

De la historia a la modelación: Una estrategia pedagógica para la enseñanza de las leyes de Kepler a partir de la representación de elipses en GeoGebra

Paula Alejandra Bernal Sánchez

Asesor:

Victor Andrés Heredia Heredia

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE FÍSICA

LINEA DE PROFUNDIZACIÓN: LA ENSEÑANZA DE LA FÍSICA Y SU RELACIÓN
FÍSICA-MATEMÁTICA

Agosto, 2021

Agradecimientos

En primer lugar, agradezco a mi madre y a mi padre que me dieron la oportunidad de seguir sus pasos por la docencia en su alma mater. A mis hermanos María Camila y Julián por acompañarme en cada paso que di con sus ocurrencias y su apoyo en cada momento. A mi abuelita Lilia por cada una de sus enseñanzas y su amor incondicional que hacen de este un trabajo muy especial. A mis compañeros Geral, Dani, Cristhian, Migue, Camilo y todos aquellos que me hacen falta por su cariño y experiencias. Al docente y los estudiantes de la electiva de Astronomía General 2021-1 por ayudar con su disposición a esta investigación. Finalmente, a mi asesor el docente Víctor Heredia por su guía, confianza y enseñanzas que dieron frutos en este documento.

Índice general

1. PRIMER ACERCAMIENTO A LA ENSEÑANZA DE LA ASTRO-	
NOMÍA	1
1.1. Problemática	1
1.2. Objetivos	3
1.2.1. Objetivo general	3
1.2.2. Objetivos Específicos	3
1.3. Antecedentes	4
2. MARCO TEÓRICO	6
2.1. Las órbitas: Una visión de los astros a través del tiempo	6
2.1.1. Primeras consideraciones: los modelos planetarios en la edad antigua	7
2.1.2. Astronomía moderna	11
2.2. La geometría de las órbitas	15
2.2.1. Las cónicas	15
2.2.2. La elipse	19
2.3. Introducción al trabajo de Johannes Kepler	21
2.3.1. Primera ley de Kepler	22
2.3.2. Segunda ley de Kepler	24
2.3.3. Tercera ley de Kepler	26
2.4. GeoGebra para la construcción de modelación física	27
2.4.1. La modelación: una herramienta para la enseñanza de la física . .	28

2.4.2.	Introducción a GeoGebra: herramientas de modelación en la representación de fenómenos físicos	29
2.4.3.	Representación del movimiento planetario a partir de la modelación en GeoGebra	31
3.	METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN	34
3.1.	Ruta de trabajo	34
3.1.1.	La enseñanza del movimiento orbital a partir de la geometría: Del modelo de Van Hiele a los modelos científicos para la enseñanza de la física	35
3.1.2.	Modelo de Van Hiele en la enseñanza de la geometría y su relación con fenómenos físicos	35
3.1.3.	Los modelos científicos en la enseñanza de las leyes de Kepler	36
3.2.	Implementación de la estrategia pedagógica	39
3.2.1.	Encuesta de caracterización: Planteamiento y resultados	39
3.2.2.	La enseñanza de las leyes de Kepler a partir de la modelación	42
3.2.3.	Implementación de la propuesta	48
4.	CONCLUSIONES	52
	Bibliografía	56

Índice de figuras

2.1. Cosmología Filolao de Crotona	9
2.2. Modelo de Eudoxo	10
2.3. Sistema Ptolomeico	11
2.4. Observatorio Astronómico Tycho Brahe	13
2.5. Cónicas	16
2.6. Ecuación general cónicas	19
2.7. Elementos de la elipse	20
2.8. Sistema de representación planetario de Johannes Kepler; el círculo	23
2.9. Sistema de representación planetario de Johannes Kepler; la elipse	24
2.10. Elipse a partir de una ecuación	30
2.11. Elementos predeterminados GeoGebra	30
3.1. Modelaciones de los sistemas planetarios previos pertenecientes al contexto histórico	44
3.2. Cónicas a partir de la intersección del plano y el cono	45
3.3. Elementos básicos de la elipse	46
3.4. Modelación primera ley de Kepler	46
3.5. Modelación segunda ley de Kepler	47
3.6. Modelación tercera ley de Kepler	47
3.7. Ruta de aprendizaje	48
3.8. Fases del trabajo	49

Introducción

Desde el momento en el que el hombre empieza a buscar respuestas sobre su origen y todo aquello que lo rodea, ha estado presente la observación del cielo, no solo por el hecho de conocer sus características, sino para entender qué lugar tiene el ser humano en el universo, así surge una ciencia importante para las antiguas civilizaciones: La astronomía.

Uno de los aspectos principales de la astronomía es la mecánica celeste que da cuenta del movimiento de los astros y sus características. Desde los Babilonios se evidencia una evolución de pensamiento que llevaron a Kepler a formalizar matemáticamente sus tres leyes que ahora reconocemos como las que rigen tal comportamiento. Sin embargo, esta ciencia se ha convertido en un tema secundario al que se le invierte muy poco tiempo en el aula de clase (Solbes Matarredona y Palomar Fons, 2013), esto genera desinterés y dificultad para comprender algunos conceptos, en específico en la comprensión del movimiento de los planetas.

En el caso específico de las orbitas, el problema radica en que en el momento de cursar astronomía, los estudiantes no tienen bases sólidas en el estudio de las cónicas, específicamente de la elipse, ya que es el principio de la representación astronómica y en general de todo el universo (Ortun, 1982). En ese sentido, es necesario que el docente pueda aportar actividades que interesen al estudiante y sean sencillas para abordar conceptos específicos.

Por lo anterior se plantea una propuesta para la enseñanza en astronomía, que va dirigida a la enseñanza de las orbitas desde la geometría con la que se describe la mecánica

celeste para estudiantes de la electiva de astronomía general de la Universidad Pedagógica Nacional, aprovechando las herramientas computacionales, a partir del programa GeoGebra.

Capítulo 1

PRIMER ACERCAMIENTO A LA ENSEÑANZA DE LA ASTRONOMÍA

1.1. Problemática

Desde la escuela, el estudio de la astronomía es un tema secundario en la enseñanza de la física. De acuerdo con los estándares básicos de competencias en ciencias naturales del Ministerio de Educación Nacional, el estudiante de décimo y undécimo deben tener una noción del movimiento de los cuerpos celestes. Sin embargo, solo se contempla la enseñanza de las leyes de Kepler de forma matemática sin enfatizar en el análisis y comprensión de los conceptos que allí tratan, es decir, el proceso de aprendizaje se muestra incompleto ya que solo se replica información sin darle ningún sentido (Camino y cols., 2016).

Además, haciendo una revisión a los recursos pedagógicos presentados en algunos libros tales como de texto, es posible identificar que muchas veces se plantean situaciones problema en las que el movimiento orbital se presenta como un ejemplo de movimiento circular uniforme, lo que limita al estudiante a pensar de una manera muy anticuada respecto al sistema planetario, con órbitas circulares.

El movimiento orbital es un problema que se ha tratado a lo largo de la historia, cam-

biando el concepto de órbita y presentando varios modelos que fueron evolucionando, sin embargo, las concepciones que se tiene de las órbitas en gran medida se aproximan a ser circulares o considerando una excentricidad muy pequeña (Ríos Isaza y Benítez, 2013). En este sentido se tiene una visión muy generalizada de la trayectoria que siguen los astros. También, existe la dificultad al momento de realizar mediciones reales de las distancias astronómicas, ya que éstas pueden llegar a ser más complejas, pues las escalas que se manejan en su estudio son mucho mayores a las que el estudiante está acostumbrado a ver en las clases de física, lo que conlleva que se le haga más complicado interpretar y formarse una imagen de las dimensiones de las que se está hablando. (Solbes y Palomar, 2011)

Para la enseñanza de la astronomía, y de las ciencias en general, Johnson Laird, psicólogo alemán, afirma que una persona es capaz de realizar representaciones mentales (tanto proposiciones como imágenes) de los fenómenos, sin embargo, para los fenómenos que se desconocen, estas imágenes pueden llegar a ser muy elementales y estáticas (Rodríguez y cols., 2001) dificultando la representación de elementos en movimiento de una situación física dinámica como lo es el movimiento de los cuerpos celestes.

La electiva de Astronomía General de la Universidad Pedagógica Nacional es ofertada a estudiantes de todo programa que, posiblemente, no han tenido acercamiento a la astronomía y, por ende, pueden tener estas nociones simplistas¹ de la forma de la trayectoria que siguen los planetas. De acuerdo con esto, se presenta dificultad al considerar nuevas trayectorias, además, cuando se expone una nueva geometría con respecto al movimiento orbital es posible que se tenga también confusión ya que no se conoce la matematización de estos fenómenos.

Los elementos computacionales son recursos pedagógicos que ayudan a la formación de conocimiento en todas las áreas. En el caso específico de la física, la enseñanza a partir

¹Entiendo esta como la noción más común de la trayectoria de los planetas.

de las TIC (Tecnologías de la información y la comunicación) permite mostrar fenómenos que no es posible mostrar en la escuela, a partir de laboratorios virtuales que muchas veces involucran simulaciones (Castiblanco y Vizcaíno, 2008). Sin embargo, en el caso de la simulación, la interacción del estudiante es restringido ya que solo se limita a pedir valores iniciales y genera un resultado final, sin enfocarse en el proceso que se llevó a cabo (López, Veit, y Araujo, 2016) .

De acuerdo con lo anterior se plantea la pregunta problema **¿Qué elementos geométricos son importantes para estudiar las leyes de Kepler a partir del programa de modelación geométrica GeoGebra?**

1.2. Objetivos

1.2.1. Objetivo general

Diseñar una estrategia pedagógica a partir de los elementos más importantes de la geometría de cónicas para la enseñanza de las leyes de Kepler, en estudiantes de la electiva de Astronomía General de la UPN, a partir de la modelación de elipses en el programa GeoGebra.

1.2.2. Objetivos Específicos

- Conocer sobre las características mas relevantes de la geometría de orbitas y su relación con la dinámica celeste.
- Organizar, en una modelación, los elementos importantes de las orbitas y su relación con la dinámica celeste.
- Probar la estrategia pedagógica en estudiantes de la electiva de astronomía general de la UPN a través una ruta de aprendizaje.

- Sintetizar los alcances de parte de los estudiantes al finalizar la estrategia pedagógica

1.3. Antecedentes

La revisión de antecedentes se realizó en repositorios nacionales e internacionales de las diversas universidades que ofertan carreras afines a los temas que se tratan en el documento, además se le dio preeminencia a trabajos de grado que se encontraron en el repositorio de la UPN. Se hizo bajo tres parámetros, el estudio de las orbitas y su relación geométrica, la enseñanza de la astronomía y el uso de herramientas computacionales, en especial de GeoGebra, para la enseñanza de algunos conceptos físicos.

En primer lugar, se encuentra el trabajo de pregrado de Anyi Maritza Tacumá Garzón de la UPN quien, en su documento *Una propuesta de enseñanza para el movimiento planetario clásico y relativista*, muestra los elementos para tener en cuenta cuando se habla del movimiento orbital. Éste, da una noción de los componentes que diferencian un sistema clásico y relativista. Además, hace una descripción de todas las ideas previas a las formulaciones de Kepler. También, el trabajo de pregrado de César Edison Galvis Ruiz, de la universidad distrital Francisco José de Caldas, titulado *Aproximación didáctica a los modelos que describen el movimiento de los planetas, presenta cómo a partir de propuestas didácticas desde la geometría se puede realizar una descripción del movimiento de los cuerpos celestes*. En este sentido, este trabajo aporta una visión a las diferentes actividades que se pueden desarrollar para la enseñanza de algún tema de astronomía de una forma no convencional.

Para la enseñanza de la astronomía se toma en cuenta el trabajo de Andrés Camilo Vásquez Blanco llamado *Diseño e implementación de un módulo para la enseñanza de las fases evolutivas del sol*, quien realiza una estrategia para la instrucción de la astronomía dirigido, también, a la electiva de Astronomía General de la Universidad Pedagógica Nacional, dando una perspectiva amplia de trabajo con esta población. Además, Elsa

Marleny Tarquino Cabra propone en su trabajo, *Desarrollo de procesos de investigación en la escuela a partir de la astronomía, la formación de conocimiento a partir de un club de astronomía*, un amplio recurso en el trabajo a partir de grupos pedagógicos dirigidos a los intereses de los estudiantes y como abordarlos de manera adecuada, dando también basto contenido pedagógico, específicamente para trabajar con población colombiana.

Finalmente, para la construcción de la propuesta virtual se tiene el trabajo de grado *Construcción de una herramienta de visualización de la dinámica planetaria para la enseñanza del sistema solar*, de Catherine Rodríguez y Alexandra García de la licenciatura en física de la UPN, quienes presentan una propuesta visual a partir de las tecnologías de la información para la enseñanza de las orbitas en el sistema solar, que aportan a la construcción de recursos visuales en simulaciones a la enseñanza de fenómenos astronómicos. Asimismo, el aporte de Jhonatan Rivera quien presenta su trabajo *Diseño de guías para la enseñanza- aprendizaje de la cinemática usando el software GeoGebra en el grado decimo de la I.E pio XII*, quien presenta una alternativa desde el mismo programa, contribuyendo con la constitución de la propuesta didáctica a partir de los elementos geométricos esenciales para la representación de los fenómenos físicos.

Capítulo 2

MARCO TEÓRICO

2.1. Las órbitas: Una visión de los astros a través del tiempo

La astronomía es la ciencia más antigua, llamada madre de todas las ciencias. Este reconocimiento se da porque, a partir de ella, se ha llegado a grandes conclusiones en otras ramas de la física como la mecánica, la termodinámica y la física moderna, así como la relatividad además de ser la base de la cosmología que se desarrolla actualmente. A su vez, es un tema transversal en otros campos del conocimiento como por ejemplo en las ciencias sociales, cuando se trata la geolocalización. Pero el mayor aporte que se pudo evidenciar fue en el desarrollo social, en este caso, el movimiento de los astros fue una muestra de evolución y un recurso para el avance tecnológico en las antiguas civilizaciones y que dieron pie a que, gracias a la observación del cielo, se abrieran puertas al conocimiento de nuevos mundos.

La información que se presenta en este capítulo está basada en los relatos de Arthur Koestler “los sonámbulos” (1981) y de Chris M. Linton “From Eudoxus to Einstein: A history of mathematical astronomy” (2004), además de otros autores que se abordarán en el desarrollo del documento.

2.1.1. Primeras consideraciones: los modelos planetarios en la edad antigua

Desde el tiempo de la edad heroica¹, los hombres han presentado gran curiosidad por la forma en la que los planetas se mueven, no solo por el hecho de conocer este movimiento, sino para entender su lugar en el universo. (Koestler, 2007)

Los babilonios son los primeros en mostrar un sistema que diera cuenta de un modelo de universo. Lo describían como una bóveda en la cual está situada la tierra en el centro y agua alrededor de ella, además son los primeros en proponer un calendario a partir de dichos movimientos. Al mismo tiempo, los egipcios proponen algo similar; también presentan un universo limitado de forma rectangular en el que también está la tierra en el centro. La luna y el sol salían y entraban de la caja, además, las estrellas eran lámparas que se encontraban sostenidas por los dioses y los otros planetas eran bóvedas muy similares a ésta. (Koestler, 2007)

Después de la aparición de las antiguas civilizaciones, nacen en el territorio de Grecia las polis, en las que no solo se estableció un estado político, sino que también abrió la puerta a que, en su periodo arcaico, se forjara una nueva etapa de conocimiento, en el que se establece la filosofía.

Alrededor del siglo VI a. C, en Mileto, se crea la primera escuela filosófica, la escuela Jónica, en la que se presentan cuestiones antropológicas, pero también plantean el origen y la estructura del universo. Grandes pensadores hicieron parte de esta escuela. Su fundador, Tales de Mileto, fue el primero en tratar los temas de matemáticas y astronomía, introduciendo así el estudio del universo. Aunque él se desempeñó en gran medida en el problema de la sustancia primaria, dentro de esta escuela se realizaron grandes avances para la dinámica celeste. (Koestler, 2007). Un gran exponente de esta escuela; Anaxi-

¹Edad en la que vivieron los héroes de Grecia, relatados por autores como Homero en La Odisea y La Ilíada

mandro, planteó que la tierra es un cilindro rodeado de aire que flota verticalmente en el centro del universo y alrededor de ella se mueven los planetas. Propone así, el primer modelo mecánico del universo. Anaxímedes también aportó en la construcción de un modelo planetario resaltando que las estrellas están fijas en una esfera que gira alrededor de la tierra.(Koestler, 2007)

Mientras la escuela jónica se desenvolvía y fortalecía sus teorías, en el sur de Italia nace la escuela Eleática quien resguardaba a Jenófanes de Colofón, filósofo griego, que hizo aportes a la cosmología², el más relevante para este caso fue la proposición de que todo lo que está al exterior de la tierra es solo una extensión de ella. (Koestler, 2007)

En este mismo siglo, se crea la escuela Pitagórica, su fundador, Pitágoras de Samos, que presenta la teoría que el universo está hecho de números, hasta los sucesos de la vida cotidiana, buscando matematizar los fenómenos y dando el primer indicio de ciencia. Su aporte a la astronomía lo da al presentar un modelo planetario con el sol, la luna y los planetas con forma esférica, con la tierra en el centro y los otros astros girando alrededor de ella. (Koestler, 2007)

Posteriormente, Filolao de Crotona, acudiendo a la idea esférica de su maestro (Pitágoras), genera una teoría revolucionaria en la que rompe el geocentrismo, pues dice que la tierra se mueve alrededor del fuego central³ (Figura 2.1) siendo este el centro de rotación de los planetas, el sol y la luna.(Koestler, 2007)

²Aunque se considera la escuela Eleática como una escuela ontológica, Jenófanes también trabajó en torno a la cosmología y a la teología.

³El fuego central es un concepto diferente al sol. Es un cuerpo creado por Filolao, al igual que la antitierra, para dar cuenta de lo que los pitagóricos llamarón *Tetraktys* que hacía referencia a que el número 10, el número perfecto, y así (incluyendo al sol) giraban alrededor del fuego central 10 cuerpos



Figura 2.1: Cosmología Filolao de Crotona. Elaboración propia mediante modelación en GeoGebra. Basado en González, P.(2001). Link de la modelación: <https://www.geogebra.org/m/mqtvaykp>

Eudoxo de Cnido (390 – 337 a. C), retoma las ideas pitagóricas siendo discípulo de Platón y presenta un modelo de esferas acorde al planteamiento de su maestro⁴: “*si cada órbita esférica gira sobre su eje con velocidad constante, el cuerpo que se aloja en ella será visto desde la Tierra con un movimiento uniforme, circular y siempre en el mismo sentido*” (Mateu y Orts, 2006, Pág 24), este fue el gran problema para el modelo de Platón. Es así como Eudoxo (el también llamado padre de la astronomía) plantearía otro sistema en el que resuelve este inconveniente, que constaría de esferas que transportan los astros y esferas vacías que justifican los movimientos variables que se perciben (Figura 2.2).

⁴Aunque es mencionado, las ideas de Platón y de paso, Aristóteles, no serán tomadas en cuenta en el trabajo pues no son importantes para cumplir el objetivo planteado



Figura 2.2: Modelo de Eudoxo. Elaboración propia mediante modelación en GeoGebra. Basado en Mateu y Orts.(2006)

Finalmente, después de varios siglos, Claudio Ptolomeo (100 – 170 d.C) presenta un modelo que intenta resolver los problemas del modelo de Eudoxo, entre esos, el cálculo de la posición de los planetas en una fecha determinada, además de la retrogradación. El modelo de Ptolomeo presenta un sistema de epiciclos (Figura 2.3) en el que sugiere orbitas circulares con la tierra en el centro. En la órbita más próxima a la tierra se encuentra el sol y alrededor de éste, rotan los planetas inferiores⁵; mientras para los demás planetas sobre su órbita (con la tierra en el centro) existe otra inferior en la cual se mueven éstos (Epiciclo).(Pérez y Muñoz, 2006)

⁵Se le llama “planeta inferior” a los planetas que retrogradan cuando están en conjunción con el sol, en este caso Mercurio y Venus

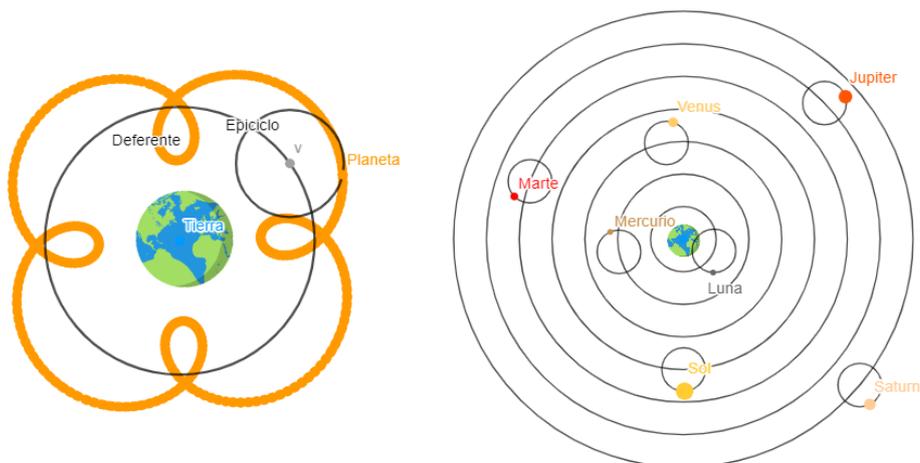


Figura 2.3: Sistema Ptolomeico. Elaboración propia mediante modelación en GeoGebra. Link de la modelación <https://www.geogebra.org/m/ue2t4k8h>

2.1.2. Astronomía moderna

A pesar de que los descubrimientos previos presentan ciertos elementos acertados, pasarían siglos hasta conocer las consideraciones que harían que las concepciones de la astronomía creada por la filosofía natural cambiaran. Todo modelo existente se acunaba en *el geocentrismo*. Los modelos mecánicos y, por supuesto los geométricos, atendían a comprobar esta teoría, sin violar los principios antropocéntricos que se traían desde la antigüedad. Sin embargo, del consabido cielo llegaría un canónigo que terminaría con estas ideas a pesar de estar en contra de su mismísima iglesia.

La revolución copernicana

En el siglo XVI el renacimiento comprendió una etapa de aceptación de los dogmas de la iglesia como un estilo de vida y leyes del conocimiento. Sin embargo, próximamente saldría a la luz un trabajo que platearía un nuevo paradigma ⁶.

⁶Se toma el término paradigma desde la perspectiva que presenta Thomas Khun en su ensayo *La estructura de las revoluciones científicas* en el que define:

“Aun así, de algún modo la práctica de la astronomía, la física, la química o la biología normalmente no revela las controversias sobre las cuestiones fundamentales que tan a menudo parecen hoy endémicas entre, por ejemplo, psicólogos y sociólogos. Los intentos por descubrir la fuente de tal

Nicolás Copérnico, un astrónomo nacido en Polonia, publica en 1530 su escrito *“De revolutionibus orbium coelestium”* (En español *“Sobre las revoluciones (de los orbes celestes)”*), en el que presenta una descripción a las trayectorias que siguen los planetas. Éste se compone de seis libros en los que presenta las demostraciones de sus consideraciones. El aspecto más importante (y controversial) de su libro fue presentar por primera vez la idea que cambiaría la manera de ver los fenómenos astronómicos: el heliocentrismo⁷. (Copérnico, 1982).

Antes de esta formulación, en la época de los pitagóricos, ya Filolao de Crotona había acudido a la idea de que la tierra no era el centro del sistema planetario (Véase sección 2.1, Figura 1), sin embargo, establecía como centro un cuerpo que llamó “fuego central” diferente al sol. En el capítulo quinto de la obra, Copérnico realiza su primera sentencia de movimiento de la tierra además de atribuirle otros movimientos como la rotación y la precesión, mencionando

“Es desde la tierra, a partir de donde se contempla el ciclo celeste y se representa ante nuestra visión. En consecuencia, si se le atribuye algún movimiento a la tierra, el mismo aparecerá igual en el Universo que le es exterior, pero como si pasaran por encima en sentido opuesto, tal es en primer lugar la revolución diaria”(Copérnico, 1982, Cap. 5)

Con estas consideraciones presenta una nueva visión del movimiento de los astros e inaugura la astronomía moderna, tomando el heliocentrismo como base y dando paso a modelos que responderían con nuevos descubrimientos en el estudio del cielo.

diferencia me llevaron a darme cuenta de la función que desempeña en la investigación científica lo que desde entonces he dado en llamar “paradigmas”.”(Kuhn, 2019, Pág 13)

⁷Esta idea no solo trae consigo el cambio de paradigma en las ciencias, también genera conflictos sociales y culturales teniendo en cuenta que para la época se mantenía un dogma cristiano que tenía como pilar la supremacía del ser humano a imagen y semejanza de Dios.

Tycho Brahe y Johannes Kepler: la medición de las trayectorias celestes

Después que Copérnico presentara su teoría frente a la comunidad científica, sería necesario que pasaran varios años para que ésta fuera aceptada; sin embargo, abrió la puerta a que se estudiara el cielo a partir de dos teorías (geocentrismo y heliocentrismo) para realizar nuevas mediciones y demostraciones matemáticas. Es así como en Suecia, comienza a trabajar un gran astrónomo que daría las bases para edificar las leyes actuales del movimiento celeste.

Tycho Brahe nació el 14 de diciembre de 1546 en Suecia, en el castillo de Knupstorp. Perteneciente a una familia noble, realizó estudios en leyes, sin embargo, lo que realmente le interesaba era la astronomía, así que, con uso de libros, autodidacta, fundamentó la base teórica para su vocación. A partir del contenido que allí encontró pudo realizar grandes aportes, convirtiéndose en uno de los más grandes astrónomos de su época, incluso de la historia. (Schmidt, 2019)

Gracias a su fortuna, este excéntrico astrónomo⁸ tuvo la posibilidad de construir un palacio en el que instaló su propio observatorio, con los más grandes elementos de medición de ese tiempo, esto le permitió tomar datos más precisos que los de sus antecesores.

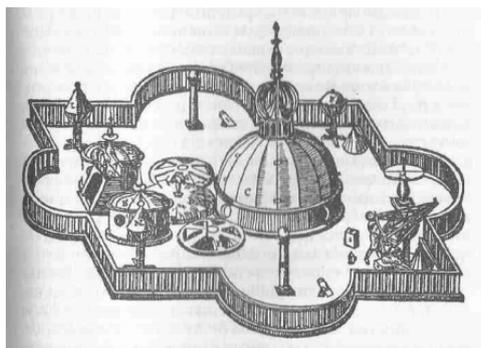


Figura 2.4: Observatorio Astronómico Tycho Brahe, copyright, (Schmidt, 2019)

⁸A lo largo de su vida gastó su fortuna en excéntricas como tener un alce de mascota y vivir con un enano con supuestos poderes videntes. Además, en un altercado con su colega Manderup Parsberg perdió la nariz, la cual reemplazó con una prótesis hecha de una aleación de oro y plata.

Tycho Brahe hace uso de sus enormes instrumentos y dedica su vida a observar noche a noche la posición de ciertos astros. En el libro “el astrónomo que perdió la nariz”, un documento biográfico de Tycho Brahe, Alejandro Schmidt describe el trabajo de este astrónomo diciendo

“Tycho fue el primero en aplicar efectivamente el concepto de precisión en las mediciones científicas. Nadie antes que él se preocupó por buscar resultados con aparatos bien calibrados. Nadie antes que él se preocupó por construir aparatos que proporcionan mediciones precisas. Nadie antes que él pensó siquiera en realizar un programa de mediciones cuidadosas y sistemáticas.” (Schmidt, 2019, Pág 35)

Kuhn también se refiere a Brahe y su medición explicando

“De Tycho Brahe a O. Lawrence algunos científicos han alcanzado gran reputación no por la novedad de sus descubrimientos, sino por la precisión, confiabilidad y amplitud de los métodos que han desarrollado para determinar de nuevo un tipo de hecho previamente conocido” (Kuhn, 2019, Pág 55)

Su primera medición fue “*De nova stella*”⁹, después de esto comenzó sus mediciones de los planetas. Las tablas astronómicas que documentó fueron publicadas en el libro “*Astronomiae instauratae progymnasmata*” en 1602, un año después de su muerte. Sin embargo, tres años antes, estos datos fueron obtenidos por Johannes Kepler, el joven astrónomo alemán que posteriormente realizaría la formalización de la mecánica celeste a partir de los datos obtenidos por el danés. Tycho muere el 24 de octubre de 1601 y Kepler sigue su legado formulando sus tres leyes entre 1609 y 1619. Fue así como la dupla Brahe-Kepler pudieron edificar la teoría de la mecánica celeste actual, resolviendo los problemas de sus antecesores y estableciendo argumentos que ayudarían a forjar nuevas

⁹*De nova stella* es una estrella ubicada en la constelación Ofiuco, descrita en la obra de Johannes Kepler, tres décadas después de la observación de Tycho, probando la mutabilidad de cielos, ya que esta carecía de paralaje.

leyes de movimiento ¹⁰ (Schmidt, 2019).

En el siguiente capítulo se presentarán las consideraciones geométricas que se deben tener en cuenta para realizar el estudio detallado de las órbitas elípticas, partiendo de las cónicas y cómo llegaron a ser la base de las formulaciones de Kepler.

2.2. La geometría de las órbitas

Desde la teoría de movimiento clásico de Newton hasta la mecánica relativista de Einstein, la geometría ha jugado un papel importante para la explicación de los fenómenos naturales y para su representación. En el caso específico de la mecánica celeste, el movimiento orbital se analiza a partir de las tres leyes de Kepler, las cuales se podrán ver con más detalle más adelante, pero para entenderlas es necesario realizar un estudio a la geometría de las cónicas.

2.2.1. Las cónicas

Definición

Las cónicas son figuras que se generan en un plano que interseca con un cono (Figura 2.5). A medida que el plano cambia su configuración angular, la figura va cambiando de forma.

¹⁰Para la realización de la ley de gravitación universal, Newton acudió a la tercera ley de Kepler, utilizándola como base para su desarrollo geométrico-matemático.

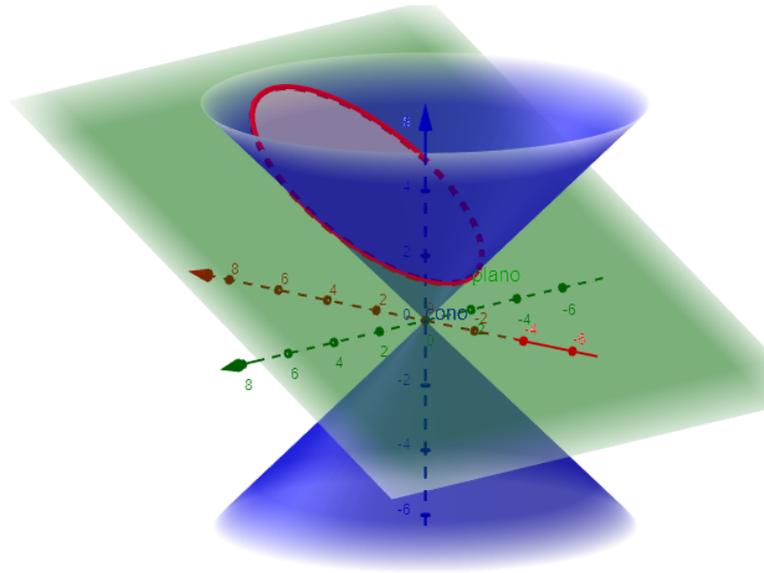


Figura 2.5: Cónicas. Elaboración propia mediante modelación en GeoGebra. Link de acceso: www.geogebra.org/m/ndrpzpkg

En este apartado se presenta la deducción de la ecuación de las cónicas a partir de la intersección matemática entre ecuaciones para poder identificar y analizar cada una de las variables que intervienen en la gráfica de la elipse y encontrar la relación existente entre ellas y el movimiento orbital de los planetas y sus implicaciones dinámicas.

En este proceso se tienen dos ecuaciones de diferente grado que comparten variables, en este caso, la ecuación del plano y la ecuación del cono.

Ecuación general del plano

$$ax + by + cz + d = 0 \quad (1)$$

Ecuación general del cono

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad (2)$$

Despejando z en (1)

$$z = \frac{ax + by + d}{c} \quad (3)$$

Elevando al cuadrado

$$z^2 = \frac{(ax + by + d)(ax + by + d)}{c^2} \quad (4)$$

$$z^2 = \frac{a^2x^2 + abxy + adx + abxy + b^2y^2 + bdy + adx + bdy + d^2}{c^2} \quad (5)$$

$$z^2 = \frac{a^2x^2 + 2abxy + 2adx + b^2y^2 + 2bdy + d^2}{c^2} \quad (6)$$

Reemplazando z^2 en (2)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \left(\frac{a^2x^2}{c^4} + \frac{2abxy}{c^4} + \frac{2adx}{c^4} + \frac{b^2}{a^2} + \frac{2bdy}{c^4} + \frac{d^2}{c^4} \right) \quad (7)$$

Agrupando

$$\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{a^2x^2}{c^4} \right) + \left(\frac{2adxy}{c^4} \right) + \left(\frac{y^2}{b^2} - \frac{b^2y^2}{c^4} \right) - \left(\frac{2adx}{c^4} \right) - \left(\frac{2bdy}{c^4} \right) - \left(\frac{d^2}{c^4} \right) = 0 \quad (8)$$

Separando las variables y las constantes

$$\left(\frac{1}{a^2} - \frac{a^2}{c^4} \right) x^2 + \left(\frac{2ad}{c^4} \right) xy + \left(\frac{1}{b^2} - \frac{b^2}{c^4} \right) y^2 - \left(\frac{2ad}{c^4} \right) x - \left(\frac{2bd}{c^4} \right) y - \left(\frac{d^2}{c^4} \right) = 0 \quad (9)$$

Renombrando las constantes¹¹

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (10)$$

Obteniendo la ecuación general de las cónicas (10) por la intersección del plano y el cono.

¹¹Esto se puede hacer ya que la multiplicación de dos constantes da como resultado otra constante.

A partir de la igualación de algunas constantes por 0 y 1 se pueden llegar a representar las cónicas como se muestra en la tabla 1

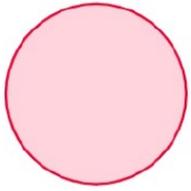
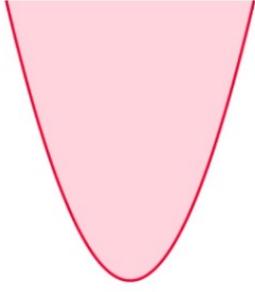
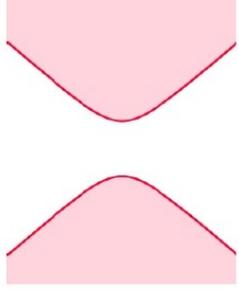
CÓNICA	ECUACIÓN GENERAL CON EL CENTRO (0,0)	GRÁFICA
CÍRCULO	$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ $A = 1 ; C = 1 ; B = 0$	
PARÁBOLA	<p>Eje vertical:</p> $Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$ $C = 0 ; B = 0$ <p>Eje horizontal:</p> $Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ $A = 0 ; B = 0$	
ELIPSE	$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ $B = 0$	
HIPÉRBOLA	$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ $B = 0 ; C \in \mathbb{Q}^-$	

Tabla 1. Ecuación general cónicas teniendo en cuenta el valor de cada constante.

Elaboración propia.

Las cónicas comparten muchos elementos en común, como los focos, el radio, que en

algunos casos es variable, el vértice, entre otros. A partir de esta sección se estudiará la naturaleza geométrica de la elipse teniendo en cuenta cada uno de los elementos mencionados para abrir paso a la descripción de la primera ley de Kepler.¹²

2.2.2. La elipse

La elipse es una figura geométrica que pertenece al grupo de las cónicas, siendo una de las más comunes en la vida cotidiana. Esto se genera cuando se realiza un corte con un ángulo α que se puede configurar de 0° a 360° en el cono, solo tomando la fracción superior o inferior (Figura 2.6).

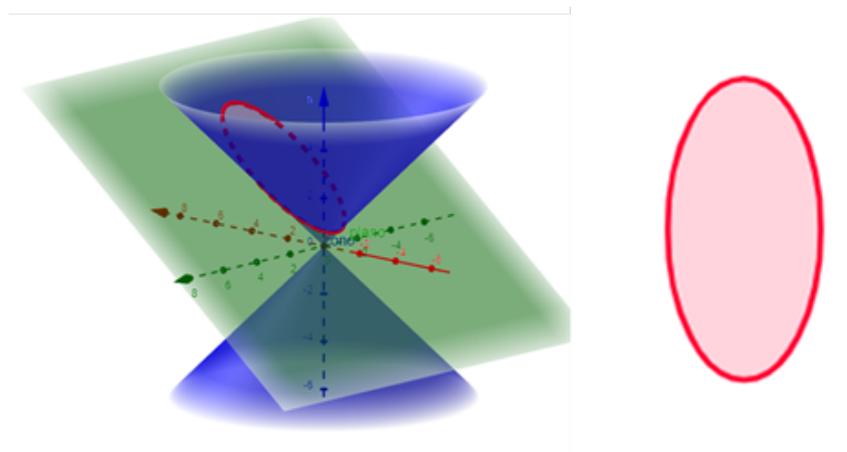


Figura 2.6: Ecuación general cónicas. Elaboración propia, programa GeoGebra. Link de la modelación: www.geogebra.org/m/ndrpzpkg

Las figuras generadas por estos cortes en el cono es posible describirlas a partir de ciertos elementos que hacen parte de su composición. Para el caso específico de la elipse se pueden identificar como se muestra en la figura 2.7.

¹²Las otras cónicas no serán mencionadas por interés del trabajo.

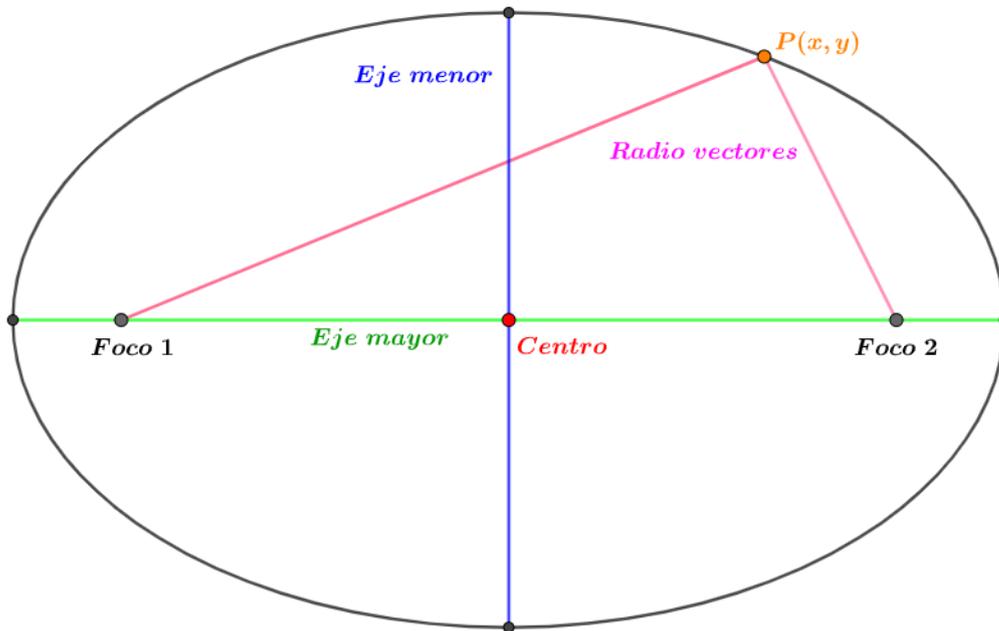


Figura 2.7: Elementos de la elipse. Elaboración propia, programa GeoGebra.

- **Focos:** Son puntos fijos que dan cuenta de la excentricidad de la elipse
- **Radio vectores:** Son los segmentos que relacionan los focos con un punto en la superficie de la elipse. La suma de la magnitud de estos es constante.
- **Centro:** Es el punto central de la elipse.
- **Eje mayor:** Es la línea generada por los vértices que están paralelos, más alejados. Éste cruza por el centro y por los focos.
- **Eje menor:** Es la línea generada por los vértices paralelos, más cercanos. Ésta cruza solo por el centro.
- **Distancia focal:** Es la magnitud de la línea recta que va del foco 1 al foco 2.

Excentricidad de la elipse:

La excentricidad se describe como el achatamiento que puede llegar a tener una elipse. Esta se relaciona directamente con la distancia de uno de los focos al centro¹³ y la distancia del semieje mayor al centro a partir de la siguiente ecuación

$$e = \frac{c}{a} \quad (11)$$

Donde c es la distancia del centro a uno de los focos y a es el semieje mayor. Para la elipse, la excentricidad esta entre 0 y 1, donde si $e=0$, la figura es un círculo.

2.3. Introducción al trabajo de Johannes Kepler

Johannes Kepler en 1609 presenta una idea que hasta el momento no había sido reconocida, muchos habían especulado acerca del tema, pero solo él había contado su historia sin temor a ser rechazada, si bien es cierto que el problema de ¿Cómo se mueven los planetas? había sido primordial para la astronomía a lo largo de la historia, se mantuvo el paradigma pitagórico de la esfera y el círculo como una inevitable restricción para las teorías posteriores, así que romper con este esquema (si lo tomamos literal, geométrico) produjo tanto descontento como curiosidad para muchos. (Koestler, 2007)

La astronomía fue una ciencia cambiante pero así mismo fue estricta con el contexto en el que se desarrolló. Aunque en 1543 se publicó la obra de Copérnico que dio un giro a las teorías de la astronomía antigua, se mantenían ciertas visiones que hasta el momento no era posible demostrar. La perfección simétrica del círculo, “puso a su disposición” las otras variables de movimiento que por mucho tiempo fueron analizadas, cambiadas y hasta eliminadas con tal de encontrar por fin solución a los problemas presentados en el movimiento de los planetas (retrogradación, falta de periodicidad, entre otros).

¹³La distancia entre cada uno de los focos (foco 1 y foco 2) y el centro es la misma.

Ya Johannes Kepler, acuñado al equipo de trabajo de Tycho Brahe, estudió con detalle esos problemas, buscando dar una solución coherente con los datos de dicho magnate. Con gran fortuna, Kepler empezó a estudiar un astro particular, que generaba un movimiento mucho más extraño a los otros planetas exteriores; Marte, provocando mayor curiosidad en el astrónomo y por supuesto mayor interés por llegar a la explicación de su movimiento y brindando así, más herramientas por ser el mayor misterio (Koestler, 2007). A continuación, se presentan las leyes de Kepler, cada una con los elementos necesarios para su estudio.

2.3.1. Primera ley de Kepler

El trabajo de Johannes Kepler se desenmarca de lo observacional, más bien, es un estudio matemático que deseaba generalizar el movimiento orbital de los planetas a partir de variables dependientes de ellos y por supuesto del objeto que es el vínculo innegable entre sí; el Aol. Si bien se conoce el paradigma heliocéntrico y es aceptado por Kepler, este lo cuestiona, no en términos dinámicos, más bien en términos geométricos, pues niega la idea de que el Sol sea el centro del sistema, está en otro lugar, fuera del centro, pero en el mismo eje. Siendo así las cosas, el sol no emanaba la misma magnitud de fuerza en todas las direcciones, lo que le llevó a sacar dos conclusiones cruciales para la deducción de sus leyes; una fue la existencia de una segunda fuerza que hacía que los planetas siguieran su movimiento (conocida actualmente como inercia) y la otra fue que si esto se cumple, la velocidad no es uniforme, siendo un postulado que nadie antes que él había mencionado (Koestler, 2007).

A partir de lo que postuló, se dedicó principalmente a estudiar la geometría del movimiento de los planetas, de los que tomó como eje principal la excentricidad y se dedicó, a partir de ella a buscar el radio de la órbita, para ello, genera un eje en el cual se encuentra el centro, el Sol y otro punto que se le conoce como foco como se muestra en la figura 2.8.

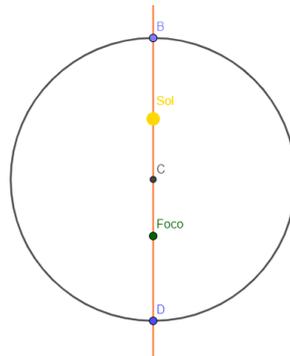


Figura 2.8: Sistema planetario de Johannes Kepler; el círculo. Elaboración propia mediante modelación en GeoGebra. Link de la modelación: <https://www.geogebra.org/m/myfsnjaf>

Para sus antecesores, el punto del foco y el Sol, estaban a la misma distancia del centro C (Figura 2.8). Pero el danés pensaba que era posible que no fuera así pero que sí existían algunas correspondencias que se debían cumplir según los datos de Brahe, en este caso, que el punto B estuviera a la misma distancia del Sol que D del foco, presentando así su primera ley, ya que, si se cambia la posición del foco que no está fijo, es posible generar una elipse (figura 2.9)

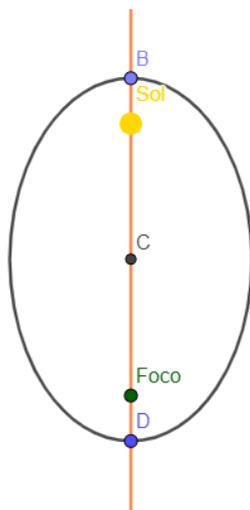


Figura 2.9: Sistema de representación planetario de Johannes Kepler; la elipse. Elaboración propia mediante modelación en GeoGebra. Link de la modelación: <https://www.geogebra.org/m/myfsnjaf>.

Así Kepler presenta su deducción en el libro *“Nueva astronomía basada en la causalidad o física del cielo derivada de las investigaciones sobre los movimientos del astro marte fundadas en las observaciones del noble Tycho Brahe”* publicada en 1606, diciendo que los planetas se mueven en órbitas elípticas, en donde el sol se encuentra en un foco y de allí desprenden perihelio y afelio¹⁴.

2.3.2. Segunda ley de Kepler

Siguiendo la lógica de Kepler, plasmada en su libro mencionado al final de la sección anterior, en esta ley se tiene en cuenta la correspondencia geométrica y dinámica entre algunos elementos mencionados en la elipse presentada en la parte geométrica de este capítulo. En este sentido, se toma en cuenta que, en los datos medidos por Brahe, Kepler encontró que la velocidad no era la misma en todos los puntos de la elipse, ya que era evidente que entre más lejos estuviera el planeta del sol, más lento se movía. Pero ¿Cómo se podía mover de forma tal que se presente este fenómeno?

¹⁴Estos elementos se presentarán en la siguiente sección ”segunda ley de Kepler”

Si bien, se había mencionado cómo Kepler llegó a postular que el movimiento en la órbita no era un movimiento uniforme, no es sino hasta la formulación de esta ley que menciona que existe una correspondencia entre la velocidad y la distancia entre el astro y el sol. En este sentido, Kepler realiza un estudio en el cual divide la órbita en 360 partes (teniendo en cuenta la geometría del círculo donde su recorrido angular es de 360) y midió el tiempo que el cuerpo tardaba en recorrer una longitud de arco determinada. Así, se dio cuenta que el radio vector cambiaba, pero podía relacionarlo con el área que barría el mismo. Generando así la ley de los periodos y las áreas, representándola matemáticamente como se muestra en la ecuación (12)

$$\frac{T_1}{A_1} = \frac{T_2}{A_2} \quad (12)$$

Esta ley se relaciona de igual manera con el momento angular, ya que al tratarse de un movimiento rotacional éste se conserva. Matemáticamente se puede expresar como

$$L = r_1 \times p_1 = r_2 \times p_2 \quad (13)$$

$$r_1 \times mv_1 = r_2 \times mv_2 \quad (14)$$

Ahora bien, en este apartado veremos dos elementos importantes que surgen a partir de la primera ley: El afelio y el perihelio. Estos dos términos vienen del griego “Helios” que significa sol y donde perihelio “significa alrededor del sol” y afelio “lejos del sol”, en este sentido el perihelio es lo que mide el radio cuando está más cerca al sol y afelio cuando está más alejado de él.

A partir de estas definiciones, estos dos con los únicos puntos en los que la velocidad y el radio vector son perpendiculares. Al realizar el producto cruz con esta consideración se tiene que el momento angular es

$$r_1 m v_1 = r_2 m v_2 \quad (15)$$

Cancelando la masa que es constante en todo el movimiento tenemos que

$$r_1 v_1 = r_2 v_2 \quad (16)$$

Siendo v_1 la velocidad mínima presentada en el perihelio y v_2 la velocidad máxima de todo el movimiento orbital medida en el afelio.

2.3.3. Tercera ley de Kepler

Antes de 1619, Johannes Kepler no había realizado trabajos con respecto a las leyes que había formulado, sino que habría trabajado en otros campos a los que se dedicaba, como la astrología, sin embargo, el estudio de los astros lo llevo a definir conceptos muy importantes que aportarían en gran medida a la formulación de leyes posteriores.

“*Harmonices mundi*” (La armonía de los mundos) publicado en 1619 es el libro en el que Johannes Kepler consigna su última ley; la tercera ley de Kepler, que enuncia:

”But it is absolutely certain and exact that the ratio which exists between the periodic times of any two planets is precisely the ratio of the 3/2Th power of the mean distances” (Kepler, 1939, Pág 11)

En este fragmento del inciso octavo del libro, se describe de manera clara la relación del cuadrado del periodo de la órbita, es decir, el tiempo que se demora el planeta en hacer el recorrido orbital y llegar a un mismo punto y el cubo de las distancias medias que se refieren al semieje mayor de la órbita. De forma matemática se escribe

$$\frac{T_1^2}{R_1^3} = \frac{T_2^2}{R_2^3} \quad (17)$$

Este es considerado uno de los mayores sucesos en la astronomía moderna ya que fue la base de grandes deducciones posteriores, entre ellas, la ley de gravitación universal. Bien lo decía Eduardo Battaner en su libro Kepler, bailando con las estrellas “Alguien dijo que “el descubrimiento mas importante de Newton fue el de las leyes de Kepler entre un motón de papeles que éste escribió”” (Battaner, 2012).

Después de conocer cada uno de los elementos descritos en las leyes de Kepler, es necesario entender cómo se puede construir una herramienta visual a partir de la geometría que allí se presenta. En la siguiente sección se exhibe el software GeoGebra y los recursos dinámicos y geométricos que permiten la edificación de la modelación de las leyes de Kepler.

2.4. GeoGebra para la construcción de modelación física

Uno de los recursos que se está utilizando con más fuerza en la actualidad para la enseñanza de las ciencias y en particular, la enseñanza de la física son las TIC (Tecnologías de la información y la comunicación) ya que a partir de ellas se puede realizar una representación de fenómenos que no es posible generar en un laboratorio o simplemente son imperceptibles ya sea porque se trata de elementos muy grandes o pequeños, o intangibles.

En este sentido, es posible reproducir modelos científicos que dan cuenta de un fenómeno real (Véase capítulo 3, sección 3.1.3). Para finalizar el marco teórico se presentará uno de los recursos que nos dan las TIC; la modelación, específicamente la modelación geométrica a partir del programa GeoGebra que finalmente permitirá llegar a los conceptos físicos de las tres leyes de Kepler.

2.4.1. La modelación: una herramienta para la enseñanza de la física

En la mayoría de los casos en la representación virtual de un fenómeno científico se utilizan programas que permiten que la persona que manipule la herramienta pueda modificar los valores iniciales que intervienen en ella, a estas se les llaman simulaciones. Sin embargo, cuando se hace de esta manera solo se muestra un resultado inicial y un resultado final, sin ahondar en el proceso que se llevó a cabo. (Aragón y cols., 2018).

Teniendo en cuenta lo anterior, una herramienta que permite entender la relación entre el proceso y el resultado es la modelación ya que ésta permite que el estudiante interactúe directamente con el software, más allá de los valores iniciales puede explorar las variables a partir de las necesidades que presenta en el desarrollo del modelo que está estructurando. Desde esta perspectiva, es posible generar un pensamiento científico basado en la interacción que se presente desde la observación, conjeturas, experimentos, verificaciones, refutaciones, conceptos, modelos y teorías previas conocidas. (Moreira, 2014).

Ahora bien, en el campo de la modelación se piensa en una metodología de enseñanza constructivista que busca que el estudiante genere conceptos a partir de la interacción y de sus experiencias previas originando un aprendizaje significativo. Dentro de este proceso, se busca que la herramienta muestre los recursos necesarios para que se pueda estructurar un modelo que tenga coherencia con lo que visualiza en la herramienta y que pueda describir de manera explícita el fenómeno físico que se presenta (López y cols., 2016).

Para este trabajo se usa el modelador geométrico GeoGebra como herramienta de aprendizaje para el desarrollo de los temas a tratar. A continuación, se realiza una introducción al software, sus herramientas y su funcionamiento.

2.4.2. Introducción a GeoGebra: herramientas de modelación en la representación de fenómenos físicos

GeoGebra es un programa que permite realizar modelación de elementos geométricos. Su interfaz es sencilla y fácil de usar lo que permite que sea una herramienta mayormente dedicada a la enseñanza. Tiene elementos mecánicos que permiten también presentar modelaciones de representaciones de fenómenos físicos. A continuación, se presenta una breve introducción técnica a la herramienta.

GeoGebra clásico

Según la página oficial www.geogebra.org “GeoGebra es un software de matemáticas para todo nivel educativo. Reúne dinámicamente geometría, álgebra, estadística y cálculo en registros gráficos, de análisis y de organización en hojas de cálculo” (GeoGebra, 2001). Este tiene variedad de versiones, sin embargo, en este trabajo sólo se tomará **GeoGebra Clásico**¹⁵.

La herramienta permite generar figuras a partir de funciones, las cuales pueden ser generadas en 2D y 3D, tomando en cuenta la cantidad de variables. De forma predeterminada, los ejes de la gráfica se toman como (x, y, z) . En la Figura 10 se puede ver una elipse formada a partir de una función.

¹⁵Disponible en el siguiente link <https://www.geogebra.org/classic?lang=es> en su versión en español

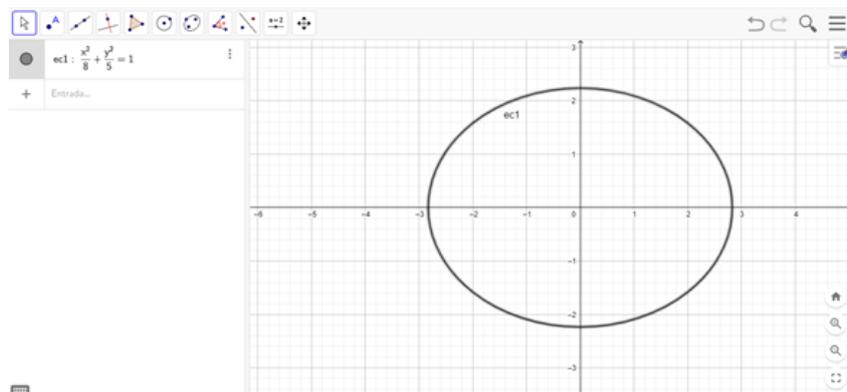


Figura 2.10: Elipse a partir de una ecuación. Captura de pantalla, programa GeoGebra

Esta plataforma también cuenta con una barra de figuras predeterminadas las cuales pueden ser modeladas a partir de ciertos valores que relacionan la figura con la ecuación (Figura 2.11). Por ejemplo, en el momento de graficar una elipse es posible generarla a partir de la ubicación de los focos y de un punto de la elipse, es así que a partir de estos elementos es posible relacionar esta con su ecuación general y con la excentricidad.

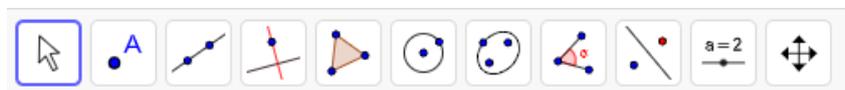


Figura 2.11: Elementos predeterminados GeoGebra. Captura de pantalla, programa GeoGebra

En términos dinámicos, el software permite generar movimientos a partir de ciertos parámetros que permiten al usuario crear trayectorias dependiendo de sus necesidades, además de modular el tiempo de movimiento con deslizadores y la dirección. A continuación, se presentará como a partir de los elementos dinámicos es posible generar una herramienta para el aprendizaje de las tres leyes de Kepler.

2.4.3. Representación del movimiento planetario a partir de la modelación en GeoGebra

La herramienta GeoGebra maneja una interfaz dinámica en la que intervienen movimientos a partir de trayectorias predeterminadas por el usuario. La propiedad que genera el movimiento se llama “Animación”, con ella los elementos se empezarán a mover sobre trayectorias dadas por una función o elemento 2D. Por ejemplo, si se ubica un punto en un círculo, el punto iniciará un movimiento circular uniforme.

A partir de lo anterior se define que en trayectorias cerradas el movimiento en GeoGebra de forma predeterminada se presenta con una velocidad constante¹⁶ que puede modificarse y plantearse en función de otros elementos. A continuación, se presentará la descripción en los elementos necesarios, descritos en cada modelación.

Para la descripción de la primera ley, es necesario conocer la figura de la elipse. Desde esa perspectiva, se trabaja con las figuras predeterminadas, que permite generar una elipse a partir de la ubicación de dos focos y una distancia que se define como punto de elipse. En este sentido, se ubican los focos en un mismo eje. En un foco se ubica el Sol, este se deja fijo con la acción “objeto fijo” y el foco imaginario se ubica sobre una línea recta de una distancia determinada partiendo del sol, lo que permite que el punto del foco se mueva solo sobre ella. A partir de esta acción, es posible identificar la definición y descripción de la excentricidad.

Para representar la segunda y tercera ley de Kepler se tiene que considerar una aceleración dependiente del radio que separa el planeta del sol. En este caso se hace necesario generar una relación matemática para describir la velocidad a partir de la variable definida como

$$v = \frac{1}{radio} \quad (18)$$

¹⁶La velocidad en las animaciones de GeoGebra no tiene unidades determinadas

Al modelar este movimiento con dicho valor, podemos modificar el numerador para que la velocidad sea mayor o menor. En el caso específico de la modelación implementada, el valor del numerador es

$$v = \frac{10}{\text{radio}} \quad (19)$$

Al generar esta ecuación se debe tener en cuenta que cuanto más alejado esté el planeta, más lento irá, mientras que su velocidad aumentará cuando esté cerca del sol en un factor de 10^{17} .

Para la segunda ley, también se compararon los movimientos en el perihelio y el afelio en la que se genera de igual manera una relación entre dos arcos generando una proporción que se describe a continuación. Teniendo en cuenta el área de dos sectores diferentes de la elipse a partir de la definición de área de una sección circular

$$A_1 = \frac{\theta_1 \pi r_1}{360^\circ}; A_2 = \frac{\theta_2 \pi r_2}{360^\circ} \quad (20)$$

Igualando las áreas

$$\frac{\theta_1 \pi r_1}{360^\circ} = \frac{\theta_2 \pi r_2}{360^\circ} \quad (21)$$

Cancelando los factores π y 360°

$$\theta_1 r_1 = \theta_2 r_2 \quad (22)$$

Al ser una elipse se tiene que la relación entre los radios en un factor n es posible definirla como

$$r_2 = \frac{r_1}{n} \quad (23)$$

Reescribiendo la ecuación (22) a partir de la correspondencia de r

$$\theta_1 r_1 = \frac{\theta_2 r_1}{n} \quad (24)$$

¹⁷Por cuestiones prácticas se genera una aproximación a la velocidad de la tierra que esta 28 y 30 km/s, en la que se varían sus decimales

Cancelando los radios

$$\theta_1 = \frac{\theta_2}{n} \quad (25)$$

Representando el ángulo θ de manera dinámica a partir del movimiento circular uniforme $\theta = \omega t$ Entonces la expresión se define como

$$\omega_1 t = \frac{\omega_2}{n} t \quad (26)$$

Teniendo en cuenta que el tiempo en el que se recorren los dos arcos es el mismo es posible cancelarlo

$$\omega_1 = \frac{\omega_2}{n} \quad (27)$$

Llegando así a la relación entre las velocidades angulares dependientes del radio variable.

Finalmente, para la tercera ley es importante reconocer de manera explícita el concepto de periodo, ya que en esta modelación se busca mostrar el paso del tiempo hasta que el cuerpo de una vuelta. En este sentido se programa el movimiento en dos elipses en la que empieza la animación de manera simultánea, sin embargo, cada una tiene una excentricidad diferente, aunque tengan el foco del Sol en común.

Para medir el tiempo se crea un deslizador, que se mueve cambiando en un factor de 1. Sin embargo, el cambio del deslizador y el tiempo medido con un cronometro no corresponde con un segundo. Entonces, para tener una experiencia aproximada a la realidad, se modifica la velocidad del deslizador en un factor de 6 para alcanzar una sincronía en la modelación. Finalmente, para probar la estrategia con la población establecida se prepara una implementación que se describirá a continuación.

Capítulo 3

METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN

En este apartado se busca describir las acciones realizadas por el investigador para alcanzar los objetivos del trabajo. Teniendo en cuenta lo anterior, este capítulo se dividirá en tres secciones: la primera es el reconocimiento de los alcances del conocimiento en la geometría de la elipse y el movimiento orbital a partir de los modelos pedagógicos de Van Hiele y de progresión de aprendizaje a partir de modelos científicos, la segunda es la metodología utilizada en las diversas fases de la investigación y finalmente se presentarán el producto que se llevará a la electiva de astronomía general.

3.1. Ruta de trabajo

Teniendo en cuenta el objetivo general, se plantea una estrategia de caracterización guiada por los modelos de Van Hiele y progresión de aprendizaje, esto con el fin de reconocer el nivel de conocimiento frente al tema de geometría y de dinámica de los astros de los estudiantes. En este sentido es importante describir cada uno de los modelos que se utilizarán para el reconocimiento de la población.

3.1.1. La enseñanza del movimiento orbital a partir de la geometría: Del modelo de Van Hiele a los modelos científicos para la enseñanza de la física

Para el entendimiento de las leyes de Kepler, es necesario comprender ciertos conceptos básicos de las cónicas (Tomando como referencia los conceptos abordados en el marco teórico), de acuerdo con esta afirmación es posible partir de la geometría de órbitas para luego poder describir el movimiento celeste. Para este fin, se toma en cuenta el modelo de Van Hiele para caracterizar y guiar al estudiante en un primer momento. Luego de esto, se presentará la metodología a tratar de acuerdo con la teoría cognitiva de los modelos científicos. A continuación, se presentarán las características principales de los temas mencionados.

3.1.2. Modelo de Van Hiele en la enseñanza de la geometría y su relación con fenómenos físicos

El modelo de Van Hiele fue diseñado para la enseñanza de conceptos geométricos, en este caso, se busca pasar del concepto de geometría al tema específico de las cónicas. Para este trabajo se tomará en cuenta este modelo como una herramienta de caracterización que ayudará a fijar un punto de partida para la ruta de aprendizaje que se plantea.

Pierre Van Hiele y Dina Van Hiele ¹ en 1957 para su tesis doctoral presentan el modelo que lleva su apellido, en el cual plantean 5 niveles que representan el aprendizaje progresivo de la geometría. Los niveles contemplados en el modelo son²:

- Nivel 1: Reconocimiento o visualización

- Nivel 2: Análisis

¹Pierre Van Hiele y Dina Van Hiele es una pareja de profesores holandeses que presentan este trabajo doctoral en la Universidad de Utrech basados en sus observaciones de la enseñanza secundaria

²En el documento original “Structure And Insight: A Theory Of Mathematics Education” se presentan los niveles numerados de 0 a 4, sin embargo, en este documento se tomarán de 1 a 5 por conveniencia

- Nivel 3: Deducción informal u orden
- Nivel 4: Deducción formal
- Nivel 5: Rigor

Teniendo en cuenta lo anterior, para el desarrollo de la propuesta se parte de una evaluación de conocimientos previos en geometría, para presentar de forma coherente una ruta de aprendizaje que se desarrolle a partir del nivel en el que se presente en el grupo de trabajo. En este mismo modelo se presentan los puntos que se deben tener en cuenta en el momento de estructuración de una actividad evaluativa, no solo como un test, sino también como una entrevista.

Según Pierre y Dina, se debe tener en cuenta el nivel de razonamiento, fijándose en las respuestas que presentan sin determinar que esté bien o mal. Además, el nivel no se percibe en las preguntas, sino en las respuestas que están sujetas a la situación de la que se trata, es decir, que puede variar su nivel según el tema del que se está hablando (Fouz y De Donosti, 2005).

Al realizar el diagnóstico de saberes de la población, no solo se van a presentar conceptos que estén relacionados con la geometría, sino que se busca que, a partir de ellos, se pueda llegar a una deducción de conceptos que se relacionen con la mecánica celeste y, para este fin, se tomará en cuenta la teoría de los modelos científicos en la enseñanza de la física. A continuación, se tocarán los puntos a tener en cuenta de esta teoría para poder identificar cuáles son los alcances del modelo que conocen de sistemas planetarios.

3.1.3. Los modelos científicos en la enseñanza de las leyes de Kepler

Una de las mayores dificultades que se tiene en la enseñanza de la astronomía es que las medidas que se manejan son mucho mayores a las que se pueden tomar con las herramientas de medida que se utilizan comúnmente en las clases de física (Véase párrafo 3

de la problemática), esto conlleva a que sea difícil describir el movimiento de los astros, sin embargo, gracias al modelado científico, podemos dar una perspectiva más amplia del fenómeno que se trata.

Para el caso de las leyes de Kepler podemos estructurar un modelo científico de carácter visual que dé cuenta de lo que se plantea, a partir de ciertos elementos geométricos que cobran un sentido mecánico. Sin embargo, para el desarrollo y definición del modelo científico hay que tener en cuenta ciertas consideraciones que se muestran a continuación.

Un modelo según Justi Rosária es un mediador entre la realidad y la teoría, que busca representar un fenómeno particular. En la enseñanza de las ciencias, el modelo es una herramienta para que el estudiante pueda comprender de manera clara los conceptos, en este caso físicos, que intervienen en él. (Justi y cols., 2006)

En el caso de la astronomía, los modelos gráficos han sido las herramientas que permitieron que la evolución de esta rama de la física se viera de forma clara para que se entendiera en cualquier espacio de significación ³. Desde la representación de Anaximandro, hasta las leyes de Kepler (Véase capítulo 2 sección 2.1), las descripciones de los movimientos han tenido un modelo visual que se ha generado a partir de la geometría teniendo en cuenta que esta es la herramienta usada para la medición y que a partir de ella se pueden realizar conjeturas relacionadas con fenómenos físicos, por esto, se hace importante conocerlos y relacionarlos entre sí, ya que los trabajos previos juegan un papel importante en el reconocimiento de nuevos modelos.

En la siguiente sección se presenta la relación que se establece para hacer el estudio de población a partir del modelo de Van Hiele y de progresión de los modelos científicos.

³Este concepto hace referencia al momento de interpretación que depende directamente con el contexto en el que se presenta; se toma del artículo escrito por Juan Carlos Castillo “La historia de las ciencias y la formación de maestros: la recontextualización de saberes como herramienta para la enseñanza de las ciencias.”

La enseñanza de las Leyes de Kepler a partir de la progresión de aprendizaje en los modelos científicos: Un paralelo con el modelo de Van Hiele

En el ambiente de la enseñanza de las ciencias los modelos científicos son recursos que han ayudado a la comprensión y asimilación de conceptos que se desarrollan alrededor de un tema en específico tratado en el aula de clase, es decir, pueden contribuir en el pensamiento científico del estudiante.

En el artículo “Developing a Learning Progression for Scientific Modeling: Making Scientific Modeling Accessible and Meaningful for Learners” los autores presentan una escala en la que, por niveles, se puede medir el aprovechamiento de los estudiantes en la representación de un fenómeno. A diferencia del modelo de Van Hiele, los autores presentan cuatro niveles que dan cuenta de los alcances de cada modelo científico.

En el primer nivel, el estudiante utiliza el modelo como una visión literal de un fenómeno, en este caso, lo usa como una herramienta para reforzar su propio pensamiento. Para el segundo nivel, presenta una ilustración de algún fenómeno con el que busca explicarlo. Luego, en el nivel tres, se identifica más de un modelo para el mismo fenómeno y en este sentido, se utiliza para representar fenómenos conocidos y poder generar nuevos de lo desconocido. Finalmente, el nivel cuatro se refiere a un modelo generado a partir de conceptos previos, además a partir de utilizar varias visiones para dar cuenta del comportamiento general de la naturaleza, generando preguntas acerca del comportamiento y la existencia del fenómeno. (Schwarz y cols., 2009).

Es posible evidenciar cómo, tanto el modelo de Van Hiele y la progresión de aprendizaje a partir de modelos científicos tienen características similares y se clasifican de igual manera en una escala de niveles, analizando las características cognitivas del estudiante en la comprensión de un fenómeno particular. Otra característica que se tiene en común es que, al ser progresivos, se debe pasar por los niveles anteriores para alcanzar uno superior.

En este sentido, es posible, a partir de estos métodos reconocer cuáles son esos elementos que servirán para presentar una ruta de aprendizaje adecuada para la población con la que se desea trabajar, por ende, se utilizarán estos modelos para encontrar que aspectos son importantes para generar la propuesta y que elementos deben utilizarse para la construcción de las modelaciones. En el siguiente apartado se dará paso a la descripción del trabajo en el aula.

3.2. Implementación de la estrategia pedagógica

3.2.1. Encuesta de caracterización: Planteamiento y resultados

A partir de los modelos presentados anteriormente, se plantean preguntas problema que están ligadas con el conocimiento en geometría, específicamente en las cónicas y el conocimiento de la dinámica celeste enfocada en las leyes de Kepler. Es así que se estructura una encuesta de caracterización en la que se plantean preguntas tanto abiertas como cerradas que obedecen a las rúbricas planteadas por cada uno de los modelos y adaptadas para el ejercicio de la investigación. Esta caracterización se realiza con tres secciones que se explicarán más adelante (Anexo 1).

La encuesta se aplica a 18 estudiantes de la electiva de astronomía general, grupo 2, en este sentido, se pide la autorización del tratamiento de los datos que se recopilan en ella para la investigación a lo cual accedieron la totalidad de estudiantes. A continuación, se presentaran las secciones con objetivos, resultados y análisis de resultados. (Anexo 1)

Sección 1: Información general del estudiante

En esta sección se plantean preguntas que se realizan para conocer los estudiantes de la electiva de astronomía general del grupo 2. Para este fin, se hace necesario conocer la licenciatura a la que pertenecen, su edad y el propósito de inscripción de la electiva.

De acuerdo con los resultados obtenidos es posible caracterizar la población como es-

tudiantes de diez diferentes licenciaturas, en un rango de edad de 17 a 33 años de edad, que en la mayoría de los casos (17 estudiantes) el interés por la astronomía es el propósito que lleva a la inscripción del espacio académico.

Acorde con lo anterior es posible reconocer que estas características también se presentan en semilleros. Según Torres y Soler (2005) "Los semilleros permiten que sus integrantes exploren según sus gustos, capacidades e interpretaciones y que seleccionen según sus expectativas, en donde el conocimiento deja de ser un bien particular, lo que conlleva a un diálogo entre saberes o una intertransdisciplinariedad." (Soler, 2005, Pág 9).

Desde esta perspectiva, la propuesta será integradora, es decir, tomará aspectos de diferentes disciplinas y se centrará en la explicación de temas de manera factible a los estudiantes que no están familiarizados con los conceptos físicos y geométricos, para ello se plantean los apartados que continúan en la sección 2.

Sección 2: La geometría

En esta sección se analiza el nivel de geometría, específicamente las cónicas, que manejan los estudiantes de la electiva, para este fin, se proponen preguntas generadas a partir del modelo de Van Hiele, del cual se extraen las características de cada nivel y se generan rúbricas de evaluación de cada cuestionamiento. Las rúbricas generadas se presentan en el Anexo 2.

El análisis se generó presentando en primer lugar una visión general de los conceptos de la geometría, además de las aplicaciones y la experiencia que han adquirido en diferentes situaciones. En la gran mayoría de los casos los estudiantes de la electiva asocian la geometría con simples figuras geométricas, sin embargo, hay algunas personas que tienen una concepción más técnica, utilizando conceptos propios de la medición y nombrando el concepto de espacio dentro de su definición.

Al pasar a las preguntas más específicas que buscan reunir información acerca de la elipse y sus aplicaciones, los resultados sugieren que gran parte del curso no la conoce o la conceptualiza como ovalo, además, solo tres estudiantes logran reconocer los elementos que la componen como una cónica. Es así, que es necesario iniciar desde la comprensión de la elipse como una cónica y sus elementos para luego utilizar dichos conceptos en la descripción de las leyes de Kepler.

Sección 3: Elementos dinámicos de la astronomía

En esta sección el estudiante responderá a preguntas planteadas desde un mismo modelo científico, en este sentido, se generan cuestionamientos que van guiados a generar un análisis profundo a partir de conceptos previos para que el encuestado pueda construir un modelo que responda a ciertas características desde lo que conoce de la astronomía. Además, se plantean preguntas frente al conocimiento de ciertos fenómenos que darán un punto de partida a la ruta de aprendizaje.

En primer lugar, es posible reconocer que gran parte de los encuestados están familiarizados con el concepto de gravedad, sin embargo, este no lo relacionan con las órbitas, además, encuentra como principal ejemplo de movimiento el sistema Sol-Tierra, pero no pueden describir cómo se mueven los planetas. Es de destacar que la totalidad de los estudiantes se sitúa en un modelo heliocéntrico, sin embargo, las trayectorias de los planetas se describen como un modelo de círculos, o no se ahonda en estos aspectos.

Finalmente, al describir el trabajo hecho por Johannes Kepler, solo dos personas lograron generar una respuesta en relación con la trayectoria de los planetas que fuera descrita desde los fenómenos físicos, algunos solo mencionaron que conocían el hecho de que habría trabajado el tema de las orbitas y la gran mayoría del curso no lo reconocía o planteaba trabajos que no tenían relación con lo que realmente realizó. A partir de esto, se hace necesario generar un ambiente amigable para que los estudiantes que interactúen con las herramientas puedan entender los conceptos físicos que se presentan en cada ley.

3.2.2. La enseñanza de las leyes de Kepler a partir de la modelación

La ruta de trabajo se presenta como un libro de GeoGebra de fácil acceso y manipulación, llamado “Las leyes de Kepler a partir de elipses en GeoGebra”. Este es un recurso que permite organizar varias modelaciones en diferentes apartados llamados “capítulos” que llevan un hilo conductor entre sí. En él se consignan las modelaciones presentadas a lo largo del documento, generando para cada una, una descripción de lo que se muestra, además de instrucciones de cómo usarlas. A continuación, se mostrarán los capítulos de la propuesta.

Contexto histórico

En primer lugar, se genera una sección en la cual se habla de modelos previos, ya que se busca la comprensión de los diferentes factores que hicieron que se llegara a las deducciones geométricas de Kepler y la mejor forma de hacerlo es que se exploren los trabajos previos. Como lo dice Michael Matthews (1994) “La historia de las ciencias permite comprender cuáles son las principales teorías actuales y cuáles han sido los obstáculos que trabaron su aparición y el desarrollo de una ciencia” (Matthews, 1994). Desde este argumento se presentan tres modelos trascendentales: el modelo Pitagórico, el modelo Ptolemaico y el modelo Copernicano⁴.

Aunque los modelos geométricos de orbitas han tenido bastantes cambios, se eligieron los modelos mencionados ya que, al presentar similitudes, es más preciso hacer comparaciones entre ellos. En este sentido, es posible generar conclusiones que dan cuenta de un cambio de percepción de los movimientos, dependiente de la trayectoria vista desde la geometría y la dinámica presentada entre ellos, además, es importante reconocer la relación entre los astros generadora de los movimientos, a partir de la idea de gravedad que para la época de Kepler no estaba formalizada de manera matemática, pero si se

⁴Para explorar más a fondo estos modelos, puede encontrar su descripción en la sección 2.1 del capítulo 2.

reconoce el desarrollo conceptual que aportó este gran astrónomo.

En esta sección se busca que el estudiante pueda observar los elementos más importantes de cada modelo. El aspecto para destacar del modelo de Filolao es que genera el precedente de los modelos circulares que duraron hasta la aparición de Kepler, presentando un sistema geocentrista.

En segundo lugar, el modelo de Ptolomeo presenta el modelo de epiciclos que destaca un movimiento individual, definido para cada uno de los planetas dentro de un paradigma geocéntrico.

Finalmente, el modelo de Copérnico que llega a ser un modelo que, en primer lugar, pone el sol como el astro principal del movimiento y en segundo lugar, mezcla el modelo de los pitagóricos y de Ptolomeo para dar cuenta de los movimientos variables. Teniendo en cuenta este orden, se presenta la segunda parte del trabajo que es la geometría utilizada en las leyes de Kepler.

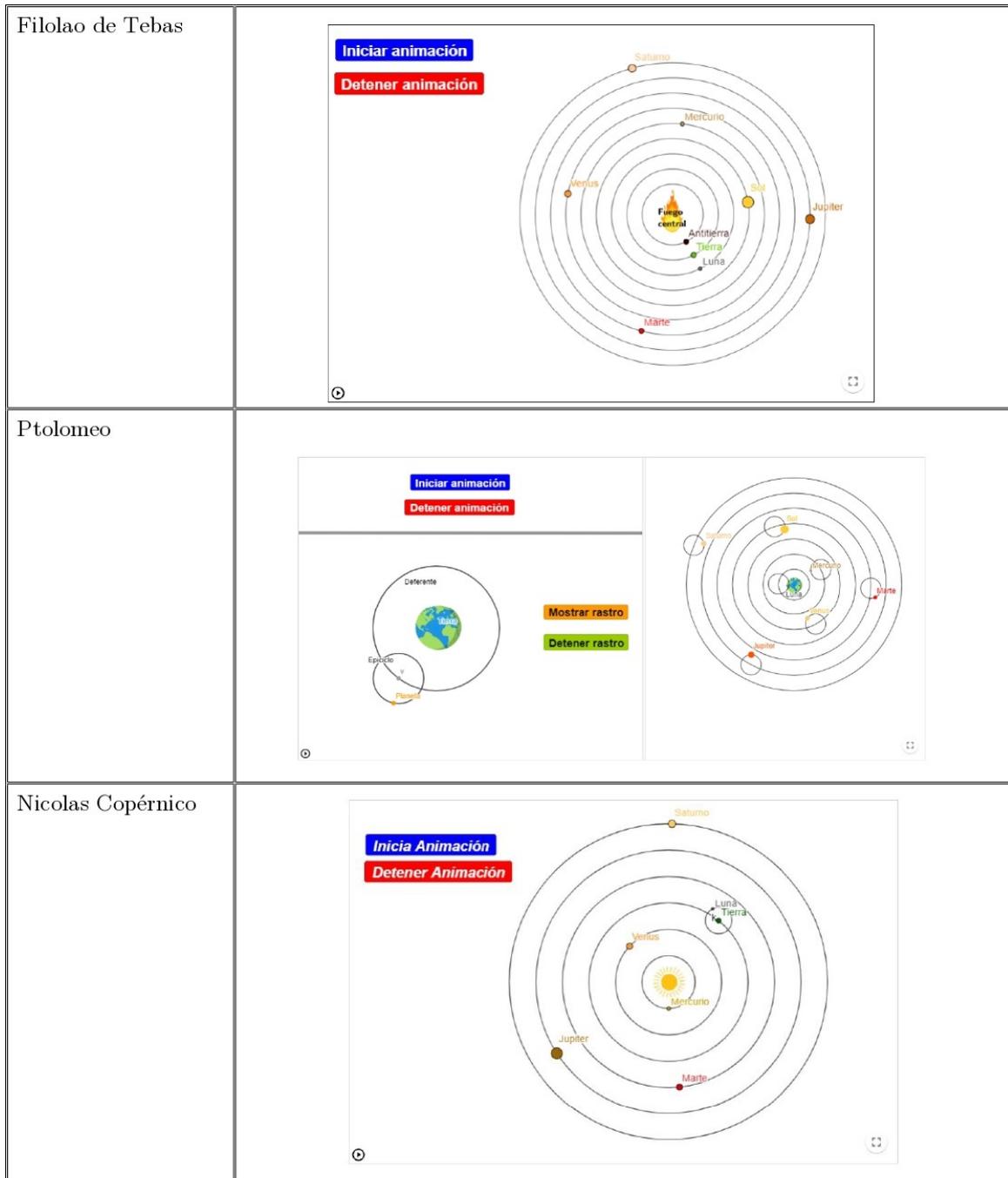


Figura 3.1: Modelaciones de los sistemas planetarios previos pertenecientes al contexto histórico. Elaboración propia mediante la modelación en GeoGebra

Las cónicas

Este apartado busca dar una idea de la geometría utilizada por Kepler en la formulación de sus tres leyes, en este sentido se realiza en primer lugar una representación geométrica de la construcción de las cónicas a partir de la intersección del plano y la elipse en la cual se puede modificar la altura y el ángulo del plano para generar cada una de las figuras. En este caso, el estudiante puede interactuar con los deslizadores que se presentan en la modelación para generar un cambio.

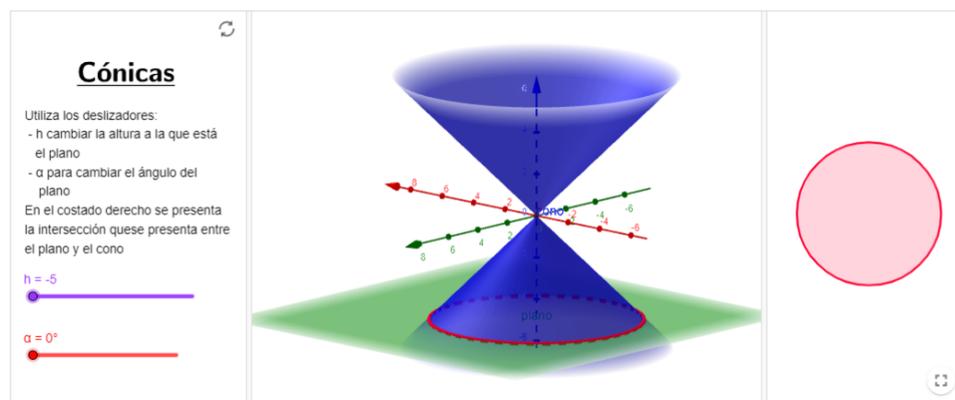


Figura 3.2: Cónicas a partir de la intersección del plano y el cono. Elaboración propia mediante GeoGebra

Seguido de eso, se presenta una modelación en la que el estudiante puede ver la elipse y puede observar cómo se modifica la figura a partir del movimiento del foco en el mismo eje. Esta busca que se identifiquen los elementos de la elipse, como focos, distancia focal, semieje mayor, semieje menor y a partir de estos elementos llegar a la deducción de la excentricidad. El apartado final hace referencia a las leyes de Kepler a partir de su representación geométrica.

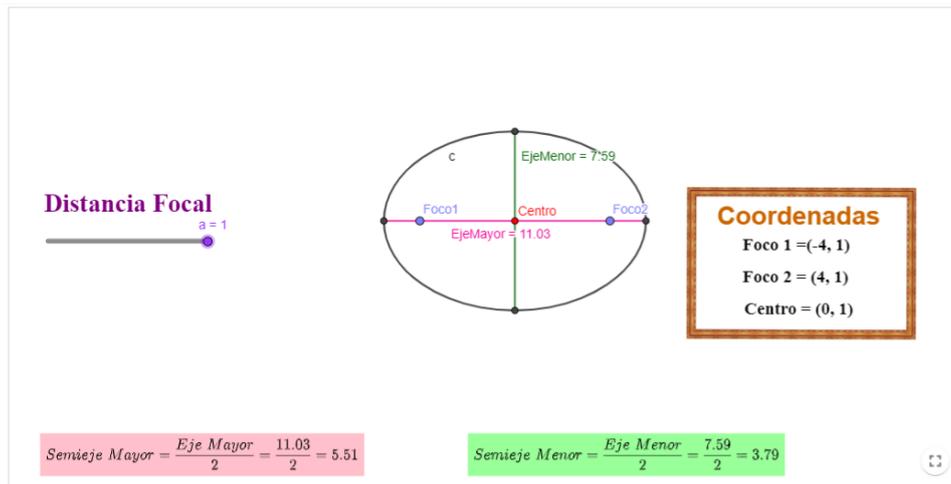


Figura 3.3: Elementos básicos de la elipse. Elaboración propia mediante GeoGebra.

Las tres leyes de Kepler

En esta sección se exhiben las modelaciones realizadas de las tres leyes de Kepler a partir de los conceptos geométricos presentados anteriormente. La primera ley se presenta a partir de una modelación que permite animar el movimiento de un planeta al rededor del sol, con el mismo deslizador de excentricidad que se presentó anteriormente. En este caso, se puede identificar también la ubicación del sol en un foco⁵.

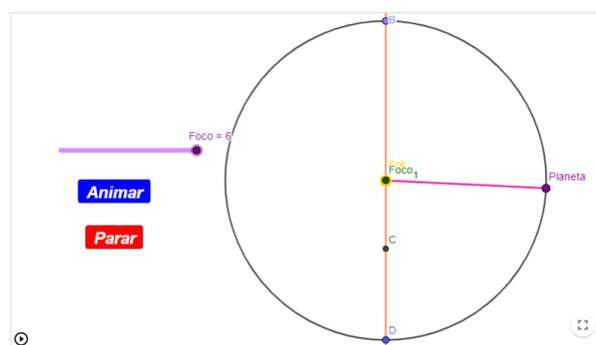


Figura 3.4: Modelación primera ley de Kepler. Elaboración propia mediante GeoGebra.

⁵Por organización de la propuesta la velocidad se deja constante para poder explicar la variación explícitamente en la segunda ley.

La segunda ley de Kepler se presenta en dos planos; en primer lugar, se muestra la variación de la velocidad del planeta orbitando al rededor del sol que varía si varía la excentricidad. En el segundo plano se presenta la correspondencia entre áreas y periodos de orbitación, teniendo en cuenta una sección de la órbita que pasa por el afelio y otra que pasa por el perihelio.

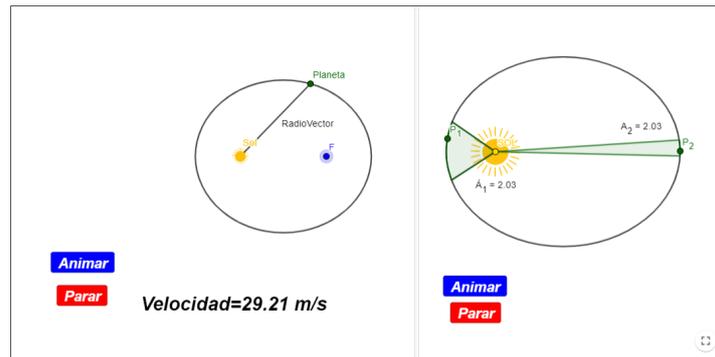


Figura 3.5: Modelación segunda ley de Kepler. Elaboración propia mediante GeoGebra.

Finalmente, para la tercera ley de Kepler se presenta a partir de la modelación de dos elipses superpuestas con un foco en común (Sol) y ubicando el foco imaginario en diferentes partes. Además, dentro de la modelación se busca simular el periodo de orbita de cada uno de los planetas que orbitan al sol, además de presentar la ecuación de la relación entre el periodo y el área.

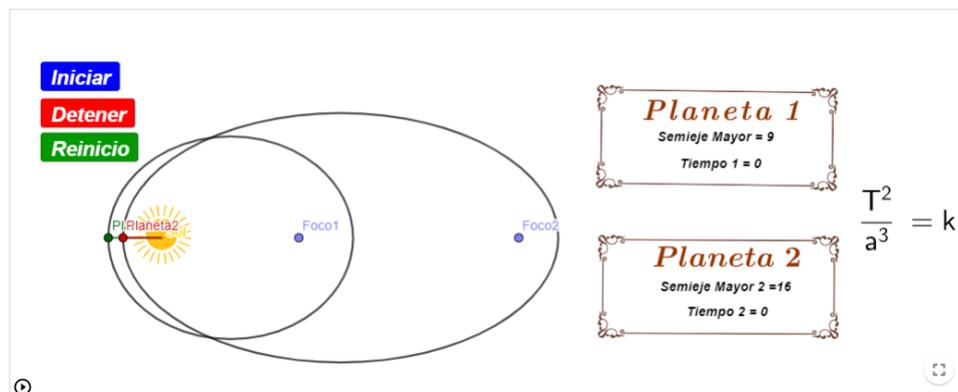


Figura 3.6: Modelación tercera ley de Kepler. Elaboración propia mediante geogebra.

A continuación, se presenta el diagrama de la organización del material de manera temática.

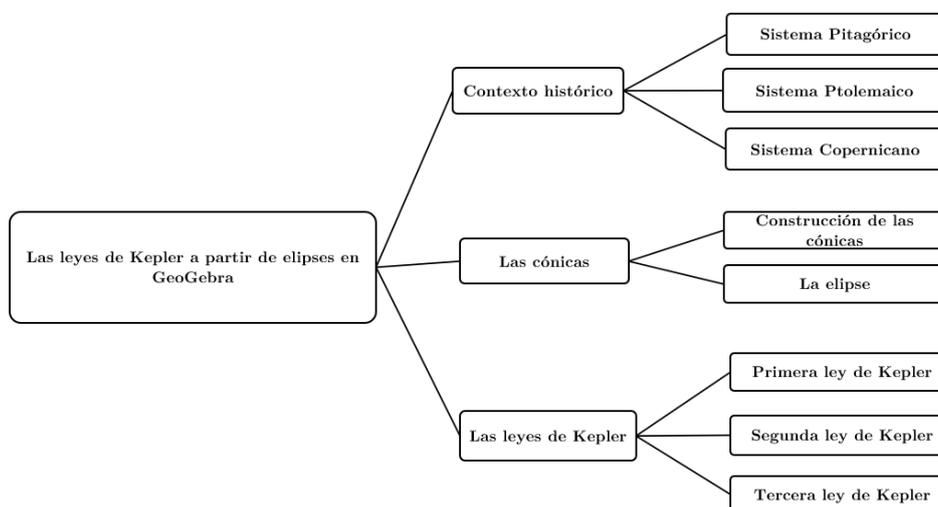


Figura 3.7: Ruta de aprendizaje. Elaboración propia Microsoft Word

Después de generar esta propuesta a partir de los resultados de la caracterización, se busca probar la estrategia en el curso de astronomía general de la Universidad Pedagógica Nacional. A continuación, se presenta la implementación y los resultados obtenidos de ella.

3.2.3. Implementación de la propuesta

Descripción de la implementación

Para la implementación de la propuesta se presentó una prueba piloto con los estudiantes de la electiva de Astronomía general de la UPN, la que permitirá a partir de una muestra de la población de cinco estudiantes que interviene en la investigación, ver las dificultades y fortalezas de la herramienta modelada.

Se busca mostrar el material a partir de una sesión guiada por el investigador y sustentada en preguntas orientadoras que se presentan en un formulario de Google docs

(Anexo 3), que busca orientar y medir el nivel deductivo de la propuesta. Las preguntas se organizan en una sección por cada modelación. En la figura 16 se muestran las fases que se llevaron a cabo en la implementación.

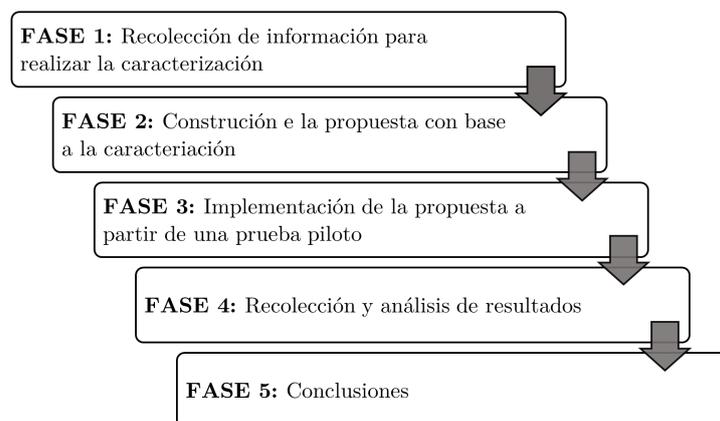


Figura 3.8: Fases del trabajo. Elaboración propia Microsoft Word

En el primer capítulo de contexto histórico se organiza una pregunta por cada modelación dirigidas a reconocer las diferencias de cada uno de los modelos; para la segunda sección se establecen una pregunta para la sección de cónicas y dos preguntas para la sección de la elipse, que se dirigen a definir algunos elementos de dichas figuras. Finalmente, en la sección de las leyes de Kepler se presentan tres preguntas en la primera y tercera ley, y en la segunda ley se plantean dos preguntas. Éstas buscan describir a partir de las modelaciones diferencias entre el modelo de Kepler y los modelos anteriores, además de definir algunos elementos como la perspectiva de modelo heliocéntrico, velocidad de la órbita, entre otros, incluyendo, en la tercera ley, el cálculo matemático de la constante de proporcionalidad.

Resultados de la implementación

De la implementación se puede concluir en términos generales que fue recibida de manera favorable por los estudiantes que intervinieron en ella, además, se pudo llegar

a las conclusiones que se ven a continuación presentadas en la Tabla 3 organizadas en fortalezas y debilidades.

DEBILIDADES	FORTALEZAS
<ul style="list-style-type: none"> ■ La propuesta necesita ser reestructurada en las instrucciones de acuerdo con las preguntas y sugerencias presentadas por los estudiantes ■ La prueba piloto da una visión muy general de toda la población, sin embargo, no se puede dar un estudio específico de alguno de los participantes o generalizar el resultado ya que no se cuenta con el 100 % de la población. ■ Por la pandemia del Covid 19 no fue posible implementar en un ambiente presencial, lo que hizo que fuera una guía remota. ■ La implementación se realizó en un ambiente de paro institucional, lo que hizo que el número de estudiantes que participara en la sesión fuera limitado. 	<ul style="list-style-type: none"> ■ Es una propuesta entendible para la población, aun cuando intervienen elementos matemáticos en ella. ■ Gracias al contexto histórico, los estudiantes pudieron entender las dificultades de los modelos anteriores y poder plantear otro tipo de movimientos. ■ Es una propuesta interactiva que aporta a los docentes en formación estrategias de enseñanza. ■ Teniendo en cuenta que los estudiantes que intervinieron en la implementación realizaron en su totalidad inscribieron la materia por interés, participaron activamente en cada una de las secciones presentadas.

Dentro de la metodología se pudo evidenciar que es una herramienta útil para el apoyo de los procesos llevados en el aula de clase, en este sentido, puede ser usada en los

cursos de astronomía como apoyo con el fin de estructurar un modelo que pueda aprovechar el estudiante. Ahora bien, es necesario que dentro del aprovechamiento del recurso se presente un acompañamiento guiado ya que se pudo evidenciar que, aunque presenta los conceptos de manera explícita, no es lo suficientemente descriptivo para dar toda la información necesaria.

De acuerdo con lo anterior, se corrige la propuesta y se entregan los resultados de la propuesta como un producto de la investigación.

Capítulo 4

CONCLUSIONES

Luego del análisis de la situación problema planteada, la indagación conceptual y plantear y aplicar una posible solución, se presentan a continuación las conclusiones que surgen del proceso de investigación.

En la comprensión de los fenómenos astronómicos, uno de los recursos más importantes que tiene el estudiante es la creación de modelos a partir de conocimientos previos. En el caso de los sistemas planetarios, el conocimiento y aplicación de modelos geométricos son una herramienta fundamental para el entendimiento del fenómeno, pues permiten identificar algunos elementos dinámicos del movimiento planetario tales como velocidad y periodo. Por tanto, es necesario incluir este saber en la formación básica de los estudiantes de astronomía.

En el estudio de la dinámica celeste es indispensable entender el modelo de Kepler, partiendo de los principios innovadores que plantea para explicar el movimiento de los astros en los sistemas planetarios. Es significativo tener claro que con este modelo se rompe la idea de orbitas circulares al plantear una trayectoria elíptica ubicando en uno de sus focos al Sol, a partir de la cual se explica de manera diferente el fenómeno gravitacional y por tanto la velocidad del movimiento orbital.

Antes de Kepler se entendía el movimiento de los planetas como circular uniforme al recorrer distancias iguales en tiempos iguales. A partir del planteamiento de su segunda ley, en la que afirma que un astro al recorrer áreas iguales en tiempos iguales y teniendo en cuenta que dicha área está sujeta a un radio diferente cambia su velocidad, describe el movimiento como elíptico con velocidad variable.

Lo más innovador de los planteamientos de Kepler es la posibilidad de describir el movimiento planetario matemáticamente como una proporción entre el cuadrado del periodo orbital y el cubo del semieje mayor, esbozando la existencia de la constante que abriría paso a la descripción matemática de la ley de gravitación universal de Newton.

Para un aprendiz de astronomía es fundamental conocer en su orden las leyes de Kepler, pues esa linealidad permite comprender desde lo más concreto hasta lo más abstracto el movimiento en el sistema planetario.

Para la mejor comprensión de las leyes de Kepler por parte de un estudiante de astronomía es primordial concebir una estrategia pedagógica que posibilite entender las relaciones geométricas que den cuenta del movimiento en orbitas elípticas, por lo que es importante conocer los elementos que forman la elipse desde su descripción de cónica que la dota de dos focos, radio vectores, centro y excentricidad, los cuales fueron utilizados en la formulación matemática y estructurarlos en una modelación.

En los encuestados es evidente, tal como se presenta en los resultados de la sección 3.2.1, el manejo de algunas nociones básicas de geometría y astronomía, pero su comprensión y aplicación a la explicación del movimiento planetario no es suficiente. Por tanto, se hace necesario generar un primer momento en la estrategia pedagógica propuesta que aborde las explicaciones de los sistemas planetarios anteriores a Kepler, la geometría de la elipse y los elementos dinámicos de las leyes del movimiento orbital elíptico. Se construye una ruta de aprendizaje que aborda esos saberes básicos a través de la modelación en el soft-

ware GeoGebra como respuesta a los hallazgos de la encuesta.

Para entender las relaciones dinámicas existentes entre los elementos geométricos y matemáticos de las leyes de Kepler es muy útil el software GeoGebra que posibilita la elaboración de trayectorias elípticas en las que se puede mover un punto y es posible modular su velocidad, tiempo de orbita y su excentricidad a partir de relaciones matemáticas. Los elementos geométricos que se deben tener en cuenta en esta modelación son una elipse formada a partir de dos focos con un punto fijo en la superficie de la elipse para formar la trayectoria, otro punto dinámico que se mueve a lo largo de la figura y un radio que va desde el foco que está fijo al punto dinámico. Una vez construido este modelo en el software es posible incluir valores matemáticos a los elementos dinámicos tales como velocidad, tiempo y distancia para reproducir el movimiento de un astro. Esto hace de GeoGebra una herramienta apropiada para la enseñanza de las leyes de Kepler y por ello se eligió para estructurar la modelación de los elementos más importantes de las órbitas y su relación con la dinámica celeste abordadas en ellas.

La ruta de aprendizaje diseñada para lograr la comprensión de las leyes de Kepler a través de la modelación en GeoGebra se probó en un grupo focal de cinco estudiantes, guiada por preguntas problema se recibieron buenos comentarios y lo más importante, es que después de la interacción con la herramienta se presentaban ideas más claras en cuanto, principalmente, el concepto de trayectoria, el reconocimiento de la ubicación del sol, la definición de una velocidad cambiante y las implicaciones que esto tiene en el movimiento.

Al realizar la aplicación de la herramienta de manera virtual se posibilitó realizar ajustes durante la prueba piloto para solventar dificultades presentadas en la implementación. Cabe resaltar que, por la coyuntura de emergencia sanitaria, los espacios virtuales han crecido y es necesario poder llevar a cabo este tipo de apoyo para que los estudiantes puedan tener una clase interactiva que les permita reconocer a partir del empleo de estas propuestas, los elementos de una disciplina tan dinámica como lo es la astronomía.

Al ser la modelación una herramienta que posibilita el auto aprendizaje se observaron algunas debilidades por falta de claridad en dos elementos importantes: la descripción del fenómeno a observar y las instrucciones para manipular la herramienta. Esto fue corregido en la propuesta final a partir de la reestructuración de las descripciones de las modelaciones, y deja en claro que en la propuesta de una herramienta de aprendizaje es fundamental tener muy en cuenta los aprendizajes previos de los estudiantes y usar un lenguaje acorde a su desarrollo cognitivo.

En la formación de los docentes de física es muy importante poder reconocer situaciones problémicas en el proceso de enseñanza-aprendizaje de los saberes propios de la disciplina e indagar en las posibilidades de presentar soluciones que superen la educación tradicional, que despierten el interés de los estudiantes e involucre elementos interdisciplinarios.

Bibliografía

- Battaner, E. (2012). *El movimiento planetario, kepler: Bailando con las estrellas* (Vol. 1). National Geographic.
- Castiblanco, O. L., y Vizcaíno, D. F. (2008). El uso de las tics en la enseñanza de la física. *Universidad Libre de Colombia*.
- Castillo Ayala, J. C. (2008). La historia de las ciencias y la formación de maestros: la recontextualización de saberes como herramienta para la enseñanza de las ciencias. *Rollos nacionales*.
- Copérnico, N. (1982). Sobre las revoluciones de los orbes celestes, ed. *Mínguez y M. Testal, Madrid: Editora Nacional*.
- Fouz, F., y De Donosti, B. (2005). Modelo de van hiele para la didáctica de la geometría. *Un paseo por la geometría*, 04–05.
- GeoGebra. (2001). *Descripción geogebra clásico*. [urlwww.geogebra.org](http://www.geogebra.org).
- Justi, R., y cols. (2006). La enseñanza de ciencias basada en la elaboración de modelos. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*.
- Kepler, J. (1939). *Harmonies of the world* (Vol. 1). Library of Alexandria.
- Koestler, A. (2007). *Los sonámbulos. origen y desarrollo de la cosmología*. Librería.
- Kuhn, T. S. (2019). *La estructura de las revoluciones científicas*. Fondo de cultura económica.
- López, S., Veit, E. A., y Araujo, I. S. (2016). Una revisión de literatura sobre el uso de modelación y simulación computacional para la enseñanza de la física en la educación básica y media. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 38(2).
- Mateu, E., y Orts, A. (2006). La astronomía griega: de los pitagóricos al almagesto de

- ptolomeo. *Huygens* (62), 19–38.
- Matthews, M. R. (1994). Historia, filosofía y enseñanza de las ciencias: la aproximación actual. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 255–277.
- Moreira, M. A. (2014). Modelos científicos, modelos mentais, modelagem computacional e modelagem matemática: aspectos epistemológicos e implicações para o ensino. *Revista brasileira de ensino de ciência e tecnologia. Ponta Grossa. Vol. 7, no. 2 (maio/ago. 2014), p. 1-20.*
- Ortun, M. J. R. (1982). Las cónicas del universo. *Maina*(6), 2–3.
- Pace, J. P. (1991). *Structure and insight: A theory of mathematics education*. JSTOR.
- Pérez, E. M., y Muñoz, A. O. (2006). Al almagesto de ptolomeo una concepción geométrica del universo. *Huygens*.
- Ríos Isaza, K. J. D. M., y Benítez, A. G. (2013). Una recontextualización de las leyes de kepler en la enseñanza media desde un enfoque histórico y epistemológico. *Latin American Journal of Science Education*.
- Schmidt, A. (2019). *El astrónomo que perdió la nariz*. Fondo de cultura económica.
- Schwarz, C. V., Reiser, B. J., Davis, E. A., Kenyon, L., Achér, A., Fortus, D., ... Krajcik, J. (2009). Developing a learning progression for scientific modeling: Making scientific modeling accessible and meaningful for learners. *Journal of Research in Science Teaching: The Official Journal of the National Association for Research in Science Teaching*, 46(6), 632–654.
- Solbes, J., y Palomar, R. (2011). ¿ por qué resulta tan difícil la comprensión de la astronomía a los estudiantes? *Didáctica de las ciencias experimentales y sociales*.
- Solbes Matarredona, J., y Palomar Fons, R. (2013). Dificultades en el aprendizaje de la astronomía en secundaria. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 2013, vol. 35, p. 1004-1-1004-12.
- Soler, L. C. T. (2005). Para qué los semilleros de investigación. *Revista Memorias. Universidad Cooperativa de Colombia*, 1–10.

ANEXOS

ANEXO 1: DESCRIPCIÓN ENCUESTA DE CARACTERIZACIÓN

La encuesta de caracterización de los estudiantes se realiza teniendo en cuenta tres secciones:

Sección 1: Información general del estudiante:

Se busca saber a qué licenciatura pertenecen los estudiantes, que edad tiene y su motivación para pertenecer a la electiva, para reconocer el alcance poblacional de la propuesta. El tratamiento de los datos se realizará a partir de preguntas cerradas que generan datos estadísticos específicos en donde se busca indagar si es posible aplicar esta propuesta a grupos de investigación y semilleros.

Sección 2: La geometría:

En esta sección se quiere identificar su nivel de conocimiento de geometría asociado con las cónicas. El tratamiento de las respuestas se realiza a partir del modelo de Van Hiele para clasificar en niveles a los estudiantes según las respuestas que realice a preguntas abiertas dirigidas a su conocimiento en el área.

Sección 2: Elementos dinámicos de la astronomía:

En esta sección se quiere identificar cuál es, hasta el momento, el modelo mental que usted tiene del sistema planetario y los elementos que intervienen en él. De acuerdo con lo anterior, se plantean las preguntas abiertas que describen situaciones en las que el estudiante debe argumentar una posición que tome frente al tema.

Al final, se pueden computar los resultados tanto en la sección 1 como en la sección 2 para revisar el nivel general en el que se encuentra el estudiante. Tanto en geometría como en astronomía.

A continuación, se presenta el formato que se trabajó en la implementación.

Encuesta de caracterización Astronomía General, licenciatura en Física - Grupo 2

Al llenar este formulario estará ayudando con el trabajo "De la historia a la modelación: Una estrategia pedagógica para la enseñanza de las leyes de Kepler a partir de la representación de elipses en GeoGebra". Por favor lea atentamente las preguntas y con base en su conocimiento responda:

***Obligatorio**

Información general del estudiante

Recuerde que estos datos estarán protegidos y solo serán de conocimiento del investigador.

1. ¿Acepta que la información que aquí se suministre sea utilizada para el diseño de la propuesta que se trabajará en el espacio de la electiva Astronomía General - Grupo 2 y que va dirigido a la enseñanza de leyes de Kepler? *

Marca solo un óvalo.

Si

No

2. Seleccione la licenciatura a la que pertenece *

Si su licenciatura no se encuentra entre las opciones escriba el nombre de su programa al final en mayuscula omitiendo tildes.

Marca solo un óvalo.

- Licenciatura en Artes Escénicas
- Licenciatura en Artes Visuales
- Licenciatura en Música
- Licenciatura en Biología
- Licenciatura en Electrónica
- Licenciatura en Diseño Tecnológico
- Licenciatura en Física
- Licenciatura en Matemáticas
- Licenciatura en Química
- Licenciatura en Ciencias Naturales y Educación Ambiental
- Licenciatura en Tecnología
- Licenciatura en Educación Comunitaria
- Licenciatura en Educación Especial
- Licenciatura en Educación Infantil
- Pedagogía
- Licenciatura en Educación Física
- Licenciatura en Deporte
- Licenciatura en Recreación
- Licenciatura en Ciencias Sociales
- Licenciatura en Español e Inglés
- Licenciatura en Español y Lenguas Extranjeras con énfasis en Inglés y Francés
- Licenciatura en Filosofía
- Otro: _____

3. Edad *

Escriba su edad en años (número)

4. Propósito de inscripción de la electiva *

Selecciona todos los que correspondan.

- Interés por la astronomía
- Créditos faltantes para el grado
- Se ajusta con su horario

Otro: _____

La
geometría

En esta sección se quiere identificar su nivel de conocimiento de geometría asociado con la astronomía.

5. En una frase corta escriba: ¿Qué es geometría para usted? (Máximo use 20 palabras) *

6. ¿En su carrera ha recibido en algún momento formación en geometría? *

Marca solo un óvalo.

- Sí
- No

7. ¿Para resolver problemas referentes a su carrera ha utilizado algún saber de la geometría? *

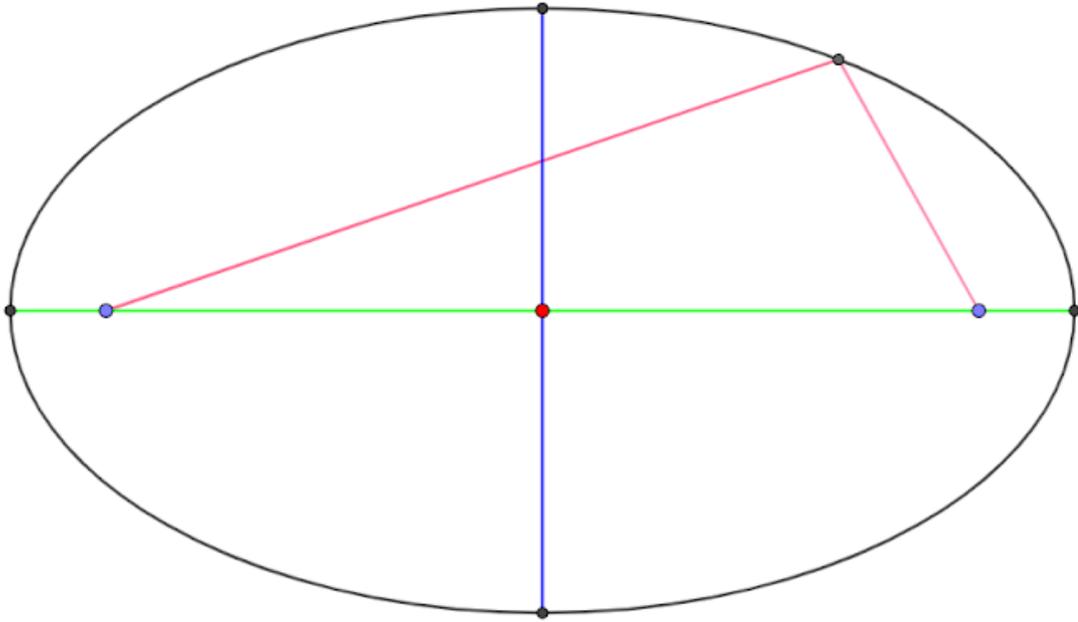
Marca solo un óvalo.

Sí

No

8. Si su respuesta en la pregunta anterior es Sí, escriba cuál ha usado y describalo (Máximo use 20 palabras)

9. En la siguiente imagen se puede apreciar una figura geométrica de dos dimensiones. ¿Cómo se llama la figura? ¿Puede identificar alguno de los elementos que se encuentran a color? *



10. ¿En qué otro momento ha visto la figura anterior? (En estudio, cotidianidad, en algún deporte, etc...) *

Elementos
dinámicos de la
astronomía

En esta sección se quiere identificar cuál es hasta el momento el modelo mental que usted tiene del sistema planetario y los elementos que intervienen en él.

11. ¿Cómo cree usted que se mueven los planetas? ¿Este movimiento es igual para todos los astros? *

12. Si un estudiante le pregunta "¿Por qué se afirma que la tierra se mueve si veo que el movimiento lo realiza el sol (de este a oeste), las estrellas nocturnas y los planetas?" ¿Cuál sería su respuesta? (Máximo use 50 palabras) *

13. ¿Conoce usted el modelo planetario actual? *

Marca solo un óvalo.

Si

No

14. Si su respuesta es sí, describalo brevemente (Máximo use 20 palabras)

15. El cometa Halley demora en promedio 75 años en volver a ser visible desde la tierra. ¿Cuál cree que es la razón de que no se vea de manera más frecuente en el cielo, como es el caso de las estrellas? *

16. ¿Conoce algo acerca de las contribuciones en la astronomía realizadas por Johannes Kepler? *

Marca solo un óvalo.

Sí

No

17. Sí su respuesta es sí ¿Qué conoce? (Máximo use 30 palabras)

Este contenido no ha sido creado ni aprobado por Google.

Google Formularios

ANEXO 2: RÚBRICA ENCUESTA DE CARACTERIZACIÓN

SECCIÓN 1: INFORMACIÓN GENERAL DEL ESTUDIANTE

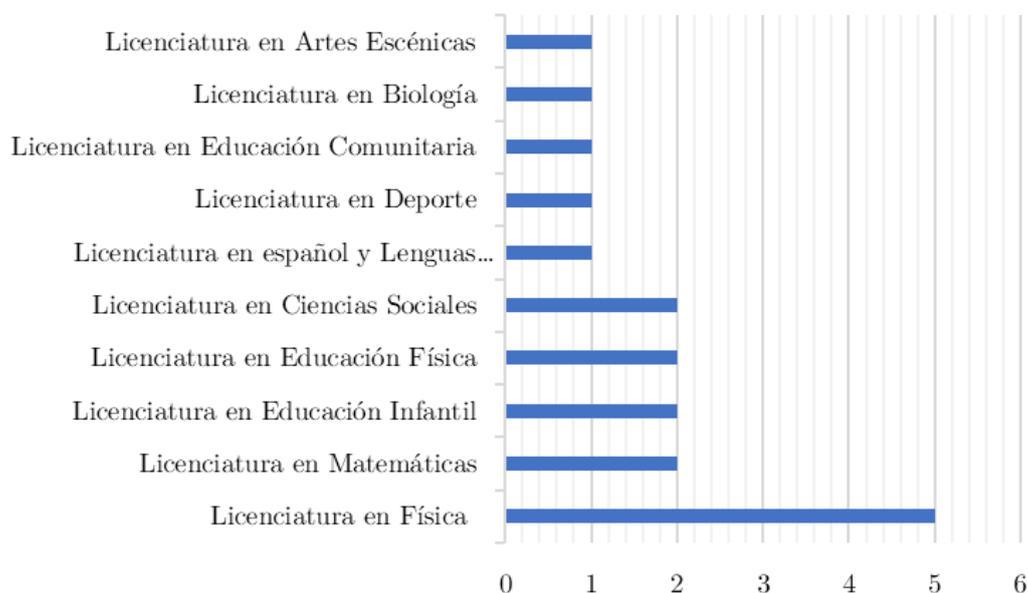
Pregunta 1: ¿Acepta que la información que aquí se suministre sea utilizada para el diseño de la propuesta que se trabajará en el espacio de la electiva Astronomía General - Grupo 2 y que va dirigido a la enseñanza de leyes de Kepler?

Nº de respuestas recibidas: 18

Respuesta	Nº de estudiantes
Si	18
No	0

Pregunta 2: Seleccione la licenciatura a la que pertenece

Nº de respuestas recibidas: 18



Pregunta 3: Edad, Escriba su edad en años (número)

Nº de respuestas recibidas: 18



■ 17 ■ 18 ■ 19 ■ 20 ■ 21 ■ 22 ■ 23 ■ 24 ■ 25 ■ 26 ■ 27 ■ 28 ■ 30 ■ 33

Pregunta 4: Propósito de inscripción de la electiva

Nº de respuestas recibidas: 18

Respuesta	Nº de estudiantes
Interés por la astronomía	17
Créditos faltantes para el grado	3
Se ajusta con su horario	1

ANÁLISIS POR PREGUNTA SECCIÓN 2: LA GEOMETRÍA

Pregunta 1: En una frase corta escriba: ¿Qué es geometría para usted? (Máximo use 20 palabras)

Nº de respuestas recibidas: 18

Nivel	Alcances del estudiante	Nº de estudiantes	Puntos
1	El estudiante responde que no sabe qué es la geometría o no la define	2	0
2	El estudiante relaciona la geometría con figuras geométricas. La describe como una disciplina independiente sin relación con las matemáticas. Presenta	5	25

	conceptos relacionados con la medición, pero no profundiza en ella.		
3	Nombra elementos fuera de las figuras geométricas que pertenecen a la disciplina, comienza a relacionarla con las matemáticas.	5	50
4	El estudiante describe la geometría como una rama de las matemáticas y es capaz de dar una descripción aproximada incluyendo el concepto de espacio.	3	75
5	El estudiante describe la geometría como una rama de las matemáticas dedicada al estudio del espacio, además, nombra elementos abstractos para describirla y profundiza en sus aplicaciones.	3	100

Pregunta 2: ¿En su carrera ha recibido en algún momento formación en geometría?

N° de respuestas recibidas: 18

Respuesta	Implicaciones para la investigación	N° de estudiantes	Puntos
Si	El estudiante presenta un conocimiento básico de los conceptos relacionados con la geometría y algunos de sus principios fundamentales.	11	100
No	El estudiante NO presenta un conocimiento básico de los conceptos relacionados con la geometría y desconoce los elementos que intervienen en la disciplina.	7	0

Pregunta 3: ¿Para resolver problemas referentes a su carrera ha utilizado algún saber de la geometría?

N° de respuestas recibidas: 18

Respuesta	Implicaciones para la investigación	N° de estudiantes	Puntos
Si	El estudiante genera relación entre la geometría y otras disciplinas y la reconoce	11	Sujeto con la respuesta de la

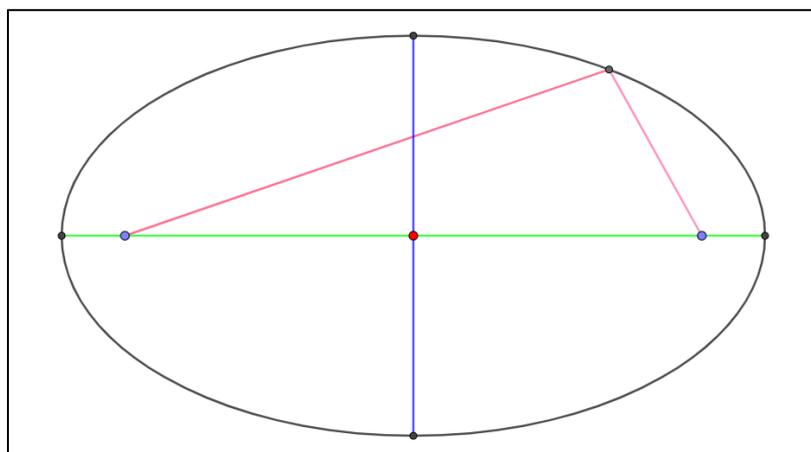
	como una herramienta básica en la solución de problemas.		siguiente pregunta
No	El estudiante NO encuentra ninguna relación entre la geometría y su carrera. Nunca la ha utilizado en procesos interdisciplinarios.	7	0

Pregunta 4: Si su respuesta en la pregunta anterior es Sí, escriba cuál ha usado y descríballo (Máximo use 20 palabras)

Nº de respuestas recibidas: 11

Nivel	Alcances del estudiante	Nº de estudiantes	Puntos
1	El estudiante no reconoce ningún elemento de la geometría en la solución de problemas interdisciplinarios.	7	20
2	El estudiante enuncia los elementos que ha utilizado sin ninguna descripción	6	40
3	El estudiante nombra los elementos y genera una descripción básica.	3	60
4	El estudiante enuncia y describe los elementos a partir de ejemplos y situaciones.	0	80
5	El estudiante realiza una descripción detallada de los elementos que utilizó en algún momento para la resolución de problemas de su carrera. Además, apoya su descripción con ejemplos claros.	2	100

Pregunta 5: En la siguiente imagen se puede apreciar una figura geométrica de dos dimensiones. ¿Cómo se llama la figura? ¿Puede identificar alguno de los elementos que se encuentran a color?



Nº de respuestas recibidas: 18

Nivel	Alcances del estudiante	Nº de estudiantes	Puntos
1	El estudiante reconoce algunas figuras, sin embargo, no nombra la elipse.	6	0
2	El estudiante reconoce la elipse, pero la nombra de otras formas (óvalo, círculo) y no reconoce ningún elemento.	3	25
3	El estudiante reconoce la elipse, pero la nombra de otras formas (óvalo, círculo) y reconoce algunos elementos como independientes de la figura (líneas, puntos, triángulos)	4	50
4	El estudiante reconoce la elipse y la nombra como tal, sin embargo, tiene dificultad para nombrar los elementos que la componen.	5	75
5	El estudiante reconoce la elipse y la nombra como tal, además es capaz de nombrar todos los elementos que la componen.	0	100

Pregunta 5: ¿En qué otro momento ha visto la figura anterior? (En estudio, cotidianidad, en algún deporte, etc....)

Nº de respuestas recibidas: 18

Nivel	Alcances del estudiante	Nº de estudiantes	Puntos
1	El estudiante no reconoce la figura en ningún otro lugar	8	0

2	El estudiante reconoce la figura en otros espacios, sin embargo, no describe en cuáles	0	25
3	El estudiante reconoce la figura en otros espacios, pero los relaciona solo con el estudio.	3	50
4	El estudiante reconoce la figura en otros espacios fuera del estudio, sin embargo, no describe específicamente en que espacios.	4	75
5	El estudiante reconoce la elipse en otros espacios, además realiza una descripción específica de las situaciones en las que la ha visto o empleado.	3	100

SECCIÓN 3: ELEMENTOS DINÁMICOS DE LA ASTRONOMÍA

Pregunta 1: ¿Cómo cree usted que se mueven los planetas? ¿Este movimiento es igual para todos los astros?

Nº de respuestas recibidas: 18

Nivel	Alcances del estudiante	Nº de estudiantes	Puntos
1	El estudiante responde que no sabe o no presenta ningún elemento relacionado con el movimiento de los astros	2	0
2	El estudiante presenta nociones de movimiento y trayectorias clásicas. Presenta una visión geocéntrica.	2	33
3	El estudiante describe una visión heliocéntrica, además nombra algunos elementos físicos como la gravedad, pero no lo relaciona con las trayectorias de los planetas	11	66
4	El estudiante describe una visión heliocéntrica y presenta conocimiento en elementos como las fuerzas gravitacionales y relaciona las mismas con la trayectoria de los planetas.	3	100

Pregunta 2: Si un estudiante le pregunta "¿Por qué se afirma que la tierra se mueve si veo que el movimiento lo realiza el sol (de este a oeste), las estrellas nocturnas y los planetas?" ¿Cuál sería su respuesta? (Máximo use 50 palabras)

N° de respuestas recibidas: 18

Nivel	Alcances del estudiante	N° de estudiantes	Puntos
1	El estudiante responde que no sabe	0	0
2	El estudiante le responde a partir de los conceptos previos, sin embargo, lo relaciona solo con elementos de percepción.	5	33
3	El estudiante busca estrategias para describir el concepto de marco de referencia, como ejemplos y analogías. Sin embargo, no nombra elementos físicos.	10	66
4	El estudiante realiza una descripción a partir de los elementos físicos y utiliza vocabulario científico como "marco de referencia", "movimiento aparente", etc....	3	100

Pregunta 3: ¿Conoce usted el modelo planetario actual?

N° de respuestas recibidas: 18

Respuesta	Implicaciones para la investigación	N° de estudiantes	Puntos
Si	El estudiante conoce algunos elementos relacionados con el modelo planetario que se reconoce actualmente	8	Sujeto con la respuesta de la siguiente pregunta
No	El estudiante NO conoce ningún elemento implicado en el modelo planetario actual.	10	0

Pregunta 4: Si su respuesta es sí, descríballo brevemente (Máximo use 20 palabras)

N° de respuestas recibidas: 8

Nivel	Alcances del estudiante	N° de estudiantes	Puntos
1	El estudiante solo presenta un sistema solar circular y/o geocéntrico.	0	25
2	El estudiante presenta un conocimiento básico de los planetas que conforman el sistema solar, en un modelo heliocéntrico, sin embargo, no lo relaciona elementos referentes con las trayectorias que toman los planetas	5	50
3	El estudiante presenta un conocimiento básico de los planetas que conforman el sistema solar, en un modelo heliocéntrico y nombra algunos elementos referentes con las trayectorias que toman los planetas (gravedad, velocidad, posición, etc....) pero no describe ninguno de ellos.	3	75
4	El estudiante presenta una visión heliocéntrica utilizando los conceptos de la física para describir la trayectoria que presentan los planetas.	0	100

Pregunta 5: El cometa Halley demora en promedio 75 años en volver a ser visible desde la tierra. ¿Cuál cree que es la razón de que no se vea de manera más frecuente en el cielo, como es el caso de las estrellas?

N° de respuestas recibidas: 18

Nivel	Alcances del estudiante	N° de estudiantes	Puntos
1	El estudiante responde que no sabe o no presenta ningún elemento relacionado con el movimiento de los astros	5	0
2	El estudiante responde que es debido a elementos externos a la trayectoria que toman los planetas.	4	33
3	El estudiante responde que es debido a la trayectoria que toman los planetas, sin embargo, no explica por qué.	8	66
4	El estudiante responde que es debido a la trayectoria que toman los planetas y lo relaciona con elementos de	1	100

	movimiento como distancia recorrida, velocidad, aceleración, etc....		
--	--	--	--

Pregunta 6: ¿Conoce algo acerca de las contribuciones en la astronomía realizadas por Johannes Kepler?

Nº de respuestas recibidas: 18

Respuesta	Implicaciones para la investigación	Nº de estudiantes	Puntos
Si	El estudiante es capaz de describir algún aspecto acerca del trabajo de Kepler	10	Sujeto con la respuesta de la siguiente pregunta
No	El estudiante NO conoce ningún aporte de Johannes Kepler a la astronomía	8	0

Pregunta 7: Sí su respuesta es sí ¿Qué conoce? (Máximo use 30 palabras)

Nº de respuestas recibidas: 10

Nivel	Alcances del estudiante	Nº de estudiantes	Puntos
1	El estudiante presenta trabajos que no realizó Johannes Kepler	1	25
2	El estudiante enuncia los trabajos hechos por Kepler, pero no presenta ninguna descripción de ellos.	4	50
3	El estudiante enuncia los trabajos hechos por Kepler y presenta descripciones básicas y superficiales de ellos.	3	75
4	El estudiante enuncia los trabajos hechos por Kepler y presenta descripciones con vocabulario especializado, además es capaz de relacionarlo con la matemática.	2	100

RÚBRICA GENERAL

Modelo de Van Hiele

Nivel	Rango de puntaje	N° de personas	Porcentaje	Descripción de las habilidades
1	0 - 100	1	5,55%	En este nivel, el estudiante es capaz de reconocer las figuras geométricas, sin embargo, no percibe los elementos que lo componen.
2	100 - 200	3	16,66%	El estudiante describe los elementos y propiedades que componen las figuras, pero no es capaz de definirlos.
3	200 - 300	7	38,88%	Cuando el estudiante llega a este nivel es capaz de realizar deducciones a partir las propiedades que alcanza a establecer en el nivel 2.
4	300 - 400	5	27,77%	En este nivel comienza a presentar un razonamiento lógico avanzado. Relaciona la geometría con otras situaciones, sin embargo, no las resuelve.
5	400 - 500	2	11,11%	Para este nivel, el estudiante está capacitado para presentar definiciones rigurosas que implican lenguaje matemático complejo y construcciones abstractas y aplicadas.

Modelo progresión de aprendizaje a partir de los modelos mentales

Nivel	Rango de puntaje	N° de personas	Porcentaje	Descripción de las habilidades
1	0 - 125	0	0%	Los estudiantes construyen y usan modelos que muestran una ilustración literal de un fenómeno en particular. Los estudiantes no ven los modelos como herramientas para generar nuevo conocimiento, pero pueden ver los modelos como definiciones para expresar a los otros como se ve el fenómeno
2	125 - 250	7	38,88%	Los estudiantes construyen y usan un modelo para ilustrar y explicar cómo ocurre un fenómeno consistente con la evidencia acerca del fenómeno.

				Los estudiantes ven modelos como significados para comunicar su entendimiento del fenómeno más bien como una herramienta para soportar su propio pensamiento
3	250 – 375	8	44,44%	Los estudiantes construyen y usan múltiples modelos para explicar y predecir más aspectos de un grupo de fenómenos relacionados. Los estudiantes ven los modelos como herramientas que pueden soportar sus pensamientos acerca de los fenómenos nuevos y existentes. Los estudiantes consideran alternativas en la construcción de modelos basados en el análisis de diferentes ventajas y debilidades para explicar y predecir esos modelos alternativos
4	375 - 500	3	16,66%	Los estudiantes construyen y usan los modelos espontáneamente en una variedad de dominios para apoyar sus propios pensamientos. Los estudiantes consideran como se puede comportar el mundo acorde a varios modelos. Los estudiantes construyen y usan modelos para generar nuevas preguntas acerca del comportamiento y existencia del fenómeno.

Las leyes de Kepler a partir de la modelación en GeoGebra

En este formulario encontrará preguntas reflexivas que estarán relacionadas con cada una de las modelaciones con las que pudo interactuar en la implementación. En este sentido, es necesario que lea atentamente las preguntas y escriba su respuesta.

***Obligatorio**

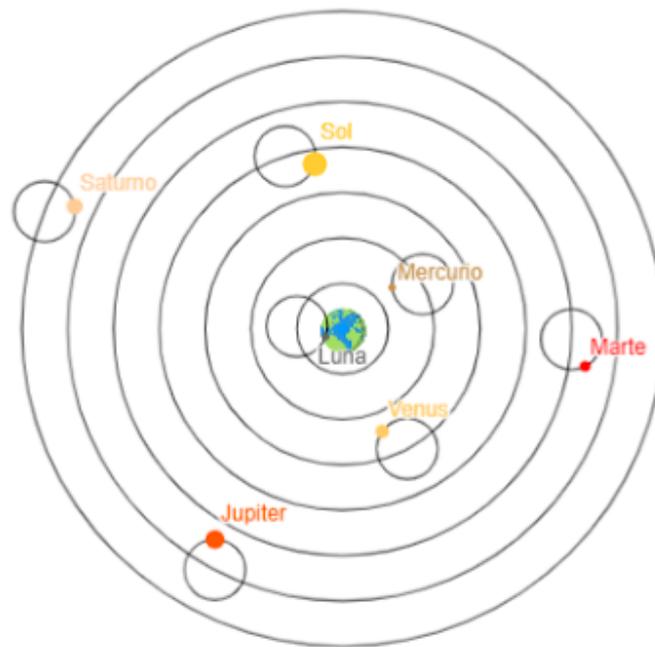
Modelación 1 - Sistema pitagórico

1. ¿Por qué el sistema pitagórico no se considera ni heliocéntrico ni geocéntrico? *



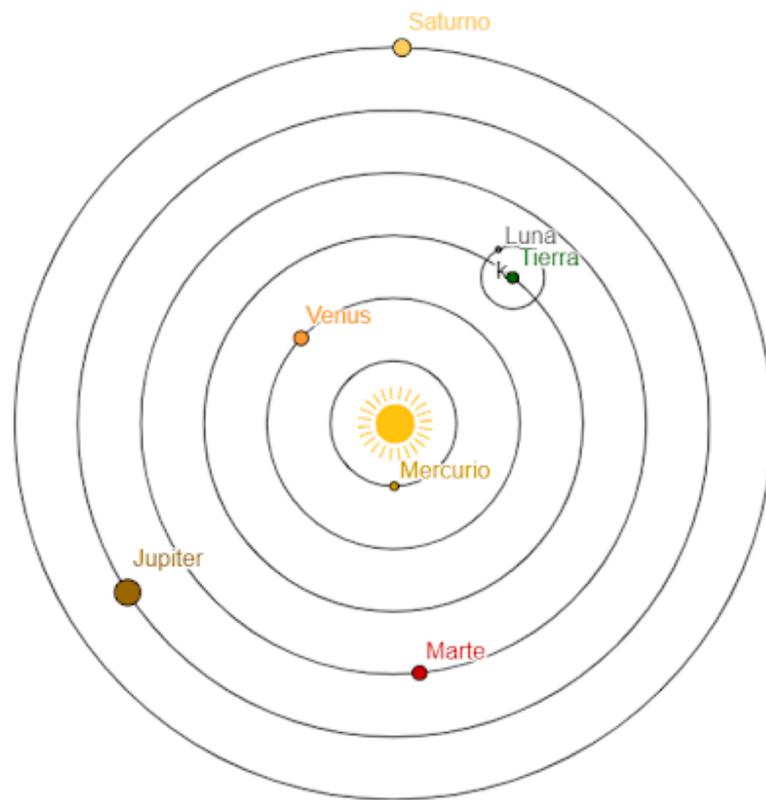
Modelación 2 - Sistema ptolemaico

2. ¿Cuáles son las diferencias y similitudes (tanto geométricas como físicas) que puede encontrar entre el sistema ptolemaico y el sistema pitagórico? *



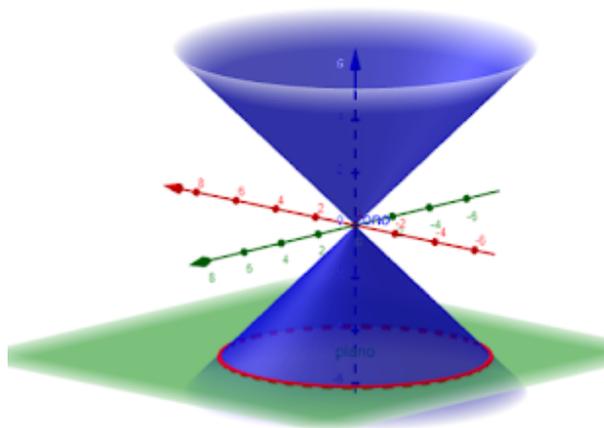
Modelación 3 - Sistema Copernicano

3. Fuera de poner el sol en el centro ¿Qué otros cambios realiza Copérnico a los dos sistemas anteriores? *



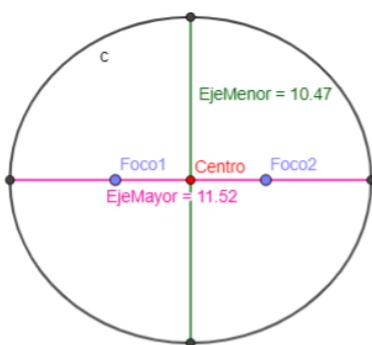
Modelación 4 - Construcción de las cónicas

4. Defina qué es una cónica a partir de la simulación: *



Modelación 5 - La elipse

Distancia Focal
 $a = 0.6$

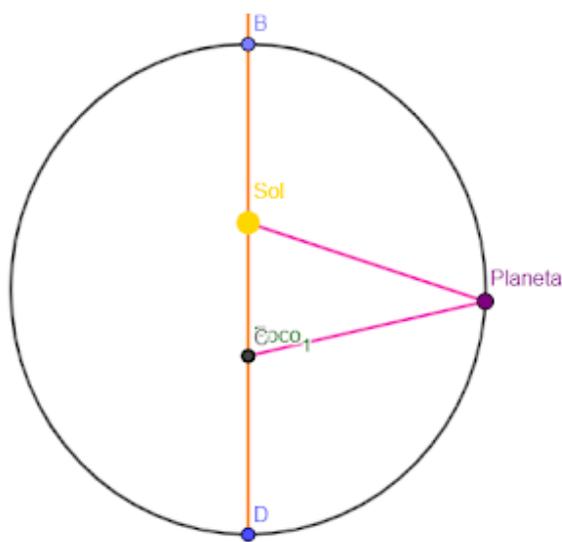


Coordenadas
 Foco 1 = (-4, 1)
 Foco 2 = (0.8, 1)
 Centro = (-1.6, 1)

5. ¿Qué sucede cuando la distancia focal disminuye? *

6. ¿Qué pasa con las coordenadas cuando la distancia focal es 0? ¿Qué implicaciones tiene en la figura? *

Modelación 6 - Primera ley de Kepler

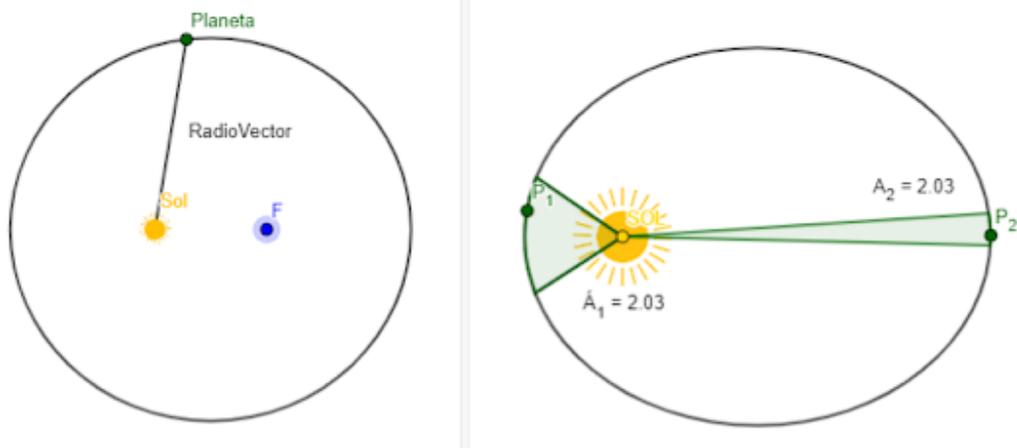


7. ¿Cuál es la diferencia que se presenta entre las orbitas presentadas antes y después de Kepler? *

8. ¿En qué sitio se encuentra ubicado el sol en este modelo? *

9. ¿Puede ser considerado heliocéntrico? *

Modelación 7 - Segunda ley de Kepler



10. ¿Cuáles son los efectos del sol en la velocidad? *

11. ¿En qué se diferencia la velocidad presentada entre las leyes de Kepler y los modelos anteriores? *

Modelación
8 - Tercera
ley de
Kepler

Realicemos el ejercicio de calcular la constante de cada una de las orbitas en la modelación. Usa una calculadora (<https://www.geogebra.org/scientific?lang=es>) y utiliza la fórmula de la derecha de la modelación para hacerlo (la que se encuentra en la parte inferior).

$$\frac{T^2}{a^3} = k$$

12. Usa los siguientes datos y escribe el resultado en la respuesta *



13. Usa los siguientes datos y escribe el resultado en la respuesta *



14. ¿Qué puedes deducir de la comparación de los resultados anteriores? ¿Qué implicaciones tienen en el sistema? *

Este contenido no ha sido creado ni aprobado por Google.

Google Formularios

ANEXO 4: CODIGOS QR MODELACIONES

<p>Sistema de los pitagóricos</p>	
<p>Sistema de Ptolomeo</p>	
<p>Sistema de Copérnico</p>	
<p>Las cónicas a partir de la intersección del plano y el cono</p>	

<p>La elipse</p>	
<p>Primera ley de Kepler</p>	
<p>Segunda ley de Kepler</p>	
<p>Tercera ley de Kepler</p>	

HERRAMIENTA COMPLETA: Libro GeoGebra: Las leyes de Kepler a partir de elipses en GeoGebra.

