

**Estudio de la estructura causal en la Teoría General de la Relatividad y su representación utilizando los diagramas de Penrose-Carter de la solución de Schwarzschild**

**Trabajo para la obtención del título de Licenciado en Física**

**Juan Manuel Peña Díaz**

**Línea de Investigación de Enseñanza de la física y su relación  
Física Matemática**

**Facultad de Ciencia y Tecnología**

**Departamento de Física**

**Universidad Pedagógica Nacional**

**2021-1**

# **Estudio de la estructura causal en la Teoría General de la Relatividad y su representación utilizando los diagramas de Penrose-Carter de la solución de Schwarzschild**

**Trabajo para la obtención del título de Licenciado en Física**

**Juan Manuel Peña Díaz**

**Asesor: Víctor Heredia**

**Línea de Investigación de Enseñanza de la física y su relación  
Física Matemática**

**Facultad de Ciencia y Tecnología**

**Departamento de Física**

**Universidad Pedagógica Nacional**

**2021-1**

## Contenido

Introducción.....	7
Capítulo 1: Contextualización del problema.....	1
1.1 Problemática.....	1
1.2 Objetivo General.....	2
1.2.1 Objetivos Específicos.....	2
1.3 Antecedentes.....	2
Capítulo 2: Introducción a la Teoría General de la Relatividad.....	4
2.1 Ideas sobre la gravedad.....	4
2.1.1 Ideas Newtonianas.....	5
2.1.2 Ideas Relativistas.....	7
2.2 Diferencia entre las teorías Newtoniana y Relativista de la gravedad.....	11
Capítulo 3: Estructura Causal en la Teoría de la Relatividad.....	13
3.1 Estructura Causal.....	13
3.2 Estructura Causal en Física.....	15
3.2.1 En la Teoría Newtoniana de la Gravitación.....	16
3.2.2 En la Teoría General de la Relatividad.....	17
3.3 Geometría de la TGR.....	20
3.3.1 Objetos Geométricos de la Relatividad.....	21
3.3.4 Ecuaciones de Campo.....	25
Capítulo 4: Solución de Schwarzschild.....	27
4.1 Solución de Schwarzschild.....	28
4.1.1 Aproximación de campo débil.....	28
4.1.2 Condiciones Iniciales.....	29
4.1.3 Componentes del Tensor de Ricci.....	30
4.1.4 Métrica para un cuerpo de masa $M$ .....	32
Capítulo 5: Diagramas Penrose-Carter.....	33
5.1 Diagrama Penrose-Carter.....	33
5.1.1 Difeomorfismo.....	34
5.2 Construcción de los diagramas.....	36
5.2.1 Sistemas de coordenadas.....	36
5.2.2 Métrica de Minkowski.....	39
5.2.3 Métrica de Schwarzschild.....	42
5.2.4 Diagrama de Penrose-Carter para la métrica de Schwarzschild.....	44
Capítulo 6: Conclusiones.....	46
Referencias.....	54

## Capítulos

### **Capítulo 1: Contextualización del problema**

En este capítulo se explican las razones por las que se justifica realizar el trabajo, se expone la pregunta problema, el objetivo general y específicos para darle respuesta. Al final de capítulo se hace una exposición de los antecedentes que dan cuenta de los puntos de partida que se tuvieron para la realización del presente trabajo.

### **Capítulo 2: Introducción a la Teoría General de la Relatividad**

Se muestran las ideas que dieron paso a las teorías de la gravitación de Newton y Einstein para luego mostrar las diferencias en las bases de cada teoría. Esto para comprender las razones de la forma de cada teoría, los alcances y la interpretación que da cada uno del espacio y la gravedad.

### **Capítulo 3: Estructura Causal en la Teoría de la Relatividad**

Se exponen las características de una estructura causal. Como es esta en física tanto en la teoría Newtoniana como en la Teoría de la Relatividad. Haciendo énfasis en cómo la relatividad cambia el concepto de simultaneidad que conlleva a la creación del Espacio-Tiempo definiéndolo como el espacio donde ocurren todos los sucesos del universo y mostrando sus características, también el cómo se realiza el análisis de la estructura causal utilizando un objeto geométrico conocido como Cono de Luz.

### **Capítulo 4: Solución de Schwarzschild**

La realización de la solución trae consigo unos supuestos físicos que permiten encontrar una solución exacta de las ecuaciones de campo. Para el caso de la métrica de Schwarzschild el Espacio-Tiempo se divide en dos regiones en lo que se llama horizonte de sucesos.

### **Capítulo 5: Diagrama Penrose-Carter**

Los diagramas Penrose-Carter compactan las soluciones de las ecuaciones de campo en un espacio finito. Con ellos se evidencia la imposibilidad de regresar cuando se ha traspasado el horizonte de sucesos, también se conserva el objeto del cono luz para así conservar las

propiedades causales expuestas en la teoría especial de la relatividad mostrando aún más como la teoría general de la relatividad contiene a la teoría especial de la relatividad.

## **Capítulo 6: Conclusiones**

Se exponen algunas conclusiones encontradas después de realizar el trabajo.

## Metodología

La Metodología que guía el trabajo de investigación es la documental cuya definición según Tancara (2020):

“como una serie de métodos y técnicas de búsqueda, procesamiento y almacenamiento de la información contenida en los documentos, en primera instancia, y la presentación sistemática, coherente y suficientemente argumentada de nueva información en un documento científico, en segunda instancia”

Usando la técnica de desde un contexto problema propuesto, donde se enuncia una pregunta problema para que guíe la investigación de modo lógico y coherente, a través de un análisis descriptivo y explicativo, para obtener una buena calidad en la información encontrada y realizar su interpretación respectiva (Hernández S, Fernández C, & Baptista L. 2010 <https://metodologiaecs.files.wordpress.com/2018/10/tecnicas-de-invst-documental-yolanda-jurado-rojas-apa-mla-ml.pdf> ), por lo que presente trabajo está encaminado hacia un fortalecimiento y profundización los conceptos fundamentales que se crean a partir de las soluciones de Schwarzschild y De-Sitter con apoyo de los diagramas de Penrose. La presente monografía se realiza acorde a la metodología ya mencionada siguiendo cuatro etapas:

**Primera Etapa:** Recolección de la información referente a las soluciones de Schwarzschild y De-Sitter, como lo es el estudio de la causalidad de cada solución al igual que como se explican usando los diagramas de Penrose.

**Segunda Etapa:** Caracterización del problema para su respectiva investigación para con la información recolectada hacer el respectivo análisis para que sea pertinente para entender el problema y poder dar una solución a este.

**Tercera Etapa:** En esta etapa se construye el marco teórico usando la información ya recogida, primando dos aspectos, el matemático y el explicativo que serán ejes fundamentales para la solución del problema esto para que el trabajo tenga el rigor matemático necesario sin olvidar que lo que se quiere lograr es una explicación fundamentada y bien desarrollada.

**Cuarta Etapa:** Aquí se construyen las conclusiones que arrojen los análisis que se han hecho en la investigación, dando respuesta a los objetivos específicos para así responder al objetivo general y hacer reflexión respecto al trabajo realizado.

# Introducción

Los temas referidos a la Teoría General de la Relatividad atraen la atención de la comunidad en general añadiendo que el concepto de gravedad tratado en esta teoría tiene un buen grado de verosimilitud por lo que las predicciones hechas con la teoría son relevantes en la física, como lo indica Hawking en sus conferencias *Agujeros Negros*: “Los agujeros negros son más extraños que cualquier cosa que hayan imaginado los escritores de ciencia ficción, pero están establecidos firmemente como hechos científicos” (Hawking, 2017).

Este nuevo concepto de gravedad es importante puesto que la Teoría General de la Relatividad “*acumula gran cantidad de evidencias experimentales que no dejan duda del gran éxito de la teoría para predecir las consecuencias de la existencia de la gravedad en el universo*” (Acín & Acín, 2016, pág. 108), Schwarzschild fue el primero en realizar una solución a las ecuaciones de campo de la TGR prediciendo la existencia teórica de la existencia de objetos infinitamente densos en el universo a los que se les llamaría después Agujeros Negros, también haciendo uso de ella se dio corrección a las trayectorias predichas por la teoría de la gravedad clásica como lo era la órbita de Mercurio alrededor del Sol la cual no podía ser predicha con la teoría de clásica de la gravedad, esta solución es famosa gracias a la predicción de la existencia de los agujeros negros, los cuales tienen una frontera de no retorno, se le llama horizonte de sucesos y es el punto de no retorno antes de hacer inevitablemente a lo que se le llama singularidad el cual es un punto en el espacio donde la física pierde la capacidad de predecir (Hawking, 2017), pero es posible escapar de un agujero negro, claro que sí, esto depende de tu ubicación en el espacio y del tamaño que este tenga, esto se analiza gracias a la estructura causal de la solución que te permite definir predecir el futuro en ciertas zonas del espacio dado en la solución.

Esta solución mencionada trae consigo una interpretación física a través de una estructura causal, que es posible explicar sin necesidad de las extensas matemáticas gracias a los diagramas de Penrose los cuales se usan para lograr explicar esta estructura de las soluciones a las ecuaciones de la Teoría General de la Relatividad de manera simple para un estudiante que tenga mínimos conocimientos en relatividad al igual que puede servir para la realización de futuros trabajos mucho más generales gracias a las explicaciones que dan los diagramas.

# Capítulo 1: Contextualización del problema

## 1.1 Problemática

Einstein en 1915 formulaba para el mundo científico su Teoría General de la Relatividad (TGR) que sustituye la teoría de la gravitación de Newton, esta nueva teoría de la gravitación de gran importancia en física ya que cambia sus principios fundamentales (Heisenberg, 1985) "*La teoría de la gravitación de Newton dice que existe una fuerza de naturaleza atractiva entre los cuerpos con masa*" (Parsons, 2018, pág. 20) mientras que "*la Teoría General de la Relatividad (TGR) reemplaza el concepto de gravedad Newtoniana diciendo que la masa y la energía deforman el espacio-tiempo, creando un campo gravitacional*" (Parsons, 2018, pág. 30).

Este concepto es estudiado por algunas asignaturas de la licenciatura en Física de la Universidad Pedagógica Nacional, como lo es el curso "*Relatividad*" o el tópico "*Agujeros negros y cosmología*", la primera de estas aborda superficialmente el nuevo concepto de gravedad que se configura en la TGR, puesto que se centra en explicar la Teoría Especial de la Relatividad teniendo un syllabus rígido en los temas que se deben abordar en el curso, mientras la siguiente es un tópico de carácter electivo el cual no está sujeto tener que abordar unos temas determinados, por lo que depende del docente a cargo lo que se estudia en ese espacio académico pero generalmente se ocupa de estudiar las ecuaciones de campo de Einstein explicando los postulados la TGR, el porqué de la necesidad de una nueva teoría de la gravitación y las matemáticas que se necesitan para construir estas nuevas ecuaciones que reemplazan las ecuaciones de gravitación dadas por Newton, para después resolverlas usando la solución de Schwarzschild y analizar sus consecuencias causales; por lo que alcanzar las soluciones cosmológicas es difícil debido a todo lo que se debe explicar durante una asignatura que al ser de tipo tópico no cuenta con el tiempo necesario para alcanzar a estudiar las teorías cosmológicas más importantes que surgen desde la TGR.

Por lo que este trabajo se propone explicar las estructuras causales de las soluciones realizadas por Schwarzschild y De-Sitter respectivamente usando los diagramas de Penrose ya que tal y como lo afirma Max Born: "*La física actual es cada vez matemática. El hombre de hoy prefiere, sin embargo, las imágenes expresivas o representativas a la exposición mediante palabras y fórmulas*" (Fuchs, 1967, pág. 4)



Por lo tanto, se puede afirmar que el uso de los diagramas permite ampliar y mejorar el entendimiento por parte de los estudiantes de la Lic. Física acerca de las propiedades y consecuencias que traen estas soluciones al mundo físico de manera gráfica sin dejar de lado el rigor matemático que tiene la TGR que es necesario para la construcción de estos, pensando también que el presente trabajo también pueda servir como base para futuros trabajos de grado.

Siguiendo esta problemática, se plantea la siguiente pregunta:

¿De qué manera se puede explicar por medio de los diagramas de Penrose la estructura causal las soluciones realizadas por Schwarzschild?

## 1.2 Objetivo General

- Comprender la estructura causal de la solución de Schwarzschild utilizando los diagramas de Penrose-Carter en el estudio de Teoría General de la Relatividad.

### 1.2.1 Objetivos Específicos

- Estudiar la estructura causal de las Teorías Gravitacional Newtoniana y Relativista
- Reproducir la solución de Schwarzschild
- Exponer los principales rasgos de la estructura causal de las soluciones Schwarzschild
- Estudiar conceptualmente las características causales de las soluciones Schwarzschild
- Desarrollar la construcción del diagrama de Penrose-Carter.

## 1.3 Antecedentes

Al hacer una revisión de los trabajos realizados acerca de estructuras causales en la TGR y la utilización de los diagramas de Penrose-Carter se encontraron dos trabajos de grado hechos en la Universidad Pedagógica Nacional que explican la causalidad en la Teoría de la Relatividad siendo la primera de Hernández (2017) donde se hace un análisis de la causalidad en la TGR para luego describir la solución que realizó Kerr, resaltando las características y propiedades que tiene esta para realizar un análisis comparativo de la causalidad en el contexto clásico newtoniano y en dicha solución. Concluyendo que la curvatura que provoca un objeto astronómico de masa  $M$  rotando en el *Espacio-Tiempo* hace que las relaciones causales en el espacio y tiempo Newtoniano cambien, aquí es una relación de causalidad temporal instantánea, mientras en la solución de Kerr debe realizarse un análisis de observadores

ubicados en regiones particulares como lo son el horizonte de eventos o la misma singularidad ya que cada región presenta un comportamiento diferente para los conos de luz. Este trabajo le aporta a mi trabajo de grado un análisis muy riguroso de una solución que predice también agujero negro ya que el de Kerr predice la deformación de un objeto astronómico de masa  $M$  en rotación, mientras Schwarzschild lo hace para un objeto astronómico de masa  $M$  sin rotación por lo que se usará para dar un referente inicial para analizar la estructura causal de este tipo de soluciones.

También se revisó que Rodríguez (2012), analiza la estructura causal de una solución cosmológica, la hecha por Gödel, se empieza explicando la causalidad en la Teoría Especial de la Relatividad (TER), dándole gran importancia al formalismo geométrico y al objeto llamado cono de luz que se usa para analizar la causalidad en la TER, después caracteriza el modelo cosmológico de Gödel para un mejor entendimiento del concepto de causalidad por parte del lector para finalmente con ayuda de gráficas y conos de luz hacer que el lector comprenda cómo se interpreta la causalidad a nivel global en un universo como el de Gödel. Concluyendo que en esta solución se conserva la causalidad localmente pero globalmente no, y que la causalidad global dependerá de la distancia de separación entre los observadores, ya que los conos de luz se ven afectados por un constante movimiento de rotación provocando que si la distancia entre un observador y una partícula es menor a cierto radio crítico que tenga el universo solamente existirán líneas de mundo que nunca se cortaran conservando la causalidad, pero si dicha distancia que separa a la partícula y al observador es igual o mayor a la del radio crítico del universo dará lugar a líneas de mundo cerradas donde es posible que las líneas de mundo se corten destruyendo el concepto de causalidad. Esta solución a pesar de ser una solución irracional es de gran importancia ya que es una solución cosmológica exacta para las ecuaciones de la TGR, que aporta un marco de referencia para analizar el comportamiento causal de una solución a las ecuaciones de campo que de igual manera estudia el *Espacio-Tiempo* de la TGR.

A nivel nacional se dio importancia al trabajo de Balaguera (2006) ya que estudia las estructuras cosmológicas en un universo Einstein-De Sitter y permitirá tener un estudio matemático profundo de una solución a las ecuaciones de campo de Einstein, mientras a nivel internacional se revisó el trabajo de Pérez (2016) el cual desarrolla los diagramas de Penrose usando las transformaciones conformes y las coordenadas de Kruskal las cuales son la base matemática para realizar los diagramas. Además, dando un camino para la realización de estos

últimos y después hacerles un análisis por regiones dando una pequeña explicación causal, estos últimos dos son trabajos para realizar las soluciones y sus diagramas con todas las reglas de la física, como lo son las condiciones iniciales con el rigor matemático y físico que este trabajo necesita, para el tener un entendimiento más profundo de las soluciones y a su vez de los diagramas que tiene cada una de estas soluciones.

## Capítulo 2: Introducción a la Teoría General de la Relatividad

En este capítulo se estudiará la gravedad, la cual ha sido un fenómeno muy interesante para los físicos de diferentes épocas. Abordando desde las ideas que usó Newton en la formulación de las leyes que permitieron predecir las trayectorias que siguen los cuerpos que eran afectados por lo que él llamó fuerza gravitatoria, afirmando que esta hace caer los cuerpos hacia la tierra y de la misma forma hace posible la órbita lunar y la de los planetas alrededor de una estrella.

Sin embargo, la ley de gravitación de Newton no cumple el principio de causalidad y es debido a esto que las ideas de Einstein sobre la gravedad cobran importancia para el desarrollo de una teoría de la gravitación que respetara este principio, encontrando una analogía entre la caída libre de los cuerpos y el movimiento a velocidad constante de un cuerpo por el espacio concluyendo que la gravedad según su teoría no es una fuerza sino el comportamiento del Espacio-Tiempo.

Terminando con una comparación de las teorías desde diferentes autores que muestran las diferencias entre las teorías.

### 2.1 Ideas sobre la gravedad

"Toda verdad concreta puede ser evidentemente expresada de muchos modos distintos"  
(Fuchs, 1967, pág. 238)

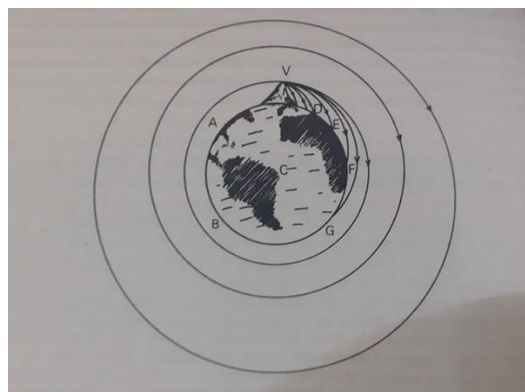
La gravedad ha sido un gran enigma para el ser humano; Kepler es de los primeros en estudiar una de sus consecuencias, él dio las leyes que gobiernan el movimiento de los planetas (Russell B. , 1980), sin poder decir por qué se movían de esa manera. Newton en su *Principia de la Filosofía Natural* muestra su ley de la gravitación con la que logra validar las leyes de Kepler y predecir las trayectorias de todos los cuerpos celestes diciendo que existe una fuerza entre ellos debido a su cantidad de masa.

Einstein en cambio le da una nueva significación a esta fuerza cambiándola entonces, por la consecuencia de la existencia de masa y energía en el universo, estas pueden deformar el espacio alrededor de ellas (en la TGR este espacio se llama Espacio-Tiempo) y lo único que hacen los cuerpos es seguir las trayectorias definidas por esta deformación mostrando que si se acortan las distancias entre un cuerpo y otro masivo su tiempo correrá más lento, esta nueva concepción trae consigo una teoría que permite la modelación de formas posibles de universo, además la predicción de la existencia de objetos infinitamente densos, conocidos como "agujeros negros" que deforman el Espacio-Tiempo que ni la luz logra escapar de ellos.

### 2.1.1 Ideas Newtonianas

La idea fundamental usada por Newton para desarrollar su teoría de la gravitación es que la fuerza que hace caer los objetos hacia la tierra es la misma que hace posible las órbitas celestes. Newton nos muestra un ejemplo para desarrollar su idea, considerando que el movimiento de los proyectiles lanzados desde cierta altura con a una velocidad inicial, describen una trayectoria curvilínea en su movimiento mientras cae al suelo (Gamow, Biografía de la Física, , 1987) y cuanto mayor sea la velocidad con la que sean disparados mayor será la distancia que recorren.

Si esto se hace en una montaña se puede aumentar la velocidad tanto que es posible que el proyectil vuelva a su punto de partida (Imagen 1). Por consiguiente, si se lanzan proyectiles desde alturas mucho mayores dependiendo de su posición respecto a la tierra describirán arcos concéntricos o diversamente excéntricos y girarán siguiendo órbitas en el cielo tal como lo hacen los planetas.



*Ilustración 1: La trayectoria del satélite de la Tierra como caso límite de las trayectorias de proyectiles que caen cada vez a más distancia de la base de la montaña de la cual fueron arrojados. (Adaptación del dibujo original inserto en los Principia de Newton. (Gamow, 1987, pág. 48)*

### 2.1.1.1 Gravedad Newtoniana

Newton retoma las reflexiones que había hecho Galileo sobre la caída de graves pero que según (Gardner, 1986), solo desempeña un papel de accesorio, mientras el análisis de las fuerzas centrífuga y centrípeta son claves para la explicación de por qué los planetas conservan las trayectorias. Interpretando la gravedad como una fuerza centrípeta que evita que los planetas salgan disparados debido a la fuerza centrífuga de su rotación.

Newton asume entonces, la gravedad en analogía con la fuerza centrípeta presente en los movimientos circulares y relacionada con las trayectorias geométricas de un cuerpo que gira alrededor de un punto, admitiendo como lo dice Russell (1985); él consideraba esta acción a distancia imposible y creía que existía un mecanismo del cual desconoce su naturaleza, cuya acción se propaga por el vacío a una velocidad infinita, pero desconocía el mecanismo intrínseco que transmite la influencia del Sol a los planetas.

#### 2.1.1.1.1 Gravedad como Causal

La gravedad Newtoniana se basa en un descubrimiento de Galileo y el propio Newton. Ellos notan que las leyes causales atinentes al cambio deben ser escritas en términos de aceleración, esto es debido a que solo las leyes de este tipo generan un cambio en un sistema de carácter mecánico. Siendo así la ley que describe la gravedad es la causante de los cambios de dirección de los planetas que permiten la existencia de las orbitas.

Según Russell (1983), la ley de la gravitación fue el triunfo más grande desde este punto de vista según la cual, toda partícula con masa causa en otra una aceleración directamente proporcional a la partícula que la atrae, al mismo tiempo siendo inversamente proporcional a la distancia entre ellas. Sin embargo, viola el principio de causalidad que dicta que todo efecto tiene su causa, esta ley de la gravitación tal y como la describe Newton dice que la acción de la gravedad se propaga a una velocidad infinita por el espacio y por lo tanto no es posible determinar la lógica causal de la gravedad entre los cuerpos.

Galileo y Newton consideraban un movimiento acelerado como algo diferente por su propia naturaleza y esta distinción de los movimientos no acelerados solo podía mantenerse si se consideraba que el movimiento debe ser absoluto, ya que si es relativo se impone un problema de marcos de referencia, como lo ilustra Russell (1985): si un ascensor se acelera en relación a la tierra y por lo tanto la tierra en relación al ascensor, la gente en la tierra no tiene sensaciones

cuando el ascensor arranca. Es decir, para que las personas sobre la tierra no sientan la aceleración es necesario que el movimiento del ascensor sea absoluto. Debido a esta clase de situaciones para Newton era inconcebible el espacio y el tiempo relativos.

La teoría de la gravitación de Newton representó un avance importante para la Física, pero no daba explicación de la causa de la gravedad era más bien descriptiva, ya que no permitía preguntarse sobre el mecanismo intrínseco de la gravedad. Como lo muestra Feynman (1998), Newton no hizo hipótesis sobre qué hace mover a los planetas, él se contentó solo con encontrar qué hacía sin abordar el mecanismo.

Aunque esto no es del todo cierto, ya que Newton si llegó a pensar en dicho mecanismo, pero admitió que eso debía ser para otro libro diferente a los Principia:

*“Para Newton, el intento de hallar cómo es que puede existir una fuerza como la de la gravitación universal, actuando según las leyes que él había descubierto, no formaba parte de los Principia publicados, sino que eran una secuela de ellos. Una de las explicaciones que llegó a proponer incorporaba un modelo en el que había un éter que variaba de densidad en función de la distribución de la materia, pudiendo producir efectos como los de la gravedad.”* (Cohén, 1983, pág. 15)

A pesar de haber pensado en este éter nunca realizó un cambio en su teoría para dar solución a esta falta de mecanismo. La teoría de Newton presentaba además otro problema, este de carácter predictivo, ya que entre las observaciones hechas a la órbita de Mercurio y las predichas por la teoría de Newton existía una discrepancia de 43 segundos de arco.

### 2.1.2 Ideas Relativistas

En 1905 se publica la Teoría Especial de la Relatividad (teoría válida para marcos inerciales) en la cual se definía una velocidad límite para la propagación de la acción en el universo (la velocidad de la luz) pero esta teoría necesitaba generalizar su validez a marcos no-inerciales o acelerados, como es el caso de los marcos afectados por la gravedad debido a que estos son los más comunes en el universo, pero esta ampliación presentaba problemas debido a que según la teoría newtoniana la acción de la gravedad se propaga a velocidad infinita y esto proponía una incompatibilidad entre las dos teorías.

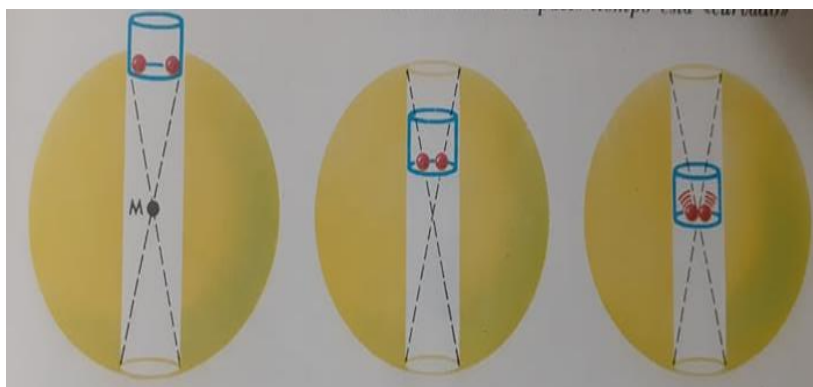
Es debido a esto que Einstein volvió a pensarse el concepto de gravedad utilizando sus famosos experimentos mentales los cuales lo llevaron a una idea de igualdad entre la masa inerte y la masa grave. Claro que esta igualdad ya había sido demostrada por físicos como Eötvös (Gardner, 1986) tal y como lo afirma Fuchs (1967), las mejores mediciones arrojan la conclusión que las masas inerciales y gravitatorias de cualquier cuerpo son físicamente iguales.

Analicemos entonces el experimento mental que planteó Einstein; él pensó en un ascensor en caída libre (Imagen 2); en esta situación no es posible determinar si existe una fuerza de gravedad, ya que esta hace que todos los cuerpos caigan de la misma manera.



*Ilustración 2a: Ascensor en caída libre una ilustración de cómo se puede representar la idea de Einstein acerca de la caída libre como un marco en el cual no se perciban fuerzas gravitatorias. (Fuchs, 1967) Recuperado de libro original, página 233.*

Sin embargo, para lograr afirmar esto se deben cumplir dos condiciones: que la cabina del ascensor sea lo suficientemente pequeña para que los objetos no se acerquen entre ellos debido a la naturaleza radial de la atracción gravitacional (Imagen 3) y que los experimentos realizados dentro de ella para determinar si acelera o no se hagan en un periodo corto de tiempo.



*Ilustración 2b: Todos los cuerpos caen hacia el centro de la Tierra, M cuando están en la zona de atracción de esta. Imaginemos un túnel perforado a través de la Tierra y dejemos caer, en experimento imaginario, un recipiente. Dos esferas contenidas en el interior de este recipiente chocan entre sí al alcanzar el centro de la Tierra. A pesar de la caída libre, actúa pues una “gravedad residual” sobre las esferas. Fuchs, 1967) Recuperado de libro original, página 234.*

Esta situación es muy singular, pero es válida a las restricciones dadas por Einstein se les da el nombre de condiciones de localidad. Por lo que la caída libre, localmente es indistinguible de estar quieto o moviéndose en línea recta a velocidad constante en el espacio. Einstein dedujo que nos movemos en línea recta a través del espacio pero que el espacio a través del cual nos movemos está curvado creando la ilusión de la existencia de una fuerza (la gravedad).

Esta idea se puede explicar con un ejemplo: Si dos personas se paran de espaldas el uno del otro en el polo sur y deciden correr en línea recta se comenzarán a alejar entre sí, (si logran caminar sobre el mar e imaginando que no hay montañas), cuando lleguen al polo Norte se encontraran de frente. Esto quiere decir que a pesar de que cada persona caminaba en línea recta se encontraron de nuevo, esto ocurre debido a la curvatura de la Tierra.

#### 2.1.2.1 Gravedad Relativista

Para empezar, la gravedad relativista se basa en una conexión que halló Einstein que ejemplifica de gran manera Gamow (1987), Einstein en 1914 publica un artículo dónde explica la relación que existe entre la fuerza de la gravedad y el movimiento acelerado, allí expone en un experimento mental en el cual un marco acelerado hacia arriba (Imagen 4) es indistinguible de un marco ubicado sobre la superficie terrestre. Y es debido a esta igualdad entre marcos que formula su principio de *equivalencia fuerte* el cual dicta que localmente para toda partícula o fuerza es indistinguible si está sometida a los efectos de la gravedad o a una aceleración uniforme (Gardner, 1986).



*Ilustración 3: Para Einstein un ascensor acelerado puede ser equivalente a un marco afectado por la gravedad. (Fuchs, 1967, pág. 235)*



Einstein notó que para sostener su principio debía dar explicación de la causa de la gravedad, él propuso entonces, que el espacio por dónde se mueven los planetas es el causante de las órbitas, es decir que ocurre lo mismo que con el ejemplo del capítulo anterior, los planetas se mueven en línea recta a través de un espacio que los hace seguir trayectorias curvas (órbitas) admitiendo que está “deformación” del espacio es causada por la masa (Hawking, 2020).

Se replantea entonces la gravedad no como fuerza sino como consecuencia de la existencia de masa en el universo, para esto Einstein utiliza una concepción llamada *Espacio-Tiempo* que se define según Geroch (1985), como todos los sucesos que ocurren en el universo; que se explica cómo el conjunto de observadores ubicados en cada punto del espacio juzgando lo que ocurre a su alrededor. En este *Espacio-Tiempo* se sigue admitiendo que los planetas se mueven en línea recta a velocidad constante, pero este espacio tiene entre sus propiedades la de configurarse en presencia de masa de manera tal que crea trayectorias curvilíneas por las cuales los planetas se mueven (órbitas).

Cabe aclarar que Einstein deduce ecuaciones de campo ajustadas a las ideas de curvatura del Espacio-Tiempo y las soluciones a esas ecuaciones son la base de las ecuaciones de movimiento producidas por la gravedad.

$$R_{\nu\mu} - \frac{1}{2}Rg_{\nu\mu} = kT_{\nu\mu}^1$$

*Ecuación 1: Ecuación de Campo de Einstein*

#### 2.1.2.1.1 Gravedad como Causal

La gravedad relativista según Russell (1983), tiene un carácter más análogo a la ley de la inercia siendo esta una de persistencia es decir, en la cual los cuerpos no cambian su estado de movimiento debido a una fuerza sino más bien que los cuerpos (en este caso planetas) se mueven por trayectorias que les permitan conservar su movimiento, para ello es necesario que el espacio por el que se mueven se configure de manera tal que lo permita y por lo tanto que esta configuración se deba a una masa que “perturba” el medio tal y como lo ilustra Russell (1983), el *Espacio-Tiempo* está lleno de colinas cada vez más empinadas conforme subimos y en la cima hay un trozo de masa.

---

<sup>1</sup> Donde  $R_{\nu\mu}$ : tensor de Ricci,  $R$ : escalar de curvatura,  $g_{\nu\mu}$ : métrica,  $k$ : constante gravitacional relativista y  $T_{\nu\mu}$ : tensor energía momento.

Esta ley se basa en un principio físico, según el cual los cuerpos siguen la ruta más corta entre dos lugares (principio de mínima acción), la llamada geodésica (Russell B. , 1983). Mostrando que ésta, en el ejemplo de Russell es aquella que rodea la colina, gracias a este principio la gravitación es absorbida en la geometría del *Espacio-Tiempo*, se recalca entonces la naturaleza de la gravedad relativista que busca explicarla como una condición del espacio mismo desde la forma que tiene este, perdiendo toda interpretación de fuerza.

Esta teoría es como ya se mencionó, causal de una configuración del *Espacio-Tiempo* que puede estar en analogía con el estado de stress de un medio como una cama elástica sobre la cual se coloca cierta masa. Ahora para notar la analogía imagine que se lanza un objeto de masa mucho menor en línea recta sobre la cama; al principio seguirá la trayectoria original, pero al acercarse a la parte de la cama afectada por la masa antes colocada comenzará a girar alrededor de esta sin importar que en principio su trayectoria haya sido rectilínea.

Esta configuración hace que los observadores midan diferentes tiempos y espacios dependiendo de su posición respecto al objeto masivo debido al “estiramiento” del *Espacio-Tiempo* quitando la noción de *espacio y tiempo absolutos* cambiándolo por *tiempo y espacio propios*, ya que las mediciones que se hagan cambian dependiendo del observador que las realice.

Es importante resaltar que esta teoría de la gravedad respeta un principio que su antecesora no y es el principio de causalidad ya que la velocidad a la que se propaga la acción de la gravedad en el *Espacio-Tiempo* es la velocidad de la luz. Esta teoría permite establecer un orden causal para la gravedad, caso contrario su antecesora que la admitía como una acción que se movía a una velocidad infinita por el universo y al ser de esa naturaleza determinar la causalidad se hacía imposible.

## 2.2 Diferencia entre las teorías Newtoniana y Relativista de la gravedad

Las teorías que buscan explicar la gravedad son ambas útiles. Por ejemplo, la teoría Newtoniana tiene un buen grado de precisión para describir las orbitas lunares, incluso las del sistema solar, sin incluir a Mercurio. La teoría general de la relatividad mejoró la concepción de la gravedad prediciendo las mismas trayectorias y ampliándose a Mercurio o hacer predicciones respecto a

los objetos que podemos encontrar en el universo sin desmerecer a su antecesora sino más bien para complementarla.

Ambas teorías buscan explicar la gravedad; una debida a una acción a distancia y la otra a la configuración del espacio. La luna sigue orbitando de la misma manera que hace 150 años los fenómenos no cambian, nuestras explicaciones sí.

El físico americano y colaborador de Einstein, Leopold Infeld estableció una comparación entre las teorías:

*"La diferencia entre las teorías gravitatorias de Newton y de Einstein pueden verse claramente en el ejemplo de un niño que juega a las bolitas en un lugar cualquiera al aire libre. El suelo es desigual y presenta en algunos sitios elevaciones y depresiones. Un observador, situado en la décima planta de una casa inmediata, no puede percibir estas desigualdades. Observa sólo que las bolitas en ciertos lugares se desvían acercándose y en otro alejándose. De ello puede deducir que existe una "fuerza" en acción que expulsa a las bolitas en determinados lugares y otros las atrae. Pero un observador que esté abajo puede inmediatamente determinar que las trayectorias de las bolitas las condiciona sencillamente el perfil desigual del terreno." (Fuchs, 1967, pág. 235)*

Se puede entonces admitir que el observador que se encuentra en el décimo piso cree en Newton, mientras el observador que se encuentra al nivel del suelo cree en Einstein. Esto pone evidencia que una teoría no desaprueba a la otra, sino que una es más general que la otra. Dando una explicación más completa de la gravitación, resolviendo qué causa la gravedad y qué consecuencias trae a nuestro universo que la masa y la energía logren curvar el *Espacio-Tiempo*.

Se habla acerca de la diferencia entre las teorías en el libro El ABC de la relatividad:

*"La fuerza entre el cielo y la tierra separados por 150 millones de kilómetros, era misteriosa. El mismo Newton lo pensaba, esta acción a distancia le parecía imposible, él creía que existía un mecanismo aún no descubierto por la que se transmitía esta influencia, cuando la concepción de fuerza es un error en la ley de gravitación de Einstein un planeta solo está atento a lo que se encuentra en su proximidad." (Russell B. , 1985, pág. 6)*

Es evidente entonces que el mismo Newton aseguraba que no podía dar cuenta del por qué la gravedad era como era, qué la producía y por qué era tan radicalmente diferente a las otras fuerzas observadas, que requerían de un contacto para que su acción fuera transmitida de un cuerpo a otro.

Finalmente, la gravedad según la relatividad se puede describir tal y como lo hace Russell (1983) toda la idea de fuerza está mal, solo observamos las trayectorias que siguen los cuerpos debido a una configuración del *Espacio-Tiempo*, causada por una masa determinada. Dándole el porqué de la existencia de la gravedad explicando a su vez el mecanismo que hace posible su acción, cosa que fue calificada por el mismo Newton de misteriosa.

## Capítulo 3: Estructura Causal en la Teoría de la Relatividad

En este capítulo se estudiará la estructura causal, esto es posible gracias a la utilización de la geometría, ya que, para extender la validez de la Teoría Especial de la Relatividad que estudia marcos inerciales y respeta el principio de causal, hacia la teoría de la gravedad de marcos acelerados la cual no respeta el principio ya mencionado. Para lograr esto, el espacio debe curvarse creando la ilusión de la existencia de la gravedad siendo esta curvatura representada con ayuda de la geometría que para ello utiliza objetos como lo son el *Espacio-Tiempo*, *Intervalo Espacio-Tiempo* o los *conos de luz*.

### 3.1 Estructura Causal

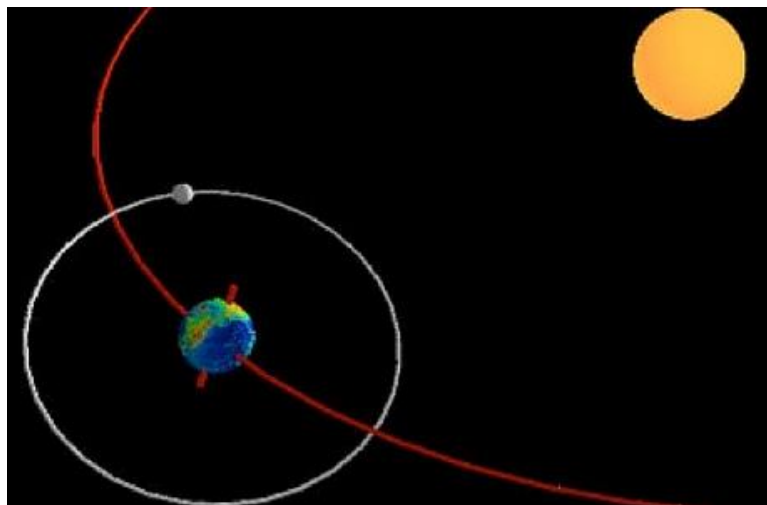
Para empezar, debemos definir que es una estructura causal, la cual se encuentra en analogía con un ejemplo que da Russell (1980): definamos **A** como una señal, la cual para nuestro caso será la acción de ir a abrir la puerta de nuestra casa y **B** la acción realizada por nuestra mascota la cual es seguirnos ya que piensa que vamos a sacarla a pasear, gracias al orden cronológico de estas dos acciones es posible afirmar que A es promotora de B.

El ejemplo anterior está en una analogía directa con el cómo entendemos una estructura causal, ya que es posible cambiar la palabra promotora y decir entonces: A es causa de B; Ya que si no me levanto a abrir la puerta mi mascota nunca se levantará a seguirme, eso quiere decir que para que B ocurra se hace necesaria la existencia de A.

Este ejemplo también permite observar cómo es que los seres vivos logramos dar explicación a las cosas; el perro piensa que lo van a sacar a pasear porque la acción que realiza su amo es muy parecida a cuando realmente van a salir. De esta manera es como se intenta describir los fenómenos por medio de estructuras causales, ya que en presencia de ciertos patrones que lo anteceden es posible inferir las posibles consecuencias de lo que se observa.

En conclusión, si se tiene bien definida la causa **A** de cierto fenómeno es posible identificar al fenómeno como **B** y afirmar que **A** es la causa de **B**. Por ejemplo, Newton noto que la caída de los cuerpos hacia la superficie terrestre era a causa de una fuerza (la gravedad) es posible llamar **A** la existencia de la gravedad y **C** la caída de los cuerpos por lo tanto se afirma que debido a la existencia de la gravedad de la gravedad es que caen los cuerpos o de otra manera, **A** es causa de **C**.

Newton utilizó esta estructura para dar explicación a las órbitas, ya que dedujo que la fuerza que hace caer los cuerpos y hace posible las órbitas es la misma, por lo que extrapolo la causa del ejemplo anterior, donde ahora **A** sigue sin cambio siendo la existencia de la gravedad, pero su consecuencia si cambia siendo **D** las órbitas de los planetas, afirmando entonces, que **A** es causa de **D**.



*Ilustración 4: La fuerza que hace posible las orbitas es la misma que causa la caída de los cuerpos. Fuente: <https://www.astromia.com/solar/orbital.htm>, el 20/07/2020*

Este tipo de análisis se utiliza en física ya que lo que esta busca es la causa de los fenómenos que observamos para poder desarrollar un orden causal que permita organizar su explicación, en la TGR como lo explica Russell (1985), ya no se hablan de fenómenos observados sino de sucesos observados debido a que los fenómenos pueden diferir dependiendo del marco de referencia desde el que se observen.

Estos sucesos en la TGR se ubican dentro de un espacio llamado *Espacio-Tiempo* el cual según Geroch (1985), es la colección cuatro dimensional de sucesos que ocurren en el universo, que tiene ciertas características que dependen de las soluciones que se encuentren a las *ecuaciones de campo* y por ende del contenido energético del espacio representado en dichas soluciones.

Estas son importantes ya que permiten entender cómo la gravedad se representa mediante una curvatura en el *Espacio-Tiempo* la cual predice matemáticamente la dilatación temporal cuando se está cerca de un campo gravitatorio, estas soluciones a su vez tienen una representación geométrica que permite analizarlas y estudiarlas además que con ayuda del objeto geométrico llamada *cono de luz*, es posible entender sus estructuras causales.

## 3.2 Estructura Causal en Física

Según Russell (1983), el mundo físico se piensa como un sistema causalmente autónomo gracias al principio de inercia siendo este el culpable del por qué las leyes de la física deben escribirse en términos del cambio de la velocidad en un determinado intervalo temporal, además que es un sistema donde la energía total nunca cambia y está bien definida.

*“el mundo físico consiste en unidades de un pequeño número de tipos diferentes, y hay leyes causales que gobiernan las estructuras más simples que pueden construirse a partir de tales unidades, haciendo que las estructuras correspondan a un número bastante pequeño de tipos diferentes. Hay también complejos de sucesos que actúan como unidades causales, precedidos y seguidos durante un tiempo finito por una serie de complejos sucesos todos los cuales tienen aproximadamente la misma estructura y relacionados entre sí por contigüidad espacio-temporal”* (Russell B. , 1983, pág. 473)

Al referirse a una estructura aproximadamente parecida se habla de una manera de identificar la causalidad, un ejemplo de esto es cuando se tiene un sistema de dos partículas y una de ellas se mueve a cierta velocidad mientras la otra está en reposo, estas chocan y asumiendo un choque elástico, el momento de la primera partícula se transmite a la otra, haciendo que esta última se mueva de la misma manera.

En este caso se admite que una es causal de la otra, debido a que para que la segunda partícula se moviera tuvo que ser golpeada por algo (la primera partícula), entonces es posible pensar que existe una estructura similar para el fenómeno de las partículas en movimiento. Para esta situación se puede identificar X como la configuración: primera partícula en movimiento y segunda en reposo, y Y, como segunda partícula en movimiento y primera en reposo, hecho esto se da una organización cronológica: Y después de X, permitiendo crear la idea que para que cierto cuerpo cambie su estado de movimiento es necesario que otro lo golpee. Es decir, se

construye una estructura causal acerca del movimiento de los objetos, cuya causa puede ser un choque.

### 3.2.1 En la Teoría Newtoniana de la Gravitación

Es así como Newton en sus descripciones contempla una estructura causal que sigue directamente todas las acciones que involucren una aceleración, en este sentido para la ley de gravitación considera la acción de la gravedad (aceleración) entre dos cuerpos instantánea ya que:

*“creía que además de la materia existía el tiempo y el espacio absoluto. Es decir que existe una multiplicidad unidimensional de instantes, así como una relación de tres términos que involucra a la materia, el espacio y el tiempo, o sea, la relación de ocupar un punto en instante.”* (Russell B. , 1983, pág. 32):

Debido a esto se infiere que las interacciones en el mundo físico debían ser instantáneas, así es posible entender cómo, según Newton funcionan las leyes causales en física y por lo tanto la estructura causal, aun así para que se exprese de manera más clara es válido decir que una ley causal es: *“ un principio general en virtud del cual, con suficientes datos acerca de ciertas regiones del espacio-tiempo, es posible inferir algo sobre ciertas otras regiones del espacio-tiempo”* (Russell B. , 1983, pág. 317). Es decir que si se construye una estructura causal que da una explicación al comportamiento de ciertos fenómenos, utilizando una ley derivada de dicha estructura es posible explicar fenómenos con la misma estructura causal ubicados en otro lugar del *Espacio-Tiempo*.

La estructura causal newtoniana se define entonces como: una que está regida por leyes causales que permiten entender cómo el cambio del estado inicial de un sistema del cual se tengan ciertos datos que relacionen la materia, el espacio y el tiempo logran predecir el estado futuro del sistema e incluso predecir el estado de sistemas parecidos ubicados en otras regiones en el espacio y el tiempo, sin embargo, este espacio tiempo al tener característica de absoluto las observaciones que se hagan a un mismo fenómeno deben ser descritas de la misma manera sin importar el estado de movimiento de los observadores (Ecuación 2).

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = G \frac{mM}{r^2}$$

*Ecuación 2:* Ley de gravitación de Newton

La ley de gravitación de Newton, por ejemplo, relaciona las masas de los cuerpos, el espacio entre ellas y tiene en cuenta el tiempo, al momento de buscar el cambio de la posición de la masa. Esta ley además es útil para predecir cómo se mueve la luna alrededor de la Tierra o como lo hace Europa alrededor de Júpiter, haciendo evidente que cumple con las características de una ley causal. Usando esta ley se piensa que si hay un observador que se encuentre sobre un planeta puede determinar sabiendo su velocidad y masa que tan grande es la fuerza con la que otro planeta lo hala, incluso podría determinar la masa del objeto que lo hala, sin embargo, esta ley no tiene en cuenta la posibilidad que un observador pueda medir o conocer la velocidad a la que la acción de la gravedad actúa.

### 3.2.2 En la Teoría General de la Relatividad

Como ya se aclaró de qué dependen las estructuras causales en física, aquí se abordará el cambio que hizo la TGR en la estructura causal clásica. Newton para el desarrollo de su mecánica aceptó un espacio y tiempo absoluto además que las interacciones entre los cuerpos debían ocurrir de manera instantánea sin importar si éstas ocurren a distancia (Ramos, 2020). Einstein en la Teoría Especial de la Relatividad asegura que la acción de cierto suceso no puede afectar a otro más rápido que la velocidad de la luz lo que trae como consecuencia que el espacio y el tiempo no sean absolutos sino más bien dependen del estado de movimiento de los observadores ubicados en el *Espacio-Tiempo* y que más bien lo absoluto para cualquier observador es una relación entre los sucesos.

*“Einstein en su teoría especial de la relatividad mostró que entre dos sucesos existe una relación, a la que llamó intervalo divisible de muchas maneras en lo que llamaríamos distancia espacial o intervalo de tiempo... Se sigue de esto que la multiplicidad fundamental de la física no puede consistir en partículas persistentes en movimiento, sino en una multiplicidad cuatridimensional de sucesos.”* (Russell B. , 1983, pág. 33)

Para la TGR una ley causal ya no se refiere a fenómenos que ocurren en el *Espacio-Tiempo* sino más bien a sucesos que dependiendo del marco de referencia pueden mostrar diferentes fenómenos observados pero que deben ser posibles de predecir bajo las mismas leyes, como lo explica Russell (1983, pág. 335): *“toda ley que, si es verdadera, permite, dado cierto número de sucesos, inferir algo acerca de otro u otros sucesos”* (Russell B. , 1983, pág. 335) por lo que en esta definición ya se incluye el concepto de suceso de manera clara como la generalización de la idea clásica de que, si se tienen los suficientes datos ligados al espacio, el

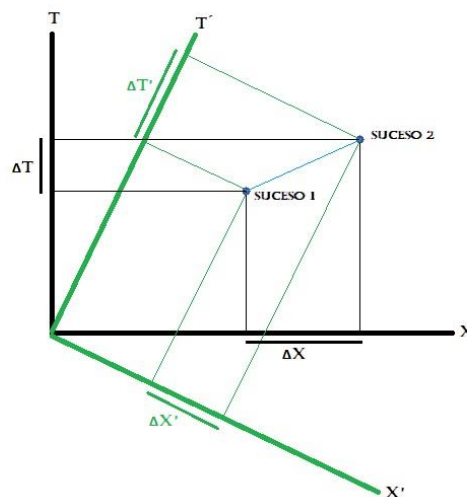


tiempo y la masa de un sistema, es posible conocer el estado del sistema en otro tiempo o configuración dada, es decir es posible predecir cómo se configura un estado o las condiciones que se dieron para que el sistema se encuentre en su estado actual.

El cambio en la estructura causal difiere de la física clásica, ya que mientras Newton se enfocaba en que los fenómenos debían ser iguales para cualquier observador sin importar su marco de referencia y además para la ley causal de la gravedad admitía que podía existir una acción instantánea. En cambio, para Einstein el marco de referencia incide en la observación del fenómeno e introduce el concepto de suceso que implica una acción no instantánea para el fenómeno observado.

Admitiendo entonces que, para encontrar un suceso causal de otro, debe existir una relación entre ellos, a la cual se le da el nombre de *Intervalo Espacio-Tiempo* y trae como consecuencia la no existencia de acciones instantáneas en el *Espacio-Tiempo*.

El *Intervalo Espacio-Tiempo* es una relación que permite hallar la distancia que existe entre dos puntos del *Espacio-Tiempo* sin importar si dos observadores miden el mismo fenómeno en lugares o momentos distintos (Ilustración 5).

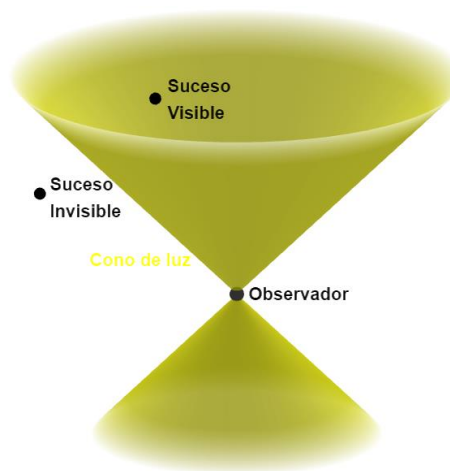


*Ilustración 5: Relación entre marcos inerciales en la TER y como geoméricamente se muestra que la condición de mantener la relación invariante sin importar la velocidad se ven afectadas las mediciones de espacio tiempo entre más rápido se mueva. Elaboración Propia. Idea original de: (Fuchs, 1967, pág. 226)*

La figura anterior gracias a la equivalencia entre la rotación de ejes con el movimiento de marcos inerciales en el *Espacio-Tiempo* (Einstein, La relativité, 2001), muestra cómo geoméricamente para conservar la distancia entre los sucesos se hace necesaria la dilatación temporal y la contracción espacial que miden los marcos en movimiento. Incluso, se hace

necesario decir que es debido a la búsqueda de esta relación que la concepción *Espacio-Tiempo* se hace necesaria, ya que este concepto permite hallar relaciones causales que no varíen según el observador.

Esto no quiere decir que las posiciones que se den a los sucesos no varíen entre observadores, es más bien una relación que los pone de acuerdo, debido a que como se ha dicho cada uno mide un espacio y tiempo propio desde su estado de movimiento, esta relación además no permite que se viole el principio causal entre los sucesos, ya que debido a la inclusión de la velocidad de la luz obliga a que todos los sucesos causalmente conectados se encuentren dentro de un área delimitada por una región llamada *cono luz*. (Ilustración 6).



*Ilustración 6: El cono y los sucesos. A cada observador se le puede asociar un cono de luz. Elaboración Propia.*

Esta representación expone geoméricamente los sucesos que son posibles de observar por alguien ubicado dentro del cono, es decir que las relaciones causales (representadas como las líneas rectas que unen sucesos en el plano) solo son posibles si están ubicadas dentro de este cono, dicho de otro modo, la velocidad máxima con la que un suceso puede afectar a otro a través del espacio es la velocidad de la luz y es imposible afectar (u observar) cualquier suceso ubicado fuera del cono (ilustración 6).

Esto se puede ejemplificar con el tiempo que demora en arribar la radiación solar a la tierra, ya que dicha radiación no puede alcanzar a la tierra antes de 8 minutos después de haberse emitido dicha radiación, es decir, que todos los sucesos que involucren la radiación emitida por el Sol deberán ubicarse dentro del cono de luz del Sol sí y solo sí estos ocurren ocho minutos después de ser emitidos, todos los sucesos ocurridos en la tierra antes de ese tiempo se encontrarán fuera del cono de luz.

### 3.3 Geometría de la TGR

Einstein en la TER enuncia como principio la imposibilidad de viajar a la velocidad de la luz, después en su TGR plantea una ley de la gravitación (ecuaciones de campo) acorde a este principio<sup>2</sup>, esto para que su primera teoría sea válida para marcos acelerados debido a que estos son los que más se presentan en la naturaleza.

La formulación del principio de equivalencia muestra cómo en realidad la gravedad no es una fuerza, lo que se experimenta son trayectorias “rectas”, a través de un espacio curvo, estas trayectorias crean la ilusión de que los cuerpos son halados por una “fuerza”, encontrando una relación directa entre gravitación y geometría, es debido a eso que se afirma que la TGR es una teoría geométrica de la gravedad.

Por consiguiente, cada concepto tiene su representación tal y como lo afirman Misner, Thorne, & Wheeler (1973) : “todo lo que se encuentre en el *Espacio-Tiempo* tiene su descripción geométrica”<sup>3</sup> (pág. 48), incluso afirman también que: “la curvatura en geometría manifiesta en sí misma gravitación”<sup>4</sup> (pág. 47). Y es que no es de extrañarse que esto ocurra en física ya que es bien sabido que toda cantidad física puede ser descrita por un objeto geométrico: por ejemplo, *El vector*, con él es posible representar fuerzas y momentos, incluso realizar diagramas que permitan una representación geométrica de los fenómenos y con ellos una mejor explicación.

En la TGR se habla de sucesos en lugar de fenómenos observados y es que un *suceso* ocurrido en el *Espacio-Tiempo* es un objeto geométrico en sí, el cual es posible conectar con otro suceso cercano utilizando un vector, esto se aplica a superficies no-planas, usando el objeto *vector tangente*, que es esencial debido a que el *Espacio-Tiempo* se curva en presencia de masa; con este objeto es posible hallar las distancias entre dos sucesos en un *Espacio-Tiempo* curvo.

Esto se hace asociando un *vector tangente* a cualquier punto sobre el *Espacio-Tiempo*; lo que se hace (grosso modo) es calcular una cantidad infinitesimal de estos vectores entre dos sucesos, para sumarlos y así conocer la distancia entre ellos. Cabe aclarar que las componentes de dichos vectores cambian punto a punto dependiendo de la geometría del espacio estudiado.

Aunque estos objetos geométricos mencionados son utilizados en la TGR, existe uno aún más fundamental: la métrica (ecuación 3), la cual permite hallar relaciones entre los sucesos

---

<sup>2</sup> Principio que muestra equivalencia entre un marco en caída libre y un marco que no es afectado por ninguna fuerza

<sup>3</sup> Traducción propia, del texto original

<sup>4</sup> Traducción propia, del texto original

mediante el concepto de *vector tangente*, con esta es posible conocer el vector unidad del espacio descrito por ella misma, además de que es posible dar cuenta de la direccionalidad temporal del *Espacio-Tiempo*, esto de gran utilidad para la realización de los *diagramas de Penrose*.

$$g_{ij} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2}$$

*Ecuación 3: La métrica y los vectores*

### 3.3.1 Objetos Geométricos de la Relatividad

La Teoría General de la Relatividad tiene implícito su carácter geométrico, debido a esto todos los conceptos utilizados en dicha teoría tienen su representación, la cual facilita su estudio y permite obtener conclusiones más evidentes ya que en general de las ecuaciones uno se hace imágenes mentales desde el entendimiento de las componentes de dichas ecuaciones, mientras que con imágenes ese proceso se omite evadiendo así la comprensión de ciertos objetos matemáticos es decir poniendo el alcance de la teoría a más personas. Los más relevantes para nuestro estudio serán mostrados a continuación.

#### 3.3.3.1 Métrica (Coordenadas de Gauss)

Einstein (2001) da un ejemplo que permite tener una idea clara de métrica: Si nos imaginamos una superficie curva, se escoge un punto desde el cual se expanden flechas en las direcciones permitidas para moverse sobre dicha superficie. Así la punta de cada flecha permite ubicar el siguiente punto sobre la superficie hasta tener toda la superficie llena de puntos con sus respectivas flechas, lo interesante es que gracias a que cada región definida por este punto y flechas es un espacio euclidiano por lo que es posible admitir que ese espacio puede ser considerado como un continuo espacio euclídeo.

Esta misma técnica permite hacer mediciones sobre el espacio de la relatividad especial (espacio de Minkowski) y si se limita a espacios extremadamente pequeños es posible aplicarla también en los espacios encontrados en la teoría general de la relatividad (Einstein, 1979) es decir en espacios que no cumplan la condición de ser continuos euclídeos. Sin embargo, como lo afirma el mismo Einstein (2001), si estas flechas son suficientemente pequeñas a la superficie estas permiten tener una imagen de una superficie curva desde las concepciones euclídeas de la geometría y así desarrollar relaciones entre los puntos de dicho espacio y por ende dar cuenta de los movimientos que siguen los cuerpos sobre dicha superficie.

La métrica entonces puede ser entendida como el objeto que describe el espacio (su geometría), es decir, da las características sobre la forma que tiene el espacio, además que permite conocer los vectores tangentes con los que se recorre el espacio estudiado y con los que es posible conocer la distancia entre dos puntos; en otras palabras, *“la métrica es una máquina en la que se introducen dos vectores y esta los transforma en un número real”*<sup>5</sup> (pág. 51) (Misner, Thorne, & Wheeler, 1973), es decir, con ella es posible realizar el producto interior entre dos vectores diferentes ubicados en el espacio o conocer el cuadrado la longitud de un vector y por ende la distancia entre dos puntos en dicho espacio. La métrica entonces permite conocer las características que tiene un espacio, da los vectores con los que es posible recorrerlo y en el caso de la Física permite conocer la dirección temporal que tiene el Espacio-Tiempo estudiado.

La métrica se basa en el concepto de tensor, de gran importancia y utilidad en la TGR, el cual según Vélez (2017): en una aproximación al concepto se entiende como una cantidad que consta de  $n^m$  número de componentes (siendo  $m$  el orden del tensor y  $n$  la dimensión del espacio vectorial) que al cambiar de base coordenada permanece invariante sin importar que sus componentes sí lo hagan.

Vélez (2017), también da una definición de tensor métrico evocándolo como un tensor de segundo orden el cual introduce en la geometría representada por la métrica, el cálculo aritmético. A pesar de que la TER es válida para marcos de referencia inerciales, utiliza varios conceptos que se expanden a la TGR y que son plasmados en los diagramas de Minkowski, para ejemplificar los conceptos geométricos que se conservan en la teoría de la gravitación de la relatividad.

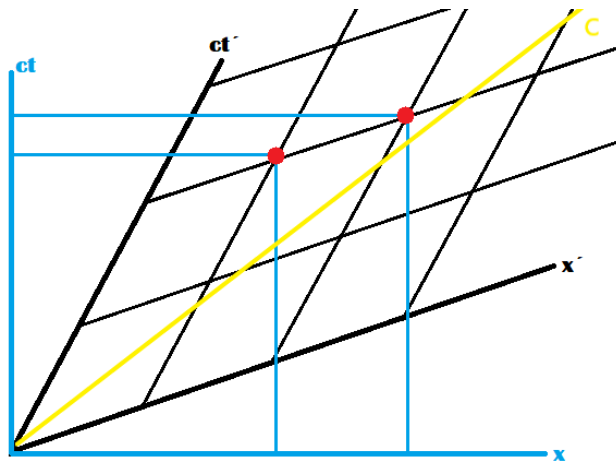
En estos diagramas el marco de referencia para un observador en reposo es aquel que su eje temporal es perpendicular al eje espacial, mientras que el marco para un observador en movimiento está contenido en el área delimitada por los ejes del marco en reposo y cuyo ángulo entre ejes se hace más pequeño conforme aumente su velocidad. Las mediciones que se hacen del espacio y el tiempo desde el marco en movimiento se plantean como las líneas dentro de este y difieren con las mediciones hechas desde el marco en reposo (y por tanto también las ubicaciones de los sucesos) (Ilustración 7).

---

<sup>5</sup> Traducción propia, del texto original

Los sucesos son puntos y deben estar ubicados dentro del cono de luz (línea amarilla, ilustración 7) para que ambos observadores puedan verlos y admitir una relación causal entre ellos.

Es importante decir que, debido a la velocidad de un marco respecto a otro, es posible que alguno de los dos no pueda influir o incluso observar la misma cantidad de sucesos y ubicar en las mismas posiciones (tanto espaciales como temporales) en sus marcos de referencia.



*Ilustración 7: Diagrama de Minkowski, en este los sucesos son simultáneos para el marco en movimiento (azul) pero no lo son para el marco inmóvil (negro). La distancia entre sucesos es la misma para los dos marcos además, estos se encuentran dentro de la región delimitada por el cono de luz. Elaboración Propia*

### 3.3.3.2 Espacio-Tiempo

Es el lugar donde ocurren todos los sucesos en el Universo (Geroch, 1985), la observación o afectación de estos (sucesos) depende de la posición y el estado de movimiento que tenga un observador determinado. Geométricamente este es el espacio sobre el cual la métrica permite realizar medidas, en analogía con la función que tiene una regla para medir en una hoja en blanco. Este espacio también tiene la característica de ser continuo (Einstein, La relativité, 2001), es decir, una partícula que se mueve para cierto observador de la posición  $x = 1$  a la posición  $x = 2$  pasa por todos los números que existen entre estas dos.

Este es sobre el cual los observadores miden las distancias, tanto espaciales como temporales, las cuales pueden diferir dependiendo de su velocidad llevando esto a que dos sucesos simultáneos para un observador en reposo no lo sean para un observador en movimiento necesariamente. (Russell B. , 1983)

En la relatividad general se le conoce a este espacio, como el tejido<sup>6</sup> Espacio-Tiempo debido a que se puede curvar a causa de un objeto masivo, esta curvatura afecta las trayectorias (geodésicas) que sigue la luz o los cuerpos que se mueven cerca de la masa que produce dicha curvatura (Sarbach, 2020).

### 3.3.3.3 Intervalo Espacio-Tiempo

En la relatividad especial se muestra cómo el movimiento de los observadores afecta las mediciones que se realizan del tiempo y el espacio, haciendo el tiempo más largo y el espacio más corto (dilatación temporal y contracción de la longitud) para un observador que se mueva rápidamente por el universo, esto ocasiona que entre observadores existan discrepancias sobre las ubicaciones de los sucesos, debido a esto se hace necesario conocer una distancia real entre dos puntos en el universo o distancia entre los sucesos en el *Espacio-Tiempo*, esta distancia debe ser independiente del estado de movimiento de los observadores (Russell B. , 1983) ; tal y como se aprecia en la ilustración 5, la línea recta que une los sucesos es la misma para ambos marcos, así uno se encuentre en movimiento y realice diferentes mediciones de su espacio y su tiempo. Esta idea se representa en la métrica de Minkowski:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

*Ecuación 4: Métrica de Minkowski*

A esta relación (ecuación 4) se le llama Intervalo Espacio-Tiempo, y permite conocer la distancia que existe entre dos sucesos. Además, este intervalo permite definir el valor que debe tener la distancia recorrida por la luz y a los observadores encontrar la distancia entre los sucesos ubicados en el *Espacio-Tiempo* (Pascual, 2020), siendo para la luz un valor de cero y para los segundos un valor positivo.

### 3.3.3.4 Conos de luz

Son un objeto geométrico utilizado en la Relatividad para analizar la causalidad, se representa en diagramas de Minkowski (Ilustración 7), en el cual se dibuja sobre la región positiva del eje espacial y delimita la región dentro de la cual los sucesos pueden ser medidos por los observadores situados en los marcos de referencia. Su representación en física se realiza con la condición de que los ángulos internos del cono sean de 90 grados, esto se conserva como un

---

<sup>6</sup> En algunos textos se encuentra como malla Espacio-Tiempo

<sup>7</sup> Escrita en coordenadas de Gauss

invariante geométrico dentro la TGR ya que la velocidad de la luz debe ser la misma sin importar el estado de movimiento del observador en el *Espacio-Tiempo*.

Este objeto es importante en la TGR ya que permite conocer las regiones que un observador puede ver y afectar, en otras palabras, permite conocer qué es posible observar desde un punto del *Espacio-Tiempo*.

### 3.3.4 Ecuaciones de Campo

Einstein buscaba unas ecuaciones análogas a las ecuaciones de campo para la gravitación (Ecuaciones de Poisson), que se adaptan a los campos gravitaciones percibidos por un cuerpo dentro de una masa y la ecuación de Laplace, la cual lo hace para cuerpos ubicados en regiones aleñadas a la masa (Sánchez, 1983). Es debido a esto que las ecuaciones de campo toman la idea de que el *Espacio-Tiempo* es una malla en la cual se encuentran los sucesos del universo (idea ya contenida en los diagramas de Minkowski) con el aditivo de que esta malla se deforma en presencia de masa, es decir la masa crea un campo gravitacional a su alrededor que para la TGR es la deformación misma del *Espacio-Tiempo* (ilustración 8).

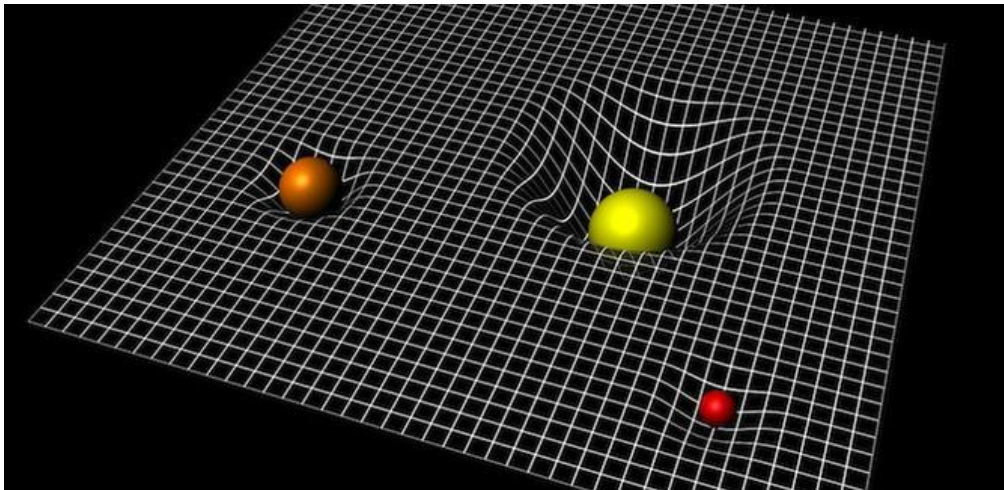


Ilustración 8: Las configuraciones del *Espacio-Tiempo*. Fuente: <http://alef.mx/albert-einstein-presenta-su-teoria-de-la-relatividad-general-el-25-de-noviembre-de-1915/>

La ilustración 8 ejemplifica la idea de *Espacio-Tiempo* de la TGR, donde la malla sobre la que se encuentran las masas esta curvada (esta región está definida por las soluciones de las ecuaciones de campo, es decir la métrica), en cambio las zonas de la malla dónde no se encuentra ninguna masa el espacio no está deformado, es plano (métrica de Minkowski).

Las ecuaciones de campo entonces permiten hallar *Espacios-Tiempos* configurados de cierta manera debido a la presencia de masa, es decir, un cuerpo masivo en el universo crea una



configuración del *Espacio-Tiempo*, y dicha configuración es la responsable de crear trayectorias que siguen los cuerpos alrededor de dicha masa.

Con las ecuaciones de campo se puede derivar la configuración que tiene el *Espacio-Tiempo*, dicha solución es la ya nombrada métrica que permite medir las distancias entre los puntos de dicha configuración, la cual a su vez es posible hallarla con la concepción dada por Riemann de que, sobre una superficie curva, si se mide con reglas lo suficientemente pequeñas, se puede hallar la distancia entre dos puntos, así este espacio (en geometría se le llama variedad) no sea plano.

#### 3.3.4.1 Símbolos de Christoffel

Los símbolos de Christoffel permiten conocer en qué dirección del campo representado en la métrica cambia el vector tangente a la superficie conforme este se mueve sobre la superficie, estos vectores presentan cambios generalmente en superficies curvas, sin embargo, no hay que olvidar que a estos se les da el nombre de base coordenada y aunque sus componentes puedan presentar cambios dependiendo de la región de la superficie donde se encuentren, su magnitud no presentará cambios si se realiza un cambio de base.

$$\Gamma_{km}^i = \frac{1}{2} g^{ij} [\partial_m g_{ik} + \partial_k g_{im} - \partial_j g_{km}]$$

*Ecuación 5: Símbolos de Christoffel*

#### 3.3.4.2 Derivada Covariante

La derivada de un tensor no es un tensor y es debido a esto que existe la derivada covariante (Vélez, 2017) la cual es el homólogo a la derivada, pero para conservar las propiedades tensoriales del tensor al momento de derivar. Esta es de gran importancia ya que la física utiliza las derivadas para conocer la velocidad y aceleración que puedan tener los cuerpos en el espacio, si antes se conoce la ecuación de la trayectoria de dicho objeto.

Grosso modo la derivada covariante contiene una derivada corriente junto con un aditivo que permite tener en cuenta los cambios que presenta el vector (sea velocidad o aceleración) en su recorrido por la superficie.

Sea  $A_i$  un tensor de primer grado covariante su derivada respecto a  $x^k$  será:

$$\frac{dA_i}{dx^k} = \frac{\partial A_i}{\partial x^k} - \Gamma_{ik}^m A_m$$

*Ecuación 6: Derivada Covariante. Aparece un término nuevo en la derivada, estos símbolos son los ya nombrados símbolos de Christoffel, es sencillo notar que el grado de la derivada covariante arroja la cantidad de símbolos que deben aparecer.*

### 3.3.4.3 Tensor de Ricci

Derivado del tensor de Riemann, el tensor de Ricci se utiliza en las ecuaciones de campo para conocer la curvatura del *Espacio-Tiempo* este es el laplaciano del tensor métrico que permite hallar el campo gravitatorio en la teoría de campos de la gravedad, ahora el tensor de Ricci permite encontrar la métrica, la cual es análoga a la función que describe el campo gravitatorio. A estas métricas se les conoce como las soluciones a las ecuaciones de campo, las cuales dependiendo de las condiciones iniciales cambian de forma. El tensor de Ricci es de vital importancia ya que desde él es que la gravedad como curvatura cobra sentido, ya que permite conocer cómo se curva el *Espacio-Tiempo* en presencia de masa, además de que permite modelar universos dependiendo de su contenido energético, permitiendo avanzar en preguntas como la forma y fin del universo.

$$R_{ij} = \partial_k \Gamma_{ji}^k - \partial_j \Gamma_{ki}^k + \Gamma_{km}^k \Gamma_{ji}^m - \Gamma_{jm}^k \Gamma_{ki}^m$$

*Ecuación 7: Tensor de Ricci*

En las ecuaciones de campo aparece la letra R este se conoce como escalar de curvatura y es esencialmente la traza del tensor de Ricci. Este es un tensor de primer grado, eso significa que es un número real el cual identifica a cada variedad, o sea a cada *Espacio-Tiempo* derivado de una solución a las ecuaciones de campo.

En síntesis, las soluciones a las ecuaciones de campo de Einstein se basan en estos últimos tres conceptos matemáticos ya que permiten conocer la curvatura del espacio estudiado y sus propiedades, con los símbolos de Christoffel se conoce como cambian los vectores sobre la superficie punto por punto, la derivada covariante permite conocer las ecuaciones del movimiento de los cuerpos sobre el espacio y el tensor de Ricci describe dicho espacio.

## Capítulo 4: Solución de Schwarzschild

Esta es una de las soluciones más famosas a las ecuaciones Einstein ya que fue la primera en ser exacta, predice la existencia de los agujeros negros y además fue la solución utilizada para comprobar la validez de la TGR. Esta solución se abordará primero encontrando una aproximación de campo débil, que permite hallar la equivalencia respecto a ciertas constantes encontradas para después de desarrollar la solución desde las ecuaciones de campo, al final se

realiza un cambio de coordenadas que permite visualizar la configuración del *Espacio-Tiempo* que describe dicha solución y por ende analizarla.

## 4.1 Solución de Schwarzschild

Fue la primera solución exacta a las ecuaciones de Einstein y modela el campo gravitacional que produce cierta masa para un observador ubicado fuera del cuerpo, de ella se deduce además la existencia de un objeto astronómico que después John Wheeler llamaría agujero negro (Hawking, 2013), este es una región del *Espacio-Tiempo* que está separada del universo visible por el horizonte de sucesos, el cual es una frontera después de la cual la luz queda atrapada y por ende una región donde no es posible observar sucesos.

### 4.1.1 Aproximación de campo débil

Esta aproximación es expuesta con los argumentos de Crespo (2020), el cual desarrolla la solución suponiendo la existencia de un observador situado lejos del cuerpo masivo, además dicho cuerpo no se mueve espacialmente respecto al observador, lo que trae como consecuencia que la única componente del tensor métrico (ecuación 8) que tiene relevancia es la temporal ya que espacialmente el cuerpo no se mueve.

$$g_{ij} = g_{00} + g_{11} + g_{22} + g_{33}$$

*Ecuación 8: Tensor métrico genérico: Siendo la componente asociada al tiempo aquella con los subíndices 00, por ende, dejando al resto de componentes asociadas a las tres componentes espaciales.*

La métrica anterior sería válida para un observador que mide un cambio en la velocidad con la que se mueve un objeto en el espacio, pero nuestro observador hipotético solo puede dar cuenta de la cantidad de tiempo que transcurre, algo parecido a lo que pasa cuando observamos los astros de la bóveda celeste ya que a simple vista no se mueven en el cielo. Debido a esta condición la componente relevante del tensor métrico  $g_{ij}$  es la temporal (ecuación 9).

$$g_{00} = \frac{2M}{r}$$

*Ecuación 9: Componente Temporal*

La idea de que el cuerpo masivo no se mueva para un observador no quiere decir que la gravedad no afecte las mediciones que este realice, esto se demuestra en la ecuación 9, donde a pesar de no moverse respecto al cuerpo el tiempo que el mide se ve afectado por la masa y la distancia a la que se encuentre del cuerpo.

### 4.1.2 Condiciones Iniciales

La solución de Schwarzschild se realiza con el supuesto de cómo es el *Espacio-Tiempo* para un observador situado fuera de un cuerpo masivo y además para dicho observador el cuerpo masivo se encuentra en reposo respecto a su posición; a causa de estas consideraciones la ecuación de campo<sup>8</sup> queda escrita de la siguiente manera:

$$R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij} = 0$$

*Ecuación 10: Ecuación de campo para un observador situado fuera de la masa*

Se supone una métrica válida para un cuerpo esférico. Esto quiere decir que se asume que el cuerpo masivo que provoca determinada configuración del *Espacio-Tiempo* es perfectamente esférico, y por ende que sea posible pensar en un vector que tenga su origen en el centro de la masa y que este direccionado hacia el observador, para ello se usa la métrica, la cual estará dada por la ecuación 11.

$$ds^2 = f(r)dt^2 - g(r)dr^2 - r^2(d\theta^2 + (\sin \theta)^2 d\phi^2)$$

*Ecuación 11: Forma de la métrica: Solo se buscan las funciones que acompañan y por ende afectan las componentes temporal y radial, se asume la constancia en las componentes angulares de dicha métrica.*

Esta consideración del cuerpo como esfera trae consigo una simetría, la cual dice que el vector que tiene como origen el centro de la masa no cambia sus valores si este se mueve en las direcciones angulares, por ende, las funciones que se hacen necesarias encontrar solo deben depender de la distancia  $r$  del vector y solo afectaran la componente temporal y radial de la métrica.

Esta métrica (ecuación 11) debe parecerse a la métrica de Minkowski cuando  $r$  (distancia respecto a la masa) es muy grande ya que a esa distancia la configuración del *Espacio-Tiempo* se asemeja a un espacio plano debido a la no presencia de masa. Esto debe cumplirse también en esta solución y es la razón por la cual se agrega una función exponencial (ecuación 12) como función que acompaña las componentes radial y temporal, ya que al ser una función que se hace uno cuando el exponente se acerca a infinito deriva en la métrica de Minkowski cuando  $r$  también lo hace, además que al ser una función suave no permite la existencia de huecos en el

---

<sup>8</sup> Para la ecuación de campo se asume que el observador se encuentra fuera de la masa lo que trae la consecuencia que el tensor masa-energía sea igual a cero.

*Espacio-Tiempo*, en consecuencia hace que las trayectorias de los cuerpos sean continuas, lo que es necesario encontrar son las funciones A y B.

$$ds^2 = e^{A(r)}dt^2 - e^{B(r)}dr^2 - r^2(d\theta^2 + (\sin \theta)^2 d\phi^2)$$

*Ecuación 82: Métrica de partida, la cual cumple con las condiciones iniciales: Siendo A y B funciones que dependen de la distancia r y por ende son funciones que solo dependen de r.*

### 4.1.3 Componentes del Tensor de Ricci

A partir de esta métrica (ecuación 12) se utiliza la *ecuación 6* para encontrar los valores de los símbolos de Christoffel y remplazarlos en la *ecuación 7* y así encontrar las componentes no nulas del tensor de Ricci (ecuaciones 13,14,15,16), que resultan siendo la diagonal de la matriz resultante, es decir, las componentes son independientes unas de otras.

$$R_{tt} = -e^{A-B} \left( \frac{1}{2}A'' - \frac{1}{4}A'B' + \frac{1}{4}(A')^2 + \frac{A'}{r} \right)$$

*Ecuación 93: Componente temporal del tensor de Ricci*

En esta componente se exponen las funciones A y B junto con la variable r, mostrando entonces que en esta componente la posición del observador respecto a la masa es de vital importancia y que afectara entonces su medición del tiempo.

$$R_{rr} = \frac{1}{2}A'' - \frac{1}{4}A'B' + \frac{1}{4}(A')^2 - \frac{B'}{r}$$

*Ecuación 104: Componente radial del tensor de Ricci*

Encontramos aquí una solución bastante simétrica con la componente temporal, sino fuera porque esta no cuenta con ninguna función exponencial además que su última fracción tiene una B prima y no una A prima, de igual manera se puede admitir que la posición del observador respecto al cuerpo masivo es de vital importancia ya que afectara sus mediciones del espacio.

$$R_{\theta\theta} = e^{-B} \left( 1 + \frac{1}{2}r(A' - B') \right) - 1$$

*Ecuación 115: Componente angular (teta) del tensor de Ricci: A pesar de haber tenido en cuenta un cuerpo esférico el tensor de Ricci arroja componente teta. EXPLICAR DESDE LA ESFERA*

$$R_{\phi\phi} = R_{\theta\theta}(\sin \theta)^2$$

*Ecuación 126: Componente angular (phi) del tensor de Ricci: Aquí aparece otra simetría, sin embargo, esta vez lo hace con la componente teta siendo esta vez multiplicada por seno cuadrado de teta.*

Cada una de estas componentes (ecuaciones 13,14,15,16) son posibles igualarlas a cero debido a la ecuación 9 por lo que tomando las componentes temporal y radial (ecuación 14 y 13) las sumamos entre ellas arroja que:

$$A' = -B'$$

*Ecuación 137: Igualdad entre dos funciones solución del tensor de Riemann*

Estas  $A'$  y  $B'$  son derivadas de las funciones a encontrar. Con esta igualdad es posible con ayuda de la tercera componente del tensor de Ricci (ecuación 15) y utilizando otra vez la ecuación 9 derivada de las condiciones iniciales, hallar la siguiente ecuación diferencial:

$$0 = e^A(1 + rA') - 1$$

*Ecuación 148: Igualdad resultante en la componente angular teta del tensor de Riemann*

Cuya solución:

$$e^A = 1 + \frac{k}{r}$$

*Ecuación 159: Valor de la componente temporal sin conocer el valor de k*

Y usando la aproximación de campo débil se igualan las ecuaciones 8 con la ecuación 18, para conocer el valor de la constante  $k$  :

$$k = -2M$$

*Ecuación 16: Valor de la constante k dentro de la componente temporal*

Así logrando obtener las funciones  $e^A$  y  $e^B$ :

$$e^A = 1 - \frac{2M}{r}$$

*Ecuación 17: Valor de la componente temporal en la solución de Schwarzschild*

$$e^B = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}$$

*Ecuación 18: Valor de la componente radial en la solución de Schwarzschild*

Se admite entonces a partir de aquí que la distancia a la que se encuentre un observador de un cuerpo masivo junto con la masa de dicho cuerpo siguen siendo igualmente necesarias, tal como lo eran en la teoría newtoniana, sin embargo, en la TGR estos dos números repercutirán en las mediciones que el observador realiza del espacio y el tiempo mientras que en su predecesora no lo eran, siendo este factor de afectación de  $1 - \frac{2M}{r}$  en su componente temporal y de  $\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}$  en su componente radial.

#### 4.1.4 Métrica para un cuerpo de masa M

Teniendo en cuenta lo descrito hasta ahora, la solución hecha de Schwarzschild queda escrita de la siguiente manera:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + (\sin \theta)^2 d\phi^2)$$

*Ecuación 19: Métrica de Schwarzschild*

Esta métrica permite revisar varios aspectos, sin embargo, para hacerlos más evidentes se utilizará una representación gráfica derivada de un cambio de variable que resulta de factorizar el término  $\left(1 - \frac{2M}{r}\right)$  de la componente temporal y radial:

$$\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dR^2 = \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}$$

*Ecuación 204: Cambio de coordenada necesario para factorizar las componentes temporal y radial*

Con este cambio de coordenada es posible escribir la métrica de la siguiente manera:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) (dt^2 - dR^2) - r^2(d\theta^2 + (\sin \theta)^2 d\phi^2)$$

*Ecuación 215: Métrica de Schwarzschild con cambio de coordenadas por su componente radial*

La métrica tal y como está escrita permite comenzar a construir representaciones del *Espacio-Tiempo* descrito por esta solución, una de estas representaciones viene desde la *ecuación 24* ya que haciendo su integral se obtiene:

$$R = r + 2m \ln|r - 2m|$$

*Ecuación 226: Función derivada del cambio de variable*

Esta ecuación puede ser utilizada como una función y por ende es posible graficarla (ilustración 9) haciendo **R** la ordenada y **r** la abscisa:

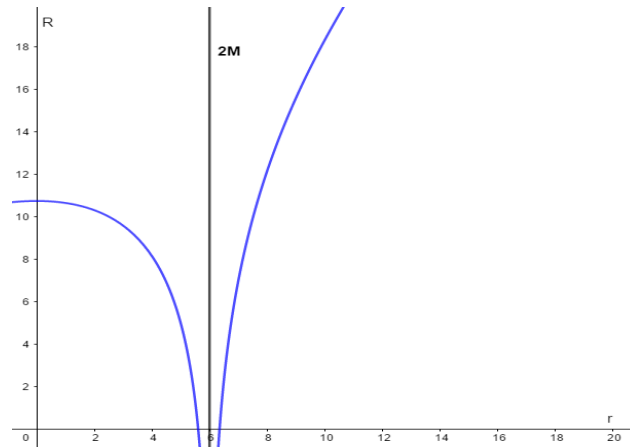


Ilustración 9: Gráfica de la función derivada de la componente radial de la solución de Schwarzschild

La gráfica permite observar que existen dos regiones desconectadas entre sí. Lo que separa ambas regiones es el llamado horizonte de sucesos y funciona como una censura universal que no permite observar lo que ocurre dentro de un agujero negro, es decir, si existen dos observadores, uno situado en la región  $r$  mayor a  $2M$  y el otro en la región  $r$  menor a  $2M$  no podrán comunicarse ni observarse ya que sus regiones están separadas por el horizonte de sucesos el cual funciona como una frontera entre ambas regiones.

## Capítulo 5: Diagramas Penrose-Carter

Con la solución de Schwarzschild ya desarrollada y gracias al cambio de coordenadas realizado es posible desde ahora, definir que existen dos regiones en el *Espacio-Tiempo* descrito por dicha solución, una que se ubica entre el infinito espacial y temporal y  $2M$  (universo visible), mientras que la segunda se ubica entre  $2M$  y la singularidad (censura universal). Estas dos regiones están divididas a su vez por la región  $2M$ , a la cual se le da el nombre de *horizonte de sucesos* debido a que representa la frontera entre la región observable y la región que no lo es para un observador ubicado en la región del universo visible.

En estas regiones, los observadores y la luz pueden ser representados en un diagrama de Penrose-Carter, el cual conserva el cono de luz como un invariante geométrico y permite analizar la estructura causal de las soluciones de las ecuaciones de Einstein, mientras sean máximamente simétricas para así poder omitir sus componentes angulares y realizar una representación en dos dimensiones de las soluciones.

### 5.1 Diagrama Penrose-Carter

Según Pérez (2021):



*“Sea una solución de las ecuaciones de Einstein y sea un conjunto de coordenadas que nos cubra la variedad (atlas). Entonces, su diagrama de Penrose es la representación pictórica de dicha solución en una región finita del plano.” (pág. 20)*

Por lo que toda solución a las ecuaciones de la relatividad general se puede representar usando los diagramas de Penrose mientras sea una solución planteada como esféricamente simétrica, para que no se existan cambios en la geometría, en específico con la geometría de los conos de luz, ya que se deben conservar intactos a pesar de que el sistema de coordenadas cambie o la misma geometría del espacio lo haga. Para construir un diagrama Penrose-Carter se abordaran las siguientes definiciones, las cuales son meramente matemáticas pero necesarias para describir geoméricamente las solución de Schwarzschild.

### 5.1.1 Difeomorfismo

Según Pérez (2021):

*“Un difeomorfismo entre dos variedades diferenciables  $M$  y  $N$  es una aplicación biyectiva tal que y son aplicaciones diferenciables. En tal caso,  $M, N$  se dicen variedades difeomorfas. Claramente, las dimensiones de dos variedades difeomorfas coinciden. Un difeomorfismo local es una aplicación diferenciable  $F: M \rightarrow N$  tal que  $\forall p \in M$ , existen entornos abiertos  $U$  de  $p$  en  $M$  y  $V$  de  $F(p)$  en  $N$  tales que es un difeomorfismo” (pág. 11).*

En palabras menos técnicas y parafraseando a Raymundo (2020), un difeomorfismo lo que hace es transformar una curva en otra. Si la curva de origen se puede representar como una función, es posible realizar una transformación tal (difeomorfismo) que me permita conservarla como una función diferenciable. Es decir, un cambio de coordenadas es un grupo de difeomorfismos.

### 5.1.1 Transformaciones de Weyl

*“Dadas dos variedades  $N$ -dimensionales  $M$  y  $\bar{M}$  con métricas  $g_{\mu\nu}$  y  $\bar{g}_{\mu\nu}$ , respectivamente, en el mismo sistema de coordenadas. Diremos que ambos espacios son conformes si las métricas están relacionadas con una transformación conforme (o transformación de Weyl)  $T$ , que consiste en una aplicación tensorial de la forma:*

$$g_{\mu\nu} \xrightarrow{T} \bar{g}_{\mu\nu} = e^{2\Omega(x)} g_{\mu\nu}$$

donde  $e^{2\Omega(x)}$  se denomina factor conforme y es una función escalar de las coordenadas dos veces diferenciable y positiva.” (Cano, 2021, pág. 7)

#### 5.1.1.1 Transformación conforme

Según Villa (Villa, 2020):

“Una función se llama conforme o transformación conforme en  $a \in \Omega$ , si  $f$  preserva ángulos entre curvas diferenciables que se interceptan en  $a$  y si  $f$  es real diferenciable en  $a$ .” (pág. 179).

Lo que se explica es que si se tienen dos curvas que se cortan en un punto y estas líneas se pueden escribir como funciones en un espacio geométrico, esta transformación me permite al cambiar el espacio donde se encuentran las líneas conservar los ángulos que forman las curvas en el punto de corte, siempre y cuando exista un factor que acompañe el nuevo sistema de coordenadas y que a su vez sea una función escalar de la función original.

#### 5.1.2 Compactación Conforme

Consiste en un cambio de coordenadas que trae los infinitos a una distancia finita, de forma tal que resulte un mapa compacto de nuestra variedad. Este cambio de coordenadas debe ser adecuado, tal que la métrica tenga la forma siguiente:

$$ds^2(y^u) \text{ --- Cambio de coordenadas } \rightarrow ds^2(y^u) = f(y^u) ds^2_*(y^u)$$

*Ecuación 23: Representación de como se hace un cambio de coordenadas si se quiere hacer a su vez una compactación conforme.*

Aquí (ecuación 23)  $f(y^u)$  es una función positiva de las coordenadas de origen y  $ds^2_*$  es una métrica asociada a otra variedad que llamaremos  $M^*$ . Nótese que esta métrica ha surgido como consecuencia de un cambio de coordenadas sobre nuestro espacio  $M$ , de modo que los rangos de las coordenadas originales  $\{x^u\}$  van a implicar que las nuevas coordenadas  $\{y^u\}$  se encuentren también acotadas y, en general, la métrica  $ds^2_*(y^u)$  no necesariamente cubre por completo  $M^*$ , se hace evidente que para el caso de la métrica de Schwarzschild para la realización de su diagrama Penrose-Carter no cubre las componentes angulares.

Efectuamos una transformación conforme del tipo:

$$ds^2(y^u) \xrightarrow{T} ds^2_*(y^u) = f(y^u)^{-1} ds^2(y^u)$$

*Ecuación 24: Si se realiza una transformación de tipo conforme debe aparecer un factor que sea función de las coordenadas originales del sistema en cuestión.*

Este resultado (ecuación 24) es un parche de la variedad  $M^*$  acotada por los rangos de las coordenadas  $\{y^u\}$  ya que no se extienden hasta el infinito.

Como trabajaremos con soluciones con espacios simétricos podremos omitir las coordenadas  $(\theta, \phi)$  debido a la simetría esférica que presentan y el resultado es una subvariedad bidimensional acotada de  $M^*$  que extenderemos sobre un plano y lo llamaremos diagrama de Penrose-Carter de la solución  $M$  (Métrica de Schwarzschild).

## 5.2 Construcción de los diagramas

### 5.2.1 Sistemas de coordenadas

Los conceptos y herramientas utilizadas para construir los diagramas se dividen grosso modo en cuatro pasos dados por Pérez (2020). Estos pasos permiten apreciar el por qué los diagramas tienen esa forma y qué es lo ejemplifica cada una de las partes al igual que la dirección temporal de dicha representación.

Para mostrar los cuatro pasos a manera de introducción se iniciará con el diagrama que representa la métrica de Minkowski, el cual tiene la característica de ser plano a causa de que no se encuentran masas que lo curven.

1. Para comenzar a representar una solución de las ecuaciones de Einstein se busca hacer que los infinitos se vuelvan finitos, es decir, en la métrica de Minkowski (el cual también es solución trivial a las ecuaciones de Einstein) se pueden considerar sucesos infinitamente lejanos para cierto observador.

Para esto se utiliza un cambio de coordenadas (para compactar el *Espacio-Tiempo*) que permita dibujar dichos infinitos, para ello se utiliza la función tangente hiperbólica la cual arroja valores infinitos cuando la función se acerca a  $\pi$  medios.

En realidad, se realizan tres cambios de coordenadas, la primera permite la unión de la coordenada temporal y espacial en dos coordenadas. Se hace evidente la necesidad de mantener los principios de la no existencia de distancias ( $r$ ) negativas y en cambio conservar el principio de la independencia de las leyes del movimiento respecto al tiempo (Tabla 1):

$u = t - r$	$u \in R$
-------------	-----------

$v = t + r$	$v \in R$
	$2r = v - u > 0$ $2t = v + u \in R$

*Tabla 1: Cambio de coordenadas hacia el sistema de coordenadas nulas. Nulas ya que se les atribuye a los ejes que sigue la luz en el Espacio-Tiempo.*

2. La segunda de ellas permite enviar las coordenadas “infinitas” del *Espacio-Tiempo* de Minkowski a un sistema “finito” de coordenadas, se realiza un rango de validez de las coordenadas ya que la tangente hiperbólica arroja valores hasta  $\pi$  medios, además se obliga que la resta de  $V$  a  $U$  sea natural (Tabla 2):

$U = \tanh(u)$	$-\frac{\pi}{2} < U < \frac{\pi}{2}$
$V = \tanh(v)$	$-\frac{\pi}{2} < V < \frac{\pi}{2}$
	$V - U > 0$

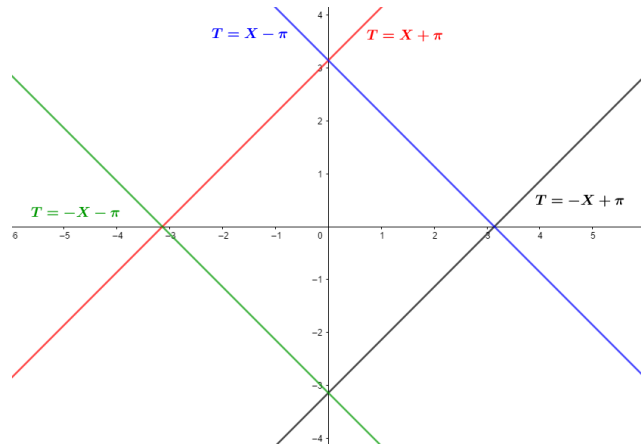
Tabla 2: El segundo cambio de coordenadas permite confinar en una región finita el *Espacio-Tiempo*.

3. Finalmente se envían las coordenadas “finitas” para confinarlas en una región delimitada por un rombo, para ello se redefinen las coordenadas  $T$  y  $X$  en términos de  $V$  y  $U$ .  $T$  y  $X$  forman rectas paralelas que se interceptan en  $\pi$  y menos  $\pi$  en cada eje del plano, además, gracias a la obligación que la resta de  $V$  a  $U$  sea positiva se conserva el carácter positivo de  $R$  (Tabla 3):

$T = V + U$	
$X = V - U$	$X > 0$
	$-\pi < T + X < \pi$ $-\pi < T - X < \pi$

Tabla 3: Último cambio de coordenadas que confina las coordenadas finitas a un rombo en el plano.

La interpretación del último sistema de coordenadas no tiene una explicación física, estas solo permiten una representación de algunas soluciones de las ecuaciones de campo para así estudiar su estructura causal. Así entonces la región que representa el *Espacio-Tiempo* está delimitada por las rectas proporcionadas por el último cambio de coordenadas (ilustración 11):



*Ilustración 10: El rombo delimitado por las cuatro rectas es la región que representa el Espacio-Tiempo (El color de cada recta está en concordancia con su representación funcional)*

Dentro de este rombo se delimitará el *Espacio-Tiempo* y por tanto se vuelve el espacio dentro del cual se ubican ahora todos los sucesos ocurridos, dichos sucesos serán ubicados sobre un diagrama que cambiará su forma dependiendo de la solución.

### 5.2.2 Métrica de Minkowski

Conociendo los cambios de coordenadas expuestos para confinar y representar por medio de un diagrama Penrose-Carter el *Espacio-Tiempo* descrito por la métrica de Minkowski (ecuación 4), la métrica queda de la siguiente manera:

$$ds^2 = \frac{1}{(1 - (T - X)^2)(1 - (T + X)^2)} (dT^2 - dX^2)$$

*Ecuación 25: Métrica de Minkowski después de realizar los tres cambios de coordenadas, es de notar que si se iguala a cero se hace evidente que los conos de luz conservan sus ángulos internos respecto al sistema coordenadas original.*

Tendiendo esta métrica se hace evidente que el cambio de coordenadas es una transformación conforme, gracias a la aparición del factor conforme (la compactación conforme esta ya contenida en el cambio de coordenadas), esto nos lleva a que sobre los diagramas Penrose-Carter el ángulo de 90 grados presente en todos los conos de luz se conserve incluso habiendo cambiado el sistema de coordenadas.

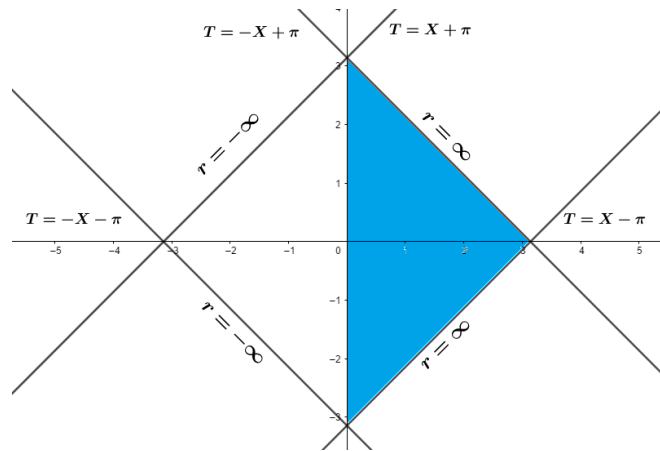
A partir de aquí es posible avanzar hacia la representación de esta métrica, para ello se debe eliminar el factor conforme:

$$ds^2 = dT^2 - dX^2$$

*Ecuación 26: Métrica de Minkowski para un diagrama Penrose-Carter. Lo importante aquí son los diferentes cambios de coordenadas realizados para acotar el Espacio-Tiempo. Estos cambios son los que permiten la construcción de los diagramas.*

Como ya mostró el rombo definido en el último cambio de coordenadas tiene cuatro rectas que se interceptan mutuamente en  $\pi$  en cada uno de los ejes del plano cartesiano. La parte izquierda del rombo no hace parte de la representación ya que siempre se asume la no existencia de distancias negativas en el universo (ilustración 11).

Gracias al segundo cambio de coordenadas se trajeron los infinitos a finitos para así después contenerlos dentro del rombo con el tercer cambio de coordenadas dando como resultado que el infinito espacial este representado por las rectas  $T = X + \pi$  y  $T = X - \pi$ , el tiempo comienza desde la intersección de las rectas  $T = -X - \pi$  y  $T = X - \pi$  y termina en la intersección de las rectas  $T = X + \pi$  y  $T = -X + \pi$ , este corre de abajo hacia arriba, como se muestra en la ilustración 11.



*Ilustración 11: La región sombreada de color azul es el universo descrito por la métrica de Minkowski representado por un diagrama de Penrose-Carter.*

Este diagrama se puede hacer más complejo si se utiliza el programa Scilab (ilustración 12) para graficar el diagrama utilizando los cambios de coordenadas propuestos y obtener así el sistema de coordenadas contenido en el diagrama para la métrica de Minkowski. En este nuevo diagrama las líneas del sistema coordenado original ( $r$  y  $t$ ) evidentemente cambian de las originales (ya no son rectas), de aquí la “belleza” de estos diagramas. Para nuestro caso las líneas azules corresponden al espacio y las líneas rojas corresponden al tiempo.

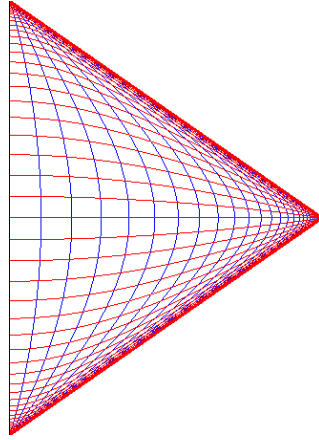
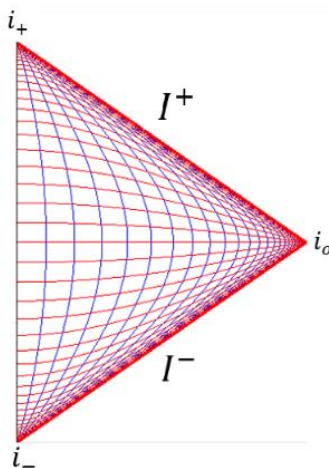


Ilustración 12: El grafico, aunque fue realizado en Scilab se basa en el programa utilizado por Javier García en su vídeo: Curso de relatividad general: <https://www.youtube.com/watch?v=3d88IVE1eME&list=PLAnA8FVrB18DF03y6o-AIYPLK12F1IA25&index=59>

Sobre este diagrama se ubican los sucesos ocurridos en el universo (para este caso de la métrica de Minkowski), sobre ellos se conservan los ángulos internos de un cono de luz y por tanto la estructura causal. A partir de aquí se le da nombre a cada una de las partes del diagrama (ilustración 13) siendo  $I^-$  el pasado infinito nulo del diagrama ya que desde allí parten los rayos de luz y siendo  $I^+$  el futuro infinito nulo, el lugar donde llegan los rayos de luz. Es nulo ya que lo único que es capaz de arribar a estos infinitos es la luz ya que el resto de las partículas parten de  $i_-$  hacia  $i_+$  (a estas últimas se les puede llamar infinito pasado e infinito futuro respectivamente) siguiendo las líneas azules del diagrama. El punto  $i_0$  equivale al infinito espacial, es decir en el sistema de coordenadas original ( $r$  igual a infinito en ecuación).





*Ilustración 13: Diagrama de Penrose-Carter, las líneas azules (siendo la primera de ella la línea recta que une  $\dot{i}_-$  y  $\dot{i}_+$   $r=0$ ) se interpretan en este sistema de coordenadas como el correspondiente al espacio y las líneas rojas se interpretan como el tiempo.*

### 5.2.3 Métrica de Schwarzschild

Como se vio previamente, para representar el diagrama Penrose-Carter de la métrica de Minkowski es necesario una métrica en la que su parte temporal y espacial estén multiplicadas por el mismo factor, para ello a la métrica de Schwarzschild se le realiza un cambio de coordenadas previo (Cañizares, 2021), a estas se les llama coordenadas de Kruskal. Las relaciones utilizadas de este sistema de coordenadas respecto a  $r$  y  $t$  son:

$$R^2 - \tau^2 = (r - 1)e^r \quad \frac{R}{\tau} = \tanh(t/2) \quad \text{o} \quad \frac{\tau}{R} = \tanh(t/2)$$

De esta manera la métrica de Schwarzschild en coordenadas de Kruskal queda<sup>9</sup>:

$$ds^2 = \frac{4}{r} e^{-r} (d\tau^2 - dR^2)$$

*Ecuación 27: Métrica de Schwarzschild en coordenadas de Kruskal. Aquí solo se tiene en cuenta las coordenadas radiales y temporales por que se asume también la existencia de un cuerpo simétricamente perfecto que deforma el Espacio-Tiempo.*

Conociendo los cambios de coordenadas de la tabla 1, la tabla 2 y la tabla 3 para compactar y representar por medio de un diagrama Penrose-Carter el *Espacio-Tiempo* descrito por la métrica de Schwarzschild en coordenadas de Kruskal (ecuación 27), la métrica queda de la siguiente manera:

$$ds^2 = \frac{1}{r} e^{-r} (1 + q^2)(1 + p^2)(dX^2 - dT^2)$$

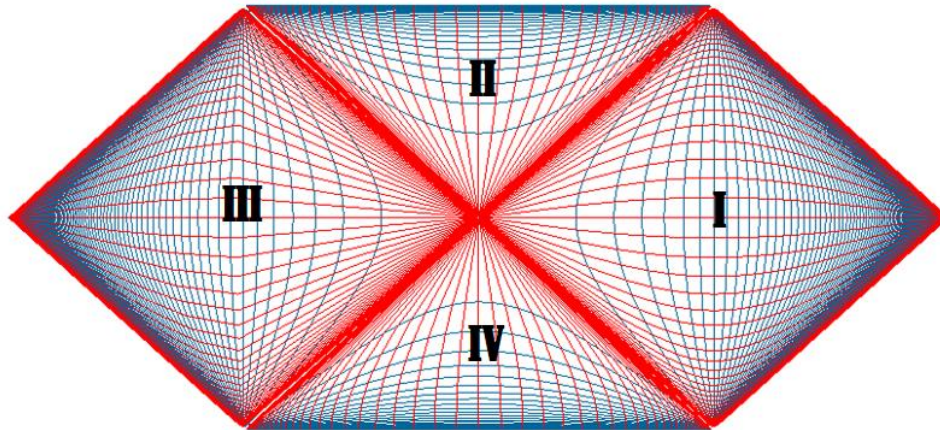
*Ecuación 28: La métrica de Schwarzschild después de haber efectuado los cambios de coordenadas. Para poder compactar este Espacio-Tiempo es necesario cambiar las tangentes hiperbólicas por arco tangentes para que su representación se compacte por líneas rectas y no por curvas.*

Ya sabemos que el *Espacio-Tiempo* de esta solución está dividida en dos regiones por el horizonte de sucesos. Para revisar esto se realizó un programa en Scilab relativamente

---

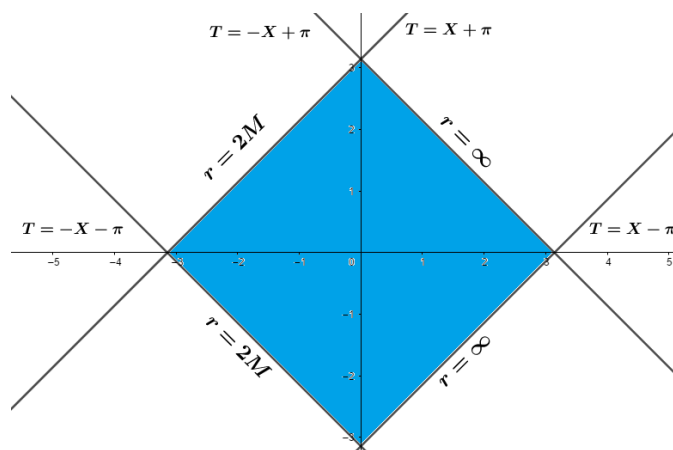
<sup>9</sup> La ecuación  $\frac{R}{\tau} = \tanh\left(\frac{t}{2}\right)$  es válida para las regiones I y III y la ecuación  $\frac{\tau}{R} = \tanh(t/2)$  es válida para las regiones II y IV (ilustración 14)

sencillo en el que insertan los cambios de coordenadas y se representa en el siguiente diagrama:



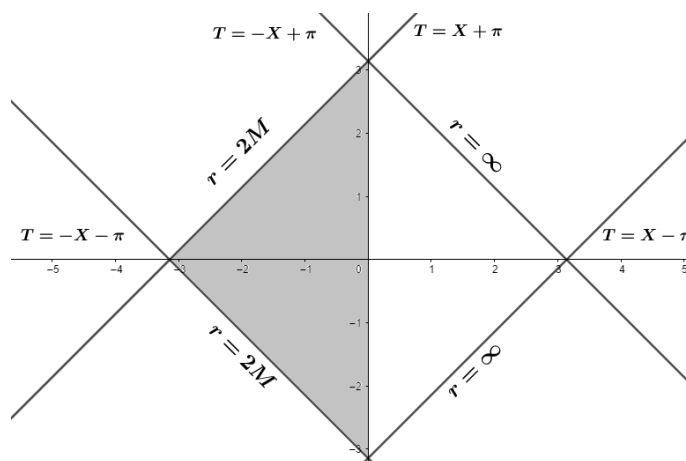
*Ilustración 14: Gráfica generada por Scilab. En esta grafica las líneas azules están relacionadas con el espacio y las rojas con el tiempo. El gráfico fue realizado en Scilab y se basa en el programa utilizado por Javier García en su vídeo: Curso de relatividad general: <https://youtu.be/MkNmZnCt4zc>*

La forma de este diagrama (ilustración 14) permite dividirlo en 4 regiones. La primera de ellas se muestra en la ilustración 15, se redefinen los límites del rombo correspondiente al último cambio de coordenadas después de la compactación conforme de tal manera que se representa el infinito espacial y el horizonte de sucesos (línea de color rojo en la ilustración 14) cuyo valor numérico depende de la masa del cuerpo que se encuentra en el *Espacio-Tiempo* multiplicado por dos.



*Ilustración 15: Rombo de la región I. La redefinición de los límites podría reinterpretarse de tal manera que es posible decir que el rombo que no se encuentra en el espacio de Minkowski es el Espacio-Tiempo para un cuerpo cerca del cuerpo masivo.*

Para el caso de la segunda región solo una parte del rombo será válida (parte sombreada de gris en la ilustración 16), ya que esta contiene la frontera dada por el horizonte de sucesos y la singularidad (ilustración 16).



*Ilustración 16: Rombo de la región II. En esta representación el eje T representa la singularidad, es decir el punto donde la relatividad pierde su validez y además la región (extremadamente diminuta) comúnmente llamada agujero negro.*

Para completar el diagrama las regiones III y IV son espejos de las ilustraciones 15 y 16. Para este caso se tiene como posibilidad que la región III corresponde a un universo paralelo del representado por la región I. Mientras que para la región IV se tiene la posibilidad de que sea un agujero blanco, es decir un agujero por el cual escapen cosas del universo III, siendo el objeto contrario a un agujero negro. Sin embargo, estas son especulaciones ya que aún no se comprueba la existencia de universos paralelos o de agujeros blancos. También es cierto que viendo el diagrama se podría teóricamente viajar entre universos paralelos, pero esto está restringido por la falta de pruebas experimentales de la existencia de universos paralelos y además del hecho de que al superar el horizonte sucesos la fuerza gravitacional destruiría cualquier viajero en cualquier nave, al menos con la tecnología actual.

#### 5.2.4 Diagrama de Penrose-Carter para la métrica de Schwarzschild

El diagrama Penrose-Carter de la métrica de Minkowski en coordenadas de Kruskal (ilustración 17) contiene entonces la métrica de Minkowski a su vez que el horizonte de sucesos y la región entre este último y la singularidad. Estas regiones tienen ciertos límites, los cuales fueron ya expuestos en el diagrama Penrose-Carter de Minkowski.

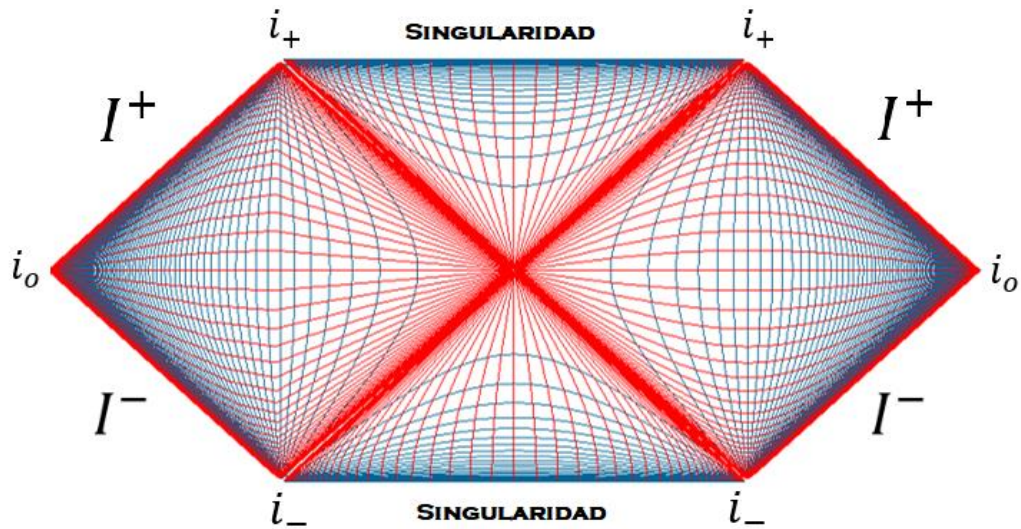


Ilustración 17: Diagrama Penrose-Carter para la métrica de Schwarzschild. Recordar la explicación de la ilustración 13

Con este diagrama es posible revisar cómo la luz es la única que puede alcanzar el futuro infinito nulo, ya que el resto de los cuerpos o partículas deben moverse dentro del cono de luz que representa el límite de velocidad que existe en el *Espacio-Tiempo* (Ilustración 18).

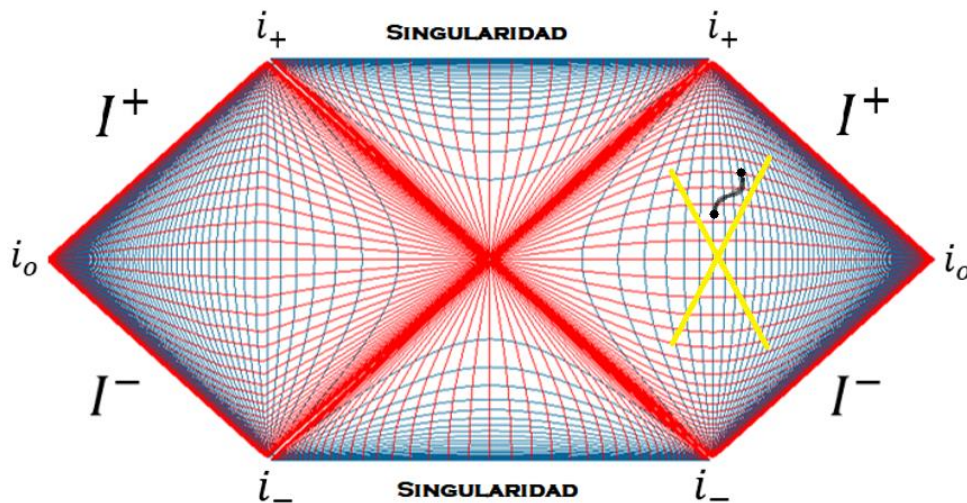


Ilustración 18: Cono de luz y cuerpo sobre el diagrama. El cono de luz está representado por el cono amarillo sobre la zona II y los puntos negros representan dos posiciones de un cuerpo en movimiento por la trayectoria representada por la línea negra que los une.

Además, se hace evidente cómo al pasar el horizonte de sucesos los ejes se invierten, es decir el espacio se vuelve el tiempo y el tiempo se vuelve espacio, es decir, el horizonte de sucesos se encuentra en el pasado y por ende la única manera de regresar sería viajar hacia atrás en

el tiempo. Esto se hace más evidente cuando sobre el diagrama (ilustración 18) las líneas azules en ningún momento tienen contacto con la zona I.

Los diagramas Penrose-Carter son representaciones pictográficas de las soluciones de las ecuaciones de campo de Einstein. Estos diagramas implican un cambio de coordenadas que permita reducir el tamaño de ese *Espacio-Tiempo* infinito a un plano. Estos cambios de coordenadas derivan en un cambio en las líneas que representan el tiempo y el espacio sean curvas contenidas en un rombo. Para el caso de Minkowski solo la mitad del rombo representa al *Espacio-Tiempo*, para el caso de Schwarzschild, tenemos un rombo completo que representa el *Espacio-Tiempo* de Minkowski y aquel que está cerca de un cuerpo masivo (región I), además de una región en la cual cualquier observador o la misma luz quedan atrapados (región II) y condenados a caer hacia otra región de la cual aún no conocemos bien su naturaleza pero si es seguro que la geometría del *Espacio-Tiempo* en ese punto esta tan curvada que encontramos una indeterminación en las ecuaciones. Estas características están bien representadas por cada uno de los componentes del diagrama, por ejemplo, mostrando como las líneas que representan el espacio y el tiempo en la región I cambian con respecto a las de la región II haciendo evidente la condena que se es dada al momento de cruzar el horizonte de sucesos.

## Capítulo 6: Conclusiones

Para la construcción de las siguientes conclusiones se tomaron en cuenta los objetivos del trabajo expuestos al inicio del documento. A su vez, se exponen también afirmaciones en torno al concepto de gravedad desde las interpretaciones conceptuales abordadas en la primera parte del trabajo. Posteriormente, se discute sobre el proceso de realizar los diagramas Penrose-Carter, los desafíos encontrados, los aprendizajes adquiridos y las ventajas que traen en la enseñanza de la TGR. Finalmente, se plantean conclusiones sobre la importancia de la geometría en la TGR y como gracias a programas como Scilab se hace más fácil la tarea de graficar y darle forma a los diagramas Penrose-Carter.

La gravedad se encuentra en el estudio de la física desde sus inicios, cada una de las teorías está de acuerdo sobre la causa del fenómeno gravitatorio (la masa), sin embargo, los mecanismos utilizados para que los cuerpos sean afectados por la gravedad cambian

dependiendo de la época. Para la teoría newtoniana se puede decir que es un estudio de la naturaleza, es decir, sobre los fenómenos encontrados en ella y sus explicaciones. Newton parte desde sus tres leyes del movimiento pasando por la analogía con el movimiento de proyectiles para así deducir la ley que predice las trayectorias de los planetas del sistema solar. Esta teoría no da una respuesta sobre cómo se transporta la acción de la gravedad, tanto así que Newton admitió que esa interacción era extraña ya que hacía acelerar los objetos sin hacerlos entrar en contacto, además que la acción de esta fuerza se transmitía de manera instantánea.

Einstein por el contrario buscaba que su teoría especial de la relatividad fuera válida para marcos acelerados y tuvo su mayor detonante en la equivalencia numérica existente entre masa inercial y masa gravitacional, esta búsqueda se vio permeada por la idea de campo, una idea ya desarrollada en la teoría electromagnética. Dicha teoría dice que es posible imaginar el campo como una propiedad del espacio, esto es imaginarse el espacio con características de una malla sobre la que se tensionan ciertas cuerdas, estas al tensionarse transmiten cierta acción que puede hacer mover los objetos. Para el caso de la relatividad general esta malla es el llamado *Espacio-Tiempo* creado por Minkowski. Einstein retoma la idea de Minkowski y admite que esta malla se deforma a causa de la masa que se encuentra en el *Espacio-Tiempo*. Es decir, la acción de gravedad es posible gracias a la existencia de este campo el cual al contrario de la teoría de Newton restringe la velocidad de la acción de la gravedad a la velocidad de la luz, en vez de ser una acción que se transmite de manera inmediata.

El concepto de gravedad desarrollado en la TGR permitió construir un sistema causal coherente para la acción de la gravedad diciendo entonces que su acción debía tomar cierta cantidad de tiempo para afectar los cuerpos alrededor de otro cuerpo masivo, lo que permite entonces en otras palabras admitir que un cuerpo causa cierto suceso y organizarlo de manera cronológica y espacial ordenadamente, mientras que para Newton la causa de los sucesos que involucraban la gravedad no era clara, ya que si la acción se transmite de manera instantánea, no se puede admitir un suceso detonante.

Los diagramas de Penrose representan una herramienta muy llamativa gracias a su elegancia y la manera como se representan los conceptos de las soluciones a las ecuaciones de campo. Esta representación permite abordar temas como los son los cambios de coordenadas, los

conos de luz, los sucesos, la causalidad, la singularidad, el horizonte sucesos, todo esto solo con líneas y puntos. Es decir, abordar la gran parte de conceptos que se encuentran en la base de la TGR sin usar una gran cantidad de ecuaciones, permite abrir la posibilidad de aumentar la curiosidad y las ganas de enseñar no solo a los estudiantes de física sino a casi cualquier persona que quiera aprender un poco y no tenga el tiempo de lidiar con las extensas matemáticas que trae la TGR.

El formalismo de la TGR como lo pude constatar no es nada corto. El primer desafío es tal vez la significación de cada objeto matemático, ya que su entendimiento raya a veces con lo ontológico, como la interpretación que se da al espacio y el tiempo como una unión que no admite divorcios, además que nos hace imaginarnos el tiempo como una dimensión, la cual recorreremos en sentido único.

La utilización de las ecuaciones de campo para TGR, se basan un poco en la idea de campo expuesta por las leyes que rigen el electromagnetismo, en esta última teoría se dota al espacio de ciertas características de tal manera que este se configure y se puedan observar ciertos fenómenos y no se tiene en cuenta la existencia de cuerpos, sin embargo, en la TGR el campo se configura gracias a la existencia de cuerpos ubicados dentro de dicho espacio y esto hace que el espacio se curve realmente (en la teoría electromagnética solo se configura de cierta manera pero nunca se curva) siguiendo ecuaciones, que a su vez determinan las trayectorias de los cuerpos por el espacio (geodésicas).

Sobre los cambios de coordenadas en lo personal pude aclarar el concepto, ya que, creía que al hacer un cambio de coordenadas se afectaba el espacio en sí. Durante la investigación se me hizo evidente que únicamente se está cambiando la forma de medir, más no el objeto (objeto fenomenológico) a medir. Por consiguiente, se admite que para medir un espacio u objeto se necesitan reglas, dichas reglas se hacen a partir de los sistemas de coordenadas, el problema es encontrar el sistema de coordenadas ideal para obtener una mayor precisión y comodidad al momento de medir.

Desarrollé una analogía para entender esto: Si se desea medir el área de una mesa rectangular y solo tengo a mi disposición un círculo con un área definida y un cuadrado con un área definida, es posible colocar cualquiera de los dos sobre la mesa, marcando el espacio que ocupan sobre ella hasta marcar toda la mesa y conocer una medida aproximada de su área.



Para obtener una medida más precisa se debe tener en cuenta la geometría de la mesa y por ende escoger la herramienta más útil, para este caso que sea aquella que cubra de mejor manera la superficie. El cuadrado representaría la mejor opción ya que si se usa el círculo, implicará que existan espacios entre cada marca hecha sobre la mesa y esto hará que la medida no sea cercana al área real de la mesa, mientras que para el caso del cuadrado no existirán espacios, por lo que se llega al resultado de manera más precisa.

En esta analogía se puede admitir que el *Espacio-Tiempo* es la mesa y las diferentes maneras de medir (cuadrado y círculo) son las métricas, a pesar de ser el mismo espacio las métricas (maneras de medir) permiten obtener datos de manera más sencilla y con mayor precisión sin importar el espacio, sin embargo, aún aplica la idea sobre la escogencia de la mejor manera para hacerlo, es decir, ciertas métricas facilitan el trabajo para medir en comparación a otras.

Con la teoría general de la relatividad creada sobre la idea del *Espacio-Tiempo* curvo es necesario utilizar la geometría diferencial para encontrar las distancias que recorren los cuerpos, así como su velocidad y aceleración. Esto es posible gracias a la idea de que si se hacen reglas de medir lo suficientemente pequeñas con respecto al espacio medido es posible hacer mediciones como lo hacemos en un espacio plano (extrapolándolo a la analogía ya expuesta), si es posible medir incluso con círculos una superficie como una tabla con una gran precisión, eso sí se deben hacer los círculos realmente pequeños ya que a menor tamaño de las reglas de medir la precisión de las mediciones será mayor.

De igual manera ocurre con los objetos no planos, ya que si se miden con reglas muy pequeñas (a nivel local el espacio curvo es plano) la distancia entre dos puntos y la suma de esas reglas permite tener una medida bastante precisa de la distancia que los separa.

Los espacios geométricos sobre los que puedo medir son llamados soluciones a las ecuaciones de campo de Einstein, siendo la solución trivial la métrica de Minkowski. Para un cuerpo masivo la solución a las ecuaciones de campo es la métrica de Schwarzschild. Dicha métrica implica a su vez que existe una región del *Espacio-Tiempo* de la cual no es posible salir si se entra (ni siquiera la luz puede escapar), esta región está separada del resto del universo por el horizonte de sucesos.



Las dos métricas abordadas en el trabajo son complementarias, es posible afirmar que la métrica de Schwarzschild contiene a la métrica de Minkowski, es decir, si dentro de cierta región del espacio no hay masa dicho espacio es plano (Minkowski), mientras que el espacio se curva en presencia de masa (Schwarzschild) y dicha curvatura aumenta dependiendo de la masa y el tamaño de la región que contiene la masa. En teoría cualquier masa puede llegar a formar un punto de curvatura infinita (singularidad), para ello se debe atrapar la masa en cierta región cuyo valor numérico (si se acepta que la masa es una esfera de radio  $r$ ) debe ser mayor a dos veces su masa.

La métrica de Schwarzschild está bien representada por su diagrama de Penrose-Carter, aquí se aprecia como si se acerca demasiado a  $r=2M$  se topa con una frontera que limita dos regiones (ilustración 14). Y si esta región es traspasada el espacio y el tiempo intercambian sus papeles y a partir de ese momento es imposible escapar ya que las líneas que representan el tiempo nunca se conectan con la región de procedencia ya que el horizonte de sucesos se encuentra ahora en el pasado y volver al pasado es imposible. Esta situación es una condena para cualquier observador que pase el horizonte de sucesos ya que es solo cuestión de tiempo para caer en la singularidad y el tiempo no se detiene.

Un diagrama Penrose-Carter es una representación geométrica que permite mostrar cómo se interpreta el Espacio-Tiempo desde la TGR. Los diagramas ejemplifican bien las regiones del espacio a las que un observador tiene acceso sin perder la lógica natural del *Espacio-Tiempo* también muestra las regiones desde las cuales es posible comunicarse con otro observador.

Un diagrama Penrose-Carter evidencia cómo funciona un agujero negro a partir de que se pasa el horizonte de sucesos, cómo se intercambian los papeles del espacio y el tiempo de tal manera que no es posible escapar una vez traspasada esa frontera. Además, los diagramas permiten hacer evidente la invarianza geométrica de la velocidad de la luz, ya que conserva el cono de luz expuesto en la teoría especial de la relatividad, esta invarianza trae como consecuencia la conservación del principio de causalidad, siendo tal vez uno de los avances más significativos de la TGR con respecto a su antecesora.

El principio de causalidad es de vital importancia en la construcción de teorías físicas, ya que permite organizar los sucesos que ocurren en el universo y armar una secuencia lógica que

permita a su vez una organización de los procesos que anteceden un cierto fenómeno dado, este principio de causalidad es una de las razones del por qué la TGR es importante ya que hace de este principio una realidad en la explicación de la gravedad. Este principio dice que siempre debe ser claro reconocer la causa de algún suceso, esto se ve ligado directamente con la imposibilidad de que la velocidad de acción sobre cualquier objeto tenga un límite, lo que implica que no sea instantáneo.

Para conservar el principio de causalidad geoméricamente se obliga a que el movimiento de los cuerpos, representados como una sucesión de puntos que en su conjunto forman una trayectoria en el *Espacio-Tiempo* se encuentren al margen de una región delimitada con ayuda de la velocidad de la luz. Es decir, el movimiento se puede representar como una sucesión de sucesos, los cuales deben ocurrir de tal manera que la trayectoria dibujada por la sucesión de sucesos se encuentre atrapada dentro de un cono (el cono de luz), cuyo ángulo interno debe siempre ser de 45 grados. Los sucesos que ocurren dentro del cono pueden ser causales de los demás sucesos que también se encuentren suscritos al mismo cono para así conservar el principio causal. Esto quiere decir que toda representación que se haga de cualquier *Espacio-Tiempo* si quiere conservar dicho principio debe conservar los conos de luz intactos.

La teoría de la gravedad de Einstein da una explicación clara sobre la causalidad y da reglas para nunca romperla con ayuda de una velocidad límite que coincide con la velocidad de la luz. Sin embargo, deja otros interrogantes como: ¿qué es en realidad una singularidad? o ¿se pierde la información de los objetos que caen dentro de un agujero negro? Estas respuestas e interrogantes son a mi parecer parte central de un curso de relatividad general y se pueden abordar utilizando los diagramas Penrose-Carter.

Para realizar estos diagramas es necesario abordar las soluciones a las ecuaciones de campo, y para avanzar en su representación es necesario saber y entender cómo hacer un cambio de coordenadas además de que al final el diagrama da luces sobre cómo se comporta el *Espacio-Tiempo* mostrando sus cualidades. Este proceso es laborioso, pero abarca a mi parecer lo necesario para un curso de relatividad además de un pequeño inciso de programación con el objetivo de realizar los diagramas Penrose-Carter, es decir, es posible ponerse como objetivo de un curso de relatividad realizar los diagramas y con solo ese objetivo abordar

conocimientos fundamentales del curso. Recordando que para realizarlos se necesita tener claro los conceptos de *Espacio-Tiempo*, Horizonte de sucesos, observador, *cono de luz*, sistema de coordenadas.

La programación significo tal vez el reto más difícil para realizar el trabajo ya que el aprender un idioma de programación implica tiempo y esfuerzo. A pesar de encontrar la programación gracias a Javier García, está presentaba errores cuando la pasaba a Scilab ya que un solo error en los comandos representaba que la gráfica presente líneas que atraviesan el gráfico o que al contrario las líneas no aparezcan. Revisar cuidadosamente cada comando se volvió algo normal, anotar y borrar sobre una hoja el diagrama de flujo para así entender que es lo que quiero y cómo lo estoy haciendo. El resultado final es bastante confortante ya que me mostro lo meticoloso que se debe ser cuando se quiere obtener un trabajo bien realizado.

Ilustración 1: La trayectoria del satélite de la Tierra como caso límite de las trayectorias de proyectiles que caen cada vez a más distancia de la base de la montaña de la cual fueron arrojados.

(Adaptación del dibujo original inserto en los Principia de Newton. (Gamow, 1987, pág. 48) **¡Error! Marcador no definido.**

Ilustración 2a: Ascensor en caída libre una ilustración de cómo se puede representar la idea de Einstein acerca de la caída libre como un marco en el cual no se perciban fuerzas gravitatorias. (Fuchs, 1967) Recuperado de libro original, página 233. ....	<b>¡Error! Marcador no definido.</b>
Ilustración 3: Para Einstein un ascensor acelerado puede ser equivalente a un marco afectado por la gravedad. (Fuchs, 1967, pág. 235) .....	<b>¡Error! Marcador no definido.</b>
Ilustración 4: La fuerza que hace posible las orbitas es la misma que causa la caída de los cuerpos. Fuente: <a href="https://www.astromia.com/solar/orbital.htm">https://www.astromia.com/solar/orbital.htm</a> , el 20/07/2020 .....	14
Ilustración 5: Relación entre marcos inerciales en la TER y como geoméricamente se muestra que la condición de mantener la relación invariante sin importar la velocidad se ven afectadas las mediciones de espacio tiempo entre más rápido se mueva. Elaboración Propia. Idea original de: (Fuchs, 1967, pág. 226).....	18
Ilustración 6: El cono y los sucesos. A cada observador se le puede asociar un cono de luz. Elaboración Propia. ....	19
Ilustración 7: Diagrama de Minkowski, en este los sucesos son simultáneos para el marco en movimiento (azul) pero no lo son para el marco inmóvil (negro). La distancia entre sucesos es la misma para los dos marcos además, estos se encuentran dentro de la región delimitada por el cono de luz. Elaboración Propia.....	23
Ilustración 8: Las configuraciones del Espacio-Tiempo. Fuente: <a href="http://alef.mx/albert-einstein-presenta-su-teoria-de-la-relatividad-general-el-25-de-noviembre-de-1915/">http://alef.mx/albert-einstein-presenta-su-teoria-de-la-relatividad-general-el-25-de-noviembre-de-1915/</a> .....	25
Ilustración 9: Gráfica de la función derivada de la componente radial de la solución de Schwarzschild.....	33
Ilustración 10: El rombo delimitado por las cuatro rectas es la región que representa el Espacio-Tiempo (El color de cada recta está en concordancia con su representación funcional).....	39
Ilustración 11: La región sombreada de color azul es el universo descrito por la métrica de Minkowski representado por un diagrama de Penrose-Carter. ....	40
Ilustración 12: El grafico, aunque fue realizado en Scilab se basa en el programa utilizado por Javier García en su vídeo: Curso de relatividad general: <a href="https://www.youtube.com/watch?v=3d88IVE1eME&amp;list=PLAnA8FVrB18DF03y6o-AIYPLK12F1IA25&amp;index=59">https://www.youtube.com/watch?v=3d88IVE1eME&amp;list=PLAnA8FVrB18DF03y6o-AIYPLK12F1IA25&amp;index=59</a> .....	41
Ilustración 13: Diagrama de Penrose-Carter, las líneas azules (siendo la primera de ella la línea recta que une $i - y$ $i + r=0$ ) se interpretan en este sistema de coordenadas como el correspondiente al espacio y las líneas rojas se interpretan como el tiempo. ....	42
Ilustración 14: Gráfica generada por Scilab. En esta grafica las líneas azules están relacionadas con el espacio y las rojas con el tiempo. El grafico fue realizado en Scilab y se basa en el programa utilizado por Javier García en su vídeo: Curso de relatividad general: <a href="https://youtu.be/MkNmZnCt4zc">https://youtu.be/MkNmZnCt4zc</a> .....	43
Ilustración 15: Rombo de la región I. La redefinición de los límites podría reinterpretarse de tal manera que es posible decir que el rombo que no se encuentra en el espacio de Minkowski es el Espacio-Tiempo para un cuerpo cerca del cuerpo masivo. ....	43
Ilustración 16: Rombo de la región II. En esta representación el eje T representa la singularidad, es decir el punto donde la relatividad pierde su validez y además la región (extremadamente diminuta) comúnmente llamada agujero negro.....	44

Ilustración 17: Diagrama Penrose-Carter para la métrica de Minkowski. Recordar la explicación de la ilustración 13.....	45
Ilustración 18: Cono de luz y cuerpo sobre el diagrama. El cono de luz está representado por el cono amarillo sobre la zona II y los puntos negros representan dos posiciones de un cuerpo en movimiento por la trayectoria representada por la línea negra que los une. ....	45

## Lista de Referencias

Gamow, G. (1987). *Biografía de la Física* [Ilustración 1]. Recuperado de libro original, página 48.

Fuchs, W. (1967). *El libro de la Física Moderna* [Ilustración 2a]. Recuperado de libro original, página 233.

Fuchs, W. (1967). *El libro de la Física Moderna* [Ilustración 2b]. Recuperado de libro original, página 234.

Fuchs, W. (1967). *El libro de la Física Moderna* [Ilustración 3]. Recuperado de libro original, página 235.

*Ilustración 4: Órbitas.* Recuperado de: <https://www.astromia.com/solar/orbital.htm>, el 20/07/20

## Referencias

Acín, E., & Acín, A. (2016). *Persiguiendo A Einstein De La Intuición a las Ondas Gravitacionales*. España: Bonal letra Alcompas, S. L.

Cano, A. J. (10 de 02 de 2021). *Universidad de Granada*. Obtenido de <https://www.ugr.es/~bjanssen/text/TFG-alejandroJimenez.pdf>

Cañizares, M. (17 de 06 de 2021). <https://crul.github.io/>. Obtenido de <https://crul.github.io/CursoRelatividadGeneralJavierGarcia/docs/Miguel%20Ca%C3%B1izares%20-%2048%20Resumen-Diagrama%20Penrose%20Kruskal.pdf>

Cohén, B. (1983). *La revolución newtoniana y la transformación de las ideas científicas*. Madrid: Alianza Editorial.

Crespo, M. (23 de Septiembre de 2020). <https://webs.um.es>. Obtenido de [https://webs.um.es/bussons/EcuacionesEinstein\\_Manuel.pdf](https://webs.um.es/bussons/EcuacionesEinstein_Manuel.pdf)

Einstein, A. (1979). *Comment je vois le monde*. Manchecourt : FLAMMARION.

Einstein, A. (2001). *La relativité*. Paris: Éditions Payot & Rivayés.

Feynman, R. (1998). *Seis piezas fáciles*. Barcelona: Crítica .

Fuchs, W. (1967). *El libro de la Física Moderna*. Barcelona: EDICIONES-OMEGA, S.A.

Gamow, G. (1958). *En el país de las maravillas: relatividad y cuantos*. Buenos Aires: Fondo de Cultura Económica .

Gamow, G. (1987). *Biografía de la Física*. . Barcelona: Salvat Editores, S.A.

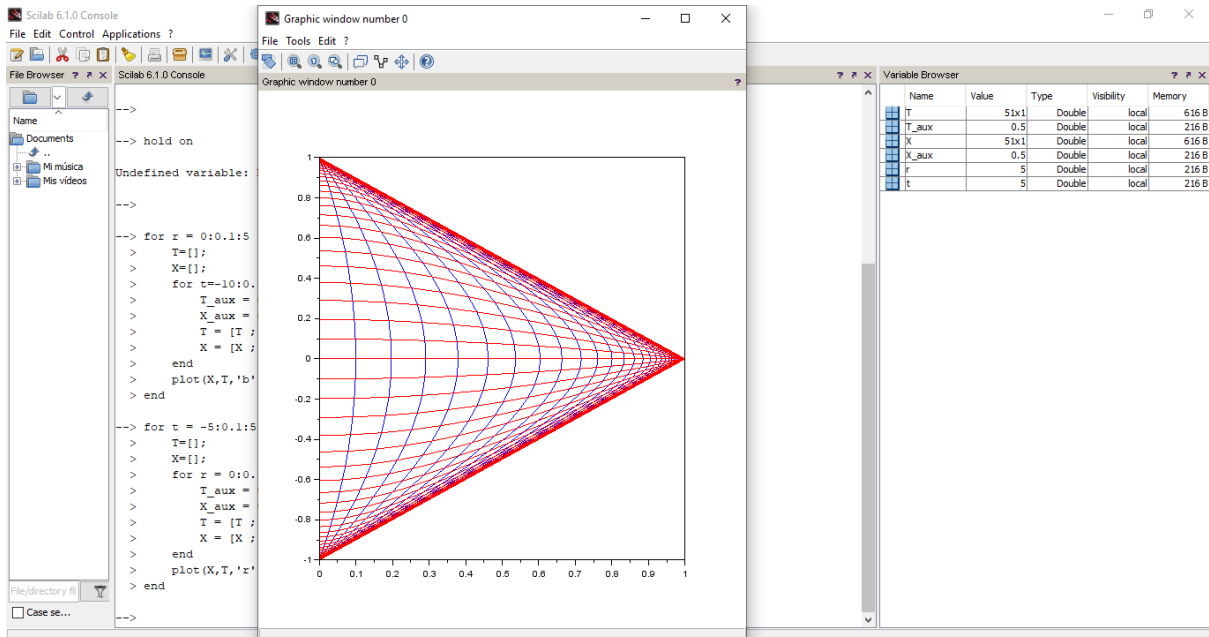
Gardner, M. (1986). *La explosión de la relatividad*. Barcelona: Salvat Editores S.A.

- Geroch, R. (1985). *La relatividad General (de la A a la B)*. Madrid: Editorial Alianza.
- Hawking, S. (2013). *La teoría del todo: Origen y destino del universo*. Bogotá D.C.: Penguin Random House Grupo Editorial, S.A.S.
- Hawking, S. (2017). *Agujeros Negros*. Barcelona: Editorial Planeta S.A.
- Hawking, S. (2020). *Une brève histoire du temps*. Francia: Éditions Flammarion.
- Heisenberg, W. (1985). *Physics And Philosophy*. E.E.U.U.: HarperCollins Publishers.
- Llerena, M. (13 de 12 de 2020). <https://bibdigital.epn.edu.ec>. Obtenido de <https://bibdigital.epn.edu.ec/bitstream/15000/15377/1/CD-7061.pdf>
- Misner, C., Thorne, K., & Wheeler, J. (1973). *Gravitation*. United States of America: W. H. Freeman and Company.
- Parsons, P. (2018). *50 TEORÍAS CIENTÍFICAS REVOLUCIONARIAS E IMAGINATIVAS*. Barcelona: Art Blume, S.L.
- Pascual, L. G. (4 de 12 de 2020). <https://revista-anales.icaei.es/>. Obtenido de [https://revista-anales.icaei.es/web/n\\_1/pdf/espacio\\_tiempo.pdf](https://revista-anales.icaei.es/web/n_1/pdf/espacio_tiempo.pdf)
- Pérez, J. (06 de 11 de 2020). <https://www.ugr.es/>. Obtenido de <https://www.ugr.es/~bjanssen/text/TFM-PerezPoyatos.pdf>
- Pérez, J. (10 de 02 de 2021). *Universidad de Granada*. Obtenido de <https://www.ugr.es/~bjanssen/text/TFM-PerezPoyatos.pdf>
- Pérez, J. (11 de 02 de 2021). *Universidad de Granada*. Obtenido de <https://www.ugr.es/~jperez/papers/GeometriaYTopologia.pdf>
- Ramos, S. (21 de 07 de 2020). *Coplt-arXives*. Obtenido de <http://scifunam.fisica.unam.mx/mir/copit/LT0001ES/LT0001ES.pdf>
- Raymundo, J. M. (24 de 10 de 2020). <https://matmor.unam.mx>. Obtenido de <https://matmor.unam.mx/~muciray/docencia/A-D-12.pdf>
- Russell, B. (1980). *An Inquiry Into Meaning And Truth*. Sydney: George Allen y Unwin Ltd.
- Russell, B. (1983). *El Conocimiento Humano*. Barcelona: Ediciones Orbis.
- Russell, B. (1985). *ABC de la relatividad*. España: Ediciones Orbis S.A.
- Sánchez, J. M. (1983). *El origen y desarrollo de la relatividad*. Madrid: Alianza Editorial, S.A.
- Sarbach, O. (4 de 12 de 2020). <http://www.ifm.umich.mx/>. Obtenido de [http://www.ifm.umich.mx/~sarbach/teaching/licenciatura/rg19/RG\\_curso\\_lic.pdf](http://www.ifm.umich.mx/~sarbach/teaching/licenciatura/rg19/RG_curso_lic.pdf)
- Tancara, C. (24 de 10 de 2020). *Scielo*. Obtenido de <http://scielo.org.bo/pdf/rts/n17/n17a08.pdf>
- Vélez, F. (2017). *Introducción a los Tensores*. Bogotá D.C.: Corcas editores SAS.
- Villa, G. (11 de 02 de 2020). *Departamento de Control Automático*. Obtenido de <https://www.ctrl.cinvestav.mx/~gvilla/VariableCompleja.pdf>

## Anexos

Líneas de programación para Scilab de los dos diagramas Penrose-Carter realizados.

- Diagrama Penrose-Carter para la métrica de Minkowski



% Ejes

axis square

xlim([-1.2,1.2])

ylim([-1.2,1.2])

hold on

for r = 0:0.1:5

T=[];

X=[];

for t=-10:0.1:10

T\_aux = 0.5 \* ( tanh(t + r) + tanh(t - r));

X\_aux = 0.5 \* ( tanh(t + r) - tanh(t - r));

T = [T ; T\_aux];

X = [X ; X\_aux];

end

plot(X,T,'b')

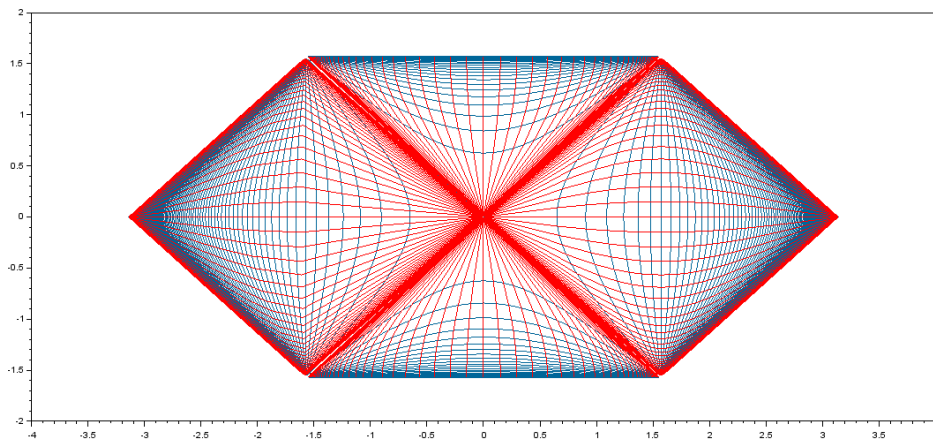
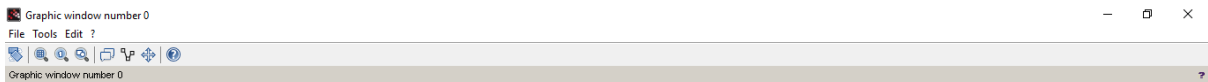
end

```

for t = -5:0.1:5
T=[];
X=[];
for r = 0:0.1:5
T_aux = 0.5 * ( tanh(t + r) + tanh(t - r));
X_aux = 0.5 * ( tanh(t + r) - tanh(t - r));
T = [T ; T_aux];
X = [X ; X_aux];
end
plot(X,T,'r')
end

```

- Diagrama Penrose-Carter para la métrica de Schwarzschild



```

dr=0.04;
dt=0.3;
r_limite = 15;

```



```

t_limite = 9;

% ZONA I

for r=1.0000001:dr:r_limite

espacio = [];
tiempo = [];
for t=-t_limite:dt:t_limite
X = sqrt(r-1)*exp(0.5*r)*cosh(0.5*t);
T = sqrt(r-1)*exp(0.5*r)*sinh(0.5*t);
p=X+T;
q=-X+T;
u=atan(p);
v=atan(q);
tao = u+v;
R = u-v;
espacio = [espacio ; R];
tiempo = [tiempo ; tao];
end
plot(espacio,tiempo,'Color',[0 0.4 0.6])

end

```

```

for t=-t_limite:dt:t_limite

espacio = [];
tiempo = [];
for r=1.00001:dr:r_limite

```

```

X = sqrt(r-1)*exp(0.5*r)*cosh(0.5*t);
T = sqrt(r-1)*exp(0.5*r)*sinh(0.5*t);
p=X+T;
q=-X+T;
u=atan(p);
v=atan(q);
tao = u+v;
R = u-v;
espacio = [espacio ; R];
tiempo = [tiempo ; tao];
espacio = [espacio ; R];
tiempo = [tiempo ; tao];
end
plot(espacio,tiempo,'r')

end

```

```
% ZONA II
```

```
for r=0.999999:-dr:0.00001
```

```

espacio = [];
tiempo = [];
for t=-t_limite:dt:t_limite
X = sqrt(1-r)*exp(0.5*r)*sinh(0.5*t);
T = sqrt(1-r)*exp(0.5*r)*cosh(0.5*t);
p=X+T;
q=-X+T;
u=atan(p);
v=atan(q);

```

```
tao = u+v;
R = u-v;
espacio = [espacio ; R];
tiempo = [tiempo ; tao];
end
plot(espacio,tiempo,'Color',[0 0.4 0.6])
```

```
end
```

```
for t=-t_limite:dt:t_limite
```

```
    espacio = [];
    tiempo = [];
    for r=0.999999:-dr:0.00001
        X = sqrt(1-r)*exp(0.5*r)*sinh(0.5*t);
        T = sqrt(1-r)*exp(0.5*r)*cosh(0.5*t);
        p=X+T;
        q=-X+T;
        u=atan(p);
        v=atan(q);
        tao = u+v;
        R = u-v;
        espacio = [espacio ; R];
        tiempo = [tiempo ; tao];
    end
    plot(espacio,tiempo,'r')
end
```

```

% ZONA III

for r=1.00001:dr:r_limite

espacio = [];
tiempo = [];
for t=-t_limite:dt:t_limite
X = -sqrt(r-1)*exp(0.5*r)*cosh(-0.5*t);
T = -sqrt(r-1)*exp(0.5*r)*sinh(-0.5*t);
p=X+T;
q=-X+T;
u=atan(p);
v=atan(q);
tao = u+v;
R = u-v;
espacio = [espacio ; R];
tiempo = [tiempo ; tao];
end
plot(espacio,tiempo,'Color',[0 0.4 0.6])

end

```

```

for t=-t_limite:dt:t_limite

espacio = [];
tiempo = [];
for r=1.00001:dt:r_limite
X = -sqrt(r-1)*exp(0.5*r)*cosh(-0.5*t);
T = -sqrt(r-1)*exp(0.5*r)*sinh(-0.5*t);

```

```

p=X+T;
q=-X+T;
u=atan(p);
v=atan(q);
tao = u+v;
R = u-v;
espacio = [espacio ; R];
tiempo = [tiempo ; tao];
end
plot(espacio,tiempo,'r')

end

```

```

% ZONA IV

```

```

for r=0.999999:-dr:0.00001

```

```

espacio = [];
tiempo = [];
for t=-t_limite:dt:t_limite
X = -sqrt(1-r)*exp(0.5*r)*sinh(0.5*t);
T = -sqrt(1-r)*exp(0.5*r)*cosh(0.5*t);
p=X+T;
q=-X+T;
u=atan(p);
v=atan(q);
tao = u+v;
R = u-v;
espacio = [espacio ; R];

```

```
tiempo = [tiempo ; tao];  
end  
plot(espacio,tiempo,'Color',[0 0.4 0.6])  
  
end
```

```
for t=-t_limite:dt:t_limite
```

```
    espacio = [];  
    tiempo = [];  
    for r=0.999999:-dr:0.00001  
        X = -sqrt(1-r)*exp(0.5*r)*sinh(0.5*t);  
        T = -sqrt(1-r)*exp(0.5*r)*cosh(0.5*t);  
        p=X+T;  
        q=-X+T;  
        u=atan(p);  
        v=atan(q);  
        tao = u+v;  
        R = u-v;  
        espacio = [espacio ; R];  
        tiempo = [tiempo ; tao];  
    end  
    plot(espacio,tiempo,'r')  
  
end
```