UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL

Educadora de educadores

ALGUNOS LUGARES GEOMÉTRICOS DESDE LA MÉTRICA DEL MENSAJERO

JOHAN STEVEN PEÑALOZA LEMUS
ZULMA ZAPATA VANEGAS

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
BOGOTÁ D.C.
2020

ALGUNOS LUGARES GEOMÉTRICOS DESDE LA MÉTRICA DEL MENSAJERO

Trabajo de grado asociado al estudio de un tema específico presentado como requisito parcial para optar al título de Licenciados en Matemáticas

JOHAN STEVEN PEÑALOZA LEMUS
Cód. 2016240062
C.C. 1.024.559.634

ZULMA ZAPATA VANEGAS
Cód. 2016140091
C.C. 1.020.807.635

DIRECTOR
GIL ALBERTO DE JESUS DONADO NUÑEZ

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
BOGOTÁ D.C.
2020

A mi mamá por su compromiso, sacrificio y esfuerzo para cumplir con este propósito y por ser mi mayor fuente de motivación.

A mi hermano y a mi abuelita Ada, por el apoyo y comprensión durante estos años.

A Johan, mi compañero de trabajo de grado, quien me ayudó, comprendió y apoyó en todo lo necesario para hacer esto posible.

Zulma Zapata Vanegas

Dedico este trabajo de grado principalmente a mi mamá, por ser la persona que me apoyó en todo lo académico y ser gran fuente de inspiración para la culminación de la carrera y este documento.

A todos mis amigos que estuvieron apoyándome en este proceso y aguantaron todos aquellos momentos de estrés que este me generaba.

Por último, pero no menos importante, a Zulma por aceptar la propuesta de empezar a redactar un documento, aún con todos los problemas que se presentaron y entender que no era imposible de realizar.

Johan Steven Peñaloza Lemus

Facultad de Ciencia y Tecnología

Departamento de Matemáticas

Licenciatura en Matemáticas

ACTA DE EVALUACIÓN DE TRABAJO DE GRADO

Presentados y aprobados el documento escrito y la sustentación del Trabajo de Grado titulado **"ALGUNOS LUGARES GEOMÉTRICOS DESDE LA MÉTRICA DEL MENSAJERO"**, elaborado por los estudiantes **JOHAN STEVEN PEÑALOZA LEMUS**, identificado con el Código 2016240062 y Cédula 1024559674, y **ZULMA ZAPATA VANEGAS**, identificada con el Código 2016140091 y Cédula 1020807635, el equipo evaluador, abajo firmante, asigna como calificación **cuarenta y cinco (45)** puntos.

El mismo equipo evaluador recomienda la siguiente sugerencia de distinción:

Ninguna ☒ Meritoria ☐ Laureada ☐

El Trabajo de Grado, presentado como monografía, constituye un requisito parcial para optar al título de **Licenciado en Matemáticas**.

En constancia se firma a los once (11) días del mes de febrero de 2021.

Mg. ALBERTO DE JESÚS DONADO
Director del Trabajo de grado

Maria Nubia Sol

Mg. MARÍA NUBIA SOLER ÁLVAREZ
Jurado del Trabajo de grado

Orlando Aya C.

Mg. ORLANDO AYA CORREDOR
Jurado del Trabajo de grado

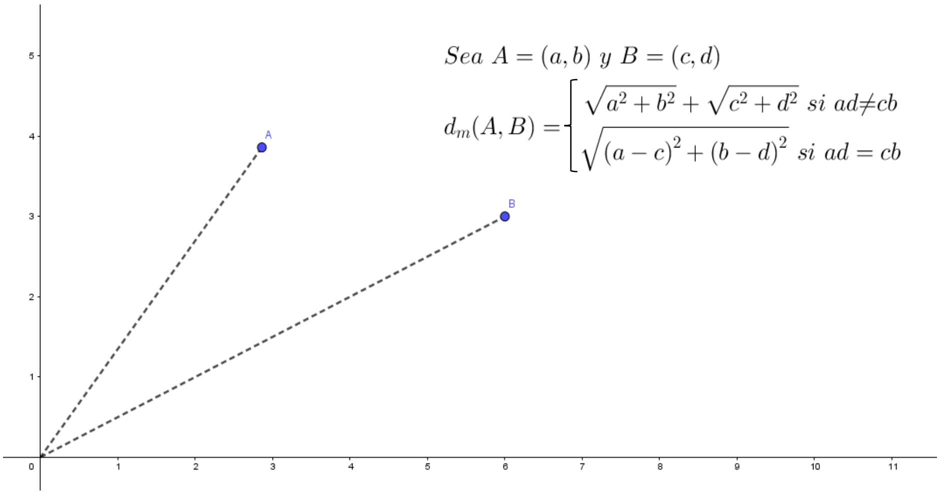
TABLA DE CONTENIDO

TABLA DE FIGURAS

INTRODUCCIÓN

En el presente trabajo mostramos un estudio que realizamos con base en un tema visto en la asignatura de topología, en este curso teníamos como texto guía el libro Topología General de Gustavo Rubiano, en el cual encontramos un ejercicio en el que define la métrica del mensajero y esto despertó nuestro interés, por lo que, hicimos una exploración sobre este tema en diferentes buscadores, entre ellos Google, Google académico, SCORPUS, EBSCO HOST, CLARIVATE Y NAXOS, con las palabras clave "métrica del mensajero", "lugares geométricos de la métrica del mensajero" y en inglés[1], "courier metric" o "messenger metric" encontrando en trabajos como el de Cárdenas y Parra (2013) lugares geométricos en diferentes métricas, pero no en la métrica del mensajero.

En el texto Topología General de Gustavo Rubiano la definición de métrica del mensajero no nos permitió encontrar algebraicamente algunos lugares geométricos y esto nos llevó a buscar otra definición, acogiendo la de Toledo (2017) quien define esta métrica como un mensajero que reparte un pedido en A, vuelve a la oficina de correo en (0,0) y va después a repartir en B o de forma algebraica:



Partiendo de la definición de métrica del mensajero, desarrollamos un trabajo de estudio sobre la misma. Con la idea de poder explorar en esta métrica, realizamos un trabajo con algunos de los lugares geométricos que están definidos en términos de distancia (segmento, rayo, recta, mediatriz, circunferencia, parábola, elipse e hipérbola).

[1] Al caracterizar los lugares geométricos finalizando el trabajo, encontramos que el nombre en inglés de la métrica es *French railway metric*. En el presente enlace se encuentra el documento de Domingo Toledo en cual habla de la métrica del mensajero http://www.math.utah.edu/~toledo/4510notes.pdf.

De acuerdo con lo expuesto anteriormente y lo que se quiere lograr, este trabajo se organiza en cinco capítulos. En el primer capítulo, presentamos la justificación respecto a la pertinencia de realizar este trabajo de grado, mostramos el objetivo general y los objetivos específicos. También, presentamos los preliminares en geometría y conjuntos que hacen referencia a los conocimientos previos relacionados con asuntos matemáticos (definiciones, teoremas y demás conceptos que usaremos en el trabajo de grado).

En el segundo capítulo, exponemos la definición formal de métrica del mensajero, demostrando que esta es una métrica. En el tercer capítulo, se encuentra la exploración realizada a dos lugares geométricos (circunferencia y elipse) haciendo uso de herramientas tecnológicas como GeoGebra (representando lo obtenido algebraicamente) y Wolfram (apoyando los procedimientos algebraicos), dando paso a concluir con las conjeturas de estos lugares geométricos. En el cuarto capítulo, demostramos las conjeturas producto de la exploración y en el último capítulo suscitamos las conclusiones producto del trabajo realizado y aportes a los que conllevó la realización de este trabajo de grado.

1. ASPECTOS GENERALES DE ESTUDIO

1.1. JUSTIFICACIÓN

Este trabajo de grado lo realizamos con el fin de extender nuestro conocimiento sobre la métrica del mensajero, motivados por el estudio de algunos lugares geométricos definidos a partir de la distancia basándonos en métodos analíticos para observar el comportamiento de estos en la métrica del mensajero. Además, profundizaremos en el saber matemático que nos aporta como futuros Licenciados en Matemáticas a la hora de diseñar material en el aula de clase, en el que esté involucrado la definición de distancia y la construcción de lugares geométricos desde su definición.

1.2. OBJETIVOS

1.2.1. OBJETIVO GENERAL

Realizar un estudio de algunos lugares geométricos utilizando la métrica del mensajero.

1.2.2. OBJETIVO ESPECÍFICOS

- Identificar mediante el uso de tecnología y por medio de métodos analíticos algunas características que destacan en los lugares geométricos estudiados.
- Incorporar métodos algebraicos para poder encontrar la característica de algunos lugares geométricos con el uso de la tecnología y los métodos analíticos empleados.
- Construir algunos lugares geométricos que estén definidos a partir de la distancia, usando la métrica del mensajero.
- Generar conjeturas producto del estudio de los lugares geométricos usando geometría dinámica y métodos analíticos.
- Demostrar las conjeturas obtenidas al caracterizar algunos lugares geométricos a través de métodos analíticos.

1.3. PRELIMINARES EN GEOMETRÍA Y CONJUNTOS

En este apartado enunciaremos los conceptos y algunos teoremas que se usarán a lo largo del trabajo de grado.

1.3.1. CONCEPTOS

Antes de iniciar con el estudio de los lugares geométricos es indispensable definir a qué se hace referencia con **lugar geométrico**, se define como un conjunto de puntos que cumplen una determinada propiedad. Esta definición nos permitirá identificar en la métrica del mensajero los puntos que satisfacen propiedades específicas, siendo estas las definiciones de segmento, recta, rayo, mediatriz, hipérbola, elipse, parábola y circunferencia.

En el segundo capítulo se encuentra la definición de la métrica del mensajero, pero para poder interpretarla es necesario conocer la siguiente definición:
Dadas M_1 y M_2 dos magnitudes relacionadas en un sistema lineal con a_1 y a_2, dos cantidades de magnitud de M_1 y b_1 y b_2, las cantidades de magnitud correspondientes en la magnitud M_2 se cumple la siguiente relación:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$$

Dicha relación es la **proporcionalidad**.

En este trabajo de grado, las cantidades que equivalen a a_1 y a_2 corresponden a las coordenadas en el eje x y las cantidades b_1 y b_2 corresponden a las coordenadas en el eje y, de dos puntos pertenecientes a $\mathbb{R}^{*2}$. Por definición de la métrica del mensajero reescribiremos la definición de proporcionalidad como $a_1 b_2 = a_2 b_1$. Será un concepto manejado a lo largo del trabajo de grado, por lo cual diremos que el punto A es proporcional con B sí y solo si $ad = cb$.

Usamos la **transitividad de la proporcionalidad**. Sea $A(a, b)$ proporcional con $B(c, d)$ y B es proporcional con $C(e, f)$.

Por definición de proporcionalidad:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \wedge \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$$

Por principio de sustitución:

$$\frac{a}{b} = \frac{e}{f}$$

Y por definición de proporcionalidad, A es proporcional con C. Esto nos lleva a decir que tres o más puntos serán proporcionales si cumplen la transitividad de la proporcionalidad.

En el capítulo de exploración de los lugares geométricos se encuentran las definiciones de circunferencia y elipse; en el capítulo de pruebas de los resultados obtenidos se encuentran las definiciones de segmento, rayo, recta, mediatriz, parábola e hipérbola y en este capítulo, incluimos varias definiciones que se hicieron indispensables para elaborar las demostraciones de estos lugares geométricos en la métrica del mensajero. Al inicio del capítulo de pruebas de los resultados obtenidos escribimos la definición de interestancia; para demostrar la mediatriz, en la métrica del mensajero, agregamos la definición de punto medio y para demostrar la hipérbola, en la métrica del mensajero, incluimos la definición de distancia ínfima de un punto a una recta.

En el capítulo de pruebas de los resultados obtenidos, tuvimos en cuenta aspectos relacionados con **lógica** como:

Las **Proposición** son aquellas expresiones de las cuales tiene sentido afirmar que son verdaderas o falsas.

Teniendo en cuenta lo anterior, se establecen condiciones en las que están involucradas esas proposiciones como:

Las **Leyes de Morgan**, sean p y q proposiciones

$$\sim (p \vee q) = \sim p \wedge \sim q$$

$$\sim (p \wedge q) = \sim p \vee \sim q$$

También, el **silogismo disyuntivo** como, sean p y q proposiciones

$$\begin{array}{c} p \vee q \\ \sim p \\ \hline q \end{array}$$

Adicional, se establecen operaciones entre conjuntos, las cuales son:

Dados A, B conjuntos cualesquiera la **unión** de A y B notada $A \cup B$ es el conjunto constituido por todos aquellos elementos que o bien pertenecen solamente a A, o bien pertenecen solamente a B, o pertenecen a A y a B simultáneamente, es decir recordando la tabla de verdad para definir el conectivo " $\vee$ ".

$$A \cup B = \{x|x \in A \vee x \in B\}$$

Definición de **Intersección** Si A, B son conjuntos, definimos su intersección (notada $A \cap B$) como el conjunto constituido por todos aquellos elementos que pertenecen simultáneamente a A y a B, es decir,

$$A \cap B = \{x|x \in A \wedge x \in B\}$$

Sean A conjunto y X el conjunto universal, el **complemento** de A, denotado como A^c, es el conjunto universal sin el conjunto A, es lo mismo decir,

$$A^c = X - A$$

Y para definición de **diferencia** se entiende que, dados A y B conjuntos, la diferencia denotado como $A - B$, es el conjunto con los elementos de A que no están en B.

$$A - B = \{x|x \in A \wedge x \notin B\} = \{x \in A|x \notin B\}$$

Las propiedades que utilizamos con algunas de las anteriores operaciones son las siguientes: Sean A, B y C conjuntos y las operaciones intersección y unión, la **propiedad distributiva** se define como,

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap B) \text{ o } A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup B)$$

Y el **Principio de sustitución** se define como

$$\forall z \left[\forall x \left((x \in z) \to \exists!\, y\big(\varphi(\mathrm{x},\mathrm{y})\big)\right)\right] \to \exists u \left[\left(\forall y\big(x \in z \wedge \varphi(x,y)\big)\right) \leftrightarrow (y \in u)\right]$$

En nuestro trabajo de grado entendemos a x como un par de ecuaciones con dos incógnitas en un conjunto z, que al despejar en una de las ecuaciones la incógnita y reemplazar en la otra ecuación (lo cual denominamos φ), existirá un único conjunto de puntos y que cumplirá la condición φ.

1.3.2. TEOREMAS

En el capítulo de métrica del mensajero y prueba de los resultados obtenidos, se usan los siguientes teoremas.

El **teorema transitividad de la interestancia** Si A, B, C y D son puntos colineales tal que $A - B - C$ y $B - C - D$ entonces $A - B - D$ y $A - C - D$.

El **teorema tres puntos** Si A, B y C son colineales entonces uno de esos puntos está entre los otros dos, que es lo mismo decir se pueden obtener las siguientes interestancias, $A - B - C$, $A - C - B$ y $B - A - C$.

Y en el capítulo de pruebas de los resultados obtenidos, se encuentra el **teorema de la mínima distancia de un punto a una recta**.

2. MÉTRICA DEL MENSAJERO

En este capítulo damos a conocer la métrica del mensajero desde su definición y demostrando que es un espacio métrico.

El espacio métrico que vamos a considerar es $X = \mathbb{R}^{*2}$ siendo este el plano $\mathbb{R}^2$ sin el punto $(0,0)$ que nombraremos O. La definición de métrica del mensajero es:

Dados $A, B \in \mathbb{R}^{*2}$, $A(a,b)$ y $B(c,d)$ se define la distancia entre estos puntos como

$d_m(A,B) = \begin{cases} d(A,B) \; si \; ad = cb \\ d(A,O) + d(B,O) \; si \; ad \neq cb \end{cases}$ donde $d(A,B)$ hace referencia a la distancia usual en el plano.

La decisión de excluir al punto O se debe a que, para algunos lugares geométricos, al incluirlo se contemplan casos que son triviales, esto lo podemos afirmar desde lo que se encuentra en el capítulo de exploración de los lugares geométricos y en el **Anexo *A***.

Con esta definición procedemos a demostrar que d_m en $\mathbb{R}^{*2}$ cumple ser una métrica, tomando como referencia que para ser métrica debe cumplir las siguientes condiciones:

Una distancia (o una métrica) entre puntos de un conjunto X, es una función $d: X \times X \to \mathbb{R}$ con unas propiedades adicionales que corresponden a nuestro concepto intuitivo de distancia:

1. $\forall x \, \forall y \, (d(x,y) \geq 0)$ y $\forall x \, \forall y \, (d(x,y) = 0$ si y sólo si $x = y)$
2. $\forall x \, \forall y \, (d(x,y) = d(y,x))$, propiedad llamada "simetría de la distancia"
3. $\forall x \, \forall y \, \forall z \, \big(d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)\big)$ propiedad llamada "desigualdad triangular"

A un conjunto X no vacío dotado de una métrica d, se llama un espacio métrico y se denota (X, d)

Primera condición. La distancia entre dos puntos debe ser mayor o igual a 0

$$d_m(A,B) \geq 0$$

Para esta demostración, se consideran dos casos, esto de acuerdo con la definición de la métrica del mensajero:

Caso 1. Cuando A y B son proporcionales la demostración es trivial, debido a que son proporcionales estaríamos en el caso en que están en la métrica usual.

Caso 2. Cuando A y B no son proporcionales.

Por la definición de métrica del mensajero, para este caso tenemos que

$$d_m(A,B) = d(A,O) + d(B,O)$$

Como la distancia euclídea es métrica, se cumple que para cada una de las distancias

$d(A, O) \geq 0$ y $d(B, O) \geq 0$

Y la suma en los números positivos es cerrada, por tanto

$$d(A, O) + d(B, O) \geq 0$$

Por tanto, usando principio de sustitución

$$d_m(A, B) \geq 0$$

Con esto se cumple la condición.

Segunda condición. La distancia es igual a cero solo cuando se habla del mismo punto.

$$d_m(A, B) = 0 \ \leftrightarrow A = B$$

Caso 1. Comenzaremos la demostración con el argumento como $A = B$ entonces son iguales coordenada a coordenada, es decir:

$$a = \ c$$

$$b = \ d$$

Como a, b, c y d son número que pertenecen al conjunto de los números reales

$$ad = \ cd$$

A partir de esta condición, por definición de métrica del mensajero tendremos que la

$$d_m(A, B) = d(A, B)$$

Dado que en la métrica usual se cumple que si $A = B \ \leftrightarrow \ d(A, B) = 0$, y ya se tiene estas dos condiciones (es la métrica usual y $A = B$), entonces por principio de sustitución.

$$d_m(A, B) = 0.$$

Caso 2. Ahora vamos a partir del hecho de que

$$d_m(A, B) = 0$$

Estos casos surgen de ver qué sucede cuando A y B son o no proporcionales, suponemos que se cumple que

Caso 2a. $d(A, B) = 0$

$A = B$ esto se cumple, porque en la métrica usual cuando $d(A, B) = 0$ entonces $A = B$

Caso 2b. $d(A, O) + d(O, B) = 0$

Dado que las distancias siempre son positivas, sabemos por propiedades de los números positivos que

$$d(A, O) = d(O, B) = 0$$

Por tanto, implica que $A = B = O$ y esto no es posible desde la definición de la métrica donde se excluye a O y algún punto no puede ser O.

Tercera condición. La distancia cumple que no importa el orden en que se tomen los puntos debe dar el mismo resultado.

$$d_m(A,B) = d_m(B,A)$$

Caso 1. Cuando A y B son proporcionales.

Por la definición de métrica del mensajero, para este caso tenemos que

$$d_m(A,B) = d(A,B)$$

Como la distancia euclídea es métrica, se cumple que

$$d(A,B) = d(B,A)$$

y la distancia euclídea es la misma del mensajero en este caso, por tanto

$$d(B,A) = d_m(B,A)$$

Y por principio de sustitución

$$d_m(A,B) = d_m(B,A)$$

Caso 2. Cuando A y B no son proporcionales.

Por la definición de métrica del mensajero, para este caso tenemos que

$$d_m(A,B) = d(A,O) + d(B,O)$$

Se puede reescribir la suma de las distancias

$$d(A,O) + d(B,O) = d(B,O) + d(A,O)$$

Esta es una de las definiciones para la métrica del mensajero, es decir,

$$d(B,O) + d(A,O) = d_m(B,A)$$

Y por principio de sustitución

$$d_m(A,B) = d_m(B,A)$$

Cuarta condición. La distancia de un punto a otro es menor o igual que la suma de las distancias de un punto arbitrario y los puntos iniciales.

$$d_m(A,Z) + d_m(Z,B) \geq \ d_m(A,B)$$

con $Z(x,y)$

Dado esta definición de métrica, se consideran los siguientes casos:

Caso 1. Cuando dos puntos proporcionales y un tercer punto no proporcional con los otros dos puntos (A y B proporcionales, Z no proporcional con A y Z no proporcional con B; A y Z proporcionales, B no proporcional con A y B no proporcional con Z; B y Z proporcionales, A no proporcional con Z y A no proporcional con B).

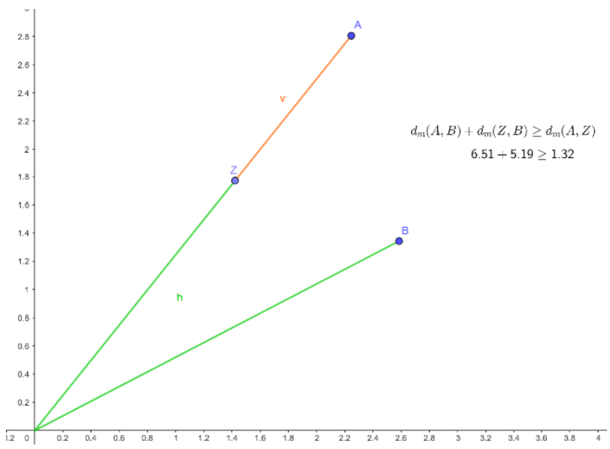


Figura 1 *Desigualdad triangular caso 1.*

En la ***Figura 1*** se muestra cuando dos puntos cualesquiera (en este caso A y B) no proporcionales y otro punto cualquiera (en este caso Z) es proporcional con cualquiera de los otros dos puntos. En el siguiente enlace se encuentra el applet en el cual los puntos A, Z y B se puede mover por el plano y el texto presentado muestra la definición de desigualdad triangular dependiente de las distancias entre los puntos https://www.geogebra.org/m/kuv47rbp.

De lo anterior podemos inferir que, si $d_m(A,B) = v + h$, $d_m(Z,B) = h$ y $d_m(A,Z) = v$, sabemos que $v\ y\ h$ son distancias, correspondientes a números positivos, entonces podemos establecer la siguiente desigualdad, para términos de la demostración $v + h + h \geq v$, por principio de sustitución obtenemos que:

$$d_m(A,B) + d_m(Z,B) \geq\ d_m(A,Z)$$

Esto comprueba que la desigualdad es cierta, para los casos en que un punto Z sea proporcional con el punto A o B. Esta demostración es para el caso en que A y Z proporcionales, B no proporcional con A y B no proporcional con Z, los otros dos casos se demuestran de manera análoga.

Caso 2. Cuando cada par de puntos son proporcionales (A, B proporcionales y Z proporcional con A)

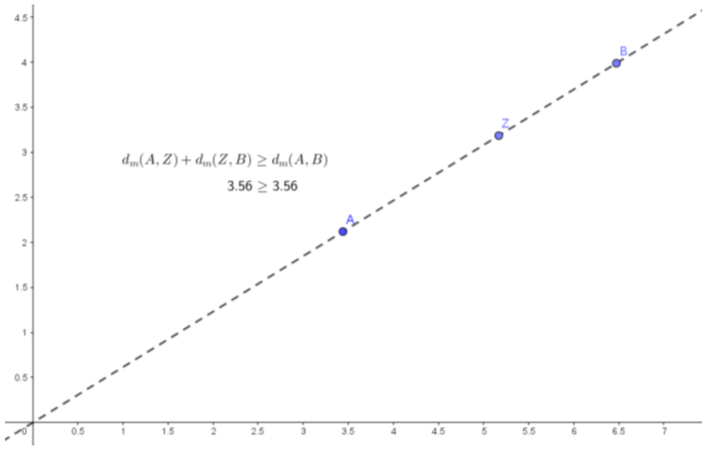


Figura 2 *Desigualdad triangular Caso 2.*

En la ***Figura 2*** se muestra cuando los tres puntos (en este caso A, B y Z) son proporcionales. En el siguiente enlace se encuentra el applet en el cual A cambia la pendiente de $\overleftrightarrow{AB}$, Z pertenecen a $\overleftrightarrow{AB}$ y esta recta siempre pasa por O. https://www.geogebra.org/m/kn3qrmqp.

Para este caso, cuando cada par de puntos son proporcionales estos pertenecen a la recta usual entonces son colineales, así que cumplen una de tres interestancias $(A - Z - B), (A - B - Z)$ y $(B - A - Z)$, para poder demostrar que la desigualdad se cumple en este caso, es necesario mostrar, por ejemplo, con la primera interestacia que $d(A,Z) + d(Z,B) = d(A,B)$ por definición de interestancia, luego por definición de mayor igual $d(A,Z) + d(Z,B) \geq d(A,B)$, por definición de la métrica del mensajero tendríamos que $d_m(A,Z) + d_m(Z,B) \geq d_m(A,B)$, este razonamiento es análogo para las otras dos posibles interestancias y se demuestra que para cada par de puntos proporcionales se cumple que $d_m(A,Z) + d_m(Z,B) \geq d_m(A,B)$, este caso se ilustra en la ***Figura 2.***

Caso 3. Cuando tres puntos no proporcionales cada dos (A no proporcional con B, B no proporcional con Z y A no proporcional con B)

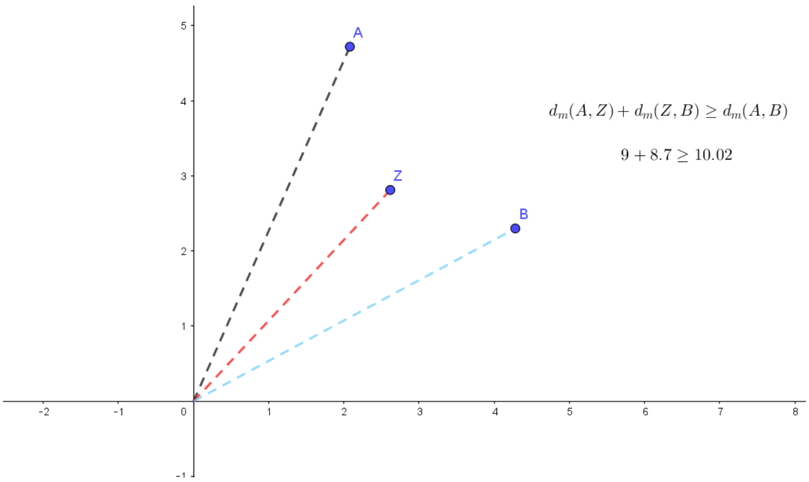


Figura 3 *Desigualdad triangular Caso 3.*

En la ***Figura 3*** se muestra cuando los tres puntos (en este caso A, B y Z) no son colineales. En el siguiente enlace se encuentra el applet en el cual A, Z y B se pueden mover en todo el plano, mostrando que se cumple la desigualdad triangular. https://www.geogebra.org/m/afsck5cp.

Iniciamos la demostración a partir de la siguiente expresión, que resulta ser verdadera, $\forall x, y \ \in \mathbb{R}$.

$$2\sqrt{x^2+y^2} \geq 0 \ (i)$$

Teniendo en cuenta que los tres puntos no son proporcionales cada dos, de acuerdo con la distancia entre puntos establecida a partir de la definición de la métrica del mensajero, sabemos que $d(A,B) = \sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2}$, como las distancias son positivas, podemos sumar a ambos lados de la desigualdad (i) a $d(A,B)$

$$\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{c^2+d^2} \geq \sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2}$$

Por la definición de la distancia del mensajero tenemos que

$$d(A,0) + d(Z,0) + d(Z,0) + d(B,0) \geq d(A,0) + d(B,0)$$

De acuerdo con esto, por la definición de la métrica del mensajero y al no ser proporcionales. se concluye que

$$d_m(A,Z) + d_m(Z,B) \geq d_m(A,B).$$

3. EXPLORACIÓN DE LOS LUGARES GEOMÉTRICOS

En este capítulo queremos dar a conocer la exploración, debido a que fue el proceso que se llevó a cabo para identificar el conjunto de puntos que harán parte de cada lugar geométrico. El objetivo de este capítulo es mostrar el proceso algebraico que realizamos para conjeturar acerca de los lugares geométricos.

A lo largo del capítulo se encuentran dos lugares geométricos definidos a partir de la distancia, los cuales son circunferencia y elipse. En el **Anexo *A*** se encuentra la exploración de segmento, rayo, recta, mediatriz, parábola e hipérbola, debido a que las expresiones algebraicas producto de la exploración, para cada lugar geométrico, tenían un razonamiento similar.

Dicha exploración la realizamos en tres pasos; primero, establecimos la definición del lugar geométrico, teniendo en cuenta que estuviera definida a partir de la distancia; segundo, de acuerdo con la definición de la métrica del mensajero, es necesario contemplar dos casos cuando los puntos son o no son proporcionales, estos puntos se establecen teniendo en cuenta la definición del lugar geométrico, identificando cuáles son los puntos son fijos y los que conforman el lugar geométrico, todo el razonamiento algebraico se hace a partir de las posiciones de los puntos fijos, identificando así, qué sucede con el lugar geométrico en los diferentes casos y tercero, se establece la conjetura de cada lugar geométrico teniendo en cuenta lo realizado anteriormente.

Para poder expresar en lenguaje simbólico las conjeturas que establecimos de los lugares geométricos, se hizo necesario realizar convenciones las cuales presentamos en la *Tabla 1*.

Concepto	**Métrica Usual**	**Métrica del mensajero**
Distancia entre dos puntos A y B	$d(A,B)$	$d_m(A,B)$
Segmento cuyos extremos son A y B	$\overline{AB}$	$\overline{AB}_m$
Rayo cuyo extremo es A y se dirige a B	$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{AB}_m$
Recta que pasa por los puntos A y B o una recta	$\overleftrightarrow{AB}$ o l	$\overleftrightarrow{AB}_m$ o l_m
Mediatriz de los puntos A y B	$\mathcal{M}_{A,B}$	$\mathcal{M}_{A,B_m}$
Circunferencia con centro en A y radio r	$\odot A_r$	$\odot(A_r)_m$

Elipse cuyos focos son A y B donde k es la constante de la suma de las distancias de los focos a un punto fijo en el plano.	$\oplus \{A,B\}_k$	$\oplus (\{A,B\}_k)_m$
Parábola cuyo foco es A donde l es la directriz	$\uplus A_l$	$\uplus (A_l)_m$
Hipérbola cuyos focos son A y B donde k es la constante de la diferencia absoluta de las distancias de los focos a un punto fijo en el plano.	$\ominus \{A,B\}_k$	$\ominus (\{A,B\}_k)_m$

Tabla 1 Convenciones en la métrica del mensajero

3.1. CIRCUNFERENCIA

Definimos circunferencia como el lugar geométrico de un punto (B) que se mueve en un plano de tal manera que se conserva siempre a una distancia constante (r) de un punto fijo(A) de ese plano. El punto fijo se llama centro de la circunferencia y la distancia constante se llama radio.

3.1.1. CIRCUNFERENICA PUNTOS PROPORCIONALES

De acuerdo con la definición, posicionamos un punto fijo A, consideramos un radio positivo r y B hace parte del lugar geométrico de la circunferencia, suponemos que B es proporcional con A, buscando que se cumpla $d(A,B)=r$, nos encontramos con dos puntos producto de la intersección de la $\odot A_r$ con $\overleftrightarrow{AO}$, estos hacen parte de la circunferencia del mensajero. Para llegar a esta conclusión realizamos la construcción en GeoGebra como se ve en el siguiente enlace https://www.geogebra.org/m/zctwjs9g acompañado del razonamiento algebraico que se muestra a continuación:

Caso 1. Cuando suponemos A y B son proporcionales, de acuerdo con la definición de proporcionalidad $ay=bx$.

Por otro lado, usamos la definición de circunferencia

$$d(A,B)=r$$

Dado que A y B son proporcionales usamos la definición de métrica del mensajero

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r\ (i)$$

De acuerdo con la proporcionalidad tenemos que $y=\frac{bx}{a}$, asumiendo que $a\neq 0$

Sustituyendo en (i) la ecuación $y = \frac{bx}{a}$,

$$\sqrt{\left((x-a)^2 + \left(\frac{bx}{a} - b\right)^2\right)} = r$$

Elevando al cuadrado

$$(x-a)^2 + \left(\frac{bx}{a} - b\right)^2 = r^2$$

Desarrollando los cuadrados

$$x^2 - 2xa + a^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 x^2 - 2\frac{b^2}{a}\ x + b^2 = r^2$$

Factorizar los términos que acompañan x^2, x y término independiente

$$\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)x^2 - 2\left(a + \frac{b^2}{a}\right)x + b^2 + a^2 = r^2$$

$$\frac{a^2 + b^2}{a^2}x^2 - 2\left(\frac{a^2 + b^2}{a}\right)x + (a^2 + b^2) = r^2$$

Dividiendo entre $a^2 + b^2$

$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \frac{2}{a}x + 1 = \frac{r^2}{a^2+b^2}$, Suponiendo que $a \neq 0$ y $b \neq 0$

Multiplicando por a^2

$$x^2 - 2ax + a^2 = \frac{r^2a^2}{a^2 + b^2}$$

Factorizar el trinomio cuadrado perfecto

$$(x-a)^2 = \frac{r^2a^2}{a^2 + b^2}$$

Encontrar a x y y

$$x = a \pm \sqrt{\frac{r^2a^2}{a^2 + b^2}}$$

$$y = \frac{b}{a}\left(a \pm \sqrt{\frac{r^2a^2}{a^2 + b^2}}\right)$$

Para este caso, una parte de la circunferencia en la métrica del mensajero son los puntos B y C cuyas coordenadas están dadas por:

$$\left(a \pm \sqrt{\frac{r^2a^2}{a^2 + b^2}}, \frac{b}{a}\left(a \pm \sqrt{\frac{r^2a^2}{a^2 + b^2}}\right)\right)$$

Cuando $a = 0$ y $b \neq 0$, como suponemos A y B son proporcionales, tenemos la ecuación $bx = 0y$ por lo que $x = 0$

Por definición de circunferencia

$$d(A, B) = r$$

De acuerdo con la definición de métrica del mensajero

$$\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = r$$

Como $a = 0$ y $x = 0$ entonces $\sqrt{(y - b)^2} = r$, despejando la ecuación obtenemos $y = |r| + b$, por tanto, la intersección de la circunferencia centrada en $(0, b)$ y radio r con $\overleftrightarrow{AO}$ son los puntos $(0, -r + b)$ y $(0, r + b)$ y estos hacen parte de la circunferencia del mensajero.

Cuando $a = 0$ y $b = 0$

Tenemos por definición de circunferencia

$$d(A, B) = r$$

De acuerdo con la definición de métrica del mensajero

$$\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = r$$

Como $a = 0$ y $b = 0$ entonces $\sqrt{x^2 + y^2} = r$, por tanto, una parte de la circunferencia en la métrica del mensajero es la circunferencia centrada en O y radio r. Este caso no se considera para demostrar, dado que el punto A no puede ser igual a O según la afirmación que se encuentra en el párrafo introductorio a este capítulo.

3.1.2. CIRCUNFERENCIA PUNTOS NO PROPORCIONALES

Suponemos A y B no son proporcionales, teniendo en cuenta que cumpliera $d_m(A, B) = r$, teniendo en cuenta que si se ubica un punto B no proporcional con A la distancia entre ellos debe ser igual a r, obtuvimos que es una circunferencia centrada en O sin los puntos que hacen parte de $\overleftrightarrow{AO}$, esta es la otra parte de la circunferencia de la métrica del mensajero. Realizamos la construcción en GeoGebra como se ve en el siguiente enlace https://www.geogebra.org/m/xxxyuwak acompañado del razonamiento algebraico que se muestra a continuación.

Caso 2. Cuando suponemos A y B no son proporcionales

Por la definición de circunferencia

$$d_m(A, B) = r$$

Por definición de métrica del mensajero

$$d(A, 0) + d(B, 0) = r$$

Por definición de métrica usual

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{x^2+y^2}=r$$

$$\sqrt{x^2+y^2}=r-\sqrt{a^2+b^2}$$

Mientras $r-\sqrt{a^2+b^2}\geq 0$ existirá una circunferencia para puntos no proporcionales, si $r-\sqrt{a^2+b^2}<0$ estaríamos diciendo que una raíz es igual a un número negativo y en los reales esto no sucede, por lo cual sería un conjunto vacío para los puntos no proporcionales.

Asumiendo la afirmación $r-\sqrt{a^2+b^2}\geq 0$ entonces $r\geq\sqrt{a^2+b^2}$

$$x^2+y^2=\left(r-\sqrt{a^2+b^2}\right)^2$$

Existirá una circunferencia centrada en O y radio $r-\sqrt{a^2+b^2}$.

Para este caso, la circunferencia son los puntos x y y que cumplen $x^2+y^2=\left(r-\sqrt{a^2+b^2}\right)^2$

En conclusión, la circunferencia en la métrica del mensajero son los puntos B y C unidos con la circunferencia de la métrica usual centrada en O con $r-\sqrt{a^2+b^2}$, mientras $r-\sqrt{a^2+b^2}\geq 0$, y cuyo centro de la circunferencia en la métrica del mensajero es $A(a,b)$.

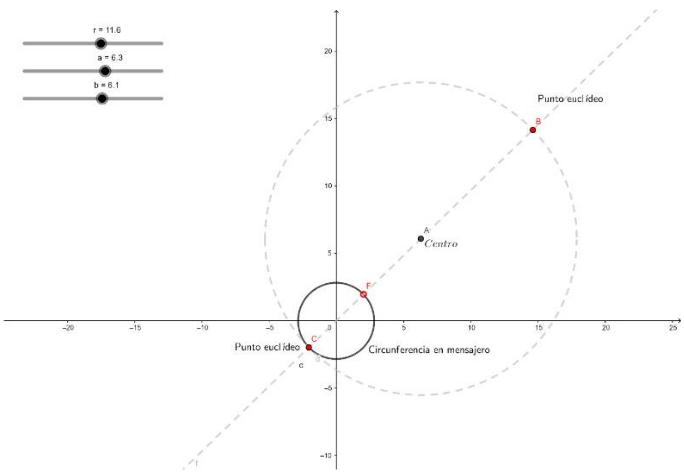


Figura 4 *Circunferencia del mensajero.*

En la ***Figura 4*** se muestra la circunferencia en la métrica del mensajero la cual es la circunferencia centrada en O sin F unido con C y B. En el siguiente enlace se encuentra el applet en el cual A es un punto que se puede mover por todo el plano por medio de los deslizadores a y b y r es el radio de la circunferencia. La circunferencia en la métrica del mensajero está representada con un trazo negro continuo y los puntos de color rojo. https://www.geogebra.org/m/pu8azksw.

De acuerdo con lo anterior, establecemos la siguiente **conjetura**:

Dado A en $\mathbb{R}^{*2}$ donde $A(a, b)$ es el centro de la circunferencia, r en $\mathbb{R}^{+}$ donde r es el radio. Si $g \geq 0$ tal que $g = r - d(A, O)$, la circunferencia en la métrica del mensajero son los puntos que satisfacen que

$$\odot(A_r)_m = \left(\odot O_g - (\overleftrightarrow{AO} \cap \ \odot O_g)\right) \cup \left(\overleftrightarrow{AO} \cap \odot A_r\right)$$

Si $g < 0$ tal que $g = r - d(A, O)$, la circunferencia en la métrica del mensajero son los puntos que satisfacen que

$$\odot(A_r)_m = \left(\overleftrightarrow{AO} \cap \odot A_r\right)$$

3.2. ELIPSE

Decidimos utilizar la siguiente definición

Una elipse es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que la suma de sus distancias a dos puntos fijos de ese plano es siempre igual a una constante, mayor que la distancia entre los dos puntos. Los dos puntos fijos se llaman focos de la elipse.

Definición de elipse en la métrica del mensajero, teniendo dos puntos fijos A y B a los que llamaremos focos y un $k \in \mathbb{R}^{+}$, donde Z es el lugar geométrico de la elipse que cumple

$$d_m(A, Z) + d_m(Z, B) = k$$

3.2.1. ELIPSE PUNTOS PROPORCIONALES

Para encontrar la elipse en esta métrica realizamos un razonamiento similar al hecho para encontrar la circunferencia, teniendo en cuenta la ubicación de los focos, cuando A y B son proporcionales, la elipse en la métrica del mensajero son dos puntos (estos puntos hacen parte de la intersección de la elipse usual, cuyos focos son A y B, con $\overleftrightarrow{AB}$) y una circunferencia usual centrada en O, realizamos la construcción en GeoGebra y el razonamiento algebraico, como se ve a continuación.

Caso 1. Cuando A y B cumplen ser proporcionales.

Pensando en los casos del plano de la métrica del mensajero, Z puede cumplir que sea proporcional A y B o Z no proporcional con A y Z no proporcional con B. Se tienen en cuenta solo esos dos casos, dado que si Z es proporcional con alguno de los dos por la transitividad de la proporcionalidad Z es proporcional con el otro y sucede lo mismo para el caso en el que Z no es proporcional con alguno de los dos.

Caso 1A. Cuando A y B cumplen ser proporcionales y suponemos un Z que es proporcional con A y B.

Por la definición de elipse y teniendo en cuenta Z proporcional con A y Z proporcional con B,

$$d(A,Z)+d(Z,B)=k$$

Por definición de distancia

$$\sqrt{(x-a\,)^2+(y-b\,)^2}+\sqrt{(x-c\,)^2+(y-d\,)^2}=k$$

Sumando a ambos lados $-\sqrt{(x-c\,)^2+(y-d\,)^2}$

$$\sqrt{(x-a\,)^2+(y-b\,)^2}=k-\sqrt{(x-c\,)^2+(y-d\,)^2}$$

Como Z proporcional con A, por la definición de proporcionalidad $ay=bx$, despejando y, $y=\frac{xb}{a}$ asumiendo que $a\neq 0$, se sustituye a y

$$\sqrt{(x-a\,)^2+\left(\frac{xb}{a}-b\,\right)^2}=k-\sqrt{(x-c\,)^2+\left(\frac{xb}{a}-d\,\right)^2}$$

Se eleva al cuadrado y resolviendo cuadrados

$$(x-a\,)^2+\left(\frac{xb}{a}-b\,\right)^2=k^2-2k\sqrt{(x-c\,)^2+\left(\frac{xb}{a}-d\,\right)^2}+(x-c\,)^2+\left(\frac{xb}{a}-d\,\right)^2$$

Resolviendo los cuadrados y reduciendo términos

$$-2a\,x+a^2-2\frac{xb^2}{a}+b^2=k^2-2x\,c+c^2+d^2-2\frac{xbd}{a}-2k\sqrt{(x-c\,)^2+\left(\frac{xb}{a}-d\,\right)^2}$$

Factorizando a x

$$\left(-2a-\frac{2b^2}{a}+2\frac{bd}{a}+2c\,\right)x-c^2-d^2+a^2+b^2-k^2=-2k\sqrt{(x-c\,)^2+\left(\frac{xb}{a}-d\,\right)^2}$$

Elevando al cuadrado los dos lados de la desigualdad y buscando como factor común a x^2 y x

$$\left(-2a-\frac{2b^2}{a}+2\frac{bd}{a}+2c\,\right)^2x^2$$
$$+2\left(\left(-2a-\frac{2b^2}{a}+2\frac{bd}{a}+2c\,\right)x\,\right)(-c^2-d^2-k^2+a^2+b^2)$$
$$+(-c^2-d^2-k^2+a^2+b^2)^2=4k^2\left((x-c\,)^2+\left(\frac{xb}{a}-d\,\right)^2\right)$$

Por definición trinomio cuadrado perfecto

$$\left(-2a-\frac{2b^2}{a}+2\frac{bd}{a}+2c\right)^2 x^2$$
$$+2\left(\left(-2a-\frac{2b^2}{a}+2\frac{bd}{a}+2c\right)x\right)(-c^2-d^2-k^2+a^2+b^2)$$
$$+(-c^2-d^2-k^2+a^2+b^2)^2$$
$$=4k^2\frac{x^2b^2}{a^2}-8k^2\frac{xbd}{a}+4k^2d^2+4k^2x^2-8k^2x\,c+4k^2c^2$$

La ecuación anterior es una expresión cuadrática, de la forma $ax^2+bx+c=0$

estos son los términos que acompañan a x^2 para términos de la demostración vamos a llamarlos z

$$z=\left(-2a-\frac{2\,y_1^2}{a}+2\frac{bd}{a}+2c\right)^2-4k^2\left(\frac{b^2}{a^2}-1\right)$$

Estos son los términos que acompañan a x para términos de la demostración vamos a llamarlos j

$$j=\left(2\left(-2a-\frac{2\,y_1^2}{a}+2\frac{bd}{a}+2c\right)(-c^2-d^2-k^2+a^2+b^2)+8k^2\frac{bd}{a}+8k^2c\right)$$

Los términos independientes, para la demostración, vamos a llamarlos v

$$v=\ (-c^2-d^2-k^2+a^2+b^2)^2-4k^2(c^2+d^2)$$

Por cual tenemos una ecuación de forma $zx^2+jx+v=0$

Usamos la ecuación cuadrática para encontrar a x

$$x=\frac{-j\pm\sqrt{j^2-4zv}}{2z}$$

Teniendo las coordenadas en x nos da dos puntos, para este caso E y F, cuyos puntos representan los $Z(x,y)$ que hacen parte de la elipse.

$$E\left(\frac{-j+\sqrt{j^2-4zv}}{2z},\frac{b}{a}\frac{-j+\sqrt{j^2-4zv}}{2z}\right)$$
$$F\left(\frac{-j-\sqrt{j^2-4zv}}{2z},\frac{b}{a}\frac{-j-\sqrt{j^2-4zv}}{2z}\right)$$

Teniendo en cuenta que z, j y v son las variables anteriormente mencionadas.

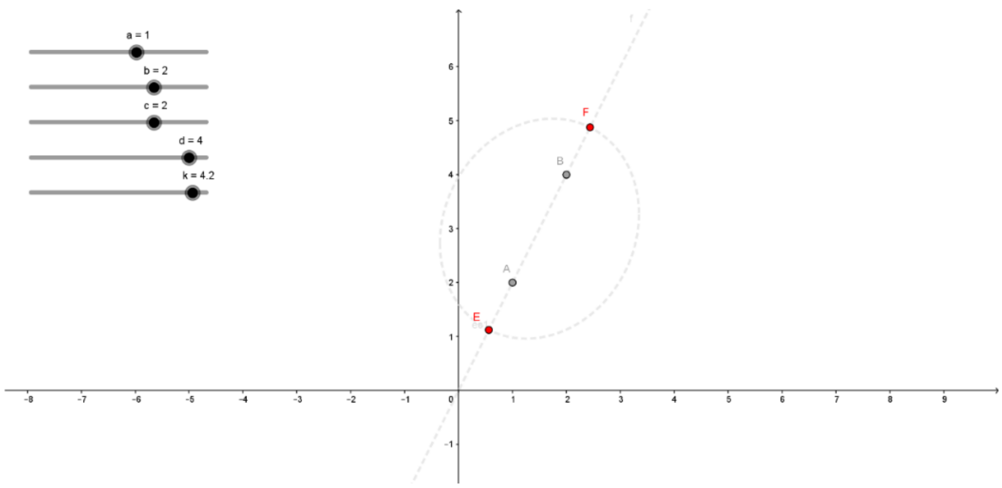


Figura 5 *Elipse del mensajero Caso 1A.* $a \neq 0$.

En la ***Figura 5*** se muestra una parte de la Elipse en la métrica del mensajero son dos puntos (en este caso E y F) cuando pasa el *Caso 1A*. En el siguiente enlace se encuentra el applet en el cual B es dependiente de A y A es un punto que se mueve por el plano por medio de los deslizadores a y b, n es la constante de proporcionalidad entre A y B y k es la suma de las distancias de A y B a los puntos que hacen parte de la elipse https://www.geogebra.org/m/zpbwwe5v.

En el caso cuando $a = 0$ se cumple que

como A y B son proporcionales, cumple que $c = 0$, además Z es proporcional con A y B entonces tenemos que $x = 0$

Por definición de la elipse

$$d(A, Z) + d(Z, B) = k$$

Por definición de la métrica

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-d)^2} = k$$

Por lo dicho anteriormente, $a = c = x = 0$, tenemos que

$$\sqrt{(y-b)^2} + \sqrt{(y-d)^2} = k$$

Por definición de valor absoluto

$$|y-b| + |y-d| = k$$

Cuando los dos valores absolutos tengan el mismo signo, tendremos que si y es positivo

$$|y-b| \geq 0 \ \text{ y } |y-d| \geq 0$$

$$y - b + y - d = k$$

$$2y - b - d = k$$

$$2y = k + b + d$$

$$y = \frac{k + b + d}{2}$$

Si y es negativo

$$|y - b| < 0 \text{ y } |y - d| < 0$$

$$-y + b - y + d = k$$

$$-2y = k - b - d$$

$$y = -\frac{k - b - d}{2}$$

Con las coordenadas en x y y encontramos dos puntos, para este caso M y L, cuyos puntos representan los Z que hacen parte de la elipse.

$$M\left(0, \frac{k + b + d}{2}\right)$$

$$L\left(0, -\frac{k - b - d}{2}\right)$$

Mientras los dos valores absolutos tengan signos contrarios tendremos que se cancelara y y si la igualdad $b - d = k$ o $-b + d = k$ se cumple, la recta $x = 0$ haría parte de la elipse del mensajero o en caso de incumplirse la igualdad presentada, el conjunto sería vacío.

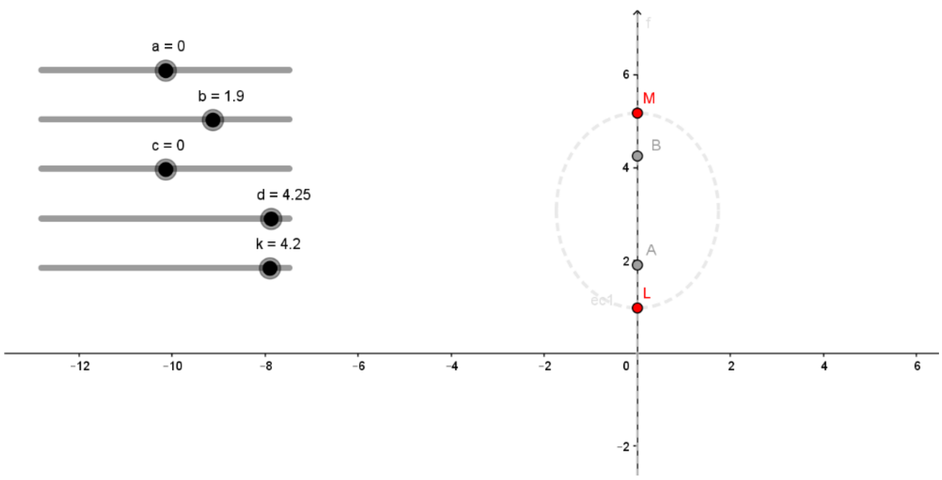


Figura 6 *Elipse del mensajero Caso 1A.* $a = 0$.

En la ***Figura 6*** se muestra una parte de la Elipse en la métrica del mensajero son dos puntos (en este caso M y L) cuando pasa el *Caso 1A* con $a = 0$. En el siguiente enlace se encuentra el applet en el cual los puntos A y B se manejan por medio de los deslizadores b y d respectivamente y k es la suma de las distancias de A y B a un punto de la elipse https://www.geogebra.org/m/mj2em8bp.

Caso 1B. Cuando A y B cumplen ser proporcionales y suponemos Z no proporcional con A y Z no proporcional con B.

Por definición de elipse y teniendo en cuenta Z no proporcional con A y Z no proporcional con B.

$$d_m(A,Z) + d_m(Z,B) = k$$

Por definición de la métrica del mensajero

$$d(A,O) + d(O,Z) + d(Z,O) + d(O,B) = k$$

Por definición de distancia

$$\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{c^2+d^2} + \sqrt{x^2+y^2} = k$$

Sumando las raíces y dejándolo en términos de x y y

$$2\sqrt{x^2+y^2} = k - \sqrt{a^2+b^2} - \sqrt{c^2+d^2}$$

$$\sqrt{x^2+y^2} = \frac{k - \sqrt{a^2+b^2} - \sqrt{c^2+d^2}}{2}$$

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{k-\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{c^2+d^2}}{2}\right)^2$$

Por tanto, los puntos Z que hacen parte de la circunferencia cuyo radio es $\left(\frac{k-\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{c^2+d^2}}{2}\right)^2$ son parte de la elipse del mensajero para este caso.

Para este caso, la circunferencia que sería parte de la elipse en la métrica del mensajero existirá siempre que $k > \sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2}$, en caso contrario el radio de la circunferencia sería negativo y el conjunto de puntos que cumplen estar en la elipse en la métrica del mensajero sería vacío.

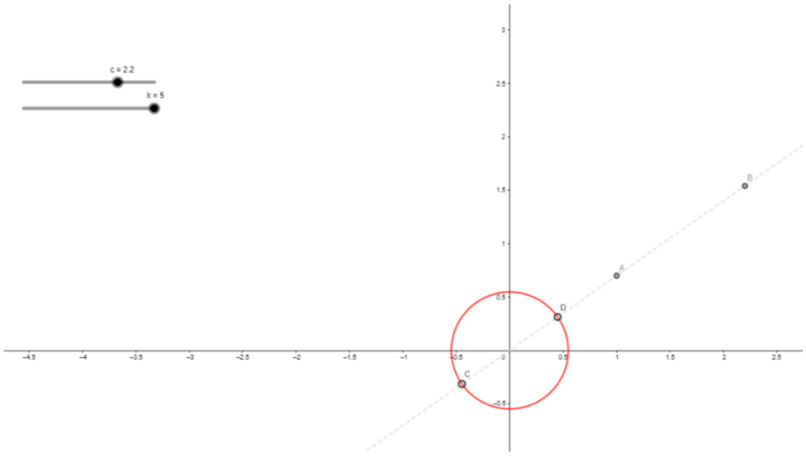


Figura 7 *Elipse del mensajero Caso 1B.*

En la ***Figura 7*** se muestra una parte de la Elipse en la métrica del mensajero, es la circunferencia centrada en O cuando pasa el *Caso 1B*. En el siguiente enlace se encuentra el applet en el cual A es un punto que se puede mover en el plano y c es la constante de proporción entre A y B y k es la suma de las distancias de A y B a un punto de la elipse. La elipse en la métrica del mensajero está representada con color rojo https://www.geogebra.org/m/tcchqbd6.

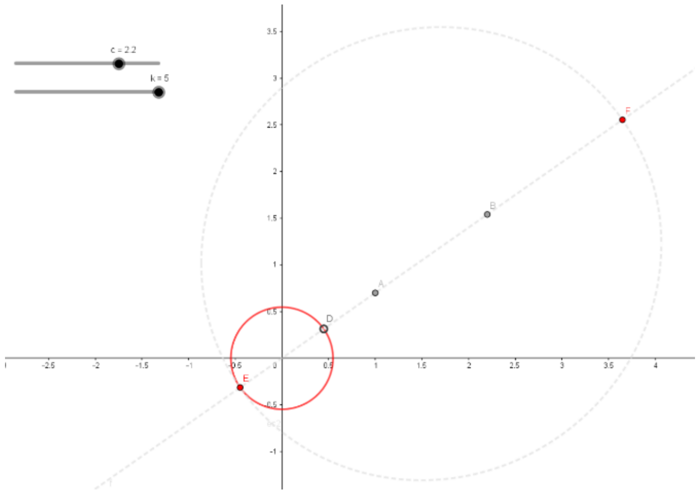


Figura 8 *Elipse del mensajero con A y B proporcionales.*

En la ***Figura 8*** se muestra la elipse en la métrica del mensajero cuando A y B proporcionales. En el siguiente enlace se encuentra el applet en el cual A es un punto que se puede mover en todo el plano, c es la constante de proporción entre A y B y k es la suma de las distancias de A y B a un punto de la elipse. La elipse en la métrica del mensajero está representada con color rojo https://www.geogebra.org/m/zt3t2cgr.

De acuerdo con lo anterior, se establece la siguiente **conjetura:**

Dados A y B en $\mathbb{R}^{*2}$, k en $\mathbb{R}^{+}$ ***A* y *B* proporcionales** donde A y B son focos. Si $g \geq 0$ tal que $g = \frac{k-d(A,O)-d(B,O)}{2}$. La elipse en la métrica del mensajero es el conjunto de puntos que satisfacen que

$$\oplus\left(\{A,B\}_k\right)_m = \left\{\left(\oplus\{A,B\}_k \cap \overleftrightarrow{AB}\right) \cup \left[\odot O_g - \left(\odot O_g \cap \overleftrightarrow{AO}\right)\right]\right\}$$

Si $g < 0$ tal que $g = \frac{k-d(A,O)-d(B,O)}{2}$. La elipse en la métrica del mensajero es el conjunto de puntos que satisfacen que

$$\oplus\left(\{A,B\}_k\right)_m = \left(\oplus\{A,B\}_k \cap \overleftrightarrow{AB}\right)$$

3.2.2. ELIPSE PUNTOS NO PROPORCIONALES

Realizamos una construcción a lápiz y papel posicionando A y B no proporcionales usando la definición de elipse, con el fin de identificar cuáles son los puntos que cumplen la definición de elipse. La elipse en la métrica del mensajero son cuatro puntos (estos puntos resultan al intersecar la elipse usual cuyos focos son B y O con $\overleftrightarrow{BO}$ y la elipse usual cuyos focos son A y O con $\overleftrightarrow{AO}$) y una circunferencia usual centrada en O, esto lo encontramos de manera algebraica y a partir de la construcción en GeoGebra como lo vemos a continuación.

Caso 2. Cuando A y B no proporcionales

Pensando en los casos del plano de la métrica del mensajero, Z puede ser proporcional exactamente a uno o también Z no proporcional con A y Z no proporcional con B.

Caso 2A. Cuando A y B no proporcionales y suponemos Z es proporcional con B.

Por definición de elipse y asumiendo que Z proporcional con B, no sería proporcional con A.

$$d_m(A,Z) + d(Z,B) = k$$

De acuerdo con la definición de métrica del mensajero

$$d(A,O) + d(O,Z) + d(Z,B) = k$$

De acuerdo con la definición de distancia

$$\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{(x-c\,)^2 + (y-d\,)^2} = k$$

Sumando a ambos lados $-\sqrt{a^2+b^2} - \sqrt{x^2+y^2}$

$$\sqrt{(x-c\,)^2 + (y-d\,)^2} = k - \sqrt{a^2+b^2} - \sqrt{x^2+y^2}$$

De este paso, podemos ver que k debe cumplir que $k > \sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2}$. Como consideramos que Z es proporcional B, por definición de proporcionalidad

$$cy = xd$$

$x = \frac{c}{d}y$ y considerando que $d \neq 0$, reemplazamos en la fórmula anterior

$$\sqrt{\left(\frac{c}{d}y - c\right)^2 + (y-d)^2} = k - \sqrt{a^2+b^2} - \sqrt{\left(\frac{c}{d}y\right)^2 + y^2}$$

$$\sqrt{\left(\frac{c}{d}y - c\right)^2 + (y-d)^2} = \left(k - \sqrt{a^2+b^2}\right) - |y\,|\sqrt{\frac{c^2}{d^2} + 1}$$

$$\left(\frac{c}{d}y - c\right)^2 + (y - d)^2$$

$$= \left(k - \sqrt{a^2 + b^2}\right)^2 - 2|y|\left(k - \sqrt{a^2 + b^2}\right)\sqrt{\frac{c^2}{d^2} + 1} + y^2\left(\frac{c^2}{d^2} + 1\right)$$

Por definición trinomio cuadrado perfecto

$$\left(\frac{c}{d}\right)^2 y^2 - \frac{2c^2}{d}y + c^2 + y^2 - 2dy + d^2$$

$$= \left(k - \sqrt{a^2 + b^2}\right)^2 - 2|y|\left(k - \sqrt{a^2 + b^2}\right)\sqrt{\frac{c^2}{d^2} + 1} + y^2\left(\frac{c^2}{d^2} + 1\right)$$

Simplificando términos

$$-\frac{2c^2}{d}y + c^2 - 2dy + d^2 = \left(k - \sqrt{a^2 + b^2}\right)^2 - 2|y|\left(k - \sqrt{a^2 + b^2}\right)\sqrt{\frac{c^2}{d^2} + 1}$$

Para despejar y de la ecuación

Si $y \geq 0$

$$y = \frac{-c^2 - d^2 + \left(k - \sqrt{a^2 + b^2}\right)^2}{-\frac{2c^2}{d} - 2d + 2\left(k - \sqrt{a^2 + b^2}\right)\sqrt{\frac{c^2}{d^2} + 1}}$$

Si no,

$$y = \frac{-c^2 - d^2 + \left(k - \sqrt{a^2 + b^2}\right)^2}{-\frac{2c^2}{d} - 2d - 2\left(k - \sqrt{a^2 + b^2}\right)\sqrt{\frac{c^2}{d^2} + 1}}$$

Con las coordenadas en x y y encontramos dos puntos, para este caso C_1 y C_2, cuyos puntos representan los Z que hacen parte de la elipse.

$$C_1\left(\frac{c}{d}\frac{-c^2 - d^2 + \left(k - \sqrt{a^2 + b^2}\right)^2}{-\frac{2c^2}{d} - 2d - 2\left(k - \sqrt{a^2 + b^2}\right)\sqrt{\frac{c^2}{d^2} + 1}}, \frac{-c^2 - d^2 + \left(k - \sqrt{a^2 + b^2}\right)^2}{-\frac{2c^2}{d} - 2d - 2\left(k - \sqrt{a^2 + b^2}\right)\sqrt{\frac{c^2}{d^2} + 1}}\right)$$

$$C_1\left(\frac{c\left(\sqrt{(a^2 + b^2)} + \sqrt{(c^2 + d^2)} - k\right)}{2\sqrt{(c^2 + d^2)}}, \frac{-c^2 - d^2 + \left(k - \sqrt{a^2 + b^2}\right)^2}{-\frac{2c^2}{d} - 2d - 2\left(k - \sqrt{a^2 + b^2}\right)\sqrt{\frac{c^2}{d^2} + 1}}\right)$$

$$C_2\left(\frac{c}{d}\frac{-c^2 - d^2 + \left(k - \sqrt{a^2 + b^2}\right)^2}{-\frac{2c^2}{d} - 2d + 2\left(k - \sqrt{a^2 + b^2}\right)\sqrt{\frac{c^2}{d^2} + 1}}, \frac{-c^2 - d^2 + \left(k - \sqrt{a^2 + b^2}\right)^2}{-\frac{2c^2}{d} - 2d + 2\left(k - \sqrt{a^2 + b^2}\right)\sqrt{\frac{c^2}{d^2} + 1}}\right)$$

$$C_2\left(\frac{\left(c\left(-\sqrt{a^2+\ b^2}+\ \sqrt{c^2+\ d^2}\ +\ k\right)\right)}{2\ \sqrt{c^2+\ d^2}},\frac{-c^2-d^2+\left(k-\sqrt{a^2+b^2}\right)^2}{-\frac{2c^2}{d}-2d+2\left(k-\sqrt{a^2+b^2}\right)\sqrt{\frac{c^2}{d^2}+1}}\right)$$

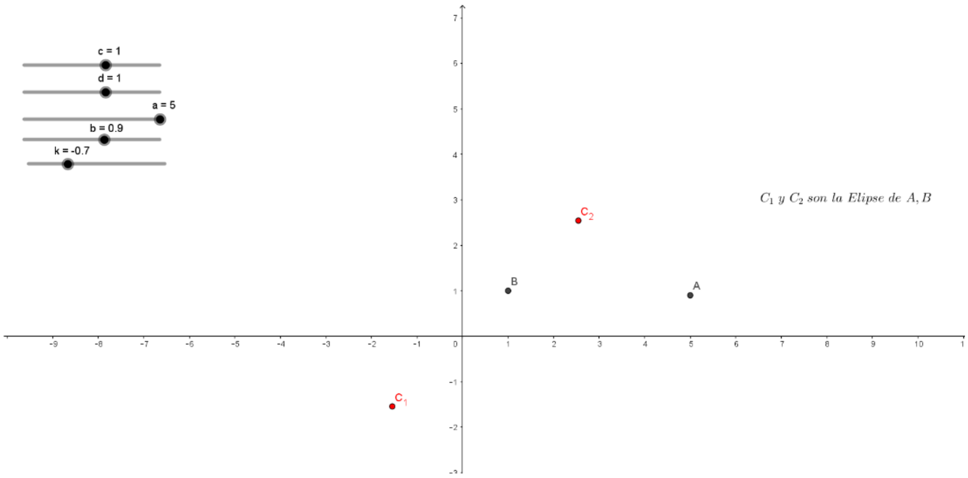


Figura 9 *Elipse del mensajero Caso 2A* $d \neq 0$.

En la ***Figura 9*** se muestra una parte de la elipse cuando los puntos, en este caso C_1 y C_2, son proporcionales con B, *Caso 2A* y $d \neq 0$. En el siguiente enlace se encuentra el applet en el cual A y B son puntos dependientes los deslizadores a, b, c y d respectivamente a las constantes asignadas al definir los puntos y k es la suma de las distancias de A y B a un punto de la elipse https://www.geogebra.org/m/yydnbpcp.

Si $d = 0$ entonces se tiene que y esta en $\overleftrightarrow{OB}$, por tanto $y = 0$

Definición de elipse del mensajero

$$d_m(A,Z) + d(Z,B) = k$$

De acuerdo con la definición de métrica del mensajero, sabiendo que Z proporcional con B

$$d(A,O) + d(O,Z) + d(Z,B) = k$$

De acuerdo con la definición de distancia

$$\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{(x-c\,)^2+(y-d\,)^2} = k$$

Como $d = y = 0$, reemplazamos en la ecuación anterior

$$\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{x^2} + \sqrt{(x-c)^2} = k$$

Sumando a ambos $-\sqrt{a^2+b^2}$ para poder despejar x

$$\sqrt{(x-c)^2} + \sqrt{x^2} = k - \sqrt{a^2+b^2}$$

$$|x-c| + |x| = k - \sqrt{a^2+b^2}$$

Mientras los dos valores absolutos sean positivos o negativos al tiempo tendremos que $c = k - \sqrt{a^2+b^2}$ o $-c = k - \sqrt{a^2+b^2}$

Asumiendo que $x - c$ y x son positivos, por definición de valor absoluto

$$|x - c| \geq 0 \text{ y } |x| \geq 0$$

$$2x - c = k - \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$x = \frac{k - \sqrt{a^2 + b^2} + c}{2}$$

Ahora, que $x - c$ y x son negativos, por definición de valor absoluto

$$|x - c| < 0 \text{ y } |x| < 0$$

$$-2x + c = k - \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$x = \frac{-k + \sqrt{a^2 + b^2} + c}{2}$$

Con las coordenadas en x y y encontramos dos puntos, para este caso C_1 y C_2, cuyos puntos representan los Z que hacen parte de la elipse.

$$C_1\left(\frac{k - \sqrt{a^2 + b^2} + c}{2}, 0\right)$$

$$C_2\left(\frac{-k + \sqrt{a^2 + b^2} + c}{2}, 0\right)$$

En caso de que tengan signos contrarios, se cancelará x y si la igualdad $c + \sqrt{a^2 + b^2} = k$ se cumple, la recta $y = 0$ haría parte de la elipse del mensajero o en caso de incumplirse la igualdad presentada, el conjunto sería vacío.

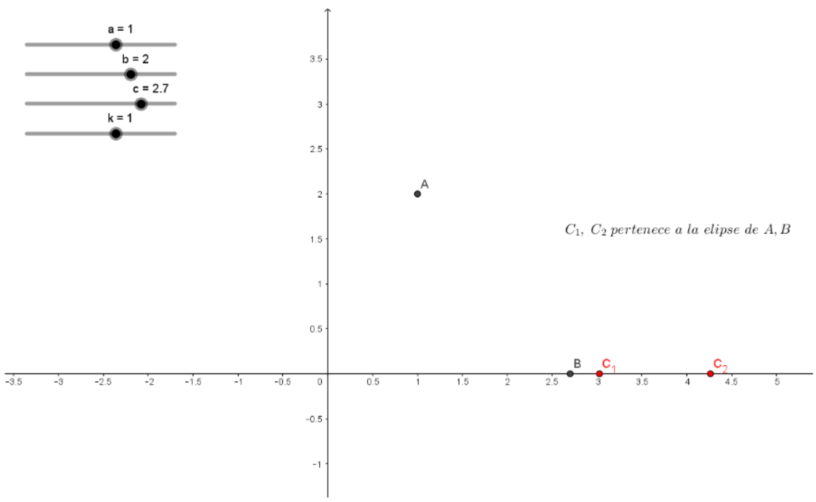


Figura 10 *Elipse del mensajero Caso 2A* $d = 0$.

En la ***Figura 10*** se muestra una parte de la elipse cuando los puntos, en este caso C_1 y C_2, son proporcionales con B, *Caso 2A* y $d = 0$. En el siguiente enlace se encuentra el applet en el cual

A es un punto que se mueve por el plano por medio de los deslizadores a y b, B es un punto que se mueve por el eje x por medio del deslizador c y k es la suma de las distancias de A y B a un punto de la elipse https://www.geogebra.org/m/utbsyjaa.

Caso 2B. Cuando A y B cumplen no ser proporcionales y suponemos que Z no proporcional con A y Z no proporcional con B

Por definición de elipse en la métrica del mensajero

$$d_m(A,Z) + d_m(Z,B) = k$$

De acuerdo con la definición de métrica del mensajero, sabiendo que Z no proporcional con A y Z no proporcional con B

$$d(A,O) + d(O,Z) + d(Z,O) + d(O,B) = k$$

De acuerdo con la definición de distancia

$$\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{c^2+d^2} + \sqrt{x^2+y^2} = k$$

Sumando las raíces

$$\sqrt{a^2+b^2} + 2\sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{c^2+d^2} = k$$

Despejando para dejar en términos de x y y

$$\sqrt{x^2+y^2} = \frac{k-\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{c^2+d^2}}{2}$$

$$x^2+y^2 = \left(\frac{k-\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{c^2+d^2}}{2}\right)^2$$

La circunferencia haría parte de la elipse en la métrica del mensajero si $k > \sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2}$, en tal caso donde la constante cumpla ser menor el conjunto sería vacío.

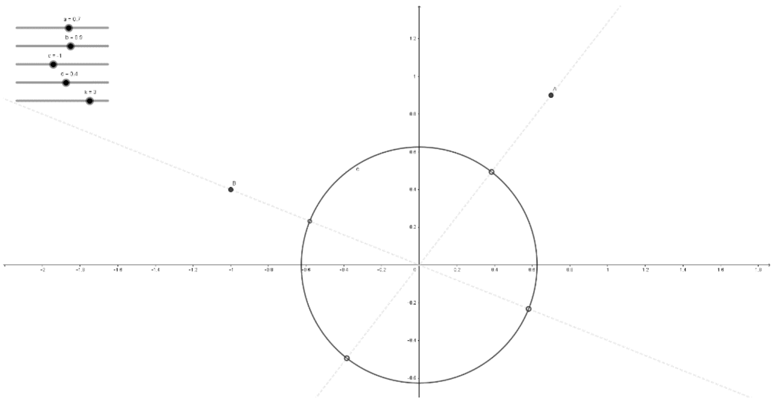


Figura 11 *Elipse del mensajero Caso 2B.*

En la ***Figura 11*** se muestra una parte de la elipse cuando es la circunferencia sin cuatro de los puntos que la conforman, *Caso 2B.* En el siguiente enlace se encuentra el applet en el cual A y

B son puntos que se mueven por el plano por medio de a, b, c y d respectivamente según como se definieron los puntos y k es la suma de las distancias de A y B a un punto de la elipse https://www.geogebra.org/m/m6shtnxz.

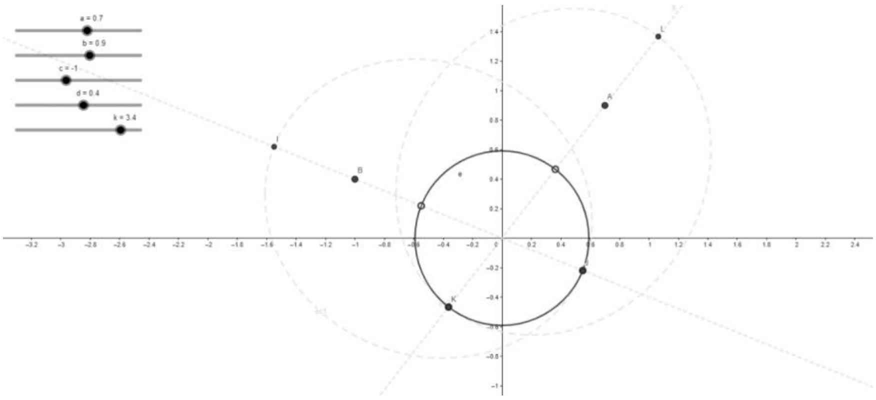


Figura 12 *Elipse del mensajero con A y B no proporcionales.*

En la ***Figura 12*** se muestra la elipse en la métrica del mensajero cuando A y B no son proporcionales. En el siguiente enlace se encuentra el applet en el cual A y B son puntos que se mueven por el plano por medio de a, b, c y d respectivamente según como se definieron los puntos y k es la suma de las distancias de A y B a un punto de la elipse https://www.geogebra.org/m/skvm7hby.

De acuerdo con lo anterior, establecemos la siguiente **conjetura:**

Dados A y B en $\mathbb{R}^{*2}$, k en $\mathbb{R}^{+}$, ***A* y *B* no proporcionales** donde A y B son focos. Si $g \geq 0$ tal que $g = \frac{k-d(A,O)-d(B,O)}{2}$, s tal que $s = k - d(A,O)$ y r tal que $r = k - d(B,O)$. La elipse en la métrica del mensajero es un conjunto de puntos que satisfacen que

$$\bigoplus (\{A,B\}_k)_m = \left[\left(\bigoplus \{O,B\}_s \cap \overleftrightarrow{BO}\right) \cup \left(\bigoplus \{O,A\}_r \cap \overleftrightarrow{AO}\right) \cup \odot O_g\right]$$

Si $s < 0$ o $r < 0$ entonces $g < 0$. La elipse en la métrica del mensajero es el conjunto de puntos que satisfacen que

$$\bigoplus (\{A,B\}_k)_m = \left(\bigoplus \{O,A\}_r \cap \overleftrightarrow{AO}\right) \text{ o } \bigoplus (\{A,B\}_k)_m = \left(\bigoplus \{O,B\}_s \cap \overleftrightarrow{BO}\right)$$

Cabe recordar que en el **Anexo *A*** se encuentra la exploración de los demás lugares geométricos que se estudiaron en este trabajo de grado.

4. PRUEBA DE LOS RESULTADOS OBTENIDOS

En este capítulo se demuestran las conjeturas resultado de la exploración que se realizó en el capítulo anterior y en el **Anexo *A***, antes de cada demostración se encontrará la definición del lugar geométrico, a excepción de circunferencia y elipse que se encuentra en el capítulo de exploración, y la conjetura que se estableció. Las demostraciones son realizadas desde un razonamiento geométrico y de manera conjuntista.

Para las siguientes demostraciones utilizamos la definición de interestancia.

El punto C está entre A y B si: i) A, B y C son colineales, y ii) la suma de las distancias de A a C y de C a B es igual a la distancia de A a B.
En la métrica del mensajero cuando el punto C está entre A y B cumple $d_m(B,A) + d_m(A,C) = d_m(B,C)$.

4.1.SEGMENTO DEL MENSAJERO

De acuerdo con la definición de segmento, dados dos puntos A y B, el segmento AB (se denota $\overline{AB}$) es la unión de A y B con todos los puntos que están entre A y B. Para la métrica del mensajero diremos que

$$\overline{AB}_m = \{A,B\} \cup \{Z | d_m(A,Z) + d_m(Z,B) = d_m(A,B)\}$$

En nuestra métrica encontramos dos tipos de segmentos cuyas conjeturas demostramos a continuación.

Proposición segmento (1). Dados A y B en $\mathbb{R}^{*2}$, A y B no proporcionales. El $\overline{AB}_m$ es el conjunto de puntos que pertenecen al $\overline{AO}$ o $\overline{OB}$, es decir

$$\overline{AB}_m = \overline{AO} \cup \overline{OB}$$

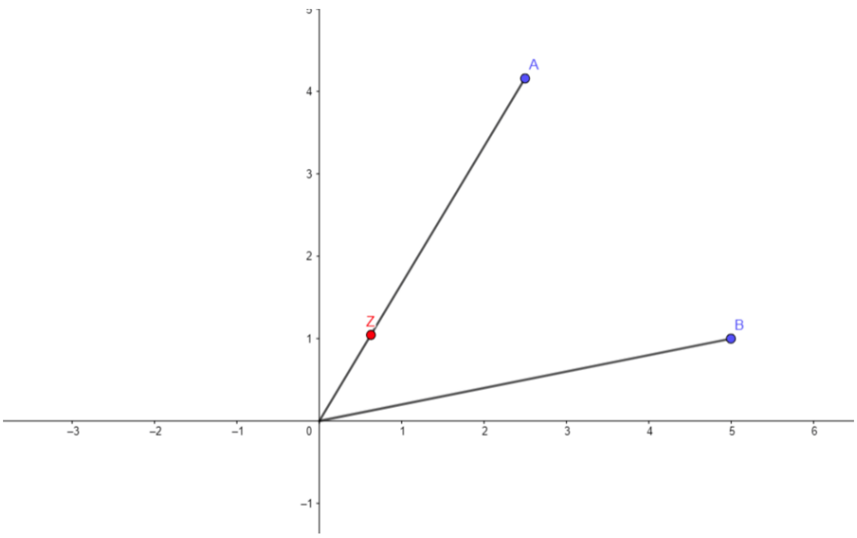


Figura 13 *Segmento (1).*

En la ***Figura 13*** se muestra el segmento del mensajero cuando A y B no son proporcionales. En el siguiente enlace se encuentra el applet en el cual A y B se pueden mover por todo el plano y Z se mueven entre O y A https://www.geogebra.org/m/jpycvypw.

Para demostrar la igualdad de conjuntos utilizamos la doble contenencia, partiendo primero de $\overline{AO} \cup \overline{OB} \subseteq \overline{AB}_m$.

Suponemos $Z \in \overline{AO} \cup \overline{OB}$, por la definición de unión sabemos que $Z \in \overline{AO}$ o $Z \in \overline{OB}$, se establecen dos casos, las demostraciones de los dos casos son análogas dado que A y B son puntos cuales quiera sin alguna propiedad que los diferencie, partamos del caso en que $Z \in \overline{AO}$, por lo anterior podemos decir que A y Z son proporcionales al estar en la recta que pasa por O. Por otro lado, como Z es proporcional con A, no cumple ser proporcional con B y esto implica que su forma de medir la distancia de Z a B es

$$d_m(Z,B) = d(Z,O) + d(O,B)\ (i)$$

Dado que la $d(A,Z) > 0$ y $d(A,Z) = d_m(A,Z)$, sumamos a ambos lados de la igualdad (i)

$$d_m(A,Z) + d_m(Z,B) = d(Z,O) + d(O,B) + d_m(A,Z)$$

Por la definición de segmento tenemos $Z \in \overline{AB}_m$. Queda demostrado que $\overline{AO} \cup \overline{OB} \subseteq \overline{AB}_m$.

Ahora demostraremos que $\overline{AB}_m \subseteq \overline{AO} \cup \overline{OB}$, partiendo de la contrarrecíproca $Z \notin \overline{AO} \cup \overline{OB} \rightarrow Z \notin \overline{AB}_m$. Suponemos $Z \notin \overline{AO} \cup \overline{OB}$ entonces $Z \notin \overline{AO}$ y $Z \notin \overline{OB}$, esto nos lleva a considerar la posición de Z en el plano de la métrica del mensajero, entonces Z no es proporcional a A y Z no es proporcional a B (Caso 1) o Z proporcional exactamente a alguno de los dos (Caso 2).

Para el caso 1 partimos de la forma en que miden las distancias a Z según la métrica

$$d_m(Z, A) = d(Z, O) + d(O, A)$$
$$d_m(Z, B) = d(Z, O) + d(O, B)$$

Sumando las dos igualdades y por definición de métrica del mensajero nos queda que

$$d_m(A, Z) + d_m(Z, B) = 2d(Z, O) + d_m(A, B)$$

Como $d(Z, O) > 0$ se establece que $Z \notin \overline{AB}_m$.

Para el caso 2 suponemos que Z es proporcional con A y por ser proporcional Z pertenecería a la $\overleftrightarrow{AO}$, por esto cumpliría uno de los dos casos a continuación $Z - A - O$ o $Z - O - A$.

Cuando $Z - O - A$ entonces $d(Z, A) = d(Z, O) + d(O, A)$ y como Z no proporcional a B se establece $d_m(Z, B) = d(Z, O) + d(O, B)$, sumando las dos igualdades y tenemos que

$$d_m(Z, A) + d_m(Z, B) = 2d(Z, 0) + d_m(A, B)$$

Y teniendo en cuenta la conclusión del caso anterior, se puede decir que $Z \notin \overline{AB}_m$.

Cuando $Z - A - O$ entonces $d(Z, O) = d(Z, A) + d(A, O)$ y $d_m(Z, B) = d(Z, O) + d(O, B)$ y sustituyendo $d(Z, O)$ en la segunda igualdad $d_m(Z, B) = d(Z, A) + d(A, O) + d(O, B)$ y por definición de la métrica del mensajero $d_m(Z, B) = d(Z, A) + d_m(A, B)$, sumando $d(Z, A)$ a ambos lados de la igualdad $d_m(Z, B) + d_m(Z, A) = 2d_m(Z, A) + d_m(A, B)$, esto es suficiente para concluir que $Z \notin \overline{AB}_m$ y para el caso en que $Z - B - O$ o $Z - B - O$ se realiza un razonamiento análogo, por lo cual se cumple que $Z \notin \overline{AB}_m$ y con esto queda demostrado $\overline{AB}_m \subseteq \overline{AO} \cup \overline{OB}$.

Proposición segmento (2). Dados A y B en $\mathbb{R}^{*2}$, A y B proporcionales $\overline{AB}_m$ es el conjunto de puntos que pertenecen a $\overline{AB}$, es decir

$$\overline{AB}_m = \overline{AB}$$

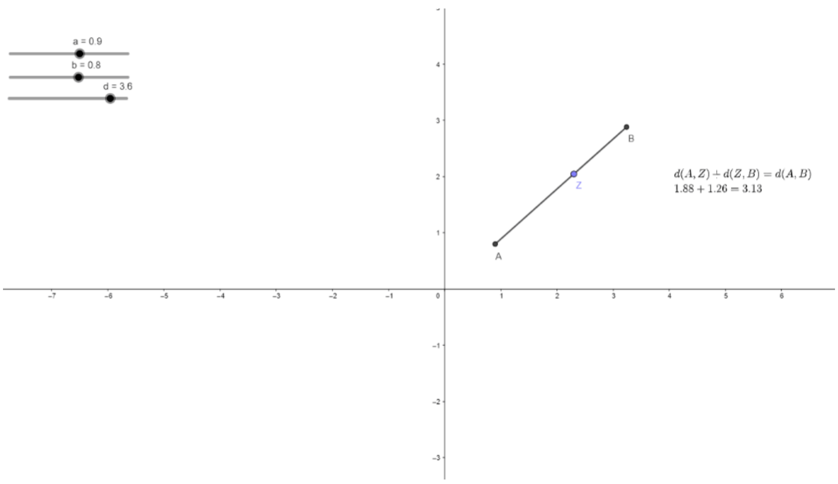


Figura 14 *Segmento (2).*

En la ***Figura 14*** se muestra el segmento del mensajero cuando A y B son proporcionales. En el siguiente enlace se encuentra el applet en el que el punto A se mueve por el plano a través de los deslizadores a y b, el deslizador d es la constante de proporción entre A y B, y Z se mueve entre A y B. https://www.geogebra.org/m/vey6cjyg.

Para demostrar la igualdad de conjuntos utilizamos la doble contenencia, partiendo primero de $\overline{AB} \subseteq \overline{AB}_m$.

Suponemos un $Z \in \overline{AB}$, al estar en el segmento y siendo A y B proporcionales, cumplirá la interestancia usual y Z será proporcional con A y B, por definición de interestancia tendremos la siguiente igualdad

$$d(A,B) = d(A,Z) + d(Z,B)$$

Y al ser todos proporcionales, a su vez tendremos que

$$d_m(A,B) = d_m(A,Z) + d_m(Z,B)$$

Y por definición de segmento en la métrica del mensajero tendremos que $Z \in \overline{AB}_m$, con esto tenemos que $\overline{AB} \subseteq \overline{AB}_m$.

Ahora demostraremos que $\overline{AB}_m \subseteq \overline{AB}$, partiendo de la contrarrecíproca $Z \notin \overline{AB} \rightarrow Z \notin \overline{AB}_m$.

Suponemos un $Z \notin \overline{AB}$, esto nos lleva a considerar las posiciones Z en el plano del mensajero cuando sea proporcional con A y sea proporcional con B (Caso 1) o cuando no sea proporcional a A y no sea proporcional a B (Caso 2).

Partamos del caso 2, por la definición de la métrica del mensajero tendremos que

$$d_m(A,Z) = d(A,O) + d(Z,O)$$

$$d_m(B,Z) = d(B,O) + d(Z,O)$$

Y sumando estas dos igualdades nos queda que

$$d_m(A,Z) + d_m(B,Z) = d(A,O) + d(Z,O) + d(B,O) + d(Z,O)$$

Por lo cual A y B tendrán que ser no proporcionales para cumplir la definición de segmento del mensajero y esto no es posible, por lo cual $Z \notin \overline{AB}_m$.

Para el caso 1, tendríamos dos interestancias posibles, pero análogas al ser A y B puntos cuales quiera sin propiedades que los diferencie, por lo cual supongamos $Z - A - B$ y por la definición de interestancia

$$d(Z,B) = d(A,Z) + d(A,B)$$

Y sumando $d_m(A,Z)$ en los dos lados de la igualdad

$$d_m(Z,B) + d_m(A,Z) = d_m(A,Z) + d_m(A,B) + d_m(A,Z)$$

Y como $d_m(A,Z) > 0$ tendremos que $Z \notin \overline{AB}_m$. Con lo anterior queda demostrado que $\overline{AB}_m \subseteq \overline{AB}$.

4.2. RAYO DEL MENSAJERO

Para la demostración de la conjetura producto de la exploración para encontrar el rayo en la métrica del mensajero, la definición de rayo que tuvimos en cuenta para estas demostraciones es:

Dados dos puntos de una recta A y B, el rayo AB (que se denota $\overrightarrow{AB}$) es la unión de $\overline{AB}$ con el conjunto de puntos Z para los cuales B está entre A y Z. Para la métrica del mensajero diremos que

$$\overrightarrow{AB}_m = \overline{AB}_m \cup \{Z | d_m(A,B) + d_m(B,Z) = d_m(A,Z)\}$$

Con lo anterior, llegamos a tres tipos de rayos cuyas conjeturas se demostrarán a continuación.

Proposición rayo (1). Dados A y B en $\mathbb{R}^{*2}$, A y B proporcionales. Sí $A - O - B$ o $O - A - B$ entonces el $\overrightarrow{AB}_m$ es el conjunto de puntos que pertenece a $\overrightarrow{AB}$, es decir

$$\overrightarrow{AB}_m = \overrightarrow{AB}$$

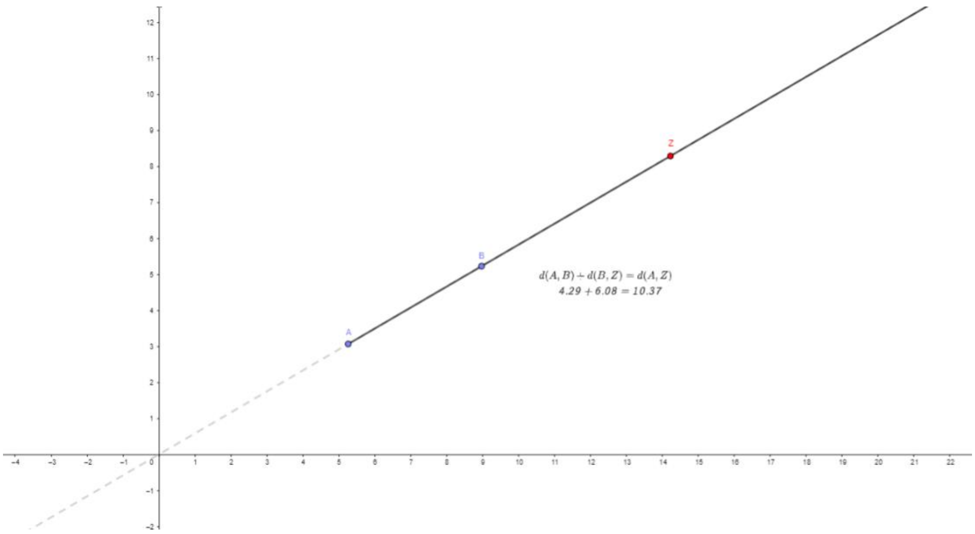


Figura 15 *Rayo (1).*

En la ***Figura 15*** se muestra el rayo del mensajero cuando A y B son proporcionales y se cumple la interestancia $O - A - B$. En el siguiente enlace se encuentra el applet en el cual los puntos A y B se pueden mover por la recta que pasa por O y Z se puede mover por todo $\overrightarrow{AB}$ https://www.geogebra.org/m/grtjv4gx.

Para demostrar la igualdad de conjuntos utilizamos la doble contenencia, partiendo primero de $\overrightarrow{AB} \subseteq \overrightarrow{AB}_m$

Suponemos $Z \in \overrightarrow{AB}$ se establecen entonces dos casos $O - A - B$ o $A - O - B$ cuya demostración es análoga.

En el caso $O - A - B$, por definición de rayo $Z \in \overline{AB}$ o $A - B - Z$, cuando $Z \in \overline{AB}$ entonces $Z \in \overline{AB}_m$ por **Proposición segmento (2)**, por otra parte, cuando $A - B - Z$, como Z es proporcional con A y B por definición de la métrica del mensajero y de interestancia, $d(A, Z) = d(A, B) + d(B, Z)$ entonces $d_m(A, Z) = d_m(A, B) + d_m(B, Z)$, se concluye por definición de rayo que $Z \in \overrightarrow{AB}_m$, por tanto, queda demostrado que $\overrightarrow{AB} \subseteq \overrightarrow{AB}_m$.

Ahora demostramos que $\overrightarrow{AB}_m \subseteq \overrightarrow{AB}$ por medio de un razonamiento por contrarrecíproca.

Suponemos $Z \notin \overrightarrow{AB}$, se establecen entonces dos casos $O - A - B$ o $A - O - B$.

En el caso $O - A - B$, suponemos la posible ubicación de Z en $\mathbb{R}^{*2}$ teniendo en cuenta la interestancia anterior, a) $A - B - Z$, b) $A - Z - B$ y c) $Z - A - B$. Para a) y b) de acuerdo con la definición de rayo, estas no se pueden dar, es decir $d_m(A, Z) \neq d_m(B, Z) + d_m(A, B)$ y $d_m(A, B) \neq d_m(A, Z) + d_m(Z, B)$ por definición de interestancia y de la métrica del mensajero, con esto concluir que $Z \notin \overrightarrow{AB}_m$, ya que se incumple una de las partes de la definición rayo; para c) por definición de interestancia y de la métrica del mensajero $d_m(Z, B) = d_m(Z, A) + d_m(A, B)$ con esta igualdad podemos establecer que $d_m(A, B) \neq d_m(Z, B) + d_m(Z, A)$ por esta desigualdad y la definición de rayo se cumple que $Z \notin \overrightarrow{AB}_m$.

En el caso $A - O - B$, suponemos la posible posición de Z. Si Z es proporcional con A y B el razonamiento es análogo al caso b) mostrado anteriormente concluyendo así que $Z \notin \overrightarrow{AB}_m$ y si Z no proporcional con A y Z no proporcional con B, por la definición de métrica del mensajero $d_m(A, Z) = d(A, O) + d(O, Z)$ y $d_m(B, Z) = d(B, O) + d(O, Z)$, si sumamos estas igualdades $d_m(A, Z) + d_m(B, Z) = d_m(A, B) + 2d(O, Z)$, por definición de igualdad $d_m(A, Z) \neq d_m(B, Z) + d_m(A, B)$, por definición de rayo podemos concluir que $Z \notin \overrightarrow{AB}_m$.

Y con esto se demuestra que $\overrightarrow{AB}_m \subseteq \overrightarrow{AB}$.

Proposición rayo (2). Dados A y B en $\mathbb{R}^{*2}$, A y B proporcionales. Sí $A - B - O$ y C es un punto tal que $B - A - C$ entonces el $\overrightarrow{AB}_m$ es el conjunto de puntos que compone todo el plano sin $\overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{AB}_m = \mathbb{R}^{*2} - \overrightarrow{AC}$$

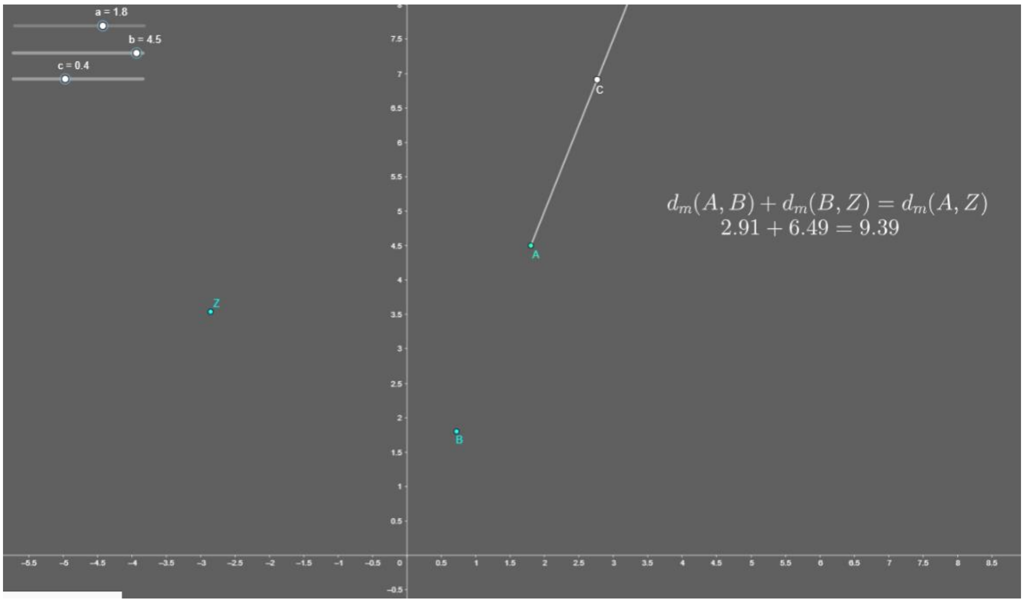


Figura 16 *Rayo (2).*

En la ***Figura 16*** se muestra el rayo del mensajero cuando A y B son proporcionales y se cumple la interestancia $O - B - A$. En el siguiente enlace se encuentra el applet en el cual A es un punto que se mueve por todo el plano a través de los deslizadores a y b, el deslizador c es la constante de proporción entre A y B, el plano está de color gris debido a que representa los Z que hacen parte del rayo y C son los puntos que no pertenecen al $\overrightarrow{AB}_m$ https://www.geogebra.org/m/r465zmpf.

Para demostrar la igualdad de conjuntos utilizamos la doble contenencia, partiendo primero de $\mathbb{R}^{*2} - \overrightarrow{AC} \subseteq \overrightarrow{AB}_m$.

Suponemos $Z \in (\mathbb{R}^{*2} - \overrightarrow{AC})$ por definición de complemento $Z \notin \overrightarrow{AC}$ de acuerdo con esto se establecen los siguientes casos:

Caso 1 cuando Z proporcional con A y B, teniendo en cuenta lo anterior y las interestancias dadas en la conjetura, se cumple que $A - Z - B$ o $A - B - Z$, por la definición de interestancia y de la métrica del mensajero $d_m(A,B) = d_m(A,Z) + d_m(Z,B)$ o $d_m(A,Z) = d_m(A,B) + d_m(B,Z)$, por definición de rayo $Z \in \overrightarrow{AB}_m$.

Caso 2 cuando Z no proporcional A y Z no proporcional a B, teniendo en cuenta la interestancia de la conjetura y por definición de interestancia $d(A,O) = d(A,B) + d(B,O)$, como $d(Z,O) > 0$, se suma a ambos lados de la igualdad $d(Z,O)$ y por definición de la métrica del mensajero $d_m(A,Z) = d_m(A,B) + d_m(B,Z)$, por definición de rayo $Z \in \overrightarrow{AB}_m$. Por tanto, queda demostrado que $\mathbb{R}^{*2} - \overrightarrow{AC} \subseteq \overrightarrow{AB}_m$.

Ahora demostramos que $\overrightarrow{AB}_m \subseteq \mathbb{R}^{*2} - \overrightarrow{AC}$ por medio de un razonamiento por contrarrecíproca.

Suponemos $Z \notin \mathbb{R}^{*2} - \overrightarrow{AC}$ por definición de complemento $Z \in \overrightarrow{AC}$, por definición de rayo y de unión $A - Z - C$ o $A - C - Z$, por la interestancia dada en la conjetura $B - A - C$ y con estas dos interestancias, por teorema transitividad de la interestancia concluimos que $B - A - Z$, por definición de interestancia y de la métrica del mensajero $d_m(B,Z) = d_m(A,B) + d_m(A,Z)$, por definición de igualdad $d_m(A,B) \neq d_m(B,Z) + d_m(A,Z)$ y por definición de rayo $Z \notin \overrightarrow{AB}_m$ con esto queda demostrado que $\overrightarrow{AB}_m \subseteq \mathbb{R}^{*2} - \overrightarrow{AC}$.

Proposición rayo (3). Dados A y B en $\mathbb{R}^{*2}$, A y B no proporcionales el $\overrightarrow{AB}_m$ es el conjunto de puntos que pertenecen al $\overline{AO}$ o al $\overrightarrow{OB}$, es decir

$$\overrightarrow{AB}_m = \overline{AO} \cup \overrightarrow{OB}$$

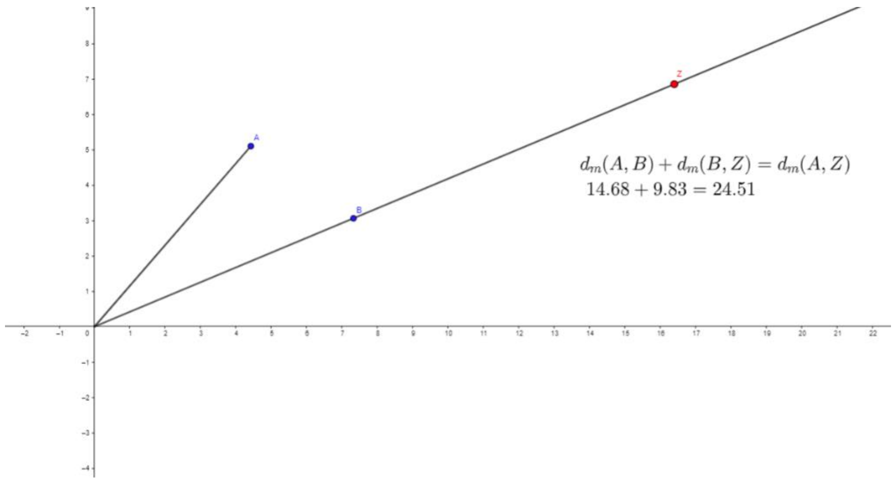


Figura 17 *Rayo (3).*

En la ***Figura 17*** se muestra el rayo del mensajero cuando A y B no son proporcionales. En el siguiente enlace se encuentra el applet en el cual A y B se pueden mover por el plano y Z se puede mover por $\overrightarrow{OB}$ https://www.geogebra.org/m/c93fmp9v.

Para demostrar la igualdad de conjuntos utilizamos la doble contenencia, partiendo primero de $\overline{AO} \cup \overrightarrow{OB} \subseteq \overrightarrow{AB}_m$.

Suponemos $Z \in \left(\overline{OA} \cup \overrightarrow{OB}\right)$, por definición de segmento y rayo se establecen tres casos: Caso (1) cuando $O - Z - A$, caso (2) cuando $O - Z - B$ y caso (3) cuando $O - B - Z$, el caso (1) y (2) se demuestran de manera análoga debido a que a A y B son puntos cualesquiera en el plano.

Para el Caso (1), por definición de interestancia $d(A, O) = d(O, Z) + d(Z, A)$, dado que $d(B, O) > 0$ sumando a ambos lados de la igualdad y por definición de la métrica del mensajero $d_m(A, B) = d_m(B, Z) + d_m(Z, A)$, por definición de segmento $Z \in \overline{AB}_m$ y por definición de rayo $Z \in \overrightarrow{AB}_m$.

Para el caso (3), por definición de interestancia $d(O.Z) = d(O, B) + d(B, Z)$ dado que $d(A, O) > 0$ sumando a ambos lados de la igualdad y por definición de la métrica del mensajero $d_m(A, Z) = d_m(A, B) + d_m(B, Z)$, por definición de rayo $Z \in \overrightarrow{AB}_m$. Con lo anterior, queda demostrado $\overline{AO} \cup \overrightarrow{OB} \subseteq \overrightarrow{AB}_m$.

Ahora demostramos que $\overrightarrow{AB}_m \subseteq \overline{AO} \cup \overrightarrow{OB}$ por medio de un razonamiento por contrarrecíproca.

Suponemos $Z \notin \left(\overline{OA} \cup \overrightarrow{OB}\right)$, se establece la ubicación de Z en el plano y salen tres casos; caso (1), Z es proporcional con A; caso (2), Z es proporcional con B y caso (3), Z no proporcional A y Z no proporcional B. El caso (1) y (2) se demuestran de manera análoga.

Para el caso (1), cuando Z es proporcional con A, dado que $Z \notin \overline{OA}$ se establece la ubicación de Z en $\overleftrightarrow{OA}$ a) $O - A - Z$ o b) $Z - O - A$. En el caso a) por definición de interestancia $d(O, Z) = d(A, O) + d(A, Z)$ como $d(B, O) > 0$ sumamos a ambos lados de la igualdad y por definición de métrica del mensajero $d_m(A, B) + d_m(A, Z) = d_m(B, Z)$, por definición de igualdad $d_m(A, B) \neq d_m(A, Z) + d_m(B, Z)$ por definición de rayo $Z \notin \overrightarrow{AB}_m$; en el caso b) por definición de interestancia $d(A, Z) = d(Z, O) + d(O, A)$ y por transitividad de la proporcionalidad Z no proporcional a B por definición de la métrica del mensajero $d_m(B, Z) = d(O, B) + d(Z, O)$, sumando las dos igualdades y por definición de la métrica del mensajero $d_m(A, Z) + d_m(B, Z) = 2d(O, Z) + d_m(A, B)$, por definición de igualdad y dado $d(O, Z) > 0$ se cumple que $d_m(A, B) \neq d_m(A, Z) + d_m(B, Z)$, por definición de rayo $Z \notin \overrightarrow{AB}$.

Para el caso (3), cuando Z no proporcional con A y Z no proporcional con B, se tiene que $d_m(A, Z) = d(A, O) + d(O, Z)$ y $d_m(B, Z) = d(B, O) + d(O, Z)$ sumando estas igualdades, $d_m(A, Z) + d_m(B, Z) = d_m(A, B) + 2d(O, Z)$ por esta igualdad y dado que $d(O, Z) > 0$ se concluye por definición que $d_m(A,B) \neq d_m(A,Z) + d_m(B,Z)$ por definición de rayo $Z \notin \overrightarrow{AB}_m$. Por esto, queda demostrado que $\overrightarrow{AB}_m \subseteq \overline{AO} \cup \overline{OB}$.

4.3. RECTA DEL MENSAJERO

Para las siguientes demostraciones de recta haremos uso de la siguiente definición:
La definición de recta es la unión de dos rayos tales que, el origen de cada rayo son los dos puntos que determinan la recta, en la métrica del mensajero será

$$\overleftrightarrow{AB}_m = \overrightarrow{AB}_m \cup \overrightarrow{BA}_m$$

Cuando exploramos para encontrar la recta en la métrica del mensajero, llegamos a tres tipos de rectas cuyas conjeturas se demostrarán a continuación, iniciando con un teorema que utilizamos para realizar la proposición recta (1).

Teorema segmento-rayo-recta. Dado A y B en $\mathbb{R}^{*2}$ entonces $\overline{AB}_m \subset \overrightarrow{AB}_m \subset \overleftrightarrow{AB}_m$

Suponemos $Z \in \overline{AB}_m$ por definición de rayo $Z \in \overrightarrow{AB}_m$ y por definición de recta $Z \in \overleftrightarrow{AB}_m$.

Proposición recta (1). Dados A y B en $\mathbb{R}^{*2}$, A y B proporcionales. Si $A - B - O$ o $B - A - O$ la $\overleftrightarrow{AB}_m$ es el conjunto de todos los puntos del plano, es decir

$$\overleftrightarrow{AB}_m = \mathbb{R}^{*2}$$

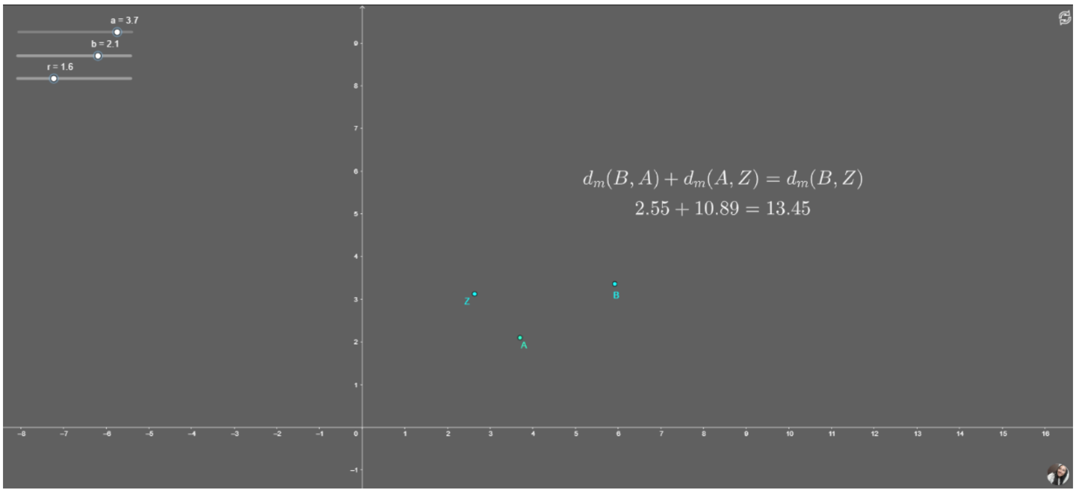


***Figura 18** Recta (1).*

En la ***Figura 18*** se muestra la recta del mensajero cuando A y B son proporcionales y se cumple $A - B - O$ o $B - A - O$. En el siguiente enlace se encuentra el applet en el cual el punto A se puede mover por todo el plano con los deslizadores a y b, el deslizador r es la constante de proporción que permite el movimiento del punto B, el plano está de color gris ya que representa los puntos Z que hacen parte de la recta en este caso https://www.geogebra.org/m/vus73a4f.

Para demostrar la anterior conjetura basta con probar que si $Z \in \mathbb{R}^{*2}$ entonces $Z \in \overleftrightarrow{AB}_m$, esto se debe a que $Z \in \overleftrightarrow{AB}_m$ y sabemos que los lugares geométricos son subconjuntos de $\mathbb{R}^{*2}$, por tanto $Z \in \mathbb{R}^{*2}$.

Iniciamos demostrando que $\mathbb{R}^{*2} \subseteq \overleftrightarrow{AB}_m$.

Suponemos $Z \in \mathbb{R}^{*2}$, por las interestancias dadas tenemos dos casos:

Para el caso (1), cuando $A - B - O$, suponemos la posición del punto Z en el plano, este puede cumplir a) Z proporcional con A y B o b) Z no proporcional con A y Z no proporcional con B.

En el caso a) se tiene en cuenta la posición de Z en la recta, las posibles interestancias son $A - Z - B$, $A - B - Z$ o $B - A - Z$, cuando $A - Z - B$ por definición de interestancia y de métrica del mensajero $d_m(A,B) = d_m(A,Z) + d_m(Z,B)$, por definición de segmento $Z \in \overline{AB}_m$ y por el teorema segmento-rayo-recta $Z \in \overleftrightarrow{AB}_m$; cuando $A - B - Z$ por definición de interestancia $d(A,Z) = d(A,B) + d(B,Z)$, por definición de rayo $Z \in \overrightarrow{AB}$, podemos concluir por Proposición rayo (1) $Z \in \overrightarrow{AB}_m$ y por el teorema segmento-rayo-recta $Z \in \overleftrightarrow{AB}_m$; cuando $B - A - Z$ el razonamiento es análogo al anterior, por tanto se llega $Z \in \overleftrightarrow{AB}_m$.

Para el caso b) teniendo la interestancia en el caso (1), por definición de interestancia $d(A,O) = d(A,B) + d(B,O)$, como $d(Z,O) > 0$, sumamos a ambos lados de la igualdad y por definición de métrica del mensajero $d_m(A,Z) = d_m(A,B) + d_m(B,Z)$ y por definición de rayo y teorema segmento-rayo-recta $Z \in \overleftrightarrow{AB}_m$.

Para el caso (2), cuando $B - A - O$, este es análogo al caso (1) dado que se deben considerar los mismos casos de acuerdo con la ubicación de los puntos Z en el plano, por tanto, se concluye que $Z \in \overleftrightarrow{AB}_m$. Queda demostrado que $\mathbb{R}^{*2} \subseteq \overleftrightarrow{AB}_m$.

Proposición recta (2). Dados A y B en $\mathbb{R}^{*2}$, A y B proporcionales. Si $A - O - B$ la $\overleftrightarrow{AB}_m$ es el conjunto de puntos que pertenecen a la $\overleftrightarrow{AB}$, es decir

$$\overleftrightarrow{AB}_m = \overleftrightarrow{AB}$$

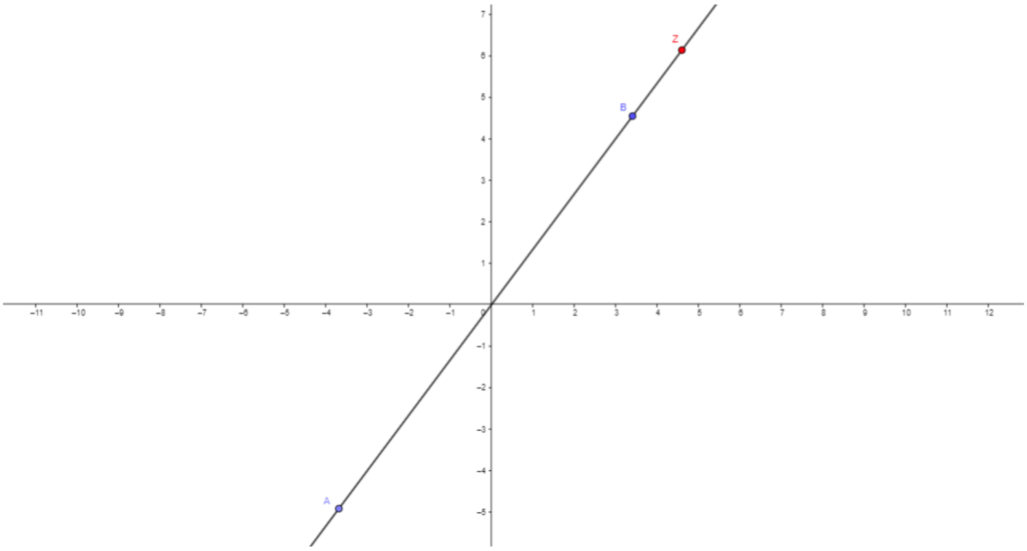


Figura 19 *Recta (2).*

En la ***Figura 19*** se muestra la recta del mensajero cuando A y B son proporcionales y se cumple $A - O - B$. En el siguiente enlace se encuentra el applet en el cual los puntos A y B se pueden mover por todo el plano teniendo en cuenta que el punto B dispone el movimiento de la recta usual en el plano y A se mueve sobre la recta usual, Z se puede mover en la recta usual y estos puntos representan la recta del mensajero para este caso https://www.geogebra.org/m/zfxtwfnh.

Para demostrar la igualdad de conjuntos utilizamos la doble contenencia, partiendo primero de $\overleftrightarrow{AB} \subseteq \overleftrightarrow{AB}_m$.

Suponemos $Z \in \overleftrightarrow{AB}$, por definición de recta $Z \in \overrightarrow{BA} \cup \overrightarrow{AB}$, teniendo en cuenta definición la proporcionalidad y usando la Proposición rayo (1) $Z \in \overrightarrow{BA}_m \cup \overrightarrow{AB}_m$, se concluye que $Z \in \overleftrightarrow{AB}_m$.

Ahora demostraremos que $\overleftrightarrow{AB}_m \subseteq \overleftrightarrow{AB}$, por medio de un razonamiento por contrarrecíproca.

Suponemos $Z \notin \overleftrightarrow{AB}$, por la interestancia dada usando la definición $d(A,B) = d(A,O) + d(O,B)$, por definición proporcionalidad $d_m(B,Z) = d(B,O) + d(O,Z)$ y $d_m(A,Z) = d(A,O) + d(O,Z)$, sumando en ambas igualdades la igualdad inicial y por definición métrica mensajero $d_m(A,B) + d_m(B,Z) = d_m(A,Z) + 2d(O,B)$ y $d_m(A,B) + d_m(A,Z) = d_m(B,Z) + 2d(O,A)$, dado que $d(A,O) > 0$ y $d(B,O) > 0$ entonces $d_m(A,Z) \neq d(A,B) + d_m(B,Z)$ y $d_m(B,Z) \neq d(A,B) + d_m(A,Z)$, por definición de rayo y

Ley de Morgan $Z \notin \overrightarrow{AB}_m \cup \overrightarrow{BA}_m$, por definición de recta $Z \notin \overleftrightarrow{AB}_m$. Con esto queda demostrado $\overleftrightarrow{AB}_m \subseteq \overleftrightarrow{AB}$.

Proposición recta (3). Dados A y B en $\mathbb{R}^{*2}$, A y B no proporcionales la $\overleftrightarrow{AB}_m$ es el conjunto de puntos que pertenecen al $\overrightarrow{OA}$ o al $\overrightarrow{OB}$, es decir

$$\overleftrightarrow{AB}_m = \overrightarrow{OA} \cup \overrightarrow{OB}$$

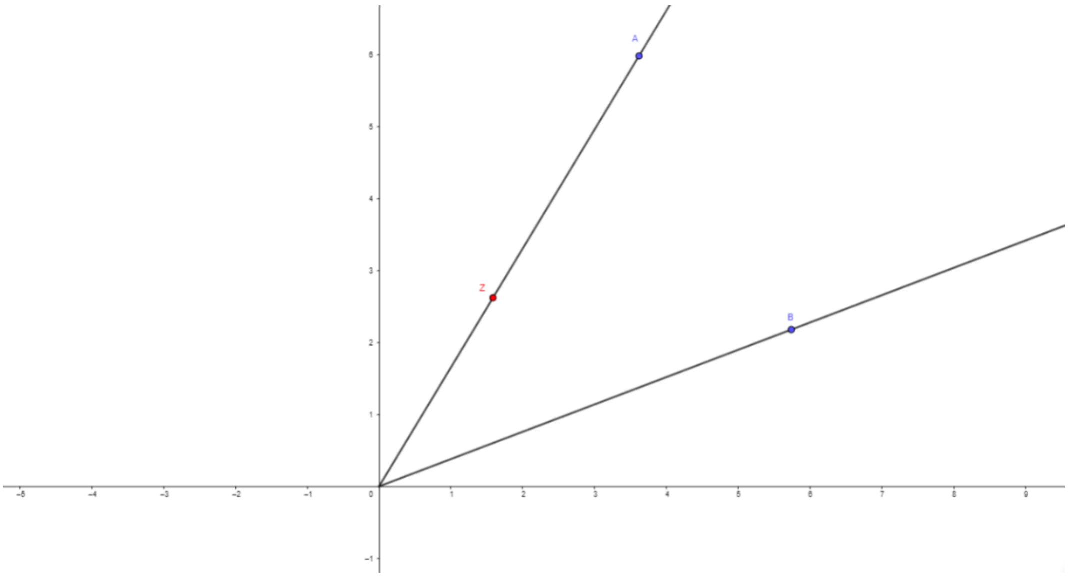


Figura 20 *Recta (3).*

En la ***Figura 20*** se muestra la recta del mensajero cuando A y B no son proporcionales. En el siguiente enlace se encuentra el applet en el cual los puntos A y B se mueven por todo el plano, el punto Z se mueve en $\overrightarrow{OA}$, indicando que pertenece a la recta del mensajero para este caso https://www.geogebra.org/m/uum8tr5w.

Para demostrar la igualdad de conjuntos utilizamos la doble contenencia, partiendo primero de $\overrightarrow{OA} \cup \overrightarrow{OB} \subseteq \overleftrightarrow{AB}_m$.

Suponemos $Z \in \left(\overrightarrow{OA} \cup \overrightarrow{OB}\right)$ por la definición de unión se establecen dos casos que se demuestran de manera análoga.

Para el caso (1), cuando $Z \in \overrightarrow{OB}$ por definición de rayo y de unión a) $Z \in \overline{OB}$ o b) $O - B - Z$. Para a) por definición de segmento y de interestancia $d(O,B) = d(O,Z) + d(Z,B)$, como $d(O,A) > 0$ sumamos a ambos lados de la igualdad y por definición de métrica del mensajero $d_m(A,B) = d_m(A,Z) + d_m(Z,B)$, al estar Z entre se concluye $Z \in \overline{AB}_m$, por teorema segmento-rayo-recta $Z \in \overleftrightarrow{AB}_m$.

Para b) usando la interestancia $d(O,Z) = d(O,B) + d(B,Z)$ como $d(O,A) > 0$ sumamos a ambos lados de la igualdad y por definición de métrica del mensajero $d_m(A,Z) = d_m(A,B) + d_m(B,Z)$, por definición de rayo $Z \in \overrightarrow{AB}_m$ y teorema segmento-rayo-recta $Z \in \overleftrightarrow{AB}_m$.

Para el caso (2), cuando $Z \in \overrightarrow{OA}$, al ser análogo con el caso (1) se concluye que $Z \in \overleftrightarrow{AB}_m$. Queda demostrado $\overrightarrow{OA} \cup \overrightarrow{OB} \subseteq \overleftrightarrow{AB}_m$.

Ahora demostraremos que $\overleftrightarrow{AB}_m \subseteq \overrightarrow{OA} \cup \overrightarrow{OB}$, por medio de un razonamiento por contrarrecíproca.

Suponemos $Z \notin \overrightarrow{OA} \cup \overrightarrow{OB}$ por las leyes de Morgan se establece $Z \notin \overrightarrow{OA}$ y $Z \notin \overrightarrow{OB}$ se demuestran de manera análoga.

Para caso (1), cuando $Z \notin \overrightarrow{OB}$ por definición de rayo y definición de unión a) $Z \notin \overline{OB}$ y b) Z no cumple $O - B - Z$. Para a) como Z no cumple estar en el segmento, por definición segmento e interestancia, $d(O,B) \neq d(O,Z) + d(Z,B)$, dado $d(O,A) > 0$ al sumar a ambos lados se mantiene la diferencia y por definición de métrica del mensajero $d_m(A,B) \neq d_m(A,Z) + d_m(Z,B)$, por definición segmento $Z \notin \overline{AB}_m$. Para b) al Z no cumplir la interestancia, $d(O,Z) \neq d(O,B) + d(B,Z)$, al $d(O,A) > 0$, sumando a ambos lados de la diferencia y al Z no ser proporcional con A y Z no ser proporcional con B, $d_m(A,Z) \neq d_m(A,B) + d_m(B,Z)$, por definición de rayo $Z \notin \overrightarrow{AB}_m$.

Para caso (2), cuando $Z \notin \overrightarrow{OA}$, por ser análogo al anterior se obtiene $Z \notin \overline{BA}_m$ y $Z \notin \overrightarrow{BA}_m$. Debido a que el conectivo lógico entre el caso (1) y el caso (2) es una conjunción, se tiene que $Z \notin \overrightarrow{AB}_m$ y $Z \notin \overrightarrow{BA}_m$ (no es necesario establecer que $Z \notin \overline{BA}_m$ porque esto se utilizó para respaldar parte de la afirmación de $Z \notin \overrightarrow{BA}_m$, en los dos casos), por leyes de Morgan $Z \notin \left(\overrightarrow{AB}_m \cup \overrightarrow{BA}_m\right)$ y por definición de recta $Z \notin \overleftrightarrow{AB}_m$. Con esto queda demostrado $\overleftrightarrow{AB}_m \subseteq \overrightarrow{OA} \cup \overrightarrow{OB}$.

Para las demostraciones de los otros lugares geométricos usaremos las rectas que se encuentran en la **Proposición recta (2)** y **Proposición recta (3)**, esto se debe a que la **Proposición recta (1)** generaría casos triviales al ser todo el plano.

4.4. MEDIATRIZ DEL MENSAJERO

Antes de definir mediatriz, es necesario encontrar el punto medio en la métrica del mensajero, por esto presentamos la siguiente definición de punto medio:

M es punto medio del $\overline{AB}$ si: i) M está entre A y B, y ii) la distancia de A a M es igual a la distancia de B a M. En la métrica del mensajero

M es punto medio $\overline{AB}_m$ si $d_m(A,M) = d_m(M,B)$ y $d_m(A,M) + d_m(M,B) = d_m(A,B)$

Proposición punto medio (1). Dados A y $B \in \mathbb{R}^{*2}$ proporcionales. Si el punto medio $\overline{AB}_m$ es E entonces el punto medio del $\overline{AB}$ es E.

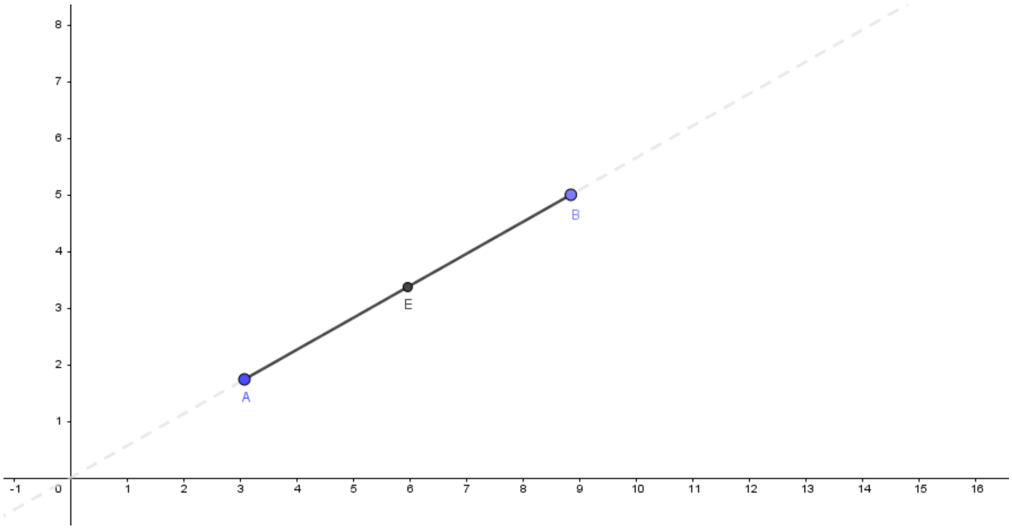


Figura 21 *Punto medio (1)*

En la ***Figura 21*** se muestra el punto medio del segmento del mensajero cuando A y B son proporcionales. En el siguiente enlace se encuentra el applet en el cual A y B se puede mover por todo el plano y E depende de A y B https://www.geogebra.org/m/zafzfmsq.

Para demostrar la igualdad de conjuntos utilizamos la doble contenencia, partiendo primero de $\{E|E$ punto medio de $\overline{AB}\} \subseteq \{E|E$ punto medio de $\overline{AB}_m\}$.

Suponemos un $Z \in \{E|E$ punto medio de $\overline{AB}\}$, por definición de punto medio $d(A,Z) = d(Z,B)$ y $A - Z - B$, por definición de interestancia tendremos que $d(A,B) = d(A,Z) + d(Z,B)$ y Z es proporcional con A y B, por definición de métrica del mensajero $d_m(A,Z) = d_m(Z,B)$ y $d_m(A,B) = d_m(A,Z) + d_m(Z,B)$ y lo cual sería la definición de punto medio en la métrica del mensajero, por tanto $Z \in \{E|E$ punto medio de $\overline{AB}_m\}$.

Para la segunda contenencia realizamos un razonamiento por la contrarrecíproca.

Suponemos un $Z \notin \{E|E$ punto medio de $\overline{AB}\}$, al no cumplir la definición son dos partes una que $d(A,Z) \neq d(Z,B)$ y es equivalente a $d_m(A,Z) \neq d_m(Z,B)$, por otro lado cuando Z no está entre A y B tendremos que Z tiene tres posibilidades $A - B - Z$ o $Z - A - B$ o Z no proporcional A y Z no proporcional B. Las dos interestancias se desarrollan de manera análoga al ser A y B puntos cualesquiera, supondremos el caso que $A - B - Z$, por definición de interestancia tenemos que $d(A,Z) = d(A,B) + d(B,Z)$ y por definición igualdad tenemos que $d(A,Z) \neq d(B,Z)$ al ser $d(A,B) > 0$, concluimos que Z no es punto medio $\overline{AB}_m$ por definición de punto medio. En el caso Z no proporcional A y Z no proporcional B, podemos decir de acuerdo con la definición de la métrica que $d_m(A,Z) \neq d_m(Z,B)$, si se diera esta igualdad estaríamos hablando que Z es O, por tanto Z no es punto medio $\overline{AB}_m$. Como se razonó por contrarrecíproca, también es cierto que $\{E|E$ punto medio de $\overline{AB}_m\} \subseteq \{E|E$ punto medio de $\overline{AB}\}$.

Proposición punto medio (2). Dados A y $B \in \mathbb{R}^{*2}$ no proporcionales. Si $d(A,O) > d(B,O)$, un C tal que $d(O,C) = d(B,O)$ y $C - O - A$ entonces Z es punto medio $\overline{AB}_m$ sí y solo si Z es punto medio de $\overline{AC}$.

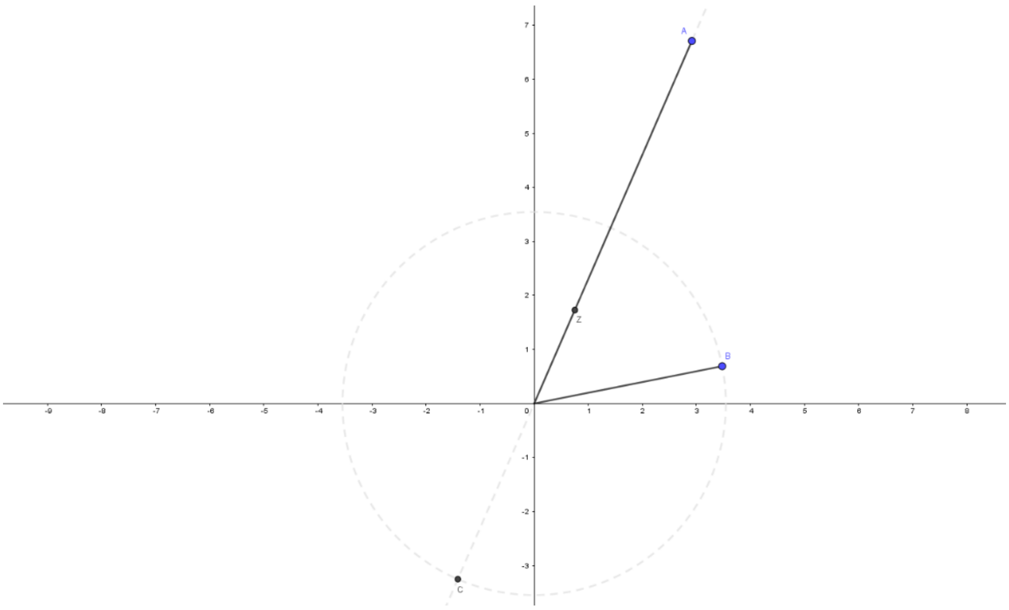


Figura 22 *Punto medio (2).*

En la ***Figura 22*** se muestra el punto medio del segmento del mensajero cuando A y B no son proporcionales. En el siguiente enlace se encuentra el applet en el cual A y B se pueden mover por el plano y Z y C son dependientes de A y B https://www.geogebra.org/m/fdsduybf.

Para demostrar la doble implicación demostraremos ambas implicaciones, suponiendo primero que Z es punto medio $\overline{AC}$, por definición de punto medio tenemos que $d(A,Z) = d(Z,C)$, por definición de interestancia $d(A,C) = d(C,O) + d(O,A)$, sustituyendo $d(A,C) = d(B,O) + d(O,A)$ y al ser Z punto medio $\overline{AC}$ es proporcional con A y C, tenemos que $d(A,C) = d_m(A,B)$, además $d(A,C) = d(A,Z) + d(Z,C)$ por la definición de punto medio e interestancia tenemos dos posibles casos para Z que pertenece $\overleftrightarrow{AC}$ cuando $Z - O - C$ o $O - Z - C$.

Supongamos que se cumple el caso en que $O - Z - C$, por el teorema transitividad de la interestancia $A - O - Z$, por definición de interestancia tenemos que $d(A,Z) = d(A,O) + d(O,Z)$ y $d(O,C) = d(O,Z) + d(Z,C)$, ahora usando principio de sustitución en la segunda igualdad, sabiendo que $d(O,C) = d(B,O)$ y lo dado $d(A,Z) = d(Z,C)$, tenemos que $d(O,B) = d(O,Z) + d(Z,A)$, sustituyendo y sumando términos iguales en la interestancia $d(A,Z)$ nos queda que $d(O,B) = 2d(O,Z) + d(O,A)$ y con esto ya nos es suficiente para decir no es cierto $O - Z - C$, porque estaríamos diciendo $d(O,B) > d(O,A)$ y no es posible por lo dado. Por lo cual, el caso en que $Z - O - C$ es cierto, por el silogismo disyuntivo, por la definición de interestancia $d(Z,C) = d(Z,O) + d(O,C)$, recordemos que Z es proporcional A y con C y no es proporcional con B, para así construir que $d(Z,C) = d(Z,O) + d(O,B)$ al sustituir $d(O,C) = d(B,O)$ en la anterior interestancia y por la definición de la métrica $d(Z,C) = d_m(Z,B)$ y sustituyendo con la primera igualdad que tenemos en la demostración, entonces $d(A,Z) = d_m(Z,B)$ que es lo mismo que $d_m(A,Z) = d_m(Z,B)$, con $d(A,C) = d_m(A,B)$ y $d(A,C) = d(A,Z) + d(Z,C)$ construimos que $d_m(A,B) = d_m(A,Z) + d_m(Z,B)$, con esto y $d_m(A,Z) = d_m(Z,B)$ podemos decir que Z es punto medio $\overline{AB}_m$.

Para la segunda implicación partimos de que Z es punto medio $\overline{AB}_m$, por definición de punto medio tenemos que $d_m(A,Z) + d_m(Z,B) = d_m(A,B)$, con esta igualdad debemos considerar la distancia hasta Z, como sabemos A y B no son proporcionales, será proporcional con A o proporcional con B, supongamos que es proporcional con B esto implicaría que $d_m(A,Z) = d_m(Z,B)$ es lo mismo que $d(A,O) + d(Z,O) = d(Z,B)$; ahora, como Z pertenece a $\overline{AB}_m$ al ser punto medio, cumple que $d(Z,B) < d(Z,O) + d(O,B)$ y sustituyendo $d(Z,B)$ tenemos que

$$d(A,O) + d(Z,O) < d(Z,O) + d(O,B)$$

Esto implica que $d(A,O) < d(B,O)$ y sería una contradicción con lo dado. Con lo anterior, podemos decir que Z es proporcional con A, por silogismo disyuntivo, como $A - O - C$, usando la definición de interestancia $d(A,C) = d(A,O) + d(O,C)$ y sustituyendo a $d(O,C)$ será $d(A,C) = d(A,O) + d(O,B)$, A y B no son proporcionales, $d(A,C) = d_m(A,B)$ y volvemos a usar la definición de punto medio del mensajero $d(A,C) = d_m(A,Z) + d_m(Z,B)$, por definición de la métrica del mensajero $d(A,C) = d(A,Z) + d(Z,O) + d(O,B)$ y sustituyendo $d(O,B)$ tenemos que

$$d(A,C) = d(A,Z) + d(Z,O) + d(O,C)(i)$$

Usando la definición de métrica en la definición del punto medio $d(A,Z) + d(Z,O) + d(O,B) = d(A,O) + d(B,O)$, cancelando términos iguales $d(A,Z) + d(Z,O) = d(A,O)$, por ser en la métrica usual se cumple por definición de interestancia que $A - Z - O$ y con la interestancia dada por transitividad de interestancia que $Z - O - C$, por definición de interestancia $d(Z,C) = d(Z,O) + d(O,C)$ y sustituyendo en (i) se cumple que $d(A,C) = d(A,Z) + d(Z,C)$ que es una parte de la definición de punto medio.

Ahora, para la segunda parte partimos de la igualdad dada por la definición de punto medio del mensajero $d_m(A,Z) = d_m(Z,B)$, por definición de métrica podemos decir que $d(A,Z) = d(Z,O) + d(O,B)$, sustituyendo a $d(O,B)$ tenemos que $d(A,Z) = d(Z,O) + d(O,C)$, sustituyendo a $d(Z,O) + d(O,C)$ con la definición de interestancia ya construida $d(A,Z) = d(Z,C)$ y con esto llegamos a las dos partes de la definición de punto medio, Z es punto medio de $\overline{AC}$. Con esto tendríamos las dos implicaciones, por lo cual se cumple el sí y solo si y concluimos la demostración.

Dados A y $B \in \mathbb{R}^{*2}$ no proporcionales. Si $d(B,O) > d(A,O)$, un C tal que $d(O,C) = d(A,O)$ y $C - O - B$ entonces Z es punto medio $\overline{AB}_m$ sí y solo si Z es punto medio de $\overline{BC}$. Esta demostración se hace de manera análoga a la anterior.

Ahora, estableciendo punto medio encontramos mediatriz, para hallarla en la métrica del mensajero utilizamos la definición de mediatriz de un segmento, la cual es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de los extremos de este. En la métrica del mensajero

$$\mathcal{M}_{\overline{AB}_m} = \{Z | d_m(A,Z) = d_m(Z,B)\}$$

Cuando exploramos para encontrar la mediatriz en la métrica del mensajero llegamos a dos tipos de mediatrices, cuyas conjeturas se demostrarán a continuación.

Proposición mediatriz (1). Dados A y B en $\mathbb{R}^{*2}$. Si $d(A,O) = d(B,O)$, la mediatriz del $\overline{AB}_m$ es todo el plano sin $\overleftrightarrow{AB}_m$.

$$\mathcal{M}_{\overline{AB}_m} = \mathbb{R}^{*2} - \overleftrightarrow{AB}_m$$

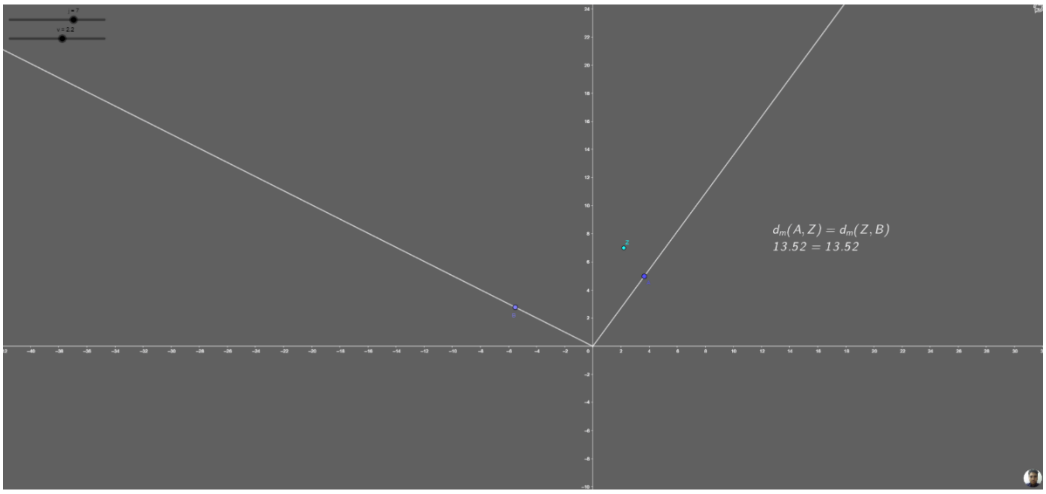


Figura 23 *Mediatriz (1)*

En la ***Figura 23*** se muestra la mediatriz de A y B cuando se cumple que $d(A,O) = d(B,O)$. En el siguiente enlace se encuentra el applet en el cual A y B se pueden por todo el plano generando los rayos de color blanco, que representan los puntos que no hacen parte de la mediatriz y Z es un punto que se puede mover por el plano, mostrando que pertenece a la mediatriz del mensajero el cual está pintado de color gris. https://www.geogebra.org/m/aqvpmmjw.

Suponemos que $Z \in \mathbb{R}^{*2} - \overleftrightarrow{AB}_m$ y por la definición de diferencia $Z \notin \overleftrightarrow{AB}_m$, por tanto Z no es proporcional con A y Z no es proporcional con B, sumamos $d(O,Z)$ a la igualdad dada $d(A,O) = d(B,O)$ obtenemos que $d(A,O) + d(O,Z) = d(B,O) + d(O,Z)$, al no ser proporcionales $d_m(A,Z) = d_m(B,Z)$ y por definición de mediatriz del mensajero $Z \in \mathcal{M}_{\overline{AB}_m}$.

Proposición mediatriz (2). Dados A y B en $\mathbb{R}^{*2}$. La mediatriz de $\overline{AB}_m$ es igual al punto medio de $\overline{AB}_m$.

La figura correspondiente a esta proposición es la ***Figura 22.***

Suponemos Z es punto medio de $\overline{AB}_m$, por definición de punto medio tenemos que $d_m(A,Z) = d_m(Z,B)$ y $d_m(A,B) = d_m(A,Z) + d_m(Z,B)$ por definición de segmento $Z \in \overline{AB}_m$ y por definición de mediatriz tenemos que $Z \in \mathcal{M}_{\overline{AB}_m}$.

4.5. CIRCUNFERENCIA DEL MENSAJERO

De acuerdo con la definición establecimos lo siguiente:

Proposición circunferencia. Dado A en $\mathbb{R}^{*2}$ siendo A el centro de la circunferencia, r en $\mathbb{R}^{+}$ siendo r el radio. Si $g \geq 0$ tal que $g = r - d(A, O)$, la circunferencia en la métrica del mensajero son los puntos que satisfacen que

$$\odot(A_r)_m = \left(\odot O_g - (\overleftrightarrow{AO} \cap \ \odot O_g)\right) \cup \left(\overleftrightarrow{AO} \cap \odot A_r\right)$$

La figura correspondiente a esta proposición es la ***Figura 4.***

Para demostrar la igualdad de conjuntos utilizamos la doble contenencia. Inicialmente $\left[\left(\odot O_g - \left(\overleftrightarrow{AO} \cap \ \odot O_g\right)\right) \cup \left(\overleftrightarrow{A0} \cap \odot A_r\right)\right] \subseteq \odot(A_r)_m$

Suponemos $Z \in \left[\left(\odot O_g - \left(\overleftrightarrow{AO} \cap \ \odot O_g\right)\right) \cup \left(\overleftrightarrow{A0} \cap \odot A_r\right)\right]$, por lo unión tenemos dos casos.

Primero considerando el caso en que $Z \in \left(\odot O_g - \left(\overleftrightarrow{AO} \cap \ \odot O_g\right)\right)$. Por definición de complemento y de intersección tenemos que $Z \in \odot O_g$ y $Z \notin (\overleftrightarrow{AO} \cap \ \odot O_g)$ por silogismo disyuntivo tenemos que $Z \in \odot O_g$ y $Z \notin \overleftrightarrow{AO}$, por lo cual Z al no pertenecer a $\overleftrightarrow{AO}$ no será proporcional con A, por definición de circunferencia y dado g entonces $d(Z, O) = r - d(A, O)$, despejando a r, $d(Z, O) + d(A, O) = r$ y al no ser proporcionales podemos concluir que $d_m(A, Z) = r$, esta sería la definición de circunferencia del mensajero, por lo cual $Z \in \odot(A_r)_m$.

Ahora, para el caso en que $Z \in \left(\overleftrightarrow{AO} \cap \odot A_r\right)$. Por lo anterior, Z es proporcional con A, al ser A el centro de la circunferencia tenemos que $d(A, Z) = r$ y por como está definida la métrica $d_m(A, Z) = r$, esta es la definición de circunferencia en la métrica del mensajero, por tanto $Z \in \odot(A_r)_m$.

Continuando, hay que demostrar la segunda contenencia $\odot(A_r)_m \subseteq \left[\left(\odot O_g - \left(\overleftrightarrow{AO} \cap \ \odot O_g\right)\right) \cup \left(\overleftrightarrow{A0} \cap \odot A_r\right)\right]$.

Suponemos que $Z \in \odot(A_r)_m$, por definición de circunferencia del mensajero $d_m(Z, A) = r$, el Z puede ser proporcional o no con A.

Primero, suponemos que Z proporcional a A, tenemos que $Z \in \overleftrightarrow{AO}$, además $d(Z, A) = r$ y por definición de circunferencia $Z \in \odot A_r$, por disyunción y definición de intersección $Z \in \left(\overleftrightarrow{AO} \cap \odot A_r\right)$.

Segundo, suponemos que Z no proporcional A entonces $Z \notin \overleftrightarrow{AO}$, ahora como $\odot O_g$ interseca a $\overleftrightarrow{AO}$ al tener el centro sobre la recta, $Z \notin \left(\overleftrightarrow{AO} \cap \odot O_g\right)$; ahora, por definición de circunferencia del mensajero y al no ser proporcionales $d(Z, O) + d(O, A) = r$ y despejando tendremos que $d(Z.O) = r - d(O, A)$ y de acuerdo con quien es g, podemos decir que $d(Z, O) = g$, por definición $Z \in \odot O_g$, realizando una disyunción, por definición de diferencia y por definición de intersección $Z \in \left(\odot O_g - \left(\overleftrightarrow{AO} \cap \odot O_g\right)\right)$. Con esto tenemos las dos partes de la definición de circunferencia del mensajero que buscábamos, podemos decir que se cumple un caso o el otro, por definición de unión tenemos que $Z \in \left[\left(\odot O_g - \left(\overleftrightarrow{AO} \cap \odot O_g\right)\right) \cup \left(\overleftrightarrow{AO} \cap \odot A_r\right)\right]$. Queda demostrada $\left[\left(\odot O_g - \left(\overleftrightarrow{AO} \cap \odot O_g\right)\right) \cup \left(\overleftrightarrow{AO} \cap \odot A_r\right)\right] \subseteq \odot(A_r)_m$

Si $g < 0$ tal que $g = r - d(A, O)$, la circunferencia en la métrica del mensajero son los puntos que satisfacen que

$$\odot(A_r)_m = \left(\overleftrightarrow{AO} \cap \odot A_r\right)$$

Esta demostración es análoga al caso dos de la demostración anterior cuando se quiere probar que

$$Z \in \left[\left(\odot O_g - \left(\overleftrightarrow{AO} \cap \odot O_g\right)\right) \cup \left(\overleftrightarrow{AO} \cap \odot A_r\right)\right] \rightarrow Z \in \odot(A_r)_m$$

4.6. ELIPSE DEL MENSAJERO

A continuación, demostramos las conjeturas producto de la exploración para encontrar la elipse llegando a que hay dos tipos diferentes de elipse, esto de acuerdo con la posición de los puntos fijos.

Proposición elipse (1). Dados A y B en $\mathbb{R}^{*2}$, k en $\mathbb{R}^+$ A y B son focos proporcionales. Si $g = \frac{k - d(A,O) - d(B,O)}{2}$ y $g \geq 0$. La elipse en la métrica del mensajero es el conjunto de puntos que satisfacen que

$$\oplus\ (\{A, B\}_k)_m = \left\{\left(\oplus\ \{A, B\}_k \cap \overleftrightarrow{AB}\right) \cup \left[\odot O_g - \left(\odot O_g \cap \overleftrightarrow{AO}\right)\right]\right\}$$

La figura correspondiente a esta proposición es la ***Figura 8.***

Para demostrar la igualdad de conjuntos utilizamos la doble contenencia, iniciando con $\left(\oplus \{A,B\}_k \cap \overleftrightarrow{AB}\right) \cup \left[\odot O_g - \left(\odot O_g \cap \overleftrightarrow{AO}\right)\right] \subseteq \oplus\ (\{A,B\}_k)_m$

Suponemos $Z \in \left\{\left(\oplus \{A,B\}_k \cap \overleftrightarrow{AB}\right) \cup \left[\odot O_g - \left(\odot O_g \cap \overleftrightarrow{AO}\right)\right]\right\}$

Por lo cual dividiremos la demostración en los casos de la unión, partamos de $Z \in \left(\oplus \{A,B\}_k \cap \overleftrightarrow{AB}\right)$, con esto podemos decir que Z proporcional a A y B al pertenecer a $\overleftrightarrow{AB}$ y por la definición de elipse tenemos que $d(A,Z) + d(Z,B) = k$, al ser proporcionales $d_m(A,Z) + d_m(Z,B) = k$, por definición de elipse en la métrica del mensajero $Z \in \oplus\ (\{A,B\}_k)_m$. Ahora tomemos el caso en que $Z \in \left[\odot O_g - \left(\odot O_g \cap \overleftrightarrow{AO}\right)\right]$ por silogismo disyuntivo tenemos que $Z \in \odot O_g$ y $Z \notin \overleftrightarrow{AO}$, Z no proporcional A y Z no proporcional B ahora por definición de circunferencia tenemos que $d(Z,O) = g$, como tenemos definido g se da la siguiente igualdad $d(Z,O) = \frac{k-d(A,O)-d(B,O)}{2}$ y despejando de la igualdad a k tenemos que $2d(Z,O) + d(A,O) + d(B,O) = k$ y por como esta definida la métrica para puntos no proporcionales $d_m(A,Z) + d_m(Z,B) = k$ tenemos la definición de elipse del mensajero por lo cual $Z \in \oplus\ (\{A,B\}_k)_m$. Concluyendo así esta contenencia.

Ahora, para la segunda contenencia $\oplus\ (\{A,B\}_k)_m \subseteq \left(\oplus \{A,B\}_k \cap \overleftrightarrow{AB}\right) \cup \left[\odot O_g - \left(\odot O_g \cap \overleftrightarrow{AO}\right)\right]$ vamos a realizar un razonamiento por contrarrecíproca.

Suponemos $Z \notin \left\{\left(\oplus \{A,B\}_k \cap \overleftrightarrow{AB}\right) \cup \left[\odot O_g - \left(\odot O_g \cap \overleftrightarrow{AO}\right)\right]\right\}$ por definición de unión, intersección, diferencia, propiedades de la disyunción y conjunción tenemos que ($Z \notin \oplus \{A,B\}_k$ y $Z \notin \odot O_g$) o ($Z \notin \oplus \{A,B\}_k$ y $Z \in \overleftrightarrow{AO}$) o ($Z \notin \overleftrightarrow{AB}$ y $Z \notin \odot O_g$).

En el caso 1, cuando $Z \notin \oplus \{A,B\}_k$ y $Z \notin \odot O_g$, de acuerdo con la definición de elipse y circunferencia $d(A,Z) + d(Z,B) \neq k$ y $d(Z,O) \neq g$ y sustituyendo g en la desigualdad $d(Z,O) \neq \frac{k-d(A,O)-d(B,O)}{2}$ despejando a k de la desigualdad y definición de la métrica del mensajero tenemos que $d_m(A,Z) + d_m(Z,B) \neq k$, de acuerdo a la definición de elipse $Z \notin \oplus\ (\{A,B\}_k)_m$.

En el caso 2, cuando $Z \notin \oplus \{A,B\}_k$ y $Z \in \overleftrightarrow{AO}$, por la definición de elipse, proporcionalidad y transitividad de la proporcionalidad obtenemos que $d(A,Z) + d(Z,B) \neq k$ y Z proporcional A

y B, por como está definida la métrica del mensajero podemos afirmar que $d_m(A,Z) + d_m(Z,B) \neq k$ y de acuerdo con la definición de elipse $Z \notin \oplus\ (\{A,B\}_k)_m$.

En el caso 3, cuando $Z \notin \overleftrightarrow{AB}$ y $Z \notin \odot O_g$, por definición de proporcionalidad Z no proporcional a A y Z no proporcional a B y usando la definición de circunferencia $d(Z,O) \neq g$ y sustituyendo g tenemos que $d(Z,O) \neq \frac{k-d(A,O)-d(B,O)}{2}$ al despejar k y por como está definida la métrica del mensajero llegamos a que $d_m(A,Z) + d_m(Z,B) \neq k$, siendo esta la definición de elipse $Z \notin \oplus\ (\{A,B\}_k)_m$. Concluyendo así la contenencia.

Si $g < 0$ tal que $g = \frac{k-d(A,O)-d(B,O)}{2}$. La elipse en la métrica del mensajero es el conjunto de puntos que satisfacen que

$$\oplus\ (\{A,B\}_k)_m = \left(\oplus\ \{A,B\}_k \cap \overleftrightarrow{AB}\right)$$

Esta demostración es análoga al caso 1 de la demostración anterior cuando se quiere probar que

$$Z \in \left\{\left(\oplus\ \{A,B\}_k \cap \overleftrightarrow{AB}\right) \cup \left[\odot O_g - \left(\odot O_g \cap \overleftrightarrow{AO}\right)\right]\right\} \rightarrow Z \in \oplus\ (\{A,B\}_k)_m$$

Esta demostración se encuentra a dos columnas en el **Anexo *B*.**

Proposición elipse (2). Dados A y B en $\mathbb{R}^{*2}$, k en $\mathbb{R}^+$, A y B focos no proporcionales. Si $g \geq 0$ tal que $g = \frac{k-d(A,O)-d(B,O)}{2}$, s tal que $s = k - d(A,O)$ y r tal que $r = k - d(B,O)$. La elipse en la métrica del mensajero es un conjunto de puntos que satisfacen que

$$\oplus\ (\{A,B\}_k)_m = \left[\left(\oplus\ \{O,B\}_s \cap \overleftrightarrow{AO}\right) \cup \left(\oplus\ \{O,A\}_r \cap \overleftrightarrow{AO}\right) \cup \odot O_g\right]$$

La figura correspondiente a esta proposición es la ***Figura 12.***

Para demostrar la igualdad de conjuntos utilizamos la doble contenencia, iniciando con $\left[\left(\oplus\ \{O,B\}_s \cap \overleftrightarrow{AO}\right) \cup \left(\oplus\ \{O,A\}_r \cap \overleftrightarrow{AO}\right) \cup \odot O_g\right] \subseteq \oplus\ (\{A,B\}_k)_m$.

Suponemos $Z \in \left[\left(\oplus\ \{O,B\}_s \cap \overleftrightarrow{BO}\right) \cup \left(\oplus\ \{O,A\}_r \cap \overleftrightarrow{AO}\right) \cup \odot O_g\right]$

Por definición de unión tenemos que $Z \in \left(\oplus\ \{O,B\}_s \cap \overleftrightarrow{BO}\right)$ o $Z \in \left(\oplus\ \{O,A\}_r \cap \overleftrightarrow{AO}\right)$ o $Z \in \odot O_g$, por la conjunción tenemos tres casos posibles, pero dos de ellos son análogos dado que demostrar con $\overleftrightarrow{AO}$ y su respectiva elipse es igual a demostrar con la $\overleftrightarrow{BO}$ y su respectiva elipse al ser puntos cualesquiera, tomemos el caso que $Z \in \left(\oplus\ \{O,B\}_s \cap \overleftrightarrow{BO}\right)$, podemos ver que si $Z \in \overleftrightarrow{BO}$ se cumple que Z es proporcional con B y Z no es proporcional con A, por definición de elipse tenemos que $d(B,Z) + d(Z,O) = s$, al sustituir s queda que

$d(B,Z) + d(Z,O) = k - d(A,O)$, despejando k y por definición la métrica del mensajero $d_m(B,Z) + d_m(A,Z) = k$ y por definición de elipse $Z \in \bigoplus(\{A,B\}_k)_m$.

Para el otro caso, $Z \in \odot O_g$ por definición de circunferencia $d(Z,O) = g$ y sustituyendo g se cumple que $d(Z,O) = \frac{k-d(A,O)-d(B,O)}{2}$, despejando k y por definición de la métrica del mensajero $d_m(A,Z) + d_m(Z,B) = k$, de acuerdo con la definición de elipse $Z \in \bigoplus(\{A,B\}_k)_m$. Con esto se termina el caso y tenemos la primera contenencia.

Ahora, la segunda contenencia $\bigoplus(\{A,B\}_k)_m \subseteq \left[\left(\bigoplus\{O,B\}_s \cap \overleftrightarrow{AO}\right) \cup \left(\bigoplus\{O,A\}_r \cap \overleftrightarrow{AO}\right) \cup \odot O_g\right]$ la demostración la hacemos a partir de un razonamiento por contrarrecíproca.

Suponemos $Z \notin \left[\left(\bigoplus\{O,B\}_s \cap \overleftrightarrow{BO}\right) \cup \left(\bigoplus\{O,A\}_r \cap \overleftrightarrow{AO}\right) \cup \odot O_g\right]$, por definición de intersección y leyes de Morgan tendremos que

$$\left(Z \notin \bigoplus\{O,B\}_s \text{ y } Z \notin \bigoplus\{O,A\}_r \text{ y } Z \notin \odot O_g\right) \text{ o}$$
$$\left(Z \notin \overleftrightarrow{BO} \text{ y } Z \notin \bigoplus\{O,A\}_r \text{ y } Z \notin \odot O_g\right) \text{ o}$$
$$\left(Z \notin \bigoplus\{O,B\}_s \text{ y } Z \notin \overleftrightarrow{AO} \text{ y } Z \notin \odot O_g\right) \text{ o}$$
$$\left(Z \notin \overleftrightarrow{BO} \text{ y } Z \notin \overleftrightarrow{AO} \text{ y } Z \notin \odot O_g\right)$$

como se ve por las conjunciones tenemos 4 casos, al contemplar el caso en que $\left(Z \notin \overleftrightarrow{BO} \text{ y } Z \notin \bigoplus\{O,A\}_r \text{ y } Z \notin \odot O_g\right)$ es análogo al caso en que $\left(Z \notin \bigoplus\{O,B\}_s \text{ y } Z \notin \overleftrightarrow{AO} \text{ y } Z \notin \odot O_g\right)$ al ser A y B puntos cualesquiera, partamos del caso en que $\left(Z \notin \overleftrightarrow{BO} \text{ y } Z \notin \bigoplus\{O,A\}_r \text{ y } Z \notin \odot O_g\right)$ tendremos que Z no proporcional con B porque $Z \notin \overleftrightarrow{BO}$, además, $d(A,Z) + d(O,Z) \neq r$ y $d(Z,O) \neq g$ por la definición de elipse y circunferencia, sustituyendo r y g tenemos que $d(A,Z) + d(O,Z) \neq k - d(B,O)$ y $d(Z,O) \neq \frac{k-d(A,O)-d(B,O)}{2}$ y despejando en ambas desigualdades a k se cumple que $d(A,Z) + d(O,Z) + d(B,O) \neq k$ y $2d(Z,O) + d(A,O) + d(B,O) \neq k$ y esto nos es suficiente para decir que $Z \notin \bigoplus(\{A,B\}_k)_m$.

Para el caso $\left(Z \notin \bigoplus\{O,B\}_s \text{ y } Z \notin \bigoplus\{O,A\}_r \text{ y } Z \notin \odot O_g\right)$ por definición de elipse y circunferencia tenemos que $d(B,Z) + d(O,Z) \neq s$ y $d(A,Z) + d(O,Z) \neq r$ y $d(Z,O) \neq g$ y sustituyendo s, r y g tenemos que $d(B,Z) + d(O,Z) \neq k - d(A,O)$ y

$d(A,Z)+d(O,Z)\neq k-d(B,O)$ y $d(Z,O)\neq\frac{k-d(A,O)-d(B,O)}{2}$ y despejando k, $d(B,Z)+d(O,Z)+d(A,O)\neq k$ y $d(A,Z)+d(O,Z)+d(B,O)\neq k$ y $2d(Z,O)+d(A,O)+d(B,O)\neq k$, ahora como no sabemos la posición de Z consideramos los casos $a)$ Z proporcional con B, b) Z proporcional con A, c) Z no proporcional con A y Z no proporcional con B, pero fijémonos que los casos a), b) y c) son análogos dado que cada uno hay una desigualdad que cumple la definición de la métrica, tomemos el caso a) y se le asociara la desigualdad en la cual se cumpla que $d(B,Z)$ y esta es $d(B,Z)+d(O,Z)+d(A,O)\neq k$, las otras generarían desigualdades que no son necesarias para la demostración, como Z es proporcional con B, no es proporcional con A y por esta definida la métrica tenemos que $d_m(B,Z)+d_m(A,Z)\neq k$, por definición de elipse del mensajero $Z\notin\bigoplus(\{A,B\}_k)_m$.

Para el último caso $Z\notin\overleftrightarrow{BO}$ y $Z\notin\overleftrightarrow{AO}$ y $Z\notin\odot O_g$, como Z no está en $\overleftrightarrow{BO}$ ni en $\overleftrightarrow{AO}$ esto implica que Z no proporcional con A y Z no proporcional con B, por definición de circunferencia $d(Z,O)\neq g$ y sustituyendo a g tenemos que $d(Z,O)\neq\frac{k-d(A,O)-d(B,O)}{2}$, despejando k y por definición de la métrica del mensajero $d_m(A,Z)+d_m(B,Z)\neq k$ y concluimos que $Z\notin\bigoplus(\{A,B\}_k)_m$ por definición de elipse. Con esto mostramos que en todos los casos Z no puede estar en la elipse del mensajero, se cumple $\left[\left(\bigoplus\{O,B\}_s\cap\overleftrightarrow{AO}\right)\cup\left(\bigoplus\{O,A\}_r\cap\overleftrightarrow{AO}\right)\cup\odot O_g\right]\subseteq\bigoplus(\{A,B\}_k)_m$.

Si $s<0$ o $r<0$ entonces $g<0$ tal que $g=\frac{k-d(A,O)-d(B,O)}{2}$, s tal que $s=k-d(A,O)$ y r tal que $r=k-d(B,O)$. La elipse en la métrica del mensajero es el conjunto de puntos que satisfacen que

$$\bigoplus(\{A,B\}_k)_m=\left(\bigoplus\{O,A\}_r\cap\overleftrightarrow{AO}\right)\text{ o }\bigoplus(\{A,B\}_k)_m=\left(\bigoplus\{O,B\}_s\cap\overleftrightarrow{BO}\right)$$

La demostración es análoga al caso 1 y caso 2, de la demostración anterior cuando se quiere probar que

$$Z\in\left[\left(\bigoplus\{O,B\}_s\cap\overleftrightarrow{BO}\right)\cup\left(\bigoplus\{O,A\}_r\cap\overleftrightarrow{AO}\right)\cup\odot O_g\right]\to Z\in\bigoplus(\{A,B\}_k)_m$$

4.7. PARÁBOLA DEL MENSAJERO

La definición de parábola que tuvimos en cuenta es:

La parábola es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano, de tal manera que su distancia de una recta fija, situada en el plano, es siempre igual a su distancia de un punto fijo del plano y que no pertenece a la recta. El punto fijo se llama foco y la recta fija directriz de la parábola.

Es importante tener en cuenta para la parábola, cuál es la directriz, de acuerdo con esto tuvimos en cuenta tres rectas, las dos rectas de mensajero y una recta usual que no pasa por O. Para las rectas del mensajero hay que recordar la definición de ínfimo de un conjunto, para la recta usual hay que usar el teorema de la distancia mínima de un punto a una recta dentro de la geometría euclidiana. Al tener estas condiciones claras realizamos las demostraciones como se encuentran a continuación:

Distancia ínfima de un punto a una recta del mensajero. Se define el ínfimo de A como la máxima cota inferior de A, cuando existan tales elementos, que es lo mismo decir

$$\mathrm{S} = \inf(d(A, l_m)\ ) \leftrightarrow (\forall \epsilon > 0)\big(\exists x \in d_m(A, l_m)\big)(S \leq x < S + \epsilon)$$

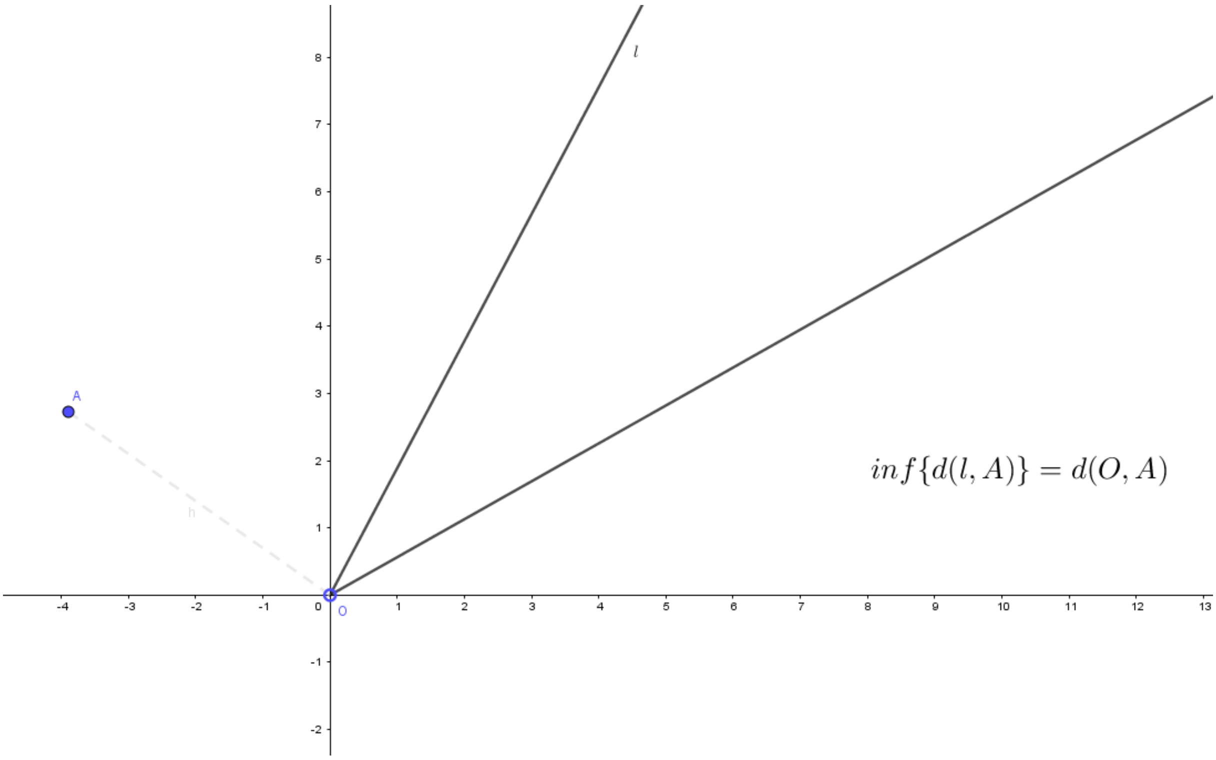


Figura 24 *Distancia de A hasta una recta del mensajero.*

En la ***Figura 24*** se muestra la distancia desde un punto en $\mathbb{R}^{*2}$ hasta una recta en la métrica mensajero. En el siguiente enlace se encuentra el applet en el cual el punto A se puede mover en todo el plano, la recta del mensajero se mantiene fija y la distancia del punto A a la recta del mnesajero está representada por un segmento punteado de A a O https://www.geogebra.org/m/zf6kxvjk.

A partir de lo anterior, y lo hecho en **Anexo *A***, en la exploración de parábola caso 1, establecemos la siguiente:

Dada l_m y $A \in \mathbb{R}^{*2}$ se tiene que $d_m(A, l_m) = d(A, O)$.

Sea $\epsilon > 0$ por la densidad de $\mathbb{R}$ existe puntos tales que $0 < r < \epsilon$, construimos una circunferencia con centro en O y radio r, por definición de circunferencia $d(O, S) = r$, como l_m por ser del mensajero pasa por O, la intersección entre la circunferencia y la recta son dos puntos, solo tomaremos uno de los puntos que pertenece a la intersección y lo llamamos P, tal que $d(O,P) = r$, por sustitución $d(O,P) < \epsilon$ sumando $d(A,O)$ tenemos que $d(A,O) + \epsilon > d(A,O) + d(O,P)$, $d(A,O) + \epsilon > d_m(A,P)$. Ahora, como el punto $P \in l_m$ la $d_m(A,P)$ es siempre del mensajero porque $A \notin l_m$, por lo cual $d_m(A,P) = d(A,O) + d(O,P)$ y por definición de desigualdad $d(A,O) + d(O,P) \geq d(A,O)$, por sustitución $d_m(A,P) \geq d(A,O)$, por tanto $d(A,O)$ cumple ser menor o igual que cualquier $d_m(A, l_m)$. Tenemos que por definición de ínfimo $d(A,O) = \inf\big(d(A, l_m)\big)$.

Proposición parábola (1). Dado $A \in \mathbb{R}^{*2}$, A es el foco y l_m la directriz, la parábola en la métrica del mensajero será el punto medio de $\overline{AO}$.

$$\uplus\left(A_{l_m}\right)_m = \{E | E \text{ es punto medio } de\ \overline{AO}\}$$

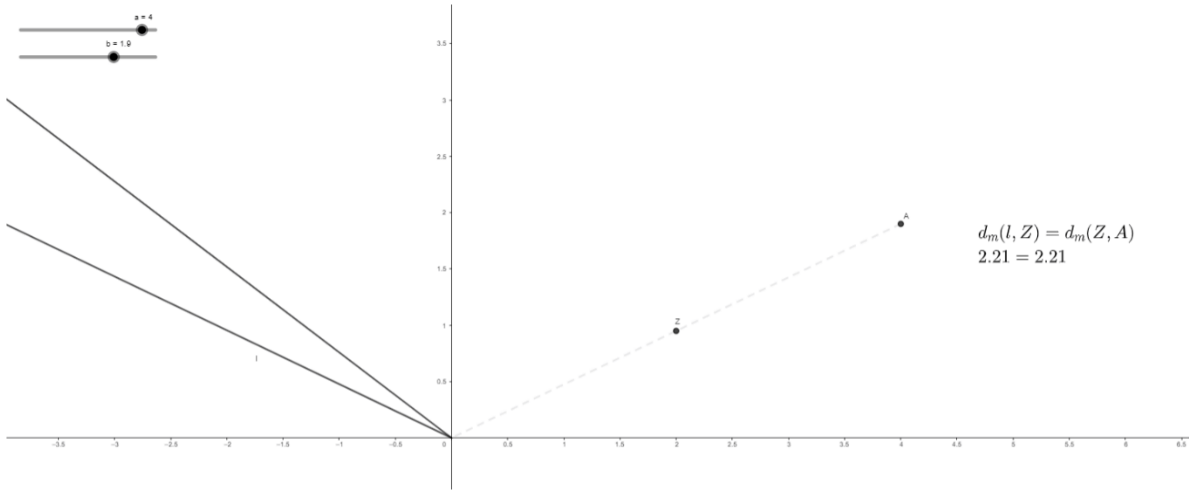


Figura 25 *Parábola (1).*

En la ***Figura 25*** se muestra la parábola siendo la directriz una recta en la métrica del mensajero y A el foco. En el siguiente enlace se encuentra el applet en el cual A se puede mover por todo el plano a través de los deslizadores a y b, la recta l_m se mantiene fija y Z es la parábola en la métrica del mensajero que depende de A https://www.geogebra.org/m/qnscyeza.

Para demostrar la igualdad de conjuntos partimos de si Z es punto medio de $\overline{AO}$ entonces $Z \in \biguplus\left(A_{l_m}\right)_m$ para demostrar la doble contenencia.

Suponemos Z es punto medio de $\overline{AO}$, por definición de punto medio $d(A,Z) = d(Z,O)$, de acuerdo con la distancia ínfima de punto a recta del mensajero $d(Z, l_m) = d(Z,O)$ por principio de sustitución y por definición de la métrica del mensajero $d_m(A,Z) = d_m(Z, l_m)$ y usando la definición de parábola $Z \in \biguplus\left(A_{l_m}\right)_m$. Queda demostrado que si Z es punto medio de $\overline{AO}$ entonces $Z \in \biguplus\left(A_{l_m}\right)_m$.

Ahora demostraremos que si $Z \in \biguplus\left(A_{l_m}\right)_m$ entonces Z es punto medio de $\overline{AO}$.

Suponemos $Z \in \biguplus\left(A_{l_m}\right)_m$, por definición de parábola $d_m(A,Z) = d_m(Z, l_m)$, dado que $d_m(Z, l_m) = d(Z,O)$ por ser la distancia ínfima de un punto a una recta, por principio de sustitución $d_m(A,Z) = d(Z,O)$, $d_m(A,Z)$ por definición de la métrica del mensajero establecemos dos casos, primer caso $d_m(A,Z) = d(A,O) + d(O,Z)$ o segundo caso $d_m(A,Z) = d(A,Z)$.

Para el primer caso por el principio de sustitución $d(A,O) + d(O,Z) = d(O,Z)$, esto no es cierto debido a que $d(A,O) > 0$, por silogismo disyuntivo se llega a concluir el segundo caso.

Para el segundo caso, por principio de sustitución $d(A,Z) = d(Z,O)$, al cumplirse esta igualdad puede ocurrir que A esté entre Z y O o Z esté entre A y O por ser proporcionales, por definición de interestancia $d(Z,O) = d(Z,A) + d(A,O)$ o $d(A,O) = d(A,Z) + d(Z,O)$, al sustituir $d(A,Z) = d(Z,O)$ en $d(Z,O) = d(Z,A) + d(A,O)$ llegamos a $d(Z,O) = d(Z,O) + d(A,O)$ lo cual no es cierto, por silogismo disyuntivo concluimos con $d(A,O) = d(A,Z) + d(Z,O)$, obteniendo así las dos partes de la definición de punto medio para establecer que Z es punto medio de $\overline{AO}$. Queda demostrado que si $Z \in \bigcup \left(A_{l_m}\right)_m$ entonces Z es punto medio de $\overline{AO}$ y con esto la doble contenencia.

Continuando con las demostraciones de las conjeturas de la parábola en la métrica del mensajero, establecemos lo siguiente usando una recta usual que no pasa por O.

Distancia mínima de un punto a una recta usual que no pasa por O. De acuerdo con la definición de distancia mínima, dentro de la geometría euclídea.

Se da l y un punto P fuera de ella. Si $\overline{PQ} \perp l$ en Q y R es otro punto cualquiera de l entonces $PQ < PR$.

A partir de lo anterior y lo hecho en **Anexo *A***, en la exploración de parábola caso 2, establecemos la siguiente:

Dado una recta l que no pasa por O, un punto $A \in \mathbb{R}^{*2}$ y $A \notin l$. Si existe W tal que cumple ser la intersección entre l y la perpendicular a l que pasa por O, se tiene que $d_m(A,l) = d(A,O) + d(W,O)$.

Cuando A pertenezca a la perpendicular que pasa por l y O, se dará que $d_m(A,l) = d(A,W)$.

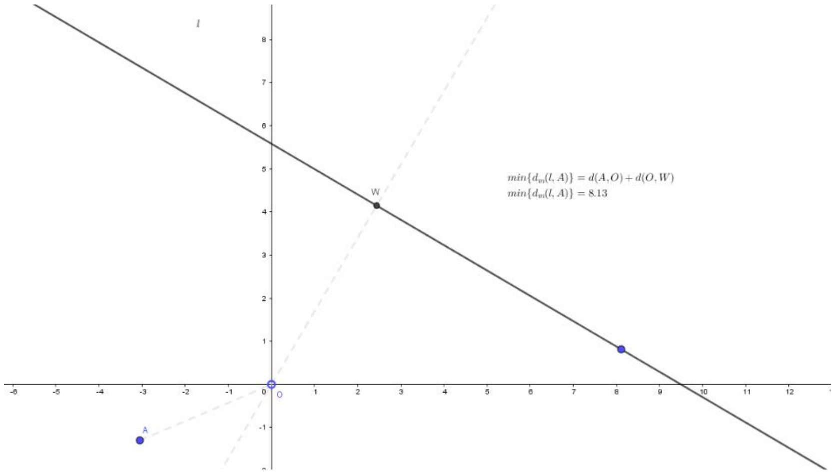


Figura 26 *Distancia desde A hasta una recta usual que no pasa por* O.

En la ***Figura 26*** se muestra la distancia desde un punto en $\mathbb{R}^{*2}$ hasta una recta en la métrica usual que no pasa por O. En el siguiente enlace se encuentra el applet en el cual A y W son puntos que se pueden mover por el plano, el punto azul cambia la pendiente de l, las distancia de A a W está representada por dos segmentos punteados de A a O y de W a O. https://www.geogebra.org/m/hzyw4vut.

Iniciando con la demostración, supongamos que existe W tal que $d(W,O)$ será la mínima distancia de l a O y no existirá una menor por la unicidad, falta demostrar que la distancia desde A hasta O es la mínima distancia, teniendo en cuenta que es el caso en que A no pertenece a la recta perpendicular a l que pasa por O, para esto realizaremos un razonamiento por contradicción. El punto debe pasar por O, sino no estaríamos hallando la distancia hasta este punto, existe el punto T que es mínima distancia entre A y O cumple que $d_m(T,A) < d(O,A)$, puede cumplir que $T - O - A$ o no ser proporcional, en ambos casos $d(T,O) + d(O,A) < d(O,A)$, concluíamos que la distancia es negativa para cumplir esta desigualdad y no es posible porque la distancias son absolutas.

Ahora, para el caso en que A pertenece a la recta perpendicular a l que pasa por O tendremos que la distancia será la usual y por tanto la distancia de A a la recta l es la mínima por definición de mínima distancia de un punto a una recta en la métrica usual.

Proposición parábola (2). Dados $A \in \mathbb{R}^{*2}$, A es el foco y l que no pasa por O en $\mathbb{R}^{*2}$. La parábola en la métrica del mensajero es un punto que cumple ser el punto medio de $\overline{AW_m}$

$$\uplus(A_l)_m = \{E | E \text{ es punto medio de } \overline{AW_m}\}$$

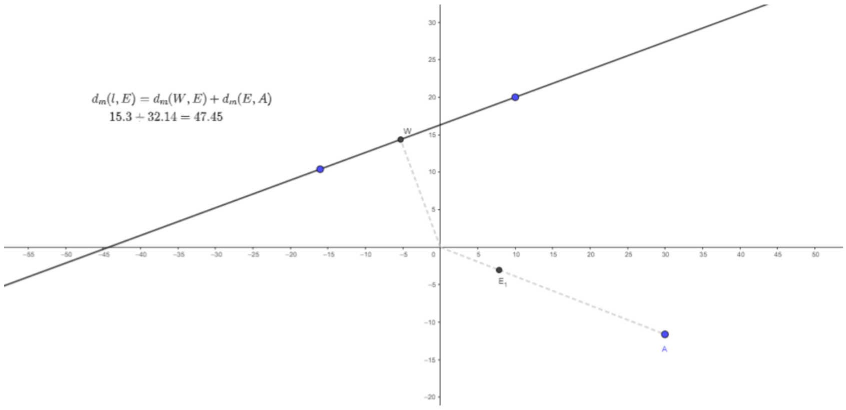


Figura 27 *Parábola (2)*

En la ***Figura 27*** se muestra la parábola en $\mathbb{R}^{*2}$, en la cual la directriz es una recta en la métrica usual que no pasa por O y el foco A. En el siguiente enlace se encuentra el applet en el cual los puntos de color azul se mueven por todo el plano siendo estos los que determinan la ubicación de la recta usual, A se puede mover en todo el plano y E representa la parábola del mensajero para este caso https://www.geogebra.org/m/hsyuftzc.

Para demostrar la igualdad de conjuntos partimos de si Z es punto medio $\overline{AW}_m$ de entonces $Z \in \uplus\left(A_{l_m}\right)_m$ para demostrar la doble contenencia.

Suponemos que Z es punto medio del $\overline{AW}_m$, por definición de punto medio $d_m(A,Z) = d_m(Z,W)$, como Z pertenece a $\overline{AW}_m$ al ser del mensajero puede ubicarse en tres posibles lugares del plano, caso 1, Z proporcional con W, caso 2, Z proporcional con A o caso 3, Z proporcional con W y A.

Para el caso 1, cuando Z es proporcional con W, por definición de métrica del mensajero $d_m(A,Z) = d(Z,W)$, por la distancia mínima de un punto a una recta usual y principio de sustitución $d_m(A,Z) = d_m(Z,l)$ concluyendo con la definición de parábola $Z \in \uplus(A_l)_m$.

Para el caso 2 cuando Z es proporcional con A, por definición de métrica del mensajero $d_m(W,Z) = d(Z,O) + d(W,O)$, por la distancia mínima de un punto a una recta usual, principio de sustitución $d_m(A,Z) = d(Z,O) + d(l,O)$ entonces $d_m(A,Z) = d_m(Z,l)$ siendo esta la definición de parábola $Z \in \uplus(A_l)_m$.

Para el caso 3 cuando Z proporcional con W y A, la demostración es análoga al caso 1 y caso 2 cuya conclusión es $Z \in \uplus(A_l)_m$. Queda demostrado Z es punto medio $\overline{AW}_m$ entonces $Z \in \uplus\left(A_{l_m}\right)_m$.

Ahora demostraremos que si $Z \in \uplus\left(A_{l_m}\right)_m$ entonces Z es punto medio de $\overline{AW}_m$.

Suponemos $Z \in \uplus\left(A_{l_m}\right)_m$ de acuerdo con la definición de parábola $d_m(A,Z) = d_m(l,Z)$, asimismo, $d_m(A,Z) = d_m(W,Z)$ por la distancia mínima de un punto a una recta usual. Además, al suponer si Z es punto medio de $\overline{AW}_m$, es necesario considerar dos casos: Caso 1 cuando $d_m(A,Z) + d_m(Z,W) \neq d_m(A,W)$, puede ocurrir entonces que a) $d_m(Z,A) = d_m(Z,W) + d_m(A,W)$ o b) $d_m(Z,W) = d_m(Z,A) + d_m(A,W)$, si ocurre a) se asegura que $d_m(Z,A) > d_m(Z,W)$ y esto contradice al antecedente, ocurre lo mismo para b).

El caso 2 cuando $d_m(A,Z) + d_m(Z,W) = d_m(A,W)$ es cierto este caso por silogismo disyuntivo, siendo esto cierto se concluye por definición de punto medio que Z es punto medio de $\overline{AW}_m$. Queda demostrado que si $Z \in \uplus\left(A_{l_m}\right)_m$ entonces Z es punto medio de $\overline{AW}_m$ y con esto la doble contenencia.

En esta demostración no consideramos el caso en que la dos distancias fueran del mensajero, es decir, cuando Z no proporcional con A y Z no proporcional con W esto debido a que la parábola en métrica del mensajero sería todo el plano o sería vacío, suponemos primero que se cumple la igualdad $d(A,O) = d(l,O)$, si tomamos cualquier punto Z en el plano, $d(O,Z) > O$, sumando a ambos lados de la igualdad $d(A,O) + d(O,Z) = d(l,O) + d(O,Z)$ y tenemos que al no ser proporcional con los dos por definición de parábola $d_m(A,Z) = d_m(l,Z)$, el conjunto de puntos que cumplen ser la parábola es todo el plano. Por otro lado, si suponemos que no se cumple la igualdad $d(A,O) = d(l,O)$, no existiría un punto en el plano que cumpla la igualdad $d(A,O) + d(O,Z) = d(l,O) + d(O,Z)$, con esto concluiríamos que el conjunto de puntos que cumplen ser la parábola es vacío.

4.8. HIPÉRBOLA DEL MENSAJERO

Para la hipérbola en la métrica del mensajero, la definición que tuvimos en cuenta para estas demostraciones es:

Una hipérbola es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos del plano, llamados focos, es siempre igual a una cantidad constante, positiva y menor que la distancia entre los focos.

Cuando exploramos para encontrar la hipérbola en la métrica del mensajero, llegamos a dos tipos de hipérbola cuyas conjeturas se demostrarán a continuación. Sin embargo, antes de iniciar con las demostraciones agregamos un teorema que nos ayudó al encontrar la hipérbola del mensajero:

Teorema intersección circunferencia del mensajero con recta del mensajero. Dado $A, B \in \mathbb{R}^{*2}$, $r > 0$ y $s = r - d(E, O) > 0$. La intersección entre una circunferencia del mensajero y una recta del mensajero formada por los puntos A y B es igual a dos puntos.

$$\odot(E_r)_m \cap \overleftrightarrow{AB}_m = \{Z_1, Z_2\}$$

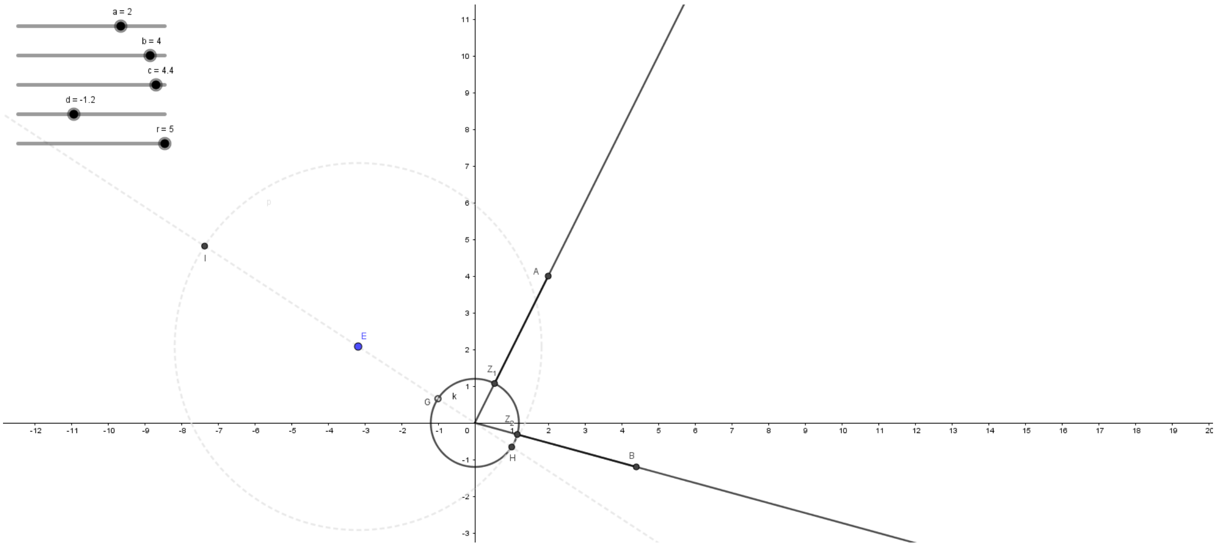


Figura 28 *Intersección circunferencia del mensajero con una recta del mensajero*

En la ***Figura 28*** se muestra la intersección entre una circunferencia y una recta en la métrica del mensajero. En el siguiente enlace se encuentra el applet en el cual los puntos A y B se pueden mover en todo el plano, los deslizadores a y b mueven al punto A, los deslizadores c y d mueven al punto B, estos puntos determinan la recta del mensajero, el punto E se puede mover en todo el plano siendo este el centro de la circunferencia del mensajero, el deslizador r es el radio, los puntos Z_1, Z_2, I y H son puntos fijos https://www.geogebra.org/m/ex3ueubc.

Por definición de circunferencia en la métrica del mensajero $\odot(E_r)_m = \left(\odot O_s - (\overrightarrow{EO} \cap \odot O_s)\right) \cup \left(\overrightarrow{EO} \cap \odot E_r\right)$, como sabemos que $\odot(E_r)_m \cap \overleftrightarrow{AB}_m$ entonces $\left[\left(\odot O_s - (\overrightarrow{EO} \cap \odot O_s)\right) \cup \left(\overrightarrow{EO} \cap \odot E_r\right)\right] \cap \overleftrightarrow{AB}_m$ por la distribución de la intersección con respecto a la unión $\left[\left(\odot O_s - (\overrightarrow{EO} \cap \odot O_s)\right) \cap \overleftrightarrow{AB}_m\right] \cup \left[\left(\overrightarrow{EO} \cap \odot E_r\right) \cap \overleftrightarrow{AB}_m\right]$, tenemos dos casos de acuerdo a definición de unión y se demuestran de manera análoga, en el primer caso llegaríamos a $\odot O_s \cap \overleftrightarrow{AB}_m$, esta recta por ser del mensajero por definición es $\overleftrightarrow{AB}$ o $\left(\overrightarrow{OA} \cup \overrightarrow{OB}\right)$, al intersecar $\odot O_s$ con alguna de las dos rectas del mensajero tenemos que $\odot O_s \cap \overleftrightarrow{AB}$ o $\odot O_s \cap \left(\overrightarrow{OA} \cup \overrightarrow{OB}\right)$, para $\odot O_s \cap \overleftrightarrow{AB}$ por ser la recta usual, la intersección serán dos puntos y para $\odot O_s \cap \left(\overrightarrow{OA} \cup \overrightarrow{OB}\right)$ al ser rayos usuales están contenidos en rectas usuales, $\odot O_s \cap \overleftrightarrow{AO}$ o $\odot O_s \cap \overleftrightarrow{BO}$ por ser rectas usuales la intersección serán cuatro puntos en total, pero se descartan dos de esos puntos dado que dos están en los rayos opuestos de $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$, estos no hacen parte de $\overleftrightarrow{AB}_m$.

Proposición hipérbola (1). Dados $A, B \in \mathbb{R}^{*2}$ y $k \in \mathbb{R}^{+}$. Cuando A y B son focos no proporcionales. Si $k < d(A,O) + d(B,O)$ y existe E tal que E es punto medio del $\overline{AB}_m$, $s = \frac{k}{2}$, la hipérbola en la métrica del mensajero son dos puntos que satisfacen

$$\ominus \{A,B\}_m = \odot(E_s)_m \cap \overleftrightarrow{AB}_m$$

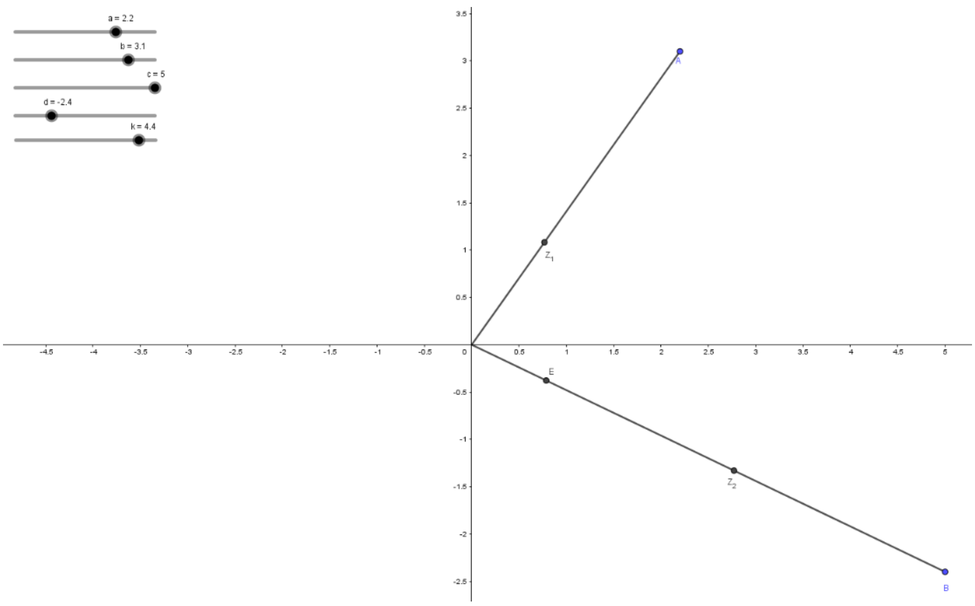


Figura 29 *Hipérbola (1)*

En la ***Figura 29*** se muestra la hipérbola del mensajero cuando A y B no son proporcionales. En el siguiente enlace se encuentra el applet en el cual A y B se pueden mover por todo el plano, los deslizadores a y b mueven a A y los deslizadores c y d mueven a B, el deslizador k representa el radio de la circunferencia del mensajero con centro E https://www.geogebra.org/m/sgagkqth.

Para demostrar lo anterior realizamos la construcción:

Suponemos que $Z \in \odot(E_s)_m \cap \overleftrightarrow{AB}_m$, por definición de punto medio $d_m(A,E) = d_m(E,B)$ y $d_m(A,B) = d_m(A,E) + d_m(E,B)$, por el teorema intersección circunferencia del mensajero con recta del mensajero $\odot(E_s)_m \cap \overleftrightarrow{AB}_m = \{Z_1, Z_2\}$, $Z \in \odot(E_s)_m$ y $Z \in \overleftrightarrow{AB}_m$, entonces $Z_1, Z_2 \in \odot(E_s)_m$, de acuerdo con la definición de circunferencia $d_m(E,Z_1) = d_m(E,Z_2) = \frac{k}{2}$, por otro lado, desde lo dado $k < d_m(A,B)$ y por principio de sustitución $k < d_m(A,E) + d_m(E,B)$ que es lo mismo $k < 2d_m(A,E)$, $\frac{k}{2} < d_m(A,E)$, sustituyendo $\frac{k}{2}$ tenemos que $d_m(E,Z_1) < d_m(A,E)$, al ser menor $d_m(A,E) = d_m(E,Z_1) + d_m(A,Z_1)$, este razonamiento es análogo para $k < 2d_m(B,E)$, concluyendo $d_m(B,E) = d_m(B,Z_2) + d_m(Z_2,E)$.

Dado que $d_m(A,E) = d_m(E,B)$, por principio de sustitución en una de las igualdades anteriores, $d_m(A,Z_1) + d_m(Z_1,E) = d_m(B,Z_2) + d_m(Z_2,E)$, como $d_m(E,Z_1) = d_m(E,Z_2) = \frac{k}{2}$, por el argumento anterior $d_m(A,Z_1) + d_m(Z_1,E) = d_m(B,Z_2) + d_m(Z_1,E)$, llegando a $d_m(A,Z_1) = d_m(B,Z_2)$ y es análogo para llegar a $d_m(A,Z_2) = d_m(B,Z_1)$. Dado que se llega a $d_m(A,Z_1) = d_m(B,Z_2)$ entonces $d_m(A,Z_2) - d_m(B,Z_1) = 0$. adicional se tiene que $d_m(E,Z_1) + d_m(E,Z_2) = k$, por definición de interestancia $d_m(Z_2,Z_1) = k$, al sumar k en $d_m(A,Z_2) - d_m(B,Z_1) = 0$, $d_m(A,Z_2) - d_m(B,Z_1) - k = -k$ y $d_m(A,Z_2) - d_m(B,Z_1) + k = k$. por principio de sustitución $d_m(A,Z_2) - d_m(B,Z_1) - d_m(Z_2,Z_1) = -k$ y $d_m(A,Z_2) - d_m(B,Z_1) + d_m(Z_2,Z_1) = k$, multiplicando por -1 a ambos lados de la primera igualdad $d_m(A,Z_2) + d_m(B,Z_1) + d_m(Z_2,Z_1) = k$, por definición de interestancia $d_m(B,Z_2) - d_m(A,Z_2) = k$ y $d_m(A,Z_1) - d_m(B,Z_1) = k$, este razonamiento es análogo para concluir $d_m(A,Z_2) - d_m(B,Z_2) = k$ y $d_m(B,Z_1) - d_m(A,Z_1) = k$, al tener estas cuatro igualdades por definición de valor absoluto, $|d_m(A,Z_1) - d_m(Z_1,B)| = k$ y $|d_m(A,Z_2) - d_m(Z_2,B)| = k$, como Z_1 y Z_2 cumplen estar en los Z que hacen parte de la hipérbola entonces $|d_m(A,Z) - d_m(Z,B)| = k$ y por definición de hipérbola $Z \in \ominus \{A,B\}_m$.

Proposición hipérbola (2). Dados $A, B \in \mathbb{R}^{*2}$ y $k \in \mathbb{R}^+$, cuando A y B son focos proporcionales. Si $k < d(A,O) + d(B,O)$, la hipérbola en la métrica del mensajero son dos puntos que satisfacen que

$$\ominus \{A,B\}_m = \ominus \{A,B\} \cap \overleftrightarrow{AB}$$

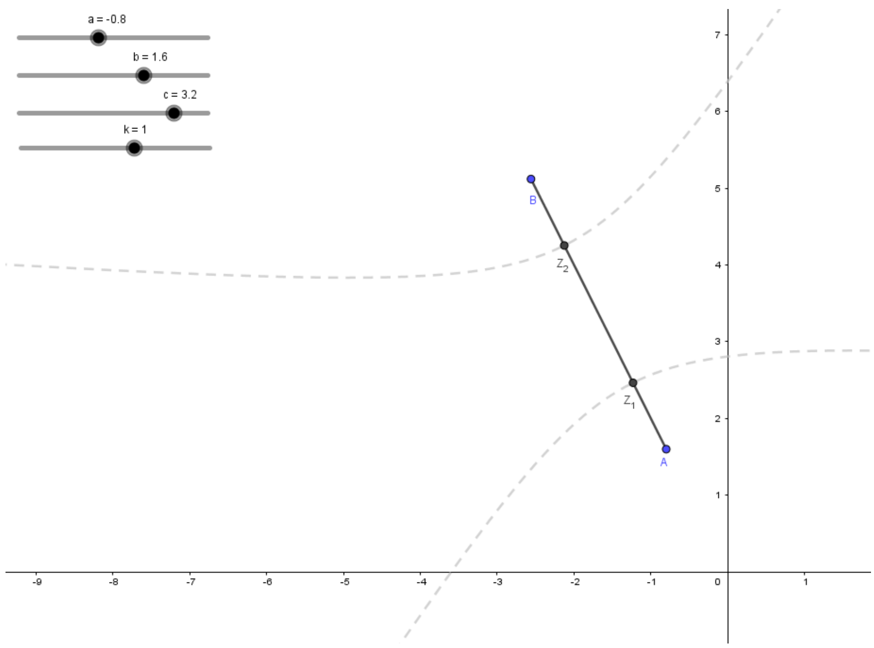


Figura 30 *Hipérbola (2)*

En la ***Figura 30*** se muestra la hipérbola del mensajero cuando A y B son proporcionales. En el siguiente enlace se encuentra el applet en el cual A se puede mover por todo el plan a través de los deslizadores a y b, el deslizador c es la constante de proporción y el deslizador k es la constante de la diferencia absoluta entre las distancias de los focos a un punto de la hipérbola usual que está representada de manera punteada en el applet https://www.geogebra.org/m/g7rwjjwh.

Suponemos $Z \in \ominus \{A, B\} \cap \overleftrightarrow{AB}$, por definición de intersección y de hipérbola $|d(A,Z) - d(Z,B)| = k$, como Z es proporcional con A y con B al pertenecer a $\overleftrightarrow{AB}$, entonces $|d_m(A,Z) - d_m(Z,B)| = k$, por definición de hipérbola $Z \in \ominus \{A, B\}_m$.

Para las dos demostraciones anteriores, si $k \geq d(A,O) + d(B,O)$ no van a existir puntos que sean parte de la hipérbola, ya que estaríamos diciendo que la diferencia absoluta de dos números positivos es más grande que los dos números positivos.

No consideramos el caso en que Z no proporcional con A y Z no proporcional con B, puesto que este caso nos daría todo el plano o sería vacío. Suponemos que se cumple que $|d(A,O) - d(B,O)| = k$ ahora tomemos un punto Z cualquiera en el plano del mensajero $d(Z,O) > 0$ y sumando $d(Z,O) - d(Z,O)$ en $|d(A,O) + d(Z,O) - d(Z,O) - d(B,O)| = k$, como no hay alguna proporcionalidad de Z con los focos, se cumple que $|d_m(A,Z) - d_m(B,Z)| = k$, esto implica que el conjunto de puntos que cumple la definición de hipérbola es todo el plano del mensajero. Caso contrario, si suponemos que no se cumple

$|d(A,O) - d(B,O)| = k$, no habrá un punto en el plano del mensajero tal que $|d(A,O) + d(Z,O) - d(Z,O) - d(B,O)| = k$ y, por tanto, el conjunto de puntos que conforman la hipérbola es vacío.

5. CONCLUSIONES

Las conclusiones están divididas en tres partes; primero, presentamos las conclusiones generales producto de la exploración de lugares geométricos a partir de la métrica del mensajero, realizando una comparación con los lugares geométricos de la métrica usual, además de algunos corolarios encontrados. Segundo, exponemos algunos aportes que nos dejó el trabajo de grado en cuanto a nuestra formación como docentes. Por último, dejamos algunas proyecciones con el fin de incrementar las investigaciones en este campo.

5.1. APORTES A LA MÉTRICA DEL MENSAJERO

Las conclusiones al explorar en esta métrica son:

- Para el segmento, rayo, recta (salvo en los casos, para rayo y recta, en que se cumple la interestancia $A - O - B$ y en el rayo adicional $O - A - B$) y punto medio, el lugar geométrico en la métrica del mensajero, cuando los puntos son proporcionales, son iguales al de la métrica usual, esto se debe a como está definida la métrica del mensajero.
- En el segmento, rayo y recta cuando los puntos A y B que los determinan no son proporcionales, por cómo está definida la métrica del mensajero, se tiene en cuenta que la figura debe pasar por O; en el caso del segmento del mensajero es la unión de $\overline{AO}$ y $\overline{OB}$; en el caso del rayo del mensajero, cuando A es el origen del rayo, es la unión $\overline{AO}$ y $\overrightarrow{OB}$ y en el caso de la recta del mensajero es la unión $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$.
- La circunferencia, elipse, hipérbola y parábola del mensajero, cuando el foco o los focos son proporcionales con los puntos que determinan el lugar geométrico, dicho lugar geométrico es la intersección de la curva (la circunferencia, elipse, hipérbola, parábola en la métrica usual) con la recta que pasa por los puntos que son proporcionales. Lo anterior, lo cumple la mediatriz del mensajero, teniendo en cuenta que no son los focos proporcionales sino los extremos del segmento los que son proporcionales con los puntos que determinan el lugar geométrico.
- La mediatriz (el caso en el que $d(A, O) \neq d(B, O)$ siendo A y B los extremos del segmento) del mensajero cumple ser un único punto, específicamente el punto medio del segmento; al analizar el lugar geométrico de la mediatriz en la métrica del mensajero, nos dimos cuenta que este no podía ser otro punto diferente al punto medio, esto desde la construcción de mediatriz que se presenta en la métrica usual, dado $A\ y\ B$ puntos, al trazar dos circunferencias una de centro A y un radio s que cumple $s > \frac{AB}{2}$ y otra de centro B, de igual radio, estas dos circunferencias se intersecan en dos puntos, al trazar la recta que contiene

a esos dos puntos, esta pasa por el punto medio del $\overline{AB}$ y se concluye que los puntos que pertenecen a la recta mencionada son parte de la mediatriz, ya que estos puntos equidistan de los puntos fijos A y B. En la métrica del mensajero si construimos la mediatriz de acuerdo con la construcción en la métrica usual realizando las circunferencias, nos damos cuenta de que estas no tienen dos puntos de intersección, lo que significa que no habrá una recta donde haya puntos que equidisten de los extremos del segmento, salvo cuando la distancia del radio es $\frac{AB}{2}$ cuya intersección es un único punto que coincide con el punto medio.

- La parábola del mensajero cumple ser un único punto y corresponde al punto medio de un segmento, al analizar la construcción del lugar geométrico en la métrica usual, si trazamos las perpendiculares a cada uno de los puntos que conforman la recta directriz buscamos un punto que cumpla que la distancia de ese punto al foco sea el mismo de ese punto a la perpendicular, en la métrica del mensajero solo podemos construir una perpendicular que es la que pasa por O. Concluimos que la parábola en la métrica del mensajero es un punto, que coincide con el punto medio de un segmento cuyos extremos son determinados según la directriz, en un primer caso, cuando la directriz es la recta usual que no pasa por O, los extremos del segmento son el foco y la intersección de la directriz con la perpendicular que pasa por O, y en un segundo caso, cuando la directriz es una de las dos rectas del mensajero los extremos del segmento son el foco y el punto O.
- La elipse y la circunferencia del mensajero, cuando los puntos del lugar geométrico no son proporcionales con los focos, o el foco, y la constante en función del radio que determina el lugar geométrico es positiva, resultan ser una circunferencia usual con centro O. Desde un razonamiento algebraico, al interpretar la definición de los lugares geométricos mencionados, en términos de distancia, se llega a que los puntos que pertenecen al lugar geométrico establecen la ecuación de una circunferencia.
- La elipse y la circunferencia del mensajero, cuando la constante en función del radio que determina el lugar geométrico es negativa, se concluye que no existen puntos que pertenezcan al lugar geométrico cuando sean no proporcionales a los focos, o al foco, debido a que no existen radios de circunferencia negativos en $\mathbb{R}^{*2}$.
- En la hipérbola, la elipse y el punto medio del mensajero, de acuerdo con la definición de cada lugar geométrico, cuando los puntos no son proporcionales (los focos o extremos del segmento en el caso del punto medio), se pueden construir los lugares geométricos tomando como herramienta de construcción circunferencias usuales. Por ejemplo, para punto medio del $\overline{AB}_m$, teniendo en cuenta la distancia que hay entre los puntos del extremo del segmento

con el punto O, si $d(A, O) > d(B, O)$ entonces se construye la circunferencia con centro en B y radio OB junto con $\overleftrightarrow{AO}$, la intersección entre de los dos son dos puntos, se te tiene en cuenta uno de los puntos de intersección, en este caso C tal que $A - O - C$, al establecer el punto medio del $\overline{AC}$ este es el mismo punto medio del $\overline{AB}_m$.

- Encontramos los siguientes corolarios al caracterizar la recta, los cuales nos permitieron ver la colinealidad en la métrica del mensajero.

  Corolario (1). Si tres puntos no son proporcionales dos a dos entonces no existe una recta que los contenga a los tres.

  Corolario (2). Dados dos puntos proporcionales y cualquier otro punto en el plano existe una recta del mensajero que contiene a los tres puntos.

5.2. APORTES A LA FORMACIÓN DOCENTE

Dentro del trabajo de grado al usar GeoGebra y lápiz y papel como una herramienta, potenciamos el proceso de visualización al enlazar el saber previo (entendiéndolo como los conocimientos adquiridos que aislaron y permitieron enfocar las propiedades necesarias para encontrar los lugares) con lo descubierto, por medio de las construcciones y figuras, que se llevaron a cabo al usar herramientas como rastro, tomar medidas, aumentar o disminuir algunas medidas y con lo algebraico, que dio paso para concluir con el estudio y así llegar a conjeturar sobre los lugares geométricos.

Con lo anterior, resaltar los procesos de visualización y exploración que sustentan los procesos de conjeturación y justificación, siendo estos importantes en este trabajo de grado y en la práctica misma del quehacer matemático, estos procesos nos llevan a establecer enunciados de los cuales estamos seguros de que son reales y, por tanto, se hace indispensable justificar que se cumplen.

Parte del trabajo de grado y los recursos utilizados, nos permitieron reflexionar sobre los aportes como futuros docentes de matemáticas, debido a que, la práctica demostrativa es fundamental en el quehacer matemático. Esto implica que no es posible la formación matemática de los estudiantes, en cualquier grado, sin llegar a una actividad demostrativa. Es por esto por lo que resaltamos el trabajo hecho como un ejemplo de lo que se puede realizar en el aula, haciendo uso de los recursos tanto tecnológicos como teóricos.

5.3. PROYECCIONES

Para finalizar, decidimos dejar algunas ideas que se pueden llevar a cabo tomando este documento como punto de partida, relacionadas con el quehacer de un docente de matemáticas.

- Este documento se puede tomar como base para el estudio de lugares geométricos en otras métricas, dado que para el trabajo realizado tomamos como eje central las definiciones en términos de distancia y la definición de la métrica. La secuencia de realización del estudio es definir la métrica, definir los lugares geométricos, realizar un análisis desde las definiciones utilizando métodos algebraicos, corroborar esos hallazgos usando una herramienta de graficación como GeoGebra, además de hacer un análisis de los lugares geométricos desde las construcciones geométricas usando las definiciones, para llegar a concluir que lo realizado algebraicamente coincide con lo hecho geométricamente y con esto conjeturar para posteriormente demostrar.
- Este documento permite continuar con el estudio de la métrica, al detallar el comportamiento de la métrica del mensajero, basándose en su topología. Por ejemplo, en este trabajo de grado se encuentra la circunferencia del mensajero que da lugar a encontrar la bola del mensajero, el centro de la bola tiene tres posibles posiciones, cuya ubicación es la frontera, interior o exterior de la bola, esto nos permite tener una idea de cómo es el comportamiento de esta métrica y con esto empezar a buscar otras características que cumple.
- En la escuela, los estudiantes al trabajar con los lugares geométricos se basan en la representación algebraica o la fórmula para encontrar el lugar geométrico sin utilizar la definición del objeto, esto no les permite desarrollar procesos propios del saber matemático como conjeturar, justificar, identificar, entre otros. Por tal razón, es importante presentar a los estudiantes una construcción de los lugares geométricos desde su definición y trabajar en otras métricas como base para potenciar los procesos de visualización.
- Otro fin de presentar los lugares geométricos desde la definición es cambiar la idea que tienen los estudiantes con respecto a las matemáticas como algo absoluto. Como docentes, debemos hacer uso de la representación gráfica del concepto con el fin de abstraer propiedades de este y generar una representación verbal (definición del objeto geométrico), para que los estudiantes reconozcan lo que caracteriza la figura y no solo una forma de representar el objeto geométrico.

BIBLIOGRAFÍA

Cardenas, R., & Parra, W. (2013). *Estudio de la métrica de Manhattan, segmentos, rectas, rayos, circunferencias y algunos lugares geométricos en la geométria del taxista.* Bogotá D.C.: Universidad Pedagógica Nacional. Obtenido de http://repositorio.pedagogica.edu.co/bitstream/handle/20.500.12209/2188/TE-16178.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Cignoli, R. (2016). *Teoría axiomática de conjuntos: Una introducción.* Buenos Aires: Universidad de Buenos Aires.

Downs, F., & Moise, E. (1964). *Geometría Moderna.* (M. García, Trad.) EE.UU.: Addison-Wesley. Obtenido de https://colmaths.files.wordpress.com/2013/01/geometria-moderna-moise.pdf

Gálvez, Y., Julca, R., & Tineo, R. (2017). *Uso del software Wolfram y su efecto en el nivel de aprendizaje de los sistemas de ecuaciones lineales en estudiantes del tercer grado de secundaria del colegio experimental de aplicación la Cantuta-Chosica.* Lima: Universidad NAcional de Educación. Obtenido de http://repositorio.une.edu.pe/bitstream/handle/UNE/1331/2.pdf?sequence=1&isAllowed=y

González, R. (2018). *U5 Geometría y Cónicas.* España: Selectividad.Integrada.com. Obtenido de http://selectividad.intergranada.com/Bach/mate1ccnn/Clase/Tema_5.pdf

Hurtado, M. (2019). *Significado de la proporcionalidad en las prácticas matemáticas de los estudiantes de grado séptimo.* Tunja: Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. Obtenido de https://repositorio.uptc.edu.co/bitstream/001/2991/1/TGT_1611.pdf

Lehmann, C. (1989). *Geometría Analítica.* (R. García, Trad.) Nueva York: Editorial LIMUSA, S.A. de C.V. Obtenido de https://www.cimat.mx/ciencia_para_jovenes/bachillerato/libros/[Lehmann]GeometriaAnalitica.pdf

Muñoz, J. (2002). *Introducción a la teoría de conjuntos.* Bogotá D.C.: Universidad Nacional de Colombia.

Muñoz, J. (2003). *Topología Básica.* Bogotá D.C.: Universidad Nacional de Colombia.

Ortega, T., & Pecharromán, C. (2015). *Aprendizaje de conceptos geométricos a través de visualizaciones.* España: Universildad de Valladolid. Obtenido de http://funes.uniandes.edu.co/9235/1/Aprendizaje2015Ortega.pdf

Polanía, C., & Sánchez, C. (2010). *Un acercamiento al pensamiento geométrico.* Medellin: Universidad de Medellín.

Rosen, K. (2004). *Matemática discreta y sus aplicaciones.* (C. Fernández, Ed., J. Peréz, J. Moro, A. Lías, & P. Ramos, Trads.) Madrid: Mc Graw Hill.

Rubiano, G. (2002). *Topología General.* Bogotá D.C.: Universidad Nacional de Colombia.

Samper, C., & Molina, Ó. (2013). *Geometría plana: un espacio de aprendizaje.* Bogotá D.C.: Universidad Pedagógica Nacional.

Samper, C., & Perry, P. (2014). ¿Es esto “machetear”? *Relevancia de lo inadvertido en el aula de geometría*, 79-97. Obtenido de http://funes.uniandes.edu.co/6694/1/2014Ca-Samper%26Esesto.pdf

Suberviola, P. (2014). *Matemáticas orientadas a las enseñanza aplicadas 3°A.* España: Escuela Pública: De tod@s para tod@s. Obtenido de http://apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/3A/07_GeometriaPlano_3A.pdf

Toledo, F. (2017). *La topología de los espacios métricos animada con GeoGebra.* Pereira: Universidad Tecnológica de Pereira. Obtenido de http://repositorio.utp.edu.co/dspace/bitstream/handle/11059/8697/51071T649.pdf?sequence=1&isAllowed=y

ANEXOS

Anexo *A*

Para encontrar Segmento

Iniciamos la búsqueda del segmento rastreando una definición de segmento que permitiera jugar con la distancia entre puntos.

Escogimos la definición que se encuentra en el apartado segmento en el capítulo de prueba de los resultados obtenidos, debido a que la interestancia está definida a través de la distancia entre puntos. Teniendo en cuenta lo anterior, posicionamos los puntos fijos A y B, miramos cuando A y B eran proporcionales, al utilizar la definición de la métrica del mensajero hicimos el razonamiento de manera algebraica, debido a que no lográbamos con lápiz y papel hacer una representación gráfica del segmento, ubicamos un punto (x, y) tal que cumpliera la definición del segmento desde la interestancia, después decidimos pasar a GeoGebra lo encontrado de forma algebraica para poder utilizar esta herramienta en las siguientes demostraciones.

Continuado con el razonamiento algebraico, encontramos que solo los puntos del segmento usual podrían cumplir esta definición, esto lo podemos ver desde lo que hicimos a continuación, de manera algebraica, nombrando el caso y mirando qué pasa con los puntos Z cuando A y B son proporcionales.

Caso I. Cuando A y B proporcionales

Caso IA. En este caso contemplamos la posibilidad de que Z no es proporcional con A y Z no es proporcional con B, que de acuerdo con la definición de métrica del mensajero es lo mismo decir,

$$d_m(A, Z) + d_m(Z, B) = d(A, B)$$

Por definición de la métrica del mensajero

$$d(A, O) + d(O, Z) + d(Z, O) + d(O, B) = d(A, B)$$

$$2\, d(Z, O) = d(A, B) - d(O, B) - d(A, O)$$

$$d(Z, O) = \frac{d(A, B) - d(O, B) - d(A, O)}{2}$$

Podemos decir que $d(O, B) + d(A, O) \geq d(A, B)$, por la desigualdad triangular, esto quiere decir que $d(Z, O)$ tiene dos posibilidades cuando $d(O, B) + d(A, 0) = d(A, B)$ en este caso $d(Z, O) = 0$, es decir que $Z = O$ por la definición de métrica, en consecuencia, no existe algún Z que cumpla lo anterior porque Z no es proporcional con A ni con B. El otro caso posible es cuando $d(O,B)+d(A,O)>d(A,B)$, en el cual pasaría que $d(Z,O)$ es negativa y esto no es posible por la definición de métrica. En conclusión, el caso no se puede dar.

Caso IB. En este caso contemplamos la posibilidad de que Z no es proporcional con A, pero Z es proporcional con B o viceversa, que de acuerdo con la definición de métrica del mensajero es lo mismo decir,

$$d_m(A,Z)+d(Z,B)=d(A,B) \text{ o } d(A,Z)+d_m(Z,B)=d(A,B)$$

Suponemos $d_m(A,Z)+d(Z,B)=d(A,B)$, el otro caso se hace de manera análoga, al ser A y B puntos cuales quiera en el plano sin alguna diferencia. Como sabemos que la proporcionalidad es una relación transitiva, y de acuerdo con lo anterior decimos que B y Z son proporcionales, A y B son proporcionales, en consecuencia, llegamos a A y Z son proporcionales y esto no es cierto. En conclusión, el caso no se puede dar.

Caso IC. En este caso contemplamos la posibilidad de que Z es proporcional con A y Z es proporcional con B, que de acuerdo con la definición de métrica del mensajero es lo mismo decir,

$$d(A,Z)+d(Z,B)=d(A,B)$$

De acuerdo con la definición de distancia para la métrica del mensajero, esta es la distancia usual, por lo que termina siendo el segmento usual. En conclusión, este es el único caso posible cuando A y B son proporcionales.

La ***Figura 14*** representa el segmento para esta situación.

De acuerdo con lo encontrado, establecemos la siguiente **conjetura**:

Dados A y B en $\mathbb{R}^{*2}$, A y B proporcionales. $\overline{AB}$ es el conjunto de puntos que satisface

$$\overline{AB}_m=\overline{AB}$$

Con el segundo caso miramos cuando A y B no eran proporcionales, teniendo en cuenta la definición de la métrica del mensajero hicimos el razonamiento de manera algebraica, este caso lo realizamos de igual forma que el anterior y continuando con el razonamiento algebraico encontramos que solo cuando los puntos Z eran proporcionales con alguno de los puntos sea A o B se podría cumplir esta definición de segmento, esto lo podemos ver desde lo que hicimos a continuación, nombrando el caso y mirando qué pasa con los puntos Z cuando A y B no son proporcionales.

Caso II. Cuando A y B no proporcionales

Caso IIA. En este caso contemplamos la posibilidad de que Z es proporcional con A y Z es proporcional con B, que de acuerdo con la definición de métrica del mensajero es lo mismo decir,

$$d(A,Z) + d(Z,B) = d_m(A,B)$$

Como sabemos que la proporcionalidad es una relación transitiva, y de acuerdo con lo anterior decimos que A y Z son proporcionales y B y Z son proporcionales, en consecuencia, llegamos a A y B son proporcionales y esto no es cierto. En conclusión, el caso no se puede dar.

Caso IIB. En este caso contemplamos la posibilidad de que Z no es proporcional con A y Z no es proporcional con B, que de acuerdo con la definición de métrica del mensajero es lo mismo decir,

$$d_m(A,Z) + d_m(Z,B) = d_m(A,B)$$

De acuerdo con la definición

$$d(A,O) + d(O,Z) + d(Z,O) + d(O,B) = d(A,O) + d(O,B)$$

$$d(O,Z) + d(Z,O) = 0$$

$$2\,d(Z,O) = 0$$

Por la definición de métrica, este caso solo se dará cuando $Z = O$ y de acuerdo con la definición de métrica del mensajero esto no es posible. En conclusión, el caso no se puede dar.

Caso IIC. En este caso contemplamos la posibilidad de que Z no es proporcional con A, pero Z es proporcional con B o viceversa, que de acuerdo con la definición de métrica del mensajero es lo mismo decir,

$$d_m(A,Z) + d(Z,B) = d_m(A,B) \text{ o } d(A,Z) + d_m(Z,B) = d_m(A,B)$$

Para estos casos la demostración es la misma, entonces realizaremos

$$d_m(A,Z) + d(Z,B) = d_m(A,B)$$

Por definición de la métrica del mensajero

$$d(A,O) + d(O,Z) + d(Z,B) = d(A,O) + d(O,B)$$

Se cancela $d(A,O)$

$$d(O,Z) + d(Z,B) = d(O,B)$$

$$\sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{(c-x)^2+(d-y)^2} = \sqrt{c^2+d^2}$$

Como Z es proporcional con B, esto quiere decir que $cy = dx$ y $x = \frac{cy}{d}$, si sustituimos a x

$$\sqrt{(c-x)^2+(d-y)^2} = \sqrt{c^2+d^2} - \sqrt{x^2+y^2}$$

$$(c-x)^2 + (d-y)^2 = c^2 + d^2 + x^2 + y^2 - 2\sqrt{c^2+d^2}\sqrt{x^2+y^2}$$

$$-2xc - 2dy = -2\sqrt{c^2 + d^2}\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$xc + dy = \sqrt{c^2 + d^2}\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$x^2c^2 + 2xcdy + d^2y^2 = (c^2 + d^2)(x^2 + y^2)$$

$$2xcdy = d^2x^2 + c^2y^2$$

$$(dx - cy)^2 = 0$$

$$dx - cy = 0$$

$$y = \frac{dx}{c}$$

Por lo cual tendríamos que los puntos que cumplen ser proporcionales están en $\overline{OB}$ de la recta $y = \frac{dx}{c}$, para los puntos Z que son proporcionales con A tenemos que el resultado es análogo, con la diferencia que será en el $\overline{OA}$ de la recta de $y = \frac{bx}{a}$ y la unión de estas dos partes de recta forman $\overline{AB}_m$. En conclusión, este es el único caso posible cuando A y B no son proporcionales.

La ***Figura 13*** representa el segmento para esta situación.

De acuerdo con lo encontrado establecemos la siguiente **conjetura**:

Dados A y B en $\mathbb{R}^{*2}$, A y B no proporcionales. El $\overline{AB}_m$ es el conjunto de puntos que pertenecen al $\overline{AO}$ o $\overline{OB}$, es decir

$$\overline{AB}_m = \overline{AO} \cup \overline{OB}$$

Para encontrar Rayo

Aceptamos la siguiente definición que se encuentra en el apartado de rayo en el capítulo de prueba de resultados obtenidos.

Al buscar el rayo contábamos con experiencia para realizar una representación geométrica con lápiz y papel de este lugar geométrico, dado que este fue uno de los últimos lugares geométricos que encontramos junto con la recta. De acuerdo con la experiencia decidimos mirar la interestancia de la definición de rayo, puesto que está definida por la distancia entre puntos, para esto tuvimos en cuenta inicialmente cuando A y B son proporcionales, siendo A el vértice del rayo, surgió el siguiente caso ubicando en GeoGebra al punto B tal que $O - A - B$ y luego B tal que $A - O - B$ como se puede ver en el siguiente enlace https://www.geogebra.org/m/kjeksjjc y encontramos que al ocurrir lo anterior el rayo del mensajero y rayo usual son iguales, como lo veremos a continuación:

Caso IA. Cuando A y B proporcionales y $O - A - B$ o $A - O - B$

Cuando cada par de puntos son proporcionales, se cumple que el rayo del mensajero y el rayo usual son el mismo, debido a que la recta que contiene a los puntos que son proporcionales tiene el mismo comportamiento al de una recta en la métrica usual.

La ***Figura 15*** representa esta situación.

Después encontramos el siguiente caso al ubicar en GeoGebra a B tal que $O - B - A$, cuando A y B son proporcionales, como se ve en el siguiente enlace https://www.geogebra.org/m/fhdjgrbs observamos que los puntos Z al ubicarlos en cualquier parte del plano cumplían la interestancia de la definición de rayo, con excepción del rayo opuesto $\overrightarrow{AC}$, siendo A el vértice del rayo, a partir de la construcción y haciendo un razonamiento algebraico como mostramos a continuación se concluyó lo anterior.

Caso IB. Cuando A y B proporcionales y $O - B - A$

De acuerdo con la definición de rayo, obtenemos la interestancia $A - B - Z$, miramos qué pasaba con los puntos Z cuando no era proporcional y esto de acuerdo con la construcción en GeoGebra que nos llevó a que en todos los casos se iba cumplir la colinealidad y por tanto la interestancia se iba a dar. Usando la interestancia $A - B - Z$ por definición $d(A, B) + d_m(B, Z) = d_m(A, Z)$ por la definición de métrica del mensajero $d(A, B) + d(B, O) + d(O, Z) = d(A, O) + d(O, Z)$, vemos que se cancelan los Z en la expresión, lo cual nos dice que es todo el plano que cumpla que $d(A, B) + d(B, O) = d(A, O)$ y como A y B son proporcionales esta expresión es cierta en todos los casos, miremos a continuación la prueba:

$$d(A, B) + d(B, O) = d(A, O)$$

$$\sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2} + \sqrt{c^2 + d^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Como A es proporcional con B podemos escribir un punto como combinación lineal del otro

$$A = (a, b) \to B = (\alpha a, \alpha b)$$

$$\sqrt{(a - \alpha a)^2 + (b - \alpha b)^2} + \sqrt{(\alpha a)^2 + (\alpha b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\sqrt{a^2(1-\alpha)^2 + b^2(1-\alpha)^2} + \sqrt{\alpha^2(a^2 + b^2)} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\sqrt{(1-\alpha)^2(a^2 + b^2)} + \sqrt{\alpha^2(a^2 + b^2)} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Como tenemos que $0 < \alpha < 1$ de la interestancia $O - B - A$ tenemos que

$$\sqrt{a^2+b^2}(1-\alpha)+\alpha\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{a^2+b^2}$$
$$(1-\alpha)+\alpha=1$$
$$\alpha=\alpha$$
A excepción del rayo opuesto, siendo el rayo opuesto $\overrightarrow{AC}$, lo cual concluye que es igual $\mathbb{R}^{*2}-\overrightarrow{AC}$.

La ***Figura 16*** representa esta situación.

Continuando con lo encontrado a lápiz y papel, pero además haciendo uso del razonamiento algebraico se obtuvo el segundo caso posible:

Caso IC. Cuando A y B no proporcionales.

Suponemos que Z es proporcional con B, sí Z es proporcional con A entonces la demostración se realiza de manera análoga a la anterior, por esto solo teniendo en cuenta Z es proporcional con B por definición proporcionalidad y las coordenadas de los puntos, se llega a $cy=dx$

Por propiedad de los reales
$$cy-dx=0$$
$$(cy-dx)^2=0$$
$$(cy)^2-2(cxdy)+(dx)^2=0$$
$$0=-2(cxdy)+c^2y^2+d^2x^2$$
$$2(cxdy)=c^2y^2+d^2x^2$$
Se añade a ambos lados $c^2x^2+d^2y^2$
$$(cx)^2+2(cxdy)+(dy)^2=c^2y^2+d^2x^2+c^2x^2+d^2y^2$$
$$(cx)^2+2(cxdy)+(dy)^2=(c^2+d^2)(x^2+y^2)$$
$$(cx+dy)^2=(c^2+d^2)(x^2+y^2)$$
$$cx+dy=\sqrt{c^2+d^2}\sqrt{x^2+y^2}$$
$$-2cx-2dy=-2\sqrt{c^2+d^2}\sqrt{x^2+y^2}$$
Se añade a ambos lados $c^2+d^2+x^2+y^2$
$$c^2-2cx+x^2+d^2-2dy+y^2=c^2+d^2+x^2+y^2-2\sqrt{c^2+d^2}\sqrt{x^2+y^2}$$
$$(c-x)^2+(d-y)^2=c^2+d^2+x^2+y^2-2\sqrt{c^2+d^2}\sqrt{x^2+y^2}$$
$$(c-x)^2+(d-y)^2=c^2+d^2-2\sqrt{c^2+d^2}\sqrt{x^2+y^2}+x^2+y^2$$

$$(c-x)^2+(d-y)^2=\left(\sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{c^2+d^2}\right)^2$$
$$\sqrt{(c-x)^2+(d-y)^2}=\sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{c^2+d^2}$$
$$\sqrt{c^2+d^2}+\sqrt{(c-x)^2+(d-y)^2}=\sqrt{x^2+y^2}$$

Por definición de la distancia en a métrica del mensajero

$$d(B,O)+d(B,Z)=d(Z,O)$$

Por términos de la demostración, se suma $d(A,O)$

$$d(A,O)+d(B,O)+d(B,Z)=d(A,O)+d(Z,O)$$

Al ser Z proporcional con B, de acuerdo con lo anterior, como encontramos el segmento cuando A y B no son proporcionales y ahora sabemos que, para el rayo, existen Z después de B, el rayo para este caso es $\overline{AO} \cup \overline{OB} \cup \overrightarrow{OB} = \overline{AO} \cup \overrightarrow{OB}$

La ***Figura 17*** representa esta situación.

De acuerdo con lo encontrado establecemos las siguientes **conjeturas**:

Conjetura 1

Dados A y B en $\mathbb{R}^{*2}$, A y B no proporcionales el $\overrightarrow{AB}_m$ es el conjunto de puntos que pertenecen al $\overline{AO}$ o al $\overrightarrow{OB}$, es decir

$$\overrightarrow{AB}_m = \overline{AO} \cup \overrightarrow{OB}$$

Conjetura 2

Dados A y B en $\mathbb{R}^{*2}$, A y B proporcionales. Sí $A-B-O$ y un punto C tal que $B-A-C$ entonces el $\overrightarrow{AB}_m$ es el conjunto de puntos que compone todo el plano sin $\overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{AB}_m = \mathbb{R}^{*2} - \overrightarrow{AC}$$

Conjetura 3

Dados A y B en $\mathbb{R}^{*2}$, A y B proporcionales. Sí $A-O-B$ o $O-A-B$ entonces el $\overrightarrow{AB}_m$ es el conjunto de puntos que pertenece a $\overrightarrow{AB}$, es decir

$$\overrightarrow{AB}_m = \overrightarrow{AB}$$

Para encontrar Recta

Para encontrar la Recta en la métrica del mensajero buscamos una definición que nos permitiera usar las distancias entre puntos u objetos geométricos anteriormente construidos, utilizamos la que se encuentra en el apartado de recta del capítulo de prueba de resultados obtenidos.

Iniciamos la construcción teniendo en cuenta las conjeturas del rayo del mensajero, partiendo de la conjetura 2, cuando A y B proporcionales y $A-B-O$, dado que el vértice termina siendo el punto A, con esto concluimos que el rayo era $\mathbb{R}^{*2} - \overrightarrow{AC}$, de acuerdo con la definición de recta se tiene $\overrightarrow{BA}$ lo cual adiciona los puntos después de A y con esto concluimos que los puntos que cumplen estar en la recta es todo $\mathbb{R}^{*2}$ para este caso, esto mismo ocurre cuando tenemos la interestancia $O - A - B$ como lo podemos ver en el siguiente link https://www.geogebra.org/m/gvj9qb2x.

De acuerdo con la construcción de rayo y el razonamiento anterior, establecimos la siguiente **conjetura:**

Dados A y B en $\mathbb{R}^{*2}$, A y B proporcionales. Si $A - B - O$ o $B - A - O$, $\overleftrightarrow{AB}_m$ es el conjunto de todos los puntos del plano, es decir

$$\overleftrightarrow{AB}_m = \mathbb{R}^{*2}$$

Siguiendo las conjeturas de rayo, mirando la conjetura 3, nos dimos cuenta de que si se cumple la interestancia $A - O - B$ no existen Z tal que no sean proporcionales, por esto la recta del mensajero es igual a la recta usual para este caso.

Se establece la siguiente **conjetura**:

Dados A y B en $\mathbb{R}^{*2}$, A y B proporcionales. Si $A - O - B$ la $\overleftrightarrow{AB}_m$ es el conjunto de puntos que pertenecen a la $\overleftrightarrow{AB}$, es decir

$$\overleftrightarrow{AB}_m = \overleftrightarrow{AB}$$

La ***Figura 19*** representa esta situación.

Por último, utilizamos la conjetura 1 de rayo, establecimos que la recta es $\overrightarrow{OB} \cup \overrightarrow{OA}$, debido a que A y B no son proporcionales tendríamos $\overrightarrow{AB}_m$, de acuerdo con la definición de recta también se tiene en cuenta los puntos después de A, para obtener $\overrightarrow{BA}_m$ y con esto, llegamos a que eran los mismos puntos que cumplen estar en $\overrightarrow{OA}$. Para llegar a esta conclusión realizamos un razonamiento algebraico, teniendo en cuenta que ya se había construido $\overrightarrow{AB}$, cuando A y B no son proporcionales y Z no proporcional con B. La representación de este caso se encuentra en la ***Figura 20***.

Con lo anterior podemos decir, por definición de interestancia $d(Z, A) + d_m(A, B) = d_m(Z, B)$ Conociendo las coordenadas de los puntos, sabiendo que Z y A son proporcionales se establece que $ay = xb$

$$ay - xb = 0$$

$$(ay - xb)^2 = 0$$

$$(ax)^2 - 2(xaby) + (by)^2 = 0$$
$$0 = -2(xaby) + a^2x^2 + b^2y^2$$
$$2(xaby) = a^2x^2 + b^2y^2$$

Se agrega $a^2x^2 + b^2y^2$

$$(ax)^2 + 2(xaby) + (by)^2 = a^2x^2 + a^2y^2 + b^2x^2 + b^2y^2$$
$$(ax)^2 + 2(xaby) + (by)^2 = (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$$
$$(ax + by)^2 = (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$$
$$ax + by = \sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{x^2 + y^2}$$
$$-2ax - 2by = -2\sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{x^2 + y^2}$$

Se agrega $x^2 + y^2 + a^2 + b^2$ a ambos lados

$$a^2 - 2ax + x^2 + b^2 - 2by + y^2 = x^2 + y^2 + a^2 + b^2 - 2\sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{x^2 + y^2}$$
$$(a - x)^2 + (b - y)^2 = x^2 + y^2 + a^2 + b^2 - 2\sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{x^2 + y^2}$$
$$(a - x)^2 + (b - y)^2 = \left(\sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{a^2 + b^2}\right)^2$$

Elevamos a ambos lados $\frac{1}{2}$

$$\sqrt{(a - x)^2 + (b - y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$\sqrt{(a - x)^2 + (b - y)^2} + \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Se acuerdo a la definición de distancia

$$d(Z, A) + d(A, 0) = d(Z, 0)$$

Como la distancia es un número positivo sumamos $d(B, 0)$ a ambos lados

$$d(Z, A) + d(A, 0) + d(B, 0) = d(B, 0) + d(Z, 0)$$

Por definición de distancia dentro de la métrica del mensajero

$$d(Z, A) + d_m(A, B) = d_m(Z, B)$$

Con esto queda demostrado que existe el rayo $\overrightarrow{BA}$, Uniendo este par de rayos generamos la recta, por lo cual tenemos la existencia de la recta cuando A y B no son proporcionles. Establecimos la siguiente **conjetura**:

Dados A y B en $\mathbb{R}^{*2}$, A y B no proporcionales la $\overleftrightarrow{AB}_m$ es el conjunto de puntos que pertenecen al $\overrightarrow{OA}$ o al $\overrightarrow{OB}$, es decir

$$\overleftrightarrow{AB}_m = \overrightarrow{OA} \cup \overrightarrow{OB}$$

Para encontrar Mediatriz

Con el fin de encontrar la mediatriz tuvimos en cuenta la definición que se encuentra en el apartado de mediatriz en la métrica del mensajero en el capítulo de prueba de los resultados obtenidos.

Reescribiendo la definición encontrada la Mediatriz del $\overline{AB}$, la mediatriz es el conjunto de puntos D tales que $d(A, D) = d(D, B)$. Teniendo en cuenta que se define usando la distancia entre puntos y de acuerdo con la definición de la métrica del mensajero y consideramos cuando este punto D sea o no proporcional con los puntos fijos A y B.

Inicialmente encontramos que uno de los puntos D sería el punto medio del $\overline{AB}$ en la métrica usual, esto se debe a que una de las partes de la definición de punto medio nos habla de la equidistancia y esta es igual a la definición de mediatriz.

Dado que en la métrica del mensajero existen dos segmentos, uno cuando A y B no son proporcionales y otro cuando A y B son proporcionales, miramos si D el punto medio del $\overline{AB}_m$, cuando A y B no son proporcionales cumple ser parte de la mediatriz del segmento. Para corroborar, realizamos la construcción en GeoGebra ubicando los puntos A y B no proporcionales construimos los segmentos $\overline{AO}$ y $\overline{OB}$, usamos la herramienta medida de GeoGebra para obtener el número asociado a cada segmento y así seleccionar el segmento que tenga mayor distancia sabiendo que en él estaría ubicado el punto medio, sumamos la medida de los dos segmentos, luego esa medida se dividió entre 2 y ese número encontrado será el radio de una circunferencia que ubicamos en el extremo del segmento con mayor distancia, para encontrar el punto medio de este segmento y concluir que el punto medio D hace parte de la mediatriz $\overline{AB}_m$ siendo A y B no proporcionales.

Ahora, cuando A y B son proporcionales, teniendo en cuenta la definición de la métrica del mensajero y la definición de mediatriz se tiene que $d(A, D) = d(D, B)$ y cuando A y B no son proporcionales, establecemos lo siguiente de acuerdo al párrafo anterior, por la definición de la métrica del mensajero y la definición de mediatriz, se tiene que $d_m(A, D) = d(D, B)$ o $d(A, D) = d_m(D, B)$, para estos casos se concluye que D es la mediatriz del $\overline{AB}_m$ y esto lo comprobamos de forma algebraica como veremos a continuación:

Caso IA. Cuando A y B son proporcionales y teniendo en cuenta la definición de mediatriz además de la definición de métrica del mensajero tenemos lo siguiente:

$$d(A, D) = d(D, B)$$

Teniendo en cuenta la definición de la métrica usual y las coordenadas de los puntos:

$$\sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2} = \sqrt{(c-x)^2+(d-y)^2}$$

$$(a-x)^2+(b-y)^2 = (c-x)^2+(d-y)^2$$

$$a^2-2ax+x^2+b^2-2by+y^2 = c^2-2cx+x^2+d^2-2dy+y^2$$

Se cancelan los términos x^2+y^2

$$a^2-2ax+b^2-2by = c^2-2cx+d^2-2dy$$

$$2dy-2by = c^2-2cx+2ax+d^2-a^2-b^2$$

$$y(2d-2b) = c^2-2cx+2ax+d^2-a^2-b^2$$

$$y = \frac{c^2-2cx+2ax+d^2-a^2-b^2}{2d-2b}$$

Estableciendo que debe pasar $b \neq d$, **Corolario 1** en tal caso en el que $b = d$, cuando A y B son proporcionales, se cumple que $ad = cb$ y cancelando tendríamos que $c = a$ o no depende de c y a para cumplirse la igualdad; para el caso en que $c = a$ estaríamos hablando del mismo punto y la definición de mediatriz establece dos puntos diferentes; para el caso en que no dependa de c y a tendremos que $b = d = 0$ para cumplirse la igualdad y de esta forma podemos concluir que $y = 0$ al tenerse que $cy = bx$ por la proporcionalidad.

De acuerdo con la definición de mediatriz

$$d(A,D) = d(D,B)$$

Por definición de la distancia usual

$$\sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2} = \sqrt{(c-x)^2+(d-y)^2}$$

$$(a-x)^2+(b-y)^2 = (c-x)^2+(d-y)^2$$

Como $b = d = 0$

$$(a-x)^2 = (c-x)^2$$

$$a^2-2ax+x^2 = c^2-2cx+x^2$$

$$a^2-2ax = c^2-2cx$$

$$2cx-2ax = c^2-a^2$$

$$x(2c-2a) = c^2-a^2$$

$$x = \frac{c^2-a^2}{(2c-2a)}$$

$$x = \frac{a+c}{2}$$

Se concluye que es el punto medio, al ser de la forma $\left(\frac{a+c}{2}, 0\right)$ para puntos de la forma $(a, 0)$ y $(c, 0)$ dando por finalizado el corolario 1.

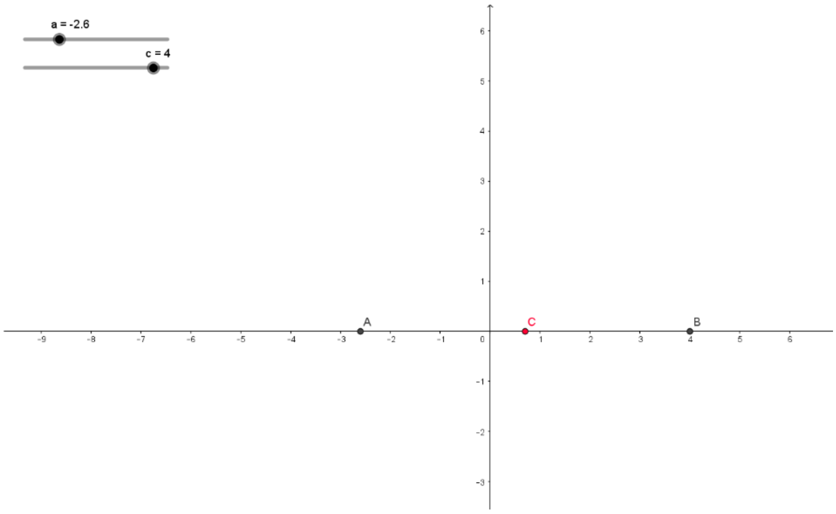


__Figura 31__ Mediatriz A y B proporcionales y $b = 0$

En la ***Figura 31*** se muestra la mediatriz del mensajero cuando A y B son proporcionales con $b = 0$. En el siguiente enlace se encuentra el applet referente a la figura anterior https://www.geogebra.org/m/x4dq38ph.

Continuando con lo anterior al **Corolario 1**, dado que se encuentran en la recta proporcional, se cumple que:

$$ay = xb$$

Reemplazando y que encontramos anteriormente y $a \neq 0$

Tenemos que

$$a\frac{c^2 - 2cx + 2ax + d^2 - a^2 - b^2}{2d - 2b} = xb$$

$$\frac{a(c^2 - 2cx + 2ax + d^2 - a^2 - b^2)}{b(2d - 2b)} = x$$

$$\frac{c^2 + d^2 - a^2 - b^2}{b(2d - 2b)} = \frac{x}{a} - \frac{-2cx + 2ax}{b(2d - 2b)}$$

$$\frac{c^2 + d^2 - a^2 - b^2}{b(2d - 2b)} = x\left(\frac{1}{a} - \frac{a - c}{b(d - b)}\right)$$

$$\frac{c^2 + d^2 - a^2 - b^2}{b(2d - 2b)} = x\left(\frac{bd - b^2}{a}\frac{-a^2 + ac}{bd - b^2}\right)$$

$$\frac{c^2 + d^2 - a^2 - b^2}{b(2d - 2b)} = x\left(\frac{bd - b^2 - a^2 + ac}{a(bd - b^2)}\right)$$

$$\frac{\big(a(bd - b^2)\big)(c^2 + d^2 - a^2 - b^2)}{b(2d - 2b)(bd - b^2 - a^2 + ac)} = x$$

$$\frac{a(c^2+d^2-a^2-b^2)}{2(bd-b^2-a^2+ac)}=x$$

$$\frac{a\big((c^2-a^2)+(d^2-b^2)\big)}{2\big(b(d-b)+a(c-a)\big)}=x$$

Ahora buscamos la coordenada en y, sabiendo que $y=\frac{b}{a}x$

$$y=\frac{b}{a}\,\frac{a\big((c^2-a^2)+(d^2-b^2)\big)}{2\big(b(d-b)+a(c-a)\big)}$$

$$y=\frac{b\big((c^2-a^2)+(d^2-b^2)\big)}{2\big(b(d-b)+a(c-a)\big)}$$

Llegamos a encontrar un punto, el cual cumple ser el punto medio del segmento usual

Siendo $D=(x,y)$, $D=\left(\frac{a\big((c^2-a^2)+(d^2-b^2)\big)}{2\big(b(d-b)+a(c-a)\big)},\frac{b\big((c^2-a^2)+(d^2-b^2)\big)}{2\big(b(d-b)+a(c-a)\big)}\right)$

Para poder identificar que el punto D es el punto medio, vamos a retomar el hecho de que A y B son proporcionales, dado que son proporcionales, sabiendo las coordenadas de estos puntos tenemos que $ad=bc$; con esta igualdad para cada coordenada en el punto D vamos a establecer lo siguiente:

Para la coordenada en x del punto D reemplazaremos

$a\neq 0$, $d=\frac{bc}{a}$,

Para la coordenada en y del punto D reemplazaremos

$b\neq 0$, $c=\frac{da}{b}$

Reemplazando en la coordenada x y y respectivamente las anteriores igualdades

$$D=\left(\frac{c^2a-a^3+\left(\frac{bc}{a}\right)^2a-b^2a}{2\left(\left(\frac{bc}{a}\right)b-b^2+ac-a^2\right)},\frac{\left(\frac{da}{b}\right)^2b-ba^2+bd^2-b^3}{2\left(db-b^2+a\left(\frac{da}{b}\right)-a^2\right)}\right)$$

En la coordenada x se multiplica por $\frac{a}{a}$ y en coordenada en y se multiplica por $\frac{b}{b}$

$$D=\left(\frac{c^2a^2-a^4+b^2c^2-b^2a^2}{2(b^2c-b^2a+a^2c-a^3)},\frac{d^2a^2-a^2b^2+d^2b^2-b^4}{2(b^2d-b^3+a^2d-a^2b)}\right)$$

Para ambas coordenadas se saca el factor común

$$D=\left(\frac{a^2(c^2-a^2)+b^2(c^2-a^2)}{2(b^2(c-a)+a^2(c-a))},\frac{a^2(d^2-b^2)+b^2(d^2-b^2)}{2\big(b^2(d-b)+a^2(d-b)\big)}\right)$$

$$D = \left(\frac{(a^2+b^2)(c^2-a^2)}{2(a^2+b^2)(c-a)}, \frac{(a^2+b^2)(d^2-b^2)}{2(a^2+b^2)(d-b)}\right)$$

$$D = \left(\frac{c^2-a^2}{2(c-a)}, \frac{d^2-b^2}{2(d-b)}\right)$$

Por la diferencia de cuadrados se cancelan los términos

$$D = \left(\frac{c+a}{2}, \frac{d+b}{2}\right)$$

Concluyendo entonces que el punto $D = \left(\frac{c+a}{2}, \frac{d+b}{2}\right)$ como se puede ver en la ***Figura 22***.

Si $a = 0$ debe ocurrir que $c = 0$ para que pasen por la recta proporcional

$$d(A, D) = d(D, B)$$

Por definición de la distancia usual

$$\sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2} = \sqrt{(c-x)^2 + (d-y)^2}$$

$$(a-x)^2 + (b-y)^2 = (c-x)^2 + (d-y)^2$$

Como $a = c = 0$

$$(b-y)^2 = (d-y)^2$$

$$b^2 - 2by + y^2 = d^2 - 2dy + y^2$$

$$b^2 - 2by = d^2 - 2dy$$

$$y(2d - 2b) = d^2 - b^2$$

$$y = \frac{d^2 - b^2}{2d - 2b}$$

$$y = \frac{d+b}{2}$$

El punto $D = \left(0, \frac{d+b}{2}\right)$

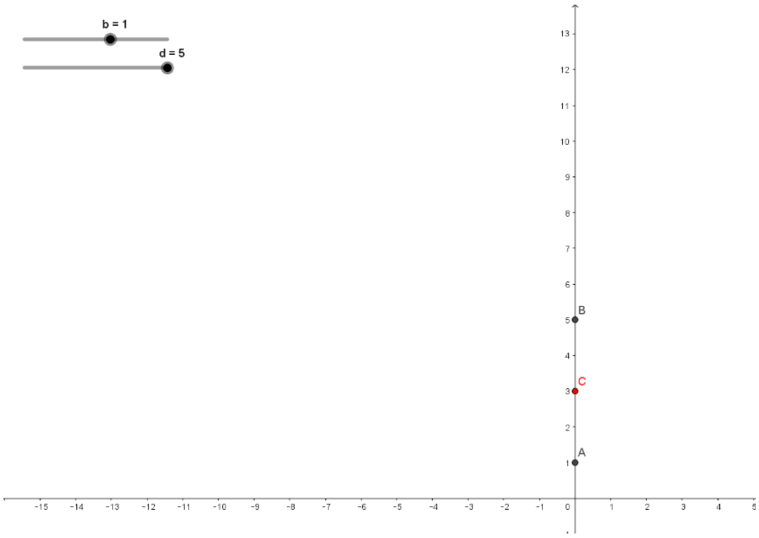


Figura 32 *Mediatriz del mensajero con A y B proporcionales y* $c = 0$

En la ***Figura 32*** se muestra la mediatriz del mensajero cuando A y B son proporcionales y $c = 0$. En el siguiente enlace se encuentra el applet referente a la figura anterior https://www.geogebra.org/m/q7vyrqth.

Se concluye así que la mediatriz cuando A y B son proporcionales es el punto medio del segmento AB.

Caso IB. Cuando A y B no son proporcionales y teniendo en cuenta la definición de mediatriz además de la definición de métrica del mensajero tenemos lo siguiente:

$$d_m(A, D) = d(D, B) \text{ o } d(A, D) = d_m(D, B)$$

Si demostramos uno de los dos, tendríamos que el otro caso se demuestra de manera análoga, es por esto por lo que demostraremos lo primero.

$$d_m(A, D) = d(D, B)$$

Por definición de distancia del mensajero tenemos que

$$d(A, O) + d(O, D) = d(D, B)$$

Por definición de la distancia usual podemos decir que

$$\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(c - x)^2 + (d - y)^2}$$

Recordemos que al ser proporcionales D y B, se cumple que $cy = xd$ y despejando $y = \frac{xd}{c}$, asumiendo que $c \neq 0$, reemplazando

$$\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{x^2 + \left(\frac{xd}{c}\right)^2} = \sqrt{(c - x)^2 + \left(d - \frac{xd}{c}\right)^2}$$

Sacando x como factor común de la raíz

$$\sqrt{a^2+b^2}+|x|\frac{\sqrt{c^2+d^2}}{|c|}=\sqrt{(c-x)^2+\frac{d^2c^2-2d^2c\,x+x^2d^2}{c^2}}$$

$$\sqrt{a^2+b^2}+|x\,|\frac{\sqrt{c^2+d^2}}{|c|}=\sqrt{\frac{c^4-2c^3x+x^2c^2+d^2c^2-2d^2c\,x+x^2d^2}{c^2}}$$

$$\sqrt{a^2+b^2}+|x\,|\frac{\sqrt{c^2+d^2}}{|c|}=\sqrt{\frac{c^4-2c^3x+x^2c^2+d^2c^2-2d^2c\,x+x^2d^2}{c^2}}$$

Elevando al cuadrado los dos lados de la igualdad

$$\left(\sqrt{a^2+b^2}+|x\,|\frac{\sqrt{c^2+d^2}}{|c|}\right)^2=\left(\sqrt{\frac{c^4-2c^3x+x^2c^2+d^2c^2-2d^2c\,x+x^2d^2}{c^2}}\right)^2$$

$$\left(\sqrt{a^2+b^2}+|x\,|\frac{\sqrt{c^2+d^2}}{|c|}\right)^2=\frac{c^4-2c^3x+x^2c^2+d^2c^2-2d^2c\,x+x^2d^2}{c^2}$$

Resolviendo los cuadrados

$$a^2+b^2+2|x|\frac{\sqrt{c^2+d^2}}{|c|}\sqrt{a^2+b^2}+x^2\frac{c^2+d^2}{c^2}$$
$$=\frac{c^4-2c^3x+x^2c^2+d^2c^2-2d^2c\,x+x^2d^2}{c^2}$$

Cancelando a ambos lados $x^2,\frac{c^2+d^2}{c^2}$, si $x<0$ también lo sería $c<0$, esto se debe al caso que estamos mirando cuando A y B no son proporcionales, al ser D y B proporcionales estos dos puntos deben pertenecer al mismo cuadrante, dado que se debe cumplir $xd=cy$, por tanto las coordenadas de los puntos en x y y tendrán los mismos signos.

$$a^2+b^2+\frac{2x\sqrt{(c^2+d^2)}}{c}\sqrt{a^2+b^2}=\frac{c^4-2c^3x+d^2c^2-2d^2xc}{c^2}$$

Factorizando c y simplificando

$$a^2+b^2+2x\frac{\sqrt{c^2+d^2}}{c}\sqrt{a^2+b^2}=\frac{c^3-2c^2x+d^2c-2d^2x}{c}$$

$$c\,(a^2+b^2)+2x\sqrt{c^2+d^2}\sqrt{a^2+b^2}=c^3-2c^2x+d^2c-2d^2x$$

$$c\,(a^2+b^2)-d^2c-c^3=-2c^2x-2d^2x-2x\sqrt{c^2+d^2}\sqrt{a^2+b^2}$$

$$c\,(a^2+b^2)-d^2c-c^3=x\left(-2c^2-2d^2-2\sqrt{c^2+d^2}\sqrt{a^2+b^2}\right)$$

$$\frac{c\,(a^2+b^2)-d^2c-c^3}{-2c^2-2d^2-2\sqrt{c^2+d^2}\sqrt{a^2+b^2}}=x$$

Siendo $D(x, y)$ cumple que equidista de los otros dos puntos fijos, como se ve en la ***Figura 22***.

$$D = \left(\frac{c\,(a^2 + b^2) - d^2 c - c^3}{-2c^2 - 2d^2 - 2\sqrt{c^2 + d^2}\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{d}{c} \frac{c\,(a^2 + b^2) - d^2 c - c^3}{-2c^2 - 2d^2 - 2\sqrt{c^2 + d^2}\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$$

$$D = \left(\frac{c\big((d^2 + c^2) - (a^2 + b^2)\big)}{2\left((c^2 + d^2) + \sqrt{c^2 + d^2}\sqrt{a^2 + b^2}\right)}, \frac{d\big((d^2 + c^2) - (a^2 + b^2)\big)}{2\left((c^2 + d^2) + \sqrt{c^2 + d^2}\sqrt{a^2 + b^2}\right)} \right)$$

Cuando $c = 0$ ocurre que:

$$d_m(A, D) = d(D, B)$$

$$d(A, O) + d(O, D) = d(D, B)$$

$$\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(c - x\,)^2 + (d - y\,)^2}$$

Reemplazando $c = 0$, c y x son iguales dado que D y B son proporcionales, por lo cual $x = 0$.

$$\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(x)^2 + (d - y\,)^2}$$

$$\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{y^2} = \sqrt{(d - y\,)^2}$$

Por definición de valor absoluto

$$|y\,| = |d - y\,| - \sqrt{a^2 + b^2}$$

Tomando los valores positivos de y tenemos que:

$$y = d - y - \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$y = \frac{d - \sqrt{a^2 + b^2}}{2}$$

Pensando en los valores negativos de y tenemos que:

$$-y = y - d - \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$y = \frac{d + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}$$

Encontrando las coordenadas en x y y, obtenemos G_N y G_P puntos que determinan la mediatriz para este caso

$$G_N = \left(0, \frac{d + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}\right) \text{ y } G_p = \left(0, \frac{d - \sqrt{a^2 + b^2}}{2}\right)$$

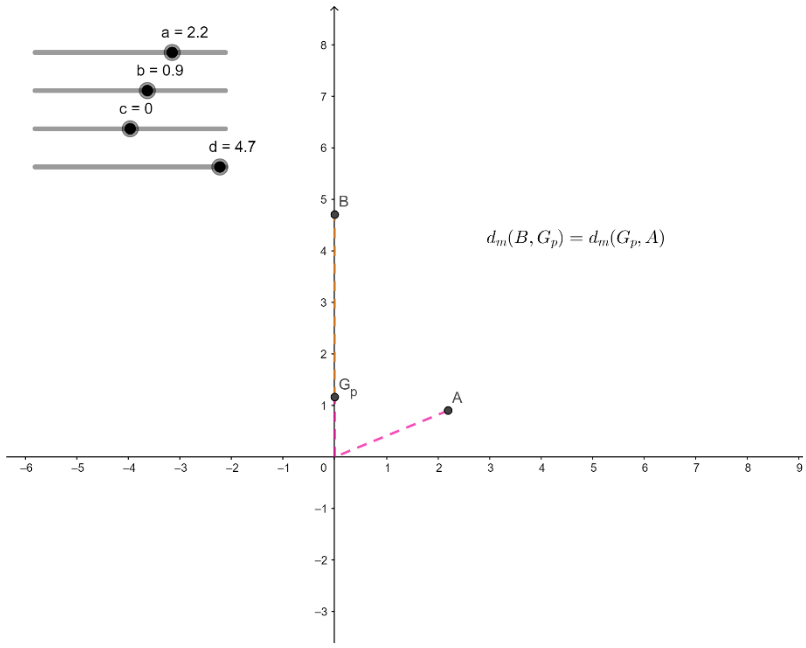


Figura 33 *Mediatriz con A y B no son proporcionales y* $c = 0$

En la ***Figura 33*** se muestra la mediatriz del mensajero cuando A y B no son proporcionales y $c = 0$. En el siguiente enlace se encuentra el applet referente a la figura anterior https://www.geogebra.org/m/uvjcfh4j.

De acuerdo con los casos anteriormente nombrados establecemos la siguiente **conjetura**:

Conjetura 1

Dados A y B en $\mathbb{R}^{*2}$. La mediatriz de $\overline{AB}_m$ es igual a el punto medio de $\overline{AB}_m$.

Al buscar los puntos que hacen parte de la mediatriz, falta suponer D que no hagan parte del $\overline{AB}_m$ y de acuerdo con esto encontramos otro punto D que cumple ser parte de la mediatriz, como lo veremos a continuación.

Caso IC. Al tener que $D \notin \overline{AB}_m$, y de acuerdo con los casos anteriores D no es proporcional con A y D no es proporcional con B, esto también porque queremos buscar la mediatriz y de acuerdo con la definición de mediatriz y la definición de métrica del mensajero:

$$d_m(A, D) = d_m(D, B)$$
$$d(A, O) + d(D, O) = d(D, O) + d(B, O)$$

Terminan cancelándose $d(D,O)$ el punto que genera la mediatriz, por lo cual la mediatriz no dependerá de un punto en el plano, dependerá de la siguiente igualdad

$$d(A,O) = d(B,O)$$

De ser cierta esta igualdad cualquier punto en el plano sin $\overleftrightarrow{AB}_m$ bastaría para ser verdadera la premisa, lo cual concluye que la mediatriz es todo el plano sin $\overleftrightarrow{AB}_m$. Por otro lado, de no ser cierta la igualdad planteada, no existirán puntos que satisfagan la igualdad en el plano, por lo cual el conjunto será vacío y la mediatriz estará conformada por un conjunto vacío.

Para ese caso establecimos la siguiente **conjetura**:

Conjetura 2

Dados A y B en $\mathbb{R}^{*2}$. Si $d(A,O) = d(B,O)$, la mediatriz del $\overline{AB}_m$ es todo el plano sin $\overleftrightarrow{AB}_m$.

$$\mathcal{M}_{\overline{AB}_m} = \mathbb{R}^{*2} - \overleftrightarrow{AB}_m$$

Para encontrar Parábola

Con el fin de encontrar la parábola en la métrica del mensajero utilizamos la siguiente que se encuentra en el apartado de parábola en la métrica del mensajero en el capítulo de prueba de los resultados obtenidos.

De acuerdo con su definición, es necesario saber para esta métrica, cuál es la distancia de un punto a una recta del mensajero, es por esto por lo que se establece inicialmente lo siguiente:

Al ubicar un punto A en el plano, que será el foco, y una recta en este caso del mensajero l_m, que será la directriz.

Teniendo en cuenta lo anterior, el segmento que tiene asignada la magnitud de un punto A a una recta l_m siempre pasa por O, esto debido a la definición de la métrica del mensajero, si tomamos un punto B que pertenece a l_m y diferente de O podría darse dos casos; el primero caso, que A y B no sean proporcionales, por definición de la métrica del mensajero $d(A,O) + d(O,B)$, podemos decir que $d_m(A,B) > d(A,O)$ entonces la ínfima distancia sería $d(A,O)$; el segundo caso, A y B proporcionales sabemos que la recta l_m pasa por O, si $d(A,B) < d(A,O)$, al tomar la distancia de A a B este segmento no pasa por O, sabiendo además que el punto B es diferente de O, esto quiere decir que no llegaría a ser la distancia de un punto a una recta (l_m), al no pasar por la recta l_m y si $d(A,B) > d(A,O)$ ya no sería ínfima, por lo cual se descartaría y nos dejaría que $d(l,A) = d(O,A)$.

Esto nos llevó a conjeturar que la ínfima distancia de un punto a una recta cumple que:

Dada l_m y $A \in \mathbb{R}^{*2}$ se tiene que $d_m(A, l_m) = d(A, O)$.

La ***Figura 24*** representa esta situación.

Teniendo en cuenta la distancia de un punto a una recta, inicialmente miramos la distancia de un punto a una recta del mensajero, cuando ubicábamos un punto A como el foco y una recta del mensajero $l_m$encontramos que la parábola en la métrica del mensajero es el punto medio del segmento AO, realizamos la construcción en GeoGebra y el razonamiento algebraico, como se ve a continuación:

Caso 1. La recta del mensajero (2) o (3) y un punto cualquiera llamado foco

Establecemos que A es el foco y los puntos E que cumplen ser parte de la parábola.
Como los puntos E están en la parábola, tenemos por definición de la parábola.

$$d_m(A, E) = d_m(E, l)$$

Caso 1A Cuando suponemos que el foco A no es proporcional con los puntos E

Por definición de parábola

$$d_m(A, E) = d_m(E, l_m)$$

Por definición de la métrica del mensajero y la definición de la distancia ínfima de un punto (D) a la recta del mensajero (l_m)

$$d(A, O) + d(E, O) = d(E, O)$$
$$d(A, O) = 0$$

Se obtiene que el foco está en O, el punto A no puede ser igual a O según la definición de la métrica del mensajero y concluimos que este caso no es posible.

Caso 1B Cuando suponemos que el foco A es proporcional con los puntos $E(x, y)$

$$d(A, E) = d(E, l_m)$$

la definición de la distancia ínfima de un punto (E) a la recta del mensajero (l_m)

$$d(A, E) = d(E, O)$$

Definición de la métrica del mensajero

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = x^2 + y^2$$

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = x^2 + y^2$$
$$-2ax + a^2 - 2by + y^2 = 0$$
$$xa + yb = \frac{a^2 + b^2}{2}\ (i)$$
Por otro lado, sabemos que A y E son proporcionales, por tanto $ay = xb$ y suponiendo que $a \neq 0$.

Caso 1B primera parte

Cuando $a \neq 0$

$$y = \frac{xb}{a}$$
Y reemplazando en (i)
$$xa + \frac{xb}{a}b = \frac{a^2 + b^2}{2}$$
$$\frac{xa^2 + xb^2}{a} = \frac{a^2 + b^2}{2}$$
$$x = \frac{a}{2}$$
Por tanto
$$y = \frac{b}{2}$$
La parábola para este caso es el punto E
$$E\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$$
Demostrando así que la parábola para este caso es el punto medio de $\overline{AO}$, como se ve en la ***Figura 25.***

Caso 1B segunda parte

Cuando $a = 0$

Por definición de parábola

$$d(A, E) = d(E, l_m)$$
la definición de la distancia ínfima de un punto (E) a la recta del mensajero (l_m)
$$d(A, E) = d(E, O)$$

Definición de la métrica del mensajero

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$x^2+(y-b)^2=x^2+y^2$$

$$(y-b)^2=y^2$$

$$y^2-2by+b^2=y^2$$

Si b llegara a ser 0, se ve que la igualdad es cierta, consideremos $b\neq 0$

$$-2by+b^2=0$$

$$-2y+b=0$$

$$y=\frac{b}{2}$$

Por otro lado, sabemos que A y E son proporcionales, por tanto $ay=xb$, como $a=0$, entonces $0=xb$, como $b\neq 0$ entonces $x=0$

La parábola para este caso es el punto E

$$E\left(0,\frac{b}{2}\right)$$

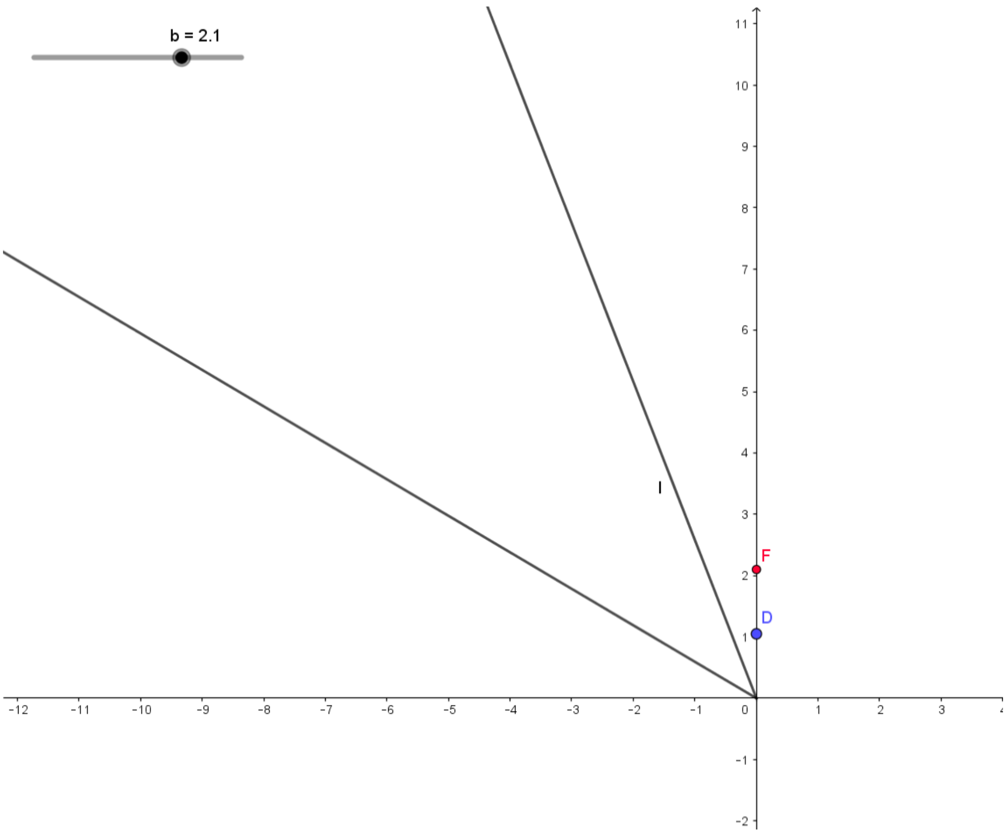


Figura 34 *Parábola del mensajero con A y B son proporcionales y $a=0$*

En la ***Figura 34*** se muestra la parábola del mensajero cuando A y B son proporcionales y $a = 0$. En el siguiente enlace se encuentra el applet referente a la figura anterior https://www.geogebra.org/m/h3nwebqs.

Para ese caso establecimos la siguiente **conjetura**:

Dado $A \in \mathbb{R}^{*2}$, A es el foco y l_m la directriz, la parábola en la métrica del mensajero será el punto medio de $\overline{AO}$.

$$\uplus\left(A_{l_m}\right)_m = \{E|E \text{ es punto medio } de\ \overline{AO}\}$$

La ***Figura 25*** representa esta situación.

Ahora, miramos la distancia de un punto a una recta usual que no pasa por O, cuando ubicábamos un punto F como el foco y una recta usual l que no pasa por O, encontramos que la parábola en la métrica del mensajero es el punto medio del $\overline{FW}$, donde W pertenece a l y cumple ser la intersección entre l y la perpendicular a l que pasa por O, realizamos la construcción en GeoGebra y el razonamiento algebraico, como se ve a continuación:

Primero hay que tener en cuenta la distancia mínima de un punto a una recta usual que no pasa por O.

Por definición de la forma general de la recta (Lehmann,1989)

$$l: Ax + By + C = 0$$

Por un lado, tenemos que la distancia desde la recta usual hasta O, por ser la mínima, es la perpendicular que pasa por el punto O y la recta l, la intersección entre la perpendicular y la recta l la llamaremos W, como en este caso no pasa por el origen, se tiene en cuenta la $d_m(l, F)$, es por esto por lo que:

$$d_m(F, l) = d(l, O) + d(F, O)$$

Como se establece que la $d(l, O)$ es la mínima distancia, se entiende que:

$$d_m(F, l) = d(W, O) + d(F, O)$$

Definición de mínima distancia de un punto a una recta usual (Lehmann,1989)

$$d_m(F, l) = \frac{|Ax + By + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} + \sqrt{a^2 + b^2}$$

Calculándola en O, para hallar la distancia desde el punto O a la recta:

$$d_m(F, l) = \frac{|A(0) + B(0) + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} + \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$d_m(F,l) = \frac{|A(0) + B(0) + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} + \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$d_m(F,l) = \frac{|C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} + \sqrt{a^2 + b^2}$$

De acuerdo con lo anterior se establece la siguiente **conjetura**, aployado en la **Figura 26:**

Dado una recta l que no pasa por O y un punto $F \in \mathbb{R}^{*2}$ y $F \notin l$. Si existe W tal que cumple ser la intersección entre l y la perpendicular a l que pasa por O, se tiene que $d_m(F,l) = d(F,O) + d(W,O)$.

Caso 2. La recta usual cuando no pasa por O y un punto cualquiera (Foco)

Establecemos que $F(a,b)$ es el foco y los puntos $E(x,y)$ que cumplen ser parte de la parábola. Como los puntos E están en la parábola, tenemos por definición de parábola.

$$d_m(F,E) = d_m(E,l)$$

Caso 2A Cuando $d(l,O) < d(O,F)$

Tenemos que E es proporcional con F

$$d(F,E) = d_m(l,E)$$
$$\sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2} = \frac{|C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} + \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$(a-x)^2 + (b-y)^2 = \frac{C^2}{A^2 + B^2} + 2\frac{|C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}\sqrt{x^2 + y^2} + x^2 + y^2$$
$$a^2 - 2ax + x^2 + b^2 - 2yb + y^2 = \frac{C^2}{A^2 + B^2} + 2\frac{|C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}\sqrt{x^2 + y^2} + x^2 + y^2$$

como el punto E es proporcional con el foco F

$$ay = xb$$

Suponiendo que $a \neq 0$

$$y = \frac{xb}{a}$$

Reemplazamos en y en la anterior ecuación

$$a^2 - 2ax + b^2 - 2b\ \frac{xb}{a} = \frac{C^2}{A^2 + B^2} + 2\frac{|C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}\sqrt{x^2 + \left(\frac{xb}{a}\right)^2}$$
$$a^2 - 2ax + b^2 - 2\frac{xb^2}{a} = \frac{C^2}{A^2 + B^2} + 2\ |C|/\sqrt{A^2 + B^2}|x|\sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

Si $x \geq 0$

$$x=\frac{\left(-a^2-b^2+\frac{C^2}{A^2+B^2}\right)}{-2a-\frac{2b^2}{a}-2\frac{|C|}{\sqrt{A^2+B^2}}\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}}$$

Si $x<0$

$$x=\frac{\left(-a^2-b^2+\frac{C^2}{A^2+B^2}\right)}{-2a-\frac{2b^2}{a}+2\frac{|C|}{\sqrt{A^2+B^2}}\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}}$$

Lo anterior se puede ver representado en la ***Figura 27***

Caso 2B Cuando $d(l,O)>d(O,F)$

Como en el anterior caso, E no es proporcional con F. Por la definición de parábola

$$d_m(F,E)=d(E,l)$$

Por definición de la métrica del mensajero y por la definición de recta perpendicular

$$d(E,O)+d(F,O)=\frac{|Ax+By+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

$$\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{a^2+b^2}=\frac{|Ax+By+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

$$\sqrt{x^2+y^2}=\frac{|Ax_3+By_3+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}-\sqrt{a^2+b^2}$$

$$x^2+y^2=\frac{(Ax+By+C)^2}{A^2+B^2}-2\sqrt{a^2+b^2}\frac{|Ax+By+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}+a^2+b^2 \quad (i)$$

La forma canónica de la recta es

$$Ax+By+C=0$$

Para buscar la pendiente, que acompaña a x

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$$

Por tanto, tenemos el punto O que está en la recta que es perpendicular a la usual, recordando que si son perpendiculares las pendientes cumplen que $m_1m_2=-1$

$$(y-0)=\frac{B}{A}(x-0)$$

$$y=\frac{B}{A}x$$

Sustituyendo en la igualdad (i) a y tenemos que

$$x^2+\left(\frac{B}{A}x\right)^2=\frac{\left(Ax+B\frac{B}{A}x+C\right)^2}{A^2+B^2}-2\sqrt{a^2+b^2}\frac{\left|Ax+B\frac{B}{A}x+C\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}+a^2+b^2$$

$$x^2\left(\frac{B^2}{A^2}+1\right)-\frac{\left(Ax+\frac{B^2}{A}x+C\right)^2}{A^2+B^2}+2\sqrt{a^2+b^2}\,\frac{\left|Ax+\frac{B^2}{A}x+C\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}=a^2+b^2$$

$$x^2\left(\frac{B^2}{A^2}+1\right)-\frac{\left(\frac{A^2+B^2}{A}x+C\right)^2}{A^2+B^2}+2\sqrt{a^2+b^2}\,\frac{\left|\frac{A^2+B^2}{A}x+C\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}=a^2+b^2$$

$$x^2\left(\frac{B^2}{A^2}+1\right)-\frac{\frac{A^4+B^4}{A^2}x^2}{A^2+B^2}-\frac{\frac{2(A^2+B^2)x\,(C)}{A}}{A^2+B^2}-\frac{C^2}{A^2+B^2}+2\sqrt{a^2+b^2}\,\frac{\left|\frac{A^2+B^2}{A}x+C\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$
$$=a^2+b^2$$

$$x^2\left(\left(\frac{B^2}{A^2}+1\right)-\frac{A^4+B^4}{A^2(A^2+B^2)}\right)+x\,\left(-\frac{2(A^2+B^2)(C)}{A(A^2+B^2)}\right)+2\sqrt{a^2+b^2}\,\frac{\left|\frac{A^2+B^2}{A}x+C\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$
$$-\frac{C^2}{A^2+B^2}=a^2+b^2$$

Asumiendo que $\left|\frac{A^2+B^2}{A}x+C\right|\geq 0$

$$x^2\left(\left(\frac{B^2}{A^2}+1\right)-\frac{A^4+B^4}{A^2[\![(A)]\!]^2+B^2)}\right)+x\,\left(-\frac{2(A^2+B^2)(C)}{A(A^2+B^2)}\right)+2\sqrt{a^2+b^2}\,\frac{\left(\frac{A^2+B^2}{A}x+C\right)}{\sqrt{A^2+B^2}}$$
$$-\frac{C^2}{A^2+B^2}=a^2+b^2$$

$$x^2\left(\left(\frac{B^2}{A^2}+1\right)-\frac{A^4+B^4}{A^2(A^2+B^2)}\right)+x\,\left(-\frac{2(A^2+B^2)(C)}{A(A^2+B^2)}\right)+2\sqrt{a^2+b^2}\,\frac{\left(\frac{A^2+B^2}{A}x\right)}{\sqrt{A^2+B^2}}$$
$$+2\sqrt{a^2+b^2}\,\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}-\frac{C^2}{A^2+B^2}=a^2+b^2$$

$$x^2\left(\left(\frac{B^2}{A^2}+1\right)-\frac{A^4+B^4}{A^2(A^2+B^2)}\right)+x\,\left(\left(-\frac{2(A^2+B^2)(C)}{A(A^2+B^2)}\right)+2\sqrt{a^2+b^2}\,\frac{A^2+B^2}{A\sqrt{A^2+B^2}}\right)$$
$$+2\sqrt{a^2+b^2}\,\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}-\frac{C^2}{A^2+B^2}=a^2+b^2$$

Aplicando la fórmula cuadrática para encontrar a x

Estos son los términos que acompaña a x^2 para términos de la demostración vamos a llamarlos z

$$z=\left(\left(\frac{B^2}{A^2}+1\right)-\frac{A^4+B^4}{A^2(A^2+B^2)}\right)$$

Estos son los términos que acompaña a x para términos de la demostración vamos a llamarlos j

$$j = \left(\left(-\frac{2(A^2+B^2)(C)}{A(A^2+B^2)}\right) + 2\sqrt{a^2+b^2}\,\frac{A^2+B^2}{A\sqrt{A^2+B^2}}\right)$$

Estos son los términos independientes para términos de la demostración vamos a llamarlos v

$$v = \ 2\sqrt{a^2+b^2}\,\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}} - \frac{C^2}{A^2+B^2} - a^2 - b^2$$

Usando la ecuación cuadrática para encontrar a x

$$x = \frac{-j \pm \sqrt{j^2-4zv}}{2z}$$

Los puntos E que hacen parte de la parábola son:

$$E\left(\frac{-j \pm \sqrt{j^2-4zv}}{2z}, \frac{B}{A}\left(\frac{-j \pm \sqrt{j^2-4zv}}{2z}\right)\right)$$

Asumiendo que $\left|\frac{A^2+B^2}{A}x + C\right| < 0$

$$x^2\left(\left(\frac{B^2}{A^2}+1\right) - \frac{A^4+B^4}{A^2(A^2+B^2)}\right) + x\ \left(-\frac{2(A^2+B^2)(C)}{A(A^2+B^2)}\right) + 2\sqrt{a^2+b^2}\,\frac{\left(-\frac{A^2+B^2}{A}x - C\right)}{\sqrt{A^2+B^2}}$$
$$- \frac{C^2}{A^2+B^2} = a^2 + b^2$$

$$x^2\left(\left(\frac{B^2}{A^2}+1\right) - \frac{A^4+B^4}{A^2(A^2+B^2)}\right) + x\ \left(-\frac{2(A^2+B^2)(C)}{A(A^2+B^2)}\right) - 2\sqrt{a^2+b^2}\,\frac{\left(\frac{A^2+B^2}{A}x\right)}{\sqrt{A^2+B^2}}$$
$$- 2\sqrt{a^2+b^2}\,\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}} - \frac{C^2}{A^2+B^2} = a^2 + b^2$$

$$x^2\left(\left(\frac{B^2}{A^2}+1\right) - \frac{A^4+B^4}{A^2(A^2+B^2)}\right) + x\ \left(\left(-\frac{2(A^2+B^2)(C)}{A(A^2+B^2)}\right) - 2\sqrt{a^2+b^2}\,\frac{A^2+B^2}{A\sqrt{A^2+B^2}}\right)$$
$$- 2\sqrt{a^2+b^2}\,\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}} - \frac{C^2}{A^2+B^2} = a^2 + b^2$$

Aplicando la fórmula cuadrática para encontrar a x

Estos son los términos que acompaña a x^2 para términos de la demostración vamos a llamarlos z

$$z = \left(\left(\frac{B^2}{A^2} + 1\right) - \frac{A^4 + B^4}{A^2(A^2 + B^2)}\right)$$

Estos son los términos que acompaña a x para términos de la demostración vamos a llamarlos j

$$j = \left(\left(-\frac{2(A^2 + B^2)(C)}{A(A^2 + B^2)}\right) - 2\sqrt{a^2 + b^2}\,\frac{A^2 + B^2}{A\sqrt{A^2 + B^2}}\right)$$

Estos son los términos independientes para términos de la demostración vamos a llamarlos v

$$v = -\,2\sqrt{a^2 + b^2}\,\frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} - \frac{C^2}{A^2 + B^2} - a^2 - b^2$$

Usando la ecuación cuadrática para encontrar a x

$$x = \frac{-j \pm \sqrt{j^2 - 4zv}}{2z}$$

Son cuatro posibles x esto debido a que hay uno en cada cuadrante, E cumple ser la parábola.

$$E\left(\frac{-j \pm \sqrt{j^2 - 4zv}}{2z}, \frac{B}{A}\left(\frac{-j \pm \sqrt{j^2 - 4zv}}{2z}\right)\right)$$

Lo anterior se ve representado en la ***Figura 27.***

De acuerdo con el caso 2 se establece la siguiente **conjetura**:

Dados $A \in \mathbb{R}^{*2}$, A es el foco y l que no pasa por O en $\mathbb{R}^{*2}$. La parábola en la métrica del mensajero es un punto que cumple ser el punto medio de $\overline{AW_m}$

$$\uplus(A_l)_m = \{E|E \text{ es punto medio de } \overline{AW_m}\}$$

Para encontrar Hipérbola

Con el fin de encontrar la hipérbola en la métrica del mensajero utilizamos la definición que se encuentra en el apartado de hipérbola del mensajero en el capítulo de prueba de resultados obtenidos.

Caso 1. Cuando A y B no son proporcionales

Caso 1A Suponemos C proporcional con A

$$|d(A, C) - d_m(C, B)| = k$$

Para todos los casos miramos por definición de valor absolutivo cuando $d(A,C) - d_m(C,B) \geq 0$ y $d(A,C) - d_m(C,B) < 0$, entonces:

Cuando la diferencia de las distancias es positiva, tenemos que:

$$\sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2} - \left(\sqrt{c^2 + d^2} + \sqrt{x^2 + y^2}\right) = k$$

$$\sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2} = k + \left(\sqrt{c^2 + d^2} + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$$

Teniendo que $ay = bx, y = \frac{bx}{a}$ con $a \neq 0$ sustituyendo en la ecuación anterior

$$\sqrt{(a-x)^2 + \left(b - \frac{bx}{a}\right)^2} = k + \left(\sqrt{c^2 + d^2} + \sqrt{x^2 + \left(\frac{bx}{a}\right)^2}\right)$$

$$\sqrt{(a-x)^2 + \left(b - \frac{bx}{a}\right)^2} = k + \sqrt{c^2 + d^2} + \sqrt{x^2 + \frac{b^2x^2}{a^2}}$$

$$\sqrt{(a-x)^2 + \left(b - \frac{bx}{a}\right)^2} = k + \sqrt{c^2 + d^2} + \frac{x}{a}\sqrt{a^2 + b^2}$$

$$(a-x)^2 + \left(b - \frac{bx}{a}\right)^2 = \left(k + \sqrt{c^2 + d^2} + \frac{x}{a}\sqrt{a^2 + b^2}\right)^2$$

Por la definición trinomio cuadrado perfecto

$$(a-x)^2 + \left(b - \frac{bx}{a}\right)^2$$
$$= \left(k + \sqrt{c^2 + d^2}\right)^2 + \frac{2x}{a}\sqrt{a^2 + b^2}\left(k + \sqrt{c^2 + d^2}\right) + \left(\frac{x}{a}\right)^2 (a^2 + b^2)$$

Por la definición trinomio cuadrado perfecto

$$a^2 - 2ax + x^2 + b^2 - \frac{2(b^2x)}{a} + \frac{b^2x^2}{a^2}$$
$$= \left(k + \sqrt{c^2 + d^2}\right)^2 + \frac{2x}{a}\sqrt{a^2 + b^2}\left(k + \sqrt{c^2 + d^2}\right) + \left(\frac{x}{a}\right)^2 (a^2 + b^2)$$

Simplificando términos

$$-2ax - \frac{2(b^2x)}{a} - \frac{2x}{a}\sqrt{a^2 + b^2}\left(k + \sqrt{c^2 + d^2}\right) = \left(k + \sqrt{c^2 + d^2}\right)^2 - a^2 - b^2$$

Factorizar a x

$$x\left(-2a - \frac{2(b^2)}{a} - \frac{2}{a}\sqrt{a^2 + b^2}\left(k + \sqrt{c^2 + d^2}\right)\right) = \left(k + \sqrt{c^2 + d^2}\right)^2 - a^2 - b^2$$

$$x = \frac{\left(k + \sqrt{c^2 + d^2}\right)^2 - a^2 - b^2}{\left(-2a - \frac{2(b^2)}{a} - \frac{2}{a}\sqrt{a^2 + b^2}\left(k + \sqrt{c^2 + d^2}\right)\right)}$$

El punto de coordenadas x y y, llamado C_4 es uno de los puntos que pertenece a la hipérbola para esta métrica cuando C es proporcional con A:

$$c_4\left(\frac{\left(k+\sqrt{c^2+d^2}\right)^2-a^2-b^2}{\left(-2a-\frac{2(b^2)}{a}-\frac{2}{a}\sqrt{a^2+b^2}\left(k+\sqrt{c^2+d^2}\right)\right)},\frac{b}{a}\frac{\left(k+\sqrt{c^2+d^2}\right)^2-a^2-b^2}{\left(-2a-\frac{2(b^2)}{a}-\frac{2}{a}\sqrt{a^2+b^2}\left(k+\sqrt{c^2+d^2}\right)\right)}\right)$$

Cuando $a=0$

Cuando la diferencia de las distancias es positiva, tenemos que:

$$\sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2}-\left(\sqrt{c^2+d^2}+\sqrt{x^2+y^2}\right)=k$$

Reemplazando $a=0$

$$\sqrt{(x)^2+(b-y)^2}=k+\left(\sqrt{c^2+d^2}+\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

Teniendo que $ay=bx$ y $a=0$, al reemplazar el valor de a nos queda $bx=0$. Si suponemos que $b=0$ estaríamos diciendo que $A=O$ y de acuerdo con la definición de la métrica no es cierto. Si suponemos que $x=0$, se llega a que A sería proporcional con B y este caso establece que los dos puntos no son proporcionales, por tanto, no es posible que $a=0$.

Cuando la diferencia de las distancias es negativa, tenemos que:

$$|d(A,C)-d_m(C,B)|=k$$

$$\sqrt{c^2+d^2}+\sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2}=k$$

$$\sqrt{c^2+d^2}+\sqrt{x^2+y^2}=k+\sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2}$$

Teniendo que $ay=bx, y=\frac{bx}{a}$ con $a\neq 0$ sustituyendo en la ecuación anterior

$$\sqrt{c^2+d^2}+\sqrt{x^2+\left(\frac{bx}{a}\right)^2}=k+\sqrt{(a-x)^2+\left(b-\frac{bx}{a}\right)^2}$$

$$\sqrt{c^2+d^2}+\sqrt{\frac{a^2x^2+b^2x^2}{a^2}}-k=\sqrt{(a-x)^2+\left(b-\frac{bx}{a}\right)^2}$$

Elevando al cuadrado

$$\left(\sqrt{c^2+d^2}+\frac{x}{a}\sqrt{a^2+b^2}-k\right)^2=(a-x)^2+\left(b-\frac{bx}{a}\right)^2$$

$$\left(\sqrt{c^2+d^2}-k+\frac{x}{a}\sqrt{a^2+b^2}\right)^2=(a-x)^2+\left(b-\frac{bx}{a}\right)^2$$

$$\left(\sqrt{c^2+d^2}-k\right)^2+\frac{2x}{a}\sqrt{a^2+b^2}\left(\sqrt{c^2+d^2}-k\right)+\left(\frac{x}{a}\right)^2(a^2+b^2)$$
$$=(a-x)^2+\left(b-\frac{bx}{a}\right)^2$$
$$\left(\sqrt{c^2+d^2}-k\right)^2+\frac{2x}{a}\sqrt{a^2+b^2}\left(\sqrt{c^2+d^2}-k\right)+\left(\frac{x}{a}\right)^2(a^2+b^2)$$
$$=(a-x)^2+\left(b-\frac{bx}{a}\right)^2$$
$$\left(\sqrt{c^2+d^2}-k\right)^2+\frac{2x}{a}\sqrt{a^2+b^2}\left(\sqrt{c^2+d^2}-k\right)+\frac{x^2}{a^2}(a^2+b^2)$$
$$=a^2-2ax+x^2+b^2-\frac{2(b^2x)}{a}+\frac{b^2x^2}{a^2}$$
$$\left(\sqrt{c^2+d^2}-k\right)^2+\frac{2x}{a}\sqrt{a^2+b^2}\left(\sqrt{c^2+d^2}-k\right)=a^2-2ax+b^2-\frac{2(b^2x)}{a}$$
$$\frac{2x}{a}\sqrt{a^2+b^2}\left(\sqrt{c^2+d^2}-k\right)+2ax+\frac{2(b^2x)}{a}=a^2+b^2-\left(\sqrt{c^2+d^2}-k\right)^2$$
$$x\left(\frac{2}{a}\sqrt{a^2+b^2}\left(\sqrt{c^2+d^2}-k\right)+2a+\frac{2(b^2)}{a}\right)=a^2+b^2-\left(\sqrt{c^2+d^2}-k\right)^2$$
$$x=\frac{a^2+b^2-\left(\sqrt{c^2+d^2}-k\right)^2}{\left(\frac{2}{a}\sqrt{a^2+b^2}\left(\sqrt{c^2+d^2}-k\right)+2a+\frac{2(b^2)}{a}\right)}$$

El punto de coordenadas x y y, llamado C_1 es uno de los puntos que pertenece a la hipérbola para esta métrica cuando C es proporcional con A:

$$C_1\left(\frac{a^2+b^2-\left(\sqrt{c^2+d^2}-k\right)^2}{\left(\frac{2}{a}\sqrt{a^2+b^2}\left(\sqrt{c^2+d^2}-k\right)+2a+\frac{2(b^2)}{a}\right)},\frac{b}{a}\frac{a^2+b^2-\left(\sqrt{c^2+d^2}-k\right)^2}{\left(\frac{2}{a}\sqrt{a^2+b^2}\left(\sqrt{c^2+d^2}-k\right)+2a+\frac{2(b^2)}{a}\right)}\right)$$

Esto se puede ver representado en la ***Figura 29.***

Cuando $a=0$

Cuando la diferencia de las distancias es negativa, tenemos que:

$$\sqrt{c^2+d^2}+\sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2}=k$$

Reemplazando $a=0$

$$\sqrt{c^2+d^2}+\sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{(x)^2+(b-y)^2}=k$$

Teniendo que $ay=bx$ y $a=0$ al reemplazar a se tiene la ecuación $bx=0$, esto no es posible por el mismo argumento de la hipérbola cuando tomamos el valor absoluto positivo y $a=0$.

Caso 1B Cuando C proporcional con B

$$|d_m(A,C) - d(C,B)| = k$$

Cuando la diferencia de las distancias es positiva, tenemos que:

$$\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{x^2+y^2} - \left(\sqrt{(c-x)^2+(d-y)^2}\right) = k$$

$$\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{x^2+y^2} = k + \left(\sqrt{(c-x)^2+(d-y)^2}\right)$$

Teniendo que $cy = dx, x = \frac{yc}{d}$ con $d \neq 0$ sustituyendo en la ecuación anterior

$$\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{\left(\frac{yc}{d}\right)^2 + y^2} = k + \left(\sqrt{\left(c - \frac{yc}{d}\right)^2 + (d-y)^2}\right)$$

$$\sqrt{a^2+b^2} - k + \sqrt{\left(\frac{yc}{d}\right)^2 + y^2} = \sqrt{\left(c - \frac{yc}{d}\right)^2 + (d-y)^2}$$

$$\left(\sqrt{a^2+b^2} - k\right)^2 + \frac{2y}{d}\left(\sqrt{a^2+b^2} - k\right)\sqrt{c^2+d^2} + \frac{y^2c^2}{d^2} + y^2$$

$$= c^2 - \frac{2yc^2}{d} + \frac{y^2c^2}{d^2} + d^2 - 2dy + y^2$$

$$\left(\sqrt{a^2+b^2} - k\right)^2 + \frac{2y}{d}\left(\sqrt{a^2+b^2} - k\right)\sqrt{c^2+d^2} = c^2 - \frac{2yc^2}{d} + d^2 - 2dy$$

Factorizando a x

$$y\left(\frac{2}{d}\left(\sqrt{a^2+b^2} - k\right)\sqrt{c^2+d^2} + \frac{2c^2}{d} + 2d\right) = c^2 + d^2 - \left(\sqrt{a^2+b^2} - k\right)^2$$

$$y = \frac{c^2 + d^2 - \left(\sqrt{a^2+b^2} - k\right)^2}{\frac{2}{d}\left(\sqrt{a^2+b^2} - k\right)\sqrt{c^2+d^2} + \frac{2c^2}{d} + 2d}$$

El punto de coordenadas x y y, llamado C_1 es uno de los puntos que pertenece a la hipérbola para esta métrica cuando C es proporcional con B:

$$C_1\left(\frac{c}{d}\frac{c^2 + d^2 - \left(\sqrt{a^2+b^2} - k\right)^2}{\frac{2}{d}\left(\sqrt{a^2+b^2} - k\right)\sqrt{c^2+d^2} + \frac{2c^2}{d} + 2d}, \frac{c^2 + d^2 - \left(\sqrt{a^2+b^2} - k\right)^2}{\frac{2}{d}\left(\sqrt{a^2+b^2} - k\right)\sqrt{c^2+d^2} + \frac{2c^2}{d} + 2d}\right)$$

Consideremos cuando $d = 0$, recordemos que al ser proporcional $dx = cy$ y reemplazando d tenemos que $cy = 0$ y esto no es posible, por el mismo argumento dado en el caso en que C es proporcional con A y $a = 0$.

Cuando la diferencia de las distancias es negativa, tenemos que:

$$|d_m(A,C) - d(C,B)| = k$$

Por definición de métrica de mensajero

$$\sqrt{(c-x)^2+(d-y)^2}=k+\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{x^2+y^2}$$

$$(c-x)^2+(d-y)^2=\left(k+\sqrt{a^2+b^2}\right)^2+2\left(k+\sqrt{a^2+b^2}\right)\sqrt{x^2+y^2}+x^2+y^2$$

Teniendo que:

$$cy=dx, x=\frac{yc}{d}$$

con $d\neq 0$ sustituyendo en la ecuación anterior

$$\left(c-\frac{yc}{d}\right)^2+(d-y)^2=\left(k+\sqrt{a^2+b^2}\right)^2+2\left(k+\sqrt{a^2+b^2}\right)\sqrt{\left(\frac{yc}{d}\right)^2+y^2}+\left(\frac{yc}{d}\right)^2+y^2$$

Por definición trinomio cuadrado perfecto

$$c^2-\frac{2yc^2}{d}+\left(\frac{yc}{d}\right)^2+d^2-2yd+y^2$$
$$=\left(k+\sqrt{a^2+b^2}\right)^2+2\left(k+\sqrt{a^2+b^2}\right)\sqrt{\left(\frac{yc}{d}\right)^2+y^2}+\left(\frac{yc}{d}\right)^2+y^2$$

Simplificando términos

$$c^2-\frac{2yc^2}{d}+d^2-2yd=\left(k+\sqrt{a^2+b^2}\right)^2+2\left(k+\sqrt{a^2+b^2}\right)\sqrt{\left(\frac{yc}{d}\right)^2+y^2}$$

$$c^2-\frac{2yc^2}{d}+d^2-2yd=\left(k+\sqrt{a^2+b^2}\right)^2+\frac{2y}{d}\left(k+\sqrt{a^2+b^2}\right)\sqrt{c^2+d^2}$$

Factorizar a y

$$y\left(-\frac{2}{d}\left(k+\sqrt{a^2+b^2}\right)\sqrt{c^2+d^2}-\frac{2c^2}{d}-2d\right)=\left(k+\sqrt{a^2+b^2}\right)^2-c^2-d^2$$

$$y=\frac{\left(k+\sqrt{a^2+b^2}\right)^2-c^2-d^2}{-\frac{2}{d}\left(k+\sqrt{a^2+b^2}\right)\sqrt{c^2+d^2}-\frac{2c^2}{d}-2d}$$

El punto de coordenadas x y y, llamado C_2 es uno de los puntos que pertenece a la hipérbola para esta métrica cuando C es proporcional con B:

$$C_2\left(\frac{c}{d}\frac{\left(k+\sqrt{a^2+b^2}\right)^2-c^2-d^2}{-\frac{2}{d}\left(k+\sqrt{a^2+b^2}\right)\sqrt{c^2+d^2}-\frac{2c^2}{d}-2d},\frac{\left(k+\sqrt{a^2+b^2}\right)^2-c^2-d^2}{-\frac{2}{d}\left(k+\sqrt{a^2+b^2}\right)\sqrt{c^2+d^2}-\frac{2c^2}{d}-2d}\right)$$

Esto se ve representado en la ***Figura 29.***

Consideremos el caso cuando $d=0$, no será posible, por el argumento dado en el caso en que C es proporcional con A y $a=0$.

Caso 2. Cuando A y B no proporcionales y C no proporcional con alguno.

$$|d_m(A,C) - d_m(C,B)| = k$$

Cuando la diferencia de las distancias es positiva, tenemos que:

$$\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{x^2+y^2} - \left(\sqrt{c^2+d^2} + \sqrt{x^2+y^2}\right) = k$$

$$\sqrt{a^2+b^2} - \sqrt{c^2+d^2} = k$$

Cuando la diferencia de las distancias es negativa, tenemos que

$$\sqrt{c^2+d^2} + \sqrt{x^2+y^2} - \left(\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{x^2+y^2}\right) = k$$

$$\sqrt{c^2+d^2} - \sqrt{a^2+b^2} = k$$

Cuando se cumpla una de las siguientes igualdades

$$\sqrt{a^2+b^2} - \sqrt{c^2+d^2} = k \text{ o } \sqrt{c^2+d^2} - \sqrt{a^2+b^2} = k$$

En este caso, sería todo el plano, puesto que, cualquier (x,y) que tomemos en el plano mantendría la igualdad, ya que, no depende de estas variables.

Y en el caso en que no se cumplan las dos igualdades

$$\sqrt{a^2+b^2} - \sqrt{c^2+d^2} = k \text{ y } \sqrt{c^2+d^2} - \sqrt{a^2+b^2} = k$$

En tal caso, no hay puntos que cumplan esto, por lo cual no existen algún (x,y) que lo cumpla, ya que no depende de estas variables.

Caso 3. Cuando A y B proporcionales y suponemos C proporcional con A y B.

$$|d(A,C) - d(C,B)| = k$$

Cuando la diferencia de las distancias es positiva, tenemos que:

$$d(A,C) - d(C,B) = k$$

Por definición de la métrica usual

$$\left(\sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2}\right) - \left(\sqrt{(c-x)^2+(d-y)^2}\right) = k$$

$$\left(\sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2}\right) = k + \left(\sqrt{(c-x)^2+(d-y)^2}\right)$$

$$(a-x)^2+(b-y)^2 = k^2 + 2k\sqrt{(c-x)^2+(d-y)^2} + (c-x)^2+(d-y)^2$$

Considerando $ay = bx$, También considerando que $b \neq 0$, tenemos que $x = \frac{ya}{b}$

Reemplazando en la ecuación anterior

$$\left(a - \frac{ya}{b}\right)^2 + (b-y)^2 = k^2 + 2k\sqrt{\left(c - \frac{ya}{b}\right)^2 + (d-y\,)^2} + \left(c - \frac{ya}{b}\right)^2 + (d-y)^2$$

Por definición trinomio cuadrado perfecto

$$a^2 - 2\frac{ya^2}{b} + \left(\frac{ya}{b}\right)^2 + b^2 - 2by + y^2$$
$$= k^2 + 2k\sqrt{\left(c - \frac{y\,a}{b}\right)^2 + (d-y)^2} + c^2 - 2\frac{yac}{b} + \left(\frac{ya}{b}\right)^2 + d^2 - 2dy + y^2$$

Simplificando términos

$$a^2 - 2\frac{ya^2}{b} + b^2 - 2by = k^2 + 2k\sqrt{\left(c - \frac{ya}{b}\right)^2 + (d-y)^2} + c^2 - 2\frac{yac}{b} + d^2 - 2dy$$

Factorizamos a y

$$\left(-2\frac{a^2}{b} - 2b + 2\frac{ac}{b} + 2d\right)y + (a^2 + b^2 - k^2 - c^2 - d^2) = 2k\sqrt{\left(c - \frac{y\,a}{b}\right)^2 + (d-y)^2}$$

Elevamos al cuadrado

$$\left(-2\frac{a^2}{b} - 2b + 2\frac{a\,c}{b} + 2d\right)^2 y^2$$
$$+ 2y\left(-2\frac{a^2}{b} - 2b + 2\frac{a\,c}{b} + 2d\right)(a^2 + b^2 - k^2 - c^2 - d^2)$$
$$+ (a^2 + b^2 - k^2 - c^2 - d^2)^2$$
$$= 4k^2c^2 - \frac{8k^2ca}{b}\,y + \frac{4k^2a^2}{b^2}y^2 + 4k^2d^2 - 8k^2dy + 4k^2y^2$$

Despejando a y

$$\left(-2\frac{a^2}{b} - 2b + 2\frac{a\,c}{b} + 2d\right)^2 y^2 - \frac{4k^2a^2}{b^2}y^2 - 4k^2y^2$$
$$+ 2y\left(-2\frac{a^2}{b} - 2b + 2\frac{a\,c}{b} + 2d\right)(a^2 + b^2 - k^2 - c^2 - d^2) + \frac{8k^2ca}{b}\,y$$
$$+ 8k^2dy + (a^2 + b^2 - k^2 - c^2 - d^2)^2 = 4k^2c^2 + 4k^2d^2$$

Factorizando y^2, y y términos independientes

$$y^2\left(\left(-2\frac{a^2}{b} - 2b + 2\frac{a\,c}{b} + 2d\right)^2 - \frac{4k^2a^2}{b^2} - 4k^2\right)$$
$$+ y\left(2\left(-2\frac{a^2}{b} - 2b + 2\frac{a\,c}{b} + 2d\right)(a^2 + b^2 - k^2 - c^2 - d^2) + \frac{8k^2ca}{b}\right.$$
$$\left. + 8k^2d\right) + (a^2 + b^2 - k^2 - c^2 - d^2)^2 = 4k^2c^2 + 4k^2d^2$$

Aplicando la fórmula cuadrática para encontrar a y

Estos son los términos que acompaña a y^2 para términos de la demostración vamos a llamarlos z

$$z = \left(\left(-2\frac{a^2}{b} - 2b + 2\frac{a\,c}{b} + 2d\right)^2 - \frac{4k^2a^2}{b^2} - 4k^2\right)$$

Estos son los términos que acompaña a y para términos de la demostración vamos a llamarlos j

$$j = \left(2\left(-2\frac{a^2}{b} - 2b + 2\frac{a\,c}{b} + 2d\right)(a^2 + b^2 - k^2 - c^2 - d^2) + \frac{8k^2ca}{b} + 8k^2d\right)$$

Estos son los términos independientes para términos de la demostración vamos a llamarlos v

$$v = (a^2 + b^2 - k^2 - c^2 - d^2)^2 - 4k^2c^2 - 4k^2d^2$$

Usando la ecuación cuadrática para encontrar a y

$$y = \frac{-j \pm \sqrt{j^2 - 4zv}}{2z}$$

El punto de coordenadas x y y, llamado C_1 es uno de los puntos que pertenece a la hipérbola para esta métrica cuando C es proporcional con A y B, A y B proporcionales:

$$C_1\left(\frac{a}{b}\frac{-j \pm \sqrt{j^2 - 4zv}}{2z}, \frac{-j \pm \sqrt{j^2 - 4zv}}{2z}\right)$$

Cuando $b = 0$, al ser proporcional C_1 con B tenemos que $cy = 0$ y como c no puede ser 0 entonces $y = 0$ y, además, al ser proporcionales A y B con un razonamiento análogo obtenemos que $d = 0$

Desde la definición de hipérbola y al ver cuando la diferencia de las distancias es positiva:

$$d(A, C) - d(C, B) = k$$

Por definición de la métrica usual

$$\left(\sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2}\right) - \left(\sqrt{(c-x)^2 + (d-y)^2}\right) = k$$

$$\left(\sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2}\right) = k + \left(\sqrt{(c-x)^2 + (d-y)^2}\right)$$

Reemplazando $b = 0$, $y = 0$, $d = 0$

$$\left(\sqrt{(a-x)^2}\right) - \left(\sqrt{(c-x)^2}\right) = k$$

$$|a - x| - |c - x| = k$$

Los casos donde los valores absolutos tengan signos iguales cancelaran la x que buscamos, por lo cual nos dará el plano cuando se cumpla $a - c = k$ o $-a + c = k$ o no habrá puntos en caso contrario:

Si $a - x \geq 0$ y $c - x < 0$

$$a + c - 2x = k$$
$$x = \frac{a + c - k}{2}$$

Por otro lado, si $a - x < 0$ y $c - x \geq 0$

$$2x - a - c = k$$
$$x = \frac{a + c + k}{2}$$

El punto de coordenadas x y y, llamado C_1 es uno de los puntos que pertenece a la hipérbola para esta métrica cuando C es proporcional con A y B, mientras A y B proporcionales, el caso cuando la diferencia de las distancias es positiva:

$$C_p\left(\frac{a + c + k}{2}, 0\right)$$
$$C_n\left(\frac{a + c - k}{2}, 0\right)$$

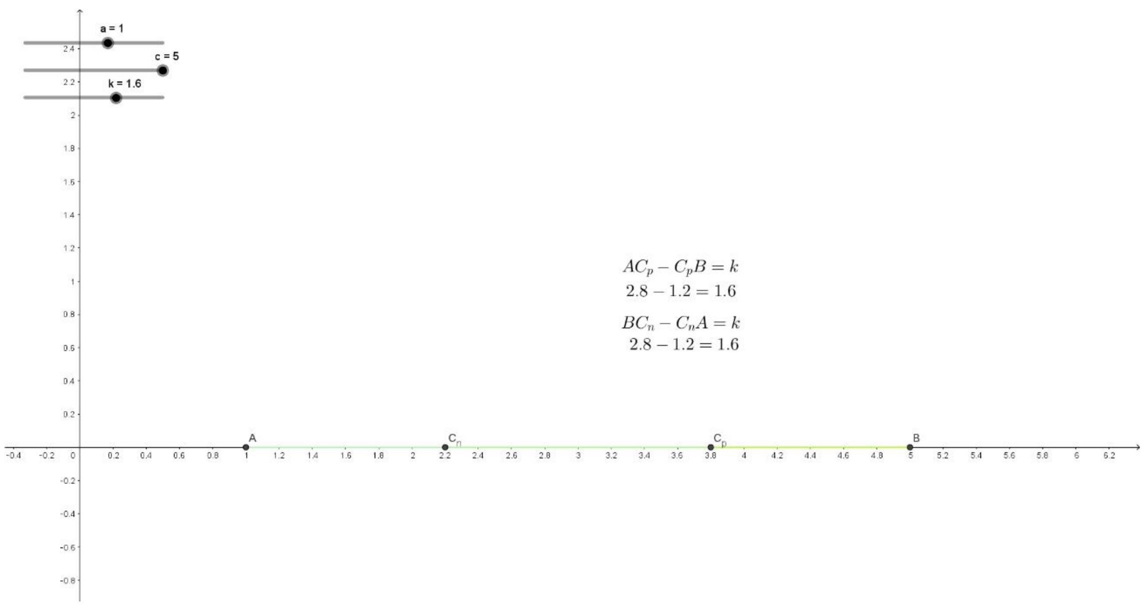


Figura 35 *Hipérbola A y B proporcionales y* $b = 0$

En la ***Figura 35*** se muestra la hipérbola del mensajero cuando A y B son proporcionales y $b = 0$. En el siguiente enlace se encuentra el applet referente a la figura anterior https://www.geogebra.org/m/mey8kerh.

Cuando la diferencia de las distancias es negativa, tenemos que:

$$|d_m(A, C) - d(C, B)| = k$$

$$\sqrt{(c - x)^2 + (d - y)^2} - \sqrt{(a - x)^2 + (b - y)^2} = k$$
$$\sqrt{(c - x)^2 + (d - y)^2} = k + \sqrt{(a - x)^2 + (b - y)^2}$$

$$(c-x)^2+(d-y)^2=k^2+2k\sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2}+(a-x)^2+(b-y)^2$$

Considerando $ay=bx$, También considerando que $b\neq 0$, tenemos que $x=\frac{ya}{b}$

$$\left(c-\frac{ya}{b}\right)^2+(d-y)^2=k^2+2k\sqrt{\left(a-\frac{ya}{b}\right)^2+(b-y)^2}+\left(a-\frac{ya}{b}\right)^2+(b-y)^2$$

Por definición trinomio cuadrado perfecto

$$c^2-2\frac{yac}{b}+\left(\frac{ya}{b}\right)^2+d^2-2dy+y^2$$
$$=k^2+2k\sqrt{\left(a-\frac{ya}{b}\right)^2+(b-y)^2}+a^2-2\frac{ya^2}{b}+\left(\frac{ya}{b}\right)^2+b^2-2b\,y+y^2$$

Simplificando términos

$$c^2-2\frac{yac}{b}+d^2-2dy=k^2+2k\sqrt{\left(a-\frac{ya}{b}\right)^2+(b-y)^2}+a^2-2\frac{ya^2}{b}+b^2-2by$$

Factorizamos a y

$$\left(-2\frac{ca}{b}-2d+2\frac{a^2}{b}+2b\right)y+(c^2+d^2-k^2-a^2-b^2)=2k\sqrt{\left(a-\frac{ya}{b}\right)^2+(b-y)^2}$$

Elevamos al cuadrado

$$\left(-2\frac{ca}{b}-2d+2\frac{a^2}{b}+2b\right)^2y^2+2y\left(-2\frac{ca}{b}-2d+2\frac{a^2}{b}+2b\right)(c^2+d^2-k^2-a^2-b^2)$$
$$+(c^2+d^2-k^2-a^2-b^2)^2$$
$$=4k^2a^2-\frac{8k^2a^2}{b}\,y+\frac{4k^2a^2}{b^2}y^2+4k^2b^2-8k^2by+4k^2y^2$$

Despejando a y

$$\left(-2\frac{ca}{b}-2d+2\frac{a^2}{b}+2b\right)^2y^2-\frac{4k^2a^2}{b^2}y^2-4k^2y^2$$
$$+2y\left(-2\frac{ca}{b}-2d+2\frac{a^2}{b}+2b\right)(c^2+d^2-k^2-a^2-b^2)+\frac{8k^2a^2}{b}\,y$$
$$+8k^2by+(c^2+d^2-k^2-a^2-b^2)^2=4k^2a^2+4k^2b^2$$

Factorizando y^2, y y términos independientes

$$y^2\left(\left(-2\frac{ca}{b}-2d+2\frac{a^2}{b}+2b\right)^2-\frac{4k^2a^2}{b^2}-4k^2\right)$$

$$+y\left(2\left(-2\frac{ca}{b}-2d+2\frac{a^2}{b}+2b\right)(c^2+d^2-k^2-a^2-b^2)+\frac{8k^2a^2}{b}\right.$$

$$\left.+8k^2b\right)+(c^2+d^2-k^2-a^2-b^2)^2=4k^2a^2+4k^2b^2$$

Aplicando la fórmula cuadrática para encontrar a y

Estos son los términos que acompaña a y^2 para términos de la demostración vamos a llamarlos z

$$z=\left(\left(-2\frac{ca}{b}-2d+2\frac{a^2}{b}+2b\right)^2-\frac{4k^2a^2}{b^2}-4k^2\right)$$

Estos son los términos que acompaña a y para términos de la demostración vamos a llamarlos j

$$j=\left(2\left(-2\frac{ca}{b}-2d+2\frac{a^2}{b}+2b\right)(c^2+d^2-k^2-a^2-b^2)+\frac{8k^2a^2}{b}+8k^2b\right)$$

Estos son los términos independientes para términos de la demostración vamos a llamarlos v

$$v=(c^2+d^2-k^2-a^2-b^2)^2-4k^2a^2-4k^2b^2$$

Usando la ecuación cuadrática para encontrar a y

$$y=\frac{-j\pm\sqrt{j^2-4zv}}{2z}$$

El punto de coordenadas x y y, llamado C_2 es uno de los puntos que pertenece a la hipérbola para esta métrica cuando C es proporcional con A y B, mientras A y B proporcionales:

$$C_2\left(\frac{a}{b}\frac{-j\pm\sqrt{j^2-4zv}}{2z},\frac{-j\pm\sqrt{j^2-4zv}}{2z}\right)$$

Consideremos cuando $b=0$, al ser proporcionales tenemos que $y=0$, $d=0$

$$\sqrt{(c-x)^2+(d-y)^2}-\sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2}=k$$

$$\sqrt{(c-x)^2+(d-y)^2}=k+\sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2}$$

Reemplazando $b=0$, $y=0$, $d=0$

$$\left(\sqrt{(c-x)^2}\right)-\left(\sqrt{(a-x)^2}\right)=k$$

$$|c-x|-|a-x|=k$$

Los casos donde los valores absolutos tengan signos iguales cancelaran la x que buscamos, por lo cual nos darán el plano cuando se cumpla $a-c=k$ o $-a+c=k$ o no habrá puntos en caso contrario, por lo cual:

Si $a - x < 0$ y $c - x \geq 0$

$$a + c - 2x = k$$

$$x = \frac{a + c - k}{2}$$

Por otro lado, si $a - x \geq 0$ y $c - x < 0$

$$2x - a - c = k$$

$$x = \frac{a + c + k}{2}$$

El punto de coordenadas x y y, llamado C_2 es uno de los puntos que pertenece a la hipérbola para esta métrica cuando C es proporcional con alguno, mientras A y B proporcionales, el caso cuando la diferencia de las distancias es negativa:

$$C_2\left(\frac{a + c \pm k}{2}, 0\right)$$

Para este caso, la gráfica es similar a cuando la diferencia de las distancias es positiva y $b = 0$. La gráfica que se muestra a continuación es la hipérbola para este caso cuando A y C son proporcionales y C es proporcional con A y B.

Cuando A y B proporcionales y suponemos C proporcional con A y B, la ***Figura 30*** representa a los puntos C_1 y C_2 que hacen parte de la hipérbola.

Anexo *B*

Dados A y B en $\mathbb{R}^{*2}$, k en $\mathbb{R}^+$ ***A* y *B* proporcionales** donde A y B son focos. Si $g \geq 0$ tal que $g = \frac{k - d(A,O) - d(B,O)}{2}$. La elipse en la métrica del mensajero es el conjunto de puntos que satisfacen que

$$\oplus\,(\{A,B\}_k)_m = \{(\oplus\,\{A,B\}_k \cap \overleftrightarrow{AB}) \cup [\odot O_g - (\odot O_g \cap \overleftrightarrow{AO})]\}$$

#	Afirmación	Garantía
1	$Z \in \{(\oplus\,\{A,B\}_k \cap \overleftrightarrow{AB}) \cup [\odot O_g - (\odot O_g \cap \overleftrightarrow{AO})]\}$ A, B focos y k en $\mathbb{R}^+$ A y B proporcionales $g = \frac{k - d(A,O) - d(B,O)}{2}$	Dado

2	$Z \in \left(\oplus \{A,B\}_k \cap \overleftrightarrow{AB} \right)$ o $Z \in \left[\odot O_g - \left(\odot O_g \cap \overleftrightarrow{AO} \right) \right]$	Definición Unión (1)
3	$Z \in \left(\oplus \{A,B\}_k \cap \overleftrightarrow{AB} \right)$	Caso 1(2)
4	$Z \in \oplus \{A,B\}_k$ y $Z \in \overleftrightarrow{AB}$	Definición intersección (3)
5	Z proporcional a A y B	Definición proporcionalidad (4)
6	$d(A,Z) + d(Z,B) = k$	Definición elipse (4)
7	$d_m(A,Z) + d_m(Z,B) = k$	Definición métrica del mensajero, sustitución y disyunción (5,6)
8	$Z \in \oplus (\{A,B\}_k)_m$	Definición elipse (7)
9	$Z \in \left[\odot O_g - \left(\odot O_g \cap \overleftrightarrow{AO} \right) \right]$	Caso 2 (2)
10	$Z \in \odot O_g$ y $Z \notin \left(\odot O_g \cap \overleftrightarrow{AO} \right)$	Definición diferencia (9)
11	$Z \in \odot O_g$ y $Z \notin \overleftrightarrow{AO}$	Silogismo disyuntivo
12	Z no proporcional A y Z no proporcional B	Definición proporcionalidad y transitividad proporcionalidad (1,11)
13	$d(Z,O) = g$	Definición circunferencia (11)
14	$d(Z,O) = \dfrac{k - d(A,O) - d(B,O)}{2}$	sustitución(1,13)
15	$2d(Z,O) = k - d(A,O) - d(B,O)$	Propiedad de los reales (14)
16	$2d(Z,O) + d(A,O) + d(B,O) = k$	Propiedad de los reales (15)
17	$d_m(A,Z) + d_m(Z,B) = k$	Definición métrica mensajero (12,16)
18	$Z \in \oplus (\{A,B\}_k)_m$	Definición elipse (17)

#	**Afirmación**	**Garantía**
1	$Z \notin \left\{ \left(\oplus \{A,B\}_k \cap \overleftrightarrow{AB} \right) \cup \left[\odot O_g - \left(\odot O_g \cap \overleftrightarrow{AO} \right) \right] \right\}$ A, B focos y k en $\mathbb{R}^+$ A y B proporcionales	Dado

	$g=\dfrac{k-d(A,O)-d(B,O)}{2}$	
2	$Z \notin \left(\oplus \{A,B\}_k \cap \overleftrightarrow{AB} \right)$ y $Z \notin \left[\odot O_g - \left(\odot O_g \cap \overleftrightarrow{AO} \right) \right]$	Ley de Morgan (1)
3	$\left(Z \notin \oplus \{A,B\}_k \; o \; Z \notin \overleftrightarrow{AB} \right)$ y $Z \notin \left[\odot O_g - \left(\odot O_g \cap \overleftrightarrow{AO} \right) \right]$	Leyes de Morgan (2)
4	$\left(Z \notin \oplus \{A,B\}_k \; o \; Z \notin \overleftrightarrow{AB} \right)$ y $\left(Z \notin \odot O_g \; o \; Z \in \overleftrightarrow{AO} \right)$	Definición diferencia, leyes de Morgan y silogismo disyuntivo (3)
5	$Z \notin \oplus \{A,B\}_k$ y $Z \notin \odot O_g$ o $Z \notin \oplus \{A,B\}_k$ y $Z \in \overleftrightarrow{AO}$ o $Z \notin \overleftrightarrow{AB}$ y $Z \notin \odot O_g$	Distribución de la intersección con respecto a la unión (4)
6	$Z \notin \oplus \{A,B\}_k \; y \; Z \notin \odot O_g$	Caso 1 (5)
7	$d(A,Z)+d(Z,B) \neq k \;\; y \;\; d(Z,O) \neq g$	Definición elipse y definición circunferencia (6)
8	$d(A,Z)+d(Z,B) \neq k \; y$ $d(Z,O)=\dfrac{k-d(A,O)-d(B,O)}{2}$	Sustitución (1,7)
9	$d(A,Z)+d(Z,B) \neq k \; y$ $2d(Z,O)+d(A,O)+d(B,O) \neq k$	Propiedad de los reales (8)
10	$d(A,Z)+d(Z,B) \neq k$ y $d_m(A,Z)+d_m(Z,B) \neq k$	Definición métrica mensajero (9)
11	$Z \notin \oplus (\{A,B\}_k)_m$	Definición elipse (10)
12	$Z \notin \oplus \{A,B\}_k$ y $Z \in \overleftrightarrow{AO}$	Caso 2 (5)
13	$d(A,Z)+d(Z,B) \neq k$ y Z proporcional A y B	Definición elipse, Definición proporcionalidad y transitividad proporcionalidad (1,12)
14	$d_m(A,Z)+d_m(Z,B) \neq k$	Definición métrica mensajero (13)
15	$Z \notin \oplus (\{A,B\}_k)_m$	Definición elipse (14)
16	$Z \notin \overleftrightarrow{AB}$ y $Z \notin \odot O_g$	Caso 3 (5)

17	Z no proporcional a A y Z no proporcional a B	Definición proporcionalidad (1,16)
18	$d(Z,O) \neq g$	Definición circunferencia (16)
19	$d(Z,O) \neq \frac{k - d(A,O) - d(B,O)}{2}$	Definición métrica del mensajero, sustitución y disyunción (1,18)
20	$2d(Z,O) \neq k - d(A,O) - d(B,O)$	Propiedad de los reales (19)
21	$2d(Z,O) + d(A,O) + d(B,O) \neq k$	Propiedad de los reales (20)
22	$d_m(A,Z) + d_m(Z,B) \neq k$	Definición métrica mensajero (17,21)
23	$Z \notin \bigoplus(\{A,B\}_k)_m$	Definición elipse (22)

Si $g < 0$ tal que $g = \frac{k-d(A,O)-d(B,O)}{2}$. La elipse en la métrica del mensajero es el conjunto de puntos que satisfacen que

$$\bigoplus(\{A,B\}_k)_m = \left(\bigoplus\{A,B\}_k \cap \overleftrightarrow{AB}\right)$$

Esta demostración es análoga al caso 1 de la demostración anterior cuando se quiere probar que

$$Z \in \left\{\left(\bigoplus\{A,B\}_k \cap \overleftrightarrow{AB}\right) \cup \left[\odot O_g - \left(\odot O_g \cap \overleftrightarrow{AO}\right)\right]\right\} \rightarrow Z \in \bigoplus(\{A,B\}_k)_m$$