

IDENTIFICACIÓN DE TALENTOS MATEMÁTICOS A TRAVÉS DE TAREAS DE
GENERALIZACIÓN

ADRIANA LIZETH VEGA CARRILLO
JULIÁN EDUARDO GÓMEZ BÁEZ

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
ESPECIALIZACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
BOGOTÁ, D.C.

2016

IDENTIFICACIÓN DE TALENTOS MATEMÁTICOS A TRAVÉS DE TAREAS DE
GENERALIZACIÓN

ADRIANA LIZETH VEGA CARRILLO
JULIÁN EDUARDO GÓMEZ BÁEZ

Trabajo de Grado para optar por el título de especialista en educación matemática

Asesora: Johana Andrea Torres Díaz

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
ESPECIALIZACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
BOGOTÁ, D.C.

2016

“Para todos los efectos, declaro que el presente trabajo es original y de nuestra total autoría: en aquellos casos en los cuales hemos requerido del trabajo de otros autores o investigadores, hemos dado los respectivos créditos”



UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA
NACIONAL

Educadora de educadores

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

ACTA DE VALORACIÓN DE TRABAJO DE GRADO

Escuchada la sustentación del Trabajo de Grado titulado **Identificación de talentos matemáticos a través de tareas de generalización** presentado por los estudiantes:

Adriana Lizeth Vega Carrillo, Cód. 2015185018, CC. 1014234633
Julián Eduardo Gómez Báez, Cód. 2015185018, CC. 2016182022

Como requisito parcial para optar al título de **Especialista en Educación Matemática**, analizado el proceso seguido por los estudiantes en la elaboración del trabajo y evaluada la calidad del escrito final, se le asigna la calificación de **Aprobada**, con **47** puntos para Adriana Lizeth Vega Carrillo y, con **44** puntos para Julián Eduardo Gómez Báez.

Observaciones:

Los jurados en pleno sugieren otorgar la distinción meritoria.


En constancia se firma a los 29 días del mes de noviembre de 2016.

JURADOS

Director del Trabajo: Profesora: Johana Andrea Torres Díaz
JOHANA ANDREA TORRES DÍAZ

Jurados: Profesor: William Alfredo Jiménez Gómez
WILLIAM ALFREDO JIMÉNEZ GÓMEZ (UPN)


Profesora: Lyda Constanza Mora Mendieta
LYDA CONSTANZA MORA MENDIETA (UPN)

 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL <i>Advancing the Quality of Education</i>	FORMATO
	RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE
Código: FOR020GIB	Versión: 01
Fecha de Aprobación: 10-10-2012	Página 5 de 134

RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de grado.
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento	Identificación de talentos matemáticos a través de tareas de generalización.
Autor(es)	Vega Carrillo, Adriana Lizeth; Gómez Báez, Julián Eduardo
Director	Torres Díaz, Johana Andrea
Publicación	Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional, 2016. 131 p.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional
Palabras Claves	TALENTO, GENERALIZACIÓN.

2. Descripción
<p>Estudio que pretende identificar estudiantes de Educación Media talentosos en matemáticas, mediante el análisis de su desempeño en cada una de las etapas del proceso de generalización y de la presencia de características establecidas por diferentes autores para talentos matemáticos, evidentes en las producciones de los estudiantes al abordar diversas tareas de generalización.</p> <p>El trabajo abarca los siguientes aspectos:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Marco de referencia, que sustenta la caracterización de una persona talentosa en matemáticas y las etapas del proceso de generalización. • Definición de categorías de análisis en relación con las etapas del proceso de generalización y las características de una persona talentosa en matemáticas. • Aplicación de las tareas propuestas a estudiantes del Colegio Nuevo Gimnasio de la ciudad de Bogotá, D.C. • Análisis y conclusiones de la aplicación de las tareas.

 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL <i>Educación de Calidad</i>	FORMATO
	RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE
Código: FOR020GIB	Versión: 01
Fecha de Aprobación: 10-10-2012	Página 6 de 134

3. Fuentes

Para este trabajo se consultaron libros, tesis y fuentes de Internet como artículos. Las principales fuentes que nutren este documento se encuentran listadas a continuación:

Butto, C., Rojano, T. (2004). Introducción temprana al pensamiento algebraico: abordaje basado en la geometría. México: Grupo Santilla México.

MEN (2015). Documento de orientaciones técnicas, administrativas y pedagógicas para la atención educativa a estudiantes con capacidades y/o talentos excepcionales en el marco de la educación inclusiva.

MEN (2006). Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas.

Sánchez, L., García, O., Mora, L. (2009). Ver, describir y simbolizar en el club de matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional. Publicado en las Memorias del 10° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa.

4. Contenidos


Este trabajo se desarrolla en cinco capítulos, a saber:

Capítulo I. Se plantea la Justificación a partir de elementos planteados en la Ley General de Educación (Ley 115 de 1994), orientaciones emanadas del Ministerio de Educación Nacional y los Referentes de Calidad en el área de Matemáticas, en relación con la identificación y atención pertinente a estudiantes talentosos y la relevancia del proceso de generalización para el desarrollo del pensamiento algebraico. También se presentan los objetivos del estudio.

Capítulo II. Se hace una exposición de varios referentes teóricos e investigativos sobre talento, talento matemático y generalización. Se resalta la definición acogida para este estudio sobre talento matemático y las características que identifican a las personas talentosas en matemáticas, así como la precisión sobre las etapas del proceso de generalizar. Estas claridades permitieron definir las categorías de análisis.

Capítulo III. Se aborda la Metodología del estudio, se presentan las tareas de generalización que se aplican en el trabajo para la identificación de estudiantes talentosos en matemáticas y las categorías de análisis de las mismas.

Capítulo IV. Consiste en el análisis de la implementación de las tareas, a partir de

 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL <i>Advancing the Pedagogical</i>	FORMATO
	RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE
Código: FOR020GIB	Versión: 01
Fecha de Aprobación: 10-10-2012	Página 7 de 134

las respuestas y producciones de las estudiantes, a la luz de las categorías de análisis definidas en el capítulo anterior.

Finalmente se presentan las conclusiones obtenidas al término del trabajo, en relación con las estudiantes identificadas como posibles talentos en matemáticas, y sobre el planteamiento y aplicación de las tareas, y los criterios de identificación planteados. Además, de la bibliografía consultada a lo largo del trabajo, seguida de los anexos.

5. Metodología

Para el desarrollo de trabajo de grado se siguieron los siguientes pasos: (i) Elaboración de un marco de referencia que asume una contextualización de expertos respecto a una postura sobre la definición de una persona talentosa y una persona talentosa en matemáticas, por una parte, y sobre el proceso de generalización y sus etapas, por otra. (ii) Se describe el contexto de aplicación y con base en el marco de referencia se seleccionan las tareas de generalización y explicitan las categorías de análisis que tienen en cuenta niveles de desempeño en las etapas de generalización y características de las personas talentosas en matemáticas que se pueden evidenciar en el proceso de generalización. (iii) Luego, se hace la implementación y análisis de las tareas, a partir de la revisión detallada de las respuestas de las estudiantes a las diferentes tareas propuestas, determinando así los posibles talentos matemáticos. (iv) Finalmente, se formulan los resultados y las conclusiones del trabajo.

6. Conclusiones

Frente a los objetivos planteados, se puede concluir que todos se cumplieron a cabalidad pues durante el desarrollo del trabajo se hizo una indagación de diversos referentes sobre talento y el proceso de generalización lo que permitió consolidar una definición para talento matemático, siendo esta el punto de partida para la estructuración de la metodología, en la cual se proponen unos niveles de desempeño para las etapas del proceso de generalización y unas tareas específicas que permiten clasificar respuestas en cada nivel propuesto. Del mismo modo, se proponen tareas que permitan evidenciar las características de talento matemático. La propuesta de dichas tareas se convierte en la herramienta de análisis de cada una de las evidencias, logrando así que el



FORMATO

RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE

Código: FOR020GIB

Versión: 01

Fecha de Aprobación: 10-10-2012

Página 8 de 134

análisis de las respuestas se pudiese hacer de forma ágil.
Por otro lado, por medio de este trabajo, se logra disponer de herramientas para la identificación de estudiantes que sean posibles talentos en matemáticas, además de que brinda ideas sobre las posibles tareas que se pueden emplear. En cuanto a los resultados obtenidos, se llega a la conclusión de que estar por encima del promedio, no es un criterio suficiente para catalogar a un individuo como talentoso, por lo que es necesario identificar sus características en el desarrollo de tareas matemáticas.

Elaborado por:	Vega Carrillo, Adriana Lizeth Gómez Báez, Julián Eduardo
Revisado por:	Torres Díaz, Johana Andrea

Fecha de elaboración del Resumen:	30	09	2016
--	----	----	------

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN	16
CAPÍTULO I. PRELIMINARES	17
1.1. JUSTIFICACIÓN	17
1.2. OBJETIVOS	21
1.2.1. General	21
1.2.2. Específicos	21
CAPÍTULO II. MARCO DE REFERENCIA	22
2.1. TALENTO	22
2.2. TALENTO MATEMÁTICO	29
2.2.1. Características del talento matemático	30
2.3. GENERALIZACIÓN	35
2.3.1. Etapas de la generalización	37
2.3.1.1. Percibir un patrón	39
2.3.1.2. Expresar un patrón	41
2.3.1.3. Registrar un patrón	42
2.3.1.4. Probar la validez de las fórmulas	44
CAPÍTULO III. METODOLOGÍA	48
3.1. CONTEXTO	48
3.2. SELECCIÓN DE TAREAS	49
3.3. CATEGORÍAS DE ANÁLISIS	55
3.3.1. Selección	55
3.3.2. Caracterización	59
3.3.3. Análisis	72
CAPÍTULO IV. ANÁLISIS DE LA APLICACIÓN	73
4.1. TAREA DE SELECCIÓN	73
4.2. TAREAS DE CARACTERIZACIÓN	84
4.2.1. Tarea 2	86
4.2.2. Tarea 3	88
4.2.3. Tarea 4	90

4.2.4. Tarea 5.....	93
4.2.5. Encuesta	95
CONCLUSIONES	97
BIBLIOGRAFÍA	99
ANEXOS.....	104
Anexo 1. Tarea 1: Rectángulos.	104
Anexo 2. Tarea 2: Fósforos.....	105
Anexo 3. Tarea 3: Árbol de Navidad.....	106
Anexo 4. Tarea 4: Baldosas triangulares.....	107
Anexo 5. Tarea 5: Secuencia.	108
Anexo 6. Tarea 6: Torre de triángulos.	109
Anexo 7. Análisis de resultados estudiantes por encima del promedio. ..	110
Anexo 8. Transcripción video Tarea 2.	131
Anexo 9. Transcripción audio Tarea 3.....	132
Anexo 10. Transcripción audio Tarea 4.....	133

LISTADO DE TABLAS

Tabla 1: Términos utilizados para referirse a personas con altas capacidades. (MEN, 2006, p.9)	22
Tabla 2: Caracterización de un talento matemático.....	29
Tabla 3: Características del talento matemático. Mora, González y Casas (2009)	.31
Tabla 4. Tareas de generalización.....	35
Tabla 5. Paralelo etapas de generalización.....	36
Tabla 6. Fases en la construcción de una generalización, niveles identificados por fase y categorías de Análisis. (García, 2011)	44
Tabla 7. Propuesta de niveles de desempeño del proceso de generalización.....	53
Tabla 8. Evidencias de las fases del proceso de generalización.....	56
Tabla 9. Acciones para evidenciar las características de un talento matemático...58	
Tabla 10. Herramienta para resumir características evidencias de talento matemático.....	67
Tabla 11. Ejemplo de resumen de características.....	69
Tabla 12. Resultados de desempeño en las fases del proceso de generalización...80	
Tabla 13. Resumen de característica de la estudiante 30.....	93

LISTADO DE IMÁGENES

Imagen 1.	Procesamiento visual de información en imágenes.	Jiménez y Rojas (2010,	p.	68)	
					38
.....					
Imagen 2.	Procesamiento visual de imagen en imagen.	Jiménez y Rojas (2010, p.		68)	
					38
.....					
Imagen 3.	Ejemplo de Interpretación de Información Figurativa.	Jiménez y Rojas (2010,	p.	69)	
					38
.....					
Imagen 4.	Ejemplo de formas para registrar un patrón.	Grupo Azarquiel (1993, p.		59)	
					41
.....					
Imagen undécimo.	5.	Respuesta	estudiante	30.	Grado
					72
Imagen undécimo.	6.	Respuesta	estudiante	1.	Grado
					74
Imagen undécimo.	7.	Respuesta	estudiante	19.	Grado
					75
Imagen undécimo.	8.	Respuesta	estudiante	29.	Grado
					76
Imagen 3.	9.	Ejemplos de	respuestas	de	la fase
					77
Imagen décimo.	10.	Respuesta	estudiante	32.	Grado
					78
Imagen undécimo.	11.	Respuesta	estudiante	10.	Grado
					79
Imagen undécimo.	12.	Respuesta	estudiante	3.	Grado
					79

Imagen 13.	Respuesta	estudiante	30.	Grado	
undécimo.....					79
Imagen 14.	Respuestas	de	estudiante	30	a Tarea
2.....					84
Imagen 15.	Respuestas	de	estudiante	30	a Tarea
3.....					86
Imagen 16.	Estudiante 30 realizando Sudoku.....				87
Imagen 17.	Respuestas	de	estudiantes	14 y 30	a Tarea
4.....					88
Imagen 18.	Respuesta	de	estudiante	30	a Tarea
4.....					90
Imagen 19.	Respuesta	de	estudiante	30	a Tarea
5.....					91
Imagen 20.	Encuesta de estudiante 3 para evidenciar actitudes positivas hacia las matemáticas.....				92

LISTADO DE GRÁFICAS

Gráfica	1.	Resultados	fase
1.....			72
Gráfica	2.	Resultados	fase
2.....			74
Gráfica	3.	Resultados	fase
3.....			76
Gráfica	4.	Resultados	fase
4.....			78
Gráfica	5.	Cantidad de características que cumplen los	
estudiantes.....			83

INTRODUCCIÓN

Para dar inicio al trabajo, es necesario en primer lugar, plantear la justificación por medio de la cual se determina la importancia de realizar una investigación en torno a la identificación de estudiantes talentosos y se describen los objetivos generales y específicos, que permiten delimitar el asunto a indagar.

En el segundo capítulo se hace una revisión de la teoría para la construcción del marco de referencia, el cual está basado en la consolidación de los conceptos de talento, talento matemático, proceso de generalización y sus etapas.

En tercer lugar, se presenta la metodología, en la cual se describe el contexto de aplicación, la forma en la que esta se lleva a cabo, así como la secuencia de tareas y las herramientas de análisis a utilizar para el estudio de las respuestas obtenidas.

En cuarto lugar, se realiza un análisis de las evidencias obtenidas a través de las tareas de generalización propuestas, por medio de las herramientas de análisis, esto con el fin de indicar cual o cuales estudiantes podrían ser talentos matemáticos.

Finalmente, se plantean las conclusiones correspondientes al cumplimiento de los objetivos del trabajo, a las herramientas utilizadas para la identificación de talentos, así como los resultados obtenidos y a los aportes que nos deja el presente trabajo de grado a nivel personal y profesional.

CAPÍTULO I. PRELIMINARES

1.1. JUSTIFICACIÓN

La Ley 115 de 1994 en su artículo 49 señala que las instituciones educativas deben contar con una organización de programas para la detección temprana de los alumnos con capacidades o talentos excepcionales y hacer los ajustes curriculares necesarios para permitir la formación integral. De la misma forma el Decreto 2247 de 1997, en sus artículos 12 y 13, establece que las instituciones educativas tienen la responsabilidad de identificar y reconocer los educandos con talentos producto de su interacción con su entorno natural, familiar, social, étnico, y cultural, como base para la construcción de conocimientos, valores, actitudes y comportamientos.

Pese a lo anterior, el Ministerio de Educación Nacional (2006) hace referencia a la falta de información de los docentes acerca de las características de la excepcionalidad, particularmente en matemáticas, lo que impide que los maestros generen tareas que permitan destacar altas habilidades en sus estudiantes e identificar capacidades o talentos excepcionales. En esta vía, el Ministerio de Educación Nacional (2015), presenta orientaciones pedagógicas para la atención educativa a estudiantes con capacidades o talentos excepcionales en el marco de la educación inclusiva, que tiene como objetivo brindar información a docentes sobre las características para la identificación y reconocimiento de estudiantes con talentos excepcionales en diferentes áreas y, desde ahí, proponer acciones educativas pertinentes para su atención.

En particular, las concepciones y creencias que se tienen sobre estudiantes talentosos en matemáticas, corresponden por lo general, a la habilidad para la realización de diferentes cálculos y a la obtención de calificaciones superiores en el área; sin embargo, desde nuestra labor como docentes en diferentes

instituciones educativas, hemos observado estudiantes con características sobresalientes y actitudes positivas hacia las matemáticas, que nos dejan sorprendidos por su creatividad a la hora de resolver problemas y por su habilidad para comunicar ideas matemáticas, características que podrían indicar un talento en matemáticas pero, como docentes, no se dispone de elementos suficientes que permitan la identificación de todas las características y habilidades de los estudiantes, y así poder catalogarlos como estudiantes talentosos en matemáticas, lo cual se convierte en el objetivo central de este trabajo.

Por otra parte, los referentes de calidad nacionales para el diseño de currículo; en particular, los Lineamientos Curriculares en matemáticas (1998) y los Estándares Básicos de Competencias para el área de Matemáticas (2006) plantean como aspectos relevantes, los procesos generales de la actividad matemática y los tipos de pensamiento matemático, alrededor de los cuales es natural proyectar las estrategias y acciones de identificación y atención de estudiantes talentosos en matemáticas, por ser estos los aspectos que organizan el currículo de matemáticas en las instituciones educativas.

En cuanto a los procesos, está establecido que los procesos generales presentes en la actividad matemática son: 1) la resolución y el planteamiento de problemas, dentro del cual se considera como aspecto relevante, la generalización de soluciones y estrategias, 2) el razonamiento, que tiene que ver con conjeturar, encontrar patrones y expresarlos matemáticamente, 3) la comunicación, en la cual los estudiantes deben expresar ideas de forma oral y escrita, hacer observaciones y conjeturas, y argumentar, 4) la modelación, que se encarga de probar o demostrar regularidades y de generalizar, y 5) la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos que tiene como actividades importantes realizar cálculos, seguir instrucciones, utilizar correctamente una calculadora, transformar expresiones algebraicas, entre otras.

En cuanto a los tipos de pensamientos y sistemas, se plantean cinco: pensamiento numérico y sistemas numéricos, pensamiento espacial y sistemas geométricos, pensamiento métrico y sistemas de medida, pensamiento aleatorio y sistemas de datos y pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos; el desarrollo de este último, se reconoce como un proceso lento y complejo en el cual se involucran experiencias y saberes de los otros cuatro pensamientos y de otras disciplinas, en tanto *“este pensamiento cumple un papel preponderante en la resolución de problemas sustentados en el estudio de la variación y el cambio, y en la modelación de procesos de la vida cotidiana, las ciencias naturales y sociales y las matemáticas mismas”* (2006, p.66).

En el marco del pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos se hace necesario promover ambientes de aprendizaje, desde los primeros grados de escolaridad, que le permitan a los estudiantes estudiar regularidades y los patrones que la generan, analizar en que cambia, aumenta o disminuye una secuencia ya sea numérica o geométrica, hacer conjeturas sobre la forma o el valor del siguiente término de la secuencia; procurar expresar ese término, o cualquiera de la sucesión, oralmente o por escrito, o por medio de dibujos y otras representaciones, e intentar formular un procedimiento, algoritmo o fórmula que permita reproducir el mismo patrón, calcular los siguientes términos, confirmar o refutar las conjeturas. Todo esto tiene su esencia en lo que se denomina el proceso de generalizar, que también se reconoce como parte activa al interior de los procesos generales de la actividad matemática, antes mencionados.

Es importante rescatar que los procesos y el pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos, descritos anteriormente, se caracterizan por tener inmerso en sus actividades, tareas específicas de cada una de las etapas del proceso de generalización, lo que permite concluir que éste proceso es un componente esencial y quizá el más completo dentro de las matemáticas, por lo que se considera, que un buen desempeño (por encima de la media de sus pares)

en cada una de las etapas de generalización, permitirá identificar posibles estudiantes talentosos.

Desde esta perspectiva, en este trabajo se proponen tareas que permitan el desarrollo de procesos de generalización, pues consideramos que permite identificar características propias de estudiantes con talentos matemáticos, puesto que, se requiere de la visualización e identificación de patrones y regularidades, la formulación de conjeturas y su justificación o debida contradicción.

Lo anterior, ha llevado a que este trabajo, desde el énfasis de álgebra, vaya encaminado a la identificación de talentos matemáticos por medio de la creación o adaptación de tareas que involucren el proceso de generalización, en estudiantes de grado décimo y undécimo del Colegio Nuevo Gimnasio de Bogotá, sustentando su pertinencia por medio de algunos referentes teóricos que se muestran a continuación.

Con esto se pretende ofrecer dentro de este trabajo información que permita a los docentes reconocer conductas y rasgos a observar en un talento, así como tareas que involucren el proceso de generalización que faciliten evidenciar características de talento en instituciones educativas que no cuenten con un plan de contingencia para la detección de sus posibles talentos en matemáticas.

1.2. OBJETIVOS

A continuación, se plantea el objetivo general y los específicos, que permiten identificar hacia dónde está encaminado el presente trabajo.

1.2.1. General

Identificar estudiantes de grado décimo y undécimo con talento matemático a través de tareas que involucren el proceso de generalizar.

1.2.2. Específicos

- Consultar las características de un talento matemáticos y definir las categorías o herramienta de análisis que permitan evidenciarlas.
- Adaptar o diseñar tareas de generalización que permitan reconocer estudiantes con desempeños por encima del promedio y las características asociadas a talento matemático de tales estudiantes.
- Establecer categorías de análisis con base en las etapas del proceso de generalización y las características asociadas a talento matemático.
- Aplicar tareas de tipo geométrico y numérico que permitan identificar diferentes niveles de desempeño en cada una de las etapas del proceso de generalización y características asociadas a talento matemático.
- Recolectar y analizar evidencias que permitan identificar posibles estudiantes con talento matemático.

CAPÍTULO II. MARCO DE REFERENCIA

2.1. TALENTO

El estudio contemporáneo sobre las capacidades o talentos excepcionales empezó hace más de un siglo; desde entonces investigadores, académicos y educadores han tratado de explicar las producciones excepcionales generadas por individuos particulares (Subotnik, Olszewski y Worell, 2011, citados en MEN, 2015), relacionando la idea de talento, a nivel general, con la noción de inteligencia. Sin embargo, hay algunas evidencias de que el interés por definir un talento es un hecho que puede ser indagado desde la antigüedad.

En la época antigua se llamó *talentum* a diferentes monedas que circulaban en varias ciudades del mundo Helénico; así fue que *talentum* llegó como nombre de moneda a Roma y, tiempo después, adquirió el significado de tesoro en el mismo imperio Romano. Por otra parte, la palabra aparece por primera vez en castellano en el Fuero de Avilés (1155), con el sentido de ‘inteligencia’ o ‘dotes intelectuales’, asociada a la parábola evangélica del servidor que obtuvo lucro de los talentos (tesoro) que le habían sido confiados en custodia, a diferencia de otro, que enterró el tesoro que le había sido entregado sin extraer de él ningún provecho, lo que habría dado origen al significado de talento como “dotes naturales”, también a una persona con talento se le denominaba *sabia*, una persona que daba un uso original a cualquier arte u oficio; además de saber, el sabio debía tener experiencia; porque no separaba lo teórico de lo experiencial, ni el conocimiento de la ética; a ésta persona también se le llamaba *hombre prudente*, desde sus inicios, dicho concepto ha sido relacionado con los de ‘inteligencia’ e ‘intelecto’.

El término más común asociado al de talento en Colombia es el concepto de “excepcionalidad”, el cual aparece a finales de los años 80 y comienzos de los 90 como una forma de denominar a los estudiantes que presentaban un nivel de

inteligencia muy superior al promedio. Tradicionalmente, para el común de las personas, era natural denominar a estos estudiantes como “superdotados”; sin embargo, después se comenzó a utilizar el término “excepcionalidad”, dado que ‘superdotación’ tenía una fuerte carga negativa en las representaciones sociales (como los mitos frente al desajuste social y emocional de dichos estudiantes, o la imagen del nerd o ñoño, entre otros imaginarios) y no correspondía con la realidad general de dicha población¹. En adición, las nuevas concepciones frente a este grupo, emergentes en trabajos como los de Joseph Renzulli, Robert Sternberg y Howard Gardner (citados en MEN, 2015) en las mismas décadas, planteaban la necesidad de generar un concepto más amplio que permitiera nombrar a una persona con un potencial o desempeño sobresaliente.

El concepto de “excepcionalidad”² se deriva del uso de los términos “capacidades excepcionales” y “talentos”; el primero hace referencia a un potencial o desempeño excepcional en múltiples campos del desarrollo de manera simultánea, mientras que el segundo se trata de un potencial o desempeño excepcional en campos específicos, como se observa en los documentos de orientaciones para la atención a esta población, promovidos por el Ministerio de Educación Nacional en los años 2006 y 2015.

A partir de la relación y las concepciones que se ha obtenido a través de la historia entre inteligencia, superdotado, talento y excepcionalidad sobre las personas con altas capacidades, suelen presentarse confusiones en la utilización de términos que fácilmente son homologados como sinónimos de una persona con talento, como se observa en la siguiente tabla:

¹ Procesos similares se identifican en toda Iberoamérica, donde se empiezan a utilizar términos como ‘altas capacidades’, ‘aptitudes sobresalientes’ y ‘talento académico’, entre otros.

² De acuerdo con el MEN (2006) Y MEN (2015), es un término asociado a individuos que se salen de la norma, lo que significa que en tan muy por encima o muy por debajo del promedio, sin embargo, el MEN (2015), afirma que en el contexto colombiano la excepcionalidad alude solamente a capacidades o desempeños muy superiores al promedio.

Términos	Características
Superdotado	Es la capacidad intelectual o académica que se caracteriza por ser superior a los sujetos de su misma edad, científicamente hablando el ser superdotado implica tener un coeficiente intelectual de más de 130
Brillante	Sujeto con alto grado de inteligencia, en comparación con sus pares. También ha sido asociado al superdotado intelectual moderado (Winner, 2004).
Precoz	Es el adelanto significativo en los procesos de desarrollo de acuerdo con los parámetros de una población normal. En los niños la inteligencia precoz permite que desarrollen procedimientos con mayor rapidez y facilidad que el resto en determinadas actividades.
Prodigio	Es aquella persona que realiza una actividad extraordinaria para su edad; obteniendo un producto que llama la atención en un campo específico que hace competencia con los niveles de rendimiento de un adulto (Benito, 1996). Asimismo, al prodigio se le considera como un individuo que pasa a través de más dominios mostrando una velocidad que lo hace parecer cualitativamente distinto a otros individuos.
Genio	Son las personas que realizan aportes muy relevantes, producen nuevas estructuras conceptuales que conducen a cambios geniales en una disciplina, en la forma del arte, en una profesión, en algún campo del saber.
Excepcionalidad	Son los sujetos que se desvían de forma significativa de la media, tanto por el límite superior como por el inferior; Por otro lado, De Zubiría, J. (2002, citado en MEN, 2006) y en concordancia con el MEN (2015), asocia esta noción a la de capacidad: la cual implica la concepción de sujetos que presentan en un grado alto, inteligencia, intereses cognitivos, creatividad y autonomía. Dichas características las presentan personas que se consideran excepcionales por tener talentos específicos.
Talento	Los talentos son individuos con aptitudes o capacidades en un área específica, relacionada con campos académicos, artísticos o relacionales, y sienten gusto por trabajar en dicha área, la cual comprende profundamente y puede fácilmente expresar sus creaciones en ésta.

Tabla 1: Términos utilizados para referirse a personas con altas capacidades.
(MEN, 2006, p.9)

Términos	Características
----------	-----------------

Usualmente “talento”, se asume como la aptitud o capacidad física y mental que tiene un individuo para realizar, con alto rendimiento (desempeño superior al de sus pares), creatividad y eficiencia, tareas o actividades comprendiendo su arte y expresándolo con gran facilidad en un área específica, esta idea se asemeja a la que propone el Ministerio de Educación Nacional (2015) cuando afirma: “un estudiante con un talentos excepcionales es aquel que se caracteriza por presentar un potencial o desempeño superior a sus pares etários activos en un campo disciplinar, cultural o social específico”. (MEN, 2005, p.72)., y que “que las personas con capacidades y talentos excepcionales no necesariamente son académicamente sobresalientes”. (MEN, 2015, p.72).

Como se puede evidenciar en la definición de talento expuesta en la tabla 1 y la presentada en el párrafo anterior, son muy similares y las dos corresponden a documentos del Ministerio de Educación Nacional, en uno hace referencia a talento y el otro a talento excepcional, resultando esta última nominación un poco contradictoria con la definición de excepcionalidad dispuesta en la misma tabla; sin embargo, como ya se ha mencionado, el MEN (2015) señala que en el contexto Colombiano la excepcionalidad se atañe a individuos con desempeños muy superiores al promedio. En este sentido y de acuerdo con la literatura consultada, a lo largo de este documento se tomarán los términos talento y talento excepcional como sinónimos; en consecuencia, para efecto de este trabajo, se asumirá en primera medida, que un individuo talentoso o talentoso excepcional tiene un desempeño superior al promedio de sus pares, en relación con las tareas propias de su campo específico (para este caso, las matemáticas en particular).

Teniendo en cuenta que el talento se da en un área o disciplina específica, tiene sentido reconocer varios tipos de talentos, como: académico, verbal, musical, motriz, creativo, científico, social, mecánico, artístico y matemático (que es el que

nos interesa desarrollar en este trabajo). No obstante, de acuerdo con Valadez & Avalos (2010) y MEN (2015) es posible reconocer ciertas características comunes de las personas con un talento específico:

- ✓ Aprenden a un ritmo más rápido.
- ✓ Poseen conocimientos generales amplios.
- ✓ Exigen un ritmo de trabajo más rápido y con grados de dificultad más altos.
- ✓ Suelen tener mucha curiosidad por las cosas y el mundo que les rodea, cuestionándolo todo y pidiendo argumento de todo.
- ✓ Tienen una gran imaginación para proponer nuevas e interesantes ideas.
- ✓ Desde edades muy tempranas hacen preguntas que pueden ser sorprendentes haciendo uso de frases bien compuestas en edades donde otros niños apenas inician a enlazar palabras.
- ✓ Presentan un gusto por el desarrollo de procesos de lectura, comprensión, exploración y argumentación en edades inusualmente tempranas.

Si bien, se definen estas características como propias de una persona talentosa en un campo específico, la identificación y reconocimiento requiere de ciertos procesos que permitan hacerlas evidentes.

Históricamente, los estudios sobre inteligencia se han orientado al desarrollo y uso de técnicas para su medición como tests psicológicos, ejecutados por profesionales con preparación en las técnicas necesaria para su uso; en consecuencia, en la identificación de talentos además de ser necesarios test que midan aptitudes y actitudes también sería indispensable la observación detallada de una serie de cualidades y de características que describen personas con talentos para este caso en particular en matemáticas.

El MEN (2006), también expone diferentes técnicas para realizar los procesos de reconocimiento de los estudiantes con capacidades excepcionales estas técnicas

formales hacen referencia a las pruebas estandarizadas y a las pruebas no formales, que, por lo general, corresponden a pautas de observación, autoreporte o formatos de nominación o caracterización de los estudiantes. Es importante que tanto las pruebas, formales y no formales, sean aplicadas con la mayor calidad técnica posible, de esta forma existen diferentes propuestas formales para la identificación de talentos; como por ejemplo , el psicopedagogo americano Renzulli, J. S. (2001), conocido por sus trabajos sobre superdotación y talento, plantea la teoría de los tres anillos, basada en una interacción de tres elementos o factores: capacidad intelectual superior al promedio, compromiso con la tarea y creatividad, a partir de los cuales plantea los siguientes pasos para la identificación de talentos excepcionales:

Nominaciones por resultados de pruebas: Realización de pruebas estandarizadas de inteligencia.

Nominaciones por los docentes: Los docentes identifican características como creatividad, compromiso, interés y áreas especiales en las que se presenta un desempeño superior.

Vías alternas: Caracterización realizada por medio de la valoración de padres, pares y auto nominaciones.

Nominaciones especiales: Revisión general sobre la correcta selección de talentos, con el objetivo de certificar que los estudiantes seleccionados han mostrados actitudes positivas y rectificar que dentro de los no seleccionados haya un estudiante talentoso.

Notificación y orientación a padres: Comunicar a padres de familia sobre los programas de atención que se pueden brindar a los estudiantes talentos, con el fin de potenciar sus habilidades.

Nominaciones con base en información de acción: Detección a través de procesos de enriquecimiento, de estudiantes que hayan sido pasados por alto.

Por su parte, la Doctora en psicología y especialista en el estudio de altas capacidades María Encarnación Fernández y el Coordinador del proyecto Estalmat-Andalucía Antonio de Jesús Pérez (Fernández, M., Pérez, A. 2011)³, con el fin de atender la diversidad de los estudiantes, particularmente la de estudiantes con talento, proponen, el siguiente proceso para su identificación:

Modelos de identificación: Utilización de diferentes pruebas o test psicométricos, que dan cuenta del nivel de capacidad intelectual del individuo.

Detección inicial: Identificación de características y obtención de resultados muy por encima a los de otros individuos, por parte de padres de familia, profesores y compañeros.

La evaluación psicopedagógica: El profesor realiza una evaluación con el fin de verificar que el estudiante tiene unas aptitudes o capacidades, por encima de un grupo de referencia.

Diagnóstico e instrumentos: Utilización de diferentes herramientas formales (diferentes test de inteligencia) y no formales (tareas, auto informes, observaciones y entrevistas), por parte del profesor, para medir la capacidad intelectual, la creatividad, la dedicación y el rendimiento en el trabajo.

Acción tutorial: Ajustar el currículo de acuerdo a las necesidades del individuo.

³ Los autores desarrollan una propuesta de “Las Altas Capacidades y el Desarrollo del Talento Matemático”, sin embargo, desarrollan algunos planteamientos sobre talento en general.

Las dos propuestas antes descritas sostienen algunos elementos en común, mantienen la aplicación de pruebas específicas de inteligencia, la identificación a través de la percepción de docentes, padres, pares y el mismo individuo, y el plan de intervención para potenciar las habilidades detectadas. Se reconoce también que una valoración completa por parte de un docente no es posible, en tanto elementos como la aplicación de pruebas específicas de inteligencia es competencia de otros profesionales que se especializan en la debida aplicación de pruebas psicométricas; la identificación a través de la percepción del docente, padres, pares y el mismo individuo puede resultar una identificación poco certera, puesto que un estudiante responsable que obtenga buenas calificaciones, no necesariamente cuenta con el conjunto de características de un talento; esto implica que la identificación de estudiantes talentosos es una tarea que compromete a diferentes actores y en procesos de intervención variados y sostenidos que permitan observar diversas evidencias.

No obstante, el docente sí puede implementar un conjunto de tareas que permitan medir y clasificar a los estudiantes en diferentes niveles de desempeño y detectar a los estudiantes que están por encima de la media de sus pares, como un indicio de talento, y en un momento posterior desarrollar *Diagnósticos e instrumentos*, que le permitan reconocer en estos estudiantes las características de talento como otra evidencia en el proceso de identificación, como en efecto se desarrolló en este trabajo.

2.2. TALENTO MATEMÁTICO

Richard C. Miller (1990) es un psicólogo clínico, autor, investigador académico que dedicó su vida al trabajo de la documentación, define talento matemático como

“una habilidad inusual para entender las ideas matemáticas y razonar matemáticamente, en lugar de saber hacer solo cálculos aritméticos o conseguir calificaciones excelentes en matemáticas” (Miller, 1990), en relación con la definición general de una persona con talento se comparte la idea de poseer aptitudes y capacidades para este caso mentales que tiene un individuo para realizar, con alto rendimiento razonamiento matemático y dejando a un lado la idea de realizar con gran habilidad cálculos aritméticos y conseguir excelentes calificaciones en matemáticas siendo esta última quizás una de las ideas más frecuentes que tienen los docentes y padres respecto a los estudiantes talentosos en matemáticas.

De acuerdo con la relación entre la definición de talento matemática expresada por Miller (1990) y la de talento en general, para este trabajo se tomará que un individuo talentoso en matemáticas, en primer lugar, posee un desempeño por encima del promedio de sus pares.

2.2.1. Características del talento matemático

Siguiendo a Miller (1990), un individuo talentoso exhibe características que son pista de su capacidad. Así, para reconocer a un talento matemático, en particular, es necesaria la observación detallada de una serie de cualidades que lo identifican. Sobre este asunto, varios autores, como los citados en Pasarín, Feijoo, Díaz & Rodríguez (2004); Fernández & Pérez (2011); Ramírez (2012); Morán (2013); Díaz, Sánchez, Pomar, Fernández (2008) y MEN (2015), proponen aspectos esenciales que caracterizan a un talento matemático, aspectos que se resumen en la siguiente tabla:

Autor	Características del talento matemático
Wenderlin (1958)	<ul style="list-style-type: none"> • Comprenden con facilidad problemas, símbolos, métodos y reglas matemáticas. • Tienen aptitudes para aprender, retener, memorizar y

Autor	Características del talento matemático
	<p>producir matemáticas, y hacer relaciones con otros conceptos matemáticos.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Son competentes para solucionar problemas.
Krutetskii (1976)	<ul style="list-style-type: none"> • Analizan los problemas. • Generalizan el contenido de un problema y su método de solución. • Realizan abreviación en los pasos para la solución de un problema. • Flexibilidad en el pensamiento, pues cambian con facilidad de un proceso a otro. • Utilizan diferentes métodos de solución, pero buscan las más simple y directas. • Analizan cuestiones difíciles de un problema antes de intentar resolverlo. <p>Se cansan menos en trabajar en cuestiones matemáticas, que en las relacionadas con otras áreas.</p>
Greenes (1981)	<ul style="list-style-type: none"> • Formulan problemas y usan diferentes estrategias para solucionarlos. • Organizan datos para descubrir pautas o relaciones. • Tienen ideas divergentes, es decir que ve múltiples soluciones o buscan diferentes estrategias de solución. • Tienen habilidad para generalizar relaciones observadas, y tienen la capacidad de realizar transferencia a diferentes contextos. • Se salen de lo obvio y busca otras interpretaciones.
Miller (1990)	<ul style="list-style-type: none"> • Muestran gran entusiasmo y curiosidad por cuestiones matemáticas. • Aprenden, comprenden y aplican conceptos matemáticos. • Tienen gran capacidad para realizar abstracción y encontrar patrones y relaciones matemáticas. • Resuelven problemas mostrando diferentes alternativas. • Hacen transferencia de los conocimientos a otras situaciones.
Tourón (1998)	<ul style="list-style-type: none"> • Aprenden rápidamente conceptos matemáticos. • Planean situaciones matemáticas y encuentran varias soluciones. • Realizan generalizaciones y transfieren los aprendizajes a diferentes contextos. • Tienen pensamiento abstracto y analítico. • Solucionan situaciones haciendo simplificación en los

Autor	Características del talento matemático
	<p>pasos.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Tienen un pensamiento lógico y utilizan símbolos matemáticos. • Encuentran relaciones entre diferentes conceptos matemáticos. • Tienen memoria matemática (relaciones, características, símbolos, principios). • Analizan diferentes conocimientos desde una perspectiva matemática.
Freiman (2006)	<ul style="list-style-type: none"> • Realizan preguntas que van más allá de la tarea que se plantea. • Buscan patrones y relaciones. • Construyen relaciones y estructuras matemáticas. • Identifican la clave de los problemas y los solucionan con estrategias eficientes. • Tienen ideas originales y valiosas. • Se mueven con facilidad en diferentes estructuras matemáticas. • Tienen pensamiento crítico.
Morán (2013)	<ul style="list-style-type: none"> • Son rápidos y tienen buena memoria. • Poseen razonamiento verbal y espacial. • Establecen relaciones entre objetos. • Disfrutan de los números y sus combinaciones. • Representan cuantitativamente cualquier tipo de información. • Son recursivos y representativos. • Prefieren solucionar y formular problemas que realizar operaciones repetitivas. • Realizan generalizaciones. • Interpretan las situaciones y son originales en su solución. • Surge la necesidad de comprobar por medio de demostraciones.
MEN (2015)	<ul style="list-style-type: none"> • Generalizan a partir de ejemplos. • Comprenden la estructura de un problema y generan ideas para resolverlo. • Pueden realizar un razonamiento lógico, comprobando, justificando y demostrando. • Adoptan diversos enfoques. • Buen manejo para la manipulación de datos. • Agilidad mental en la fluidez de ideas.

Autor	Características del talento matemático
	<ul style="list-style-type: none"> • Pueden trabajar en ambas direcciones para resolver un problema (de atrás hacia adelante y viceversa). • Habilidad en la organización de datos. • Recuerdan tipo de problema y relaciones matemáticas, así como patrones de razonamiento. • Pueden pensar en formas abreviadas y saltar etapas de razonamiento lógico. • Habilidad para generalizar y transferir ideas.

Tabla 2: Caracterización de un talento matemático.

Si bien, los estudiantes con talento están por encima de la media de sus pares y poseen las características antes mencionadas, también es cierto que se caracterizan igualmente por su gusto y perseverancia en tareas específicas que involucran la actividad matemática. Desde este punto de vista Mora, González y Casas (2009), citados en Herrera y Mora (2010), presentan una propuesta en la cual las características mencionadas anteriormente se pueden clasificar en los pensamientos convergentes y divergentes, y se complementan con este aspecto esencial, denominado *Actitudes positivas hacia las matemáticas*, como se muestra en la siguiente tabla.

Pensamiento	Características
Divergente	<ul style="list-style-type: none"> • Solución de problemas de aplicación de forma rápida y fluida. • Originalidad en las ideas que sustentan los procesos matemáticos. • Elaboración y planteamiento de estrategias de trabajo. • Flexibilidad en la interpretación de problemas y planteamiento de estrategias de solución.
Convergente	<ul style="list-style-type: none"> • Buscan soluciones simples y directas. • Capacidad de visualización. • Capacidad de generalización. • Habilidad para transferir ideas. • Capacidad para organizar la información, relacionarla y usarla. • Reconocimiento de las estructuras generales de

Pensamiento	Características
	los problemas y sus soluciones. <ul style="list-style-type: none"> • Habilidad para la utilización de los procesos mentales en el razonamiento matemático. • Análisis crítico. • Capacidad para justificar soluciones obtenidas en un problema. • Habilidad para comunicar las ideas matemáticas que usa para resolver problemas.
Actitudes positivas hacia las matemáticas	<ul style="list-style-type: none"> • Gusto por resolver acertijos matemáticos (sudokus, sopas de números, juegos de lógica matemática, animaplanos, etc.) • Gusto por resolver ejercicios que impliquen hacer numerosos cálculos. • Consideración de las matemáticas como su materia favorita. Deseo por estudiar algo afín a las matemáticas. • Dedicación sobre las tareas relacionadas con las matemáticas (desarrolla las actividades matemáticas en su tiempo libre). • Persistencia y tenacidad, por las tareas matemáticas, a pesar de las frustraciones.

Tabla 3: Características del talento matemático. Mora, González y Casas (2009).

Es así como la definición adaptada anteriormente de talento matemático se complementa de la siguiente manera:

Un individuo talentoso en matemáticas, posee un desempeño por encima del promedio de sus pares y además muestra características propias relacionadas con sus pensamientos divergente y convergente, y actitudes positivas hacia las matemáticas, según lo planteado por Mora, González y Casas (2009).

En la caracterización de talento descrita anteriormente, entre otros aspectos, es común observar que un talento en matemáticas, da solución a problemas con gran facilidad y busca diferentes alternativas, observa patrones y relaciones, y es capaz de generalizar y aplicar dicha generalización en diferentes contextos, esta es una

de las razones por la cual se acoge para este trabajo el proceso de generalización, como excusa para identificar estudiantes talentosos en matemáticas, que a pesar de no ser muy común en el ámbito escolar, es un proceso que permite trabajar todos los elementos mencionados.

2.3. GENERALIZACIÓN

La RAE define generalización como la *“acción de abstraer de lo que es común y esencial a muchas cosas, para formar un concepto general que las comprenda todas”*.

Por otro lado, uno de los primeros autores que trabajo sobre la generalización fue Piaget (1975), citado en Merino (2012), quién precisa que es un proceso fundamental en la construcción del conocimiento y establece que tiene relación con la abstracción, pues considera que es un proceso que da cabida a la identificación de información (abstracción), seguida del trabajo fundamental de la generalización que es encontrar regularidades y pasar de algunos a todos.

Si bien, las definiciones anteriores son generales y se adaptan a diferentes contextos, para el caso de las matemáticas y en concordancia con Piaget (1975), Krutetskii (1976) citado en Merino (2012) también considera que la generalización es una habilidad para generar conocimiento matemático (objetos, relaciones y operaciones) y añade dos niveles: la habilidad personal para ver lo general y conocido en lo que es particular y concreto, y la habilidad para ver algo general y todavía desconocido en lo que es particular y aislado.

A su vez, Mason (1989), Dreyfus (1991), Polya (1965), Tall (1990) y Kaput (1999), (citados en García (2011) y Trujillo (2008) respectivamente), de acuerdo con Piaget (1975), también consideran que generalizar es descubrir leyes particulares, identificar aspectos en común y realizar un planeamiento más general, por medio

de patrones, procedimientos y estructuras, que tengan diferentes dominios de validez, lo que Kaput (1999) denomina aumento en los niveles de razonamiento. Por otro lado, Cañadas (2007) y Amit y Neria (2008), (citados en Trujillo, 2008), consideran varias definiciones de generalización como: una actividad empírica inductiva en la que se revisan ejemplos y se halla y se sistematiza una regularidad; pasar del estudio de un objeto al estudio de un conjunto que contiene ese objeto; un proceso sofisticado y poderoso, el cual involucra reflexión y una hábil reconstrucción de los propios esquemas existentes; el proceso de aplicar un argumento dado en un contexto más amplio; un lenguaje verbal y de gestos que emplean los estudiantes en sus intentos por generalizar (como una alternativa al sistema de representación algebraico) y una de las ideas básicas que puede guiar a los estudiantes a la utilización y manejo del lenguaje algebraico.

De acuerdo con la indagación anterior, se puede afirmar que la generalización, particularmente en matemáticas, es un proceso fundamental pues permite generar conocimiento, mediante el descubriendo de relaciones, propiedades, semejanzas, diferencias, etc., lo que da cabida a la formulación de leyes generales sobre casos particulares y esto a si ves a otras actividades matemáticas, como las de conjeturar, justificar y simbolizar,

Si bien el proceso de generalización aumenta el nivel de razonamiento y da cabida a la construcción de conocimiento, de acuerdo con Butto & Rojano (2004), las tareas de generalización matemática a desarrollar con los estudiantes, deberán ser aquellas que le permitan detectar patrones (numéricos y geométricos) y expresarlos en un lenguaje matemáticos, tareas que pueden girar en torno a las situaciones (ver tabla 4) descritas por el Grupo Azarquiel (citado en Sánchez, L., García, O., Mora, L., 2009).

Los Estándares Básicos de Competencias en matemáticas MEN (2006), mencionan que las tareas de generalización de patrones numéricos, geométricos y

de leyes y reglas de tipo natural o social que rigen los números y las figuras involucran la visualización, exploración y manipulación de los números y las figuras en los cuales se basa el proceso de generalización, por lo anterior, es entonces el proceso de generalización un centro de interés en la formación matemática de niños y jóvenes, Para efectos de este trabajo, se considera pertinente trabajar tareas de generalización que den cabida al procesamiento visual de imagen y a la interpretación de información figurativa con tareas numéricas y geométricas, en las cuales los estudiantes deban hacer generalizaciones y expresarlas de forma simbólica (fórmula).

Tareas de generalización	Numéricas	Asociadas a operaciones sobre un mismo número.	Pueden tener o no n-ésimo término.
		Asociadas a operaciones entre varios números.	
		Dispuestas en configuraciones gráficas.	
	Gráficas	Con figuras que no realizan movimientos, pero aumentan su tamaño.	
		Con figuras que realizan movimientos y aumentan su tamaño.	

Tabla 4. Tareas de generalización.

2.3.1. Etapas de la generalización

En torno al proceso de generalizar se han identificado momentos diferenciados para su desarrollo, con base en las acciones que realizan las personas frente a una situación de generalización. A continuación, se muestra un paralelo entre las

etapas de generalización que proponen Mason (1985), citado en Butto & Rojano (2004) y el Grupo Azarquiél (1993), citado en Sánchez, García, Mora (2009).

Mason (1985), citado en Butto & Rojano (2004)	Grupo Azarquiél (1993), citado en Sánchez, García, Mora (2009)
<u>Percibir un patrón:</u> Identificar reglas presentes en una secuencia.	<u>Ver la regularidad, las relaciones y diferencias:</u> Observar características particulares de cada situación o las que son comunes a todo.
<u>Expresar un patrón:</u> Decir o expresar de forma verbal el patrón.	<u>Describir de manera verbal lo que ocurre:</u> Exponer en lenguaje natural permite encontrar la forma correcta de comunicar lo que se observa, buscando así exaltar y puntualizar la relación que se encuentra.
<u>Registrar un patrón:</u> Escribir una fórmula acorde a la situación, utilizando si es necesario dibujos o palabras que permitan la identificación de las variables claves.	<u>Escribir de manera concisa lo que sucede:</u> Expresar de forma escrita, lo comunicado en la etapa anterior, sin que sea necesario utilizar una escritura simbólica es decir un lenguaje matemático.
<u>Probar la validez de las fórmulas:</u> Probar de diferentes formas la veracidad de la fórmula planteada.	

Tabla 5. Paralelo etapas de generalización.

Si bien las dos perspectivas están estrechamente ligadas, para efectos de este trabajo, se ampliará la propuesta de Mason (1985), en tanto desde las características de los talentos matemáticos se reconoce que una actividad fundamental está relacionada con la verificación y por qué no, contradicción de hipótesis, conjeturas y/o fórmulas planteadas. Adicionalmente, de acuerdo al contexto de aplicación (estudiantes de grados décimo y undécimo), consideramos fundamental que los patrones sean expresados por medio de una simbolización

algebraica, por ser una forma que permite evidenciar la interiorización del concepto de variable y la comprensión y manejo adecuado del lenguaje algebraico.

2.3.1.1. Percibir un patrón

La idea central en esta etapa es identificar en situaciones numéricas (sucesión de números) y geométricas (sucesión de figuras), patrones, regularidades, semejanzas y diferencias entre los términos, rasgos fundamentales de los términos de la sucesión y de los que no forman parte de la misma, así como encontrar relaciones desde la visualización de un gráfico, de una secuencia de números, tal vez de forma intuitiva. En esta etapa no necesariamente se es capaz de expresar el patrón, sólo de verlo.

Si bien es cierto que la visualización permite encontrar relaciones entre los términos de una sucesión geométrica o numérica, de acuerdo con Arcavi (2003) citado en Chalé (2015), permite identificar lo que no se ve a simple vista en gráficos o imágenes y según Bishop (1989), citado en Gutiérrez (1991) se da por medio de los siguientes dos procesos:

Procesamiento visual (VP), en el cual hay una transformación de información abstracta a imágenes visuales (imagen 1), o de imágenes ya formadas en otras (imagen 2).

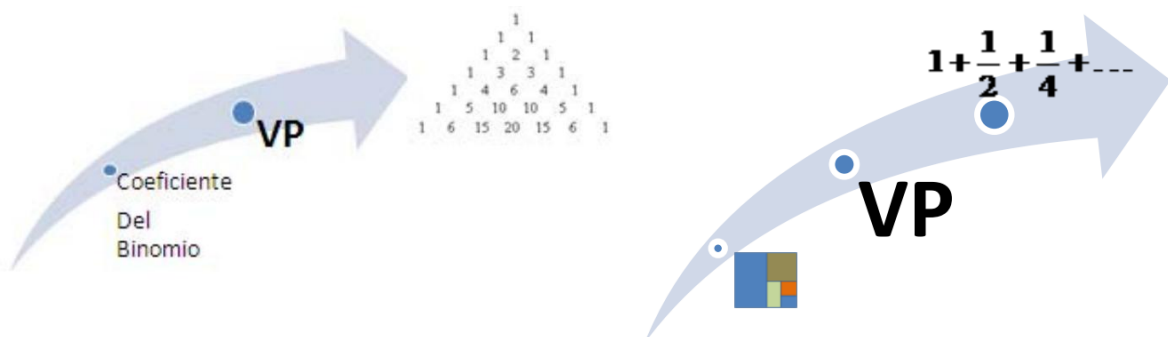


Imagen 1. Procesamiento visual de información en imágenes. Jiménez y Rojas (2010, p. 68).

Imagen 2. Procesamiento visual de imagen en imagen. Jiménez y Rojas (2010, p. 68).

Interpretación de información figurativa (IFI), proceso en el cual hay una comprensión e interpretación de representaciones visuales con el objetivo de extraer la información que contienen.

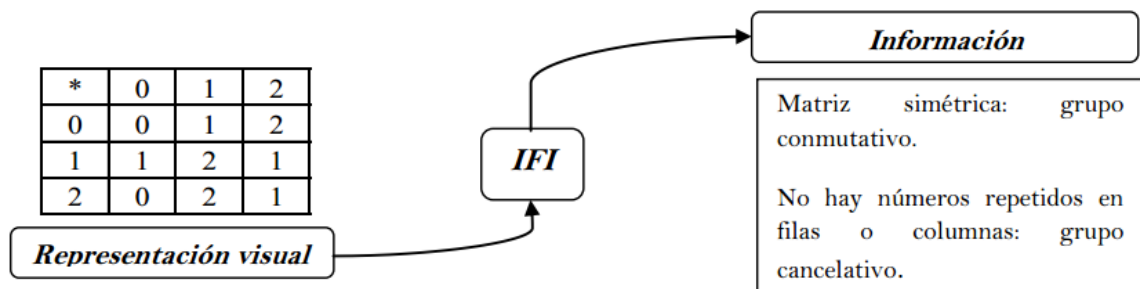


Imagen 3. Ejemplo de Interpretación de Información Figurativa. Jiménez y Rojas (2010, p. 69).

Para que el estudiante pueda percibir el patrón, se pueden proponer preguntas o tareas como las siguientes, de acuerdo con el tipo de secuencia (Mora, 2012):

- Dibuje la figura que sigue (cuál es el número que sigue).
- Cómo cambia una figura respecto a la anterior (o cómo se obtiene un número respecto al anterior).
- Cuento de manera diferente.
- ¿Cuántas fichas se necesitan para formar la figura 12, la figura 57? (o qué color irá en la posición 14, para el caso de una secuencia como rojo-amarillo-rojo-amarillo-...).

Preguntas que pueden generar que el individuo se cuestione sobre cuál es la regla que permite conocer el siguiente (patrón).

Es claro en esta fase, que es necesaria la identificación de patrones en secuencias, ya sean numéricas o geométricas, para lo cual sin lugar a duda se requiere del proceso de visualización. En este sentido, para efectos de este trabajo, se considera pertinente trabajar tareas que den cabida al procesamiento visual de imagen en imagen y a la interpretación de información figurativa, ya que la capacidad de visualización es una de las características de un talento matemático planteadas en el pensamiento convergente y también porque se diseñarán o adaptarán tareas numéricas y geométricas, en las cuales los estudiantes deban hacer generalizaciones y expresarlas por medio de lenguaje simbólico (fórmula), con base en la identificación de información o características de la representación visual presentada.

2.3.1.2. Expresar un patrón

Luego de percibir el patrón o la regularidad, es necesario comunicarlo de forma verbal, siendo fundamental el papel del docente como un mediador y orientador que debe impulsar al estudiante a expresar con sus palabras lo que vio en la etapa anterior, mediante preguntas que lleven a la reflexión de sus propias ideas.

El proceso de comunicación (en este caso verbal) es esencial debido a que permite identificar de forma más precisa el procedimiento que el estudiante está empleando para el desarrollo de la regularidad; además, la comunicación se reconoce como uno de los procesos generales de la actividad matemática (MEN, 2006) que permite aprender matemáticas y resolver situaciones. En el marco de este proceso es necesario expresar ideas de forma oral (hablando), explicar la forma de razonamiento, así como plantear y presentar argumentos, lo que ayuda a hacer una conexión y un tránsito entre las nociones informales e intuitivas y el lenguaje simbólico de las matemáticas, que hace parte de la siguiente etapa del proceso de generalización.

Para que el estudiante pueda llevar a cabo este proceso de comunicación Mora (2012) afirma que se pueden hacer preguntas, de acuerdo con el tipo de secuencia, como las siguientes:

- Describa como cambia una figura respecto a la anterior o a la que sigue.
- Indiqué qué es lo que observa, qué es lo que cambia, qué es lo que se mantiene igual.

Una buena estrategia en esta etapa es el trabajo en parejas, de tal manera que haya una comunicación mutua de lo que cada uno vio y se hagan preguntas entre sí; otra es que lleven su idea para la casa y que deban explicar lo que observaron, a alguien que no ha trabajado el problema, esto ayuda a que el estudiante clarifique sus ideas.

Para efectos de este trabajo es necesario evidenciar la comunicación verbal que el estudiante mantiene, tanto con el docente como con sus demás compañeros; para esto se recolectará información por medio tareas escritas y por medio de videos o audios.

2.3.1.3. Registrar un patrón

La actividad de registrar el patrón, puede apoyarse en dibujos, palabras, tablas, símbolos numéricos o algebraicos, de forma escrita, para que posteriormente se puedan describir las variables que son claves en el problema.

Dado que hay relevancia en la simbolización algebraica cabe resaltar que, de acuerdo con el Grupo Azarquiel (1993), este es un proceso que tiene como fin el uso de símbolos algebraicos para expresar situaciones en las que es necesario escribir reglas o fórmulas y realizar demostraciones.

En la imagen 4, se puede observar un ejemplo en el que un estudiante pasa por diferentes formas de escribir una regla (símbolos numéricos, palabras), hasta que finalmente llega a la simbolización algebraica, que además le permite verificar su validez, lo que corresponde a la siguiente y última etapa del proceso de generalización.

Suma tres números enteros consecutivos, por ejemplo, $4 + 5 + 6$, ¿qué observas? Hazlo en diferentes casos y comprueba si ocurre lo mismo. ¿La regla encontrada es cierta cualquiera que sean los números elegidos?
Rocio, 14 años.

$$6 + 7 + 8 = 21$$

$$1 + 2 + 3 = 6$$

El resultado que sale siempre es el 2º número multiplicado por 3:

$$6 + \textcircled{7} + 8 = 21 \rightarrow 7 \cdot 3 = 21$$

$$1 + \textcircled{2} + 3 = 6 \rightarrow 2 \cdot 3 = 6$$

$$a + b + c = b \cdot 3$$

$$a + (a+1) + (a+2) = (a+1) \cdot 3$$

$$a + a+1 + a + 2 = 3a + 3$$

$$3a + 3 = 3a + 3$$

Se cumple.

Imagen 4. Ejemplo de formas para registrar un patrón. Grupo Azarquiel (1993, p. 59).

De acuerdo con Mora (2012), algunas tareas o preguntas en esta etapa podrían ser:

- ¿Qué es éste? (es usual que los estudiantes usen la expresión “éste” para ocultar la falta de claridad, la incertidumbre o la ignorancia (Mason et al., 1989)).

- Escriba lo que vio.
- Exprese por medio de dibujos, símbolos, etc. sus ideas.

Para este trabajo, en las tareas propuestas para la identificación de talentos, el estudiante deberá desarrollar los ítems propuestos de forma ordenada, ítems planteados estratégicamente para lograr tomar evidencia de que el estudiante registre de forma escrita, con dibujos, palabras, tablas, símbolos numéricos o algebraicos con el fin de que posteriormente se puedan describir las variables que son claves en el problema. Es importante resaltar que el registro debe ser propio, y que para este trabajo es fundamental llegar a la simbolización algebraica ya que se va a trabajar con estudiantes de grados superiores.

2.3.1.4. Probar la validez de las fórmulas

Una fórmula tiene validez, si se ha hecho su comprobación por medio de su aplicación en otros casos donde se pueda validar por otros medios, como por ejemplo la realización de cálculos, dibujos, conteos o realizando la demostración formal.

Es fundamental que la regla o patrón sea correcto, por lo que es preciso que el estudiante tenga en mente que los ejemplos particulares son la base para determinar la regla general y, para realizar su comprobación, es necesario desglosar el caso general por medio de ejemplos particulares que permitan vislumbrar que la regla funciona para muchos ejemplos y, en consecuencia, se cumpla para todos.

Si bien, el objetivo es utilizar procesos de validación, de acuerdo con Cañadas (2007) la verificación formal (demostración por inducción, contradicción, etc.) ha sido el único proceso de validación admitido; sin embargo, De Villiers (1993) y Hanna (2000) (citados en Cañadas, 2007), proponen la verificación no formal,

vista como la revisión de la conjetura por medio de varios casos particulares, es otro proceso de validación.

Teniendo en cuenta que investigaciones realizadas por Baker (1996); Battista y Clements (1995); Fischbein (1982); Martin y Harel (1989); Martínez (2000); Radford (1994); Ron y Dreyfus (2004) (citados en Cañadas 2007), sobre el proceso de validación formal, arrojan que existen dificultades en la realización de dichos procesos por parte de los estudiantes de niveles medios, para este trabajo bastará con la realización de una verificación no formal.

Algunas preguntas, que de acuerdo con Mora (2012), el docente puede plantear en esta etapa son:

- ¿Cómo está seguro de que la regla siempre funciona?
- ¿Por qué se presenta esta situación?

Para este trabajo, teniendo en cuenta la formación de las estudiantes (educación media), se espera que ellas determinen la validez de las fórmulas probando en algunos casos particulares; sin embargo, no se descarta la posibilidad de que intenten una demostración formal.

Por otro lado, para cada una de las cuatro etapas antes descritas, García (2011) propone una clasificación en diferentes niveles de desempeño, basada en un estudio de caso con estudiantes de 13 años, en el cual se analizan las estrategias y los tipos de representaciones (verbal, simbólico y mixto) empleados en la solución de cada situación de generalización. A partir de esto, García plantea las etapas o fases del proceso de generalización, los niveles identificados por fase y las categorías de análisis como se observa en la siguiente tabla:

GIAS DE NIVEL	VER	DECIR	ESCRIBIR	VERIFICAR
I	(OI) Observar la imagen como un todo.	(DIT) Describir características de la imagen como un todo.	Escribir las propiedades comunes entre los casos	
			(EPCP) Escribir con palabras las características de la imagen	
			(EPCM) Escribir con palabras y símbolos las características de la imagen.	
			(EPCS) Escribir con símbolos las características de la imagen.	
II	(AI) Analizar la imagen (Descomponer el todo en sus partes)	(DPC) Describir las propiedades comunes entre los casos particulares.	Escribir características de las partes en un todo.	
			(ECPP) Escribir con palabras las propiedades comunes entre los casos particulares	
			(ECPM) Escribir con palabras y símbolos las propiedades comunes entre los casos particulares.	
			(ECPS) Escribir con símbolos las propiedades comunes entre los casos particulares.	
III	Establecer relaciones entre las partes de la imagen	(DRP) Describir la forma en que se relacionan las partes	Escribir la forma en que se relacionan las partes.	
	(ERN) Establecer relaciones necesarias.		(EFRP) Escribir con palabras la forma en que se relacionan las partes.	
	(ERS) Establecer relaciones suficientes		(EFRM) Escribir con palabras y símbolos la forma en que se relacionan las partes.	
			(EFRS) Escribir con símbolos la forma en que se relacionan las partes.	
IV	(CRP) Conjeturar acerca de las relaciones entre las partes de la	(DCR) Describir la conjetura observada de	Escribir la conjetura observada de las relaciones entre las partes.	(VCTC) Verifica su conjetura construyendo un término cercano
			(ECOP) Escribir con palabras la conjetura observada de las	(VCC) Verifica su conjetura

ESTRATEGIAS DE NIVEL	FASES EN LA CONTRUCCIÓN DE UNA GENERALIZACIÓN			
	VER	DECIR	ESCRIBIR	VERIFICAR
	imagen.	relaciones entre las partes	relaciones entre las partes.	haciendo uso de la calculadora.
			(ECOM) Escribir con palabras y símbolos la conjetura observada de las relaciones entre las partes.	(VCM) Verifica su conjetura manualmente.
			(ECOS) Escribir con símbolos la conjetura observada de las relaciones entre las partes.	(NVC) No verifica su conjetura.

Tabla 6. Fases en la construcción de una generalización, niveles identificados por fase y categorías de Análisis. (García, 2011, p. 159).

Las categorías de análisis propuestas, son el recurso utilizado por García para analizar las rutas que los estudiantes pueden seguir al realizar tareas específicas de generalización. Puede pensarse que al observar el nivel de desempeño IV, este correspondería a un estudiante con el más alto nivel de desempeño, sin embargo, hay otras rutas que podrían ser superiores en comparación con las seguidas por los demás miembros del grupo de estudiantes, por lo que consideramos necesario definir más adelante, unos niveles que estén complementados por varias de las estrategias mencionadas en la tabla anterior, que nos permitan dar una puntuación en cada fase, con el fin de identificar aquellos estudiantes que tengan resultados sobresalientes y por encima del promedio de sus pares.

CAPÍTULO III. METODOLOGÍA

Este trabajo corresponde a un conjunto de tareas que involucran el proceso de generalizar, para identificar estudiantes talentosos en matemáticas. Para ello, por medio de la tarea 1, se identifican los estudiantes que están por encima del promedio de sus pares en cuanto a su desempeño en tareas de generalización, y luego, por medio de las demás tareas (2 a 5), se analizan y observan en ellos, de manera detallada, que cumplan con las características que debe contar un talento matemático según el *Tabla 3*.

3.1. CONTEXTO

La aplicación de las tareas se realizó en el Colegio Nuevo Gimnasio de Bogotá, institución educativa de calendario A, jornada única, género femenino y perteneciente al sector privado, reconocido por tener como filosofía la búsqueda de la excelencia académica y la formación integral. Esta institución educativa pretende brindar una oportunidad de vida escolar a través de un currículo que respeta la individualidad de sus estudiantes y permite la inclusión en el aula de estudiantes que cuentan con algún tipo de discapacidad que afecta su desarrollo cognitivo.

La formación de las estudiantes gira en torno al marco de la creencia católica y sus principios (lealtad, deber y alegría) y valores (honestidad, la generosidad, el respeto, la perseverancia y la responsabilidad), según se establece en su Proyecto Educativo Institucional. A nivel organizativo, la institución abarca cuatro niveles: Nivel I (kínder - 2°): Aulas Montessori - Proyecto de aula, Nivel II (3° - 5°): Aprendizaje experiencial, Nivel III (6° - 8°): Aprendizaje conceptual, Nivel IV (9° - 11°): Aprendizaje problémico, y complementa la formación de sus estudiantes con seminarios electivos cuyo objetivo es profundizar en conocimientos de pre

ingeniería (cálculo diferencial, integral y multivariado, álgebra lineal y física mecánica y cuántica), ciencia política y biotecnología, a partir del grado 9º.

En cuanto al currículo del área de matemáticas, el PEI establece que “está basado en procesos y no en contenidos”. Está conformado por cuatro ejes (conteo, medición, aleatoriedad y variación), cada uno con cuatro metas (lenguaje simbólico, operaciones básicas, representaciones numéricas, trabajo con incógnitas (...) patrones y secuencias, jerarquías, relaciones, resolución de problemas), siendo la meta de patrones y secuencias la que está directamente relacionada con el proceso de generalización, aunque en la propuesta curricular esta meta está asociada directamente al estudio de las funciones y sus relaciones en diversos contextos. En este sentido, el proceso de generalización pareciera que sí está contemplando dentro del currículo, pero no es así, dado que como se mencionó antes, al revisar la propuesta curricular, se plantea el estudio de las funciones y sus características; sin embargo, el colegio brinda el espacio para hacer este tipo de actividades debido al apoyo que da a sus docentes en la investigación y porque es un tema poco común en el ámbito escolar que resulta enriquecedor para cada una de las educandas.

Para la aplicación de las tareas y posterior identificación de talentos en matemáticas, se trabajó con un grupo de 38 adolescentes, conformado por las estudiantes de grado décimo y undécimo, cuyas edades oscilan entre los 14 y 18 años. Dentro del grupo, hay 13 estudiantes que se encuentran cursando el seminario de profundización en pre ingeniería, porque tienen buen rendimiento en matemáticas y escogieron voluntariamente dicho seminario.

3.2. SELECCIÓN DE TAREAS

Para la selección de las tareas, se tuvo en cuenta el tipo de tareas mencionadas en la tabla 4 (particularmente tareas de generalización numéricas), que son las

que dan cabida al desarrollo del proceso de visualización (particularmente al procesamiento visual de imagen en imagen y a la interpretación de información figurativa), siendo éste un proceso que está relacionado con varias de las características de talento matemático, y es el primer paso para realizar generalización. Además, se tuvieron en cuenta dos aspectos fundamentales: primero, que las estudiantes que participaron en el estudio no se han enfrentado a tareas de generalización, lo que lleva a que las tareas propuestas no tuvieran altos grados de complejidad y dificultad, y segundo, los tiempos de desarrollo, que corresponden con 1 hora y media de clase, cada dos días, tiempo en el que se espera que las estudiantes trabajen de forma individual, y ocasionalmente en parejas, y terminen por completo la tarea propuesta y que se pueda socializar los resultados obtenidos por algunas de ellas, esto con el fin de poder verificar algunas de las características de talento matemático.

A continuación, se presenta cada una de las tareas, las cuales fueron adaptadas de Rodríguez y Pineda (2009); Gómez (2013); García (1999), y el objetivo principal de cada una de ellas.

Tarea 1. Tiene como objetivo realizar una calificación cuantitativa que permita establecer la nota promedio, y seleccionar las adolescentes que estén por encima de dicho promedio, para que continúen participando en las siguientes sesiones.

Tarea 1 : Rectángulos

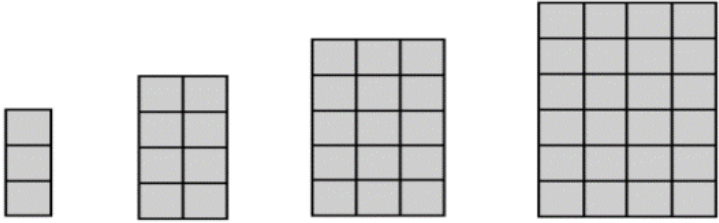


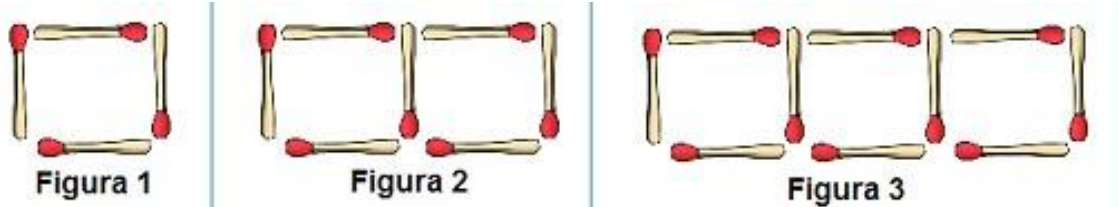
Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3 Fig. 4

Observar la secuencia y responder cada pregunta.

1. Dibujar la figura 5 y la figura 6
2. ¿Cuántos cuadros habrá en la figura 10?, y ¿cuántos en la figura 20?
3. Escribir un mensaje a un estudiante de otra clase, con todos los detalles, en el que se indique la manera de averiguar el número de cuadros de cualquier figura.
4. Escribir una fórmula algebraica para el número de cuadros de la figura n .
5. Escribir por qué la fórmula anterior es correcta.

Tarea 2 a 5: Tienen como objetivo la identificación de algunas características específicas de talento matemático que tienen las estudiantes que estén por encima del promedio de sus pares, de acuerdo con los resultados de la Tarea 1.

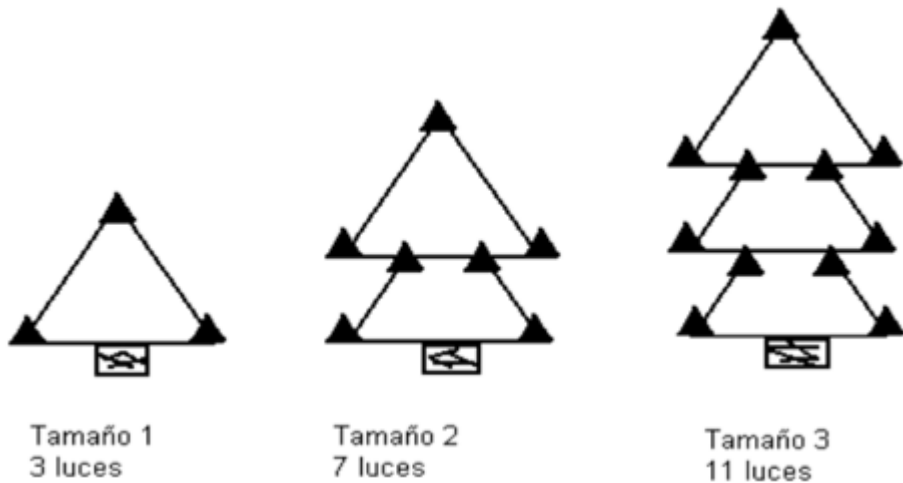
Tarea 2 : Fósforos



Observar la secuencia y responder cada pregunta.

1. Escribir una fórmula algebraica para determinar cuántos fósforos se necesitan para armar n "cuadrados".
2. Explicar por qué la fórmula anterior es correcta.
3. Escribir, de la forma mas detallada posible, el procedimiento que utilizó para encontrar la fórmula.

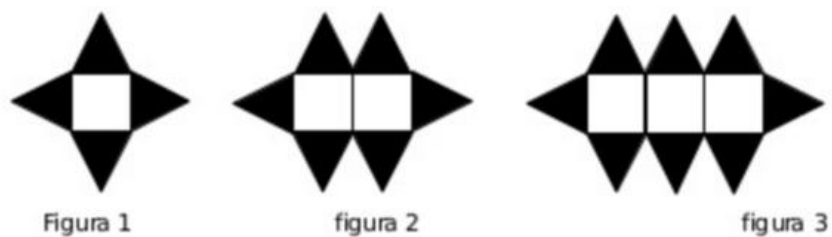
Tarea 3 : Árbol de Navidad



Observar la secuencia y responder cada pregunta.

1. ¿Cuántas luces necesitará el árbol de tamaño n ?
2. Escribir por qué la fórmula anterior es correcta.
3. Describir, de la forma más detallada posible, el procedimiento que utilizó para encontrar la fórmula.

Tarea 4: Baldosas triangulares



Observar la secuencia y responder cada pregunta.

1. Escribir una fórmula algebraica para obtener el número de triángulos que rodean n número de baldosas blancas.
2. Explicar por qué la fórmula es correcta.
3. Explicar, de la forma más detallada posible, el procedimiento o regla que

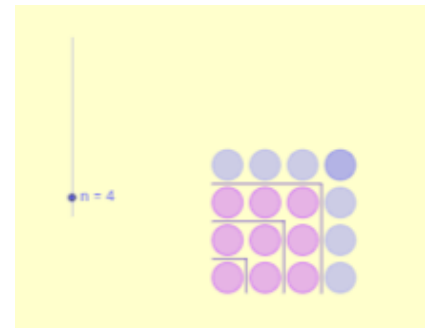
utilizó para hallar la fórmula.

Tarea 5: Particularmente para el planteamiento de esta tarea, es necesario generar en las estudiantes una estructura de solución con la suma de números impares, esto con el fin de ver si las estudiantes tienen unas características específicas, que, hasta el momento, con las actividades anteriores, no se podría evidenciar. De esta forma es necesario plantear dos tareas a desarrollar en la misma sesión de clase.

Tarea 5.1: Secuencia

Parte I

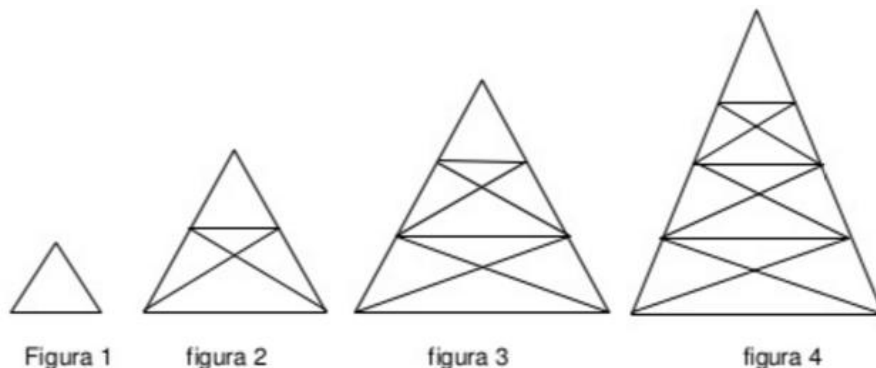
Haciendo uso del Applet de GeoGebra dispuesta en <https://www.geogebra.org/m/QgWsRBKe>, responder las preguntas:



1. ¿Cómo se puede obtener la cantidad de círculos de la figura 2 a partir de la figura 1?
2. ¿Cómo se puede obtener la cantidad de círculos de la figura 3 a partir de las figuras anteriores?
3. Formular una hipótesis o conjetura sobre lo observado.
4. Escribir una expresión algebraica que relacione la cantidad de círculos de la figura n y la cantidad de círculos de las figuras anteriores.

Tarea 5.2: Torre de triángulos

Parte II



Observar las secuencias de triángulos y responder cada pregunta.

1. ¿Cuántos triángulos hay en la figura n ?
2. Escribir por qué la fórmula anterior es correcta.
3. Escribir, de la forma más detallada posible, el procedimiento que utilizó para encontrar la fórmula.

Finalmente, con el objetivo de inspeccionar sobre las actitudes positivas de las estudiantes hacia las matemáticas, se propone la siguiente encuesta:

Nombre: _____

Curso: _____

Responder las siguientes preguntas de acuerdo con las tareas desarrolladas y su experiencia con las matemáticas.	SI	NO
¿Le ha gustado resolver tareas como las anteriores?		
En sus tiempos libres, ¿soluciona tareas relacionadas con las matemáticas (sudokus, sopas de números, juegos de lógica matemática, etc.)?		

¿Matemáticas es su materia favorita?		
¿Desea estudiar algo afín a las matemáticas?		

3.3. CATEGORÍAS DE ANÁLISIS

A continuación, se presentan los instrumentos de análisis que se utilizaron para cada una de las tareas propuestas anteriormente, teniendo en cuenta los momentos de selección (identificación de estudiantes por encima del promedio de sus pares), de caracterización (identificación de las características de talento matemático que tienen las estudiantes) y de análisis (criterios de determinación de talentos matemáticos).

3.3.1. Selección

La implementación inicia con la tarea 1, como ya se ha mencionado, tiene como objeto identificar las estudiantes que estén por encima del promedio de sus pares, en relación con su nivel de desempeño en las cuatro etapas del proceso de generalización; esto atendiendo a la definición de talento matemático.

Para determinar el promedio de desempeño en la tarea 1, es necesario realizar una calificación cuantitativa, a partir de la identificación y valoración de cuatro niveles de desempeño en cada una de las etapas o fases del proceso de generalización (tabla 7). La puntuación se asigna por etapas, y está en el rango de 1 a 4, siendo 1 el nivel más bajo y 4 el nivel superior, luego se suman los cuatro puntajes, obteniendo así una nota final para cada una de las estudiantes. Estas notas finales se promedian y de esta forma se seleccionan las niñas que están por encima de dicho promedio.

Etapas proceso de generalización	Niveles de desempeño			
Percibir un patrón	V1: Observa las características de cada término o figura de la secuencia.	V2: Encuentra relaciones entre los términos de la secuencia.	V3: Establece relaciones relevantes y necesarias entre los términos.	V4: Determina regularidades que permitan hallar cualquier término de la secuencia.
Expresar un patrón	C1: Expresa de forma verbal las características de cada término de la secuencia.	C2: Expresa de forma verbal relaciones existentes entre los términos.	C4: Expresa de forma verbal regularidades relevantes entre los términos de la sucesión, que permitan hallar términos de la secuencia.	C5: Expresa de forma verbal cómo hallar cualquier término de la secuencia.
Registrar un patrón	S1: De forma escrita representa por medio de palabras, tablas, símbolos numéricos o algebraicos características de los términos de la secuencia.	S2: De forma escrita representa por medio de palabras, tablas, símbolos numéricos o algebraicos relaciones entre los términos de la secuencia.	S3: Escribe una fórmula por recurrencia que permita hallar algunos términos de la secuencia.	S4: Escribe una fórmula para determinar el <i>n-ésimo</i> término de la secuencia.
Probar la validez de las fórmulas	D1: justificar por medio de palabras la validez de la fórmula.	D2: Comprobar la fórmula para un solo término.	D3: Verificar la fórmula para varios términos.	D4: Realizar una demostración formal (Inducción)

Etapas proceso de generalización	Niveles de desempeño			
				matemática, contradicción, etc.).

Tabla 7. Propuesta de niveles de desempeño del proceso de generalización.

Para la construcción de esta tabla se tomaron en cuenta algunas ideas de los niveles de desempeño del proceso de generalización, propuestos por García (2011) en su tesis de maestría, no se toma dicha propuesta en razón a que su objetivo era la identificación de rutas que siguen los estudiantes en el proceso de generalizar, basadas en diferentes estrategias por cada una de las etapas, estrategias que, en algunos casos, no se pueden jerarquizar⁴ o decir que una es mejor que otra, lo que no permitiría hacer una valoración cuantitativa.

Ahora, se describe la forma de trabajo en la que se desarrolla la sesión 1 y con base en la propuesta anterior, las categorías de análisis para la tarea 1.

Sesión 1:

Objetivos de la aplicación

- Clasificar las respuestas en los niveles de desempeño propuesto para las etapas del proceso de generalización.
- Realizar una calificación cuantitativa que permita establecer la nota promedio, y seleccionar las adolescentes que estén por encima de dicho promedio, para que continúen participando en las siguientes sesiones.

Descripción de la tarea

⁴ Por ejemplo, en la etapa de verificación, las estrategias: Verifica su conjetura haciendo uso de la calculadora y Verifica su conjetura manualmente.

Trabajo individual de cada una de las estudiantes, con la indicación de escribir en la hoja entregada todo lo que ellas piensen y utilicen para el desarrollo de la tarea.

Instrumentos para la recolección y análisis de información

- Hojas de trabajo (anexo 1) diligenciadas por las estudiantes.

Categorías de análisis

De acuerdo con los niveles de desempeño planteados en la tabla 7, se clasifican y puntúan las posibles respuestas de las estudiantes como sigue:

Etapas proceso de generalización	Evidencias de las fases del proceso de generalización			
Percibir un patrón	V1: Determina la cantidad de cuadros de cada figura, pero no establece relaciones con la figura siguiente.	V2: Identificar el aumento del largo y el ancho, logrando identificar como formar la siguiente figura, pero no puede identificar el número de cuadrados de una figura lejana.	V3: Establece una relación entre el ancho y el largo de la figura, y utiliza el dibujo de las figuras u operaciones aditivas para poder obtener un caso particular.	V4: Relaciona el largo y el ancho con la posición de cada figura, para poder establecer la cantidad de cuadros de un caso particular, sin necesidad de hacer el dibujo.

Etapas proceso de generalización	Evidencias de las fases del proceso de generalización			
Expresar un patrón	C1: Describe la forma de hallar la cantidad de cuadrados de cada figura por separado.	C2: Describe el aumento del ancho y el largo de cada figura con respecto a la siguiente.	C3: Describe que hay una diferencia de dos, entre el ancho y el largo de la figura, o entre la cantidad de cuadros de dos figuras consecutivas.	C4: Describe que, para hallar los cuadrados de cualquier figura, se multiplica la posición de la figura por la misma aumentada en dos.
Registrar un patrón	S1: Escribe las sumas o multiplicaciones correspondientes para hallar la cantidad de cuadros de cada figura.	S2: Escribe por medio de palabras o tablas la relación aumento del ancho y el largo de cada figura con respecto a la siguiente, o la cantidad de cuadrados que van aumentando.	S3: Escribe con palabras o por medio de tablas, la relación entre el ancho y el alto, o la cantidad de cuadrados, y la posición de la figura, o establece fórmulas por recurrencia.	S4: Escribe la fórmula correcta que representa la cantidad de cuadros de la n -ésima figura.
Probar la validez de las fórmulas	D1: Expresa de forma escrita, la obtención de la fórmula.	D2: Verifica la fórmula para una de las primeras figuras.	D3: Verifica la fórmula para varias figuras.	D4: Intenta realizar una demostración formal que verifique la fórmula planteada.

Tabla 8. Evidencias de las fases del proceso de generalización.

3.3.2. Caracterización

Este momento consiste en la aplicación de las tareas 2 a 5 con el grupo de estudiantes que están por encima del promedio de sus pares, con el fin identificar cuáles son las características asociadas a talento matemático que posee cada una de las estudiantes. Para hacer dicha identificación se analizan las respuestas de las estudiantes, con el fin de verificar si se clasifican en las siguientes acciones:

Pensamiento	Características ⁵	Acciones
Divergente	Solución de problemas de aplicación de forma rápida y fluida (PDRF).	Determinar de forma inmediata la regularidad de los términos y expresarla de forma algebraica.
	Originalidad en las ideas que sustentan los procesos matemáticos (PDIO).	Desarrollar soluciones de forma diferente a la de sus compañeros.
	Elaboración y planteamiento de estrategias de trabajo (PDEE).	Definir antes de abordar el problema, estrategias de solución.
	Flexibilidad en la interpretación de problemas y planteamiento de estrategias de solución (PDFIE).	Analizar y estudiar otros tipos de soluciones correctas.
Convergente	Buscan soluciones simples y directas (PCSD).	Observar elementos relevantes de forma rápida y empleando caminos cortos.
	Capacidad de visualización (PCV).	Identificar características que se mantienen o cambian en los términos de la secuencia.
	Capacidad de generalización (PCG).	Expresar algebraicamente regularidades de los términos de la secuencia y realizar la verificación.
	Habilidad para transferir ideas (PCTI).	Utilizar estrategias previas de solución en una nueva actividad.

⁵ Las características están identificadas con siglas en las cuales las dos primeras letras están asociadas al tipo de pensamiento divergente o convergente respectivamente "PD o PC" y a las actitudes positivas "AP", y el resto de la sigla son algunas de las iniciales de la característica.

Pensamiento	Características ⁵	Acciones
	Capacidad para organizar la información, relacionarla y usarla (PCOI) .	Usar tablas para relacionar la posición de la figura y las características de la misma, y la emplea para llegar a la fórmula.
	Reconocimiento de las estructuras generales de los problemas y sus soluciones (PCREG) .	Identificar la estructura de un problema ya trabajado.
	Habilidad para la utilización de los procesos mentales en el razonamiento matemático (PCPM) .	Recurrir a otros procesos utilizados en otras situaciones para obtener la solución.
	Análisis crítico (PCAC) .	Es capaz de validar diferentes respuestas para la misma situación.
	Capacidad para justificar soluciones obtenidas en un problema (PCJ) .	Argumentar los procesos utilizados para llegar a la fórmula.
	Habilidad para comunicar las ideas matemáticas que usa para resolver problemas (PCCI) .	Expresar de forma clara y fluida los patrones y fórmulas relacionadas a la secuencia.
Actitudes positivas hacia las matemáticas	Gusto por resolver acertijos matemáticos (sudokus, sopas de números, juegos de lógica matemática, animaplanos, etc.) (APGA) .	Intentar trabajar las tareas y pedir más ejercicios del mismo tipo.
	Gusto por resolver ejercicios que impliquen hacer numerosos cálculos (APGC) .	En ejercicios largos, insistir en llegar a la solución.
	Consideración de las matemáticas como su materia favorita. Deseo por estudiar algo afín a las matemáticas (APMFE) .	Desea resolver problemas matemáticos y estudiar algo afín.
	Dedicación sobre las tareas relacionadas con las matemáticas (desarrolla las tareas matemáticas en su tiempo libre) (APATL) .	Mostrar tareas extra clase sobre generalización.

Pensamiento	Características ⁵	Acciones
	Persistencia y tenacidad, por las tareas matemáticas, a pesar de las frustraciones (APPT) .	Al enfrentarse a ejercicios complejos, insistir en llegar a la solución.

Tabla 9. Acciones para evidenciar las características de un talento matemático.

Ahora, se describe la forma de trabajo en la que se desarrollan las sesiones 2 a 5 y con base en la propuesta anterior, las categorías de análisis para cada una de las tareas a desarrollar en las sesiones.

Sesión 2:

Objetivos de la aplicación

- Observar el trabajo de cada estudiante y determinar el tiempo que emplean en el desarrollo de la tarea.
- Identificar, por medio de las respuestas escritas en el formato entregado y por medio de la grabación realizada en la socialización, cuáles de las características de talento descritas en la tabla 9, tienen las estudiantes.

Descripción de la tarea

Trabajo individual de cada una de las estudiantes que haya obtenido una nota superior a la del promedio de sus pares en el desarrollo de la tarea 1, con la indicación de escribir en la hoja entregada todo lo que ellas piensen y utilicen para el desarrollo de misma; se espera reconocer, en particular, ¿cuál fue la primera acción realizada por la estudiante al recibir la tarea? Finalizada la tarea de manera individual por parte de todas las estudiantes, se realiza la socialización de las respuestas y se espera que las estudiantes sean capaces de comunicar sus ideas

de solución y puedan manifestar su punto de vista sobre la validez o no de las mismas.

Instrumentos para la recolección y análisis de información

- Hojas de trabajo (anexo 2) diligenciadas por las estudiantes.
- Entrevistas (no estructuradas previamente) basadas en preguntas con base en las producciones que se observan de las estudiantes y las sucesivas respuestas que van dando a las preguntas formuladas.
- Videos sobre la socialización, la cual se va desarrollando de acuerdo a las participaciones de las estudiantes.

Categorías de análisis

A continuación, se mencionan las características que se espera evidenciar en las estudiantes, por medio de las acciones propuestas en la tabla 9.

- **PDRF:** Solución de problemas de aplicación de forma rápida y fluida.
- **PDIO:** Originalidad en las ideas que sustentan los procesos matemáticos.
- **PDEE:** Elaboración y planteamiento de estrategias de trabajo.
- **PDFIE:** Flexibilidad en la interpretación de problemas y planteamiento de estrategias de solución.
- **PCSD:** Buscan soluciones simples y directas.
- **PCV:** Capacidad de visualización.
- **PVG:** Capacidad de generalización.
- **PCOI:** Capacidad para organizar la información, relacionarla y usarla.
- **PCAC:** Análisis crítico.
- **PCJ:** Capacidad para justificar soluciones obtenidas en un problema.
- **PCCI:** Habilidad para comunicar las ideas matemáticas que usa para resolver problemas.

Sesión 3

Objetivos de la aplicación

- Observar el trabajo de cada estudiante y determinar el tiempo que emplean en el desarrollo de la tarea.
- Identificar, por medio de las respuestas escritas en el formato entregado y por medio de la grabación realizada en la socialización, cuáles de las características de talento descritas en la tabla 9, tienen las estudiantes.

Descripción de la tarea

Trabajo individual de cada una de las estudiantes que haya obtenido una nota superior a la del promedio de sus pares en el desarrollo de la tarea 1, con la indicación de escribir en la hoja entregada todo lo que ellas piensen y utilicen para el desarrollo de misma; se espera reconocer en particular ¿cuáles con los pasos para solucionar el problema? Finalizada la tarea de manera individual por parte de todas las estudiantes, se realiza la socialización de las respuestas y se espera que las estudiantes sean capaces de comunicar sus ideas de solución y puedan manifestar su punto de vista sobre la validez o no de las mismas.

Instrumentos para la recolección y análisis de información

- Hojas de trabajo (anexo 3) diligenciadas por las estudiantes.
- Entrevistas (no estructuradas previamente) basadas en preguntas con base en las producciones que se observan de las estudiantes y las sucesivas respuestas que van dando a las preguntas formuladas.
- Videos sobre la socialización, la cual se va desarrollando de acuerdo a las participaciones de las estudiantes.

Categorías de análisis

A continuación, se mencionan las características que se espera evidenciar en las estudiantes, por medio de las evidencias propuestas de la tabla 9:

- **PDRF:** Solución de problemas de aplicación de forma rápida y fluida.
- **PDIO:** Originalidad en las ideas que sustentan los procesos matemáticos.
- **PDEE:** Elaboración y planteamiento de estrategias de trabajo.
- **PDFIE:** Flexibilidad en la interpretación de problemas y planteamiento de estrategias de solución.
- **PCSD:** Buscan soluciones simples y directas.
- **PCV:** Capacidad de visualización.
- **PCG:** Capacidad de generalización.
- **PCOI:** Capacidad para organizar la información, relacionarla y usarla.
- **PCAC:** Análisis crítico.
- **PCJ:** Capacidad para justificar soluciones obtenidas en un problema.
- **PCCI:** Habilidad para comunicar las ideas matemáticas que usa para resolver problemas.

Sesión 4

Objetivos de la aplicación

- Observar el trabajo de las estudiantes y registrar el tiempo que emplean en el desarrollo de la tarea.
- Identificar, por medio de las respuestas escritas en el formato entregado y por medio de la grabación realizada, cuáles de las características de talento descritas en la tabla 9, tienen las estudiantes.

Descripción de la tarea

Trabajo en parejas de cada una de las estudiantes que haya obtenido una nota superior a la del promedio de sus pares en el desarrollo de la tarea 1, con la indicación de escribir en la hoja entregada todo lo que ellas piensen y utilicen para el desarrollo de misma. Antes de que las estudiantes inicien con el desarrollo de la tarea, se pide realizar una grabación de audio en cada una de las parejas, que dé cuenta de la interacción que ellas realizan para llegar a la respuesta del ejercicio.

De manera complementaria y con el fin de determinar algunas de las características asociadas a actitudes positivas, se hace la siguiente encuesta:

Nombre: _____

Curso: _____

Responder las siguientes preguntas de acuerdo con las tareas desarrolladas y su experiencia con las matemáticas.	SI	NO
¿Le ha gustado resolver tareas como las anteriores?		
En sus tiempos libres, ¿soluciona tareas relacionadas con las matemáticas (sudokus, sopas de números, juegos de lógica matemática, etc.)?		
¿Matemáticas es su materia favorita?		
¿Desea estudiar algo afín a las matemáticas?		

Instrumentos para la recolección y análisis de información

- Hojas de trabajo (anexo 4) diligenciadas por las estudiantes.
- Grabaciones de audio, de cada pareja de trabajo.

Categorías de análisis

A continuación, se mencionan las características que se espera evidenciar en las estudiantes, por medio de las evidencias propuesta en la tabla 9:

- **PDFEI:** Flexibilidad en la interpretación de problemas y planteamientos de estrategias de solución.
- **PCSD:** Buscan soluciones simples y directas.
- **PCV:** Capacidad de visualización.
- **PCG:** Capacidad de generalización.
- **PCOI:** Capacidad para organizar la información, relacionarla y usarla.
- **PCPM:** Habilidad para la utilización de los procesos mentales en el razonamiento matemático.
- **PCAC:** Análisis crítico.
- **PCJ:** Capacidad para justificar soluciones obtenidas en un problema.
- **PCCI:** Habilidad para comunicar las ideas matemáticas que usa para resolver problemas.

Sesión 5

Parte 1

Objetivo de la aplicación

- Crear una estructura de solución para ejercicios que involucren la suma de números impares.

Descripción de la tarea

Trabajo en parejas, de cada una de las estudiantes que hayan obtenido una nota superior a la del promedio de sus pares en el desarrollo de la tarea 1, con la indicación de escribir todo lo que ellas piensen y utilicen para el desarrollo de misma; se espera que las estudiantes Identifiquen que la suma de números impares es un cuadrado perfecto, para que lo utilicen en la siguiente tarea. Finalizada la tarea por parte de cada pareja, se realiza la socialización de las respuestas y se espera que las estudiantes sean capaces de comunicar sus ideas de solución y llegar a que $\sum_{i=1}^n 2i - 1 = n^2$

Instrumentos para la recolección y análisis de información

- Hojas de trabajo (anexo 5) diligenciadas por las estudiantes.

Parte 2

Objetivos de la aplicación

- Observar el trabajo de cada estudiante y determinar el tiempo que emplean en el desarrollo de la tarea.
- Identificar por medio de las respuestas escritas en el formato entregado y por medio de la grabación realizada en la socialización, cuáles de las características de talento descritas en la tabla 9, tienen las estudiantes.

Descripción de la tarea

Trabajo individual de cada una de las estudiantes que haya obtenido una nota superior a la del promedio de sus pares en el desarrollo de la tarea 1, con la indicación de escribir en la hoja entregada todo lo que ellas piensen y utilicen para el desarrollo de la tarea. Durante el desarrollo de la tarea, se realizará la

verificación de que las estudiantes hayan hechos los conteos correctos y éste no vaya a ser un factor que impida llegar a la respuesta de la tarea.

Instrumentos para la recolección y análisis de información

- Hojas de trabajo (anexo 6) diligenciadas por las estudiantes.

Categorías de análisis

A continuación, se mencionan las características que se espera evidenciar en las estudiantes, por medio de las evidencias propuesta en la tabla 9:

- **PCV:** Capacidad de visualización.
- **PCG:** Capacidad de generalización.
- **PCTI:** Habilidad para transferir ideas.
- **PCOI:** Capacidad para organizar la información, relacionarla y usarla.
- **PCEG:** Reconocimiento de las estructuras generales de los problemas y sus soluciones.
- **APGC:** Gusto por resolver ejercicios que impliquen hacer numerosos cálculos.
- **APPT:** Persistencia y tenacidad, por las tareas matemáticas, a pesar de las frustraciones.

Finalmente, para hacer el análisis de las estudiantes que estén por encima del promedio de sus pares, y registrar las características evidenciadas en cada una de las tareas, se realiza la tabla 10, la cual tiene una columna para cada una de las tareas de caracterización, una columna para diligenciar la información de la encuesta que está relacionada con las actitudes positivas y una columna final, que tiene el objetivo de registrar si se evidenció o no la característica a lo largo del desarrollo de todas las tareas.

Pensamiento	Características	Tar2	Tar3	Tar4	Tar5	AP	TOTAL
Divergente	PDRF						
	PDIO						
	PDEE						
	PDFIE						
Convergente	PCSD						
	PCV						
	PCG						
	PCTI						
	PCOI						
	PCREG						
	PCPM						
	PCAC						
	PCJ						
	PCCI						
Actitudes positivas hacia las matemáticas	APGA						
	APGC						
	APMFE						
	APATL						
	APPT						

Tabla 10. Herramienta para resumir características evidencias de talento matemático.

Para diligenciar la tabla anterior, se hará coloreando de verde la casilla correspondiente a la característica evidenciada y a la tarea en que tuvo lugar, es importante tener en cuenta que la misma característica pudo haberse hecho visible en una o varias tareas; sin embargo, en la última columna aparecerá de color verde sin hacer discriminación de la cantidad de veces que se observe la misma característica, esto porque el objetivo es ver si las estudiantes cumplen con la característica y no estudiar cuántas veces hace evidencia de la misma, además de que no todas las tareas tienen el fin de identificar la misma característica.

Por ejemplo, si la una estudiante termina la tarea 2, de manera rápida y fluida, se coloreará de verde la casilla correspondiente a PDRF y Tar2, y al final en la

columna total también se coloreará de verde indicando que la estudiante tiene la característica PDRF. Adicionalmente, si la estudiante evidencia tener la capacidad de generalización en todas las tareas, se colorearan las cuatro casillas correspondientes y al final en la columna total también se coloreará de verde indicando que la estudiante tiene la característica PCG. Además, si de acuerdo con la encuesta realizada, la estudiante considera la matemática como su materia favorita y desea estudiar algo afín con las matemáticas, se coloreará de verde la casilla correspondiente a APMFE y AP, y al final en la columna total también se coloreará de verde indicando que la estudiante tiene la característica APMFE. En este sentido, se dirá que la niña cumple con tres (PDRF, PCG y APMFE) de las 19 características de talento matemático (ver tabla 11).

Pensamiento	Características	Tar2	Tar3	Tar4	Tar5	AP	TOTAL
Divergente	PDRF						
	PDIO						
	PDEE						
	PDFIE						
Convergente	PCSD						
	PCV						
	PCG						
	PCTI						
	PCOI						
	PCREG						
	PCPM						
	PCAC						
	PCJ						
	PCCI						
Actitudes positivas hacia las matemáticas	APGA						
	APGC						
	APMFE						
	APATL						
	APPT						

Tabla 11. Ejemplo de resumen de características.

3.3.3. Análisis

Se revisará de forma detallada cada una de las respuestas de las estudiantes a las diferentes tareas propuestas, de acuerdo con la propuesta de niveles de desempeño (tabla 7) y las acciones propuestas para evidenciar las características de un talento matemático (tabla 9), características que se registrarán en una tabla como la 10, esto para cada una de las estudiantes que estén por encima del promedio de sus pares, en relación con los resultados obtenidos de la tarea 1.

Este análisis y clasificación de respuestas, es lo que permite identificar las estudiantes que están por encima del promedio de sus pares y que además cumplan con más del 80% las características de talento matemático, siendo éstas las más opcionadas a que se denominen como tal.

CAPÍTULO IV. ANÁLISIS DE LA APLICACIÓN

A continuación, el análisis de la información obtenida en el desarrollo de cada una de las cinco tareas implementadas, basados en las respuestas de las estudiantes (cuyos nombres han sido cambiados por la nominación general de estudiante) a cada de las tareas y en las categorías de análisis dispuestas en el capítulo anterior.

4.1. TAREA DE SELECCIÓN

La tarea 1 fue resuelta por 38 estudiantes de forma individual. La tarea se desarrolló sin ningún inconveniente y se tuvieron en cuenta los tiempos de entrega de cada una de las educandas.

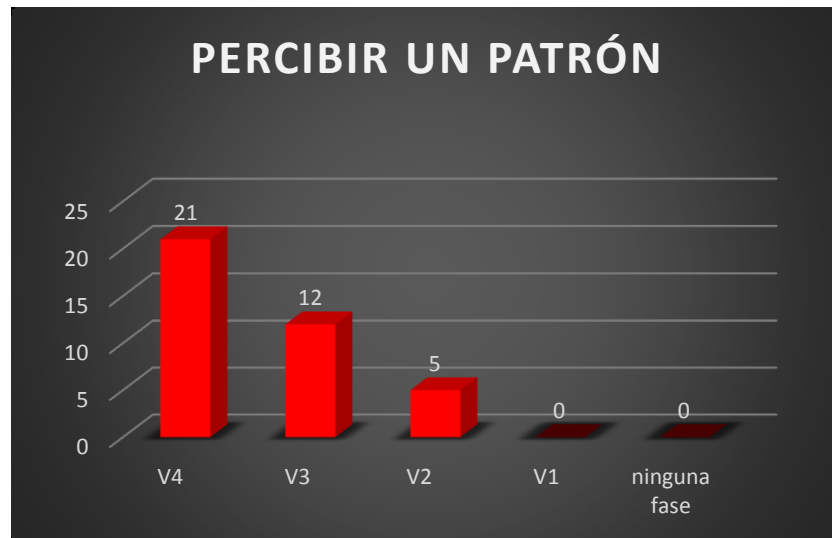
Para el análisis de las respuestas obtenidas, se tuvieron en cuenta los niveles de desempeño propuestos en las etapas del proceso de generalización (tabla 7) y la herramienta de análisis descrita en la sesión 1 (tabla 8).

A continuación, se presentan los resultados obtenidos a nivel general de cada una de las etapas del proceso de generalización, representados con porcentajes, y se exponen algunas de las respuestas más relevantes desarrolladas por las estudiantes y su correspondiente calificación.

Percibir un Patrón:

El 55% de las estudiantes logró obtener el nivel V4, pues determinaron regularidades que les permitió hallar con facilidad cualquier término de la secuencia; el 32% de las educandas establecieron el nivel V3, determinando relaciones relevantes y necesarias entre cada uno de los términos de la secuencia, y el resto de las estudiantes obtuvieron el nivel V2 pues, aunque

encontraron relaciones entre los términos de la secuencia, no les permitió identificar el número de cuadrados de alguna de las figuras ubicadas en posiciones lejanas, resultados que se pueden observar en la gráfica 1.



Gráfica 1. Resultados fase 1.

A continuación, se presenta un ejemplo del desarrollo de la tarea 1 elaborado por la estudiante de grado undécimo, quien obtiene nivel V4 y, en consecuencia, un puntaje de 4 para su calificación:

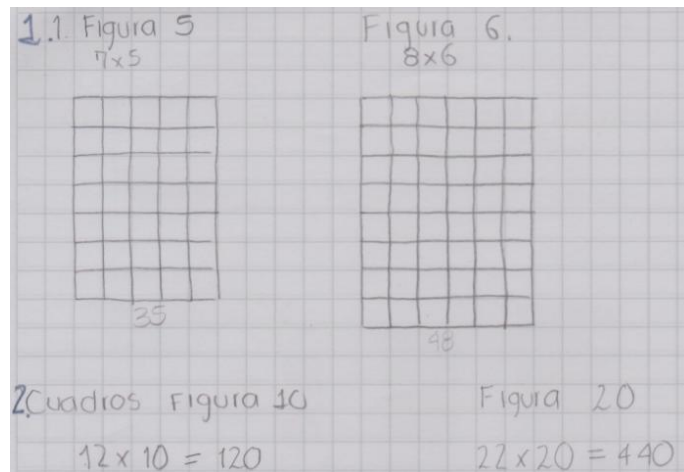


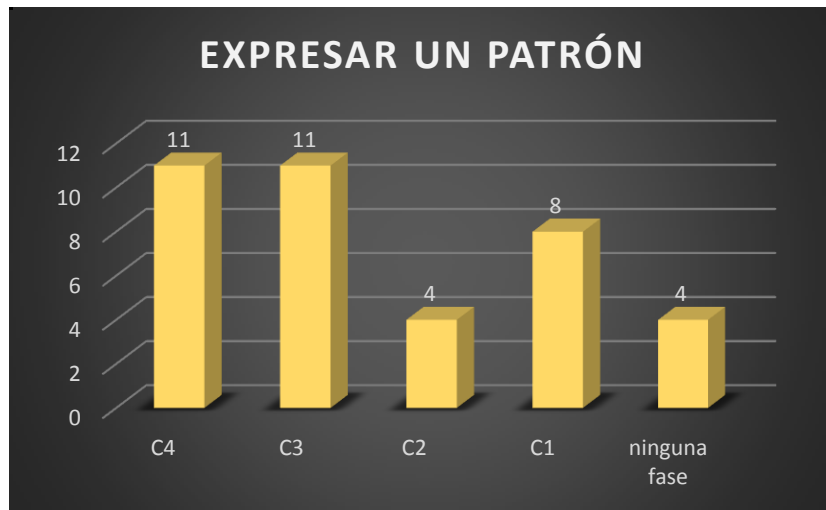
Imagen 5. Respuesta estudiante 30. Grado undécimo

Para este caso la estudiante relaciona el largo y el ancho con la posición de cada figura, para poder establecer la cantidad de cuadros de un caso particular, sin necesidad de hacer el dibujo, percibe el patrón de las primeras figuras haciendo un registro que facilitó hallar la regularidad y determinar cualquier término de la secuencia.

Expresar un Patrón:

Luego de percibir el patrón o la regularidad, es necesario comunicarlo de forma verbal (oral o escrita), debido a que permite identificar de forma más precisa el procedimiento que el estudiante está empleando para el reconocimiento de la regularidad. En esta etapa se evidenció que el 29% de las estudiantes logró obtener el nivel C4, expresando de forma verbal la forma para hallar cualquier término de la secuencia; el 29% de las educandas obtuvo el nivel C3, enunciando de forma verbal regularidades relevantes entre los términos de la sucesión, que les permitió hallar algunos términos de la secuencia, pero no su totalidad; el 10% alcanzaron el nivel C2, en tanto manifestaron de forma verbal relaciones existentes entre los términos; mientras el 21% expresaron únicamente las características de cada término de la secuencia, sin determinar relación alguna. Por último, el 11% de las educandas no consiguieron expresar de forma verbal relación alguna entre los términos de la secuencia; todo lo anterior se observa en la gráfica 2.

En ese sentido, en la imagen 6, se presenta un ejemplo elaborado por la estudiante 1. Grado undécimo, quien obtuvo un puntaje de 4 y se encuentra dentro de las 11 estudiantes que lograron C4, pues logra describir, por medio de ejemplos la forma de hallar la cantidad de cuadros de cualquier figura.



Gráfica 2. Resultados fase 2.

Combinice esto facil el numero que te pidan lo pones
 ejemplo
 Cual es la fig (348) ← listo ya tenemos 1^{er} dato
 La parte de arriba lo ancho es 348
 ahora hace falta la parte de abajo al 348 le sumas 2 y esa es la parte lateral!

Pero cuantos cuadros hay?

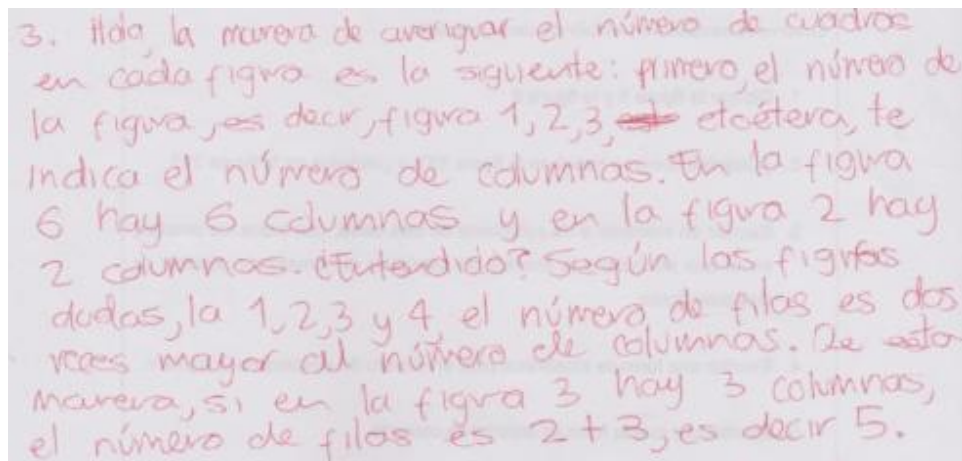
facil tomamos el primer dato que fue el numero de la figura que te pidieron que en este caso es 348 y ~~despues~~ a continuacion despues de haber realizado el paso de sumar 2 unidades al dato anterior (348) sigue multiplicarlos

$$348 \times (348 + 2) = 121800 \text{ cuadros}$$

Imagen 6. Respuesta estudiante 1. Grado undécimo

Adicional a lo expresado anteriormente de forma escrita, la estudiante comunica de manera verbal que, para hallar los cuadrados de cualquier figura, se multiplica la posición de la figura por la misma aumentada en dos. Esto permite observar que ella sabe cómo hallar el número de cuadrados de cualquier figura sin embargo se puede afirmar que no sabe cómo expresarlo algebraicamente, pues esto también es comunicado de forma verbal.

A continuación, se presenta un ejemplo elaborado por la estudiante 19, grado undécimo, quien obtuvo un puntaje de 3 y se encuentra dentro de las 11 estudiantes que lograron C3:



3. Halla la manera de averiguar el número de cuadros en cada figura es la siguiente: primero, el número de la figura, es decir, figura 1, 2, 3, ~~4~~ etcétera, te indica el número de columnas. En la figura 6 hay 6 columnas y en la figura 2 hay 2 columnas. ¿Entendido? Según las figuras dadas, la 1, 2, 3 y 4 el número de filas es dos veces mayor al número de columnas. De esta manera, si en la figura 3 hay 3 columnas, el número de filas es $2 + 3$, es decir 5.

Imagen 7. Respuesta estudiante 19. Grado undécimo.

La estudiante 19 describe que hay una diferencia de dos, entre el ancho y el largo de la figura, y los relaciona con la posición de la figura, pero no alcanza el nivel C4, pues no dice que esos dos valores se deben multiplicar.

Registrar un patrón:

El proceso de registrar el patrón, puede apoyarse de dibujos, palabras, tablas, símbolos numéricos o algebraicos, de forma escrita, para que posteriormente se

puedan describir las variables que son claves de la tarea 1. Para este caso se evidenció que un 58% de las estudiantes logró obtener el nivel S4, expresando de forma escrita una fórmula para determinar el n -ésimo término de la secuencia; el 5% de las educandas obtuvo el nivel S3, escribiendo una fórmula por recurrencia que les permitió hallar algunos términos de la secuencia, pero no en su totalidad. El 37% de las estudiantes no lograron obtener algún puntaje, esto es 14 educandas del total no consiguieron expresar de forma escrita representaciones por medio de palabras, tablas, símbolos numéricos o algebraicos relaciones entre los términos de la secuencia; todo lo anterior se observa en la siguiente representación gráfica:



Gráfica 3. Resultados fase 3.

En la imagen 8 se puede observar que la estudiante 29 escribe la relación entre el ancho, el alto y la posición de la figura; sin embargo, no expresa que debe hacer la multiplicación para hallar la cantidad de cuadros, por lo que logra el nivel S3.

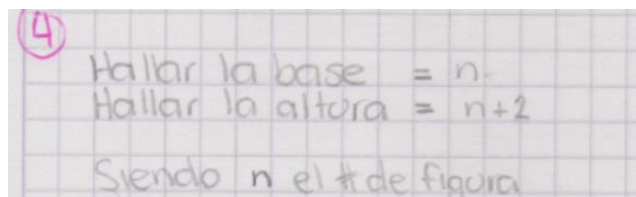
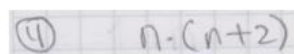
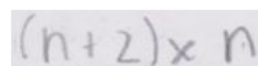


Imagen 8. Respuesta estudiante 29. Grado undécimo.

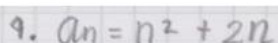
En la imagen 9, se observa que las educandas escriben las fórmulas correctas que representa la cantidad de cuadros de la n -ésima figura, logrando así S4.


$$\textcircled{4} \quad n \cdot (n + 2)$$

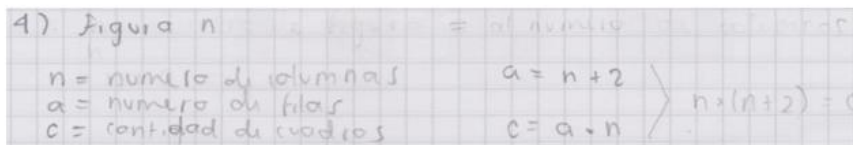
Respuesta estudiante 32. Grado décimo.


$$(n + 2) \times n$$

Respuesta estudiante 22. Grado undécimo.


$$9. a_n = n^2 + 2n$$

Respuesta estudiante 5. Grado undécimo.



4) Figura n $=$ n número de columnas $=$ n número de filas $=$ c

$n =$ número de columnas $a = n + 2$

$a =$ número de filas $c = a \cdot n$

$c =$ cantidad de cuadros $n \cdot (n + 2) = c$

Respuesta estudiante 13. Grado décimo.

Imagen 9. Ejemplos de respuestas de la fase 3.

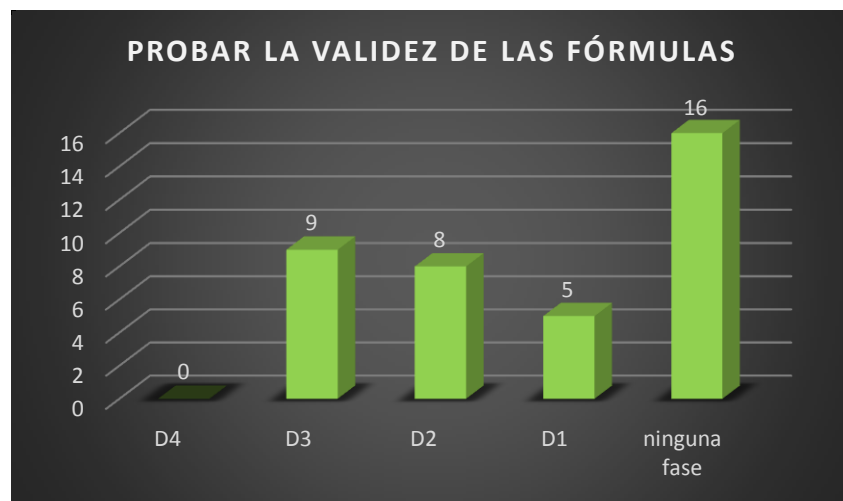
Se debe tener en cuenta que para la obtención del nivel S4 de las cuatro estudiantes anteriores, el desarrollo de los ítems fue de forma ordenada y las expresiones conseguidas fueron expresadas con la simbolización algebraica (considerada de manera especial aquí, en tanto las estudiantes que participaron en el desarrollo de la tarea ya conocen y usan este tipo de representaciones por su grado de escolaridad) y utilizando de forma escrita, dibujos, palabras, tablas o símbolos numéricos.

Probar la validez de las fórmulas:

En esta última etapa del proceso de generalizar es importante que las fórmulas obtenidas tengan validez, por lo cual en el análisis observamos si la estudiante realizó alguna comprobación, por medio de su aplicación, por ejemplo, la realización de cálculos, dibujos, conteos o realizando la demostración formal.

En los resultados obtenidos en esta etapa, ninguna estudiante obtuvo el nivel D4, es decir que no se evidenció algún tipo de demostración formal (Inducción

matemática, contradicción, etc.); el 24% de las educandas obtuvo el nivel D3, verificando las fórmulas obtenidas para varios términos de la sucesión; el 21% logró el nivel D2, comprobando la fórmula obtenida para un solo término de la sucesión; el 13% de las educandas justificó por medio de palabras la validez de la fórmula, obteniendo el nivel D1 y, por último, el 42% las educandas no logró probar de algún modo la validez de las fórmulas que encontró. Todo lo anterior se ilustra en la gráfica 4:



Gráfica 4. Resultados fase 4.

A continuación, se presentan ejemplos relevantes en el desarrollo de esta tarea 1. que obtuvieron puntajes de 3, 2 y 1:

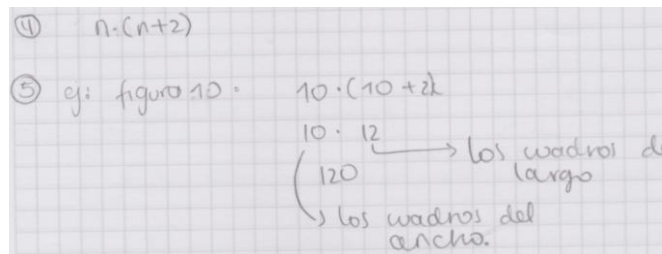


Imagen 10. Respuesta estudiante 32. Grado décimo

En la imagen 10, podemos observar que la estudiante realiza la verificación de la fórmula obtenida solo para una de las primeras figuras, obteniendo así el nivel D2.

5). Esta ecuación es la indicada debido a que representa el aumento de 2 en 2 de los cuadros totales de cada Figura, y además el aumento de largo y de ancho de los cuadros de cada una de las Figuras.

Imagen 11. Respuesta estudiante 10. Grado undécimo.

Cinco estudiantes ubicadas en el nivel D1, expresaron de forma escrita el proceso por el cual obtuvieron sus fórmulas, en algunos de los casos la escritura de estas es bastante clara, como es el ejemplo de la imagen 11, de la estudiante 10 de grado undécimo.

5.

$$(1+2) \cdot 1 = 3 = \text{Fig 1}$$

$$(2+2) \cdot 2 = 8 = \text{Fig 2}$$

$$(3+2) \cdot 3 = 15 = \text{Fig 3}$$

Imagen 12. Respuesta estudiante 3. Grado undécimo.

5. Es correcta porque al remplazar a_n por un número y aplicar la regla la sucesión establecida.

$$* O_2 = (O_1) + 2(2) + 1$$

$$O_2 = 3 + 4 + 1 = 8$$

$$* O_3 = (O_2) + 2(3) + 1$$

$$O_3 = 8 + 6 + 1 = 15$$

$$O_4 = (O_3) + 2(4) + 1$$

$$* O_4 = 15 + 8 + 1 = 24$$

Imagen 13. Respuesta estudiante 30. Grado undécimo.

Varias educandas, como se puede observar en las imágenes 12 y 13, desarrollaron la verificación de sus fórmulas para distintos términos de la secuencia, asegurándose de la validez de la fórmula obtenida; la escritura de estas comprobaciones varían en su escritura y formas de expresión, en algunos casos esta verificación les facilitó determinar la fórmula general, como por ejemplo la estudiante 30 quien desarrolló varias ecuaciones que le permitieron obtener el resultado, luego se da cuenta que hay unos números que varían y que estos son el número de la figura. De esta forma logra el proceso de generalización.

De acuerdo con el nivel de desempeño obtenido por cada estudiante en cada etapa del proceso, se registró y valoró el puntaje final de cada una como se muestra en la siguiente tabla, teniendo en cuenta que si las estudiantes en alguna de las fases, escribe, por ejemplo, características, fórmulas, justificaciones, etc., erróneos, su puntuación en la etapa correspondiente fue 0:

Estudiante	Desempeño en el proceso de generalización				
	Etapas 1	Etapas 2	Etapas 3	Etapas 4	Nota Final
1	3	4	0	0	7
2	2	1	0	0	3
3	3	3	4	3	13
4	4	3	4	2	13
5	3	4	4	2	13
6	4	4	4	2	14
7	2	0	0	0	2
8	3	3	4	3	13
9	3	3	0	0	6
10	4	2	4	1	11
11	4	4	4	2	14
12	3	1	0	0	4
13	4	4	4	3	15

Estudiante	Desempeño en el proceso de generalización				
	Etapa 1	Etapa 2	Etapa 3	Etapa 4	Nota Final
14	4	3	4	3	14
15	3	1	0	0	4
16	4	4	4	2	14
17	4	4	4	1	13
18	3	4	4	1	12
19	4	3	4	3	14
20	3	1	0	0	4
21	4	3	4	3	14
22	3	4	4	1	12
23	3	0	0	0	3
24	4	3	4	3	14
25	4	3	4	3	14
26	2	0	0	0	2
27	4	4	4	0	12
28	2	2	0	0	4
29	2	3	3	0	8
30	4	3	3	3	13
31	3	2	0	0	5
32	4	1	4	2	11
33	4	2	0	0	6
34	4	1	4	2	11
35	4	1	0	0	5
36	4	0	4	2	10
37	4	4	4	1	13
38	3	1	0	0	4
			Puntaje máximo posible: 16		
			Promedio = 9,6		

Tabla 12. Resultados de desempeño en las fases del proceso de generalización.

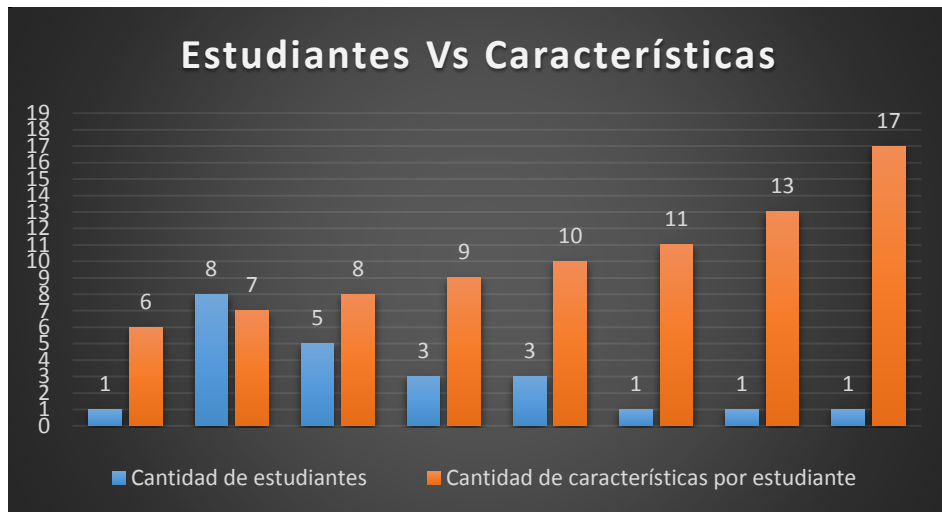
Dado que el promedio de desempeño de las estudiantes es 9.6, se continúa la implementación con las estudiantes que están por encima de dicho promedio; en este caso, 23 estudiantes se seleccionan para realizar las tareas de caracterización de talento matemático.

4.2. TAREAS DE CARACTERIZACIÓN

Las tareas 2 a 5, tienen como objetivo la identificación de las características de talento matemático en las estudiantes que están por encima del promedio, en relación con el planteamiento de la tabla 9.

Durante el desarrollo de dichas tareas, las estudiantes en general trabajaron sin algún prejuicio ni actitud desfavorable y con resultados satisfactorios, a excepción de la segunda parte de la tarea 5, en la cual hubo opiniones desfavorables pues fue evidente que la mayoría de las estudiantes se cansaron rápidamente al contar los triángulos, porque les daban resultados diferentes cada vez que volvían a contar, y eso hizo que dijeran que no querían continuar porque ya estaban cansadas, a excepción de 4 estudiantes que siempre se vieron dispuestas y se quedaron gran parte de la hora del almuerzo tratando de terminar el ejercicio, sin lograrlo; sin embargo, este mismo día una de ellas se acercó finalizada la jornada y logró articular sus ideas y llegar a la solución.

Luego de hacer el análisis de las características que cumplió cada una de las estudiantes, esto por medio del diligenciamiento de la tabla 10, para cada una de las estudiantes (ver anexo 7), se hizo un registro de la cantidad de estudiantes que cumplió con la misma cantidad de características, lo que se registra en la gráfica 5, en la cual se puede observar que el rango del número de características que cumplen las estudiantes es de 6 a 17, de las 19 propuestas en la tabla 9, y que solamente dos estudiantes cumplen con un mayor número de características (13 y 17 respectivamente).



Gráfica 5. Cantidad de características que cumplen las estudiantes.

Con base en la información anterior, se puede afirmar de solo tres estudiantes tienen más de la mitad de las características, con el 58%, 68% y 89% respectivamente. En ese sentido, la única estudiante que cumple con casi un 90% de las características de talento matemático, es la estudiante 30, quien siempre fue una de las primeras estudiantes en terminar su ejercicio y es una de las 3 o 4 estudiantes que se caracterizan por PDIO, PDFIE, PCREG, PCAC, APGC y APATL, y la única estudiante que logra culminar su tarea 5, y en consecuencia cumplió con las características PCTI y APPT. En este sentido la estudiante 30 es la única estudiante que se considera como posible talento matemático, por lo que a continuación se presentan sus resultados de manera más detallada.

Estudiante 30. Grado undécimo

A continuación, se desarrolla el análisis de todas las tareas de caracterización elaboradas por la estudiante, destacando las características encontradas y haciendo su registro en la tabla 13.

4.2.1. Tarea 2

Es la primera estudiante que termina la tarea, en aproximadamente 4 minutos. De esta manera se puede afirmar que la estudiante soluciona problemas de aplicación de forma rápida y fluida.

La siguiente imagen ilustra el procedimiento que realizó la estudiante para la solución del problema.

Actividad 2: Fósforos

Nombre: _____ Curso: **11** Fecha: _____




Figura 1




Figura 2




Figura 3

Observar la secuencia y responder.

1. Escribir una fórmula algebraica para determinar n fósforos.
2. Escribir por qué la fórmula anterior es correcta.
3. Escribir de la forma más detallada posible, el procedimiento que utilizó para encontrar la fórmula.

4, 7, 10, 13
 $R = 3$
 $a_n = 3n + 1$ fórmula

2. porque al remplazar los valores n en la fórmula se va cumpliendo la secuencia o sucesión.
3. Encontrar la razón de la secuencia y despues mirar que número se tiene que operar para que la secuencia se cumpla.

Imagen 14. Respuestas de estudiante 30 a Tarea 2.

Al observar las respuestas, se puede evidenciar que escribe organizadamente los datos numéricos relacionados con cada figura, determina la diferencia, la cual

utiliza para llegar a una fórmula correcta y a pesar de que no la verifica, escribe que se cumple para cualquier valor de n , lo que lleva a pensar que no escribe las cuentas y operaciones realizadas, pero sí las hace mentalmente. De esta manera se puede decir que la estudiante visualiza características relevantes de las figuras, organiza la información, la relaciona y la usa.

Con el objetivo de indagar sobre sus estrategias de solución, se grabó un video (anexo 8), en el que se le pregunta a la estudiante: *“¿qué fue lo primero que pensaste para abordar el ejercicio?”*, a lo que responde *“... es que yo voy contando para encontrar como la razón, entonces miro cuánto aumenta, entonces aquí hay 4, aquí hay 7, aquí hay 10... y la razón es 3”*; luego se le pregunta, *¿luego que hiciste?*, y ella responde *“empecé a mirar una fórmula para que me diera, entonces la razón la multiplique por 1 y empecé a mirar que le podía sumar o restar para que me diera el primero”*.

En este sentido, se puede afirmar que la estudiante observa elementos relevantes de forma rápida y los utiliza para llegar a soluciones simples, y que además es capaz de argumentar los procesos utilizados y expresar de forma clara los patrones observados. Adicionalmente, se puede concluir que no piensa en una estrategia de solución, sin embargo, tiene en su mente que lo primero que hay que hacer es contar para encontrar la razón (vista como la diferencia) entre los términos de la secuencia que se forma con los números correspondientes a la cantidad de cuadros de cada figura.


Durante la socialización, posterior al desarrollo de la tarea, se evidenció que la estudiante valida diferentes respuestas de la misma situación cuando expresa *“esa fórmula no sirve, porque dos por dos es cuatro más uno es cinco más dos, ¡Ah! sí es siete, si sirve”*.

4.2.2. Tarea 3


Nuevamente es la primera estudiante que entrega su tarea en aproximadamente 5 minutos, permitiendo evidenciar que observa elementos relevantes de forma rápida, los cuales puede representar de forma sencilla en una fórmula común al grupo, y expresa otra fórmula que, si bien podría reflejar su intención por estudiar otros tipos de soluciones, esta resulta no ser correcta como se muestra en la imagen 15.

Actividad 3 : Árbol de Navidad


Nombre: _____ Curso: 1º Fecha: _____



Tamaño 1
3 luces



Tamaño 2
7 luces



Tamaño 3
11 luces

Observar la secuencia y responder cada pregunta.

1. ¿Cuántas luces necesitará el árbol de tamaño n?
2. Escribir por qué la fórmula anterior es correcta.
3. Describir de la forma más detallada posible, el procedimiento que utilizó para encontrar la fórmula

R=4

4

3, 7, 11

* $4n - 1 \rightarrow$ Fórmula

* $3n + 1 \rightarrow$ 2. Fórmula

2. Porque al reemplazar el valor n en la fórmula dan los resultados de la sucesión

Ej:

$$4(1) - 1 = 3$$

$$4(2) - 1 = 7$$

$$4(3) - 1 = 11$$

etc

3. Encontrar la razón de la sucesión y mirar que otro # se debe operar para obtener el resultado

Imagen 15. Respuestas de estudiante 30 a Tarea 3.

Al observar las respuestas de esta prueba se puede identificar que la estudiante visualiza un patrón que puede representar algebraicamente y, posterior a ello, realiza su verificación. Adicionalmente justifica los procesos utilizados para llegar a la fórmula.

Con el objetivo de obtener información acerca de las estrategias de solución, se graba un audio (anexo 9) preguntando a la estudiante: *¿pensaste en una estrategia para llegar a la solución del problema?* A lo que responde *“yo lo que siempre hago es mirar cual es la razón...y empiezo a mirar cómo esa razón me sirve... luego empiezo a mirar que le tengo que sumar, resta multiplicar o dividir para que me dé el resultado”*. Esto permite evidenciar que la estudiante expresa de forma clara los patrones y argumenta correctamente el proceso para llegar a la fórmula.

Por otro lado, casualmente, este día la estudiante llega con un sudoku (imagen 16), el cual estaba resolviendo antes de iniciar la tarea y al entregarla, continuó mientras sus compañeras terminaban. En ese sentido, se hace evidente la actitud positiva de la estudiante hacia las matemáticas, pues le gusta resolver ejercicios matemáticos en sus espacios libres.



Imagen 16. Estudiante 30 realizando Sudoku.

4.2.3. Tarea 4

Para el desarrollo de esta tarea la estudiante 30 trabajó con la estudiante 14 y esta vez ocuparon la posición tres en el momento de entrega de la tarea, lo que demuestra que continúa siendo una de las estudiantes que dan solución a los problemas de forma rápida y fluida.

En la imagen 17 se observa la solución de las estudiantes para este problema:

Actividad 4: baldosas triangulares

Nombre: _____ Curso: 11^o Fecha: 7-09-2016




Figura 1




Figura 2




Figura 3

Observar la secuencia y responder cada pregunta.

1. Escribir una fórmula algebraica para obtener el número de triángulos que rodean n número de baldosas blancas. $2n + 2$
2. Explique por qué la fórmula es correcta.
3. Explique de la forma más detallada posible, el procedimiento o regla que utilizó para hallar la fórmula.

②

- $2 \cdot 1 = 2 + 2 = 4$
- $2 \cdot 2 = 4 + 2 = 6$
- $2 \cdot 3 = 6 + 2 = 8$

La fórmula es correcta porque al remplazar los valores se cumple la secuencia.

③ Hallar la razón y buscar que número se debe operar para que se cumpla la sucesión.

Imagen 17. Respuestas de estudiantes 14 y 30 a Tarea 4.

Al observar la imagen 17 se puede concluir que las estudiantes visualizan un patrón el cual es utilizado para determinar y verificar fórmulas simples y directas.

Haciendo un análisis del audio (anexo 10) que registra el trabajo colectivo realizado por las estudiantes, se puede evidenciar que la estudiante 30 es quien llega a una fórmula general cuando dice: *“entonces es n más dos, porque dos por uno dos más dos cuatro, dos por dos cuatro más dos seis y ya, esa es la fórmula”*, en aproximadamente un minuto, luego de que su compañera enuncia el patrón *“aumenta por dos”*. Adicionalmente, en el audio se evidencia que para la solución

de los numerales 2 y 3 la estudiante 30 es quien dicta a su compañera las respuestas del problema.

Cabe resaltar que con este audio se logra verificar la hipótesis de que la estudiante 30 no necesita hacer un registro de la verificación de la fórmula puesto que, cuando plantea una fórmula, hace la verificación por medio cálculos mentales; en la imagen 17 se muestra que sí se plantea la verificación, pero lo escribe su compañera.

Por otro lado, la estudiante 30 luego de finalizada la tarea dice “podemos buscar otra fórmula” y empieza a trabajar de forma individual en una nueva hoja imagen 18, en la cual se puede observar que una fórmula que determina por recurrencia, que, si bien no es la más adecuada, permite concluir que opta por estudiar otros tipos de soluciones, que además con diferentes a las de sus compañeras.

Actividad 4: baldosas triangulares

Nombre: _____ Curso: 11 Fecha: _____

4, 6, 8




figura 1




figura 2

0, 4




figura 3

(n+1)
(n)
[C(n) + 2]

Observar la secuencia y responder cada pregunta.

1. Escribir una fórmula algebraica para obtener el número de triángulos que rodean n número de baldosas blancas.
2. Explique por qué la fórmula es correcta.
3. Explique de la forma más detallada posible, el procedimiento o regla que utilizó para hallar la fórmula.

Fórmula $a_n = a_{n-1} + 2$ cuando $a_1 = 4$
 → Porque al aplicar la fórmula se cumple la sucesión
 ② Dar el valor a_1 de la sucesión n inicial que número se debe operar para que se cumpla la sucesión.

Imagen 18. Respuestas de estudiante 30 a Tarea 4.

4.2.4. Tarea 5

A continuación, se hace el análisis de la tarea 5, parte II dado que el fin de parte I se centra en tener una idea previa sobre la fórmula que relaciona la suma de los primeros n números impares.

Vale resaltar que esta tarea tiene la particularidad de que para obtener el número de triángulos de cada figura es necesario realizar numerosos cálculos, proceso que la estudiante realiza sin ningún juicio desfavorable, a diferencia de la mayoría de sus compañeras. Además, dado que el tiempo no es suficiente para el desarrollo de esta tarea, la estudiante decide trabajar en la hora del almuerzo y llevársela para continuar trabajando en casa.

La siguiente imagen ilustra el procedimiento que realiza para la solución del problema:

Actividad 5: Torre de triángulos Parte II

Nombre: _____ Curso: _____ Fecha: _____

Observe las secuencias de triángulos y responda cada pregunta.

- ¿Cuántos triángulos hay en la figura n?
- Escribir por qué la fórmula anterior es correcta.
- Escribir de la forma más detallada posible, el procedimiento que utilizó para encontrar la fórmula.

Tamaño: 10x10 cm

12 + 5n
12 + 12
12

12 + 6(R)

$(n-1)(n+9) - 24$

$(n-1)(5n-24) - 1$

$5(n^2 - 4n) - 24$

$13(n-1) - 1 = 12$

$13(2-1) - 1 = 12$

$13(3-1) - 1 = 25$

$13(4-1) - 1 = 38$

Fórmula $a_n = 13n - 12$

2 Porque

$a_1 = 13(1) - 12 = 1$

$a_2 = 13(2) - 12 = 14$

$a_3 = 13(3) - 12 = 25$

$a_n = 13n - 12$

3 Encontrar la razón y mirar de que manera se puede operar para que de el resultado.

$a_1 = 1$

$a_{n-1} + 11n$

$12 + n$

$a_1 = 1$ $12 + 2$

Si es 11n + 14 $a_n = 11n - 10$

Cuando 1, 12, 25, 40 $a_1 = 1$

$(2n-1)$ $(11n+2)$

$a_1 = 1$ $a_2 = (n-1)(a_{n-1} + 2)$

$a_{n-1} + 11$ $a_{n-1} + 11$

$(11+2)n$ $\frac{1}{12}$

Imagen 19. Respuestas de estudiante 30 a Tarea 5.

Se puede observar que durante el desarrollo de la tarea la estudiante se percató de que la estructura de la tarea de la parte I (la suma de los primeros n impares es n^2) le sirve y además la utiliza para obtener la solución del problema.

4.2.5. Encuesta

A continuación, se muestran las respuestas de la encuesta realizada por la estudiante 30, en la cual manifiesta gusto por diversas tareas asociadas a las matemáticas:

Pre-ingeniería

Nombre: _____ Curso: 11

Responder las siguientes preguntas de acuerdo con las actividades desarrolladas y su experiencia con las matemáticas.	SI	NO
¿Le ha gustado resolver actividades como las anteriores?	X	
En sus tiempos libres, ¿soluciona actividades relacionadas con las matemáticas (sudokus, sopas de números, juegos de lógica matemática, etc.)?	X	
¿Matemáticas es su materia favorita?	X	
¿Desea estudiar algo afín a las matemáticas?	X	

Imagen 20. Encuesta de estudiante 30 para evidenciar actitudes positivas hacia las matemáticas.

Adicionalmente, se puede evidenciar en la última pregunta, que desea estudiar algo afín con las matemáticas, lo cual es acorde al seminario de profundización de pre-ingeniería, en el cual participa de forma voluntaria.

El análisis realizado anteriormente se resume en la tabla 13, cuyas columnas corresponden a cada una de las tareas de caracterización y a los resultados de una encuesta realizada para observar algunas de las actitudes positivas. De color verde se indican las características evidenciadas y en la última columna se demarcan las características que tiene la estudiante 30 en el desarrollo de todas las tareas.

Pensamiento	Características	Tar2	Tar3	Tar4	Tar5	AP	TOTAL
Divergente	PDRF						
	PDIO						
	PDEE						
	PDFIE						
Convergente	PCSD						
	PCV						
	PCG						
	PCTI						
	PCOI						
	PCREG						
	PCPM						
	PCAC						
	PCJ						
	PCCI						
	Actitudes positivas hacia las matemáticas	APGA					
APGC							
APMFE							
APATL							
APPT							

Tabla 13. Resumen de característica de la estudiante 30.

Finalmente se puede observar que la estudiante posee 17 de las 19 características, razón por la cual se considera que es una posible estudiante talentosa en matemáticas. En este sentido, es importante resaltar de que se habla de un posible talento, en tanto a que existen otros instrumentos de identificación, como pruebas estandarizadas de inteligencia, evaluaciones psicopedagógicas y demás estrategias como las mencionadas a lo largo del marco de referencia, que se hace necesario aplicar si se quiere hacer una investigación más minuciosa y rigurosa.

CONCLUSIONES

Frente a los objetivos planteados, se puede concluir que todos se cumplieron a cabalidad pues durante el desarrollo del trabajo se hace una indagación sobre talento, talento matemático, sus características, así como del proceso de generalización y sus etapas. La documentación sobre los referentes teóricos, permite contar con información suficiente para la consolidación de una definición de talento matemático y de las fases de generalización, que se constituyó en la base para la construcción de las tareas y la definición de las categorías de análisis. Del mismo modo, se proponen tareas que permiten evidenciar las características de talento matemático. La propuesta de dichas tareas y las categorías de análisis se convierten en los instrumentos para la recolección y análisis de evidencias, logrando así que el estudio y clasificación de las respuestas a cada una de las tareas de generalización se pudiese hacer de forma adecuada y satisfactoria.

En cuanto a los resultados obtenidos, se puede concluir que tener un desempeño por encima del promedio de los pares, no es una herramienta suficiente para determinar que una persona es talentosa, puesto que luego del análisis de los resultados de la tarea 1, se evidencia que 23 de las 38 estudiantes están por encima del promedio; sin embargo, solo una de ellas cumple con un 89% de las características asociadas a individuos con talento matemático, por lo que se concluye esta persona sí se considera como un posible talento matemático. Es importante resaltar que si se desea realizar una identificación más exhaustiva es necesario remitirse al desarrollo de pruebas estandarizadas de inteligencia, evaluaciones psicopedagógicas y demás estrategias como las mencionadas en el marco de referencia.

Es importante reflexionar sobre la falta de información acerca de la identificación de talentos a nivel general y en matemáticas, lo que impide a docentes trabajar en

potenciar aquellas personas con características y habilidades en un área específica desde su escolaridad, además de la falta de implementación en el ámbito escolar de tareas de generalización, a pesar de ser un proceso esencial en la actividad matemática que se puede considerar como una ruta de acceso al álgebra y que, además, desarrolla las habilidades de visualización, comunicación simbolización y justificación o verificación.

Es preciso destacar que el desarrollo de este trabajo de grado dejó aportes significativos de un acercamiento al proceso de indagación, en cuanto a la realización de un marco de referencia acorde con los elementos a utilizar en el desarrollo de la metodología, el diseño y selección de tareas de acuerdo al contexto y con un fin específico (que permitieran dejar por parte de las estudiantes, evidencias de cada una de las fases del proceso de generalización) , el estudio e interpretación de las evidencias por medio de unas categorías de análisis diseñadas a la luz del marco de referencia.

Adicionalmente, afianzó habilidades en cuanto al diseño de propuestas educativas integradoras de componentes como el pedagógico, didáctico, matemático y tecnológico, esenciales para nuestro desarrollo personal y profesional.

Finalmente, a partir del presente trabajo, resulta pertinente investigar y trabajar sobre cómo potenciar las habilidades de los estudiantes que, en ese caso particular, sean talentosos en matemáticas.

BIBLIOGRAFÍA

Butto, C., Rojano, T. (2004). Introducción temprana al pensamiento algebraico: abordaje basado en la geometría. México: Grupo Santilla México. Recuperado el 23 de marzo de 2016 de <http://www.redalyc.org/pdf/405/40516105.pdf>

Cañadas, M. (2007). Descripción y caracterización del razonamiento inductivo utilizado por estudiantes de educación secundaria al resolver tareas relacionadas con sucesiones lineales y cuadráticas. Trabajo de grado para optar por el título de Doctora en Matemáticas con especialidad en Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Chalé, F. (2015). La visualización en la resolución de patrones. XIV CIAEM-IACME, Chiapas, México. Recuperado el 10 de mayo de 2016 de http://xiv.ciaem-redumate.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/viewFile/1061/436

Congreso de la Republica de Colombia. (8 de febrero de 1994). Ley general de educación. (Ley 115 de 1994).

Congreso de la Republica de Colombia. (11 de septiembre de 1997). Decreto 2247.

Díaz, O., Sánchez, T., Pomar, C., Fernández, M. (2008). Talentos matemáticos: análisis de una muestra. Faisca, Vol. 13 n° 15, 30-39.

Fernández, M., Pérez, A. (2011). Las Altas Capacidades y el Desarrollo del Talento Matemático. El Proyecto Estalmat-Andalucía. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, Número 27, páginas 89 - 113.

- García, J. (1999). La generalización es un tipo particular de sucesiones aritméticas: los problemas de generalización lineal. *Números. Revista de didáctica de las matemáticas*. Vol. 38, páginas 3 - 20.
- García, S. (2011). Rutas de acceso a la generalización como estrategia de resolución de problemas utilizada por estudiantes de 13 años. Trabajo de Grado para optar al grado de Magíster en Docencia de las Matemáticas. Universidad Pedagógica Nacional.
- Gómez, J. (2013). La generalización de patrones de secuencias figúrales y numéricas: un estudio de los medios semióticos de objetivación y procesos de objetivación en estudiantes de grado décimo. Trabajo de investigación para optar el título de Magíster en Docencia de la Matemática. Universidad Pedagógica Nacional.
- Grupo Azarquiel (1993). Ideas y actividades para enseñar álgebra. Colección Matemáticas: Cultura y Aprendizaje. Madrid: Editorial Síntesis.
- Gutiérrez, A. (1991). Procesos y habilidades en visualización espacial. Memorias del 3er Congreso Internacional sobre Investigación en Educación Matemática. Universidad de Valencia. España.
- Herrera, A., Mora, L. (2010). Proyecto de intervención educativa con alumnos de alta capacidad. Trabajo final presentado como requisito para la culminación del curso Experto Universitario en Diagnóstico y Educación de los Alumnos con Alta Capacidad.

Jiménez, W., Rojas, S. (2010). Características de talento matemático asociadas a la visualización en contextos algebraicos. Trabajo de grado para optar al título de Magister en Docencia de las Matemáticas.

MEN (2015). Documento de orientaciones técnicas, administrativas y pedagógicas para la atención educativa a estudiantes con capacidades y/o talentos excepcionales en el marco de la educación inclusiva. Recuperado el 05 de septiembre de 2016 de http://aprende.colombiaaprende.edu.co/sites/default/files/naspublic/cerrandobrechas/ORIENTACIONES_M3_B31_C3%20baja.pdf

MEN (2006). Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas. Recuperado el 15 de marzo de 2016 de http://www.mineduccion.gov.co/1621/articles-340021_recurso_1.pdf

MEN (1998). Lineamientos curriculares Matemáticas. Recuperado el 15 de marzo de 2016 de http://www.mineduccion.gov.co/1621/articles-89869_archivo_pdf9.pdf

MEN (2006). Orientaciones para la atención educativa a estudiantes con capacidades o talentos excepcionales. Recuperado el 15 de marzo de 2016 de http://www.colombiaaprende.edu.co/html/mediateca/1607/articles-75158_archivo.pdf

Merino, E. (2012). Patrones y representaciones de alumnos de 5º de educación primaria en una tarea generalización. Trabajo de grado para optar por el título de master en Didáctica de la Matemática.

Morán, V. (2013). Identificación de talento Matemático en niños y niñas de 10 a 12 años de edad en una escuela privada ubicada en el suroeste de Quito. Centro Universitario San Rafael.

- Mora, L. (2012). Álgebra en primaria. Documento construido en el marco del Programa de Transformación de la Calidad Educativa del MEN en convenio con la Universidad Pedagógica Nacional.
- Miller, R. (1990). Descubriendo Talento Matemático. Digest # E482. Fuente: Cámara de compensación en discapacitados y los niños dotados Reston VA. Recuperado el 04 de septiembre de 2016 de <http://www.ericdigests.org/1994/talent.htm>.
- Pasarín, M., Feijoo, M., Díaz, O., Rodríguez, L. (2004). Evaluación del talento matemático en educación secundaria. Faísca, n° 11, 83 – 102.
- Ramírez, F. (2012). Habilidades de visualización de los alumnos con talento matemático. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.
- Rodríguez, D., Pineda, L. (2009). Situaciones problemáticas en matemáticas como herramienta en el desarrollo del pensamiento matemático. Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar el Título de Licenciado(a) en Matemáticas. Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia.
- Sánchez, L., García, O., Mora, L. (2009). Ver, describir y simbolizar en el club de matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional. Publicado en las Memorias del 10° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa. Recuperado el 23 de marzo de 2016 de <http://funes.uniandes.edu.co/740/1/ver.pdf>
- Trujillo, P. (2008). Procesos de generalización que realizan futuros maestros. Trabajo de grado para optar por el título de máster en Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada.

Valadez, M., Avalos, A. (2010). Atención educativa a alumnos sobresalientes y talentosos en escuelas inclusivas. Inclusión y talento Equidad en una educación de calidad - Memorias del simposio internacional sobre la inclusión y el talento en la escuela y de la jornada bicentenario sobre inclusión, talento y creatividad. 25 – 35 recuperado el 6 de junio de 2016 de http://repositorios.educacionbogota.edu.co/jspui/bitstream/123456789/2425/1/Memorias_Simposio_Inclusion_y_Talento_en_el_Aula2.pdf

ANEXOS

Anexo 1. Tarea 1: Rectángulos.

Tarea 1 : Rectángulos

Nombre: _____ Curso: _____ Fecha: _____



Fig. 1



Fig. 2



Fig. 3

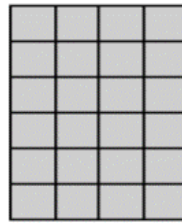


Fig. 4

Observar la secuencia y responder cada pregunta.

1. Dibujar la figura 5 y la figura 6
2. ¿Cuántos cuadros habrá en la figura 10?, y ¿cuántos en la figura 20?
3. Escribir un mensaje a un estudiante de otra clase, con todos los detalles, en el que se indique la manera de averiguar el número de cuadros de cualquier figura.
4. Escribir una fórmula algebraica para el número de cuadros de la figura n .
5. Escribir por qué la fórmula anterior es correcta.

Anexo 2. Tarea 2: Fósforos.

Tarea 2: Fósforos

Nombre: _____ Curso: _____ Fecha: _____



Figura 1

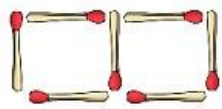


Figura 2

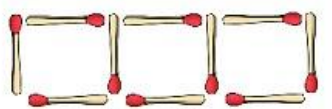


Figura 3

Observar la secuencia y responder cada pregunta.

1. Escribir una fórmula algebraica para determinar cuántos fósforos se necesitan para armar n "cuadrados".
2. Explicar por qué la fórmula anterior es correcta.
3. Escribir, de la forma mas detallada posible, el procedimiento que utilizó para encontrar la fórmula.

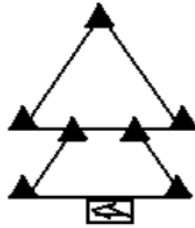
Anexo 3. Tarea 3: Árbol de Navidad.

Tarea 3 : Árbol de Navidad

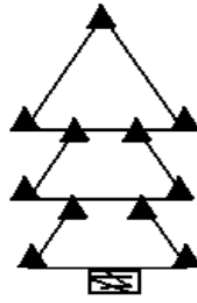
Nombre: _____ Curso: _____ Fecha: _____



Tamaño 1
3 luces



Tamaño 2
7 luces



Tamaño 3
11 luces

Observar la secuencia y responder cada pregunta.

1. ¿Cuántas luces necesitará el árbol de tamaño n ?
2. Escribir por qué la fórmula anterior es correcta.
3. Describir, de la forma más detallada posible, el procedimiento que utilizó para encontrar la fórmula.

Anexo 4. Tarea 4: Baldosas triangulares.

Tarea 4: Baldosas triangulares

Nombre: _____ Curso: _____ Fecha: _____



Figura 1



figura 2



figura 3

Observar la secuencia y responder cada pregunta.

1. Escribir una fórmula algebraica para obtener el número de triángulos que rodean n número de baldosas blancas.
2. Explicar por qué la fórmula es correcta.
3. Explicar, de la forma más detallada posible, el procedimiento o regla que utilizó para hallar la fórmula.

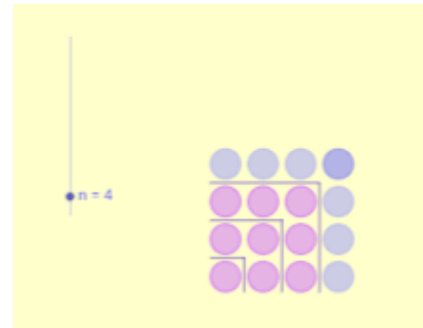
Anexo 5. Tarea 5: Secuencia.

Tarea 5: Secuencia

Parte I

Nombre: _____ Curso: _____ Fecha: _____

Haciendo uso del Applet de GeoGebra dispuesta en <https://www.geogebra.org/m/QgWsRBKe>, responder las preguntas:



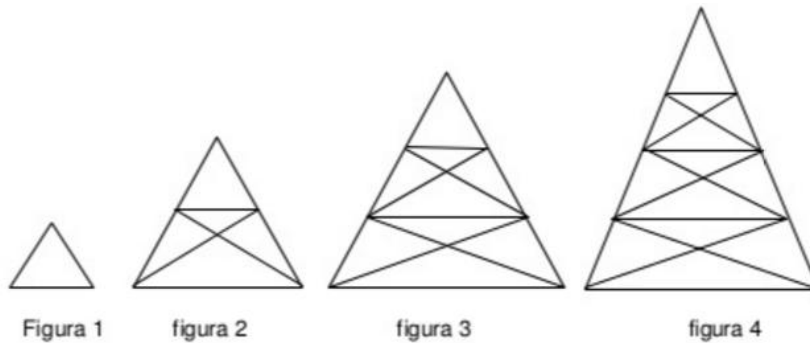
1. ¿Cómo se puede obtener la cantidad de círculos de la figura 2 a partir de la figura 1?
2. ¿Cómo se puede obtener la cantidad de círculos de la figura 3 a partir de las figuras anteriores?
3. Formular una hipótesis o conjetura sobre lo observado.
4. Escribir una expresión algebraica que relacione la cantidad de círculos de la figura n y la cantidad de círculos de las figuras anteriores.

Anexo 6. Tarea 6: Torre de triángulos.

Tarea 5: Torre de triángulos

Parte II

Nombre: _____ Curso: _____ Fecha: _____



Observar la secuencia de triángulos y responder cada pregunta.

1. ¿Cuántos triángulos hay en la figura n ?
2. Escribir por qué la fórmula anterior es correcta.
3. Escribir, de la forma más detallada posible, el procedimiento que utilizó para encontrar la fórmula.

Anexo 7. Análisis de resultados estudiantes por encima del promedio.

A continuación, se muestra una tabla, por cada una de las estudiantes, que resume las características que se evidenciaron en las estudiantes que están por encima del promedio de sus pares en la tarea 1, pero que no fueron catalogadas como talentos en matemáticas debido a que no cumplen con la mayoría de las características.

Estudiante 18. Grado undécimo.

La estudiante, es una de las primeras en entregar sus tareas. Al observar las respuestas, se puede evidenciar que llegó a las fórmulas correctas y en ocasiones no muestra la verificación para algún caso particular, sin embargo, dice que es correcta porque al aumentar n , el número concuerda con la figura dada, y explica correctamente patrones y procesos utilizados.

Pensamiento	Características	Tar2	Tar3	Tar4	Tar5	AP	TOTAL
Divergente	PDRF						
	PDIO						
	PDEE						
	PDFIE						
Convergente	PCSD						
	PCV						
	PCG						
	PCTI						
	PCOI						
	PCREG						
	PCPM						
	PCAC						
	PCJ						
	PCCI						
	Actitudes positivas hacia las matemáticas	APGA					
APGC							
APMFE							
APATL							
APPT							

Estudiante 34. Grado undécimo.

Es una de las últimas estudiantes en entregar su tarea 2, sin embargo, se puede evidenciar que llega a una fórmula correcta, la cual verifica para las 3 primeras figuras. Sin embargo, en la tarea 3, es una de las primeras estudiantes en terminar, evidenciados nuevamente fórmula correcta y explicación acorde a los patrones y procesos utilizados.

Pensamiento	Características	Tar2	Tar3	Tar4	Tar5	AP	TOTAL
Divergente	PDRF						
	PDIO						
	PDEE						
	PDFIE						
Convergente	PCSD						
	PCV						
	PCG						
	PCTI						
	PCOI						
	PCREG						
	PCPM						
	PCAC						
	PCJ						
	PCCI						
	Actitudes positivas hacia las matemáticas	APGA					
APGC							
APMFE							
APATL							
APPT							

Estudiante 3. Grado undécimo.

Desarrolla sus tareas 2, 3 y 4 satisfactoriamente, en las que se puede evidenciar que llega a una fórmula correcta, la cual verifica para casos particulares y describe correctamente justificación y patrones acordes con los procesos utilizados para llegar a la solución de las tareas.

Pensamiento	Características	Tar2	Tar3	Tar4	Tar5	AP	TOTAL
Divergente	PDRF						
	PDIO						
	PDEE						
	PDFIE						
Convergente	PCSD						
	PCV						
	PCG						
	PCTI						
	PCOI						
	PCREG						
	PCPM						
	PCAC						
	PCJ						
	PCCI						
	Actitudes positivas hacia las matemáticas	APGA					
APGC							
APMFE							
APATL							
APPT							

Estudiante 36. Grado undécimo.

Es de las primeras estudiantes en entregar sus tareas. Al observar las respuestas, se puede evidenciar que llegó a fórmulas correcta y a pesar de que no muestra la verificación para algún caso particular, dice que es correcta porque al probarlo con los ejemplos dados, la respuesta concuerda con lo preguntado de la figura. Además, describe claramente patrones y procesos empleados.

Pensamiento	Características	Tar2	Tar3	Tar4	Tar5	AP	TOTAL
Divergente	PDRF						
	PDIO						
	PDEE						
	PDFIE						

Pensamiento	Características	Tar2	Tar3	Tar4	Tar5	AP	TOTAL
Convergente	PCSD						
	PCV						
	PCG						
	PCTI						
	PCOI						
	PCREG						
	PCPM						
	PCAC						
	PCJ						
	PCCI						
Actitudes positivas hacia las matemáticas	APGA						
	APGC						
	APMFE						
	APATL						
	APPT						

Estudiante 6. Grado undécimo.

En sus tareas, se puede evidenciar que llega a una fórmula correcta, la cual verifica para casos particulares y justifica expresando claramente patrones y procesos empleados.

Pensamiento	Características	Tar2	Tar3	Tar4	Tar5	AP	TOTAL
Divergente	PDRF						
	PDIO						
	PDEE						
	PDFIE						
Convergente	PCSD						
	PCV						
	PCG						
	PCTI						
	PCOI						
	PCREG						
	PCPM						
	PCAC						

Pensamiento	Características	Tar2	Tar3	Tar4	Tar5	AP	TOTAL
	PCJ						
	PCCI						
Actitudes positivas hacia las matemáticas	APGA						
	APGC						
	APMFE						
	APATL						
	APPT						

Estudiante 4. Grado undécimo.

En sus tareas, se puede evidenciar que llega a una fórmula correcta, la cual en algunos casos verifica para casos particulares y en otros escribe que se reemplaza y cumple. Por otro lado, justifica expresando claramente patrones y procesos empleados, además de que es capaz de identificar estructuras de un problema trabado, sin embargo, no logra hacer eso de ello.

Pensamiento	Características	Tar2	Tar3	Tar4	Tar5	AP	TOTAL
Divergente	PDRF						
	PDIO						
	PDEE						
	PDFIE						
Convergente	PCSD						
	PCV						
	PCG						
	PCTI						
	PCOI						
	PCREG						
	PCPM						
	PCAC						
	PCJ						
	PCCI						
	PCCI						
Actitudes positivas hacia las	APGA						
	APGC						
	APMFE						

Pensamiento	Características	Tar2	Tar3	Tar4	Tar5	AP	TOTAL
matemáticas	APATL						
	APPT						

Estudiante 21. Grado undécimo.

En sus tareas, se puede evidenciar que llega a una fórmula correcta, la cual verifica para casos particulares y justifica expresando claramente patrones y procesos empleados.

Pensamiento	Características	Tar2	Tar3	Tar4	Tar5	AP	TOTAL
Divergente	PDRF						
	PDIO						
	PDEE						
	PDFIE						
Convergente	PCSD						
	PCV						
	PCG						
	PCTI						
	PCOI						
	PCREG						
	PCPM						
	PCAC						
	PCJ						
	PCCI						
	Actitudes positivas hacia las matemáticas	APGA					
APGC							
APMFE							
APATL							
APPT							

Estudiante 37. Grado décimo.

En sus tareas, se puede evidenciar que llega a una fórmula correcta y además diferentes a las de sus compañeras, las cuales reescribe utilizando conocimientos

previos y verifica para casos particulares. Además, describe claramente procesos y patrones utilizados para llegar a la solución de las tareas y es capaz de analizar y estudiar soluciones diferentes a las propuestas por ella.

Pensamiento	Características	Tar2	Tar3	Tar4	Tar5	AP	TOTAL
Divergente	PDRF						
	PDIO						
	PDEE						
	PDFIE						
Convergente	PCSD						
	PCV						
	PCG						
	PCTI						
	PCOI						
	PCREG						
	PCPM						
	PCAC						
	PCJ						
	PCCI						
	Actitudes positivas hacia las matemáticas	APGA					
APGC							
APMFE							
APATL							
APPT							

Estudiante 10. Grado undécimo.

En sus tareas, se puede evidenciar que llega a una fórmula correcta la cual verifica para casos particulares. Además, describe claramente procesos y patrones utilizados para llegar a la solución de las tareas.

Pensamiento	Características	Tar2	Tar3	Tar4	Tar5	AP	TOTAL
Divergente	PDRF						
	PDIO						
	PDEE						

Pensamiento	Características	Tar2	Tar3	Tar4	Tar5	AP	TOTAL
Convergente	PDFIE						
	PCSD						
	PCV						
	PCG						
	PCTI						
	PCOI						
	PCREG						
	PCPM						
	PCAC						
	PCJ						
	PCCI						
Actitudes positivas hacia las matemáticas	APGA						
	APGC						
	APMFE						
	APATL						
	APPT						

Estudiante 19. Grado undécimo.

En sus tareas, se puede evidenciar que llega a una fórmula correcta y además diferentes a las de sus compañeras, la cual verifica para casos particulares. Además, describe claramente procesos y patrones utilizados para llegar a la solución de las tareas y es capaz de validar diferentes respuestas de la misma situación.

Pensamiento	Características	Tar2	Tar3	Tar4	Tar5	AP	TOTAL
Divergente	PDRF						
	PDIO						
	PDEE						
	PDFIE						
Convergente	PCSD						
	PCV						
	PCG						
	PCTI						

Pensamiento	Características	Tar2	Tar3	Tar4	Tar5	AP	TOTAL
	PCOI						
	PCREG						
	PCPM						
	PCAC						
	PCJ						
	PCCI						
Actitudes positivas hacia las matemáticas	APGA						
	APGC						
	APMFE						
	APATL						
	APPT						

Estudiante 5. Grado undécimo.

En sus tareas, se puede evidenciar que llega a una fórmula correcta y además diferentes a las de sus compañeras, las cuales reescribe utilizando conocimientos previos y verifica para casos particulares. Además, describe claramente procesos y patrones utilizados para llegar a la solución de las tareas y es capaz de analizar y estudiar soluciones diferentes a las propuestas por ella.

Pensamiento	Características	Tar2	Tar3	Tar4	Tar5	AP	TOTAL
Divergente	PDRF						
	PDIO						
	PDEE						
	PDFIE						
Convergente	PCSD						
	PCV						
	PCG						
	PCTI						
	PCOI						
	PCREG						
	PCPM						
	PCAC						
	PCJ						

Pensamiento	Características	Tar2	Tar3	Tar4	Tar5	AP	TOTAL
Actitudes positivas hacia las matemáticas	PCCI						
	APGA						
	APGC						
	APMFE						
	APATL						
	APPT						

Estudiante 14. Grado undécimo.

Es una de las últimas estudiantes en entregar su tarea 2, sin embargo, se puede evidenciar que llega a una fórmula correcta, la cual verifica para las 3 primeras figuras, en términos generales se puede evidenciar que llega a una fórmula correcta la cual verifica para casos particulares. Además, describe claramente procesos y patrones utilizados para llegar a la solución de las tareas.

Pensamiento	Características	Tar2	Tar3	Tar4	Tar5	AP	TOTAL
Divergente	PDRF						
	PDIO						
	PDEE						
	PDFIE						
Convergente	PCSD						
	PCV						
	PCG						
	PCTI						
	PCOI						
	PCREG						
	PCPM						
	PCAC						
	PCJ						
	PCCI						
	Actitudes positivas hacia las matemáticas	APGA					
APGC							
APMFE							
APATL							

	APPT						
--	------	--	--	--	--	--	--

Estudiante 24. Grado undécimo

En términos generales para las tareas 2, 3 y 4 la estudiante Identifica características que se mantienen o cambian en los términos de la secuencia. Además, describe claramente procesos y patrones utilizados para llegar a la solución de las tareas, particularmente en la tarea 2, se puede evidenciar que llega a una fórmula $4 + 3n$, la cual es correcta para n desde 0, sin embargo, la estudiante no lo especifica, por lo que se podría afirmar que la estudiante no relaciona la fórmula con la posición. Cabe mencionar que la estudiante manifiesta gusto por resolver ejercicios que impliquen hacer numerosos cálculos.

Pensamiento	Características	Tar2	Tar3	Tar4	Tar5	AP	TOTAL
Divergente	PDRF						
	PDIO						
	PDEE						
	PDFIE						
Convergente	PCSD						
	PCV						
	PCG						
	PCTI						
	PCOI						
	PCREG						
	PCPM						
	PCAC						
	PCJ						
	PCCI						
	Actitudes positivas hacia las matemáticas	APGA					
APGC							
APMFE							
APATL							
APPT							

Estudiante 13. Grado décimo.

Se puede observar que desarrolla satisfactoriamente sus tareas 2, 3 y 4 en las que se logra observar que llega a una fórmula correcta, la cual verifica para casos particulares y describe correctamente justificación y patrones, adicionalmente en la ejecución de la tarea 2, se puede evidenciar que llega a una fórmula correcta, la cual verifica para las 3 primeras figuras. Cabe mencionar que la estudiante manifiesta deseo por resolver problemas matemáticos y estudiar algo afín.

Pensamiento	Características	Tar2	Tar3	Tar4	Tar5	AP	TOTAL
Divergente	PDRF						
	PDIO						
	PDEE						
	PDFIE						
Convergente	PCSD						
	PCV						
	PCG						
	PCTI						
	PCOI						
	PCREG						
	PCPM						
	PCAC						
	PCJ						
	PCCI						
	APGA						
Actitudes positivas hacia las matemáticas	APGC						
	APMFE						
	APATL						
	APPT						

Estudiante 32. Grado décimo.

En términos generales se puede observar que en las tareas 2, 3 y 4 identifica elementos relevantes de forma rápida y empleando caminos cortos, además expresa algebraicamente regularidades de los términos de la secuencia y realiza su verificación. La estudiante es la quinta en entregar la tarea 2, a los 14 minutos aproximadamente. Al observar las respuestas, se puede evidenciar que llegó a una fórmula correcta y la verifica para las tres primeras figuras. Cabe mencionar que la estudiante manifiesta deseo por resolver problemas matemáticos y estudiar algo afín.

Pensamiento	Características	Tar2	Tar3	Tar4	Tar5	AP	TOTAL
Divergente	PDRF						
	PDIO						
	PDEE						
	PDFIE						
Convergente	PCSD						
	PCV						
	PCG						
	PCTI						
	PCOI						
	PCREG						
	PCPM						
	PCAC						
	PCJ						
	PCCI						
	Actitudes positivas hacia las matemáticas	APGA					
APGC							
APMFE							
APATL							
APPT							

Estudiante 16. Grado décimo.

En términos generales se puede observar que en las tareas 2 y 3 argumenta los procesos utilizados para llegar a la fórmula, además tiene capacidad de

visualización. En particular al observar sus respuestas de la tarea 2, se puede evidenciar que llegó a una fórmula correcta y la cual verifica para las tres primeras figuras.

Pensamiento	Características	Tar2	Tar3	Tar4	Tar5	AP	TOTAL
Divergente	PDRF						
	PDIO						
	PDEE						
	PDFIE						
Convergente	PCSD						
	PCV						
	PCG						
	PCTI						
	PCOI						
	PCREG						
	PCPM						
	PCAC						
	PCJ						
	PCCI						
Actitudes positivas hacia las matemáticas	APGA						
	APGC						
	APMFE						
	APATL						
	APPT						

Estudiante 8. Grado décimo.

En términos generales se puede observar que en las tareas 3 y 4 identifica elementos relevantes de forma rápida y empleando caminos cortos, además argumenta los procesos utilizados para llegar a la fórmula.

La estudiante no presenta la tarea 2, pues no asiste al colegio. En el desarrollo de las demás tareas se puede evidenciar que logra escribir una fórmula que expresa el patrón y la verifica para algunos términos.

Pensamiento	Características	Tar2	Tar3	Tar4	Tar5	AP	TOTAL	
Divergente	PDRF							
	PDIO							
	PDEE							
	PDFIE							
Convergente	PCSD							
	PCV							
	PCG							
	PCTI							
	PCOI							
	PCREG							
	PCPM							
	PCAC							
	PCJ							
	PCCI							
	Actitudes positivas hacia las matemáticas	APGA						
		APGC						
APMFE								
APATL								
APPT								

Estudiante 11. Grado décimo.

En términos generales se puede observar que en las tareas 2, 3 y 4 argumenta los procesos utilizados para llegar a la fórmula, además Identifica características que se mantienen o cambian en los términos de la secuencia.

Particularmente en la tarea 2 la estudiante, en es la quinta en terminar, a los 12 minutos aproximadamente. Al observar las respuestas, se puede evidenciar que llegó a una fórmula correcta y la verifica para una figura.

Pensamiento	Características	Tar2	Tar3	Tar4	Tar5	AP	TOTAL
Divergente	PDRF						
	PDIO						

Pensamiento	Características	Tar2	Tar3	Tar4	Tar5	AP	TOTAL
Convergente	PDEE						
	PDFIE						
	PCSD						
	PCV						
	PCG						
	PCTI						
	PCOI						
	PCREG						
	PCPM						
	PCAC						
	PCJ						
	PCCI						
	Actitudes positivas hacia las matemáticas	APGA					
APGC							
APMFE							
APATL							
APPT							

Estudiante 17. Grado décimo.

En términos generales se puede observar que en las tareas 2, 3 y 4 usa tablas para relacionar la posición de la figura y las características de la misma, y la emplea para llegar a la fórmula, además expresa de forma clara y fluida los patrones y fórmulas relacionadas a la secuencia. Particularmente en la tarea 2, se puede evidenciar que llega a una fórmula correcta, la cual verifica para una de las primeras figuras. Cabe resaltar que la estudiante manifiesta deseo por resolver problemas matemáticos y estudiar algo afín.

Pensamiento	Características	Tar2	Tar3	Tar4	Tar5	AP	TOTAL
Divergente	PDRF						
	PDIO						
	PDEE						
	PDFIE						
Convergente	PCSD						

Pensamiento	Características	Tar2	Tar3	Tar4	Tar5	AP	TOTAL
	PCV						
	PCG						
	PCTI						
	PCOI						
	PCREG						
	PCPM						
	PCAC						
	PCJ						
	PCCI						
	Actitudes positivas hacia las matemáticas	APGA					
APGC							
APMFE							
APATL							
APPT							

Estudiante 27. Grado undécimo.

En términos generales se puede observar que en las tareas 2, 3 y 4 logra observar elementos relevantes de forma rápida y empleando caminos cortos, adicionalmente expresa algebraicamente regularidades de los términos de la secuencia y realiza la verificación y particularmente la tarea 2 no la realiza el mismo día de sus compañeras pues faltó al colegio; sin embargo, cuando presenta la tarea, llega a una fórmula correcta la cual verifica para las tres primeras figuras. Cabe mencionar que la estudiante manifiesta deseo por resolver problemas matemáticos y estudiar algo afín.

Pensamiento	Características	Tar2	Tar3	Tar4	Tar5	AP	TOTAL
Divergente	PDRF						
	PDIO						
	PDEE						
	PDFIE						
Convergente	PCSD						
	PCV						

Pensamiento	Características	Tar2	Tar3	Tar4	Tar5	AP	TOTAL
	PCG						
	PCTI						
	PCOI						
	PCREG						
	PCPM						
	PCAC						
	PCJ						
	PCCI						
Actitudes positivas hacia las matemáticas	APGA						
	APGC						
	APMFE						
	APATL						
	APPT						

Estudiante 22. Grado undécimo.

En términos generales se puede observar que en las tareas 2, 3 y 4 logra observar elementos relevantes de forma rápida y empleando caminos cortos, adicionalmente expresa de forma clara y fluida los patrones y fórmulas relacionados a las secuencias y particularmente, en la tarea 2, se puede evidenciar que llega a una fórmula que no es correcta, sin embargo, al ver la verificación que hace para las 4 primeras figuras, se hace evidente que el la formula le faltó escribir un más, pero si lo está teniendo en cuenta, en este sentido la expresión $n + 1 \ 2n$ la está pensando como $n + 1 + 2n$ la cual es una formula correcta y además diferente a las planteadas por sus compañeras, pero en su justificación no es evidente la forma de razonamiento utilizado para llegar a dicha expresión.

Pensamiento	Características	Tar2	Tar3	Tar4	Tar5	AP	TOTAL
Divergente	PDRF						
	PDIO						
	PDEE						
	PDFIE						

Pensamiento	Características	Tar2	Tar3	Tar4	Tar5	AP	TOTAL
Convergente	PCSD						
	PCV						
	PCG						
	PCTI						
	PCOI						
	PCREG						
	PCPM						
	PCAC						
	PCJ						
	PCCI						
	Actitudes positivas hacia las matemáticas	APGA					
APGC							
APMFE							
APATL							
APPT							

Estudiante 25. Grado undécimo.

En términos generales se puede observar que en las tareas 2, 3 y 4 logra observar elementos relevantes de forma rápida y empleando caminos cortos, adicionalmente expresa de forma clara y fluida los patrones y fórmulas relacionados a las secuencias y particularmente en su tarea 2, se puede evidenciar que llega a una fórmula correcta, la cual verifica para una de las figuras.

Pensamiento	Características	Tar2	Tar3	Tar4	Tar5	AP	TOTAL
Divergente	PDRF						
	PDIO						
	PDEE						
	PDFIE						
Convergente	PCSD						
	PCV						
	PCG						
	PCTI						
	PCOI						

Pensamiento	Características	Tar2	Tar3	Tar4	Tar5	AP	TOTAL
	PCREG						
	PCPM						
	PCAC						
	PCJ						
	PCCI						
Actitudes positivas hacia las matemáticas	APGA						
	APGC						
	APMFE						
	APATL						
	APPT						

Estudiante 30. Grado undécimo.

Siempre es una de las primeras estudiantes que termina su tarea de manera satisfactoria. Adicionalmente expresa de forma clara y fluida los patrones y fórmulas relacionados a las secuencias y ocasionalmente expresa fórmulas diferentes a las comúnmente presentadas por sus compañeras. Particularmente es destacable que es la única estudiante que termina correctamente la tarea 5.

Pensamiento	Características	Tar2	Tar3	Tar4	Tar5	AP	TOTAL
Divergente	PDRF						
	PDIO						
	PDEE						
	PDFIE						
Convergente	PCSD						
	PCV						
	PCG						
	PCTI						
	PCOI						
	PCREG						
	PCPM						
	PCAC						
	PCJ						
	PCCI						

Pensamiento	Características	Tar2	Tar3	Tar4	Tar5	AP	TOTAL
Actitudes positivas hacia las matemáticas	APGA						
	APGC						
	APMFE						
	APATL						
	APPT						

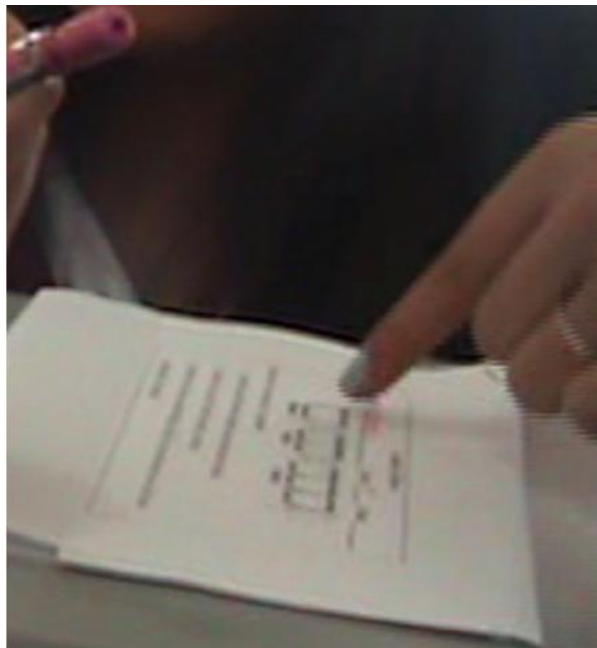
Anexo 8. Transcripción video Tarea 2.

Profesora: ¿qué fue lo primero que pensaste para abordar el ejercicio?

Estudiante 30: es que yo voy contando para encontrar como la razón, entonces miro cuánto aumenta, entonces aquí hay 4, aquí hay 7, aquí hay 10... y la razón es 3.

Profesora: ¿luego que hiciste?

Estudiante 30: empecé a mirar una fórmula para que me diera, entonces la razón la multiplico por 1 y empecé a mirar que le podía sumar o restar para que me diera el primero



Anexo 9. Transcripción audio Tarea 3.

Profesora: ¿pensaste en una estrategia para llegar a la solución del problema?

Estudiante 30: “yo lo que siempre hago es mirar cual es la razón, siempre lo primero que miro es cuál es la razón y empiezo a mirar cómo esa razón me sirve, entonces ese número que me da la razón siempre lo uso y luego empiezo a mirar que le tengo que sumar, resta multiplicar o dividir para que me dé el resultado de la sucesión”

Anexo 10. Transcripción audio Tarea 4.

Audio de la estudiante 30 y la estudiante 14

Estudiante 14: aumenta por dos

Estudiante 30: ¿Qué aumenta por dos?

Estudiante 14: que en la primera dice uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis hasta ocho.

Estudiante 30: pero aquí nos toca mirar, dice escribir una fórmula para obtener el número de triángulos que rodean n números de baldosas blancas, ósea, n va a ser el número de triángulos, entonces va a ser n más dos, porque dos por uno dos más dos cuatro, dos por dos cuatro más dos seis y ya, esa es la fórmula, luego de que su compañera enuncia el patrón aumenta por dos, ya esa es la fórmula.

Estudiante 14: Ahora explicar por qué la fórmula es correcta, bueno vamos a aplicarla, dos por uno dos más dos cuatro, dos por dos cuatro más dos seis, dos por tres seis más dos ocho.

Estudiante 30: O puede ser también tres n más uno, tres por 1 es tres más uno es cuatro, tres por dos es seis más uno siete, a no, no sirve.

Estudiante 14: nos toca explicar por qué la fórmula es correcta.

Estudiante 30: la fórmula es correcta porque al reemplazar n valores, n por cualquier valor se cumple la secuencia.

Estudiante 14: ya, ahora explicar detalladamente como lo hicimos

Estudiante 30: hallar la razón y buscar que número se debe operar para que se cumpla la sucesión

Estudiante 30: y podríamos buscar otra fórmula...