conocimiento.

**Tabla 6.4**

*Fragmentos rotulados con la asignación del descriptor “Esquema de argumento abductivo”*

Fragmento 3	<div style="text-align: center;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-bottom: 10px;">           Definición de circunferencia            Teorema fundamental de la proporcionalidad            Teorema de semejanza de triángulos  <b>[Garantía- Una terna]</b> </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="border: 2px dashed black; padding: 10px; text-align: center;"> <math>mAB = 2mCD</math>  <math>C \in \odot_{E,EA/2}</math>  <math>D \in \odot_{E,EB/2}</math> </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 10px; text-align: center;"> <math>\Delta ABE \sim \Delta CDE</math> </div> </div> </div>
Fragmento 10	<div style="text-align: center;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-bottom: 10px;">           Teorema triángulo isósceles            Teorema suma de medidas de ángulos en triángulo            Criterio LAL  <b>[Garantía- Una terna]</b> </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="border: 2px dashed black; padding: 10px; text-align: center;"> <math>E \in \odot_{C,CD}</math> </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 10px; text-align: center;"> <math>DFCE</math> es paralelogramo         </div> </div> <p>[...] tuvimos problemas para esquematizar porque no sabíamos cómo colocar la garantía y no entendíamos cuál era la garantía para pasar exactamente del dato a la aserción <b>[Comentario-Reflexión]</b>.</p> </div>
Fragmento 11	<p>La garantía que mencionamos permite llegar a una conclusión que se convierte en una nueva condición para buscar otra posible conclusión. Lo anterior intentamos representarlo de la siguiente manera <b>[Comentario-Propuesta]</b></p>



Primero comparamos los fragmentos 3 y 11 con respecto a los fragmentos 12 y 14. En los fragmentos 3 y 11 incluimos todas las garantías dentro de *Una terna*, con la idea de que en un esquema de argumento abductivo solo se podía colocar una terna (dato, asección y garantía); pero en los fragmentos 12 y 14 nos dimos cuenta que podemos representar un proceso argumentativo en el que se encadenan *Varias ternas* de argumentos abductivos.

Una segunda comparación se hizo respecto al **Comentario** que acompaña el esquema, porque nos permite ver cómo se fue transformando nuestro conocimiento didáctico matemático sobre el esquema de un argumento abductivo. En el fragmento 3 no nos preocupamos por revisar las garantías. Por tanto, no mencionamos ningún comentario. En el fragmento 11, el comentario incluye una *Reflexión* que problematiza el esquema que acompaña, porque ya habíamos mencionado que la garantía es la que legitima el puente entre el dato y la asección. En el fragmento estábamos incluyendo tres hechos geométricos y esto no necesariamente permite legitimar un puente entre el dato y la asección. En el fragmento 12, después de una revisión

bibliográfica, decidimos realizar una *Propuesta* de esquema, que consistía en colocar tres argumentos encadenados. En el fragmento 14, encontramos que Pedemonte y Reid (2011) *Identifican* y definen esta clase de argumentos como argumentos abductivos subcodificados.

#### **6.4.4 Cambios identificados en nuestro conocimiento didáctico matemático entre el Ciclo 1, el Ciclo 2 y el Ciclo 3**

A continuación, analizamos los cambios que se hacen evidentes en nuestro conocimiento didáctico matemático siguiendo el mismo procedimiento realizado en el Capítulo 5, sección 5.4.4. Revisamos y tomamos fragmentos correspondientes al mismo descriptor o fragmentos que aludan a un mismo tema, derivados del análisis del Ciclo 1, Ciclo 2 y Ciclo 3 y realizamos el siguiente procedimiento: hicimos uso de las herramientas analíticas de rotulación propuestas por Strauss y Corbin (2002) para marcar y rotular partes de la enunciación que nos dejan ver cambios en nuestro conocimiento didáctico matemático; y realizamos la comparación que nos permita evidenciar cualidades o propiedades para poner de manifiesto los cambios. En lo que sigue, presentamos el análisis por temas o descriptores.

##### ***Respecto a la temática relación entre un argumento y exploración***

En la caracterización del conocimiento didáctico matemático, respecto de argumento y exploración, en los Ciclos 1 y 3 encontramos dos fragmentos con descriptores similares: un fragmento al que le asignamos como descriptor “Caracterización de procesos en un EGD” un fragmento con el descriptor “Establecimiento de relación entre argumento y exploración”. En la Tabla 6.5 presentamos los fragmentos y su rotulación para encontrar cambios en nuestro conocimiento.

**Tabla 6.5**

*Fragmentos rotulados respecto al establecimiento de relación entre un argumento y exploración*

Ciclo 1	[...] un EGD permite que los estudiantes usen herramientas para la exploración [ <i>Exploración-Argumentación-Independencia</i> ], la construcción y el descubrimiento de propiedades de los objetos geométricos, así mismo el de favorecer procesos de argumentación.
Ciclo 3	[...] promover procesos de argumentación y argumentos abductivos, nos podemos valer de recursos como los EGD, que suscitan procesos de exploración. [ <i>Exploración-Argumentación-Dependencia</i> ]



En cuanto al cambio en nuestro conocimiento didáctico matemático sobre la relación entre argumento y exploración, en el Ciclo 1 mencionamos que los EGD permiten usar herramientas de **Exploración** y realizar procesos de **Argumentación**. En este caso creíamos que estos dos procesos eran *Independientes* y que no tenían algún tipo de relación, como si por un lado estuviera la exploración y el descubrimiento y por el otro lado estuviera la argumentación. En el Ciclo 3 establecimos una posible *Dependencia* entre **Exploración** y **Argumentación**, porque durante los procesos de exploración se pueden provocar argumentos, más específicamente del tipo de argumento en el que nos enfocamos en este trabajo de grado (argumentos abductivos).

### ***Respecto al descriptor “Tipos de argumento abductivo”***

En la caracterización de nuestro conocimiento didáctico matemático, respecto al descriptor “Tipos de argumento abductivo” encontramos un fragmento en el Ciclo 2 y otro en el Ciclo 3. Con el fin de realizar una comparación entre ellos, usamos el rótulo **Cantidad** acompañado de una palabra diferenciadora, como se muestra en la Tabla 6.6.

**Tabla 6.6**

*Fragmentos rotulados respecto al descriptor “Tipos de argumento abductivo”*

Ciclo 2	<p>[...] existen dos [tipos de argumento abductivo]: teórico y creativo [<b>Cantidad- Dos tipos argumentos abductivos</b>].</p> <p>Un argumento abductivo teórico se establece cuando a partir de la conclusión se infiere el dato y lo respalda una regla general que está avalada por la comunidad y se reconoce como proposición verdadera, elegida en una exploración teórica.</p> <p>Un argumento abductivo creativo se establece cuando a partir de la conclusión se infiere un posible dato y se inventa una regla hipotética que proviene de una exploración empírica.</p>
Ciclo 3	<p>[...] mencionamos que un argumento abductivo puede ser creativo, teórico o subcodificado [<b>Cantidad- Tres tipos argumentos abductivos</b>].</p> <p>Un argumento abductivo teórico se establece cuando a partir de la conclusión se infiere el dato y lo respalda una regla general que está avalada por la comunidad y se reconoce como proposición verdadera, elegida en una exploración teórica.</p> <p>Un argumento abductivo creativo se establece cuando a partir de la conclusión se infiere un posible dato y se inventa una regla hipotética que proviene de una exploración empírica. Un argumento abductivo subcodificado es cuando a partir de la conclusión se infiere un dato y lo respalda un conjunto de reglas.</p>

Respecto al cambio en nuestro conocimiento didáctico matemático sobre los tipos de argumento abductivo asignamos el rótulo **Cantidad**, porque en el Ciclo 3 encontramos otro tipo de

argumento abductivo. En cuanto a las definiciones de argumento abductivo teórico y creativo no encontramos cambio alguno; las mismas formulaciones que teníamos en el Ciclo 2 aparecen en el Ciclo 3. Aun así, notamos un nuevo cambio, porque aparece un nuevo tipo de argumento abductivo que conocemos como argumento abductivo subcodificado.

***Respecto al descriptor “Ejemplificación de argumento abductivo o reformulación de ejemplo”***

En la caracterización de nuestro conocimiento didáctico matemático, respecto al descriptor “Ejemplificación de un argumento abductivo” encontramos dos fragmentos, uno en el Ciclo 2 y otro en el Ciclo 3. A continuación, en la tabla 6.7, presentamos los dos fragmentos y usamos el rótulo **Argumento** acompañado de una palabra diferenciadora para encontrar cambios en nuestro conocimiento didáctico matemático.

**Tabla 6.7**

*Fragmentos rotulados respecto al descriptor “Ejemplificación de argumento abductivo o reformulación de ejemplo”*

Ciclo 2	El cuadrilátero $ABCD$ tiene un ángulo recto. Posiblemente sea un rectángulo por el teorema que afirma que, si un cuadrilátero tiene tres ángulos rectos, es rectángulo [ <b>Argumento-Sin proceso</b> ].
Ciclo 3	[...] Andrés entró en un proceso argumentativo que lo llevó a producir un argumento abductivo. A partir de la aserción $DFCE$ es paralelogramo y realizando una exploración, descubrió un hecho posible (dato) que es que el punto $E$ pertenece a la circunferencia con centro en $A$ y radio $AF$ [ <b>Argumento- Con proceso</b> ].

En cuanto al cambio en nuestro conocimiento didáctico matemático sobre “Ejemplificación de argumento abductivo o reformulación de ejemplo”, en el Ciclo 2 lo único que nos daba indicio de que el argumento era abductivo eran las palabras “tiene un ángulo recto y posiblemente sea”. Este argumento no viene acompañado de un proceso (*Sin proceso*). En el Ciclo 3 es más claro el por qué dicha formulación corresponde a un argumento abductivo, ya que hay una descripción del argumento acompañado del proceso **argumentativo** (*Con proceso*).

## 7. Resultados y conclusiones

En este capítulo presentamos los resultados y conclusiones de esta investigación. A continuación, presentamos una sección de resultados y otra de conclusiones.

### 7.1 Resultados

En lo que sigue, presentamos los resultados de nuestro trabajo de grado, fruto del análisis realizado en cada uno de los ciclos expuestos en los capítulos precedentes. Primero mostramos las facetas del CDM en las que nos centramos y sus descriptores. Segundo, señalamos los principales cambios al interior de cada ciclo en relación con el plan acción. Tercero, mencionamos los cambios entre ciclos en relación con el plan de acción. Cuarto, hacemos una comparación de los rótulos más usados en el análisis.

#### Facetas del CDM

Respecto a las facetas del CDM en la dimensión didáctica, en la Tabla 7.1 se encuentran las facetas mencionadas en cada uno de los ciclos, en donde hubo algún trabajo relacionado con nuestro conocimiento didáctico matemático.

**Tabla 7.1**

*Facetas y descriptores asignados en fragmentos en cada uno de los ciclos*

FACETAS	Ciclo 1	Ciclo 2	Ciclo 3
Epistémica	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Propuesta de definición de argumentación</li> <li>• Relación entre argumentación y razonamiento</li> <li>• Diferenciación entre argumentación y demostración</li> <li>• Propuesta de definición de argumento</li> <li>• Establecimiento de relación entre argumento y argumentación</li> <li>• Propósito del argumento.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Propuesta de definición de argumento.</li> <li>• Propósito de argumento.</li> <li>• Caracterización de los elementos de un argumento</li> <li>• Ejemplo de argumento</li> <li>• Identificación de los elementos en un argumento</li> <li>• Reformulación de identificación de los elementos en un argumento</li> <li>• Esquematización de un argumento</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Esquema de un argumento abductivo</li> <li>• Diferenciación de tipos de argumento abductivo.</li> <li>• Ejemplo de argumento abductivo</li> </ul>

	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Establecimiento de relación entre argumento y demostración</li> <li>• Establecimiento de relación entre argumento y razonamiento</li> <li>• Establecimiento de relación entre argumento y prueba</li> <li>• Interpretación de la estructura de un argumento</li> <li>• Caracterización de los elementos de un argumento</li> <li>• Propuesta de definición de argumento abductivo</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Propuesta de definición de argumento abductivo</li> <li>• Proceso de argumentación que da origen a un argumento abductivo</li> <li>• Diferenciación de tipos de argumento abductivo</li> <li>• Esquematización de tipos de argumento abductivo</li> <li>• Reformulación de ejemplo de argumento</li> <li>• Ejemplo de argumento abductivo</li> <li>• Comparación entre argumento abductivo con otros argumentos</li> <li>• Reformulación de ejemplo de argumento abductivo</li> <li>• Valoración de propuestas definiciones de argumento</li> </ul>	
Mediacional	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Principios de tareas que buscan promover la argumentación</li> <li>• Criterios para diseñar tareas de argumentación</li> <li>• Diferenciación entre tipos de construcciones geométricas en un EGD</li> <li>• Caracterización de tareas que favorecen la argumentación.</li> <li>• Caracterización del proceso de exploración en EGD</li> </ul>		<ul style="list-style-type: none"> <li>• Componentes del enunciado de una tarea para promover argumentación abductiva</li> <li>• Ejemplificación de enunciado de tarea que promueve argumentación abductiva</li> <li>• Relación entre los invariantes del arrastre mantenido y los elementos del argumento abductivo</li> </ul>

Como se puede apreciar globalmente en la Tabla 7.1, los esfuerzos que hicimos en este trabajo de grado se centraron en promover transformaciones en nuestro conocimiento didáctico matemático principalmente en la faceta epistémica. En la caracterización de nuestro conocimiento, encontramos el mismo descriptor en diferentes ciclos, lo que nos permite identificar un cambio en nuestro conocimiento. Cotejando la cantidad de descriptores establecidos en la Tabla 2.1 con la cantidad de descriptores asignados como se muestra en la Tabla 7.1, podemos afirmar que insistimos en mejorar nuestro conocimiento didáctico matemático en ciertos asuntos importantes de la faceta epistémica como argumento y argumento abductivo. En la faceta mediacional no

usamos el mismo descriptor en dos o más ciclos, pero sí en el mismo ciclo. Esto nos permite evidenciar que ahondamos en asuntos no considerados en ciclos anteriores.

Respecto a la faceta epistémica y el componente argumento, los descriptores que principalmente asignamos fueron los siguientes:

**Tabla 7.2**

*Descriptores asignados relacionados a argumento*

Ciclo 1	Ciclo 2	Ciclo 3
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Propuesta de definición de argumento</li> <li>• Establecimiento de relación entre argumento y argumentación</li> <li>• Propósito de un argumento</li> <li>• Establecimiento de relación entre argumento y demostración</li> <li>• Establecimiento de relación entre argumento y razonamiento</li> <li>• Establecimiento de relación entre argumento y prueba</li> <li>• Interpretación de estructura de un argumento</li> <li>• Caracterización de los elementos de un argumento</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Propuesta de definición de argumento</li> <li>• Propósito de argumento</li> <li>• Caracterización de los elementos de un argumento</li> <li>• Ejemplo de argumento</li> <li>• Identificación de los elementos en un argumento</li> <li>• Reformulación de identificación de los elementos en un argumento</li> <li>• Esquematización de un argumento</li> <li>• Valoración de propuestas definiciones de argumento</li> </ul>	

En el análisis pudimos evidenciar que hubo una transformación de nuestro conocimiento respecto a los descriptores “Propuesta de definición de argumento”, “Propósito de un argumento” y “Caracterización de los elementos de un argumento”. Este resultado demuestra que cumplimos el plan de acción del Ciclo 2, dado que la primera acción era construir una interpretación compartida de lo que entendíamos por argumento y por elementos de un argumento.

Además, en el Ciclo 2 ahondamos en asuntos que tienen que ver con los descriptores: “Ejemplo de argumento”, “Identificación de los elementos en un argumento”, “Reformulación de identificación de los elementos en un argumento”, “Esquematización de un argumento” y “Valoración de propuestas definiciones de argumento”. Esto deja ver que profundizamos en otros asuntos sobre argumento. No retomamos la relación entre argumento y otros procesos.

Respecto a la faceta epistémica y el componente argumento abductivo, los descriptores que principalmente asignamos fueron los siguientes:

**Tabla 7.3**

*Descriptores asignados relacionados a argumento abductivo*

Ciclo 1	Ciclo 2	Ciclo 3
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Propuesta de definición de argumento abductivo</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Propuesta de definición de argumento abductivo</li> <li>• Proceso de argumentación que da origen a un argumento abductivo</li> <li>• Diferenciación de tipos de argumento abductivo</li> <li>• Esquematización de tipos de argumento abductivo</li> <li>• Ejemplo de argumento abductivo</li> <li>• Comparación entre argumento abductivo con otros argumentos</li> <li>• Reformulación de ejemplo de argumento abductivo</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Esquema de un argumento abductivo</li> <li>• Diferenciación de tipos de argumento abductivo</li> <li>• Ejemplo de argumento abductivo</li> </ul>

En relación con la argumentación abductiva, asignamos ocho descriptores (ver Tabla 7.3). La mayoría de estos descriptores fueron asignados en el Ciclo 2 porque, según el plan de acción de este ciclo, buscábamos fundamentar nuestro conocimiento didáctico matemático sobre los argumentos abductivos. Asimismo, en el Ciclo 3 asignamos descriptores relacionados a la argumentación abductiva, dado que vimos necesario ampliar la fundamentación.

### **Cambios al interior de cada Ciclo, producto de los Planes de acción**

Respecto a los cambios al interior de cada Ciclo y la relación con los planes de acción, en la Tabla 7.4, presentamos el descriptor donde hubo un cambio al interior de un ciclo y las tareas o acciones que permitieron transformaciones en nuestro conocimiento didáctico matemático.

En el Ciclo 1, evidenciamos un cambio en nuestro conocimiento, gracias al plan de acción propuesto por los profesores de la Maestría, quienes proveyeron una fundamentación sobre la argumentación y buscaron involucrarnos en una transformación del conocimiento didáctico matemático acerca de cómo favorecerla, usando EGD y a través de tareas diseñadas para ello.

**Tabla 7.4**

*Cambios al interior de cada Ciclo y relación con el plan de acción*

<b>Cambios al interior</b>	<b>Faceta</b>	<b>Descriptor</b>	<b>Acciones previstas en los planes de acción</b>
<b>Ciclo 1</b>	Epistémica	Respecto de la temática sobre argumentación y argumento	Participar en el curso de Profundización en Matemáticas Elementales
		Relación entre argumentación y demostración	Participar en el curso de Profundización en Matemáticas Elementales
	Mediacional	Caracterización de tareas de promuevan argumentación	Participar en el curso de Diseño y Desarrollo Curricular.
<b>Ciclo 2</b>	Epistémica	Caracterización de los elementos de un argumento (Parte 1)	Interpretar y usar las definiciones de otros autores y elaborar una propuesta propia de definición de los elementos de argumento.
		Caracterización de los elementos de un argumento (Parte 2)	Preparar un curso corto dirigido a un grupo de profesores de la Escuela Pedagógica Experimental.
		Ejemplo de argumento o reformulación de ejemplo de argumento Conectores usados en la escritura de un argumento	Usar nuestra propia definición de argumento y preparar un curso corto dirigido a un grupo de profesores de la Escuela Pedagógica Experimental.
<b>Ciclo 3</b>	Mediacional	Componentes del enunciado de una tarea para promover argumentación abductiva	Elaborar un mapa conceptual sobre el papel de los EGD para promover argumentos abductivos.
		Ejemplificación de enunciado de tarea que promueve argumentación abductiva	Diseñar y aplicar ejercicios exploratorios.
	Epistémica	Esquema de argumento abductivo	Diseñar y aplicar ejercicios exploratorios.

En el Ciclo 1, evidenciamos un cambio en nuestro conocimiento, gracias al plan de acción propuesto por los profesores de la Maestría. En el Ciclo 2, logramos un cambio en nuestro conocimiento didáctico matemático gracias a la forma en como organizamos el plan de acción de este ciclo. Con respecto al descriptor “Caracterización de los elementos de un argumento”, al realizar una revisión de literatura y generar una propuesta de definición de los elementos de un argumento, logramos complementar el conocimiento adquirido como parte del desarrollo del primer ciclo. Al preparar el curso corto para nuestros compañeros, nos dimos cuenta que algunos conocimientos adquiridos sufrieron cambios. Respecto de los descriptores “Ejemplo de argumento o reformulación de ejemplo de argumento” y “Conectores usados en la escritura de un

argumento”, en el desarrollo de la acción de poner en uso las definiciones planteadas por autores como (Carvajal, Martínez, Valverde, (2019) y Molina y Samper (2019) y la definición propia, propusimos un enunciado que creíamos que era un argumento porque usamos la definición. Pero en la acción de preparar un curso corto, nos dimos cuenta que no solo debíamos elaborar un ejemplo de argumento ligado a la definición, sino que fue necesario realizar otras acciones como buscar ejemplos de otros autores (Lara y Samper, 2014), participar en un curso corto dirigido por un grupo de compañeros de la Maestría para mejorar nuestro conocimiento didáctico matemático.

En el Ciclo 3, obtuvimos un cambio en nuestro conocimiento didáctico matemático gracias a las tareas que nos propusimos abordar en este ciclo, respecto al descriptor “Componentes del enunciado de una tarea para promover argumentación abductiva”. El cambio se refirió en cuanto a la forma como interpretamos las ideas establecidas por los autores revisados. En relación con el descriptor “Ejemplificación de enunciado de tarea que promueve argumentación abductiva” afirmamos que hubo una transformación en nuestro conocimiento gracias al desarrollo de una acción del plan.

Teniendo en cuenta el descriptor “Esquema de argumento abductivo” podemos afirmar que el plan de acción no se cumplió siempre de manera lineal, puesto que, en este caso, al estar desarrollando la tercera acción del plan del Ciclo 3, retomamos la primera acción que consistía en realizar una fundamentación. Sin embargo, de manera global podemos decir que la transformación del conocimiento, al interior de cada ciclo es producto de las acciones planteadas, y la forma en como estas se encadenen.

### **Cambios entre ciclos**

Respecto a cambios entre ciclos y relación con el plan de acción, en la Tabla 7.5, presentamos los descriptores donde hubo cambio entre ciclos y las tareas o acciones que permitieron esta transformación de conocimiento didáctico matemático.



**Tabla 7.5***Cambios entre ciclos y relación con el plan de acción*

<b>Cambios entre ciclos</b>	<b>Faceta</b>	<b>Descriptor</b>	<b>Tareas - acción</b>
<b>Ciclo 1-Ciclo 2</b>	Epistémica	Propuesta de definición de argumento	Participar en el curso de Profundización en Matemáticas Elementales y elaborar una propuesta propia de definición de argumento.
		Propósito de argumento	Participar en el curso de Profundización en Matemáticas Elementales y elaborar una propuesta propia de definición de argumento.
		Caracterización de los elementos de un argumento	Participar en el curso de Profundización en Matemáticas Elementales y elaborar una propuesta propia de definición de elementos de argumento.
		Propuesta de definición de argumento abductivo	Participar en el curso de Profundización en Matemáticas Elementales e interpretar y usar las definiciones de otros autores.
<b>Ciclo 1-Ciclo 3</b>	Epistémica	Respecto a la temática relación entre un argumento y exploración	Participar en el curso de Profundización en Matemáticas Elementales y elaborar un mapa conceptual sobre el papel de los EGD para promover argumentos abductivos.
<b>Ciclo 2-Ciclo 3</b>	Epistémica	Tipos de argumento abductivo	Interpretar y usar las definiciones de otros autores y diseñar y aplicar ejercicios exploratorios.
		Ejemplificación de un argumento abductivo	Preparar un curso corto dirigido a un grupo de profesores de la Escuela Pedagógica Experimental y diseñar y aplicar ejercicios exploratorios.

Es importante mencionar que los cambios evidenciados entre ciclos solo corresponden a la faceta epistémica. En lo que sigue describimos como fue este cambio.

Entre el Ciclo 1 y Ciclo 2, encontramos cambios respecto de los siguientes descriptores “Propuesta de definición de argumento”, “Propósito de argumento”, “Caracterización de los elementos de un argumento” y “Propuesta de definición de argumento abductivo”. En el Ciclo 1 encontramos menciones que provenían de los seminarios de la Maestría, mientras que en el Ciclo 2 estas menciones son elaboraciones propias que tienen en cuenta aspectos en los que debíamos profundizar de manera específica. La acción de formular una interpretación compartida de la definición de argumentos y de la definición de los elementos de un argumento nos permitió tener más claro qué aspectos debíamos profundizar.

Entre el Ciclo 1 y Ciclo 3, encontramos un cambio en nuestro conocimiento respecto de la relación entre argumento y exploración. Este cambio se dio, gracias al plan de acción del Ciclo 3, en el cual realizamos una fundamentación acerca del uso de los EGD. Elaborar el mapa conceptual nos permitió entender que favorecer la producción de argumentos específicamente abductivos, viene acompañado de incluir un proceso de exploración en las tareas propuestas.

Entre el Ciclo 2 y el Ciclo 3, encontramos cambios respecto a los descriptores “Tipos de argumento abductivo” y “Ejemplificación de un argumento abductivo”. Con relación al descriptor “Tipos de argumento abductivo”, el cambio de conocimiento en el Ciclo 3 tuvo lugar al tratar de realizar la esquematización de un argumento abductivo y de uno en especial que no habíamos tenido en cuenta. Fundamentarnos en los tipos de argumentos abductivos no estaba dentro de las acciones del plan de acción del Ciclo 3, pero sí estaba dentro la fundamentación que debimos hacer en el Ciclo 2. En caso de que surja la necesidad de profundizar en aspectos ya abordados es bueno retomarlos y fundamentarlos.

Con respecto al descriptor “Ejemplificación de un argumento abductivo” podemos afirmar que realizar ejercicios exploratorios de situaciones geométricas que promovieran argumentos abductivos con apoyo de EGD, nos permitió diferenciar de una manera más específica un argumento abductivo. Dado el conocimiento adquirido, esto nos permitió tener más claridad sobre argumento, argumentación, argumentación abductiva, con el propósito de que sirvan como apoyo para el diseño de tareas mediadas por EGD.

### **Respecto de los rótulos**

Al realizar una comparación entre los rótulos utilizados, notamos que hay tres rótulos que fueron usados con más frecuencia al realizar el análisis. Dichos rótulos son Naturaleza, Especificidad y Garantía. Los rótulos Naturaleza y Especificidad fueron usados con más frecuencia ya que queríamos resaltar aspectos importantes de fragmentos correspondientes a la faceta epistémica, a los que asignamos los descriptores “Propuesta de definición de argumento”, “Propuesta de definición de argumentación” y “Caracterización de los elementos de un argumento”. Con el fin de realizar una comparación entre la naturaleza de las partes de los fragmentos, usamos el

segundo rótulo asignado a cada uno de ellos, el cual nos permitía realizar dichas comparaciones. El rótulo Garantía lo usamos al querer caracterizar aspectos importantes de fragmentos correspondientes a la faceta epistémica, asignados al descriptor “Propuesta de definición de argumento abductivo”.

Lo anterior nos permite afirmar que fueron más constantes los esfuerzos por transformar nuestro conocimiento didáctico matemático en cuanto a la definición de argumento y argumentación, la definición de argumento abductivo y la caracterización de los elementos de un argumento. Evidencia de esto, es la cantidad de veces que usamos los rótulos Naturaleza, Especificidad y Garantía en la comparación de fragmentos en un mismo ciclo y entre ciclos.

## **7.2 Conclusiones**

A continuación, presentamos las conclusiones de nuestro trabajo de grado. Las hemos organizado de la siguiente manera teniendo en cuenta los siguientes aspectos: primero, la pregunta de investigación; segundo, el objetivo general; tercero, los objetivos específicos; cuarto, sobre nuestro conocimiento didáctico matemático y su transformación; quinto, el proceso que seguimos para movilizar nuestro conocimiento; sexto, los productos de este trabajo de grado; y séptimo, las proyecciones que se tienen.

### **Sobre la pregunta de investigación**

Sobre la pregunta de investigación, nos interrogamos lo siguiente ¿Sobre qué aspectos del conocimiento didáctico matemático debería profundizar un profesor para diseñar tareas que promuevan la argumentación abductiva con apoyo de EGD? Podemos concluir que la pregunta la hemos respondido, porque en los análisis de cada ciclo (secciones 4.4, 5.4 y 6.4) encontramos aquellos aspectos sobre los que debe profundizar el profesor para lograr diseñar tareas que promuevan la argumentación abductiva con apoyo de EGD. A continuación, damos a conocer aquellos aspectos del conocimiento didáctico matemático en los que evidenciamos un cambio, fruto del ejercicio analítico.

- La definición de argumentación y argumento
- La relación entre argumentación y demostración
- La caracterización de tareas que favorecen la argumentación
- La caracterización de los elementos de un argumento
- La ejemplificación de argumentos o reformulación de ejemplos de argumentos
- La formulación de una definición de argumento
- La clarificación sobre el propósito de argumento
- La aceptación de una propuesta de definición de argumento abductivo
- La identificación de los componentes de enunciados de tareas para promover argumentación abductiva
- La ejemplificación de enunciados de tareas que promueve argumentación abductiva
- La elaboración de esquemas de argumentos abductivos
- La relación entre un argumento y exploración
- Los tipos de argumentos abductivos
- La ejemplificación de argumentos abductivos

### **Sobre el objetivo general**

En el objetivo general nos propusimos develar cambios en aspectos del conocimiento didáctico matemático sobre argumento, argumentación y argumentación abductiva, que sirvan como apoyo para el diseño de tareas mediadas por Entornos de Geometría Dinámica, impulsados a raíz de una estrategia de investigación acción. El objetivo general lo hemos cumplido en su totalidad. En la sección de análisis de cada uno de los ciclos, develamos los cambios del conocimiento didáctico matemático al interior de cada ciclo y entre ciclos, sobre cada elemento de interés en este estudio. También podemos ver que se cumple con el objetivo en la sección 7.1. Los principales cambios se dieron en relación con: la propuesta de definición de argumento, la caracterización de los elementos de un argumento, el esquema de argumento abductivo, los tipos de argumento abductivo y la ejemplificación de un argumento abductivo.

### **Sobre los objetivos específicos**

El primer objetivo específico, en el que nos propusimos adaptar un modelo de conocimiento didáctico matemático del profesor para lograr identificar conocimientos profesionales dirigidos al diseño de tareas mediadas por EGD que promuevan la argumentación abductiva, se cumplió. En el Capítulo 2, presentamos la adaptación del modelo del CDM. En este modelo usamos algunos descriptores sugeridos por Molina (2019) y otros que fuimos encontrando en el proceso de análisis de los datos en la caracterización de nuestro conocimiento didáctico matemático.

El segundo objetivo específico, en el que nos propusimos establecer y poner en juego diversas estrategias que permitan ir apropiando conocimiento didáctico matemático sobre argumento, argumentación y argumentación abductiva (que sirvan como apoyo para el diseño de tareas mediadas por EGD), podemos decir que se cumplió parcialmente. Esto se hace evidente cuando realizamos una adaptación de la estrategia investigación acción en el Capítulo 3. También cuando damos cuenta de los planes de acción de cada uno de los ciclos porque allí formulamos estrategias para ir apropiándonos de dicho conocimiento.

Por ejemplo, decidimos realizar una fundamentación conceptual a partir de la revisión de literatura que ya habíamos estudiado en el primer semestre de la Maestría, porque no la habíamos comprendido suficientemente. También decidimos preparar y dirigir un curso corto para nuestros compañeros en el cual pusimos en práctica las conceptualizaciones, ejemplos y conocimientos nuevos adquiridos sobre argumento, elementos de un argumento, argumento abductivo y ejemplos de argumentos abductivos. Además, realizamos un mapa conceptual a partir de la revisión bibliográfica y nuestras conceptualizaciones sobre el uso de EGD para promover argumentos abductivos. El objetivo se cumplió parcialmente porque, por dificultades de tiempo, poco avanzamos sobre el diseño de tareas y no realizamos un nuevo ciclo para profundizar en el tema.

El tercer objetivo específico, que corresponde a la elaboración de textos narrativos respecto de nuestro conocimiento didáctico matemático sobre argumento, argumentación y argumentación abductiva que sirvan como apoyo para el diseño de tareas mediadas por EGD y como fuente para

develar el conocimiento en diferentes momentos del proceso investigativo, también se logró cumplir. En los Anexos 3, 4, 5 y 6 presentamos cada uno de los textos narrativos que se construyeron en cada ciclo como insumo para extraer los datos y realizar el análisis respectivo.

El cuarto objetivo específico que refiere a la elaboración del análisis teniendo como instrumento los textos narrativos, en donde se dé cuenta de aquellos aspectos del conocimiento didáctico matemático sobre argumento, argumentación y argumentación abductiva que sirvan como apoyo para el diseño de tareas mediadas por EGD, también se cumplió. En las secciones 4.4, 5.4 y 6.4 mostramos el proceso de análisis de los datos, realizando una caracterización de nuestro conocimiento gracias a: los fragmentos extraídos del texto narrativo correspondiente al ciclo, una comparación de descriptores asignados a fragmentos entre ciclos y los cambios de conocimiento didáctico matemático al interno del ciclo y entre ciclos.

### **Sobre nuestro conocimiento didáctico matemático sobre la argumentación abductiva para el diseño de tareas en un EGD y su transformación**

Antes de la Maestría nuestro conocimiento didáctico matemático sobre las conceptualizaciones de interés de esta investigación era poco especializado como se evidencia en el Anexo 3. Ahora encontramos cambios significativos de nuestro conocimiento que corresponden a la faceta epistémica, ya que aclaramos conceptos como argumento, elementos de un argumento, argumento abductivo, tipos de argumento abductivo, esquemas de argumentos abductivos. También adquirimos ideas claves para formular argumentos y argumentos abductivos, identificar los elementos en un argumento, representar en esquema un tipo de argumento abductivo, entre otros.

### **Sobre el proceso para movilizar nuestro conocimiento**

De acuerdo con los ciclos que adelantamos, podemos afirmar que necesitamos profundizar en lo propuesto en el Ciclo 3 de esta investigación, específicamente en el aspecto relacionado con el diseño de tareas. Lo anterior dado que, en nuestra investigación, el Ciclo 3 lo enfocamos en: una fundamentación sobre el uso de los EGD para fomentar la argumentación abductiva, describir ejemplos de situaciones de exploración en las que se emplea EGD para promover argumentos

abductivos, y diseñar y aplicar situaciones geométricas que emplean EGD para favorecer argumentos abductivos. En el desarrollo de este ciclo no nos detuvimos a realizar de manera rigurosa una fundamentación del diseño de tareas en EGD que favorezcan la argumentación abductiva, ponerlas en práctica y analizarlas para dar cuenta de la transformación del conocimiento didáctico matemático.

La implementación de los ciclos adelantados en esta investigación permite que el profesor transforme su conocimiento en aspectos de la faceta epistémica y mediacional. Pensamos que sería de gran ayuda para futuros profesores que deseen implementar esta estrategia, que adelanten un nuevo ciclo para profundizar en el aspecto que se mencionó en el párrafo anterior. Además, es de vital importancia que en este nuevo ciclo no solo se adquieran conceptos con relación al diseño de tareas sino también se pongan a prueba estos conocimientos frente a colegas y estudiantes de diferentes grados de escolaridad para evidenciar si el conocimiento didáctico matemático que se tiene es claro o si se necesita profundizar para transformarlo.

### **Sobre los productos de este trabajo de grado**

Sobre los productos de este trabajo de grado, tenemos como resultado: cuatro textos narrativos, el análisis realizado en cada uno de los ciclos y un curso corto en el que se puso en práctica las conceptualizaciones, ejemplos y conocimientos nuevos adquiridos en el desarrollo del Ciclo 2. Respecto a los textos narrativos, describimos las actividades contempladas en los planes de acción y los avances sobre nuestro conocimiento didáctico matemático. Además, informamos sobre las dudas e inquietudes que encontramos. En cuanto al análisis, como producto tenemos una sección para cada ciclo; en ella presentamos la caracterización de nuestro conocimiento didáctico matemático a partir de fragmentos extraídos de cada texto narrativo correspondiente al ciclo, las comparaciones del conocimiento respecto a las facetas, descriptores y los cambios identificados en nuestro conocimiento didáctico matemático al interior del ciclo y entre ciclos. Respecto al curso corto, producto de un ejercicio del plan de acción del Ciclo 2, describimos la preparación de este y realizamos una presentación que se llevó a un grupo de profesores de matemáticas en el colegio donde trabaja Cristian.

## **Sobre las proyecciones**

El desarrollo de este tipo de investigación aporta a profesores e investigadores a promover un cambio en su conocimiento didáctico matemático, no solo en aspectos que tienen que ver con argumentación y argumentación abductiva que sirvan como apoyo para el diseño de tareas mediadas por EGD sino en otros conocimientos didácticos matemáticos en los que se desee profundizar o promover un cambio. La estrategia que se adaptó en esta investigación permite que los profesores e investigadores mejoren o transformen sus conocimientos, sus prácticas educativas, y también que sean capaces de actuar como agentes de cambios críticos y autocríticos.

En las instituciones educativas donde laboramos, esperamos promover una transformación de conocimiento en nuestros compañeros profesores, invitándolos a participar en esta estrategia y que esta sea motivo para realizar una reflexión sobre su propio conocimiento.

Este trabajo de grado nos sirve como modelo para proceder en otros casos donde queramos mejorar nuestro conocimiento didáctico matemático respecto de otros objetos o procesos matemáticos. Esta experiencia nos permite plantear planes de acción con actividades significativas como: la exposición de nuestras interpretaciones, las presentaciones de ejemplos, los seminarios de discusión sobre definiciones y ejercicios exploratorios, entre otros.



## 8. Referencias bibliográficas incluidas en el cuerpo principal del trabajo

- Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D., & Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practises in Cabri environments. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 34(3), 66-72.
- Baccaglioni, A. (2010) Conjecturing in dynamic geometry: A model for conjecture-generation through maintaining dragging. University of New Hampshire.
- Baccaglioni, A. (2011). Abduction in generating conjectures in dynamic geometry through maintaining dragging. *7th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, 110-119.
- Baccaglioni, A. (2019). Dragging, instrumented abduction and evidence, in processes of conjecture generation in a dynamic geometry environment. *ZDM*, 51(5), 779-791.
- Ball, D. (2000). Bridging Practices: Intertwining Content and Pedagogy in Teaching and Learning to Teach. *Journal of Teacher Education*. 51(3):241-247.  
doi:10.1177/0022487100051003013
- Camargo, L. (2021) Estrategias cualitativas de investigación en Educación Matemática. Medellín, Editorial Universidad de Antioquia y Fondo Editorial Universidad Pedagógica Nacional.
- Carvajal, C., Martínez, P. y Valverde, G. (2019). La demostración matemática: significado, tipos, funciones atribuidas y relevancia en el conocimiento profesional de los profesores de matemáticas. *Uniciencia*, 33(2), 55-75.
- Chehaybar, E. (2007). Reflexiones sobre el papel del profesor en la calidad educativa. *Reencuentro. Análisis de problemas universitarios*, (50), 100-106.
- Drijvers, P. (2015). Digital technology in mathematics education: Why it works (Or Doesn't) [La tecnología digital en la educación matemática: por qué funciona (o no)]. *In Selected*

*regular lectures from the 12th international congress on mathematical education.* 135-151.

Elliott, J. (2000). *El cambio educativo desde la investigación-acción*. Ediciones Morata, S. L.

Godino, J. (2009). Categorías de Análisis de los conocimientos del Profesor de Matemáticas. *UNIÓN: Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, (20) 13-31

Godino, J. (2013). Diseño y análisis de tareas para el desarrollo del conocimiento didáctico matemático de profesores. *Probabilidad Condicionada: Revista de didáctica de la Estadística*, (2), 1-15.

Godino, J., Giacomone, B., Font, V. y Pino-Fan, L. (2018). Conocimientos profesionales en el diseño y gestión de una clase sobre semejanza de triángulos. Análisis con herramientas del modelo CCDM. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 13, 63-83.

Gómez, P., & Mora, M. (2016). Apuntes sobre análisis de instrucción. *Módulo 4 de MAD 4*.

Icfes, (2019). Marco de referencia de la prueba de matemáticas Saber 11°. Ministerio de Educación Nacional

Joubert, M. (2017). Review of Theory for Task Design: Special Considerations for Digital Environments [Revisión de la teoría para el diseño de tareas: consideraciones especiales para entornos digitales]. *In Digital Technologies in Designing Mathematics Education Tasks*, 17-40.

Lara, L. F., & Samper, C. (2014). Un aporte a la caracterización del comportamiento argumental y racional cuando se aprende a demostrar. *Educación matemática*, 26(1), 07-40.

Martínez, M. (2000) La investigación-acción en el aula. *Agenda Académica*. 7(1), 27-39.

MEN (1998) Lineamientos Curriculares Matemáticas. Ministerio de Educación Nacional

MEN (2006) Estándares básicos de competencias matemáticas. Ministerio de Educación nacional. 46-95

- Molina, O. (2019). *Sistema de normas que influyen en procesos de argumentación: un curso de geometría del espacio como escenario de investigación*. [Tesis doctoral, Universidad de los Lagos]
- Molina, O., y Samper, C. (2019). Tipos de Problemas que Provocan la Generación de Argumentos Inductivos, Abductivos y Deductivos. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 33(63), 109–134.
- Pedemonte, B., y Reid, D. (2011). The role of abduction in proving processes. *Educational studies in mathematics*, 76(3), 281-303.
- Pino Fan, L., Assis, A., y Castro, W. (2015). Towards a methodology for the characterization of teachers Didactic-Mathematical knowledge. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, 11(6), 1429-1456
- Pino-Fan, L., Godino, J. y Moll, V. (2011). Faceta epistémica del conocimiento didáctico matemático sobre la derivada. *Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática*, 13(1), 141-178
- Pino-Fan, L., Godino, J., Font, V. y Castro, W. (2013). Prospective teacher's specialized content knowledge on derivative. In *Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, 3195-3205.
- Pino-Fan, L., Godino, J., Font, V., y Castro, W. (2012). Key epistemic features of mathematical knowledge for teaching the derivative. In *Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. 3, 297-304
- Pino-Fan, L., y Godino, J. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico matemático del profesor. *Paradigma*, 36(1), 87-109.
- Schoenfeld, A. y Kilpatrick, J. (2008). Towards a theory of proficiency in teaching mathematics. En D. Tirosh y T. L. Wood (Eds.), *Tools and processes in mathematics teacher education* 321-354.

- Shulman, L. S. (1986). Paradigms and research programs in the study of teaching: A contemporary perspective. In: M.C. Wittrock (Ed.) *Handbook of Research on Teaching*, 3-36.
- Strauss, A., y Corbin, J. (2016). *Bases de la investigación cualitativa: técnicas y procedimientos para desarrollar la teoría fundamentada*. Editorial Universidad de Antioquia
- Triana, J., Zambrano, J. (2016). *Tareas que promueven el uso experto de un elemento teórico en la argumentación matemática*. (Tesis de maestría). Universidad Pedagógica Nacional.
- Zakaryan, D. (2013). El tipo de tareas como oportunidad de aprendizaje y competencias matemáticas de estudiantes de 15 años. *I-Cemacyc* (pp. 1-12). Santo Domingo-Republica Dominicana: Congreso de Educación matemática de América Central y el Caribe.

## 9. Referencias bibliográficas incluidas en los anexos

- Cortés, J., Guerrero, M., Morales, C. y Pedroza, L. (2014). Aplicaciones tecnológicas para el aprendizaje de las matemáticas. *UNION. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 39, 141-161.
- Da Ponte, J. P. (2004). La actividad matemática en el aula. En J. Giménez, & J. L. Santos, *Problemas e investigaciones en la actividad matemática de los alumnos*. 25-34.
- Durand-Guerrier, V., Boero, P., Douek, N., Epp, S., y Tanguay, D. (2012). Argumentation and proof in the mathematics classroom. *Proof and proving in mathematics education*, 349-367.
- Escuela pedagógica Experimental (2010) Proyecto Educativo Institucional “la investigación científica como proyecto cultural”. Bogotá
- Fernández, Á. (2005). Modelos de razonamiento abductivo. *Contrastes. Revista Internacional de Filosofía*, 155-180
- Hanna, G. & de Villiers, M. (2008). ICMI Study 19: Proof and proving in mathematics education. *ZDM*, 40(2), 329-336.
- Henao, R, y Moreno, M. (2016). Didáctica de la lógica para el ejercicio de la razonabilidad. *Magis. Revista Internacional de Investigación en Educación*, 9(18), 85-110.
- Lin et al (2012) Principles of task design for conjecturing and proving [Principios del diseño de tareas para conjeturar y probar]. G. Hanna and M. de Villiers (eds) Universidad de Oxford. 305-325
- Papadaki, C., Reid, D. y Knipping, C. (2019). Abduction in argumentation: Two representations that reveal its different functions. *Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*.  
<https://www.researchgate.net/publication/335401152>

Pedemonte, B. (2002). Etude didactique et cognitive des rapports de l'argumentation et de la démonstration dans l'apprentissage des mathématiques. [tesis doctoral, Universidad Joseph Fourier]

## 10. Anexos

### 10.1 Anexo 1: tabla apuntes

Insumo	Febrero	Marzo	Abril	Mayo
Propuesta con la que ingresaron al programa de MDM	<p>El uso de las TIC es beneficioso en el aula para procesos de razonamiento.</p> <p>El razonamiento lógico hace referencia al uso del entendimiento para pasar de unas proposiciones a otras.</p> <p>Las tareas que se proponen intentan impulsar al estudiante hacia un nuevo espacio de aprendizaje que intenta trascender a la memorización de fórmulas y procedimientos.</p> <p>La argumentación favorece el desarrollo de procesos de demostración en el aula.</p>			
Apuntes curso Profundización en matemáticas elementales	El resultado del proceso de argumentar es denominado argumento	Un argumento es un enunciado oral o escrito, de estructura ternaria, que relaciona proposiciones particulares (datos y aseercción) y una general (garantía).	<p>La demostración es un argumento matemático, una secuencia conectada de afirmaciones a favor o en contra de una afirmación matemática.</p> <p>Un argumento abductivo, la proposición particular que se tiene se refiere a un hecho que se observa <math>q_1</math> (caso de <math>q</math>). Se conocen proposiciones generales <math>r_1: p \rightarrow q</math>, <math>r_2: s \rightarrow q, \dots</math> y, por ejemplo, se concluye que es posible el hecho <math>p_1</math> (caso de <math>p</math>)</p>	<p>Los diferentes tipos de arrastre y la posibilidad de ver, en tiempo real, muchos casos de una situación, favorece la producción de argumentos de diversos tipos (inductivos, abductivos) cuando abordan un problema.</p> <p>Para diseñar tareas se deben tener en cuenta: Procedimientos, metas, requisitos, lenguajes, proposiciones, argumentos, posibles soluciones de la tarea.</p>
Apuntes curso diseño y desarrollo curricular	Para diseñar una tarea de geometría que normalmente proponemos en clase, en el diseño debemos tener en cuenta un análisis de contenido, cognitivo y de instrucción.	<p>Existen unos elementos para el diseño de tareas. Nos centramos en el Documento de Gómez (2016) en el que se abordaron los elementos de diseño de tareas como lo son: requisitos, materiales, agrupamientos, interacción, y temporalidad.</p> <p>También, existen principios teóricos diseño de tareas de conjeturación y elementos para el análisis de tarea</p>	Comprendimos que existe diferencia entre tarea y actividad. A sí mismo, elementos para el análisis de una tarea: actividad de los estudiantes, rol y potencial del software y obstáculos.	El diseño de tareas de geometría debe primero visualizar: procedimientos, metas, requisitos, lenguajes, proposiciones, argumentos, habilidades de aprendizaje, curricular.
Versiones del anteproyecto		Las tareas propuestas por el profesor permiten desarrollar diferentes conjeturas sin pensar en los tipos de argumentos que se dan alrededor de ellas, esto depende del enunciado que se proponga porque este debe favorecer la	La argumentación abductiva parte de la observación de un resultado y se cuestiona acerca de qué datos pudieron ocasionarlo, la argumentación deductiva es cuando suponemos una hipótesis verdadera y se deduce una conclusión que se considera como verdadera y en la argumentación inductiva se construye una regla	<p>Las tareas que propone el profesor brindan oportunidades para que los estudiantes logren las expectativas de aprendizaje y superen sus limitaciones</p> <p>Los objetos matemáticos son los objetos geométricos, las</p>

		producción de argumentos	general como conjetura, producto de la observación y exploración.  Los EGD tienen el potencial de favorecer de manera significativa el aprendizaje de las matemáticas en el aula, porque permiten que los estudiantes usen herramientas para la exploración y construcción de objetos geométricos	relaciones, los procedimientos y los argumentos.
--	--	--------------------------	---	--



## 10.2 Anexo 2: Tablas de depuración

Insumo	Fecha	#	Apartados textuales	Nuestra interpretación	Asunto
Propuesta con la que Cristian ingreso al programa de MDM	Enero de 2020	1	El uso de la tecnología digital tiene un gran impacto en la sociedad y se ha convertido en una base fundamental para el desarrollo educativo. [... las TIC han propiciado diversas maneras de crear conocimiento y favorecer la educación.]	El uso de la tecnología digital tiene un gran impacto en la sociedad y se ha convertido en una base fundamental para el desarrollo educativo. [... las TIC han propiciado diversas maneras de crear conocimiento y favorecer la educación.]	TIC
		2	A los estudiantes los motiva a aprender el uso de tecnología.	A los estudiantes los motiva a aprender el uso de tecnología.	TIC
		3	El profesor debe actualizar su conocimiento para saber cómo usar la tecnología.	El profesor debe actualizar su conocimiento para saber cómo usar la tecnología.	TIC
		4	El MEN impulsa el desarrollo del razonamiento desde 1998. Afirma que el razonamiento matemático está ligado con la producción de argumentos.	El MEN impulsa el desarrollo del razonamiento desde 1998. Afirma que el razonamiento matemático está ligado con la producción de argumentos.	ARG
		5	El uso de las TIC es beneficioso en el aula para procesos de razonamiento.		TIC-ARG
		6	El razonamiento lógico hace referencia al uso del entendimiento para pasar de unas proposiciones a otras.	El razonamiento lógico hace referencia al uso del entendimiento para pasar de unas proposiciones a otras.	ARG
Propuesta con la que Andrés ingreso		7	Las tareas que se proponen intentan impulsar al estudiante hacia un nuevo espacio de aprendizaje que	Las tareas que se proponen intentan impulsar al estudiante hacia un nuevo espacio de aprendizaje	TAR

al programa de MDM	Enero de 2020		intenta trascender a la memorización de fórmulas y procedimientos.	que intenta trascender a la memorización de fórmulas y procedimientos.	
		8	Las tareas deben permitir presentar sus propias conjeturas y obtener su propio conocimiento a través de la exploración.	Las tareas deben permitir presentar sus propias conjeturas y obtener su propio conocimiento a través de la exploración.	TAR
		9	La inclusión de las TIC al aula permite desarrollar procesos de exploración y Argumentación.	La inclusión de las TIC al aula permite desarrollar procesos de exploración y Argumentación.	TIC-ARG
		10	La argumentación se hace con el fin de exponer y defender ideas y resultados.	La argumentación se hace con el fin de exponer y defender ideas y resultados.	ARG
		11	La argumentación favorece el desarrollo de procesos de demostración en el aula.	La argumentación favorece el desarrollo de procesos de demostración en el aula.	ARG
		12	las tareas de conjuración permiten a los estudiantes descubrir regularidades, relaciones y propiedades de figuras y cuerpos geométricos.	las tareas de conjuración permiten a los estudiantes descubrir regularidades, relaciones y propiedades de figuras y cuerpos geométricos.	TAR-GEO
Grupo de investigación razonamiento abductivo		13	La perspectiva de la abducción es el marco lógico que permite que el planteamiento de diversas soluciones, el aprendizaje a través del error y la elaboración de argumentos sean aspectos que aporten a la construcción de criterios para que una hipótesis se valide por el colectivo	La abducción permite el planteamiento de diversas soluciones a una tarea, y el aprendizaje se puede lograr a través el error y la elaboración de argumentos que aportan a la construcción de ideas para una hipótesis	ARG
		14	Un aspecto es la creatividad, que es considerado como un elemento del pensamiento matemático (EPE, 2000) y cerciora que al trabajar la resolución de problemas no	la creatividad es un aspecto que los estudiantes desarrollan en clase de matemáticas y que permite desarrollo de habilidades de razonamiento.	ARG

		solo se desarrollan habilidades de razonamiento, sino también habilidades creativas		
	15	la perspectiva del razonamiento abductivo permite que todos los estudiantes logren participar en las actividades y elaboren argumentos para la resolución de estas,	El razonamiento abductivo permite que los estudiantes logren elaboren argumentos y participen de las actividades.	ARG
	16	Fernández (2005) da a conocer que la abducción toma en cuenta en mayor proporción la construcción de conocimiento generado por explicaciones sobre las actividades y no solo con el fin de obtener un resultado, pues de esta manera se excluye la posibilidad de encontrar diferentes caminos de resolución, coartando la creatividad en los estudiantes	La abducción permite mayor proporción en la construcción de conocimiento del estudiante generando explicaciones con el fin de obtener diversas maneras de solución de una actividad.	ARG
		Lo que llamamos razonamiento es algo en lo que estampamos un sello de aprobación racional (Pierce, sf)	El razonamiento es la aprobación de un proceso para llegar a una conclusión.	ARG

Insumo	Fecha	#	Apartados textuales	Nuestra interpretación	Asunto
Resumen de lecturas curso profundización en matemáticas elementales.	Marzo de 2020	1	La argumentación o proceso de argumentar, es cualquier proceso a través del cual se produce un discurso escrito u oral conducido de acuerdo con normas compartidas y que tiene por objeto llegar a una conclusión mutuamente aceptable acerca de una declaración cuyo contenido o verdad se está debatiendo (Durand-Guerrier, Boero, Douek, Epp, & Tanguay, 2012).	La argumentación o proceso de argumentar, se puede interpretar como un proceso mediante el cual se produce un discurso oral o escrito, que tiene como objetivo llegar a una conclusión mutuamente aceptable acerca de una declaración en donde se debate la veracidad de dicha declaración.	ARG

		2	El resultado del proceso de argumentar es denominado argumento (Krummheuer, 1995)	El resultado del proceso de argumentar se llama argumento. (Krummheuer, 1995)	ARG
		3	Los argumentos buscan convencer, ya sea para establecer certidumbre o para persuadir. Cuando se establece certidumbre el individuo elimina sus propias dudas sobre la verdad o falsedad de una declaración, mientras que cuando se usa para persuadir el individuo elimina las dudas de los demás sobre la verdad o falsedad de una declaración.	Los argumentos pueden usarse de dos formas, para establecer certidumbre o para buscar persuadir. Cuando se establece certidumbre es porque el individuo quiere eliminar dudas propias sobre la veracidad o falsedad de una declaración, cuando se busca persuadir es porque se quiere eliminar dudas que tengan los demás sobre la verdad o falsedad de una declaración.	ARG
		4	Un argumento es un enunciado oral o escrito, de estructura ternaria, que relaciona proposiciones particulares (datos y aserción) y una general (garantía). En cualquier argumento, inicialmente se expresa un punto de vista (una afirmación, una opinión), denominado aserción (q) (claim en términos Toulminianos); luego se proporcionan datos (p) (o data) para apoyar la aserción. La garantía (r) (o warrant) justifica el uso de los datos como soporte para la aserción.	Un argumento es una es un enunciado oral o escrito, de estructura ternaria. Un argumento está compuesto por tres elementos básicos: el dato que es información dada, la aserción que se realizan sobre la situación en cuestión, y la garantía que son proposiciones aceptadas como válidas en un sistema teórico.	ARG
		5	"La forma como se relacionan las proposiciones particulares ( p y q) y la general (r) define el tipo de argumento: deductivo, inductivo o abductivo. "	Los tipos de argumentos abductivo, deductivo e inductivo se pueden establecer una tipología mediante la relación que exista entre los datos (p), la garantía (r) y la aserción (q), usando el modelo de Toulmin (2003).	ARG
		6	Un argumento deductivo se aplica una proposición general conocida ( $r:p \rightarrow q$ ) a unos datos que se tienen ( $p_1$ : particularización de p), para obtener necesariamente la aserción ( $q_1$ : particularización de q). (Molina Y Samper, 2019)	La argumentación deductiva se da cuando, se parte de premisas que se suponen verdaderas, se deduce una conclusión que se considera como verdadera	ARG

		7	Un argumento abductivo, la proposición particular que se tiene se refiere a un hecho que se observa $q_1$ (caso de $q$ ). Se conocen proposiciones generales $r_1:p \rightarrow q$ , $r_2:s \rightarrow q, \dots$ y, por ejemplo, se concluye que es posible el hecho $p_1$ (caso de $p$ ) (Molina Y Samper, 2019)	El argumento abductivo es un tipo de argumento en el que el sujeto, a partir de la observación de un resultado, se cuestiona acerca de qué datos pudieron ocasionarlo, busca reglas generales que tiene que ver con el resultado, y extrae unas posibles condiciones iniciales.	ARG
		8	Un argumento inductivo se tienen $n$ casos que particularizan la proposición $p(p_1, p_2, p_3, \dots, p_n)$ para los cuales, para cada uno, se satisface la proposición general ( $q$ ). Se concluye la proposición general ( $r:p \rightarrow q$ ). (Molina Y Samper, 2019)	En el argumento inductivo se establece una regla general como conjetura, producto de la observación repetida de situaciones, a partir de unos datos dados comunes y se nota que el resultado siempre es el mismo.	ARG
		9	La <b>demostración</b> es un argumento matemático, una secuencia conectada de afirmaciones a favor o en contra de una afirmación matemática	La demostración es la prueba de un argumento, fundamentada por afirmaciones matemáticas para dar validez	ARG-DEM
		10	Los EGD han revolucionado el enfoque para entender la compleja relación entre representaciones gráficas y conceptos en la geometría euclidiana. En particular, mejoran el razonamiento geométrico en la resolución de problemas, pues promueven la exploración visual y el descubrimiento. Baccaglioni-Frank, Mariotti y Antonini (2009)	Los EGD mejoran el razonamiento geométrico y promueven la exploración visual y el descubrimiento de propiedades de los objetos geométricos.	EGD-RAZ
		11	Los diferentes tipos de arrastre y la posibilidad de ver, en tiempo real, muchos casos de una situación, favorece la producción de argumentos de diversos tipos (inductivos, abductivos) cuando abordan un problema. (Molina y Samper, 2019)	Los diferentes tipos de arrastre en un EGD permiten observar y explorar del objeto geométrico diversas situaciones y representaciones, esto favorece la producción de argumentos para justificar un problema.	EGD-ARG

Insumo	Fecha	#	Apartados textuales	Nuestra interpretación	Asunto
Apuntes curso Diseño y Desarrollo Curricular	Febrero de 2020	1	Planeación y diseño de tareas: concreción del tema, análisis de contenido, análisis cognitivo y análisis de instrucción.	Las planeación y diseño de tareas tienen cuatro momentos: concreción del tema; análisis de contenido; análisis cognitivo; y análisis de instrucción.	TAR
		2	Dos paradigmas: construcciones robustas y construcciones blandas. Una construcción robusta contribuye a una mejor identificación en la acción de los elementos. Estas construcciones se usan a menudo por el uso del tiempo, ya que medir ángulos en papel y lápiz toma más tiempo.	Hay dos tipos de construcciones en EDG: blandas y robustas. La construcción robusta permite una mejor visualización de los elementos constitutivos de los objetos geométricos. Las construcciones en geometría dinámica agilizan el proceso de representación.	TIC- EGD
		3	En geometría dinámica el estudiante experimenta y saca la conclusión de que su construcción es incorrecta, mientras que en lápiz y papel el estudiante debe aceptar el juicio del maestro sin entender por qué es incorrecta.	Cuando los estudiantes usan EDG tienen la posibilidad de comprobar si sus representaciones son correctas o no sin necesidad de esperar el juicio del profesor.	TIC- EGD
		4	La prueba es un argumento matemático, una secuencia de afirmaciones conectadas para o en contra de una afirmación matemática y tiene ciertas características como: declaraciones aceptadas por la comunidad en el aula, formas de razonamiento válidas y conocidas o que están dentro del alcance conceptual, se comunican con formas de expresión que son apropiadas y conocidas por la comunidad.	La prueba puede ser vista como argumentos o afirmaciones con ciertas características, para validar una afirmación matemática. Estas características son: declaraciones aceptadas por la comunidad en el aula, formas de razonamiento válidas y conocidas o que están dentro del alcance conceptual, se comunican con formas de expresión que son apropiadas y conocidas por la comunidad.	PRUE - ARG

		5	El análisis de instrucción para el diseño de tareas describe 7 elementos, que son: requisitos, meta, formulación, materiales y recursos, agrupamiento, interacción y temporalidad. (Gómez, 2016)	El análisis de instrucción para el diseño de tareas incluye siete aspectos, que son: requisitos, meta, formulación, materiales y recursos, agrupamiento, interacción y temporalidad. (Gómez, 2016)	TAR
	Abril de 2020	6	Elementos para el análisis de una tarea: actividad de los estudiantes, rol y potencial del software y obstáculos.	Un modelo para el análisis de tareas en donde se ve inmerso un entorno de geometría dinámica o TIC esta dado por tres elementos que se deben tener o prever: la actividad de los estudiantes, el rol y potencial del software y los obstáculos.	TAR-TIC
Tareas curso Diseño y Desarrollo Curricular	Marzo de 2020	7	En total se tienen once principios para el diseño de tareas, cuatro principios para conjeturar, dos para el tránsito entre conjeturar y probar y cinco para probar. (LIN, y otros...) fecha	Lin y otros () proponen principios diferentes para cada tipo de tarea: conjeturar, demostrar y tareas que apuntan al tránsito entre conjeturar y probar.	TAR
		8	Principios para conjeturar: observar, construir, transformar y reflexionar.	Los principios de tareas para conjeturar buscan promover conjeturas como una oportunidad para participar en la observación, en la construcción, la reflexión y transformar el conocimiento previo del profesor.	TAR
		9	Principios de tránsito entre conjeturar y probar: establecer normas en el aula que permitan discusiones para aceptar o rechazar ideas matemáticas y necesidad de que los estudiantes participen en la prueba.	En el diseño de tareas que generen un tránsito entre conjeturar y probar, se requiere que: la tarea establezca normas en el aula que generen discusiones en las cuales se den argumentos en donde se busque convencer o persuadir y la necesidad de que el estudiante participe en la prueba.	TAR
		10	Principios para el diseño de tareas de prueba: promover la clasificación de enunciados matemáticos, Expresar argumentos en varios modos de representación, Promover cambios de roles mientras se compromete con una tarea,	Los principios de tareas para la prueba buscan: clasificar diferentes enunciados, expresar argumentos de diferentes formas, colocar en el papel del estudiante para mirar diferentes formas de	TAR

		plantear los insumos suficientes y necesarios para la prueba, los líderes crearon y comparten sus propias pruebas.	proceder, dar la posibilidad de explorar como un medio para obtener insumos suficientes para la prueba y permitir que se expongan y compartan las diferentes pruebas.	
		11 El diseño de tareas productivas incluye seis principios: construcción del modelo, principio de realidad, principio de autoevaluación, documento de construcción, principio de reutilización y principio de prototipo eficaz. (REF)	Según xxx, el diseño de tareas productivas incluye seis principios: construcción del modelo, principio de realidad, principio de autoevaluación, documento de construcción, principio de reutilización y principio de prototipo eficaz.	TAR
		12 Apunte: El análisis de recursos permite identificar, que tan eficaz o eficiente es el recurso como apoyo a la solución de tareas.	En el análisis del diseño de tareas, el aspecto "recursos" permite identificar, que tan eficaz o eficiente es el recurso como apoyo a la solución de tareas.	TIC-TAR
	Abril de 2020	13 Una tarea es lo que el profesor solicita al estudiante que haga en la clase, mientras que la actividad es lo que el estudiante hace con la tarea.	Una tarea se puede definir como lo que el profesor le propone al estudiante y la actividad es el producto o fruto de la tarea.	TAR-ACT
		14 (Arzarello et al. 2012) el profesor diseña una tarea para la clase según su contexto, no solo debe proponer tareas adecuadas para resolver mediante construcciones y exploraciones visuales, numéricas o simbólicas, sino que también debe organizar la transición de las prácticas a discusiones teóricas.	Según Arzarello et al (2012) el profesor debe diseñar tareas según el contexto donde se encuentre, estas tareas no solo deben permitir construcciones y exploraciones sino también el poder exponer argumentos y generar discusiones teóricas.	TAR
		15 ¿Qué matemáticas hace el software? Y ¿Qué oportunidades da para que el estudiante haga matemáticas?		TIC



Insumo	fecha	#	Apartados textuales	Nuestra interpretación	Asunto
Apuntes de investigación e innovación	feb-20	1	La tecnología en el desarrollo de una tarea permite generar diversas representaciones, las diversas herramientas permiten enriquecer y comprobar la hipótesis con trazos auxiliares, y automatizar ciertos procedimientos.	La tecnología en el desarrollo de una tarea permite generar diversas representaciones, las diversas herramientas permiten enriquecer y comprobar la hipótesis con trazos auxiliares, y automatizar ciertos procedimientos.	TIC-EGD-TAR
		2	La argumentación es la expresión discursiva del razonamiento. Probar, deducir, persuadir, demostrar, validar, conjeturar, convencer, razonar y persuadir.	La argumentación es la expresión discursiva del razonamiento. El proceso de argumentación busca probar, deducir, demostrar, validar, conjeturar, convencer, razonar y persuadir.	ARG
		3	Tecnología digital: dispositivo diseñado para manipular información representada en forma digital (software especializado en geometría dinámica)	Tecnología digital: dispositivo diseñado para manipular información representada en forma digital (software especializado en geometría dinámica)	TIC

Insumo	Fecha	#	Apartados textuales	Asunto
Escritura de anteproyecto	mar-20	1	Las tareas propuestas por el profesor permiten desarrollar diferentes conjeturas sin pensar en los tipos de argumentos que se dan alrededor de ellas, esto depende del enunciado que se proponga porque este debe favorecer la producción de argumentos.	TAR-ARG

	2	Las tareas en geometría deben tener las condiciones suficientes para realizar construcciones auxiliares que provean las condiciones para permitir la exploración de propiedades de un objeto existente	TAR-EGD
abr-20	3	La argumentación abductiva parte de la observación de un resultado y se cuestiona acerca de qué datos pudieron ocasionarlo, la argumentación deductiva es cuando suponemos una hipótesis verdadera y se deduce una conclusión que se considera como verdadera y en la argumentación inductiva se construye una regla general como conjetura, producto de la observación y exploración	ARG
		el proceso de exploración que se lleva a cabo con un EGD les permitiría a los estudiantes encontrar propiedades de los objetos geométricos, que a simple vista no se pueden apreciar	EGD-exploración
	4	Los EGD tienen el potencial de favorecer de manera significativa el aprendizaje de las matemáticas en el aula, porque permiten que los estudiantes usen herramientas para la exploración y construcción de objetos geométricos.	EGD
	5	Los lineamientos curriculares (MEN) proponen que la geometría es una herramienta que [...por excelencia desarrolla el pensamiento espacial y procesos de nivel superior y, en particular, formas diversas de argumentación]	GEO-ARG
	6	El diseño de tareas está relacionado con el conocimiento matemático del profesor, y a su vez, potencian la creación de oportunidades efectivas de aprendizaje en los estudiantes	CDM-TAR
may-20	7	El conocimiento didáctico matemático del profesor comprende un conjunto de conocimientos y destrezas, que se ponen en juego para realizar su labor; en particular, para diseñar e implementar tareas en el aula.	CDM-TAR
	8	En el conocimiento didáctico matemático del profesor se involucran objetos didácticos y objetos matemáticos	CDM
	9	Los objetos matemáticos son los objetos geométricos, las relaciones, los procedimientos y los argumentos	GEO-ARG

10	Las tareas que propone el profesor brindan oportunidades para que los estudiantes logren las expectativas de aprendizaje y superen sus limitaciones	TAR
11	según Baccaglini (2010) “las propiedades geométricas son estáticas y “al mismo nivel” con respecto a la percepción del estudiante; [...] más aun, ningún elemento de la figura es privilegiado con respecto a los otros, y el razonamiento en un único dibujo específico que representa una clase de figuras, requiere una alta armonización entre el componente figurativo y el componente conceptual” (p. 28).	RAZ
12	el profesor no debe limitarse solo al estudio de las herramientas y al diseño de la tecnología digital involucrada, sino también al diseño de tareas y actividades que la acompañan (Drijvers, 2013)	EGD
13	Con referencia a las orientaciones curriculares, hacer un trabajo que permita el desarrollo del conocimiento del profesor sobre la argumentación es muy importante, dado que este proceso es central de la enseñanza de la geometría.	ARG
14	las pruebas de estado muestran que nuestros estudiantes obtienen bajos resultados en geometría, especialmente en la parte argumentativa.	ARG
15	Arzarello y sus colaboradores (2012), por ejemplo, recalcan que con diseños didácticos adecuados la abducción puede favorecerse en EGD	EGD

### 10.3 Anexo 3: Texto Narrativo Base

#### **Estado base de nuestro conocimiento didáctico-matemático, sobre argumentación, tareas y Entornos de Geometría Dinámica**

A continuación, hacemos una recopilación de evidencias sobre nuestro conocimiento didáctico matemático acerca de Entornos de Geometría Dinámica (EGD), argumentación y tareas. Esta recopilación se hace a partir de la información contenida en la propuesta inicial con la que ingresamos a la maestría y en un documento elaborado por Cristian y sus compañeros de trabajo, que pertenecen a un grupo de investigación llamado *Razonamiento abductivo*. Con esta descripción pretendemos tener insumos para caracterizar el estado base de tal conocimiento.

En las propuestas iniciales con las que ingresamos al programa no se alude de manera explícita a EGD, la información más cercana alude a tecnología digital en general. A continuación, hacemos referencia a aquellas evidencias relacionadas con tecnología, luego a lo mencionado sobre argumentación y por último a lo dicho tareas.

Respecto de la tecnología, identificamos en nuestras propuestas iniciales que damos cuenta de la importancia que tiene esta en la sociedad y en el sistema educativo, de la responsabilidad que tiene el profesor al implementar tecnología en la clase, del efecto que puede tener tal implementación en la motivación de los estudiantes y de la función que cumple la tecnología en el desarrollo de procesos de aprendizaje en el ámbito educativo. Salvo la mención al efecto, este conocimiento proviene de lecturas ocasionales, experiencias personales, conferencias a las que habíamos asistido, informes de prensa y otras fuentes informales sobre educación matemática. Sobre el efecto en la motivación nos enteramos por la lectura que habíamos hecho de Vargas y Velásquez (2010).

Más allá de mencionar lo dicho, en nuestras propuestas iniciales no desarrollamos en profundidad las ideas. Por ejemplo, no justificamos la importancia y el efecto de la tecnología en la sociedad, no especificamos por qué el uso de las TIC es beneficioso en el aprendizaje, no ahondamos en cómo el profesor debe implementar las TIC. La siguiente cita de uno de los documentos es una afirmación típica en ellos: "las tecnologías aportan a la sociedad nuevas formas, contenidos, herramientas, posibilidades de comunicación que se han venido convirtiendo en una base

fundamental, principalmente para el buen desarrollo de la educación". (Propuesta inicial, Cristian). En la cita se aprecian ideas muy superficiales y no se profundiza en los asuntos mencionados, así mismo no se ahonda en una conceptualización de EGD. El hecho de no hacer explícita una definición de EGD, no quiere decir que no conociamos dichos Entornos, pues en nuestros estudios de pregrado entendíamos el funcionamiento y los usábamos en nuestras clases.

En relación con la argumentación, encontramos en la propuesta inicial de Cristian que él hace alusión a la definición de argumentación que tenía, fruto de algunas lecturas que había hecho hace algún tiempo, como los textos de Henao (2016) y Fernández (2005) leídos en el grupo de estudio mencionado. Según la interpretación que hizo él, la argumentación se relaciona con el razonamiento lógico que permite pasar de una proposición a otra. Cristian también menciona la importancia que se le da a la argumentación en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006) y en los Lineamientos Curriculares de matemáticas (MEN, 1998), en donde se señala que este proceso está vinculado al desarrollo del razonamiento que permite llegar a generar estrategias, proponer conclusiones y comunicar ideas.

Por su parte, Andrés aludió en la propuesta inicial a la función que desempeña la argumentación para exponer y defender ideas en la clase de matemáticas y al mismo tiempo para favorecer procesos de demostración en el aula. Este conocimiento provino de la lectura de documentos curriculares y de artículos científicos en educación matemática, tales como el de Cortes, Guerrero, Morales y Pedroza (2014).

Dicho lo anterior, es preciso mencionar que en las propuestas no profundizamos en las ideas expuestas, quizás porque solo disponíamos de dos páginas. Por ejemplo: no establecimos una relación entre la definición de argumentación y la de razonamiento lógico; no clarificamos por qué, tanto en los Estándares Básicos de Competencias (MEN, 2006) como en los Lineamientos Curriculares (MEN, 1998) se da tanta importancia al proceso de argumentación en el aula; y no presentamos relaciones entre exponer y defender una idea, ni señalamos cómo estas acciones favorecen procesos de demostración.

Además, no hacemos alusión a algún tipo de argumento, pero en clases del pregrado abordamos tareas de geometría, cuyo propósito era desarrollar situaciones a partir de argumentos inductivos. Por ejemplo, en clase de geometría plana a partir del dato y una aserción se generaba una garantía

que satisface el resultado. Teníamos claro que la solución a la situación tenía ese orden, aunque no reconocíamos en ese momento que se estaba abordando el orden de un argumento inductivo. De igual forma ocurría con la solución a situaciones donde el orden que se daba era de un argumento deductivo. Sobre el orden en un argumento abductivo, no reconocemos haber abordado situaciones en alguna clase de geometría en el pregrado.

Sobre las tareas, Andrés mencionó en su propuesta inicial que estas son importantes porque impulsan al estudiante hacia nuevos espacios de aprendizaje, a obtener su propio conocimiento a partir de la exploración, a descubrir propiedades y relaciones de los objetos geométricos. Vale aclarar que antes de ingresar a la maestría entendíamos la tarea como lo que se le coloca al estudiante para realizar en la casa, mientras que nos referíamos a actividad para aludir a lo que los estudiantes hacen en clase.

Dado lo anterior, en las propuestas iniciales para ingreso a la maestría se evidencia que no teníamos claro cuáles tareas impulsan o no a los estudiantes hacia nuevos espacios de aprendizaje, y mediante qué proceso obtienen su propio conocimiento a partir de la exploración. Esta era una inquietud que quedó manifiesta en la pregunta que propuso Andrés para desarrollar su propuesta de trabajo de grado: ¿Qué tipo de tareas proponer en el aula para que los procesos de exploración y conjeturación en geometría sean significativos? (Propuesta inicial, Andrés).

En nuestras propuestas iniciales con las que ingresamos al programa de maestría, no aludimos a los propósitos de una tarea. Sin embargo, al recordar las tareas que proponíamos a los estudiantes antes de ingresar a la maestría, podemos decir que estas tenían el propósito de hacer consultas y de afianzar procedimientos trabajados en clase. Por ejemplo, una tarea típica de geometría es la siguiente: “Encuentre el ancho de un rectángulo donde su largo mide 35cm y su área es de  $250\text{cm}^2$ ” (planeación de clase de Cristian); otra tarea es “la consulta de la fórmula para hallar el área de un triángulo” (planeación de clase de Andrés). Otra anotación adicional es que antes de ingresar a la maestría nuestras tareas tenían básicamente un componente que era un enunciado y se tenían en cuenta unos requisitos, unas metas y unos materiales.

Con relación al documento elaborado por Cristian y sus compañeros de trabajo, en este se asume que la argumentación depende del razonamiento. Se hace referencia a los siguientes asuntos:

- La definición de razonamiento: se dice que el razonamiento es la facultad de resolver una situación y obtener una conclusión;
- Los propósitos del razonamiento en la clase de matemáticas: estos propósitos son generar argumentos, construir ideas y participar en las actividades;
- Elementos del razonamiento: se menciona la creatividad como elemento del razonamiento para abordar diferentes soluciones de una tarea.

El conocimiento reportado en el documento es fruto de las discusiones que tienen los profesores del grupo en las reuniones de matemáticas, exposiciones entre los colegas y lecturas de algunos autores como: Pierce (1902), Skovsmove (1999), Fernández (2005) y Henao (2016).

En el documento elaborado por el grupo de investigación en el que trabaja Cristian, se dan evidencias de los resultados de un trabajo para desarrollar el razonamiento de los estudiantes. En particular se ha intentado promover el razonamiento abductivo, el grupo ha considerado que los estudiantes pueden generar argumentos abductivos si ponen en juego su creatividad. Pero no se ha avanzado al identificar cómo promover el desarrollo de la argumentación abductiva y tampoco se ha establecido una estructura para que estos sean abductivos.

## **10.4 Anexo 4: Texto Narrativo Uno**

### **Estadio uno de nuestro conocimiento didáctico-matemático, sobre tareas, argumentación y entornos de geometría dinámica**

En lo que sigue, informamos sobre evidencias de nuestro conocimiento didáctico matemático acerca de tareas, argumentación y EGD, derivado del trabajo realizado en el primer semestre de la Maestría. Los avances en nuestro conocimiento se lograron principalmente por nuestra participación en el programa de formación, en las actividades realizadas en los seminarios: Diseño y Desarrollo Curricular (DDC), Profundización en Matemáticas Elementales (PME) y en la elaboración del anteproyecto del trabajo de grado. Las evidencias fueron recogidas en: apuntes que tomamos en las clases, resúmenes de conferencias, charlas con los compañeros, tareas que desarrollamos en los diferentes espacios académicos, exposiciones hechas en los seminarios y en reseñas, síntesis y mapas conceptuales de lecturas personales o de lecturas propuestas por los profesores. Con esta información pretendemos tener insumos para caracterizar nuestro conocimiento y contrastarlo con el Texto Narrativo Base para identificar elementos de su transformación.

En lo que sigue, dado el volumen de la información reportamos el Texto Narrativo Uno en cuatro apartados. Un primer apartado para referirnos a las tareas, un segundo sobre argumentación, el tercero sobre los EGD y un último sobre la relación entre tareas, argumentación, EGD y geometría. El orden corresponde a la secuenciación con la que se organizó y depuro la información registrada.

#### **Conocimiento didáctico-matemático sobre tareas**

Hemos agrupado la información que dará cuenta de nuestro conocimiento en tres asuntos: información relacionada sobre lo que entendemos por tarea, información sobre el diseño de tarea e información sobre el análisis de tareas. A continuación, nos referimos a cada uno de ellos.



### *Conocimiento didáctico-matemático sobre lo que entendíamos por tarea*

En cuanto a tarea, al revisar nuestros apuntes y demás fuentes de información encontramos manifestaciones que aluden al significado de tarea, los propósitos de una tarea y los componentes de una tarea. Ellos son el reflejo del conocimiento que fuimos desarrollando en el primer semestre.

Sobre el significado de tarea y su diferenciación de la noción de actividad, en nuestros apuntes al iniciar el primer semestre de 2020, en el curso DDC encontramos una interpretación de lo que entendíamos por esta: una tarea es lo que el profesor solicita al estudiante que haga y una actividad es lo que el estudiante hace con la tarea. Este significado contrasta con la conceptualización de tarea que teníamos previa al ingreso la maestría.

Además de la conceptualización de tarea, encontramos en un resumen de una lectura realizada en el seminario DDC menciones a los propósitos de una tarea. Escribimos que las tareas de geometría no solo deben permitir hacer construcciones y exploraciones, sino también poder exponer argumentos y generar discusiones. Junto con esto, manifestamos que las tareas que propone el profesor buscan brindar oportunidades para que los estudiantes logren las expectativas de aprendizaje y superen sus limitaciones.

En cuanto a los componentes de una tarea de geometría, encontramos en diferentes tareas propuestas en el seminario PME mención a dos de ellos: un enunciado y una solicitud al estudiante que realice un procedimiento de construcción, una exploración, una conjetura o una demostración. En diferentes tareas propuestas en el seminario PME trabajamos con tareas que tenían estos dos componentes.

Lo anterior contrasta con el conocimiento que teníamos antes de la maestría, dado que solo mencionábamos un componente en nuestras tareas y no había solicitudes explícitas de adelantar procesos propios de la actividad matemática. Por ejemplo, hacer una construcción, realizar una exploración, hacer una modelación, efectuar razonamientos, y hacer ejercitación de procedimientos.

### *Conocimiento didáctico-matemático sobre el diseño de tarea*

En nuestros registros de ideas extraídas de lecturas de documentos, un mapa conceptual y algunas tareas propuestas en el seminario de DDC, encontramos alusiones al diseño de tareas. En ellos hacemos referencia a la importancia del diseño de tareas, a los principios para el diseño y a elementos para el diseño.

Con relación a la importancia del diseño de tareas, en una de las versiones del anteproyecto mencionamos que este brinda oportunidades a los profesores, para que en el desarrollo de estas los estudiantes logren las expectativas de aprendizaje y superen sus limitaciones.

En cuanto a los principios para el diseño de una tarea, en el seminario DDC del primer semestre de la maestría, realizamos un mapa conceptual (ver fragmento en Figura 1) que deja ver los principios que estudiamos con base en el documento de Lin y otros (2012). En el fragmento se observa que mencionamos principios para tres tipos de tarea: de conjeturar, de probar y tareas que apuntan al tránsito entre conjeturar y probar.

En el fragmento, se esquematiza que los principios para tareas de conjeturar aluden a la necesidad de promover la formulación de conjeturas como una oportunidad para: promover la participación en la observación y la construcción; promover una oportunidad para la reflexión; y promover una transformación de su conocimiento previo, para brindar a los estudiantes oportunidades para generar conjeturas.

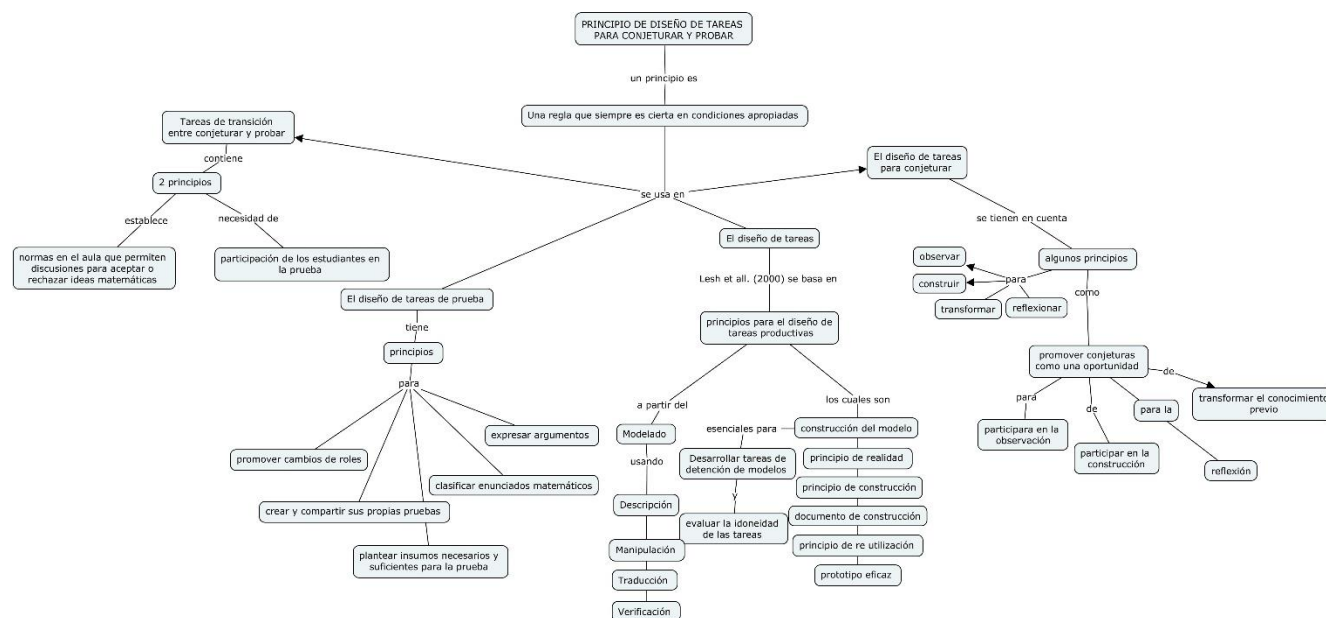
Los principios de diseño de tarea para la prueba se refieren a la necesidad: de impulsar la clasificación de diferentes enunciados matemáticos según la información dada; de presentar argumentos de diferentes formas; de colocarse en el papel del estudiante para mirar diferentes formas de proceder; de darse la posibilidad de explorar como un medio para obtener insumos suficientes para probar; y permitir que se expongan y compartan diferentes pruebas.

Los principios de diseño de tarea que apuntan al tránsito entre conjeturar y probar aluden a establecer normas en el aula que generen discusiones en las cuales se den argumentos. Estos argumentos buscan convencer, persuadir y establecer la necesidad de que el estudiante participe en la prueba.

En el mapa también mencionamos algunos principios para el diseño de tareas productivas de modelación, los cuales son: el principio de construcción de un modelo, el principio de realidad; el principio de construcción; el principio de documentación del constructo; el principio de utilización; y el principio de prototipo eficaz. Todos ellos son esenciales para desarrollar tareas de detención de modelos y evaluar la idoneidad de las tareas.

**Figura 10.1** Fragmento mapa conceptual. Realizado por Andrés

Fragmento mapa conceptual. Realizado por Andrés



Sobre los elementos para el diseño, en una tarea propuesta en el seminario DDC, hacemos referencia a un documento de Gómez (2016), el cual nos menciona siete elementos para el diseño de tareas, estos son: formulación, requisitos, metas, materiales y recursos, formas de agrupación, estrategias de interacción entre los estudiantes y profesor y su temporalidad. La formulación incluye los componentes de una tarea mencionados anteriormente.

### **Conocimiento didáctico-matemático sobre análisis de tareas**

Además de conceptualizar la tarea y referirnos a los principios de diseño de tarea, hacemos mención al análisis de tareas. Estos conocimientos se evidencian en apuntes de algunas tareas propuestas en los seminarios DDC y PME, algunas interpretaciones nuestras de presentaciones de los profesores titulares y síntesis de documentos leídos durante el semestre.

Respecto al análisis de tareas, en apuntes del seminario DDC encontramos cuatro momentos: concreción del tema, análisis de contenido, análisis cognitivo y análisis de instrucción. En cuanto a la concreción del tema, hacemos mención al análisis de los preconceptos, al curso al que va dirigido, a las características de la población, a lo que se propone en los documentos curriculares, a las expectativas del profesor y a las características de la institución. En el análisis de contenido encontramos que se debe tener en cuenta la estructura conceptual (conceptos y procedimientos) y representaciones. En el análisis cognitivo, escribimos que se debe establecer un objetivo de aprendizaje e identificar posibles errores y dificultades. En el análisis de instrucción para el diseño de tareas, identificamos que se debe establecer en qué medida y de qué forma la tarea proporciona los elementos propuestos por Gómez (2016), para contribuir a las expectativas de aprendizaje. Estos momentos de análisis, fueron conocimientos adquiridos en la primera sesión de clase de la Maestría y abordados durante el semestre.

A continuación, presentamos dos diseños de tareas que realizamos en el seminario DDC producto del trabajo que se llevó a cabo. Al iniciar el seminario, diseñamos la siguiente tarea “Dado un cuadrilátero  $ABCD$ , sus diagonales  $(AC)$  y  $(BD)$ ,  $(AC) \cap (BD) = X$ . Si  $AX = XC$  y  $BX = XD$  ¿Qué tipo de cuadrilátero es? y ¿qué propiedades cumple?”. Finalizando el seminario se diseñó la siguiente tarea. “En grupos de tres estudiantes, en un tiempo de 60 minutos desarrollen la siguiente situación: Dados los  $\overline{AC}$  y  $\overline{BD}$ , tal que su intersección es un punto  $E$ . ¿Qué condiciones debe cumplir el punto  $E$  para que el  $\square ABCD$  sea un paralelogramo?

- Describe el procedimiento de la construcción en GeoGebra.
- Realiza y reporta una exploración de los objetos geométricos.
- Formula una conjetura que responda a la pregunta planteada en el problema.
- Explica por qué consideras que dicha conjetura es válida”.

### **Conocimiento didáctico matemático sobre argumento.**

Hemos dividido la información encontrada sobre argumento en cuatro grandes aspectos: la conceptualización de argumento, la estructura de un argumento, tipología de argumentos y la relación entre los momentos en la resolución de un problema y tipos de argumentos.

### *Conocimiento didáctico matemático sobre la conceptualización de argumento*

En cuanto argumento, en nuestros apuntes de los distintos seminarios, desarrollo de situaciones de conjeturación, síntesis de lecturas, encontramos alusiones a: la conceptualización de argumento y de argumentación; una diferenciación conceptual entre argumento y argumentación; usos de los argumentos; y, posibles relaciones entre argumento y demostración, argumento y razonamiento y argumento y prueba. Esto es el reflejo del conocimiento didáctico matemático sobre argumento, que adquirimos en el transcurso del primer semestre de maestría.

Con relación a la conceptualización de argumento, encontramos en apuntes del seminario Innovación e Investigación una distinción entre argumento y argumentación. Escribimos que la argumentación es un proceso mediante el cual se produce un discurso oral o escrito, que tiene como objetivo llegar a una conclusión mutuamente aceptable acerca de una declaración, en donde se debate la veracidad de dicha declaración. Mientras que por argumento entendimos que este es el resultado del proceso de argumentar. La conceptualización de argumentación guarda relación con lo que se mencionó en una de las propuestas iniciales sobre la función de la argumentación. Andrés escribió que este es un proceso mediante el cual se busca exponer y defender ideas en la clase de matemáticas y al mismo tiempo favorecer procesos de demostración en el aula.

En una síntesis del documento de Durand-Guerrier, Boero, Douek, Epp, & Tanguay, (2012) encontramos alusiones sobre los usos de un argumento, que se puede usar para establecer certidumbre o para buscar persuadir. Cuando se busca establecer certidumbre, es porque el individuo quiere eliminar dudas propias sobre la veracidad o falsedad de una declaración. Cuando se busca persuadir, es porque se quiere eliminar dudas que tengan los demás sobre la verdad o falsedad de una declaración.

Además de la conceptualización de argumento, argumentación y los usos de un argumento, en nuestros escritos encontramos alusiones a relaciones entre argumento y demostración, argumento y razonamiento, y argumento y prueba:

- ❖ En cuanto a la relación entre argumento y demostración, encontramos que nuestros apuntes del seminario PME que la demostración es la prueba de un argumento, fundamentada por afirmaciones matemáticas para dar validez.

- ❖ Respecto de la relación entre argumento y razonamiento, escribimos en nuestros apuntes del seminario Innovación e Investigación que el argumento es la expresión discursiva del razonamiento.
- ❖ Sobre la relación entre argumento y prueba, mencionamos en nuestros apuntes del seminario DDC que la prueba puede ser vista como un argumento o afirmación con ciertas características para validar una afirmación matemática. Estas características son: declaraciones aceptadas por la comunidad en el aula, formas de razonamiento válidas y conocidas o que están dentro del alcance conceptual y se comunican con formas de expresión que son apropiadas y conocidas por la comunidad.

### ***Conocimiento didáctico matemático sobre la estructura de argumento***

Sobre la estructura de un argumento, en nuestros registros de información identificamos menciones a los elementos que componen un argumento. Este conocimiento fue registrado de apuntes de exposiciones, síntesis de la lectura de Molina y Samper (2019) y la solución de problemas abiertos de geometría en el seminario PME.

Con relación a los elementos que componen un argumento, escribimos que un argumento tiene una estructura ternaria, compuesta por: el dato, la aserción y la garantía. El dato es una proposición particular que se expresa verbalmente o a través de imágenes, que busca apoyar la aserción. La aserción es la tesis o conclusión que se va a defender, el asunto a debatir o a sostener de forma oral o escrita. La garantía es un conjunto de proposiciones aceptadas como válidas en un sistema teórico propuestas por el que enuncia el argumento, que juegan el papel de conectar los datos con las aserciones.

### ***Conocimiento didáctico matemático sobre tipología de argumentos***

En cuanto a la tipología de argumentos, evidenciamos en nuestros apuntes y síntesis de tareas del curso PME alusiones a: criterios para establecer una tipología de argumentos; tipos de argumentos, y clasificación de los argumentos según su estructura. Estos conocimientos son el producto del desarrollo de tareas de geometría que trabajamos en la clase y de una síntesis del artículo de Molina y Samper (2019).

Sobre los criterios para establecer una tipología de argumento, en apuntes de la lectura de la tesis de maestría de Triana y Zambrano (2016), escribimos que se pueden diferenciar según: el orden en el que se construyen los elementos del argumento, los elementos que se explicitan y la garantía. Según el primer tipo se clasifican en argumento inductivo, argumento deductivo y argumento abductivo. Según el segundo tipo se clasifican en completos o incompletos. Según su garantía, el argumento se clasifica en empírico o teórico.

Con respecto a la tipología de argumentos según el orden en que se construyen, en apuntes de la lectura del documento de Molina y Samper (2019) y de exposiciones del seminario PME, encontramos evidencia de tres tipos de argumentos:

- Argumento inductivo: se genera a partir de una regla general (conjetura), producto de la observación repetida de situaciones, a partir de unos datos dados comunes y se nota que el resultado siempre es el mismo. El orden para un argumento inductivo es dato, aserción y garantía.
- Argumento deductivo: se da cuando se parte de premisas, que se suponen verdaderas y se deduce una conclusión que se considera como verdadera. En el caso del argumento deductivo el orden es dato, garantía y aserción.
- Argumento abductivo: inicia a partir de la observación de un resultado, se cuestiona acerca de qué datos pudieron ocasionarlo, busca reglas generales que tienen que ver con el resultado, y extrae unas posibles condiciones iniciales. Para un argumento abductivo le orden es aserción, garantía y dato.

Cristian y sus compañeros de trabajo, en el documento que fundamenta la investigación que están realizando, mencionan una conceptualización sobre argumento abductivo basados en autores como Fernández (2005). Ellos dicen que la abducción: “se construye a partir un conjunto de sentencias dadas, asumiendo encontrar una solución a partir de una hipótesis explicativa”. Según la interpretación las aserciones son el conjunto de sentencias, justificar una solución sería la garantía y la hipótesis explicativa a la que se llega sería el dato.

## **Conocimiento didáctico matemático sobre EGD**

En este apartado se muestran evidencias de nuestro conocimiento didáctico matemático acerca de los EGD. Hemos dividido las evidencias en los siguientes aspectos: definición de EGD, función de los EGD, tipos de construcciones en EGD y el efecto de los EGD en la actividad matemática de estudiantes.

En nuestros apuntes del seminario Investigación e Innovación encontramos una definición de Tecnología Digital: una Tecnología Digital es un dispositivo diseñado para manipular información representada en forma digital. También anotamos que un tipo de Tecnología Digital es el software especializado de geometría dinámica. En nuestras propuestas iniciales con las que ingresamos a la maestría no aludimos a los EGD específicamente, pues nuestras reflexiones se basaron en la Tecnología Digital en forma general. Sin embargo, en el primer semestre nuestros intereses se encaminaron hacia los EGD.

Respecto a la función de un EGD, en nuestro anteproyecto aludimos a que: “este tiene el potencial de favorecer de manera significativa el aprendizaje de las matemáticas en el aula, porque permite que los estudiantes usen herramientas para la exploración, la construcción y el descubrimiento de propiedades de los objetos geométricos”.

Sobre los tipos de construcciones en EGD, escribimos en nuestros apuntes del seminario de DDC, que son dos: blandas y robustas. Aun cuando en nuestros registros escritos no encontramos una diferenciación, en ese momento entendíamos que, en una construcción robusta las propiedades que caracterizan a un objeto geométrico se mantienen invariantes frente a transformaciones de posición o tamaño, mientras que en una construcción blanda no. Dijimos que las construcciones robustas permiten una mejor visualización de los elementos constitutivos de los objetos geométricos. Hicimos referencia a este tipo de construcciones, puesto que, para el desarrollo de las tareas propuestas en el seminario, se hacía necesario realizar construcciones robustas y no construcciones blandas.

En cuanto a los efectos de los EGD en la actividad matemática de estudiantes, en apuntes e interpretaciones de una exposición del seminario de DDC hicimos una comparación con los entornos de lápiz y papel. Mencionamos que cuando los estudiantes usan EGD tienen la



posibilidad de comprobar si sus representaciones son correctas o no, sin necesidad de esperar el juicio del profesor para validar sus resultados.

### **Conocimiento didáctico matemático sobre la relación entre Tareas, argumentación, EGD y geometría**

En los registros de información correspondientes al primer semestre de la maestría, encontramos alusiones de nuestro conocimiento didáctico matemático, en el que se establecen relaciones diádicas entre los cuatro elementos principales de nuestro estudio. A continuación, nos referimos a las diadas que hallamos.

En los apuntes del seminario de DDC establecimos relaciones entre el diseño de tareas que se valen de los EGD. En estos registros nos referimos a algunos elementos que se deben tener en cuenta cuando se diseña o se analiza una tarea que se vale de estos recursos. Entre los elementos mencionamos los siguientes:

- Prever la actividad de los estudiantes, como un espacio para determinar si la tarea permite realizar construcciones auxiliares que provean las condiciones necesarias para la exploración de propiedades de un objeto existente. Estas consideraciones tienen que ver con: el tipo de construcciones que realizan los estudiantes (principales y auxiliares), si la tarea favorece la exploración, la búsqueda de propiedades de objetos e información nueva, etc.
- Estudiar a fondo el potencial del software, el rol que va a desempeñar en la tarea y los obstáculos que acarrea el uso de software. En particular hay que anticipar que tan eficaz o eficiente es el recurso como apoyo a la solución de las tareas. Las diferentes herramientas que proporciona el EGD deben permitir enriquecer y comprobar la hipótesis con trazos auxiliares, y automatizar ciertos procedimientos.

Sobre la relación entre el diseño de tarea y la argumentación, encontramos en nuestros registros una mención a esta. En una de las versiones del anteproyecto, aludimos a las condiciones de las tareas para generar argumentación. Para estas condiciones es indispensable que una tarea de geometría permita que el estudiante genere diferentes tipos de argumentos. Esto depende del enunciado que se proponga y de si la tarea lleva a generar una conjetura. Es importante

mencionar que no se profundizó en las condiciones necesarias para que una tarea genere argumentación, y no se tiene claridad acerca del tipo de enunciado que se debe proporcionar y si necesariamente la tarea debe ser de conjeturación para que el estudiante argumente.

También encontramos en apuntes del seminario de PME una relación entre la argumentación y los EGD. En este apunte aludimos al papel que juega la herramienta arrastre para favorecer la argumentación. Los diferentes tipos de arrastre en un EGD permiten observar y explorar representaciones de objetos geométricos en diversas situaciones. Esto favorece la producción de argumentos para dar validez a afirmaciones que se hacen en el curso de la resolución de un problema.

Además de las relaciones diádicas entre tareas, argumentación y EGD, encontramos una alusión a la relación entre geometría y argumentación. En el anteproyecto mencionamos que los lineamientos curriculares (MEN) proponen que la geometría es una herramienta que “[...por excelencia desarrolla el pensamiento espacial y procesos de nivel superior y, en particular, formas diversas de argumentación]”. A pesar de que en nuestro trabajo de grado la geometría es un elemento de interés, en nuestros apuntes y demás registros de información, no encontramos más alusiones a las relaciones entre la geometría y EGD, mucho menos con argumentación y tareas.

Vale mencionar que en cursos de pregrado abordamos problemas donde se trabajaba con algunas de estas relaciones. Sin embargo, en nuestras propuestas iniciales no se mencionó ni se hizo referencia a alguna de estas. Una de las relaciones que se hacía evidente en cursos de pregrado y seminarios de la maestría son las tareas de geometría y el uso de los EGD, pues estos entornos facilitaban el desarrollo de la tarea al realizar construcciones de objetos geométricos, explorar y generar conjeturas.

## **10.5 Anexo 5: Texto Narrativo Dos**

### **Texto Narrativo dos de nuestro de conocimiento didáctico matemático sobre argumento**

Para informar sobre el Estado dos de nuestro conocimiento didáctico matemático, a continuación, describimos las actividades contempladas en el Plan de acción del Ciclo 2. Además, informamos sobre las dudas e inquietudes acerca de la conceptualización de argumento, que han surgido en las interacciones entre nosotros y con la profesora al momento de implementar el plan, y los avances sobre nuestro conocimiento didáctico matemático de argumento.

El plan de acción incluye tres momentos: la fundamentación sobre argumento; el diseño de un curso corto para implementar con maestros de nuestros lugares de trabajo; y el desarrollo del curso. La descripción que se muestra a continuación se organizó teniendo en cuenta los momentos mencionados anteriormente y en el mismo orden.

### **Acerca de la Fundamentación**

Comenzamos buscando una fundamentación para argumento. La decisión de profundizar en la conceptualización sobre argumento vino del hecho de lo que encontramos consignando en los reportes del Estado base y del Estado uno, en el Ciclo uno. Al describir el Estado base, mencionamos que Andrés escribió en su propuesta inicial, con la que entró a la maestría, que “este es un proceso mediante el cual se busca exponer y defender ideas en la clase de matemáticas y al mismo tiempo favorecer procesos de demostración en el aula.”. En el escrito del Estado uno dijimos que “argumento es el resultado del proceso de argumentar”. Y que “argumentar es un proceso mediante el cual se produce un discurso oral o escrito, que tiene como objetivo llegar a una conclusión mutuamente aceptable acerca de una declaración, en donde se debate la veracidad de dicha declaración”. Esta definición está retomada tal como la propuso la profesora en el curso de Investigación e innovación del primer semestre. Lo anterior nos muestra que la conceptualización que teníamos sobre argumento no estaba suficientemente clara y sentíamos no tener una real apropiación del tema.

A partir de lo consignando en los documentos mencionados, vemos que teníamos confusiones sobre cómo interpretar un argumento. Por un lado, la profesor dijo que un argumento es el resultado de un proceso mientras que Andrés dijo que es el proceso. Por otro lado, la profesor

dijo que el objetivo de un argumento es llegar a una conclusión mutuamente aceptable acerca de una declaración, mientras Andrés dijo que el argumento busca defender ideas en la clase de matemáticas y favorecer procesos de demostración.

Para tener una conceptualización más clara de argumento, iniciamos una búsqueda en bases de datos en documentos de educación matemática que definieran argumento o argumentación. A partir de la búsqueda y la lectura de varios documentos, seleccionamos cinco de ellos, de los cuales tomamos las definiciones que se proponían para el ámbito educativo (Ver Tabla 9.1) para realizar una comparación de estas y poder construir nuestra propia definición.

**Tabla 10.1** *Definiciones de argumento*

*Definiciones de argumento*

<b>Autores</b>	<b>Definición de argumento o argumentación</b>
Samper y Lara (2014), citando a Pedemonte (2007)	Argumento: Enunciado oral o escrito de estructura ternaria que busca convencer o persuadir sobre la veracidad de un hecho particular.
Hanna (2008)	Argumento: Razón o razones ofrecidas a causa o en contra de una proposición, opinión o medida.
Carvajal, Martínez y Valverde (2019)	Argumento: Conjunto de proposiciones dirigidas a mostrar que una de ellas está justificada por las restantes.
Durand-Guerrier, Boero, Douek, Epp y Tanguay (2012)	Argumentación: Cualquier discurso escrito u oral realizado de acuerdo con reglas compartidas y cuyo propósito es llegar a una conclusión mutuamente aceptable sobre una aserción cuyo contenido o verdad está en debate.
Grupo Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría (AEG) de la Universidad Pedagógica Nacional (2020).	Argumento: Expresión discursiva escrita u oral conducida de acuerdo con normas compartidas y que tiene por objetivo exponer razones (justificar) para sustentar una postura o aserción, cuyo contenido o verdad se está considerando. El argumento incluye la aserción o la conclusión que se sustenta con la justificación.

Para lograr una definición significativa de argumento, optamos por usar la siguiente estrategia que pusimos en juego en una reunión del equipo:

Primero, propusimos la siguiente expresión que creíamos que era un ejemplo de argumento, pues es similar a las trabajadas como argumento en el curso Profundización en Matemáticas Elementales: “El cuadrilátero ABCD tiene las diagonales congruentes y se bisecan entonces el cuadrilátero ABCD es un rectángulo, porque, si las diagonales de un cuadrilátero son congruentes y se bisecan el cuadrilátero es un rectángulo”.

Segundo, evaluamos cada definición incluida en la Tabla 1, con respecto a lo dicho sobre argumento en el Estadio 1 del conocimiento didáctico matemático y a la expresión que usamos como ejemplo. A continuación, presentamos los resultados del ejercicio realizado e intentamos sentar una postura sobre lo que entendemos por argumento.

Lo primero que hicimos fue descartar dos de las definiciones. La definición de Hanna (2008), porque no alude a una idea o una declaración, solamente se refiere a un conjunto de razones, pero no se hace explícito, tal como se propone en el ejemplo y en la definición del curso Investigación e innovación que deba estar enunciada la declaración que motiva las razones. La definición de Durand, et al. (2012), porque se refiere al proceso de argumentación y no al resultado de este como el caso de la expresión que propusimos como ejemplo.

El ejemplo que proponemos se ajusta a la definición que proponen Samper y Lara (2014; tomada de Pedemonte, 2007). Esto porque se refiere a un enunciado oral o escrito de estructura ternaria. Pero no nos satisface el propósito de convencer o persuadir sobre la veracidad de un hecho particular, porque es posible que la persona que este argumentando este convencido o persuadido del hecho y solo necesite justificar las razones de por qué se afirma algo. Por ello, tomamos algunos elementos de la definición, pero no la adoptamos en su totalidad.

La definición de Carvajal, Martínez y Valverde (2019) nos llama la atención porque define argumento como conjunto de proposiciones, dirigidas a mostrar que una de ellas está justificada por las restantes y así está construido el ejemplo que propusimos. Pero creemos que es deficiente en cuanto a que no se hace explícito que es un enunciado oral o escrito, por lo que las proposiciones podrían ser solo mentales y no se manifiesten.

Sobre la definición del grupo AEG (2020), nos parece importante que se defina al argumento como expresión discursiva escrita u oral y que se refiera a que es conducida de acuerdo con normas compartidas. Pero la definición incluye acciones por lo que alude al proceso de argumentación y no al resultado de este.

Por lo anterior, uniendo lo que nos pareció importante de cada una de las definiciones estudiadas, proponemos la siguiente como definición de argumento.

*Un argumento es una expresión discursiva, escrita u oral, elaborada de acuerdo con normas compartidas, compuesta por un conjunto de proposiciones y que tiene como propósito mostrar que una de ellas está justificada por las restantes.*

Gracias a la conceptualización a la que llegamos, nos dimos cuenta de que un argumento está compuesto por un conjunto de proposiciones. Esto nos llevó a preguntarnos de cuántas proposiciones estamos hablando y qué papel juega cada una de ellas. Además, nos llevó a pensar en la estructura de un argumento, lo cual asociamos con los tres elementos de un argumento, consignados en el Estado Uno: dato, garantía y aserción.

Sin haber consultado lo escrito en el Estado uno, inicialmente propusimos nuestras interpretaciones de lo que entendíamos en este momento del Plan de acción por dato, garantía y aserción. Cristian dijo que entendía el dato como la información que se da y justifica la aserción; aserción como la declaración a la que se llega; y garantía como la regla general o regla evocada que justifica el puente entre el dato y la aserción. Andrés mencionó que entendía el dato como la información del enunciado de un ejercicio o de lo que quiere decir el ejercicio; la aserción como la información que justifica el dato; y la garantía como la información que justifica al dato y a la aserción. Como no compartíamos la misma interpretación, Cristian intentó aclarar a Andrés su posición, pero como él manifestó no entender, decidimos realizar una búsqueda de definiciones de los elementos de la estructura de un argumento.

**Tabla 10.2** *Definiciones de elementos de un argumento.*

*Definiciones de elementos de un argumento.*

Autores	Definición de elementos de un argumento
Pedemonte 2002	Un argumento en el modelo de Toulmin está compuesto por un esquema ternario: Aserción: la declaración o conclusión que el interlocutor aporta, Datos: una serie de datos que justifican la declaración (Aserción), Garantía: el permiso de establecer una regla, un principio general capaz de servir de base para esta inferencia, para construir un puente entre Datos y aserción.
Knipping, Papadaki y Reid (2019)	Un argumento incluye los siguientes elementos: C (reclamación o conclusión) la declaración del orador, D (datos) son datos que justifican C, W (garantía) la regla de inferencia que permite que los datos estén conectados a la reclamación
Molina y Samper (2019)	En cualquier argumento, inicialmente se expresa un punto de vista (una afirmación, una opinión), denominado aserción ( <i>q</i> ) (claim en términos Toulminianos); luego se proporcionan datos ( <i>p</i> ) (o data) para apoyar la aserción. La garantía ( <i>r</i> ) (o warrant) justifica el uso de los datos como soporte para la aserción. La garantía, que puede ser expresada como un principio o una regla, actúa como un puente entre los datos y la aserción

Comparamos las definiciones con nuestras interpretaciones y nos dimos cuenta que Cristian coincidía con los autores respecto a la aserción y a la garantía. Pero, con respecto al dato, vimos que no era conveniente referirnos a este como “información que se da” pues faltaba precisión en la formulación. Como resultado de esta comparación, propusimos las siguientes definiciones:

Dato: conjunto de razones que justifican la aserción;

Aserción: declaración o conclusión a la que se llega;

Garantía: regla general o regla evocada que justifica el uso de los datos como soporte para la aserción.

Según las definiciones que propusimos, escribimos el siguiente ejemplo que creíamos que era un argumento “Aplicando la fórmula  $\frac{n(n+1)}{2}$  donde *n* es la posición del número de puntos de una secuencia de números triangulares, en la posición 30 el número triangular que corresponde es 465”. Pretendimos identificar en este, cada elemento. Cristian consideró que el dato es “*n* es la posición del número de puntos de una secuencia de números triangulares”; la aserción “en la posición 30 el número triangular que corresponde es 465”; y la garantía “la fórmula  $\frac{n(n+1)}{2}$ .”

Andrés no logró diferenciar las proposiciones, de acuerdo con su interpretación. Al discutir el asunto con nuestra asesora de trabajo de grado, ella afirmó que aún teníamos vacíos sobre la diferenciación de los elementos de un argumento relacionados identificar que parte del enunciado es razón o justificación de qué otra parte y necesitábamos aclararlos. Para ello, nos apoyamos en el documento de Knipping y Reid (2019), y a partir de las discusiones propusimos las siguientes definiciones con las que hicimos una reformulación del ejemplo propuesto anteriormente.

- Dato: son hechos empíricos que apoyan la aserción. En el ejemplo: “ $\frac{30 \times 31}{2}$ ”
- Aserción: declaración que se pretende soportar. En el ejemplo: “en la posición 30 el número triangular es 465”.
- Garantía: regla general que actúa como puente entre los datos y la aserción (legitima el paso de la aserción a la garantía). En el ejemplo: “la formula  $\frac{n(n+1)}{2}$  donde n es la posición, nos permite hallar los números triangulares para cada n”.

Además de la reformulación del ejemplo anterior, proponemos otro argumento para reafirmar nuestro conocimiento didáctico matemático sobre la estructura y elementos de un argumento. El ejemplo es el siguiente:

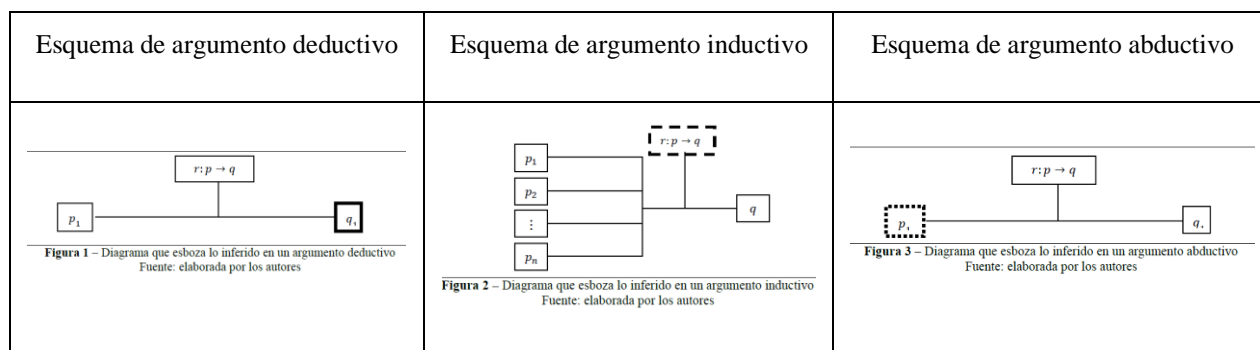
El  $\square ABCD$  es paralelogramo entonces  $\angle ABC$  y  $\angle BCD$  son suplementarios por el teorema de Paralelogramo-ángulos, si un cuadrilátero es paralelogramo entonces los ángulos adyacentes son suplementarios. El dato es: “El  $\square ABCD$  es paralelogramo”; la aserción es: “ $\angle ABC$  y  $\angle BCD$  son suplementarios”; y la garantía es: “el teorema de Paralelogramo-ángulos, si un cuadrilátero es paralelogramo entonces los ángulos adyacentes son suplementarios”

Al llevar a cabo el Plan de acción, también nos hemos concentrado en profundizar en los tipos de argumento: deductivo, inductivo y abductivo. Decidimos hacer una revisión bibliográfica y consultamos principalmente los documentos de Molina y Samper (2019) y Lara (2014). En el texto de Molina y Samper los autores mencionan cómo tipificar argumentos y establecen unos esquemas diferenciados para cada tipo de argumento que nos parecen una forma adecuada de representar cada tipo de argumento porque nos permiten identificar el proceso adelantado en la argumentación, que llevó a elaborar un argumento (Figura 9.2).



**Figura 10.2** Esquemas de tipos de argumentos, sugeridos por Molina y Samper (2019)

Esquemas de tipos de argumentos, sugeridos por Molina y Samper (2019)



En el documento de Lara (2014) se propone cómo tipificar un argumento deductivo, uno abductivo y uno inductivo:

Argumento deductivo: si a partir de los datos y usando la garantía se obtiene la conclusión.

Argumento abductivo: cuando conociendo la conclusión, se infieren los posibles datos y con ello la garantía que permite deducir dicha conclusión.

Argumento inductivo: con el cual se establece la garantía a partir de varios ejemplos para los cuales los datos y la conclusión son los mismos.

Basados en estas definiciones y esquemas, como un ejercicio de recapitulación, preparamos una presentación que realizamos a nuestra asesora en la cual incluimos la siguiente afirmación de Molina y Samper (2019) “La forma como se relacionan las proposiciones particulares (datos y aserción) y la general (garantía) define el tipo de argumento: deductivo, inductivo o abductivo”. La profesora nos preguntó cómo entendíamos la frase a la luz de nuestra definición de argumento. Mencionamos que, según nuestra definición las proposiciones de un argumento se relacionaban siempre de la misma manera: una era justificada por las demás. Por eso, la forma de relacionarse no podía lo que diferenciaba el tipo de argumento. En cambio, en el proceso de argumentación sí se puede hacer una distinción entre los tipos de argumentos según la manera en que las proposiciones componen la expresión discursiva.

La profesora también nos cuestionó sobre las definiciones de los tipos de argumentos propuestas por Lara (2014). Caímos en cuenta que, para ser consistentes con nuestra definición, debería mencionarse que se está considerando el proceso de argumentación y no el argumento mismo.

Un último aspecto de la fundamentación fue detenernos en el argumento abductivo, porque es el objeto principal de nuestro trabajo de grado. Esto nos permitió estudiar a profundidad su estructura, la relación de los elementos y la forma de construir un argumento abductivo.

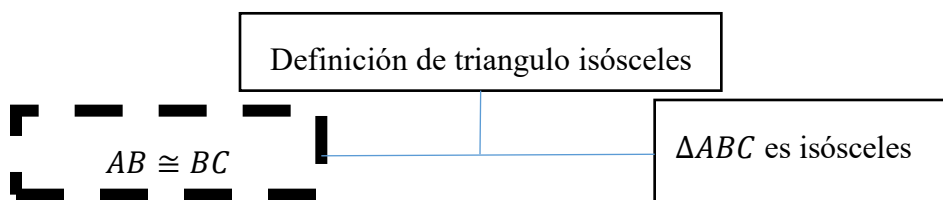
Para reconocer si un argumento es abductivo, debemos fijarnos en el proceso de argumentación que condujo a su formulación, porque el enunciado de este, según nuestra definición de argumento, no permite identificar el tipo. Por esta razón, Molina y Samper (2019) acuden a un esquema que, además de representar las relaciones entre elementos de la estructura ternaria, a la manera de Toulmin (ver Figura 9.2, Esquema argumento abductivo), resaltan cual es la proposición que se infiere en el proceso de argumentación. En el caso de un argumento abductivo en la argumentación se parte de la aserción (cuadro línea delgada continua), se infiere en dato (cuadro negrilla punteada) y se justifica el paso del dato a la aserción, mediante la garantía (cuadro línea delgada continua).

A manera de ejemplo, supongamos que desde el proceso de argumentación de la siguiente tarea “Dado el triángulo ABC, argumente porque es isósceles” se obtiene lo siguiente. Afirmo que el triángulo ABC es isósceles porque los lados AB y BC son congruentes por definición de triángulo isósceles. El esquema representa el proceso que se llevó a cabo para identificar que se está infiriendo un dato que justifica la aserción. En este caso el esquema hace referencia al diagrama de un argumento abductivo.

En las consultas que hicimos sobre argumento abductivo encontramos que algunos autores se refieren a tipos de argumentos abductivos. Por ejemplo, Pedemonte (2002) señala que existen dos: teórico y creativo. Un argumento abductivo teórico se establece cuando a partir de la conclusión se infiere el dato y lo respalda una regla general que está avalada por la comunidad y se reconoce como proposición verdadera, elegida en una exploración teórica. Un argumento abductivo creativo se establece cuando a partir de la conclusión se infiere un posible dato y se inventa una regla hipotética que proviene de una exploración empírica.

### Figura 10.3 Ejemplo de un argumento abductivo

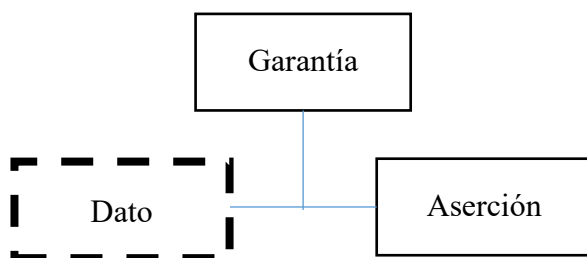
*Ejemplo de un argumento abductivo*



Al establecer dos tipos de argumentos abductivos, el esquema propuesto por Molina y Samper (2019) no se cumple para ambos. Basados en el esquema propuesto para un argumento abductivo, proponemos los siguientes esquemas para identificar los dos tipos.

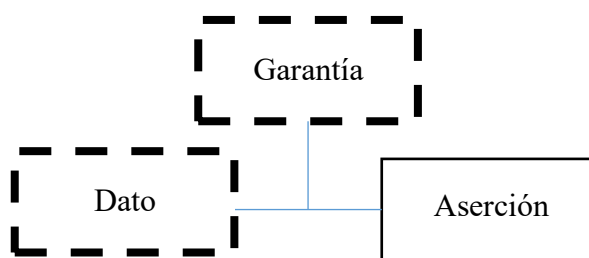
#### Figura 9.4

*Esquema de argumento abductivo teórico*



#### Figura 9.5

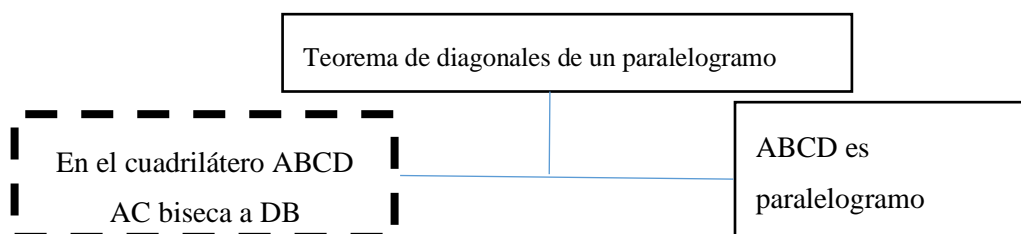
*Esquema de argumento abductivo creativo*



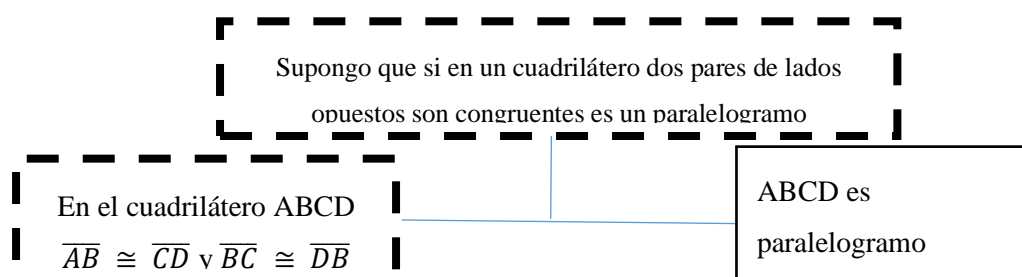
Para el esquema de un argumento abductivo teórico usaremos el propuesto por Molina y Samper (2019), para el esquema un argumento abductivo creativo proponemos el de la Figura 9.5, en el cual podemos identificar que la garantía proviene de una regla hipotética o inventada (el cuadro será de línea punteada). Un ejemplo de esquema de un argumento abductivo teórico es el de la Figura 9.6 y un ejemplo de un esquema de argumento abductivo creativo es el de la Figura 9.7.

**Figura 9.6**

*Ejemplo de un argumento abductivo teórico*

**Figura 9.7**

*Ejemplo de un argumento abductivo creativo*



### Preparación del curso

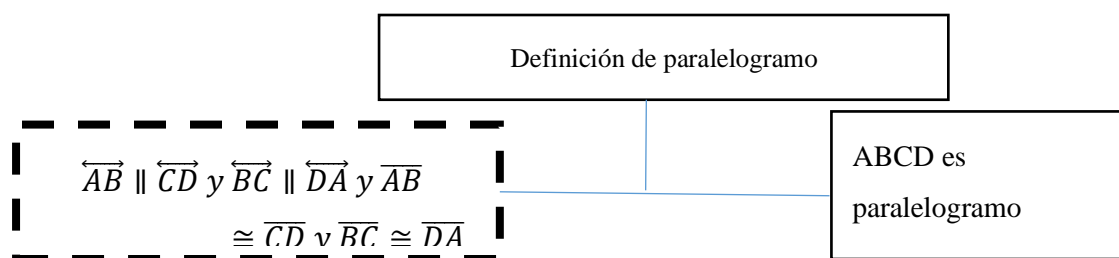
En el segundo momento del plan de acción, propusimos un curso corto de fundamentación para nuestros compañeros de trabajo. Consideramos que el curso, debería estar organizado de la siguiente manera: la construcción o elección de una definición de argumento, los elementos de un argumento y la fundamentación de un argumento abductivo.

El curso se llevará a cabo con colegas que son profesores de matemáticas de la Escuela Pedagógica Experimental. El trabajo se abordará con seis profesores, cuatro de ellos de bachillerato y dos de primaria. Los profesores de bachillerato son dos licenciados en matemáticas y dos en Física. Los profesores de primaria, uno es licenciado en física y la otra profesora psicóloga. Los profesores interactúan con Cristian una vez a la semana en un espacio de trabajo académico conjunto, donde se abordan problemáticas del área de matemáticas y propuestas de fundamentación en didáctica de las matemáticas. Antes de la pandemia, cinco de los profesores conformaban un grupo de investigación “Razonamiento abductivo”, pero debido a las circunstancias actuales, no se han vuelto a reunir para avanzar en el proyecto.

Al preparar el curso decidimos plantear ejemplos de argumentos que les íbamos a proponer a los profesores, para que ellos identificaran en cada uno los distintos elementos de un argumento. Pero al inventarnos argumentos tuvimos dificultades para articular las proposiciones que los componían en una expresión discursiva, que claramente fuera un argumento. Esto debido a los conectores que usamos para acompañar las proposiciones al elaborar el enunciado. Planteamos ejemplos como el siguiente: “Dado el criterio Lado Angulo Lado de congruencia de triángulos, los  $\triangle ABC \cong \triangle DEF$  son congruentes si  $\overline{AB} \cong \overline{EF}, \angle A \cong \angle D, \overline{AC} \cong \overline{DE}$ .” En el enunciado usamos los conectores “dado” y “si” pero, cuando presentamos el ejemplo a nuestra asesora, ella nos hizo caer en cuenta que estos conectores no llevan a generar una expresión que muestre que una proposición se está soportando con otras. Adicionalmente, en el ejemplo, el conector “dado” está ligado a la garantía y no lo estábamos asociando con los hechos empíricos como debería ser.

Teniendo en cuenta lo dicho en el párrafo anterior, reformulamos el ejemplo así: “Según el criterio Lado Angulo Lado de congruencia de triángulos, los  $\triangle ABC \cong \triangle DEF$  son congruentes porque  $\overline{AB} \cong \overline{EF}, \angle A \cong \angle D, \overline{AC} \cong \overline{DE}$ .” Concluimos que para proponer un enunciado que sea un argumento los conectores que articulen las proposiciones deben ser de tal forma que la expresión refleje cómo dos de ellas justifican la otra.

Además de preparar ejemplos de argumentos, decidimos ilustrar a los profesores en el curso, el uso de esquemas para representar diferentes tipos de argumentos, en particular un argumento abductivo. Preparamos el siguiente esquema:



Al mostrar la representación a nuestra asesora, ella nos propuso que escribiéramos la expresión discursiva correspondiente. Nosotros consignamos: “Por definición de paralelogramo, el cuadrilátero ABCD es paralelogramo porque  $\overline{AB} \parallel \overline{CD} \text{ y } \overline{BC} \parallel \overline{DA} \text{ y } \overline{AB} \cong \overline{CD} \text{ y } \overline{BC} \cong \overline{DA}$ .”. Ella nos preguntó por qué la expresión no es un ejemplo de argumento abductivo. Su pregunta nos llevó a revisar una idea que habíamos planteado sobre la imposibilidad de distinguir en la

formulación qué tipo de argumento es. Al volver a leer la definición de argumento abductivo propuesta por Lara (2014) encontramos que una distinción entre un argumento abductivo y uno deductivo es que el primero expresa la plausibilidad de un dato mientras que el segundo señala la necesidad de la relación entre el dato y la aserción. Esto nos llevó a pensar en que era posible redactar una expresión discursiva que, mediante alguna frase, dejara la huella de la plausibilidad del dato, para poder reconocer el tipo de argumento. Además, caímos en cuenta de que un argumento construido a partir de una definición, como es el caso del ejemplo, no es apropiado para ilustrar un argumento abductivo porque establece una relación necesaria y no plausible.

A partir de la reflexión hecha, propusimos un nuevo ejemplo de argumento abductivo: “El cuadrilátero  $ABCD$  tiene un ángulo recto, posiblemente sea un rectángulo por el teorema que afirma que, si un cuadrilátero tiene tres ángulos rectos, es rectángulo”. En este evidenciamos que la huella de la plausibilidad del dato está en la palabra “posiblemente”

Adicionalmente, como parte de la preparación del curso, hicimos un seminario con cuatro colegas de la Maestría en Docencia de la Matemática de nuestra cohorte, para discutir con ellos las tareas que íbamos a proponer a los compañeros de nuestro lugar de trabajo. En dicho seminario, explicitamos algunos aspectos de nuestro conocimiento didáctico matemático sobre argumento, que nos llevaron a revisar planteamientos hechos previamente.

En primer lugar, analizamos la expresión “No es una circunferencia porque el centro no tiene la misma distancia hacia arriba o hacia los lados”. Dos compañeras la consideraban como argumento ya que una proposición justifica la otra, pero nosotros decíamos que no porque no había mínimo tres proposiciones. La divergencia de opinión nos llevó a revisar nuestra definición de argumento. Nos dimos cuenta de que las compañeras tenían razón puesto que nuestra definición no menciona una cantidad de proposiciones, pero sí menciona el propósito. Concluimos que un argumento puede tener dos proposiciones siempre y cuando el dato y la aserción estén presentes y la garantía esté implícita.

En segundo lugar, discutimos acerca de la calificación que le dimos a otro argumento propuesto por las compañeras como “malo” para referirnos a que el enunciado no cumplía a cabalidad con nuestra definición. Pero discutimos que hablar de “bueno o malo” de un argumento nos debería llevar a pensar en el contenido y no en la estructura, por ejemplo, si la garantía no proporciona un

puente entre los datos y la aserción. En ese sentido, la calificación del argumento como “bueno” o “malo” no era el propósito de la revisión que estábamos haciendo.

En tercer lugar, evaluamos si el siguiente ejemplo que mencionaron las compañeras es un argumento: “Quiero realizar un triángulo equilátero. Construyo un polígono regular de tres lados porque un polígono regular tiene sus lados y ángulos congruentes”. Desde nuestro punto de vista, no lo era ya que la expresión “quiero realizar un triángulo” no es una proposición que requiera de sustento. En el enunciado no se evidencia un propósito de justificar algo, salvo que quien la formuló hubiera querido decir “afirmo que este es un triángulo” al mencionar “quiero realizar un triángulo”. Esto nos deja ver el cuidado en la interpretación de cada una de las proposiciones y según la definición de argumento que haya adoptado, decir si lo es.

### **Implementación con compañeros del colegio**

Como tercer momento del plan de acción se llevó a cabo la implementación del curso con los profesores de manera virtual. Esta implementación permitió darnos cuenta de los siguientes aspectos de nuestro conocimiento didáctico matemático.

En la primera parte del taller realizamos un proceso de negociación entre los compañeros, para configurar una definición de argumento, luego les presentamos la estructura y elementos que componen a un argumento. Inicialmente pedimos a los profesores escribir su definición de argumento y ellos mencionaron las definiciones que se presentan en la Tabla 9.3.

### **Tabla 9.3**

*Interpretaciones de argumento por un grupo de profesores*

Es una explicación justificada.
Es una explicación, justificación frente a una situación problema o un ejercicio.
Es la razón que damos a algo con lo que estamos de acuerdo o en contra.
Conjunto de razonamientos ordenados que permiten sustentar una refutación o una justificación.
Es una explicación que se realiza de base sólida para soportar lo que se está mencionando.
Es un enunciado o una serie de enunciados para dar una explicación razonada a un evento o una situación. El argumento busca justificar o refutar algo.

Como ya dijimos, los profesores escribieron individualmente algunas definiciones de argumento. Posteriormente sucedió el intercambio comunicativo que presentamos a continuación. Cristian pidió a los profesores que miraran aspectos comunes de las seis definiciones propuestas. Aura hizo la primera comparación y ella consideró que la definición 1 (“es una explicación justificada”) y la 2 (“es una explicación, justificación frente a una situación problema o ejercicio”) eran similares, solo que en la definición 2 se hacía explícita una situación en la que se argumenta, al mencionar que se realiza “frente a una situación problema”. Desde nuestro punto de vista, Aura consideró el contexto del aula en donde se proponen problemas que favorecen la producción de argumentos. Pero, en relación con lo que nosotros conocemos, Aura no profundizó en la caracterización del tipo de problemas que se proponen para establecer unas razones con propósito mostrar que una de ellas está justificada por las restantes.

Después del primer intercambio Janeth intervino diciendo que “una palabra en común (en varias definiciones) es ‘explicación’”. La profesora Janeth usó esta palabra haciendo referencia a una expresión discursiva que es diferente a la que nosotros consideramos que es argumento, porque desde nuestro punto de vista en una explicación no necesariamente se exponen razones que sustenten una declaración. Según nuestra definición, un argumento no es una explicación.

Otra palabra que Janeth y Aura vieron común en las definiciones es la de “justificar”. Mencionaron que la palabra justificación está presente en las definiciones 1, 2 y 6 (“es un enunciado o una serie de enunciados para dar una explicación razonada a un evento o situación, el argumento busca justificar algo o refutarlo), y también en la 4 (“conjunto de razonamientos ordenados que permiten sustentar una refutación o una justificación”). Con esto que dijeron, podríamos decir que cuatro profesores reconocen en el argumento el mismo propósito que reconocemos nosotros.

Cristian intervino diciendo, “en las definiciones 1, 2 y 5 (“es una explicación que se realiza de bases sólidas para soportar lo que se está mencionando”) se dice que un argumento es una explicación y en la definición 6 se hace referencia a que un argumento es un enunciado para dar una explicación”. Luego preguntó: “¿Será que enunciado y explicación son lo mismo?”. Al respecto, vemos que Cristian pretendía que los profesores diferenciaran entre las dos expresiones, porque un enunciado es un fragmento escrito que puede ser construido por una o varias oraciones



que tienen un propósito, pero este no es mostrar que una razón esta justificada por las restantes y una explicación busca por medio de razones, describir un objeto de conocimiento o hecho particular y su propósito es dar claridad y ejemplificar a partir de una ampliación cualitativa de la información.

Después, Cristian propuso otra pregunta: “¿un argumento es escrito, es oral o es mental?”. Solita respondió: “Yo escribí enunciado, pero lo pensé desde lo verbal”. Diego dijo: “la argumentación puede ser tanto oral como escrita, ya que la estructura lo requiere”. Janeth intentó articular las respuestas de sus compañeros diciendo: “un argumento tiene que ser verbal o escrito porque si se usa para refutar o justificar debe comunicar”. En este sentido, al referirse a una expresión discursiva oral o escrita descartando que sea un proceso mental, coincide con lo que nosotros escribimos como definición de argumento y se ubica en el ámbito netamente discursivo.

A partir de lo que dijeron los profesores, Cristian preguntó si la siguiente definición recogía lo conversado: “un argumento es una explicación escrita u oral que busca justificar o refutar una situación”. Los profesores contestaron que sí podía ser una definición de argumento. Ellos no se dieron cuenta que esta definición puede quedar confusa porque se usaron las palabras explicación y justificación. Además, tiene otro problema que es la inclusión de la palabra “refutar” porque está contradiciendo el propósito del argumento que es justificar y la palabra rechaza la validez de una declaración.

Aun cuando los profesores quedaron conformes con la definición, además de lo mencionado, hubiera sido deseable centrarnos en otros aspectos que están en nuestra definición como, por ejemplo: un argumento debería constar de proposiciones y si es así, cuántas proposiciones debería tener; en un argumento se debe establece de acuerdo con normas compartidas.

Después de la discusión generada para comparar las propuestas y que ellos propusieran una definición en común, les presentamos tres definiciones de argumento de los siguientes autores: Carvajal, Martínez y Valverde (2019), AEG (2020) y la nuestra. Los profesores prefirieron la de AEG, pero acá resalta nuestro conocimiento cuando logramos convencerlos de que no es la más adecuada porque el grupo AEG menciona en su definición “...cuyo contenido o verdad se está considerando” esto se está refiriendo al proceso de argumentación. Además, en la discusión ya

habíamos hablado de la diferencia entre argumentación y argumento, entonces se convencieron de que era mejor una definición en la que no interviniera el proceso.

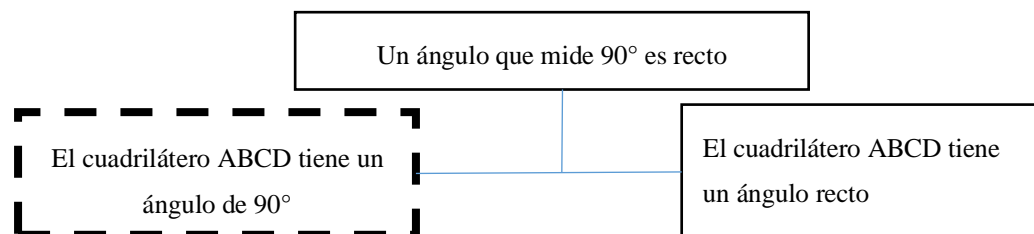
En la segunda parte del taller abordamos la explicación de los tipos de argumentos y propusimos las definiciones de Lara (2014), hicimos la esquematización de un argumento y de un argumento abductivo, generamos ejemplos de argumentos abductivos y mostramos los diferentes tipos de argumento abductivo.

En la explicación de los tipos de argumentos, propusimos unos ejemplos de argumento para que los profesores identificaran el tipo al cual correspondía cada uno según las definiciones de Lara, (2014). Un profesor menciona que el siguiente argumento es inductivo “En el cuadrilátero ABCD, AC biseca a BD entonces el cuadrilátero ABCD es paralelogramo por el teorema de las diagonales del paralelogramo”. El profesor alude a que la palabra “entonces” permite establecer una garantía como el elemento que se infiere según la definición de Lara (2014), pero nosotros hacemos ver que un argumento se tipifica por lo que se infiere y que en un argumento no se logra evidenciar que tipo de argumento es, sino que esto se logra en el proceso de argumentación en busca de lo que se está infiriendo.

En el desarrollo de un ejercicio propuesto a los profesores en el que se presentaba lo siguiente: Dada la aserción “El cuadrilátero ABCD tiene un ángulo recto” esquematice un argumento abductivo y escriba la expresión discursiva correspondiente. Un profesor realizó el esquema que se presenta en la (Figura 9.8) y escribió lo siguiente “El cuadrilátero ABCD con un ángulo recto puedo construir una figura el cual uno de sus ángulos mida  $90^\circ$ ” En este ejemplo se puede interpretar que el profesor quería decir “Afirmo que el cuadrilátero ABCD tiene un ángulo recto porque posiblemente es una figura en la cual un ángulo mida  $90^\circ$ ”. En dicha expresión la forma en que el profesor infiere los datos se relaciona con un argumento abductivo, porque cuando menciona la palabra “puedo” está buscando posibles hechos para justificar la aserción. En el momento de intervenir y explicar que la manera correcta para dejar una huella de la plausibilidad del dato, para poder reconocer el tipo de argumento deja evidencia de nuestro conocimiento didáctico matemático.

**Figura 9.8**

*Formulación argumento implementación del curso*



En síntesis, en el curso vimos que los conocimientos que habíamos adquirido fueron los adecuados e importantes para promover en un grupo de profesores un conocimiento didáctico matemático sobre argumento y argumento abductivo.

## **10.6 Anexo 6: Texto Narrativo Tres**

### **Texto Narrativo Tres de nuestro conocimiento didáctico matemático sobre el papel de los entornos de geometría dinámica para favorecer la argumentación abductiva**

En el Ciclo 3 adelantamos el plan de acción que tenía por objetivo responder la siguiente pregunta ¿Cómo debe ser el diseño de una tarea que movilice el proceso de argumentación con ayuda de un EGD para producir argumentos abductivos? En este documento nos proponemos describir nuestro conocimiento didáctico matemático que se exhibe en el desarrollo de las actividades del plan de acción acerca del papel que juega un EGD para movilizar argumentación abductiva y eventualmente contrastarlo con los anteriores textos narrativos. Para organizar la información, decidimos hacerlo según los momentos del plan de acción: fundamentación sobre la producción de argumentos abductivos en situaciones que usan EGD; elaboración un discurso propio sobre el papel de los EGD para producir argumentos abductivos, a partir de la revisión bibliográfica; resolución y estudio de una situación que emplea EGD para promover argumentos abductivos; formulación de un posible problema que en EGD que promueva argumentación abductiva.

#### **Fundamentación**

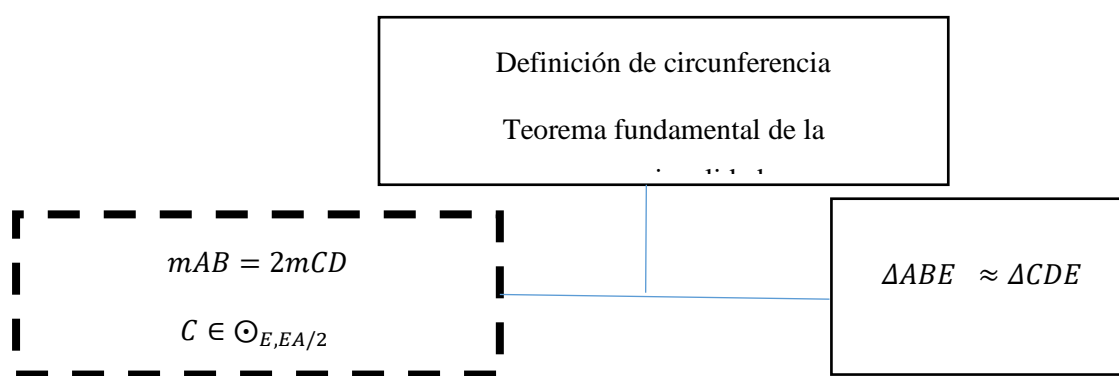
En un primer momento, buscamos en bases de datos como Google académico, Scielo, Redalib entre otras, y paginas oficiales de autores como Baccaglioni y Pedemonte información en la que autores hicieran alusión a la producción de argumentos abductivos en situaciones que usan EGD. En el proceso de búsqueda de artículos, usamos las palabras clave “argumento abductivo” “geometría dinámica” “abductive arguments” entre otras. Encontramos seis documentos, tanto en español como en inglés, que nos parecieron importantes para leer y encontrar información de interés. Google académico, paginas oficiales de Baccaglioni y Pedemonte.

En el documento de Molina y Samper (2019) encontramos que para favorecer argumentos abductivos con ayuda de un EGD es importante la forma como se presenta el enunciado de la tarea, el problema o la situación que se propone a los estudiantes. Ellos mencionan que en el enunciado de la situación se debe incluir la propiedad que constituiría la aserción de un argumento que se quiere justificar y una pregunta sobre las posibles propiedades que pueden

causarla. Para ejemplificar esta idea, se nos ocurrió el siguiente enunciado como pregunta para una tarea “Sean  $mAB = 2mCD$ . ¿Es posible determinar una condición para el  $\overline{CD}$  tal que  $\Delta ABE$  y  $\Delta CDE$  sean semejantes? Provea una conjetura y demuéstrela”. La aserción a la que se quiere que los estudiantes lleguen es:  $\Delta ABE$  y  $\Delta CDE$  son semejantes y por eso se propone una pregunta que llevaría al estudiante a determinar un posible dato que permita apoyar la aserción. Un posible argumento abductivo podría ser el siguiente

### Figura 9.9

*Elaboración propia de un esquema de argumento abductivo basados en el modelo de Toulmin*



Teniendo en cuenta el ejemplo y el esquema de la situación, lo que propone Molina y Samper nos aproxima a la respuesta de la pregunta, caracterizando el tipo de situación que se debe presentar para favorecer argumentos abductivos con el uso de un EGD.

En el documento de Baccaglini (2011) la autora no se dedica a pensar cómo deben ser los enunciados de los problemas en un EGD sino como podría ser la exploración en un EGD a partir de una determinada situación para promover la argumentación abductiva. Al realizar la descripción de la exploración, ella se enfoca en la herramienta arrastre y en un tipo particular de arrastre que ella denomina y caracteriza como arrastre mantenido.

El arrastre mantenido es entendido como una modalidad de arrastre en el que el usuario que realiza la acción induce un invariante provocado por el arrastre y a medida que arrastra identifica otro invariante. El arrastre mantenido se diferencia de otros tipos de arrastre porque involucra dos tipos de invariantes. Estos tipos de invariantes son los siguientes

- Intencionalmente inducido: es una propiedad que deliberadamente se provoca en una configuración geométrica que se está explorando.
- Observado: es una propiedad de la misma configuración que el observador descubre y que podría ser la causa de que se logre el invariante inducido.

A partir de lo mencionado por Baccaglioni (2011) ella se acerca a dar una respuesta a nuestra pregunta, porque encontramos una relación entre el proceso de exploración con arrastre mantenido y el proceso que lleva a un argumento abductivo. Desde nuestro punto de vista, el invariante intencionalmente inducido corresponde a la aserción. El invariante observado corresponde a un posible dato que sustenta el invariante inducido. Cuando se descubre el invariante observado se establece una regla que es la garantía del argumento.

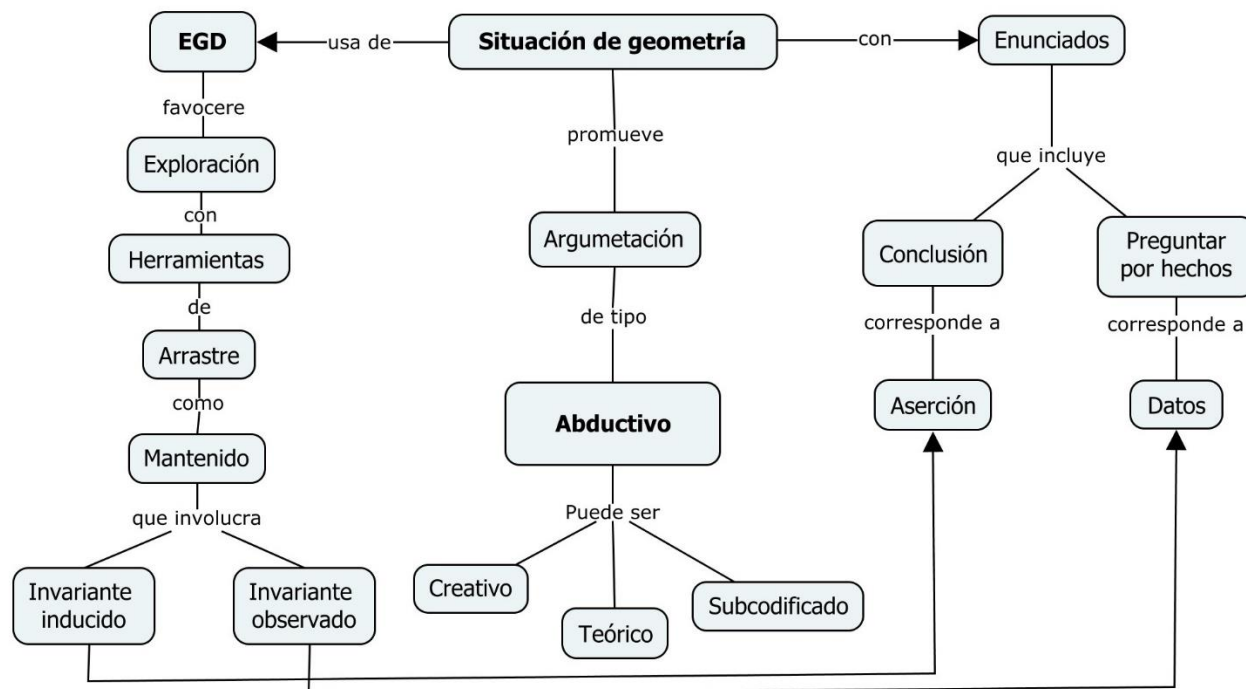
### **Mapa conceptual sobre el papel de los EGD para favorecer argumentos abductivos**

Como segundo momento del plan de acción, decidimos realizar un mapa conceptual (Ver Diagrama 9.1) para sintetizar de manera visual lo que hemos entendido sobre el papel de los EGD para favorecer argumentos abductivos. Este mapa es creación propia y está basado en las lecturas de documentos de Molina y Samper (2019), Baccaglioni (2011) y Pedemonte y Reid (2011).

En este mapa intentamos establecer una relación entre una situación problema de geometría que se debe resolver con apoyo EGD y el tipo de enunciado. Si leemos el mapa desde el centro hacia la derecha, el mapa indica que nosotros considerábamos que promover argumentos abductivos es necesario considerar como se realiza el proceso de argumentación. Para esto, el enunciado debe tener una caracterización particular, específicamente en la forma cómo se presenta al resolutor, porque debe incluir unos elementos esenciales. En el enunciado debe estar explícita la conclusión y debe preguntarse por unos hechos de los que se podría inferir la conclusión. Estos elementos están relacionados con la aserción y posibles datos de un argumento abductivo.

## Diagrama 9.1

Mapa conceptual: discurso propio



Con respecto a la parte izquierda del mapa conceptual, nos indica que, para promover procesos de argumentación y argumentos abductivos, nos podemos valer de recursos como los EGD, que suscitan procesos de exploración. Dentro del proceso de exploración encontramos una herramienta que es el arrastre mantenido. El arrastre mantenido involucra dos tipos de invariantes, el inducido que guarda relación con la aserción de un argumento, y el observado que guarda relación con los datos del argumento.

En el mapa conceptual encontramos cierta relación entre el lado izquierdo y el derecho, porque si intencionalmente se induce una propiedad, existe algo en el enunciado que invita a inducirlo. Entonces, hay una cierta coincidencia en las propuestas porque se debería tener en cuenta la solicitud expresa del enunciado para inducir una propiedad. De esta manera el enunciado debe invitar a realizar una construcción en el EGD que permita la exploración por medio del arrastre. Además, el enunciado debe pedir que se explore y se determinen ciertas condiciones para que se cumpla una propiedad que se hace explícita.

Además, en la parte central del mapa conceptual mencionamos que un argumento abductivo puede ser creativo, teórico o subcodificado. En el Texto Narrativo Dos mencionamos que existían dos tipos, pero ahora encontramos un tercer tipo. Un argumento abductivo creativo es cuando a partir de la conclusión se infiere un posible dato y se inventa una regla hipotética. Un argumento abductivo teórico es cuando a partir de la conclusión se infiere un dato y lo respalda una regla general que está avalada. Un argumento abductivo subcodificado es cuando a partir de la conclusión se infiere un dato y lo respalda un conjunto de reglas.

### **Ejercicios exploratorios**

Como parte del plan de acción propusimos abordar ejercicios exploratorios de situaciones que emplean EGD para producir argumentos abductivos. El objetivo de realizar esta clase de ejercicios es enfrentarnos a situaciones que permitan realizar exploración con un EGD, observar cómo se favorece el proceso de argumentación abductiva para poder caracterizar el papel de los EGD, interpretar lo dicho por los autores y completar la respuesta a la pregunta que movilizo este plan de acción.

Un primer ejercicio exploratorio fue tomado del artículo de Baccaglini (2019). Cristian dirigió el desarrollo de la situación y solicitó a Andrés que la abordara. La situación que se propone en el artículo consiste en realizar una construcción en un EGD para promover la conjeturación y responder una pregunta (Figura 9.10).

Andrés realizó la construcción geométrica en un EGD. Midió los lados del cuadrilátero y arrastró E buscando que el cuadrilátero fuera paralelogramo. Efectuando este arrastre del punto E, Andrés observó que este debía pertenecer a la circunferencia con centro en A y radio AF. Por tanto, conjeturó lo siguiente: Dada la construcción, si E pertenece a la circunferencia con centro en A y radio AF, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo.



**Figura 9.10**

*Enunciado ejercicio Baccaglioni (2019)*

**Enunciado del problema**

A partir de una construcción que tiene los siguientes pasos, se pide responder la pregunta: ¿Qué condición debe cumplir E para que DFCE sea un paralelogramo?

Punto  $A$

Recta  $l$  por  $A$

Recta  $m$  perpendicular a  $l$  por  $A$

Punto  $C$  sobre la recta  $l$

Punto  $D$  tal que  $D \in l, D - A - C$  y  $AD = AC$

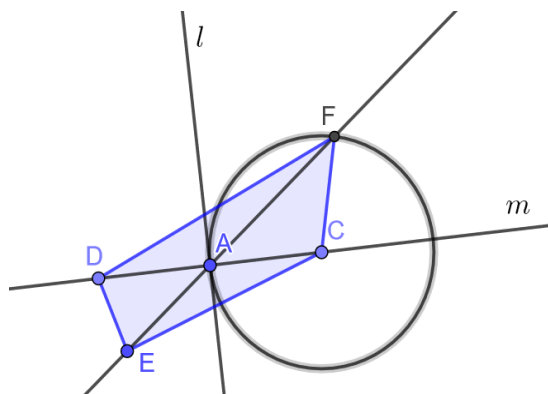
Punto  $E$  en  $S_{l,D}$

Circunferencia  $\odot C, CA$

Recta  $\overleftrightarrow{AE}$

Sea punto  $F = \odot A, AC \cap \overleftrightarrow{AE}$

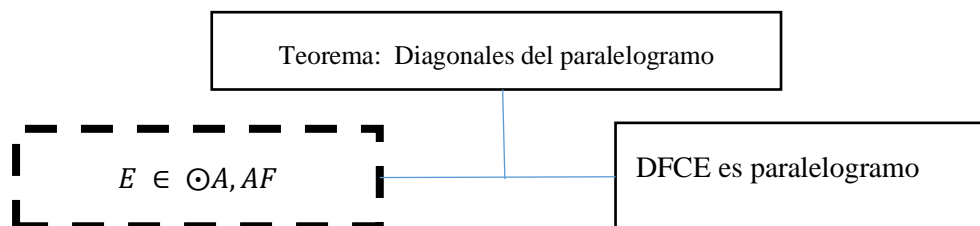
Polígono  $\square DFCE$



Al resolver esta situación, Andrés entró en un proceso argumentativo que lo llevó a producir un argumento abductivo. A partir de la aserción DFCE es paralelogramo y realizando una exploración, descubrió un hecho posible (dato) que es que el punto E pertenece a la circunferencia con centro en A y radio AF. El esquema que corresponde al proceso de argumentación generado por Andrés es el siguiente:

### Figura 9.11

*Argumento abductivo producto de la solución parte 1*



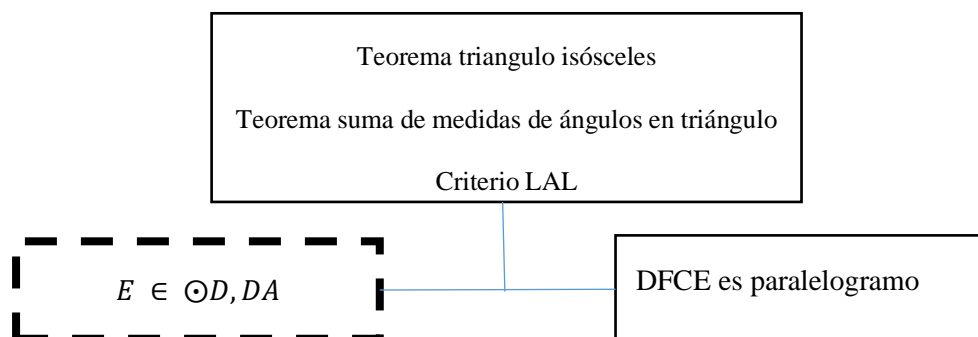
El ejercicio que Cristian propuso a Andrés requirió de la exploración para encontrar las condiciones del punto E y que el cuadrilátero cumpliera las propiedades. Con esta exploración constatamos el uso de la herramienta arrastre mantenido: el invariante que Andrés indujo es que el cuadrilátero fuera paralelogramo; y el invariante observado, que podría ser la causa para que se cumpliera la condición del invariante inducido es que el punto E pertenezca a la circunferencia con centro en A y radio AF.

En otro momento de la exploración Cristian le pidió a Andrés que realizara una nueva exploración arrastrando el punto E pero intentando que el punto siempre estuviera sobre la circunferencia con centro en A y radio AF. De esa forma seguía siendo un paralelogramo. En esta exploración le pidió activar el rastro del punto E y a partir de esta nueva exploración Andrés observó otra condición, dado que el rastro del punto E parece crear un objeto geométrico. Esta nueva exploración le permitió realizar una nueva conjetura: Dada la construcción, si E pertenece a la circunferencia con centro en D y radio DA, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo.

Después de la exploración realizada por Andrés en el EGD, vuelve a generar un argumento abductivo puesto que él encuentra otro hecho plausible para justificar la aserción; encuentra que E pertenece a la circunferencia con centro D y radio DA. El argumento sería el siguiente:

**Figura 9.12**

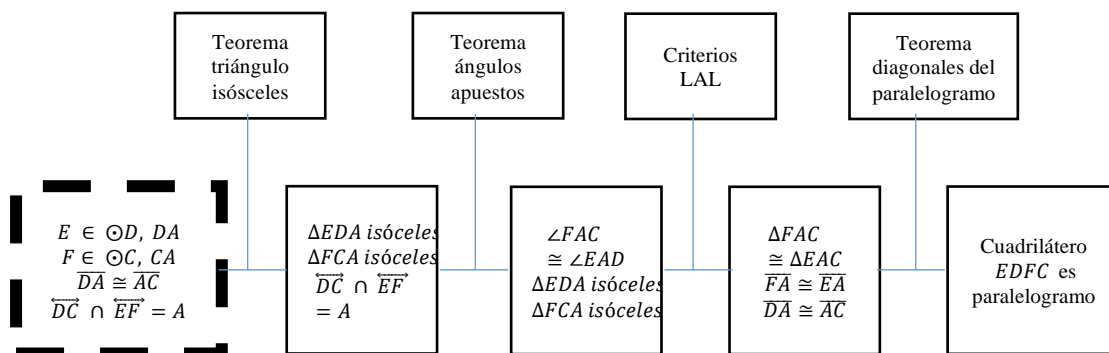
*Esquema de argumento abductivo parte 1*



Al realizar los esquemas de los argumentos logrados en el proceso que Andrés realizó, en el diagrama como se muestra en la Figura 9.12 usamos el conocimiento didáctico matemático que adquirimos sobre la esquematización de un argumento abductivo. En la diagrama de la Figura 9.12, tuvimos problemas para esquematizar porque no sabíamos cómo colocar la garantía y no entendíamos cuál era la garantía para pasar exactamente del dato a la aserción. La garantía que mencionamos permite llegar a una conclusión que se convierte en una nueva condición para buscar otra posible conclusión. Lo anterior lo intentamos representarlo de la siguiente manera (Figura 9.13).

**Figura 9.13**

*Esquematización argumento abductivo caso parte 2*



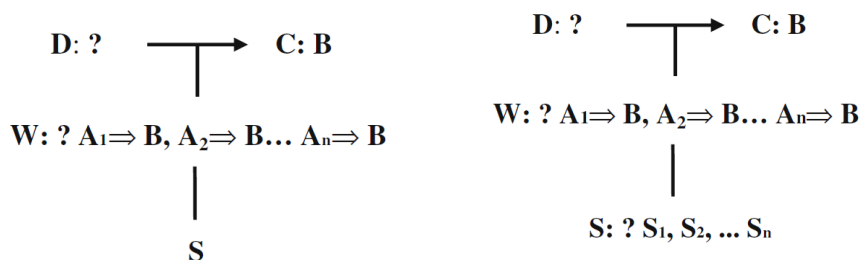
Esto nos problematizó la esquematización de argumento que teníamos. Así que volvimos a revisar documentos en busca de encontrar la manera adecuada de representar el esquema. En Pedemonte y Reid (2011) encontramos que existe otro tipo de argumentos abductivo que no

habíamos tenido en cuenta y que lo denominan subcodificado. En este tipo de argumento abductivo, no solo se deben buscar los posibles datos, sino también una regla entre un conjunto de reglas existentes para justificar la aserción.

Pedemonte y Reid (2011) establecen dos argumentos abductivos subcodificados. El primero, donde el respaldo es el mismo para todas las reglas entre las que el argumentador tiene que elegir, puede ser un teorema específico dentro de este dominio. El segundo, en el cual la garantía puede ser diferente para cada regla o teorema. Por tanto, la regla particular debe seleccionarse entre un conjunto de reglas y entre un conjunto de teorías. Las esquematizaciones propuestas por Pedemonte y Reid (2011) las presentamos en la Figura 9.14.

**Figura 9.14**

*Esquematización de argumentos abductivos subcodificado*



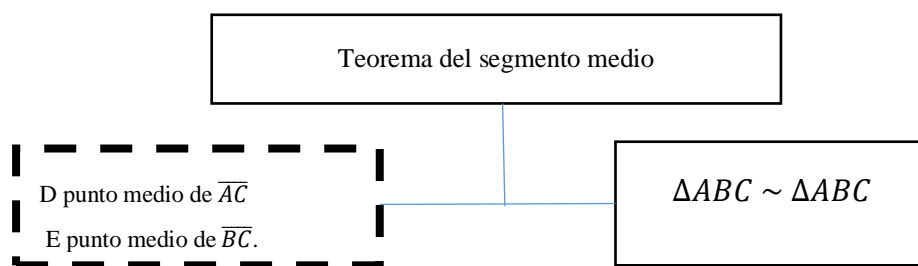
Un segundo ejercicio exploratorio fue propuesto por los integrantes de este trabajo a un colega del colegio donde labora Cristian. El ejercicio es similar al primer ejemplo que se propuso en este texto narrativo y que intenta seguir una misma estructura y procedimiento de solución del primer ejercicio exploratorio. Se plantea el problema, se pide realizar una construcción en un EGD para realizar exploraciones y responder a la pregunta.

### **Enunciado del problema**

Dadas las siguientes condiciones sea  $\triangle ABC$  y  $\triangle DEC$ ,  $2mDC = mAC$  y  $2mEC = mBC$   
 ¿Qué condiciones debe cumplir el  $\overline{DE}$  para que  $\triangle ABC \sim \triangle DEC$ ? Realice una construcción en un EGD y presenta una conjetura.

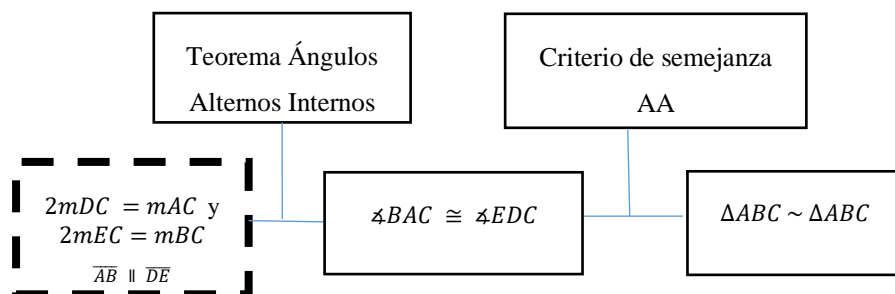
El colega, antes de realizar la construcción en un EGD, recordó una posible solución. Él conjeturó lo siguiente: Si se tiene que  $2mDC = mAC$  y  $2mEC = mBC$  y  $\Delta ABC \sim \Delta DEC$  entonces D es punto medio de  $\overline{AC}$  y E es punto medio de  $\overline{BC}$  y  $\overline{DE}$  es segmento medio  $\Delta ABC$ .

Al proponer esta conjetura, el colega realizó un proceso argumentativo que lo llevó a producir un argumento abductivo teórico ya que no realizó ninguna exploración y se basó en su conocimiento previo. Él tomó como aserción que  $\Delta ABC \sim \Delta ABC$  y en base a sus conocimientos matemáticos infirió que un hecho posible es que D es punto medio de  $\overline{AC}$ , E es punto medio de  $\overline{BC}$  y  $\overline{DE}$  es el segmento medio  $\Delta ABC$ . El esquema que representa el proceso de argumentación de la solución del problema es el siguiente.



El colega no quedó satisfecho con la conjetura, él cree que hay más triángulos que cumplen la condición de semejanza. Se le propone realizar la construcción de los triángulos semejantes y efectuar una exploración con arrastre mantenido sobre el  $\overline{DE}$ . En este proceso de exploración, el colega parte que los triángulos deben ser semejantes (invariante inducido), y logra encontrar mediante el arrastre que una posible solución es que el  $\overline{DE}$  sea paralelo al  $\overline{AB}$  (invariante observado).

Además, Cristian usando el arrastre mantenido sobre el  $\overline{DE}$  muestra un caso que cumple con semejanza de los triángulos, pero no con el paralelismo. El colega empieza a realizar arrastres, construir circunferencias y explorar las condiciones del segmento. En este caso encuentra como invariante observado que el punto D pertenece  $\odot C, \frac{AC}{2}$ , punto E pertenece  $\odot C, \frac{BC}{2}$ , y  $mDE = \frac{1}{2} mAB$ . En las dos exploraciones el colega genera argumentos abductivos, dado que encontró dos hechos posibles para justificar la aserción. Por ejemplo, el argumento abductivo de la primera exploración sería el siguiente



En la esquematización del argumento, encontramos que es un argumento abductivo subcodificado. Las garantías son diferentes y no están dentro de un mismo criterio, por lo tanto, este corresponde a la segunda forma de un argumento subcodificado como lo propone Pedemonte y Reid (2011).