SOLUCIÓN DE ECUACIONES POR MÉTODOS NUMÉRICOS

LUZ AIDA CACERES PINEDA
DAVID FERNANDO TOCARRUNCHO PINEDA

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
FACULTAD CIENCIA Y TECNOLOGIA
ESCULA DE MATEMATICAS
ESPECIALIZACIÓN EN EDUCACION MATEMÁTICA
BOGOTÁ
2014

SOLUCIÓN DE ECUACIONES POR MÉTODOS NUMÉRICOS

LUZ AIDA CACERES PINEDA
DAVID FERNANDO TOCARRUNCHO PINEDA

Proyecto presentado para optar al título de Especialista en Educación Matemática

Asesor

Mg. WILLIAM ALBERTO JIMENES GOMEZ

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
FACULTAD CIENCIA Y TECNOLOGIA
ESCULA DE MATEMÁTICAS
ESPECIALIZACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
BOGOTÁ
2014

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL

Educadora de educadores

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

ACTA DE EVALUACION DE TESIS DE GRADO

Escuchada la sustentación del Trabajo de Grado titulado ***"Solución de ecuaciones por métodos numéricos."*** Presentado por los estudiantes:

David Fernando Tocarruncho Pineda - 2014182040
Luz Aida Cáceres Pineda - 2014182003

Como requisito parcial para optar al título de **Especialización en Educación Matemática**, analizado el proceso seguido por los estudiantes en la elaboración del Trabajo y evaluada la calidad del escrito final, se le asigno la calificación de **Aprobado** con **44** puntos.

Observaciones:

En constancia se firma a los 03 días del mes de diciembre de 2014.

JURADOS

Director(a) del Trabajo: Profesor(a) ______________________
WILLIAM JIMÉNEZ

Jurado:

Profesor(a) ______________________
YEISON SÁNCHEZ

RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de grado de Especialización
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento	SOLUCIÓN DE ECUACIONES POR MÉTODOS NUMÉRICOS
Autor(es)	CACERES PINEDA, LUZ AIDA; TOCARRUNCHO PINEDA, DAVID FERNANDO
Director	JIMENEZ GOMEZ, WILLIAM ALBERTO
Publicación	Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional, 2014. 65 p.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional
Palabras Claves	Ecuaciones polinómicas, métodos numéricos, factorización, aproximación, método de bisección, método de Newton Raphson.

2. Descripción

En este trabajo se realiza un estudio de los mecanismos de solución de las ecuaciones polinómicas por medio de métodos analíticos y métodos numéricos. Primero se hace una revisión desde los estándares curriculares nacionales identificando los que tienen relación con los métodos numéricos. Luego se plantea el marco teórico en el cual se hace una reseña histórica, se contextualiza al lector sobre los métodos analíticos en la solución de ecuaciones, estos métodos como la factorización, aplicación de la ecuación cuadrática y búsqueda de las raíces de polinomio que se relaciona con la ecuación polinómica determinan soluciones racionales.

Después se definen los métodos numéricos, se dan las características bajo las cuales es pertinente aplicarlos y se estudian algunos como el método gráfico, de bisección, Newton Raphson y punto fijo.

Por último, se diseña un aplicativo de resolución de ecuaciones polinómicas mediante los métodos numéricos, mediante la calculadora HP48GX, el cual se carga en la plataforma Play Store de Google. Además se elabora un tutorial que describe paso a paso las instrucciones para hacer uso del aplicativo.

3. Fuentes

Camacho, M. (28 de 07 de 2010). *Raices de Ecuaciones*. Recuperado el 16 de 09 de 2014, de Slideshare: http://es.slideshare.net/monicacamachoc/metodos-numericos2-4853670

Chapra, s. C. (2006). *Metodos numericos para ingenieros* . E.U: Mc Graw Hill.

http://es.slideshare.net/rjvillon/4metodo-de-la-biseccion. (s.f.).

http://gauss.acatlan.unam.mx/pluginfile.php/16290/mod_resource/content/0/Unidad_2/2.3Metodo_de_Newton.pdf. (s.f.).

James Stewart, L. R. (2001). *Precalculo.* Madrid: Thomson.

Jimenez A.S.M, V. P. (2013). La factorizacion de polinomios de segundo grado y los personajes involucrados en su historia. *I congreso de Educacion Matematica de America Central y el Caribe* (págs. 1-3). Santo domingo, Republica Santodomingo: Universidad pedagogica Nacional.

Luque, L. L. (2005). *Actividades Matematicas para el desarrollo de procesos logicos:clasificar, medir e invertir.* Bogotá: Universidad Pedagogica Nacional.

Nacional, M. d. (2003). Estandares Básicos de Competencias matemáticas . *Ministerio de Educacion Ncional*, 95.

Torres D.J.A., L. C., Mora Mendieta, L. C., & Luque Linares, C. J. (2013). Factorizacion Algebraica. *sigma*, 1-3.

4. Contenidos

Capítulo 1: Introducción: Se hace una descripción general del contenido del trabajo de grado.

Capítulo 2: Objetivo general y específicos: Se da a conocer la finalidad de la realización del trabajo.

Capítulo 3: Métodos numérico en el currículo: se revisan algunos estándares curriculares dando una caracterización específica de los que se relacionan con los métodos numéricos.

Capítulo 4: Marco histórico: Se hace una reseña histórica de los métodos numéricos, se muestran algunos ejemplos en la solución de ecuaciones por métodos analíticos y se realiza la contextualización de métodos numéricos.

Capítulo 5: Aplicativo en la solución de métodos numéricos: Se muestra el diseño de un software y un tutorial sobre el mismo como medio aplicativo en la solución de las ecuaciones polinómicas mediante los métodos numéricos

Capítulo 6: Conclusiones: se mencionan las conclusiones generales en la elaboración del trabajo de grado.

Bibliografía: Se presentan referencias bibliográficas que contribuyeron al desarrollo del trabajo de grado.

Anexos: Se muestran imágenes del tutorial realizado para la aplicación del software.

5. Metodología

Para el desarrollo de este trabajo se hizo revisión de libros, revistas y estándares curriculares que nos permitieran realizar el marco teórico para contextualizar la caracterización de los métodos numéricos. Se analizaron algunos casos en los cuales se utilizan métodos analíticos como factorización, aplicación de ecuación cuadrática y hallar las raíces racionales para encontrar la solución a ecuaciones polinómicas. Posteriormente se consultó sobre la contextualización de los métodos numéricos realizando una ejemplificación de algunos como: el método de Newton Rapshon , método gráfico, método de bisección y método de punto fijo. Por último se hizo el diseño de un aplicativo para resolver ecuaciones polinómicas por medio de métodos numéricos en el cual el lector puede interactuar ya que se encuentra disponible en Play Store, donde además se explicita todo el procedimiento de instalación, que sirva como herramienta de aprendizaje.

6. Conclusiones

- El análisis efectuado a los diferentes apartados teóricos de los métodos numéricos expuestos en este trabajo, permite visualizar de una forma más clara los diferentes contextos tratados, con el fin de abarcar diferentes campos como el teórico, curricular, procedimental y aplicativo que este tema ofrece, por su flexibilidad a los cálculos numéricos.

- La caracterización realizada de algunos estándares curriculares que se relacionan con los métodos numéricos, nos permitió observar que para el grado once se espera que los estudiantes utilicen técnicas de aproximación en procesos infinitos numéricos y que analicen las relaciones entre la representación gráfica y algebraica de las funciones polinómicas, lo implica que se implemente los métodos numéricos.

- Identificamos como métodos analíticos en la resolución de ecuaciones polinómicas los procesos de factorización, el cual se relaciona con la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma, aplicación de la ecuación cuadrática implementada para ecuaciones de polinomios de grado dos y buscando las raíces del polinomio que se relaciona con la ecuación; en los cuales pudimos determinar que se pueden aplicar para encontrar soluciones con raíces racionales.

- Algunos de los métodos numéricos que estudiamos en la solución de ecuaciones polinómicas hacen referencia al método gráfico, método de bisección, punto fijo y Newton Raphson; su aplicación permite hallar aproximación de las raíces irracionales de las ecuaciones.

- Con herramientas encontradas actualmente como tabletas y celulares, y puntualmente cualquier dispositivo con sistema operativo Android, nos fue posible establecer herramientas de apoyo por medio de la calculadora **Hewlett Packard** 48GX, en la solución de algunos métodos numéricos, lo cual es muy bueno ya que por medio del video tutorial realizado logramos explicitar todo el proceso de instalación, implementación y solución de ecuaciones empleando métodos numéricos.

- Con nuestra aplicación expuesta en Play Store “Métodos Numéricos UPN” nuestros alumnos o cualquier usuario podrá descargar nuestra aplicación, en la cual se explican algunos métodos numéricos y dentro de la cual se incluye el tutorial, con miras a que esta será actualizable en cualquier momento.

- Este trabajo nos sirvió para enriquecer nuestro conocimiento en un tema del cual no teníamos una comprensión exacta, como son los métodos numéricos en la solución de ecuaciones, también la familiaridad que estos tienen con los casos de factorización que se aprenden en la escuela, y el paso de polinomio, a función polinómica para determinar soluciones gráficas de los mismos, ya sea realizándolas nosotros o con el empleo de computadoras.

Elaborado por:	LUZ AIDA CACERES PINEDA DAVID FERNANDO TOCARRUNCHO PINEDA
Revisado por:	WILLIAM ALBERTO JIMENEZ GOMEZ

Fecha de elaboración del Resumen:	27	10	2014

Nota de aceptación

____

____

____

____

____

____

____

Firma del jurado

____

Firma del jurado

Bogotá, 13 de Octubre de 2013

TABLA DE CONTENIDO

INDICE DE TABLAS

TABLA DE FIGURAS

INTRODUCCIÓN

El presente tiene como fin hacer un estudio alrededor de las raíces racionales y reales (soluciones) de ecuaciones polinómicas, empleando como herramienta de solución los métodos numéricos que de aquí en adelante los definiremos por las siglas (MN) , para este fin haremos un recorrido sobre los diferentes métodos de solución de ecuaciones polinómicas a lo largo de la historia bien sea analíticos o numéricos para identificar sus símiles y diferencias con el fin de plantear una aplicación móvil que permita probablemente apoyar el proceso de solución de ecuaciones por MN entendidos como

Procedimientos mediante los cuales se obtiene, casi siempre de manera aproximada, la solución de ciertos problemas realizando cálculos puramente aritméticos y lógicos (operaciones aritméticas elementales, cálculo de funciones, consulta de una tabla de valores, cálculo preposicional, etc.).

En primera instancia realizaremos una mirada curricular desde los lineamientos y estándares básicos de competencias 2006, identificando aquellos que hacen referencia o involucran la resolución de ecuaciones por métodos numéricos, análisis y factorización de expresiones, para lo cual se citan textualmente algunos estándares, y se hace una caracterización de los mismos visualizándolos a través de la perspectiva que se tiene de los métodos numéricos.

Luego, se organiza un marco teórico donde se contextualiza al lector sobre los mecanismos utilizados para resolver ecuaciones de distinto grado teniendo en cuenta el manejo que se le da desde el colegio al tema respectivo. Los procesos que se analizan son factorización, relacionándola con la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma, e interpretando los casos expuestos en la escuela; el empleo de la fórmula de la ecuación cuadrática, para la cual se tienen en cuenta ecuaciones con polinomios de grado dos; buscar las raíces del polinomio relacionado con la ecuación para lo cual se aplica el teorema fundamental del algebra y analizar la relación entre raíz y factor de un polinomio para obtener las soluciones de una ecuación de grado tres o mayor.

Donde lo anterior lo definiremos como métodos analíticos, ya que de una u otra forma podemos aplicar una trasformación algebraica preestablecida a estos para poder encontrar las raíces de un polinomio, pero cuando son polinomios de grados superiores en los cuales no es posible aplicar alguna trasformación o factorización, nos apoyamos en los métodos numéricos como herramienta de aproximación en el cálculo de las raíces y como una respuesta a la solución de los mismos.

Además tenemos en cuenta que con los métodos analíticos estamos limitados a un conjunto de soluciones racionales, y algunas irracionales pero con los MN podemos ampliar este conjunto de polinomios dado que con esta herramienta se puede hallar la raíz de polinomios que tengan cualquier solución en los irracionales y con esto ya tenemos un nuevo rango de soluciones, la cual está determinada por el conjunto de los números reales dado que este en continuo y además es un dominio de integridad.

Enseguida, se muestra la contextualización de los métodos numéricos empleados en la resolución de ecuaciones, haciendo hincapié en la definición, las clases de métodos que existen y su aplicación. Además, se realiza una reflexión sobre la pertinencia de la enseñanza en la escuela.

Por último, con el fin de que este tema sea abordado de una manera más dinámica e interactiva desarrollamos un software (aplicación) sobre métodos numéricos donde se exponen algunos métodos empleados en el presente trabajo. Paralelamente hemos hecho un video tutorial basado en la calculadora Hewlett Packard 48GX, en el cual se explicita el proceso de solución de ecuaciones polinómicas empleando métodos numéricos basándonos en librerías existentes.

2. OBJETIVOS

2.1 OBJETIVO GENERAL:

- Estudiar diferentes métodos de solución de ecuaciones polinómicas con el fin de diseñar una aplicación móvil para trabajar alrededor de los métodos numéricos y que esta permita probablemente apoyar el proceso de enseñanza-aprendizaje en la escuela.

2.1. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Reconocer algunos métodos de solución de ecuaciones de polinomios como la factorización de ecuaciones polinómicas como métodos analíticos y determinar su alcance en la solución de ecuaciones polinómicas.
- Identificar y estudiar algunos métodos numéricos que existen para solucionar ecuaciones polinómicas en el conjunto de los números reales.
- Implementar en algún aplicativo los métodos elegidos para solucionar algunas familias de ecuaciones.
- Por medio de un video instruir sobre cómo se solucionan ecuaciones polinómicas empleando MN, basado en la calculadora Hewlett Packard 48 GX.

3. MÉTODOS NUMÉRICOS EN EL CURRÍCULO

A continuación estableceremos una caracterización de los pensamientos y de los estándares curriculares relacionándolos directamente con los métodos numéricos, basándonos en el hecho que estos van más allá de la lista de contenidos allí propuestos y los cuales abordan diferentes ramas de la matemática, los estándares establecen criterios en los cuales el docente se debe basar en el desarrollo de los cursos de matemáticas, y ahora vamos a relacionarlos con la trasformación de ecuaciones o la factorización y el tratamiento de los métodos numéricos.

3.1. DESDE LOS PENSAMIENTOS

En los estándares curriculares no se encuentran en algún grado donde se explicite la factorización y mucho menos los métodos numéricos. Pero no significa que los estándares no establezcan la enseñanza de la factorización ni la de los MN, esta se encuentra de forma implícita y se reconoce como transformación algebraica y en grado 11 los MN se establecen a través de la incompletitud de los números racionales, donde lo anterior se puede evidenciar a continuación:

Haremos referencia a los Estándares Básicos de competencias en matemáticas, 2006, del Ministerio de Educación Nacional, los cuales fueron elaborados en colaboración con las Facultades de educación del país, con el fin de que las instituciones tengan una guía común para la elaboración de planeaciones, manteniendo la autonomía institucional.

Pero, ¿qué son los estándares?, son una serie de criterios o parámetros, los cuales indican lo que se debe enseñar a los estudiantes. Particularmente, los estándares de matemáticas tienen en cuenta tres aspectos: planteamiento y resolución de problemas, razonamiento y comunicación. Además, se encuentran organizados en cinco tipos de pensamiento matemático: pensamiento numérico y sistemas numéricos, pensamiento espacial y sistemas geométricos, pensamiento métrico y sistemas de medidas, pensamiento aleatorio y sistemas de datos y pensamiento variacional y sistemas de algebraicos y analíticos.

A continuación describiremos de manera breve cada pensamiento matemático:

1. Pensamiento numérico y sistemas numéricos: Hace referencia a la comprensión del número, su representación, las relaciones existentes entre ellos y las operaciones pueden efectuarse con ellos en los distintos sistemas numéricos.
2. Pensamiento espacial y sistemas geométricos: Está relacionado con examinar y analizar las propiedades de los espacios de dos y tres dimensiones, además, las formas y figuras contenidas en estos.
3. Pensamiento métrico y sistemas de medidas: Busca la comprensión de las características de medición de los objetos tangibles y no tangibles, por ejemplo el tiempo. Además, caracteriza las unidades y patrones que son utilizadas para medir y los instrumentos empleados de medición.
4. Pensamiento aleatorio y sistemas de datos: Se relaciona con análisis de situaciones mediante la recolección de datos, organización, realización de gráficos, métodos estadísticos de análisis; también trata la noción de probabilidad, relación de situaciones aleatorias con el azar, los patrones que indican los sucesos que no se pueden predecir o no se sabe la causa.
5. Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos: Se refiere a la noción de variable y procesos de cambio. Se representan y describen situaciones que involucran fenómenos de variación. Además, se estudian las propiedades y representación gráficas correspondientes a relaciones y funciones de modelos matemáticos.

Consideramos que los pensamientos presentados se relacionan de alguna forma a la solución de ecuaciones polinómicas por medio de los métodos numéricos y la factorización, en el pensamiento numérico y sistemas numéricos se estudia la teoría de números, en cuanto a la relación de divisibilidad, la descomposición de números compuestos en factores primos en el conjunto de los números reales en el segundo el estudio de sistemas geométricos, la trasformación de una ecuación polinómica a función polinómica para poder determinar u observar cuál es su comportamiento y sus posibles soluciones si las hay. En el tercero en nuestro caso se asocia con la métrica a la solución determinando alguna clase de error a partir del valor verdadero de la raíz de un polinomio.

En cuanto al pensamiento aleatorio y sistemas de datos, es concerniente a la recolección y tabulación de la iteraciones de las raíces de un polinomio y el análisis que se puede hacer con estas iteraciones y con cada uno de los errores que con estas se pueden determinar y por ultimo el pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos relaciona con los métodos analíticos que se establecen(factorización) que sirve para encontrar la raíz de un polinomio la comprensión y uso de los conceptos y procedimientos de las ecuaciones polinómicas y métodos existentes para el aprendizaje referente al cálculo numérico y algebraico.

En términos generales cuando factorizamos expresiones algebraicas tenemos que tener en cuenta la equivalencia de las mismas, además tenemos que priorizar en que si tenemos un polinomio y efectuamos una factorización sobre el mismo, nos encontramos con algunos factores los cuales al ser operados tienen que dar como resultado el polinomio original.

Al terminar grado noveno, el estudiante modela situaciones de variación con funciones polinómicas y analiza en representaciones graficas cartesianas los comportamientos de cambio de funciones específicas pertenecientes a familias de funciones polinómicas, racionales, exponenciales y logarítmicas. Es importante deducir el alcance de cada estándar, en primer lugar se debe identificar las características de las funciones polinómicas, que significa hallar la solución o raíz del polinomio y como se representa en el plano cartesiano, para determinar la las posibles soluciones que puede tener o no tener el mismo.

Es de notar que estos estándares en particular no hacen referencia a determinar métodos solución de polinomios, pero como se mencionó anteriormente, para su alcance es necesario que el estudiante reconozca y aplique diferentes mecanismos de solución para hallar las raíces de los mismos. Ya sea por métodos analíticos o por métodos numéricos.

Para grado once, se espera que los estudiantes: utilicen las técnicas de aproximación en procesos infinitos numéricos, también, que analicen las relaciones y propiedades entre las expresiones algebraicas y las gráficas de funciones polinómicas y racionales y de sus derivadas. (MEN, 2003)

3.2. DESDE LOS ESTÁNDARES CURRICULARES

Al revisar los estándares curriculares hemos escogido aquellos que consideramos pertinentes en cuanto a la y factorización de expresiones y el tratamiento de los métodos numéricos los cuales caracterizamos a continuación:

GRADO	ESTANDAR	CARACTERIZACIÓN
SEPTIMO	Utilizo métodos informales (ensayo y error, complementación,) en la solución de ecuaciones. (MEN, 2003)	Este es un estándar lo asociamos a la solución grafica de una ecuación polinómica , aquí por ejemplo se tiene una función polinómica en los reales, donde podemos dar valores arbitrarios a la variable independiente y tabulando los resultados para ya sea determinar entre que valores esta la raíz o para graficarla como función polinómica y proponer una aproximación cercana a la raíz (Observando la gráfica) o sea estimar el punto o los puntos de corte en el eje x, luego se tiene que estimar un valor aproximado de la raíz, el cual es sustituido en la variable del polinomio, y si el valor se aproxima a cero es porque está cerca de la solución, el estudiante tiene que dar varios valores y determinar cuál es el que más se acerca a cero con el mayor número de cifras significativas.
NOVENO	Identifica relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas. (MEN, 2003)	En cuanto a las propiedades de las ecuaciones en la búsqueda de las raíces de un polinomio el estudiante conoce las propiedades de la igualdad o sea la uniformidad de las ecuaciones como un aspecto vital en la solución de una ecuación polinómica.
NOVENO	Construir expresiones algebraicas equivalentes a una expresión	Es donde se encuentra de manera implícita la factorización, podemos ver que aquí se establecen

	algebraica dada. (MEN, 2003)	trasformaciones algebraicas equivalentes entre polinomios de aquí se re expresan estos de tal forma que se expliciten la o las soluciones o raíces de los mismos.
NOVENO	Modelar situaciones de variación con funciones polinómicas. (MEN, 2003)	El estudio de la variación permite al estudiante comprender la sintaxis de las diferentes expresiones algebraicas, esto también implica la utilización de enunciados verbales representaciones tabulares con las cuales podemos analizar
NOVENO	Analiza representaciones graficas cartesianas los comportamientos de cambio de funciones, polinómicas, racionales y exponenciales. (MEN, 2003)	A partir de una ecuación polinómica el estudiante reconoce que la puede cambiar a una función polinómica, tabular a partir de valores y verificar el número de soluciones de la ecuación polinómica.
ONCE	Reconozco la densidad e incompletitud de los números racionales a través de métodos numéricos, geométricos y algebraicos. (MEN, 2003)	En el estudio de la solución de ecuaciones polinómicas nos encontramos con conjuntos de soluciones sobre conjuntos enumerables así su alcance se limita al conjunto de los números racionales y es donde a partir de los números irracionales obtenemos la continuidad en las de las raíces y por consiguiente en la solución de polinomios con raíces irracionales y cuyo resultado es el conjunto de los números reales

Tabla 1: Estándares de grado séptimo, novenos y once y su caracterización con relación a los métodos numéricos.

3.3. EJEMPLIFICACION DE UN ESTANDAR

A continuación establecemos un ejemplo del primer estándar de grado Séptimo expuesto anteriormente a través de un ejercicio de métodos numéricos, específicamente aplicando el método gráfico.

Se utiliza la gráfica de un función polinómica para encontrar las soluciones próximas de una ecuación polinómica y así poder determinar las raíces de un polinomio , en donde, se procede a realizar la gráfica de la función polinómica , el estudiante estima el valor de la raíz de la ecuación polinómica (observando la gráfica) o sea el punto o los puntos de corte en el eje X, luego él tiene que estimar un valor aproximado de la raíz ,el cual es sustituido en la variable del polinomio , si el valor se aproxima a cero es porque está cerca de la solución , el estudiante tiene que dar varios valores y determinar cuál es el que más se acerca a cero con el mayor número de cifras significativas.

El polinomio $\mathbf{P(x)} = -\boldsymbol{x^3} + \mathbf{5}$ el cual tiene una raíz la cual esta entre 1 y 2.

Iteración 1

$\mathrm{P}(1.7) = -(1.7)^3 + 5 = 0{,}087$

Iteración 2

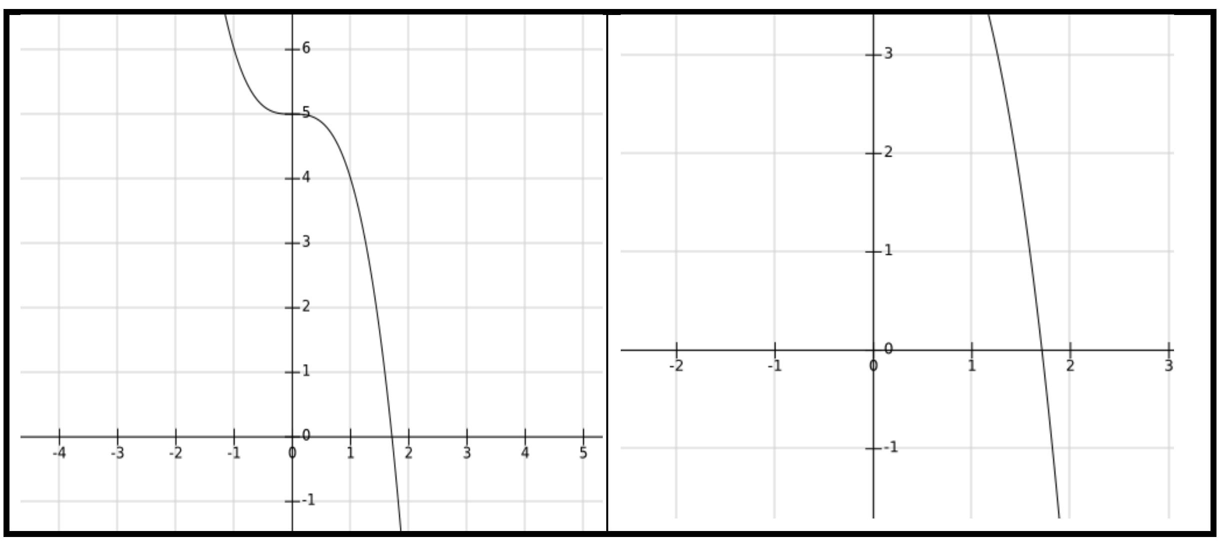
$\mathrm{P}(1.8) = -(1.8)^3 + 5 = -0{,}832$

Iteración 3

$\mathrm{P}(1.71) = -(1.71)^3 + 5 = -0{,}000211$

Iteración 4

$\mathrm{P}(1.72) = -(1.7)^3 + 5 = -0{,}08844$



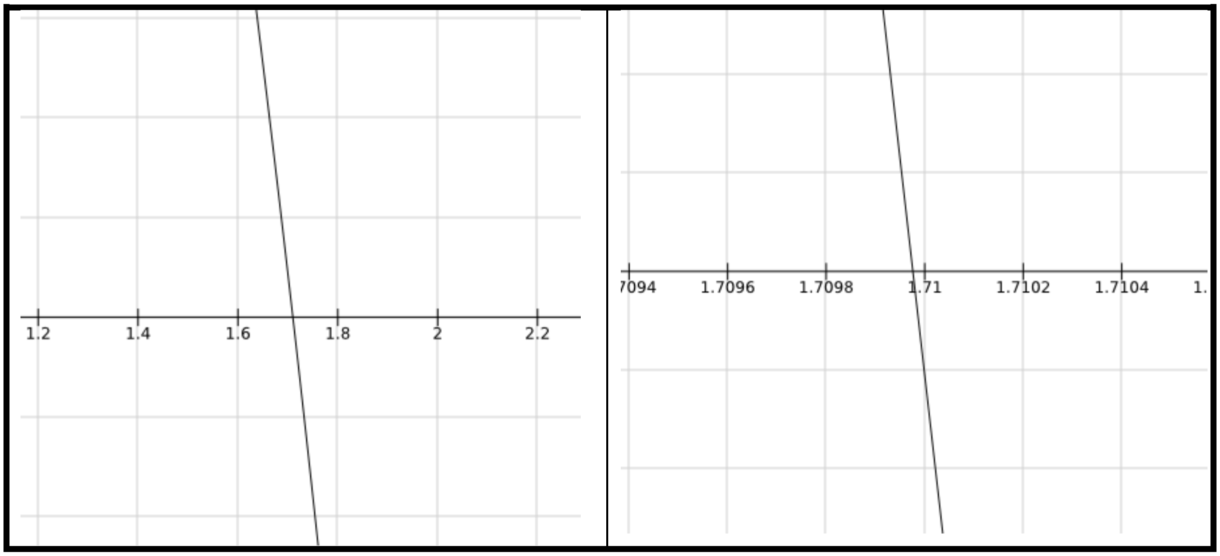


Figura 1. Gráfica polinomio $-x^3 + 5$

4. MARCO HISTÓRICO

Los métodos numéricos surgieron hace más de 2000 años como métodos para aproximar medidas, en el caso de los babilonios de triángulos, los cuales dieron una aproximación de $\sqrt{2}$ de manera muy precisa.

La búsqueda de soluciones aproximadas a problemas matemáticos en general, es un proceso antiguo. Se puede citar como ejemplo los polinomios de Taylor que aproximan a una función, o los polinomios interpoladores obtenidos por Newton y Lagrange para ajustar una función polinómica a una tabla de n valores, o el método de Newton para hallar una solución aproximada de una ecuación, o por último, el método de Euler para el cálculo de una solución aproximada de una ecuación diferencial. (www.pimedios.com, 2013)

4.1. RESEÑA HISTÓRICA

A continuación se hará un breve e recuento histórico sobre la resolución de ecuaciones polinómicas, mencionando los mecanismos que se utilizaron en la historia, la factorización, aplicación de la formula cuadrática, los teoremas fundamentales de la aritmética y el álgebra.

La factorización fue utilizada por primera vez por los babilonios, quienes se interesaron por resolver ecuaciones cuadráticas, las cuales estaban involucradas con situaciones comunes, es así como nace la idea de completar cuadrados utilizando figuras; en la actualidad se pueden relacionar estos procesos con la factorización del trinomio cuadrado perfecto como se conoce en la escuela. En

1930 Neugebaveren descifró tablillas que remontan de 4000 años, se mostraban soluciones a varias ecuaciones empleando este método “de completar el cuadrado”, para lo cual los babilonios desarrollaron factorizaciones simples. (Torres D.J.A., Mora Mendieta, & Luque Linares, 2013)

Por su parte Euclides en su libro II de *Elementos* enuncia algunas proposiciones relacionadas con identidades algebraicas, entre las cuales sobresale la II.5 que se refiere a la diferencia de cuadrados. Además, fue el primer matemático que recopilo los conceptos básicos de la factorización de números, en los libros VII, VIII y IX. En estos tres libros reúne toda la información sobre la aritmética, conceptos asociados a divisibilidad, propiedades y teoremas de números primos, múltiplos, divisores, mínimo común múltiplo, máximos común divisor y algoritmo de Euclides. Con el lenguaje actual, si a, b y c son números enteros tales que cumplen la igualdad $ab = c$, se dice que a y b son divisores o factores de c y que c es múltiplo de a y b. Si a tiene solamente dos divisores (1 y a), se dice que a es un numero primo de lo contrario es compuesto.

Euclides también enuncia lo que se conoce como el teorema fundamental del aritmética le cual fue demostrado por Carl Friedrich Gauss: “si a es un número entero tal que $a \neq 0$ y $a \neq \pm 1$, entonces a puede expresarse como el producto de números primos por ± 1: $a = (\pm 1)p_{1,}\ p_{2,} \dots p_n$, y esta descomposición es única salvo el orden de los factores. (Torres D.J.A., Mora Mendieta, & Luque Linares, 2013)

Luego, Diofanto en su obra *Arithmetica (1575)* muestra indicios sobre la utilización de la 0factorización, por ejemplo en el libro IV el problema 7 que se puede asociar con lo que hoy en día se conoce como el cuadrado de una suma o diferencia.

Thābit Ibn Qurra hace uso de las proposiciones planteadas por Euclides para resolver ecuaciones utilizando figuras (como lo hacía los babilonios), puesto que relaciona los cuadrados con rectángulos de tal manera que logra plantear un método para resolver ecuaciones que hoy día podemos relacionar de la forma $x^2 + px + (\frac{p}{x})^2 = (x + \frac{p}{x})^2$, por tanto Ibn Qurra es quien utiliza los resultados euclidianos y las heurísticas que propuso Al-kuarismi, presentando así métodos generales para la resolución de ciertas ecuaciones. (Jimenez A.S.M, 2013)

Aproximadamente un milenio después, durante el renacimiento Fracois Viete hace la distinción entre variables y coeficientes, por lo cual el álgebra se transformó de un estudio particular a general. Luego, años más tarde, Thomas Harriot en su obra *Artis analyticae praxis* menciona la factorización como mecanismo de solución de algunas ecuaciones cuadráticas. En la sección 4 las proposiciones tienen cuatro pasos, de los cuales el último hace referencia al lema sobre la unicidad de la raíz y en el cual se utiliza la factorización tomando términos comunes en el polinomio para demostrar la desigualdad de dos expresiones. Hill afirma (2011) que la primera ecuación resuelta fue $a^2 - (b + c)a - bc = (a - b)(+c) = 0$, (Jimenez A.S.M, 2013)

Viete quiso demostrar algunos resultados algebraicos por métodos geométricos, por lo cual ignoro resultados negativos y complejos. Pero Rene Descartes supero este problema utilizando el “algebra de segmentos” como se muestra en su obra *Geometra.* Aquí construyó segmentos de longitud $a+b$, $a-b$, ab, a/b, y $\sqrt{a}$ y así elimino la obligatoriedad sobre la homogeneidad entre las expresiones propuestas por Viete. Se interesó por determinar la cantidad de raíces de una ecuación polinómica, lo cual lo condujo a mencionar el teorema del factor de la siguiente manera: “si r es raíz de $P(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+a_{n-3}x^{n-3}+\cdots+a_nx+a_0$, entonces $P(x)=(x-r)q(x)$, es decir $x-r$ es factor de $P(x)$, donde el grado $q(x) <$ grad $P(x)$. Por lo cual, se de determina que un polinomio de grado n tiene exactamente n raíces, no necesariamente distintas. Es decir el polinomio se puede expresar como producto de factores: $P(x)=(x-r_1)(x-r_2)\dots(x-r_i)$. (Jimenez A.S.M, 2013)

También es conocido que Tartaglia y Cardano encontraron una formula análoga para ecuaciones cubicas (en la que aparecen raíces cubicas además de raíces cuadradas) y que Ferrari encontró otra más compleja para ecuaciones cuadráticas. En realidad, más que formulas, encontraron métodos de resolución que pueden resumirse en sendas formulas, si bien, en el caso de las ecuaciones cuarticas, la fórmula es tan compleja que resulta inmanejable, y es preferible describir el proceso de resolución como un algoritmo de varios pasos. Por último, Abel demostró que, para n > 4, no existen fórmulas análogas que expresen las raíces de la ecuación general de grado n en función de sus coeficientes a través de sumas, productos, cocientes y extracción de raíces, lo que convierte a las fórmulas de Cardano-Ferrari en dos singularidades algebraicas. (Ivorra, 2009)

Los matemáticos centraron su atención en la búsqueda de la solución de ecuaciones de grado quinto durante más de dos siglos y medio. Niels Henry Abel pensó que había encontrado la solución, sin embargo el mismo hallo el error de la demostración y publicó en 1824 la imposibilidad de encontrar alguna solución para la ecuación de grado quinto en su “sobre la resolución algebraica de ecuaciones”. Luego, se intentó determinar las condiciones bajo las cuales una ecuación de quinto grado tiene solución, para lo cual los trabajos de Lagrange, Legenedre, Gauss, Aberl; Evariste Galois logro encontrar las condiciones para las cuales las ecuaciones de grado mayor a cuatro tienen solución estudiando las permutaciones de las raíces de la ecuación. Por lo tanto el estudio del algebra paso de la solución de ecuación a determinar el estudio de estructuras de grupo y de campo. (Torres D.J.A., Mora Mendieta, & Luque Linares, 2013)

4.2. QUE SON LOS MÉTODOS NUMÉRICOS

En esta sección haremos un tratamiento a la solución de ecuaciones polinómicas iniciando con algunos ejemplos de factorización en polinomios con el fin de hallar sus raíces o soluciones, estos métodos los definiremos como métodos analíticos[1].

En algunas ocasiones no existen métodos analíticos capaces de resolver modelos, particularmente en este caso estos métodos quedan limitados en cuanto a la factorización de polinomios con coeficientes irracionales o reales por tanto tenemos que remitir nos a los métodos numéricos como una respuesta a estos polinomios de grado superior el cual definimos como:

Un método numérico es un procedimiento mediante el cual se obtiene, casi siempre de manera aproximada, la solución de ciertos problemas realizando cálculos puramente aritméticos y lógicos (operaciones aritméticas elementales, cálculo de funciones, consulta de una tabla de valores, cálculo preposicional, etc.).

4.2.1. Factorización

Determinaremos los diferentes métodos analíticos para encontrar la raíz de ecuaciones polinómicas a través de los ejemplos de factorización que se establecerán a lo largo esta sección

En ocasiones en la escuela se suele trabajar el concepto de factorización a través del estudio de algoritmos mecánicos y repetitivos, con los cuales se busca que el estudiante reconozca y memorice ciertas fórmulas que puede aplicar eficazmente para representar bien sea un número o un polinomio como el producto de otros números o polinomios, sin embargo poco se problematiza este concepto en la escuela. Mostraremos un recorrido sobre el uso de la factorización para solucionar ecuaciones polinómicas.

Primero caracterizaremos adecuadamente qué es factorizar, sin embargo, aclaramos que no vamos a dar una definición general, pero si mostraremos lo que se entiende por factorizar a través de ejemplos, en el conjunto de los números enteros y en los polinomios con coeficientes reales, para que luego el lector pueda construir su propia respuesta.

[1] Nos permiten conocer más acerca del objeto de estudio, es el análisis, observación y examen de un tema en particular, con el cual se puede explicar, hacer analogías, comprender comportamientos y establecer nuevas teorías, este se basa en formulas.

4.2.1.1. Factorización en el conjunto de números enteros

En primer lugar debe mencionarse que la estructura de los números enteros es un dominio de integridad, con características que facilitan abordar la noción de factorización, pues está definida como una estructura con dos operaciones, una suma y un producto, tales que:

a. La Suma es:
- Asociativa: Para cualquier a, b y $c \in \mathbb{Z}$, se cumple $(a + b) + c = a + (b + c)$;
- Conmutativa: para todo a y $b \in \mathbb{Z}$, se tiene $a + b = b + a$;
- Hay elemento neutro: Existe 0 $\in \mathbb{Z}$, para cada $a \in \mathbb{Z}$, tal que $0 + a = a + 0 = a$;
- Opuestos: para todo $a \in \mathbb{Z}$, existe $-a \in \mathbb{Z}$, tal que $(-a) + a = 0$;

b. La Multiplicación :
- distribuye con respecto a la suma: para cada a, b y $c \in \mathbb{Z}$, se tiene $a(b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$;
- Es asociativa: para cualquier a, b y $c \in \mathbb{Z}$, se cumple $(a \cdot b) \cdot \mathrm{c} = a \cdot (b \cdot c)$;
- Es conmutativa: para todo a y $b \in \mathbb{Z}$, se tiene $a \cdot b = b \cdot a$
- La propiedad cancelativa: para cada $a, b, c \neq 0 \in \mathbb{Z}$, si se tiene $a \cdot c = b \cdot c$ entonces se cumple $a = b$.

Cabe resaltar que la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la suma y cancelativa son aquellas que particularmente permiten tratar la factorización como se hace, y la solución de ecuaciones para factorizar se utiliza la propiedad distributiva de derecha a izquierda y se cancelan términos que son semejantes. A partir de la operación de multiplicación, particularmente se define una relación denominada relación de divisibilidad, que dice que para todo par de números enteros a y b, a divide a b, denotado $a \backslash b$ si y solo existe c, tal que, $a \cdot c = b$. Cuando tenemos esta relación decimos que a es divisor o factor de b.

Por ejemplo, si $3 \backslash 6$, luego 3 es factor de 6 al igual que 2.

De lo anterior se observa que la palabra factorización está ligada a la relación de divisibilidad y sobre todo al hecho de poder expresar un número entero como el producto de algunos de sus factores.

Algunas de sus propiedades son: a, b y $c \in \mathbb{Z},$ con $a \neq 0$,

- a/b si y a/c si entonces $a/b + c$
- a/b y $a/b + c$ entonces a/c

A continuación se muestran dos ejemplos que verifican estas propiedades:

Ejemplo 1: Si $-2/6$ y $-2/10$ entonces $-2/(6 + 10)$, es decir $-2/10$.

Ejemplo 2: Si $3/-15$ y $3/24$, ($3/24$ se puede escribir como $3/15+9$), entonces $3/9$.

Particularmente, la factorización de un número natural puede darse en términos de ciertos factores “especiales” que se caracterizan por ser aquellos que tienen exactamente dos divisores, es decir los números primos o irreducibles, sin embargo ¿todo número entero puede factorizarse así?

Para contestar la pregunta mencionaremos el siguiente teorema:

Teorema fundamental de la aritmética

Todo número compuesto $a \in \mathbb{Z}$, se puede descomponer de forma única como producto de números primos, salvo el orden de los factores.

Ejemplo: El número 720, se puede descomponer o factorizar como: $720 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$

4.2.1.2 Factorización de polinomios con coeficientes reales

El conjunto de polinomios con coeficientes reales es una estructura con dos operaciones una suma y un producto que cumplen las mismas propiedades enunciadas en la sección anterior, luego es un dominio de integridad.

De manera análoga a la forma en la que se define la relación de divisibilidad en los números enteros, en el anillo de polinomios, particularmente con coeficientes reales, podemos decir que:

Dados dos polinomios p y q, el polinomio q divide al polinomio p si y solo si existe otro polinomio r tal que $q \cdot r = p$.

En ese sentido, también podemos hablar de factorizar polinomios como representarlos en términos del producto de algunos de sus factores. Y para ello surgen algunos métodos usuales como:

Factor común: Cuando tenemos un término (número, letra, etc.) como factor en cada uno de los sumandos (monomios[2]), de un polinomio, este término es ***común*** en dicha expresión algebraica, si estamos trabajando en multiplicación a este se le denominaría factor, de aquí es donde nace la palabra factor común. Observemos un ejemplo:

$\boldsymbol{a}.\ 7x+7=7(x+1)$	Factor común es 7
$\boldsymbol{b}.\ 9x^2+9x=9x(x+1)$	Factor común es $9x$

[2] Conjunto de números y de símbolos ligados entre sí por los signos de las operaciones del álgebra

En este algoritmo o método de factorización se puede observar una igualdad entre la factorización y la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma la cual podemos esquematizar como:

$$a(b+c) \underset{\text{Factorización}}{\overset{\text{Distributiva}}{\rightleftharpoons}} a.b+a.c$$

Figura 2.Relacion entre la factorización y la propiedad distributiva

Aunque estos procesos en la escuela se ven como dos temas distintos en sentid estricto son el mismo, no obstante, estos factores comunes algunas veces no son fáciles de identificar puesto que en los términos de una expresión algebraica pueden estar presentes números diferentes y letras con distintos exponentes, por tanto podríamos decir que este factor común se encuentra oculto en entre los términos. Para poder identificar el factor común, si tratamos con números podemos hallar el máximo común divisor entre los mismos, y en el caso de las variables, es la variable que se encuentre con menor exponente. Veamos un ejemplo:

$a.\, 5a - 10 = 5.\, a - 5.2 = 5(a-2)$ Factor común es 5

$b.\, 6x^3 + 12x^2 + 18x = 6x.\, x^2 + 6x.\, 2x + 6x.\, 3 = 6x(x^2 + 2x + 3)$ Factor común es $6x$

Consideramos pertinente mencionar que la factorización de polinomios no siempre se da a través de encontrar factores comunes de manera explícita, por ejemplo:

Por lo general en la escuela nos presentan los 10 casos "Diferentes" en la factorización, aquí veremos cuál es la esencia de la misma:

Factoremos el polinomio $x^2 + 5x + 6$

$$x^2 + 3x + 2x + 6$$
$$x(x+3) + 2(x+3)$$
$$(x+3)(x+2)$$

Ahora,

$P(x) = x^2 + 5x + 6$ Se puede representar como $P(x) = (x+3)(x+2)$ siendo $(x+3)$ y $(x+2)$ Factores de $P(x)$, (Recordemos el caso de factorización donde se buscan dos números que multiplicados den el término independiente y que sumados o restados den el término central.)

Sin embargo, como es conocido, no existe un mecanismo algebraico general para poder encontrar los factores de un polinomio. Recordemos algunas pautas, teniendo en cuenta algunas características como el grado. Trataremos los casos más relevantes en la factorización de polinomios los cuales se describen a continuación:

i. $2x + 4 = 2.x + 2.2 = 2(x + 2)$ Hallamos el factor común, para lo cual identificamos el común divisor común entre el coeficiente de x y el valor independiente, que en este caso es 2 y factorizamos.

ii. $x - ax - b + ab = x.1 - x.a - b.1 + b.a = x.(1 - a) - b(1 - a) = (x - b)(1 - a)$ En este caso determinamos el factor común en los miembros del polinomio, como tenemos cuatro términos, agrupamos los dos primeros y los dos últimos, con el fin de encontrar el factor común entre ellos. Por tanto, el factor común de $x \cdot 1 - x \cdot a$ es x, el factor común de $-b \cdot 1 + b \cdot a$ es $-b$. Ahora, identificamos un término común en la expresión $x \cdot (1 - a) - b \cdot (1 - a)$ que es $(1 - a)$**,** el cual factorizamos para hallar el resultado final.

Para expresar el polinomio como producto de polinomios de grado uno, si es posible, o en última instancia nos han mostrado como a partir de una fórmula se encuentran soluciones para la ecuación $p(x) = 0$ y con ellas se construyen polinomios de grado uno que permiten la factorización de P por ejemplo:

- **a.** $25x^2 - 49 = (5x - 7)(5x + 7)$ En primera instancia encontramos la diferencia de cuadrados, donde primero se tiene que identificar que sea un binomio y que los dos términos sean cuadrados perfectos y que entre los dos tiene que estar establecida una resta, ahora bien, para factorizarlo hallamos la raíz cuadrada de ambos términos, para luego formar dos binomios, uno con suma y otro con resta de las raíces cuadradas previamente halladas, quedando estas multiplicadas entre sí.

- **b.** $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)(x + 1) = (x + 1)^2$ Trinomio cuadrado perfecto, buscamos dos números que multiplicados den 1 y sumados o restados den 2, en este caso se tienen dos binomios iguales.

- **c.** $x^2 + 16x - 36 = (x + 18)(x - 2)$ Se buscan dos números que multiplicados den 36 y que sumados o restados den como resultado el segundo término del trinomio que en este caso es 16 y los escribimos como producto de los binomios de la forma $(x - a)$[3].

- **d.** $2x^2 - 7x - 15 = (2x)^2 - 7(2x) - 30 = (2x - 10)(2x + 3) = (x - 5)(2x + 3)$ En este ejemplo el término principal está acompañado por un número, el cual debe ser multiplicado en todo el trinomio, luego empleamos lo expuesto en el caso anterior, y como se multiplico por el término principal ahora tenemos que dividir por este y así obtenemos la factorización.

---

[3] Expresiones como estas alguna veces no son posible de expresar en los números reales por ejemplo el polinomio x^2+1

e. $x^2 + 2x - 1 = (x - 0.4142135623 \ldots)(x + 2.414213562 \ldots)$ En esta expresión no es posible aplicar el caso anterior, puesto que no hay dos números enteros o racionales que multiplicados den -1 y sumados o restados de 2. Por tanto los hallaremos empleando la formula cuadrática, donde $a = 1$, $b = 2$, $c = -1$

Ahora bien si queremos determinar el número de soluciones de un polinomio de segundo grado consideremos la siguiente herramienta

Valor Discriminante

El discriminante de un polinomio nos permite determinar los diferentes tipos de soluciones que existen en una ecuación polinómica. (Si hay soluciones reales, si hay soluciones repetidas, o si hay soluciones complejas)

Para esto es necesario tener en cuenta el valor discriminante, el cual es una herramienta que nos indica si el polinomio se puede factorizar en R o no.

En un polinomio de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ las raíces de este dependen del discriminante el cual nos dice que:

Si $b^2 - 4ac > 0$ Hay dos raíces reales distintas

Si $b^2 - 4ac = 0$ Hay una raíz doble.

Si $b^2 - 4ac < 0$ No tiene raíces reales.

Para el ejemplo anterior del numeral **e** tenemos

$$(2)^2 - 4(1)(-1)$$

8 > 0 Por tanto tenemos que hay dos raíces reales distintas.

Las cuales son

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4.1.(-1)}}{2.1} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{8}}{2}$$

Donde las soluciones son $x_1 = \frac{-2+\sqrt{8}}{2} = 0.4142135623 \ldots\ y\ x_2 = \frac{-2-\sqrt{8}}{2} = -2.414213562 \ldots$ las cuales son irracionales y las escribimos de la forma $(x - a)$ son $x_1 = -\,0.4142135623 \ldots\ y\ x_2 = 2.414213562 \ldots$

Deducción de la fórmula cuadrática

Cuando tenemos un polinomio cuadrático el cual es difícil descomponer para poder encontrar la solución, recurrimos a una formula la cual la encontramos derivada a través de la formula

$ax^2+bx+c=0$	Forma cuadrática
$x^2+\frac{bx}{a}+\frac{cx}{a}=\frac{0}{a}$	Para simplificar la notación tomaremos que $b'=\frac{b}{a}$ y $c'=\frac{c}{a}$
$x^2+b'x+c'=0$	Sustituyendo
$x^2+b'x+\left(\frac{b'}{2}\right)^2-\left(\frac{b'}{2}\right)^2+c'=0$	Completando el cuadrado
$\left(x+\frac{b'}{2}\right)^2=\left(\frac{b'}{2}\right)^2-c'$	Trinomio cuadrado perfecto
$x+\frac{b'}{2}=\pm\sqrt{\left(\frac{b'}{2}\right)^2-c'}$	Raíz cuadrada
$x=-\frac{b'}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{b'}{2}\right)^2-c'}$	Despejando x
$x=-\frac{b'}{2}\pm\sqrt{\frac{b'^2}{4}-c'}$	Resolviendo la potencia
$x=-\frac{b'}{2}\pm\sqrt{\frac{b'^2-4c'}{4}}$	Resta
$x=-\frac{\left(\frac{b}{a}\right)}{2}\pm\sqrt{\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^2-4\left(\frac{c}{a}\right)}{4}}$	simplificando
$x=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$	Reemplazando b' y c'
$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$	ECUACION CUADRATICA

Ahora bien, hemos visto como factorizar polinomio de grados 2 y 3, Pero ¿Y si el polinomio es de grado superior?, muchas veces no conocemos formas para factorizar dichos polinomios, por tanto emplearemos un método el cual nos permita factorizar polinomios de grado superior como:

- **f.** $x^3-64=(x-4)(x^2+4x+16)$ Diferencia de cubos, lo podemos factorizar encontrando un divisor del termino independiente, el cual es 3es 4 o sea $(x-4)$ por el divisor $x^2+4x+16$ el cual me da como resultado el polinomio planteado o empleado la fórmula que trabajamos en productos notables que dice que $a^3-b^3=(x-a)(a^2+ab+b^2)$

g. $\boldsymbol{x^3 + 27 = (2x + 3)(4x^2 - 6x + 9)}$ Suma de cubos donde se halla la raíz cubica de cada uno de los miembros del binomio y se aplica la formula $\boldsymbol{a^3 + b^3 = (x + a)(a^2 - ab + b^2)}$

4.2.2. Raíces racionales

Un número r es una raíz de un polinomio

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Si al sustituir x por r en el polinomio se obtiene cero, es decir

$$P(r) = a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + a_{n-2} r^{n-2} + \cdots + a_2 r^2 + a_1 r + a_0 = 0$$

Ahora, si

$$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + a_{n-2} r^{n-2} + \cdots + a_2 r^2 + a_1 r + a_0 = 0$$

Se concluye que

$$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + a_{n-2} r^{n-2} + \cdots + a_2 r^2 + a_1 r = -a_0$$

es decir

$$r(a_n r^{n-1} + a_{n-1} r^{n-2} + a_{n-2} r^{n-3} + \cdots + a_2 r + a_1) = -a_0$$

Luego se observa que si en este polinomio de grado n las raíces son ***enteras*** estas deben ser divisores del término independiente a_0

Por ejemplo: Se tiene que

a. $Q(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$

Podemos observar que cuando $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ el polinomio tiene valor cero. Además tales raíces son divisores del término independiente.

Ahora bien, a partir de la observación anterior podemos establecer un criterio para poder identificar las posibles raíces racionales de un polinomio cuando su término principal es 1, y así llegar a factorizar dicho polinomio.

Por ejemplo, si retomamos el polinomio $Q(x)$, vemos que el término independiente es 6, y sus divisores son $\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$, que a su vez son las posibles raíces enteras del polinomio.

Para determinar cuáles de tales números x son en verdad raíces del polinomio, por lo dicho, es suficiente con calcular $Q(x)$ para cada uno y ver si el resultado es cero. Si para alguno de tales valores la evaluación es diferente de cero se concluye que no es una raíz, pero si por el contrario la evaluación da cero tenemos que encontrar la factorización, para lo cual podemos identificar que si $x = a$ es una raíz del polinomio entonces $x - a$ debe ser un factor, con lo cual y utilizando división entre polinomios podemos factorizar finalmente el polinomio para determinar finalmente sus factores.

Para este caso vemos por ejemplo que
$Q(-1) = (-1)^3 - 6.(-1)^2 + 11(-1) - 6 = -24$, luego $x = -1$ no es raíz, pero si tomo

$Q(1) = (1)^3 - 6.(1)^2 + 11(1) - 6 = 0$, tenemos que $Q\ (1) = 0$, así que $(x - 1)$ es un factor de $Q(x)$ y usando la división llegamos a:

$$
\begin{array}{r|l}
x^3 - 6x^2 + 11x - 6 & \underline{x - 1} \\
-x^3 + x^2 \qquad\qquad & x^2 - 5x + 6 \\
\text{--------------}\qquad\qquad & \\
-5x^2 + 11x \qquad & \\
5x^2 - 5x \qquad & \\
\text{----------------}\quad & \\
6x - 6 & \\
-6x + 6 & \\
\text{-----------} & \\
0 \quad &
\end{array}
$$

Es decir

$$Q(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x - 1)(x^2 - 5x + 6)$$

Donde llegamos a una cuadrática que ya sabemos cómo factorizar, concluyendo que

$$Q(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$$

Ahora, si en lugar de tomar inicialmente a $x = 1$ tomamos $x = 2$, vemos que este también es una raíz, luego aplicando el mismo procedimiento tenemos:

$$
\begin{array}{l|l}
\quad x^3 - 6x^2 + 11x - 6 & x-2 \\ \cline{2-2}
-x^3 + 2x^2 & \quad x^2 - 4x + 3 \\
\text{--------------} & \\
\qquad -4x^2 + 11x & \\
\qquad\quad 4x^2 - 8x & \\
\qquad \text{----------------} & \\
\qquad\qquad\qquad 3x - 6 & \\
\qquad\qquad\quad -3x + 6 & \\
\qquad\qquad \text{---------------} & \\
\qquad\qquad\qquad\quad\; 0 &
\end{array}
$$

Es decir que encontramos otro termino cuadratico diferente el cual al factorizarlo nos da como resultado los factores $(x-1)$ y $(x-3)$, podemos observar que son los mismos factores que se obtuvieron al dividir por el primer factor. Por tanto basta con dividir por un factor para encontrar los factores restantes.

$Q(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-2)(x-1)(x-3)$
Y finalmente tenemos la factorización.

De manera análoga, se puede verificar que si las raíces del polinomio cuando su término principal es diferente de 1

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ son **racionales**, de la forma p/q *con p y q enteros,* se establece que p debe ser divisor del término independiente a_0 y q debe ser divisor del término principal a_n.

b. Sea el polinomio $H(x) = 3x^3 - 4x^2 - 5x + 2$

Primero hallamos los divisores del término independiente $Da_0 = \{\pm 1, \pm 2\}$, ahora los divisores del término principal $Da_n = \{\pm 1, \pm 3\}$, luego determinamos las posible raíces racionales $p/q = \pm 1, \pm \frac{1}{3}, \pm 2, \pm \frac{2}{3}$

Veamos que

$H(x) = 3(1)^3 - 4(1)^2 - 5(1) + 2 = 3 - 4 - 5 + 2 = -10$

Pero si tomamos

$H(x) = 3(-1)^3 - 4(-1)^2 - 5(-1) + 2 = -3 - 4 + 5 + 2 = 0$

Por tanto es una raíz del polinomio $H(x)$**.** Así que $(x - (-1)) = (x+1)$ es factor de $H(x)$

Por tanto, podemos hacer la división entre polinomios para obtener la factorización.

$$
\begin{array}{l|l}
\quad x^3 - 4x^2 + 5x + 2 & \underline{\; x + 1 \;} \\
-3x^3 - 3x^2 & 3x^2 - 7x + 2 \\
\text{--------------} & \\
\qquad -7x^2 - 5x & \\
\qquad\;\; 7x^2 + 7x & \\
\qquad \text{----------------} & \\
\qquad\qquad\quad 2x + 2 & \\
\qquad\qquad -2x - 2 & \\
\qquad\qquad \text{-----------} & \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0 &
\end{array}
$$

Es decir que

$$H(x) = 3x^3 - 4x^2 - 5x + 2 = (x + 1)(3x^2 - 7x + 2)$$

donde vemos que el segundo factor es cuardatico el cual podemos factorizar como

$$H(x) = 3x^3 - 4x^2 - 5x + 2 = (x + 1)(x - \frac{1}{3})(x - 2)$$

Ahora si en vez de tomar a $x = -1$ tomamos $x = \frac{1}{3}$, obetendremos:

$$
\begin{array}{l|l}
3x^3 - 64 + 5x + 2 & \underline{\; x - \frac{1}{3} \;} \\
-3x^3 + x^2 & 3x^2 - 3x - 6 \\
\text{--------------} & \\
\qquad -3x^2 - 5x & \\
\qquad\;\; 3x^2 - \;\; x & \\
\qquad \text{----------------} & \\
\qquad\qquad\quad -6x + 2 & \\
\qquad\qquad\qquad 6x - 2 & \\
\qquad\qquad \text{--------------} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

Donde obtenemos el polinomio $H(x) = 3x^3 - 4x^2 - 5x + 2 = (x - \frac{1}{3})(3x^2 - 3x - 6)$

Vemos que el segunfo factor en cuardatico el cual podemos factorizar como:

$$H(x) = 3x^3 - 4x^2 - 5x + 2 = (x - \frac{1}{3})(x + 1)(x - 2)$$

Después de efectuar las divisiones determinamos las raíces en $x = -1$, $x = 1/3$, $x = 2$, como podemos observar los residuos en estas son cero.

c. Sea el polinomio $P(x) = 12x^3 - 4x^2 - 3x + 1$

Entonces, los divisores del término independiente $Da_0 = \{\pm 1\}$, y los divisores del término principal $Da_n = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12\}$, luego determinamos las posibles raíces racionales *p/q* son $\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{1}{4}, \pm \frac{1}{6}, \pm \frac{1}{12}$

Veamos que,

$P(1) = 12(1)^3 - 4(1)^2 - 3(1) + 1 = 6$

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = 12\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 4\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{1}{2}\right) + 1 = 0$$

Tenemos que una raíz del polinomio es ½ entonces por tanto un factor es $(x - ½)$, porque cuando x es ½ este factor vale cero y por tanto todo el polinomio se cancela ahora los otros dos factores los podemos obtener realizando una división por el factor obtenido.

$$\begin{array}{r|l}
12x^3 - 4x^2 - 3x + 1 & x - \frac{1}{2} \\ \cline{2-2}
-12x^3 + 6x^2 \qquad\qquad & 12x^2 + 2x - 2 \\
\text{-----------------}\qquad\qquad & \\
2x^2 - 3x \quad & \\
-5x^2 + x \quad & \\
\text{-----------------} & \\
-2x + 1 & \\
2x - 1 & \\
\text{-------------} & \\
0 &
\end{array}$$

De aquí tenemos un factor cuadrático $12x^2 - 2x - 2$ el cual aplicando el literal f tenemos que $12x^2 - 2x - 2 = (x + 1/2)(x - 1/3)$

Por tanto las raíces del polinomio $R(x) = 12x^3 - 4x^2 - 3x + 1$ son $x = 1/2$, $x = -\frac{1}{2}$, $x = 1/3$, y expresándolo como producto de factores irreducible tenemos que $R(x) = 12x^3 - 4x^2 - 3x + 1 = (x - 1/2)(x + 1/2)(x - 1/3)$
Ahora, si tomáramos $x = 1/3$, obtendríamos

$R\left(\frac{1}{3}\right) = 12\left(\frac{1}{3}\right)^3 - 4\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 3\left(\frac{1}{3}\right) + 1 = 0$ y si efectuamos la división tenemos,

$$
\begin{array}{r|l}
12x^3 - 4x^2 - 3x + 1 & x - \frac{1}{3} \\ \cline{2-2}
-12x^3 + 4x^2 \qquad\qquad & 12x^2 - 3 \\
\text{----------------} \qquad\qquad & \\
-3x + 1 & \\
3x - 1 & \\
\text{-----------} & \\
0 &
\end{array}
$$

Tenemos ahora un polinomio grado dos en este caso es una diferencia de cuadrados
El cual lo podemos ver como $3(4x^2 - 1) = (2x^2 - 1)(2x^2 + 1)$ por tanto tenemos dos raíces las cuales son $-1/2$ y $1/2$.

Según lo que hemos visto hasta el momento podemos ver que las raíces de un polinomio son las que al sustituir la raíz en el polinomio su valor es cero pero también vemos que en algunas ocasiones estas raíces las podemos escribir de la forma $(x - r)$ pero ¿cuál es su relación?

4.2.2.1. Relación entre raíz y factor

Consideremos el polinomio $P(x)$ y sean las raíces $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$ tal que $P(r_1) = 0, P(r_2) = 0, P(r_3) = 0, \dots, P(r_n) = 0$, entonces el polinomio lo podemos escribir de la forma $P(x) = (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) \dots (x - r_n)$, donde las raíces del polinomio las podemos escribir en forma de factor lineal irreducible. Exceptuando por ejemplo en el caso que se tenga un polinomio cubico con una sola raíz, en este caso este quedaría escrito como un polinomio lineal por uno cuadrático.

Consideremos el polinomio $P(x) = x^2 - 4x + 3$ cuyas raíces son $x = 1$ y $x = 3$ o sea,

$P(x) = x^2 - 4x + 3 = (1)^2 - 4(1) + 3 = 1 - 4 + 3 = 0$, y

$P(x) = x^2 - 4x + 3 = (3)^2 - 4(3) + 3 = 9 - 12 + 3 = 0$ Por tanto 1 y 3 efectivamente son raíces del polinomio $P(x)$ ahora si factorizamos el polinomio tenemos que

$P(x) = x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$ Entones podemos ver que las raíces de un polinomio las podemos escribir en forma de factor lineal irreducible de la forma $(x - r)$ donde r es el número que concierte en cero el polinomio. Según esto el teorema del factor nos dice:

Hemos establecido la relación entre la raíz y como se escribe esta como un factor lineal irreducible Esta relación la formalizada a continuación.

4.2.2.2. Teorema del factor

Un polinomio $p(x)$ es divisible por un polinomio de la forma $(x-a)$ si y solo si $P(a)=0$.

A $x=a$ le llamamos cero o raíz de $P(x)$. Las raíces o ceros de un polinomio son los valores que anulan el polinomio.

Ahora bien, en lo anterior se puede apreciar la utilidad de solucionar una ecuación de la forma $P(x)=0$ con una fórmula, para factorizar a P y de manera contraria la utilidad de factorizar un polinomio P para resolver una ecuación, basándose en la propiedad que dice que si $ab=0$ entonces $a=0$ o $b=0$, ejemplo:

Demostración:

a.$P(x)=x^2-4$, ahora igualamos el polinomio cero y encontramos las raíces o sea:

$x^2-4=0$	Igualando a cero
$(x-2)(x+2)=0$	Diferencia de cuadrados
$(x-2)=0$ ó $(x+2)=0$	Si $ab=0$ entonces $a=0$ $b=0$
$x=2$ ó $x=-2$	Por tanto estas son raíces del polinomio planteado

4.2.2.3. Teorema fundamental del algebra

Sea un polinomio $P(x)$ con coeficientes reales en una variable de grado $n>0$, entonces $P(x)=0$ tiene a lo más n raíces reales. [4]

Las raíces o ceros de un polinomio son los valores que anulan el polinomio además:

- Los ceros o raíces son divisores del término independiente del polinomio.
- A cada raíz del tipo $x=a$ le corresponde un binomio del tipo $(x-a)$.
- Podemos expresar un polinomio en factores al escribirlo como producto de los binomios tipo $(x-a)$

[4] El teorema fundamental del algebra fue demostrado por el matemático alemán Carl Friedrich Gauss en 1799.

- La suma de los exponentes de los binomios ha de ser igual al grado del Polinomio.

- Todo polinomio que no tenga termino independiente admite como raíz a $x = 0$ Si tenemos un polinomio

Y si el polinomio no tiene raíces racionales, ¿Cómo encontramos sus raíces y factorizamos el polinomio?

Una respuesta a esta pregunta sería empleando los métodos numéricos ¿Pero que son los métodos numéricos?

Son procedimientos aritméticos que se realizan a partir de problemas complejos, estos requieren un conocimiento básico en matemáticas, donde se encuentran un sin número de cálculos aritméticos que ordenados de manera lógica resuelven problemas de ecuaciones, sistemas de ecuaciones lineales y no lineales y un gran número de problemas de diversa complejidad. En los métodos numéricos empleamos diferentes técnicas para solucionar ecuaciones las cuales nos permiten hallar las raíces de las mismas.
.

4.3. CONTEXTUALIZACIÓN DE LOS MÉTODOS NUMÉRICOS

En las sección anterior vimos cómo solucionar ecuaciones polinómicas para encontrar sus raíces en conjuntos enumerables ahora con los métodos numéricos vamos a hallar raíces de polinomios de grados superiores a lo mas de n raíces y en donde en algunos casos estas tienen como rango el conjunto de los números reales , en la siguiente sección describiremos y ejemplificaremos algunos de los métodos numéricos más comunes y los cuales posiblemente pueden ser utilizados como introducción a la enseñanza de los métodos numéricos en la escuela.

Los métodos numéricos que se describirán a continuación los clasificaremos básicamente de dos maneras, los ***cerrados*** en los cuales la raíz se encuentra dentro de un intervalo predeterminado definido por un límite inferior y otro superior, donde la aplicación repetida de estos métodos siempre generan aproximaciones más cercanas a la raíz, podemos decir estos métodos son convergentes por que se acercan progresivamente a la raíz a medida que se avanza con el cálculo.

En contraste con los métodos ***abiertos*** los cuales se basan en fórmulas que requieren únicamente de un solo valor de inicio x que empiecen con par de ellos, pero estos no necesariamente encierran la raíz, no obstante estos en algunas ocasiones divergen a medida que se avanza el cálculo, sin embargo cuando convergen los hacen mucho, más rápido que los métodos cerrados.

Los métodos trabajados usualmente son:

Cerrados: Grafico	**Abiertos:** Punto Fijo
Bisección	Newton Raphson
Falsa posición	Método de la Secante

A continuación tomaremos dos ejemplos de métodos cerrados y consecuentemente otros dos de abiertos no sin antes dar cabida algo muy importante en los métodos numéricos lo cual es el tratamiento del error en las aproximaciones.

4.3.1. Tratamiento del error

Cuando se trabaja con los métodos numéricos se quiere encontrar las raíces de ecuaciones polinómicas pero explícitamente se trabaja con aproximaciones a la raíz de los mismos, cuando se van determinando estas aproximaciones de manera iterativa existen errores de aproximación los cuales fijan el porcentaje de acierto o cercanía a la raíz los cuales se definen a continuación:

4.3.2. Definición de error

Básicamente se definen dos tipos de errores que se establecen al emplear los métodos numéricos, los cuales son:

- ***Truncamiento***: Cortamos el número a partir de cierta cifra. Por ejemplo $\pi = 3{,}141592 \ldots$, truncado a las milésimas sería $\pi = 3{,}141$ y a las diezmilésimas $\pi = 3{,}1415$
- ***Redondeo***: Cortamos el número a partir de cierta cifra, pero sumamos uno a la última cifra que aparezca, en el caso de que la primera que omitamos sea mayor o igual que 5. Por ejemplo, redondeando el número $\pi = 3{,}141592{:}::$ a las centésimas tenemos $\pi = 3{,}14$, a las milésimas $\pi = 3{,}142$ y a las diezmilésimas $\pi = 3;\ 1416$. En general es preferible el redondeo al truncamiento, ya que cometemos un mínimo de error.

No obstante, cuando hacemos cálculos de raíces surgen algunos tipos de errores los cuales determinan la exactitud en la realización de un cálculo, y algunas veces cuando realizamos aproximaciones en la representación de cantidades. Estas incluyen básicamente dos tipos de errores de truncamiento los cuales resultan del empleo de aproximaciones y los errores de redondeo cuando se usan números que tienen un límite de cifras significativas para representar números exactos, para ambos tipos de errores la relación entre el valor verdadero y el resultado aproximado está dada por. (Chapra, 2006)

$$Valor\ Verdadero = Valor\ Aproximado + Error$$

O sea que de aquí podemos concluir que

$$Error = Valor\ Verdadero - Valor\ Aproximado$$

Donde nombraremos Error como **Error Verdadero**

O sea

$$E_v = V.V - V.A$$

Para denotar estas clases de error y conocer un poco más su fiabilidad podemos hallar el e**rror relativo porcentual verdadero**.

$$E_v\,\% = \left(\frac{E_v}{V.V}\right) * 100$$

O sea,

$$E_v\,\% = \left(\frac{Valor\ Verdadero - Valor\ Aproximado}{Valor\ Verdadero}\right) * 100$$

Ahora bien, En el siguiente ejemplo plasmaremos el cálculo de errores para que tengamos una definición clara en que constan estos.

Ejemplo: Un estudiante necesita determinar la longitud de un puente y la de un clavo, al medirlos el obtiene que el puente mide 9.999 y 9 cm respectivamente. Si los valores verdaderos del puente y del clavo son 10.000 y 10 respectivamente.

Calcule:

a. Error verdadero
b. Error relativo porcentual verdadero

Solución:

a. Tenemos como valor verdadero del puente 10.000 y el valor que hallo el estudiante, el cual sería un valor aproximado de 9.999

Por tanto $E_v = 10000 - 9.999 = 1$

Por otro lado el error del clavo ser

$$E_v = 10 - 9 = 1$$

Vemos que los errores del puente y del clavo son iguales. Pero deberíamos preguntarnos. ¿Es lo mismo medir un puente y un clavo?

b. Ahora calculemos el error porcentual verdadero.

$$E_v\,\% = \left(\frac{10.000 - 9.999}{10.000}\right) * 100 = 0.01\%$$

$$E_v\,\% = \left(\frac{10 - 9}{10}\right) * 100 = 10\%$$

Aquí se presentan los errores de puente y del clavo respectivamente. Anteriormente establecimos que los errores verdadero son iguales pero es aquí donde podemos ver la exactitud en la medición de cada uno de los objetos, vemos que el error en la medición del puente fue 0.01% el cual es un valor pequeño ya que el puente mide 10 metros, conjuntamente vemos que el error en la medición del clavo es de 10%, de lo cual podemos concluir que la medición del clavo no se realizó de una manera apropiada.

No obstante en algunas ocasiones no contamos con el valor verdadero, por lo general en los métodos numéricos, tenemos el valor verdadero cuando se tenga una función en donde se explicite el valor verdadero. Sin embargo en muchas aplicaciones reales no se conoce de antemano el valor verdadero, en consecuencia podemos normalizar el error para determinar qué porcentaje de error tenemos en cuanto a las aproximaciones que estemos realizando, este cálculo del error se hace a partir de las aproximaciones que estemos hallando, este error lo llamaremos relativo porcentual normalizado y lo describiremos como:

$$\varepsilon_a = \left|\frac{Aproximacion\ Actual - Aproximacion\ Anterior}{Aproximacio\ Actual}\right| * 100$$

Estas clases de errores los podemos asociar al número de cifras significativas en la aproximación que estemos realizando para esto utilizaremos la fórmula de (Scarborough, 1966), que nos brinda una aproximación de una raíz en al menos n cifras significativas siendo

$\varepsilon_s = (0.5 * 10^{2-n})\%$, donde n es el número de cifras significativas que quieres tener en la raíz.

Ahora para poder tener un resultado aceptable de la aproximación de una raíz se establece la siguiente relación

$$|\varepsilon_a| < \varepsilon_s$$

Para la solución de ecuaciones no lineales existen varios métodos numéricos que podemos clasificar. (Chapra, 2006)

4.3.4. Método grafico

Es un método muy sencillo el cual consiste en obtener una aproximación de la raíz $f(x) = 0$, el cual consiste en dar valores a la función para tabular los datos y luego graficarlos en el plano cartesiano para obtener la gráfica de la ecuación polinomica y observar en donde se cruza esta con el eje x. Este punto que se observa es una aproximación de la raíz de cualquier polinomio.

Este método es sencillo pero sabemos que es complicado hacer una buena aproximación ya que cuando graficamos a lo más podemos establecer un número con dos cifras decimales.
Cuando hacemos representaciones gráficas, las cuales no sirven para proporcionar aproximaciones iniciales de las raíces de un polinomio, estas son herramientas muy importantes para poder comprender y analizar las gráficas de las funciones polinómicas, previniendo las fallas en los métodos numéricos que comúnmente se emplean.

Ejemplo:
Halle las raíces del polinomio $x^3 - x^2 - 3$, lo primero que debemos hacer es ver este polinomio como una función polinómica de la forma $f(x) = x^3 - x^2 - 3$, y asi poder realizar su gráfica, para observar el punto o los puntos de corte con el eje x, los cuales vendrían siendo las posibles raíces de dicho polinomio.
Realizando la gráfica tenemos:

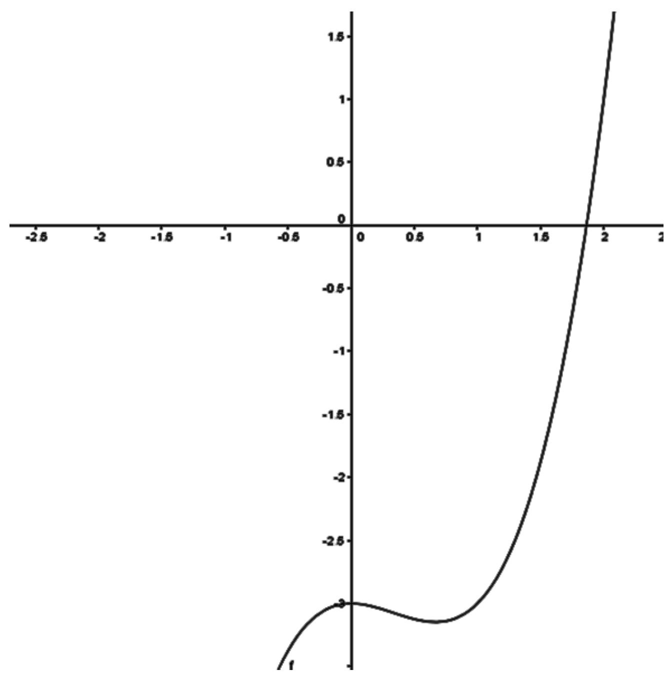


Figura 3. Ecuación $f(x) = x^3 - x^2 - 3$

Podemos observar el punto donde este polinomio se cruza con el eje x, ahora debemos establecer una aproximación estimada de la raíz, se ve claramente que esta entre 1.5 y 2.
Propondremos un valor de 1.8 y veremos que sucede al reemplazar este valor en el polinomio.

$$f(1.8) = 1.8^3 - 1.8^2 - 3 = -0.408$$

Vemos que es un valor aproximado a cero, veamos si podemos aproximarlo aún más.
Ahora probemos con $f(1.9) = 1.9^3 - 1.9^2 - 3 = 0.249$
Ahora un valor intermedio $f(1.85) = 1.85^3 - 1.85^2 - 3 = -0.09$

Anteriormente propusimos 3 valores dentro de los cuales el cual se aproxima más a cero es -0.09 el cual podría ser una buena aproximación de la raíz.

Vemos cual es nuestro porcentaje de aproximación a la raíz empleando el valor verdadero el cual es 1.863706527

Con la fórmula del error verdadero

$$E_v\,\% = \left|\frac{V.V - V.A}{V.V}\right| * 100 = \left|\frac{1.863706527 - 1.85}{1.863706527}\right| * 100 = 0.73\%$$

De donde podemos establecer un error del 0.73% el cual puede ser un buena aproximación dado el método utilizado.

A continuación veremos una versión mejorada del método grafico el cual nos ofrece aproximaciones más acertadas y con varias cifras decimales de aproximación.

4.3.5. Método de bisección

Conocido como como método de corte binario, o de partición de intervalos de Bolzano, este es un tipo de búsqueda incremental en el que el intervalo siempre se divide a la mitad. La posición de la raíz de determina situándola en el punto medio del subintervalo dentro del cual ocurre un cambio de signo, este proceso iterativo se repite hasta obtener una mejor aproximación.

Definición:
Sea $f: R \to R$ Suponiendo que $f$es continua en $[a, b]$, y que además $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos diferentes. Por continuidad, el intervalo (a, b) contendrá una raíz real

El siguiente teorema establece la existencia de la raíz real r

Teorema de Bolzano: si una función f es continua en un intervalo $[a, b]$, y $f(a)$ tiene signo diferente que $f(b)$, existe por lo meno un punto r en (a, b), tal que $f(r) = 0$

Los métodos de búsqueda incremental localizan el intervalo en el que la función cambie de signo. Por tanto la localización del cambio de signo y en consecuencia de la raíz se logra con mayor exactitud al dividir el intervalo en varios subintervalos cada vez más pequeños

Si analizamos la gráfica del polinomio anterior (Véase Figura 6. Ecuación $f(x) = x^3 - x^2 - 3$) podemos ver que su tabla de valores pasa de positivo a negativo de la siguiente manera, donde esta cambia de signos a ambos lados de la raíz.

A continuación mostramos unos pasos fundamentales en el método de bisección para encontrar raíces de polinomios:

Paso 1: Elija valores i (inferior) y s (superior), los cuales encierren la raíz, de tal forma que la función cambie de signo en el intervalo. Esto se verifica comprobando $f(i)f(s) < 0$

Paso 2: Una aproximación de la raíz r, se determina mediante $r = \frac{i+s}{2}$

Paso 3: Realice las siguientes evaluaciones para determinar en que su intervalo esta la raíz

- **a.** Si $f(i)f(r) < 0$, entonces la raiz se encuentra dentro del subintervalo inferior o izquierdo, Por lo tanto, haga $s = r$ y repita el paso 2
- **b.** Si $f(i)f(r) > 0$, entonces la raiz se encuentra dentro del subintervalo superior o derecho. Por lo tanto haga $i = r$ y repita el paso 2.
- **c.** Si $f(i)f(r) = 0$, la raíz es igual a r y por tanto termina el cálculo.

Ejemplo:

Trabajaremos con el polinomio anterior $f(x) = x^3 - x^2 - 3$ expuesto en el ejemplo del método gráfico. También hallaremos loes errores relativo porcentual y de truncamiento para que el lector observe el tratamiento de este par de errores.

Para este ejercicio trabajaremos con dos cifras significativas en la representación de la raíz

O sea

$\varepsilon_s = (0.5 * 10^{2-n})\% = (0.5 * 10^{2-2})\% = 0.5\%$

Asimismo verificaremos que $|\varepsilon_a|$ **<** ε_s es aquí donde terminaremos las iteraciones y obtendremos la raíz con dos cifras significativas.

En primer lugar considere los siguientes valores correspondientes a la gráfica del polinomio?

Nota: En las iteraciones inicialmente seremos muy explícitos mostrando las operaciones en las mismas para luego ya sintetizar los procesos iterativos**.**

ITERACION 1:

x	y
3	15
2	1
1	-3
0	-3

Observe que el cambio de signo ocurrió en los valores 1 y 2 del eje de las abscisas.
Por tanto realizaremos una estimación de la raíz en el punto medio del intervalo así.
Paso 2: $r = \frac{1+2}{2} = 1,5$

Inicialmente para poder obtener el error de truncamiento tenemos que considerar el valor verdadero de la raíz el cual es $\mathbf{1.863706527}$

Luego, nos remitimos al paso 3 para mirar si $f(i)f(r)$ es mayor menor o igual a cero.

$$f(i)f(r) \quad ? \; 0$$
$$f(1)f(1.5) \; ? \; 0$$

$f(1) = ((1)^3 - (1)^2 - 3) = -3$

$f(1.5) = (1.5)^3 - (1.5)^2 - 3) = -1.875$ Entonces

$(-3)(-1.875) \,?\; 0$ Sin realizar la multiplicación sabemos que es positivo o sea $(-3)(-1.875) > 0$ Por tanto aplicamos el paso 3b

De donde nos dice que tenemos que sustituir a $i = r$ y repetir el paso 2, entonces

$r = \frac{1.5+2}{2} = 1.75$ La cual es la nueva aproximación de nuestra raíz, aquí concluye nuestra primera iteración.

$$\varepsilon_t(\%) = \left|\frac{Valor\ Verdadero - Valor\ Aproximado}{Valor\ Verdadero}\right| * 100 = \left|\frac{1.863706527-1.5}{1.863706527}\right| * 100 = 19.52\%.$$

$\varepsilon_a(\%)$ Este error no se puede hallar para la primera iteración de cualquier ejercicio ya que requiere la aproximación anterior.

Para las siguientes iteraciones seremos más abstractos, ya que la explicación detallada se dio anteriormente.

ITERACION 2:

$f(i)f(r) \quad ? \ 0$

$f(1)f(1.75) \ ? \ 0$

$(-3)(-0.70) >$ 0 Entonces $i = r$ por tanto $r = \frac{1.75+2}{2} = 1.875$

Nueva aproximación a la raíz $r = 1.875$

Calculo de errores

$$\varepsilon_t(\%) = \left|\frac{1.863706527 - 1.75}{1.863706527}\right| * 100 = 6.10\%$$

$$\varepsilon_a(\%) = \left|\frac{1.75 - 1.5}{1.75}\right| * 100 = 14.29\%$$

ITERACION 3:

$f(i)f(r) \quad ? \ 0$

$f(1)f(1.875) \ ? \ 0$

$(-3)(0.076) <$ 0 Entonces $s = r$ por tanto $r = \frac{1.75+1.875}{2} = 1.8125$

Nueva aproximación a la raíz $r = 1.8125$

Calculo de errores

$$\varepsilon_t(\%) = \left|\frac{1.863706527 - 1.875}{1.863706527}\right| * 100 = 0.61\%$$

$$\varepsilon_a(\%) = \left|\frac{1.875 - 1.75}{1.875}\right| * 100 = 6.67\%$$

ITERACION 4:

$f(i)f(r) \quad ? \ 0$

$f(1)f(1.8125) \ ? \ 0$

$(-3)(-0.33) >$ 0 Entonces $i = r$ por tanto $r = \frac{1.8125+1.875}{2} = 1.84375$

Nueva aproximación a la raíz $r = 1.84375$

Calculo de errores

$$\varepsilon_t(\%) = \left|\frac{1.863706527 - 1.8125}{1.863706527}\right| * 100 = 2.75\%$$

$$\varepsilon_a(\%) = \left|\frac{1.8125 - 1.875}{1.8125}\right| * 100 = 3.45\%$$

ITERACION 5:

$$f(i)f(r) \quad ? \;\; 0$$

$$f(1)f(1.84375) \;\; ? \;\; 0$$

$(-3)(-0.13) \quad > \;\; 0$ Entonces $i = r$ por tanto $r = \frac{1.84375+1.875}{2} = 1.859375$

Nueva aproximación a la raíz $r = 1.859375$

Calculo de errores

$$\varepsilon_t(\%) = \left|\frac{1.863706527 - 1.84375}{1.863706527}\right| * 100 = 1.07\%$$

$$\varepsilon_a(\%) = \left|\frac{1.84375 - 8125}{1.84375}\right| * 100 = 1.69\%$$

ITERACION 6:

$$f(i)f(r) \quad ? \;\; 0$$

$$f(1)f(1.859375) \;\; ? \;\; 0$$

$(-3)(-0.70) > 0$ Entonces $i = r$ por tanto $r = \frac{1.859375+1.875}{2} = 1.8671875$

Nueva aproximación a la raíz $r = 1.8671875$

Calculo de errores

$$\varepsilon_t(\%) = \left|\frac{1.863706527 - 1.859375}{1.863706527}\right| * 100 = 0.23\%$$

$$\varepsilon_a(\%) = \left|\frac{1.859375 - 1.84375}{1.859375}\right| * 100 = 0.84\%$$

ITERACION 7:

$$f(i)f(r) \quad ? \;\; 0$$

$$f(1)f(1.8671875) \;\; ? \;\; 0$$

$(-3)(-0.70) > 0$ Entonces $i = r$ por tanto $r = \frac{1.859375+1.875}{2} = 1.8671875$

Nueva aproximación a la raíz $r = 1.8671875$

Calculo de errores

$$\varepsilon_t(\%) = \left|\frac{1.863706527 - 1.859375}{1.863706527}\right| * 100 = 0.19\%$$

$$\varepsilon_a(\%) = \left|\frac{1.8671875 - 1.859375}{1.8671875}\right| * 100 = 0.42\%$$

A continuación mostraremos los datos organizados de los cálculos ya realizados en la síguete tabla

ITERACION	i	s	r	ε_a**(%)**	$\varepsilon_t(\%)$
1	1	2	1.5	---	19.52
2	1.5	2	1.75	14.29	6.10
3	1.75	2	1.875	6.67	0.61
4	1.75	1.875	1.8125	3.45	2.75
5	1.8125	1.875	1.84375	1.69	1.07
6	1.84375	1.875	1.859375	0.84	0.23
7	1.859375	1.875	1.8671875	0.42	0.19

Como podemos observar en la iteración 7 el error relativo porcentual normalizado $\varepsilon_a(\%) = 0.42$ por tanto no tenemos que seguir iterando porque ya tenemos el valor de la raíz con dos cifras de aproximación de acuerdo con el criterio de aproximación de Scarborougth el cual establece que

$$|\varepsilon_a| < \varepsilon_s$$
$$0.42 < 0.5$$

Mismamente tenemos que el error de truncamiento o sea de la aproximación es muy pequeño $\varepsilon_t(\%) = 0.19\%$ el cual nos da a conocer nuestro margen de error en el procedimiento de la aproximación de la raíz

4.3.6 Método de Punto Fijo

Se supone una ecuación $f(x) = 0$ se sustituye por la ecuación $x = g(x)$. suponer además que g es un función continua en el intervalo $[a, b]$ y que $g(a) > a \; y \; g(b) < b$ como se muestra a continuación, donde vemos la intersección entre x y $g(x)$ donde se proyecta una perpendicular al eje x desde el punto de intersección y esta es una primera aproxiamcion a la raíz de la ecuación polinómica.

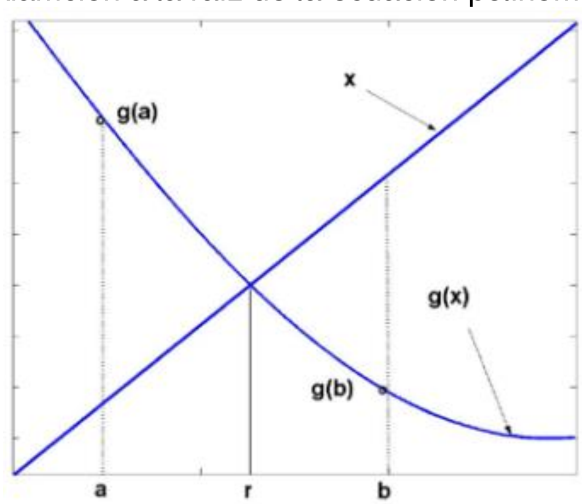


Figura 4. Explicación grafica Método de Punto fijo

Este método emplea una fórmula para predecir la raíz, esta fórmula puede desarrollarse como iteración simple de punto fijo, también llamada también llamada iteración de un punto o sustitución sucesiva o método de punto fijo, al arreglar la ecuación $f(x) = 0$ de tal modo que x esté del lado izquierdo de la ecuación:

$$x = g(x)$$

Esta trasformación se realiza mediante operaciones algebraicas o simplemente sumando x a cada lado de la ecuación original por ejemplo:

$$x^2 - 2x + 3 = 0$$

De donde se puede obtener

$$x = \frac{x^2 + 3}{2}$$

Ahora también la ecuación $senx = 0$ puede transformarse de la forma

$$sinx + x = x$$

La utilidad de este método es que proporciona una fórmula para predecir un nuevo valor de x. De esta manera, dado un valor inicial para la raíz x_i la ecuación se utiliza para obtener una nueva aproximación x_{i+1} expreseda por la siguiente formula iterativa

$$x_{i+1} = g(x_i)$$

Como primera instancia en la solución de una ecuación por el método de punto fijo, se puede despejar los términos diferentes términos dependientes en la ecuación y probar con cual formula converge a la raíz o la otra opción es considerar ciertos parámetros para determinar la convergencia de la raíz los cuales se exponen a continuación

Teorema de punto fijo

- $g, g' \in C[a.b]$
- k es una contante positiva
- $x_0 \in (a, b)$
- $g(x) \in [a, b]$ para todo $x \in [a, b]$

Entonces hay un punto fijo P de g en [a,b]

- Si $|g'(x)| \leq K < 1$ para todo $x \in [a,b]$, entonces P es el único punto fijo de g en $[a,b]$ y la iteración $x_n = g(x_{n-1})$converge a dicho punto fijo. En este caso, se dice que P es un punto fijo atractivo.
- Si $|g'(x)| > 1$ y $x_0 \neq P$, entonces la iteración $x_n = g(x_{n-1})$no converge a P. en este caso se dice que P es un punto fijo repulsivo y la iteración presenta divergencia $g(x_{n-1})$converge a dicho punto fijo. En este caso, se dice que P es un punto fijo atractivo

Ejemplos de cuándo convergen o divergen.

- $g(x) = cosx$ claramente se cumple la condición de que $|g'(x)| < 1$ en el intervalo [0,1] por tanto el método si converge a la raíz.
- Ahora $g(x) = x + tanx - e^{-x}$ en el intervalo $[0,1]$ en este caso $|g'(x)| = |1 + sec^2x + e^{-x}| > 1$. Por tanto, el método no converge a la raíz.

Ejemplo del cálculo de una ecuación por el método de punto fijo.

Halle la raíz de $f(x) = e^{-x} - x$ esta función la podemos separar directamente y la podemos escribir como $x = e^{-x}$ o sea $x_{i+1} = e^{-x}$

Ahora miremos si esta función converge a la raíz $g(x) = e^{-x}$ tenemos que $|g'(x)| = |-e^{-x}| < 1$

Por tanto la raíz converge o es un punto atractivo por tanto procedemos a hallar las iteraciones para obtener las aproximaciones de la raíz, iniciando con $x_0 = 0$ y aplicamos la ecuación iterativa para así calcular la raíz de este polinomio

ITERANDO $x_{i+1} = e^{-0} = 1$

$$x_{i+1} = e^{-1} = 0.367879 \ldots$$

$$x_{i+1} = e^{-0.367879\ldots} = 0.692201 \ldots$$

$$x_{i+1} = e^{-0.692201\ldots} = 0.500473 \ldots$$

i	x_i	$E_a\%$	$E_t\%$
1	1.000000	100.0	76.3
2	0.367879	171.8	35.1
3	0.692201	46.9	22.1
4	0.500473	38.3	11.8
5	0.606244	17.4	6.89
6	0.545396	11.2	3.83
7	0.579612	5.90	2.20
8	0.560115	3.48	1.24
9	0.571143	1.93	0.705
10	0.564879	1.11	0.399

Análogamente hallamos los errores normalizado y de truncamiento aplicando la formula correspondientes para la determinación de los mismos.

Podemos observar que cada iteración se acerca cada vez más al valor verdadero 0.56714329

4.3.6 Método de Newton Raphson

Como los otros métodos se emplea para las raíces de una ecuación de enésimo grado con la precisión deseada de polinomios de una variable. Los procedimientos para hallar las raíces o ceros de funciones lineales o cuadráticas a partir de los coeficientes de la ecuación son sencillos y exactos.

El método de Newton asume que la función polinómica f sea continuamente derivable y que se conozca la derivada de la función. Este método puede no converger si se comienza con un valor muy alejado de la raíz. Sin embargo, si converge, lo hace mucho más rápido que el método de bisección (usualmente, de manera cuadrática), por eso el número de dígitos correctos se duplica en cada iteración. El método de Newton también es útil porque se generaliza para problemas de dimensiones más altas.

Sea $f\ (x)$ una función la cual tiene al menos una raíz, donde $f'(x)$ es continua, si contamos con un valor próximo a alguna raíz podemos seguir acercándonos mediante aproximaciones sacando rectas tangentes a la función y el punto donde la recta cruza el eje de las x será la nueva aproximación. (http://gauss.acatlan.unam.mx/, 2010)

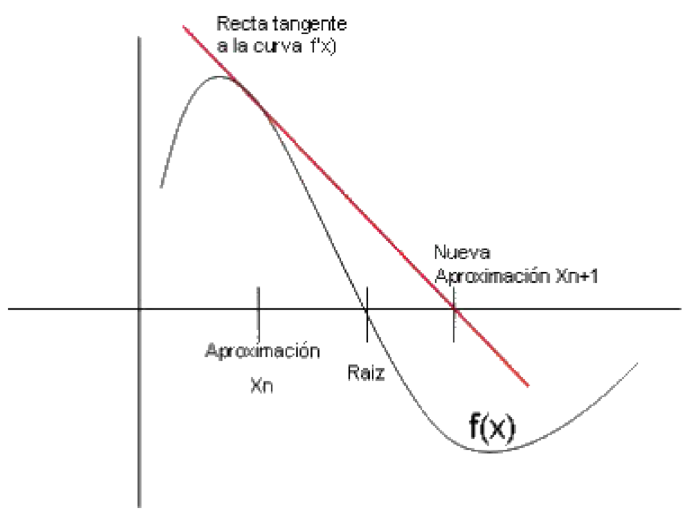


Figura 5.Método de Newton explicación gráfica.

Ahora elegimos un punto cercano a la raíz, en este caso el 2, y calculamos nuestra primera iteración

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x - \frac{x^3 - x^2 - 3}{3x^2 - 2x} = 2 - \frac{(2)^3 - (2)^2 - 3}{3(2)^2 - 2(2)} = 1.875$$

Ahora iteramos con el resultado de la iteración anterior o sea,

$$x_{n+1} = 1.875 - \frac{(1.875)^3 - (1.875)^2 - 3}{3(1.875)^2 - 2(1.875)} = 1.863793103$$

Vemos que este valor en la segunda iteración se aproxima a la raíz con cuatro cifras de aproximación

$$x_{n+1} = 1.863793103 - \frac{(1.863793103)^3 - (1.863793103)^2 - 3}{3(1.863793103)^2 - 2(1.863793103)} = 1.863706532$$

Aquí ya tenemos la raíz con siete cifras de aproximación, lo cual es muy bueno, este método es uno de los más utilizados ya que aproxima la raíz en de manera muy rápida los cual reduce mucho el número de iteraciones, acordémonos del método de bisección que para aproximar la raíz solamente con dos cifras tuvimos que hacer siete iteraciones, mientras que este método solo necesitó de tres iteraciones, considerando que ya en la segunda había aproximado la raíz con cuarto cifras significativas y finalizamos en la tercera con siete cifras, vemos los errores, los cuales suponemos que tienen que ser muy pequeños.

$$\varepsilon_t(\%) = \left|\frac{1.863706527 - 1.863706532}{1.863706527}\right| * 100 = 0.00000026\%$$

$$\varepsilon_a(\%) = \left|\frac{1.863706532 - 1.863793103}{1.863706532}\right| * 100 = 0.000046\%$$

5. APLICATIVOS EN LA SOLUCION DE METODOS NUMERICOS

Como sabemos los métodos numéricos son cálculos iterativos, por tanto tomamos como herramienta las computadoras y específicamente cualquier dispositivo que tenga sistema operativo Android, a continuación se describirá en detalle la solución de ecuaciones implementando estas TICS por medio de la calculadora HP48GX disponible en cualquier dispositivo Android, valiéndonos de un video tutorial y una aplicación en Play Store donde se explicita todo el procedimiento de instalación, de aplicaciones y tratamiento de ecuaciones por medio librerias empleadas en la solución de métodos numéricos.

5.1. TUTORIAL DE LA CALCULADORA HP 48GX DESDE CUALQUIER DISPOSITIVO ANDROID

PROCESO EJECUTADO DESDE PLAY STORE, PRESENTE EN CUALQUIER DISPOSITIVO ANDROID (El usuario puede ver el siguiente aplicativo en el link **https://www.youtube.com/watch?v=xRiOmDtJw9A**) (Ver tutorial en anexos).

5.2. APLICACIÓN ANDROID EXPLICACION SOBRE METODOS NUMERICOS

La aplicación Métodos Numéricos UPN se encuentra disponible en la tienda Play Store de Google, en la cual presentamos algunos métodos numéricos tratados en nuestro trabajo de grado y donde se incluye el video tutorial del mismo, esta aplicación en medida será actualizada hasta obtener una muy buena aplicación que nos ayude en la consulta y solución de métodos numéricos.

Figura 6: Aplicación Métodos Numéricos.

CONCLUSIONES

- Después de realizar este trabajo y basándonos en nuestra experiencia consideramos la posibilidad de afirmar que en la escuela se desconocen los métodos numéricos como una forma de solución de ecuaciones polinómicas.

- La caracterización realizada de algunos estándares curriculares que se relacionan con los métodos numéricos, nos permitió observar que para el grado once se espera que los estudiantes utilicen técnicas de aproximación en procesos numéricos infinitos y que analicen las relaciones entre la representación gráfica y algebraica de las funciones polinómicas, lo que implica una posible incursión de los métodos numéricos.

- Diseñamos algunas herramientas de apoyo, las cuales pueden ser pertinentes en la incursión de los métodos numéricos en la escuela.

- Identificamos algunas condiciones para aplicar mecanismos en la resolución de ecuaciones polinómicas, reconociendo los diferentes métodos que se puede aplicar con el fin de hallar su solución.

- Reconocimos algunos métodos numéricos abiertos y cerrados, determinamos la condicionalidad en su aplicación y vimos su rapidez de convergencia hacia la raíz de algunas ecuaciones polinómicas.

- Conocimos que al aplicar un método numérico se hallan aproximaciones de raíces, además pudimos determinar a través de los errores el porcentaje de acierto en la cercanía de la raíz de un polinomio.

- Con herramientas encontradas actualmente como tabletas y celulares, y puntualmente cualquier dispositivo con sistema operativo Android, nos fue posible crear herramientas de apoyo por medio de la calculadora **Hewlett Packard** 48GX, en la solución de algunos métodos numéricos, lo cual es muy bueno ya que por medio de un video tutorial logramos explicitar todo el proceso de instalación, implementación y solución de ecuaciones empleando métodos numéricos.

- Este trabajo nos sirvió para enriquecer nuestro conocimiento en un tema del cual no teníamos una comprensión exacta, como son los métodos numéricos en la solución de ecuaciones, también la familiaridad que estos tienen con los casos de factorización que se aprenden en la escuela, y el paso de polinomio, a función polinómica para determinar soluciones gráficas de los mismos, ya sea realizándolas nosotros o con el empleo de computadoras.

REFLEXIONES

- El análisis efectuado a los diferentes apartados teóricos de los métodos numéricos expuestos en este trabajo, permite visualizar de una forma más clara los diferentes contextos tratados, con el fin de abarcar diferentes campos como el teórico, curricular, procedimental y aplicativo que este tema ofrece, por su flexibilidad a los cálculos numéricos. Esto permitirá que los estudiantes aborden este tema de una manera más dinámica y a si mismo comprendan el origen de los métodos y el porqué de las operaciones empleadas es estos. A través de las TICS implementadas por nosotros el estudiante podrá tener a la mano una guía de la implementación de los métodos en la solución de ecuaciones, teniendo la certeza de que estas aplicaciones serán actualizadas de manera contante y que estarán al alcance de el en cualquier momento.

- Con nuestra aplicación expuesta en Play Store “Métodos Numéricos UPN” nuestros alumnos o cualquier usuario podrá descargar nuestra aplicación, en la cual se explican algunos métodos numéricos y dentro de la cual se incluye el tutorial, con miras a que esta será actualizable en cualquier momento.

BIBLIOGRAFÍA

Camacho, M. (28 de 07 de 2010). *Raices de Ecuaciones*. Recuperado el 16 de 09 de 2014, de Slideshare: http://es.slideshare.net/monicacamachoc/metodos-numericos2-4853670

Chapra, s. C. (2006). *Metodos numericos para ingenieros .* E.U: Mc Graw Hill.

http://es.slideshare.net/rjvillon/4metodo-de-la-biseccion. (s.f.).

http://gauss.acatlan.unam.mx/pluginfile.php/16290/mod_resource/content/0/Unidad_2/2.3Metodo_de_Newton.pdf. (s.f.).

Ivorra, C. (2009). *UV*.

Jimenez A.S.M, V. P. (2013). La factorizacion de polinomios de segundo grado y los personajes involucrados en su historia. *I congreso de Educacion Matematica de America Central y el Caribe* (págs. 1-3). Santo domingo, Republica Santodomingo: Universidad pedagogica Nacional.

Luque, L. L. (2005). *Actividades Matematicas para el desarrollo de procesos logicos:clasificar, medir e invertir.* Bogotá: Universidad Pedagogica Nacional.

MEN, M. d. (2003). Estandares Básicos de Competencias matemáticas. *Ministerio de Educacion Ncional*, 95.

Stewart, L. R. (2001). *Precalculo.* Madrid: Thomson.

Torres D.J.A., L. C., Mora Mendieta, L. C., & Luque Linares, C. J. (2013). Factorizacion Algebraica. *sigma*, 1-3.

Vasquez, R. S. (2009). *http://www.eumed.net/*.

ANEXOS

1. Realizaremos todo el proceso desde el dispositivo Android, para esto es recomendable en primera instancia instalar el winrar, esto debido a que las librerías de los programas que se cargaran de la calculadora vienen comprimidos en .rar, escribimos winrar e instalamos.

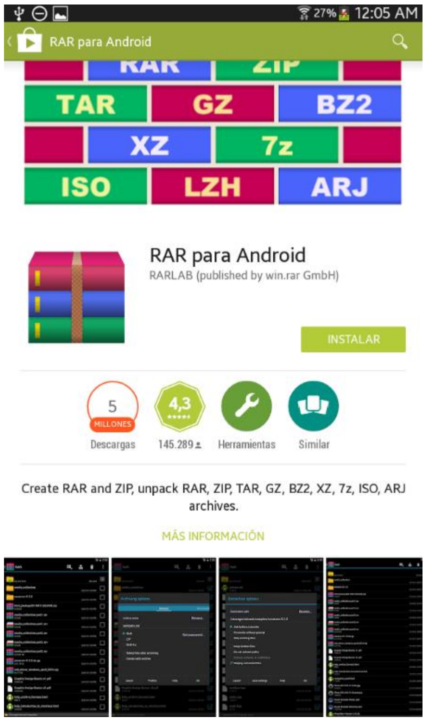


Figura 6. Rar para Android

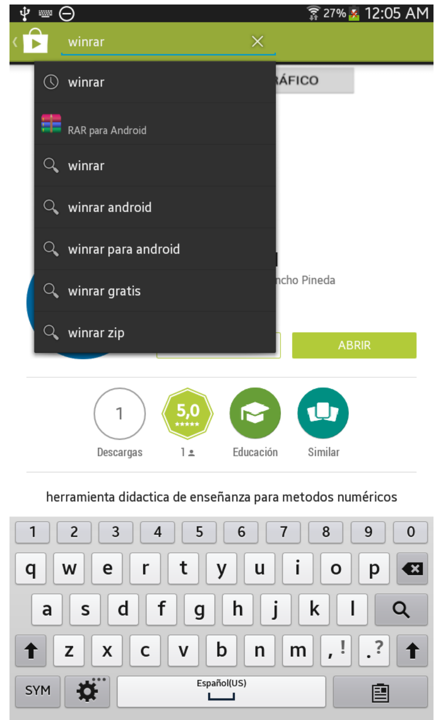


Figura 7. Descarga de Winrar

Figura 8. Calculadora Androi48GX

2. Luego escribimos Droid48 este es el nombre de la calculadora HP 48GX en la tienda PLAYSTORE, y la instalamos en nuestro dispositivo Android

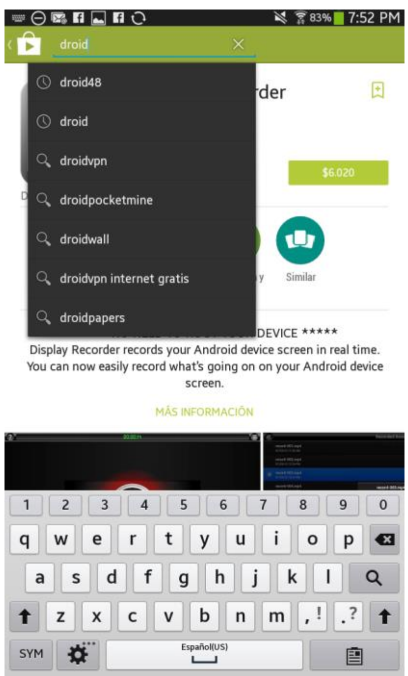


Figura 9. Instalando Droid48

Figura 10. Copiando la calculadora

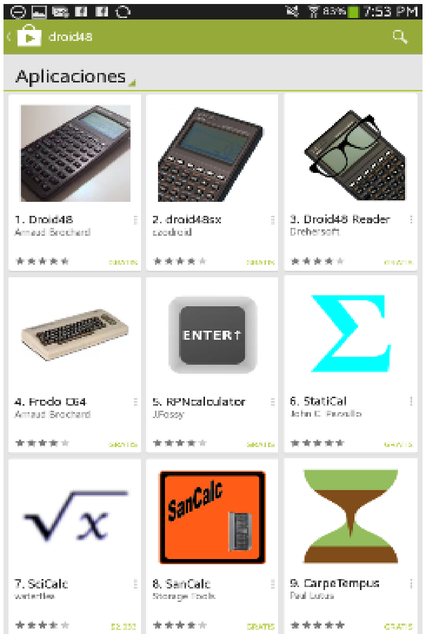


Figura 11. Aplicaciones de la Calculadora

Figura 12. Instalando la calculadora

3. Después de instalarla tendremos este entorno gráfico, la HP 48GX es una potente herramienta para el cálculo, también nos sirve para graficar, hallar soluciones de ecuaciones y un sin número de aplicaciones incluidas, adicionalmente existe una página llamada **www.hpcalc.org**, en la cual se encuentran un inmenso banco de aplicaciones, las cuales están orientadas a casi a todas las ramas de la ciencia, en esta página podemos buscar nuestra aplicación de métodos numéricos.

Figura 13. Herramientas de la calculadora

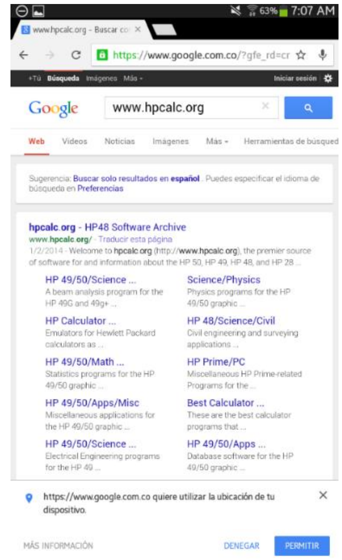


Figura 14. Buscar la página www.hpcal.org

Figura 156. Descargar página www.hpcalc.org

Figura 16. Página www.hpcalc.org

4. Ya en la página como se ve anteriormente digitamos en la búsqueda de la página que mencionamos anteriormente www.hpcalc.org , métodos numéricos y obtenemos los siguientes resultados y descargamos la librería métodos numéricos resaltada en rojo a continuación y descomprimimos métodos numéricos.zip no nos encontramos con estas cinco librerías.

Figura 17. Buscando métodos numéricos

Figura 18. Selección métodos numéricos

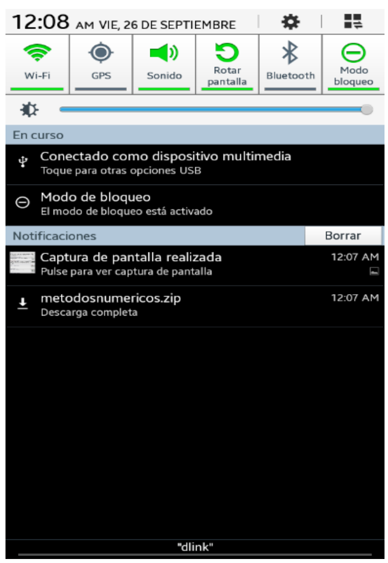


Figura 19. Descargando métodos numéricos

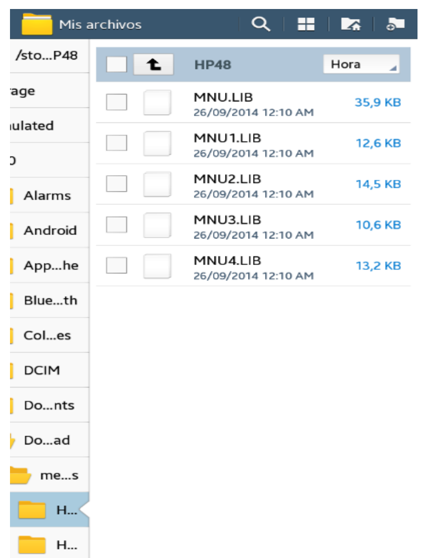


Figura 201. Descomprimiendo métodos numéricos

5. Para este paso debemos tener en cuenta la ubicaciones de estas librerías de métodos numéricos en el dispositivo android, abrimos la aplicación de la calculadora y damos al dispositivo en el botón opciones y se abre el siguiente menú y le damos la opción Put program on stack, buscamos los siguientes archivos correspondientes a la librería de métodos numéricos y seleccionamos

el primer archivo llamado MNU.LIB, luego nos sale un letrero que dice **Help** damos ok, seguido oprimimos la tecla **on** ubicada en la parte inferior izquierda de la calculadora y nos sale **Library 1750: MN.**

Figura 21. Aplicación de la calculadora

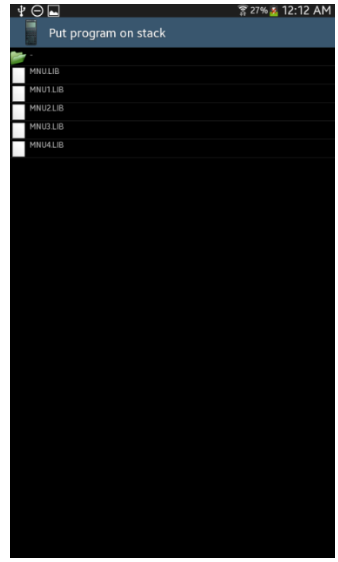


Figura 22. Application Put program on stack

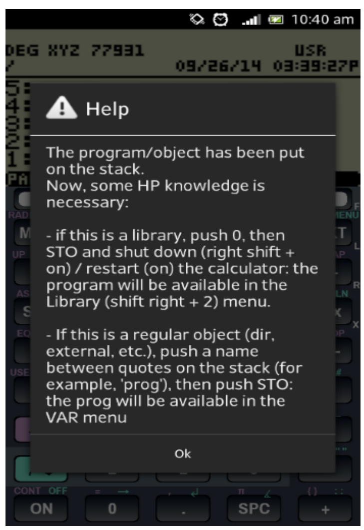


Figura 23. Dar clic en Ok

Figura 24. Library 1750: M.N

6. Ahora para instalar la librería oprimimos el cero y enter, después se oprime nuevamente el cero y le damos STO en la calculadora,

seguidamente oprimimos y ON , la calculadora se apaga, Lugo la prendemos oprimiendo varias veces el botón ON

Figura 25. Descargando la librería

Figura 26. Librería descargada

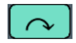
7. Ahora ya tememos instalada nuestra librería de métodos numéricos como se presenta a continuación, damos  y  para que nos muestre la librería instaladas, vemos que se presenta como M.NU.

Figura 27. Librería de métodos numéricos

Figura 28. Selección de métodos

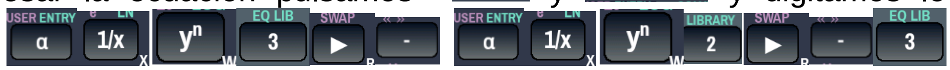
8. A continuación ingresamos al método de bisección, donde nos pide que se establezca la función y los dos intervalos en los que se encuentra la raíz, para ingresar la ecuación pulsamos  y  y digitamos lo siguiente  para obtener la ecuación (recordemos que este ejemplo es el mismo que anteriormente tratamos en el ejemplo de bisección) después damos ok y enter para seguir iterando.

Figura 29. Método de bisección

Figura 30. Introducción de la función

Figura 312. visualización de la ecuación

Figura 32. Visualización del error

9. Ahora para el método de Newton hacemos los pasos anteriormente mencionados con las mismas ecuaciones, aquí el error lo establecimos con 8 cifras significativas y para las iteraciones simplemente damos enter hasta obtener la aproximación deseada.

Figura 33. Selección método Newton Raphson

Figura 34. Introducción de la Función

Figura 356. Visualización interacción I

Figura 36. Visualización Interacción II