El Surgimiento de la Simetría Gauge, Durante el Primer Tercio del Siglo XX, y su Relación con la Teoría Electromagnética Alrededor del Potencial Vectorial, Desde la Perspectiva de Hermann Weyl

Daniel Alejandro Pedreros Cifuentes

Documento para optar por el título de

Licenciado en física

Directora

Prof. Sandra Bibiana Avila Torres

Línea de profundización

La enseñanza de la física y la relación física- matemáticas

Universidad Pedagógica Nacional

Facultad de Ciencia y Tecnología

Licenciatura en física

Bogotá D.C, Colombia 2020

Índice de símbolos

Se muestran los debidos símbolos, constantes y términos empleados en el presente trabajo

Símbolo	Nombre	Unidad SI
$\vec{E}$	Campo eléctrico	(N/C)
$\vec{B}$	Campo magnético	(T)
$\vec{A}$	Potencial vectorial	n/a
A_μ	Cuadripotencial	n/a
φ	Potencial escalar	n/a
∇	Operador nabla	n/a
$\cdot$	Producto escalar	n/a
$\times$	Producto vectorial	n/a
I	Corriente eléctrica	(A)
$\vec{J}$	Densidad de corriente eléctrica	(A/m^2)
ρ	Densidad de carga	$(C.m^3)$
ε_0	Permitividad eléctrica	(C^2/Nm^2)
μ_0	Permeabilidad magnética	(N/A^2)
m	Masa	Kg
c	Velocidad de la luz	(m/s)
χ	Función escalar de ajuste	n/a
$g_{\mu\nu}$	Tensor métrico	n/a
$F_{\mu\nu}$	Tensor de campo electromagnético	n/a

Índice de figuras

INDICE DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN

Uno de los temas que actualmente es fundamental en física es la simetría gauge, que ha venido tomando fuerza desde la segunda mitad del siglo XX, y ahora es la base en la cual se sustentan algunas teorías nuevas en física como, por ejemplo, la física de partículas elementales.

La simetría gauge surge en 1918 con Hermann Weyl, sin embargo, esta teoría no tuvo gran acogida entre los científicos de la época, pues su significado geométrico no se entendía de la mejor manera dejando a un lado los alcances que podría traer consigo misma, no obstante, perduro en el tiempo debido a que Hermann Weyl encontró en la teoría electromagnética de Maxwell el sustento más fuerte de su estructura matemática mediante el concepto de cuadripotencial magnético en el cual observo un factor de ajuste que estaba a la base de la idea fundamental de su estructura matemática.

En este sentido, el trabajo de grado pretende hacer un análisis historiográfico entorno al surgimiento de la simetría gauge durante el primer tercio del siglo XX y como está simetría se abre paso en la teoría electromagnética alrededor del potencial vectorial, presentando en el primer capítulo un contexto histórico en el cual se trata su surgimiento, en el segundo capítulo se observa la importancia del potencial vectorial junto con el termino de ajuste en la teoría electromagnética, documentando como este ente matemático permite comprender la idea primaria de la simetría gauge, por último en el tercer capítulo se realiza una síntesis alrededor de la importancia de este planteamiento para el aprendizaje de física moderna, llegando a que el estudio del potencial vectorial abriría uno de los caminos para una transición de física clásica a física moderna de manera estructurada y amena, al abrir una gran gama de temas que parten desde lo que se supone que es lo más trabajado en un curso de electromagnetismo clásico.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

"Han emergido diferentes problemáticas con la enseñanza de contenidos específicos en física, con la ausencia de reflexión conceptual y sus implicaciones, con la falta de análisis a los algoritmos abordados […] con ciertas orientaciones propuestas por los libros de texto" (Cuesta & Mosquera, 2018). Asimismo, se evidencia que las personas en general consideran agradables y sugestivos los temas que se muestran en películas o en televisión en torno a agujeros negros y teorías modernas en física, proponiendo por un lado, el aumento de interés alrededor de temáticas asociadas de física moderna y por otro lado, la urgencia de aportar en la solución acerca de las diferentes problemáticas con la enseñanza de contenidos específicos en física (Ostermann & Moreira, 2000).

En consecuencia, a lo largo de la historia, la simetría ha sido un rasgo característico de figuras espaciales y objetos abstractos sin dejar a un lado que este concepto ha tenido un impacto significativo en ciencia, pues la simetría ha jugado un papel indispensable en física moderna, es tanto que se sabe que los griegos definieron simetría como perfección, belleza, armonía y unidad de la naturaleza (Brading & Castellani, 2003), sin embargo, con el transcurso de los años está definición ha cambiado. Weyl comenta que la simetría sigue siendo

> Una idea por medio de la cual el hombre, a través de los tiempos, ha intentado comprender y crear orden, belleza y perfección […] aunque aquellas leyes de las que podemos presumir un cierto conocimiento razonable son invariantes con respecto a la inversión del tiempo (Weyl, 1975).

Por ejemplo, el primer postulado de la Teoría de la Relatividad Especial (TRE), propone que las leyes fundamentales de la física deben tener la misma forma en todos los marcos inerciales, es decir, deben ser invariantes después de cualquier cambio de marco de referencia inercial (Vélez, 2016). Por tanto, si una ley de la naturaleza permanece invariante ante algún tipo de cambio, se puede asumir que esa ley de la naturaleza es simétrica.

La definición de invariante se reduce a ser una igualdad de las partes de un sistema bajo la aplicación de cualquier transformación, por lo que es indispensable que para que dicho sistema quede invariante todo tiene que preservarse (Brading & Castellani, 2003).

El concepto de simetría se divide en simetría geométrica y no geométrica, no obstante Feynmann comenta que, aunque son agradables los objetos y diagramas que de una u otra manera son simétricos, el interés está en las simetrías que existen en la naturaleza y como todo se preserva para los objetos abstractos (simetrías no geométricas) (Feynman , Leighton, & Sands, Mecánica, radiación y calor, 1998).

Durante la primera mitad del siglo XIX se inicia el estudio de las propiedades de invariancia en expresiones matemáticas con la mecánica analítica de Hamilton. Por su parte, Carl Gustav Jakob Jacobi, condujo al estudio general de las teorías físicas en términos de sus propiedades de transformación, con el propósito meramente instrumental de resolver problemas dinámicos (Brading & Castellani, 2003). Las investigaciones alrededor de estas propiedades de transformación permitieron que hoy en día el concepto de simetría sea indispensable, llegando al punto en que la simetría explique áreas enteras de la física (Davies, 1986).

Una de las simetrías más sólidas hoy en día, es la simetría gauge, que surge con Hermann Weyl en el año 1918 en un artículo titulado “Gravitation and Electricity” y que en principio no fue considerada como fundamental a pesar de proponer una idea de unificación con respecto a las dos fuerzas de interacción conocidas en ese entonces (Gravitacional y Electromagnética).

En 1954 renace la idea gauge de Hermann Weyl, a través de los trabajos de los físicos Chen Ning Yang y Robert Mills al aplicar la idea de simetría gauge en las fuerzas de interacción que surgieron en el transcurso de la primera mitad del siglo XX (Fuerza de interacción débil y fuerte) volviéndose de esta manera la idea gauge relevante en física.

A pesar de haber dejado en un principio la idea de Weyl de lado, esta mostró el camino para que hoy en día se pudiese convertir en una de las teorías más prometedoras para los físicos contemporáneos, ya que está a la base de la explicación de las cuatro fuerzas de interacción fundamentales. Por ejemplo, “la invariabilidad de la física bajo cambios arbitrarios de forma en la trayectoria de un movimiento” Davies (1986) hace que se pueda afirmar que “la fuerza de la gravedad sea una manifestación de una simetría abstracta o simetría gauge.” Davies (1986)

De la misma forma, la teoría electromagnética de Maxwell debe poseer simetrías que la pudiesen describir (Feynman & Leighton, Electromagnetismo y materia, 1998).

Con respecto al surgimiento de la teoría electromagnética, esta inicia como el estudio de fenómenos con manifestaciones particulares; para la electricidad se tenía la atracción de algunos objetos que sufrían cambios debido a interacciones como el frotamiento; y por el lado del magnetismo, se tenía la magnetita o imán que atraía el hierro, siendo fenómenos independientes y aparentemente sin relación alguna. No fue sino hasta cuando Hans Christian Oersted, a principios del siglo XIX, propuso su experimento, que se pudo observar la existencia de una relación entre corriente y magnetismo. El experimento consistía en colocar un alambre en el cual circulaba corriente eléctrica, en la cercanía del alambre se ubica una brújula, observando como la aguja de la brújula se desviaba mientras la corriente permanecía en el alambre, debido según Oersted, a que está pudo haber experimentado una fuerza magnética.

De esta forma, teniendo en cuenta que una corriente eléctrica produce un efecto magnético, según Oersted, André Marie Ampère observa lo hecho por Oersted y desarrolla el formalismo matemático para sustentar este fenómeno. En 1831 Michael Faraday mirando los avances de sus colegas se hace la pregunta ¿Es posible que el magnetismo genere electricidad?

Faraday trabajó durante varios años alrededor de esta inquietud descubriendo lo que se conoce hoy en día como ley de inducción de Faraday (Braun, 1992).

Faraday en su intento de dar explicación a este fenómeno, concedió el nombre de estado Electro-tónico a un estado particular en el cual entraban los materiales en presencia de un objeto magnetizado, no obstante, fue muy difícil obtener un sustento valido para evidenciar la existencia de este estado. Años más tarde pensando alrededor de este tema, James Clerk Maxwell retoma y desarrolla todo el sentido físico y matemático del estado Electro-tónico, asociándolo a un estado en el cual podría estar el espacio, y no la materia, permitiendo entonces mediante este concepto formular su teoría.

A sabiendas de que la naturaleza debería tener una relación íntima entre electricidad y magnetismo, el interés de Maxwell no estuvo en desarrollar las nociones de simetría, pues, retoma el estado Electro-tónico y lo modifica presentando formalmente en su teoría un ente llamado potencial vectorial, que muestra una relación netamente matemática.

Años más tarde, personajes influyentes en la historia de la física como Hermann Weyl, confirmarían la existencia de simetrías en el electromagnetismo puntualmente relacionándolas entorno al potencial vectorial.

Hermann Weyl crea una estructura matemática llamada simetría gauge y nota que, mediante la relación matemática del cuadripotencial electromagnético que es una generalización del potencial vectorial propuesto por Maxwell, se podría reescribir la teoría electromagnética en términos de potenciales ayudando a facilitar algunos procedimientos y explicaciones, de igual manera que años después esta simetría marcaría la historia de la física en el contexto de la física moderna.

> Cuando se habla acerca de teorías modernas en física, por ejemplo, acerca de simetría gauge se genera confusión al no existir una definición de la noción explicita de esta simetría, peor aún, rara vez se define correctamente en artículos o libros, ya que se supone que todo el mundo sabe lo que se quiere decir, en pocas palabras, estas nociones utilizadas ampliamente desde principios del siglo XX, casi nunca se definen con precisión en los textos dando lugar a muchos malentendidos y controversias (Schwichtenberg, 2019).

Esta situación plantea que la simetría gauge debería ser un tema de dominio generalizado en el ámbito de la física y su enseñanza, pero en la realidad se encuentra que los libros que contienen esta información la presentan mediante matemáticas avanzadas y muchas veces no hacen una debida introducción, lo cual genera una desestructuración del conocimiento y limita los alcances en enseñanza y aprendizaje, tornándose ineludible que las personas que estén interesadas en la simetría gauge se remitan a la idea que está a la base de la teoría, es decir, a la esencia que permite la construcción de la teoría, lo cual podría ser más significativo desde el acercamiento de Weyl mediante su trabajo en electromagnetismo.

Es de resaltar así que la idea de simetría gauge presenta dos momentos que se muestran cruciales; por un lado, está la relación matemática del potencial vectorial de Maxwell que le permitió a Weyl ver en este la idea fundamental que traía consigo misma su teoría, permitiéndose reescribir el electromagnetismo en términos de potenciales y que sin embargo no se le atribuyo importancia en su época, por tanto esta idea no es lo bastante clara en los libros ya que el sentido teórico practico de la simetría gauge no se notó sino hasta la década de 1950 con los pensadores Chen Ning Yang y Robert Mills, y junto con el efecto Aharonov-Bohr este es su segundo momento, que para la gran mayoría de textos es el inicio de la simetría gauge, desarrollando su formalismo de manera explícita, aunque dejando a un lado las consideraciones con respecto al potencial vectorial.

Con la intención de conocer más acerca del surgimiento de la simetría gauge, y la idea que está a la base de esta simetría, igualmente observando, “la ausencia de reflexión conceptual, el análisis de los algoritmos, ciertas orientaciones que se le dan a este tema en los libros” (Cuesta & Mosquera, 2018). Junto con la ausencia de información entorno a cómo el potencial vectorial se configura cómo el ente que permite abrir camino a las teorías gauge, se plantea desde este trabajo de grado, hacer un análisis historiográfico, que aporte significativamente en la investigación en torno al aprendizaje de física moderna, mediante la pregunta que guía la presente investigación.

PREGUNTA PROBLEMA

¿Cómo se abre paso la simetría Gauge en la teoría electromagnética alrededor del potencial vectorial durante el primer tercio del siglo XX, desde la perspectiva de Hermann Weyl?

OBJETIVOS

OBJETIVO GENERAL

Realizar un análisis historiográfico acerca del surgimiento de la simetría gauge durante el primer tercio del siglo XX y su relación con la teoría electromagnética alrededor del potencial vectorial según Hermann Weyl, resaltando la importancia en el aprendizaje del electromagnetismo y su introducción a la física moderna.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Hacer una revisión histórica acerca del surgimiento del concepto de simetría gauge, alrededor de las teorías más influyentes y la perspectiva de Hermann Weyl.
- Realizar una síntesis de la interpretación del potencial vectorial en la teoría electromagnética, donde se resalte este planteamiento matemático al rededor del factor de ajuste como origen de la simetría gauge
- Presentar, a manera de reflexión, la importancia de la simetría gauge y el potencial vectorial para el aprendizaje del electromagnetismo y su posible aplicación en la introducción a la física moderna.

MARCO TEÓRICO

Dentro de los ejes temáticos en los cuales se desenvuelve este trabajo de investigación está la simetría, algunas consideraciones del cálculo vectorial y de igual manera, algunos aspectos de la teoría electromagnética de Maxwell, que en conjunto, permitirán observar como el concepto de potencial vectorial labra el camino para entender la idea primaria de la simetría gauge, que podría ser aprovechada desde este contexto en los entornos académicos para la transición de la física clásica a la física moderna.

Simetría en el siglo XX

Anterior al siglo XX, las simetrías más familiares eran las simetrías espaciales o también llamadas simetrías geométricas, en este contexto simetría puede ser definida como "una invariancia en un patrón que es observado cuando se produce alguna transformación" (Gerard´t, 1980). Por ejemplo "Las trasformaciones que generan simetrías espaciales (geométricas) pueden ser clasificadas según la dimensión del espacio (unidimensional, bidimensional y tridimensional)" (González & Santamaría, 2008). En una simetría bidimensional en el plano cartesiano se tiene que un cuadrado es invariante con respecto a rotaciones ya que se están cambiando las coordenadas de la figura (x, y), esta trasformación necesariamente debe tener un punto fijo alrededor del cual será rotada, punto p en este caso, y la rotación debe ser de 90° o múltiplo de este, mostrando entonces que el cuadrado queda invariante ante una rotación de 90°.

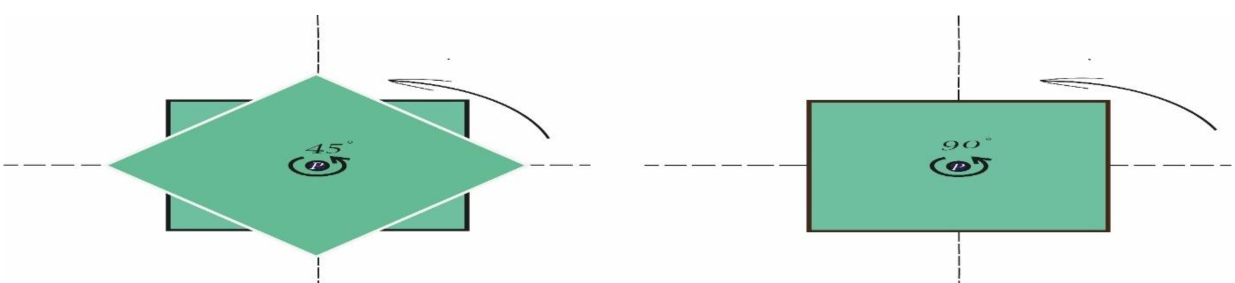

Figura 1. Simetría de rotación. (Creaciónpropia, Simetria de rotación, 2020)

Por otro lado, aunque el concepto de simetría tuvo su origen en la geometría, el desarrollo de esta abrió el camino para extenderse a transformaciones de otro tipo, estas "nuevas" simetrías son llamadas, simetrías no geométricas (Gerard´t, 1980).

Anterior al siglo XX, la simetría y los principios de invariancia no eran considerados como fundamentales, aunque Jacobi en el siglo XIX condujo al estudio general de las teorías físicas en términos de sus propiedades de transformación, fue con la Teoría de la Relatividad Especial (TRE) que la simetría tuvo un impacto fundamental al apreciar que las leyes de la física y la velocidad de la luz son invariantes ante cualquier observador en reposo o en movimiento uniforme no acelerado (simetría no geométrica).

La idea de simetría no geométrica o de tipo no espacial, puede ser entendida mediante un ejemplo sencillo que proporciona la teoria electomagnetica, pues si tiene un par de cargas eléctricas con signos opuestos, y se mide la fuerza que actúa entre ellas, el valor de esta fuerza va a resultar como una magnitud específica, ahora bien, en determinado momento se invierte la polaridad de dichas cargas y se mide nuevamente la fuerza, observando que el valor de la magnitud de la fuerza sigue siendo el mismo, es decir, este valor es invariante ante un cambio de polaridad de las cargas. (Gerard´t, 1980)

Dentro de la clasificación que tiene la simetría, aparte de las simetrías geométricas y no geométricas, están las simetrías globales y las simetrías locales, en donde la simetría global se refiere a una simetría que no involucra un cambio en la ubicación espacio tiempo, por ejemplo el grupo de transformaciones de la TRE de Einstein, más conocido como las transformaciones de Lorentz, ya que estas proponen que en todos los marcos inerciales la velocidad de la luz es una sola, por ende como se citó en (González & Santamaría, 2008) la simetría global afirma que “ciertas leyes de la física permanecen invariantes cuando se aplica una transformación en el mismo instante de tiempo en todo punto del espacio” (Gerard´t, 1980).

Ahora bien, cuando se habla de una simetría que involucra un cambio en la ubicación espacio tiempo, se refiere a una simetría local, por ejemplo la Teoría de la Relatividad General (TRG) tiene simetría local al sustentarse en transformaciones variables (en diferentes lugares u horarios de tiempo), es decir, cómo se citó en (González & Santamaría, 2008) “las leyes físicas deben mantener su validez aun cuando tenga lugar una transformación distinta en cada punto del espacio y del tiempo” (Gerard´t, 1980).

Un breve acercamiento a la teoría de grupos en el siglo XIX

El concepto de simetría entra a jugar un papel importante en ciencia al igual que el concepto de grupo, el cual hizo que la invariancia bajo un grupo específico de transformaciones no solo se aplicara a figuras geométricas o espaciales sino a objetos abstractos y a expresiones matemáticas (Brading & Castellani, 2003).

El concepto de grupo se desarrolló en principio en la teoría de ecuaciones algebraicas, donde trataban las operaciones de grupo como las permutaciones de las n raíces de una ecuación de grado n, estos formalismos se dieron para encontrar las raíces de ecuaciones de orden 2, 3 y 4 pero hubo problemas para hallar las raíces a ecuaciones de grado mayores o iguales a 5 (Problema de la quinta insoluble) (Acevedo, 2019). No fue sino hasta en 1831 que Evariste Galois propone el termino explícito de grupo al trabajar con soluciones por radicales de ecuaciones algebraicas de orden n para dar un carácter general al teorema de raíces de grado n, demostrando la imposibilidad de resolver ecuaciones algebraicas de grado mayores o iguales a cinco (Klein, 2006).

Ahora bien, en principio se pensó que un grupo era lo que comprendía operaciones univocas a, b, c tales que combinadas dos cualesquiera a y b por ejemplo, resultaba una operación c incluida en la combinación, con el transcurso de los años fue surgiendo una definición más precisa al dejar de hablar de un sistema de operaciones y pasar a hablar de un sistema de elementos a, b, c llamados los elementos de un grupo G que pueden ser combinados para formar un producto definido en G, con condiciones como la de ser cerrada, es decir, si a y b son cualquier par de elementos de G, entonces el producto de ab es también elemento de G, además debe ser asociativa, ósea que se puedan operar tres elementos sin ninguna ambigüedad $(ab)c = a(bc)$, también debe tener elemento neutro i tal que $ia = ai = a$ y por último debe haber un inverso tal que cumpla $aa^{-1} = a^{-1}a = i$. Además, si también es conmutativo el grupo seria un grupo abeliano.

Existen grupos de simetría que cumplen con estas mismas características, por ejemplo, las rotaciones con respecto al eje que pasa por el centro de un triangulo equilátero lo dejan invariante, en si esta rotación no forma un grupo, pero sí complementa el grupo de rotaciones (Acevedo, 2019). También pueden ser nombrados el grupo infinito contable, el grupo infinito, el grupo infinito no numerable, entre otros, pero es de destacar el grupo de simetrías de Lie con el cual se describen algunas simetrías en física[1].

Teniendo presente lo anterior, pensadores como Hermann Weyl y Eugene Wigner, a principios del siglo XX, comprendieron que la invariancia era el concepto clave en el entendimiento de nuevos fenómenos y en el desarrollo de teorías apropiadas, como lo es en este caso la simetría gauge, es tanto así que se logró observar en ese entonces que el conjunto de operaciones que involucran simetría formarían un grupo y este sería una herramienta matemática fundamental para tratar lo que concierne a invariancia y simetría (Rogan & Muñoz).

[1]Se pueden revisar los respectivos formalismos matemáticos en (Bermúdez, 2019)

Algunas consideraciones del cálculo vectorial.

A manera de historia, se tiene que la visión mecanicista congeniaba con los intereses y la visión de muchos científicos destacados del siglo XIX, por ejemplo, aunque Maxwell retoma los trabajos hechos por Faraday al ir por un camino no trivial entre los científicos que se inclinaban hacia los fenómenos eléctricos y magnéticos (dejando a un lado el pensamiento Newtoniano), Maxwell se dedica a la búsqueda de una base mecánica para sus modelos y la encuentra creyendo en la existencia del éter, es tanto así, que sustento su teoría electromagnética tomando esta sustancia como marco de referencia absoluto. (Rodríguez O. , 2014)

Una de las características más peculiares de la teoría electromagnética de Maxwell es la idea de campo, pues la idea matemática radica en que el campo es una cantidad física que toma un valor diferente en cada punto del espacio (Feynman & Leighton, Electromagnetismo y materia, 1998). Existen dos tipos de campo en matemáticas, uno escalar y otro vectorial, cuando se habla acerca de campo escalar hay que suponer que a cada punto del espacio de una región cualquiera le corresponde un número (escalar) o función escalar, mostrando la posición en cada punto de la región del espacio para luego representar una distribución en el mismo, de modo que pueda ser aprovechado (Tromba, Marsden, López, & Andrade, 1991). Por otro lado, cuando se habla de un campo vectorial, hay que suponer que a cada punto del espacio de una región cualquiera le corresponde un vector o una función vectorial de posición (Feynman & Leighton, Electromagnetismo y materia, 1998).

Considerando los campos, eléctrico ($\vec{E}$) y magnético ($\vec{B}$) como funciones matemáticas de la posición y del tiempo, es posible describir la variación de estos, tomando sus derivadas respecto al tiempo. Por otra parte, también se puede describir la variación de dichos campos respecto a la posición en una forma similar utilizando los operadores vectoriales como el gradiente, la divergencia, el rotacional y el laplaciano que involucran el uso del operador diferencial "Nabla (∇)":

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right) \tag{1}$$

También está la definición de divergencia como un escalar definido en cada punto del espacio, el significado de divergencia indica el flujo neto, como ejemplo en este caso, de un fluido por unidad de volumen y por unidad de tiempo, de tal forma que si la divergencia es positiva $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} > 0$, indica que hay una fuente de campo, por el contrario, si la divergencia es negativa $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} < 0$, hay un pozo o sumidero, o si la divergencia es igual a cero $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ indicaría que hay un flujo constante de líneas de campo, es decir, no hay ni fuentes ni sumideros, algo análogo se tiene en el caso de los campos magnéticos ante la ausencia de monopolos magnéticos (cargas magnéticas), su divergencia es cero. De igual forma se tiene que todo campo vectorial cuya divergencia sea cero, puede ser expresado como el rotacional de otro campo vectorial

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \tag{2}$$

La definición de rotacional $\vec{\nabla} \times \vec{A}$ indica la tendencia de un campo vectorial a inducir rotación alrededor de algún punto, si el rotacional de un campo vectorial cualquiera es diferente de cero $\vec{\nabla} \times \vec{A} \neq 0$ indicaría que el campo no es conservativo, por tanto, el rotacional de un campo vectorial no conservativo sería un nuevo campo vectorial, por el contrario si el rotacional de algún campo vectorial cualquiera es igual a cero $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ estaría indicando que dicho campo es irrotacional o conservativo, siendo expresado como el gradiente de una función escalar

$$\vec{E} = \vec{\nabla}\varphi \tag{3}$$

Por último y no menos importante, se tiene el operador vectorial llamado Laplaciano ∇^2 definido como:

$$\nabla^2\vec{A} = \nabla(\nabla\cdot\vec{A}) - \nabla\times(\nabla\times\vec{A}) \tag{4}$$

Dicho operador será de gran beneficio más adelante en relación con el potencial vectorial y el factor de ajuste.

Ciertos puntos convenientes de la teoría electromagnética

Las ecuaciones de Maxwell en el vacío se escriben como:

$$\nabla\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \text{[I]}$$

$$\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad \text{[II]}$$

$$\nabla\cdot\vec{B} = 0 \quad \text{[III]}$$

$$c^2\nabla\times\vec{B} = \frac{J}{\varepsilon_0} + \frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \quad \text{[IV]}$$

La primera ecuación [I] representa la igualdad entre la divergencia del campo eléctrico y la densidad de carga sobre ε_0, esta es válida en general ya que el flujo del campo eléctrico a través de cualquier superficie cerrada es proporcional a la carga que hay dentro, cuanto mayor es la densidad de carga, más fuerte es el campo. Con respecto a la ecuación [II] esta muestra cómo un campo magnético variable respecto al tiempo induce campo eléctrico. La ecuación [III] da razón de la no existencia de cargas magnéticas (mono polos magnéticos) mostrando que el flujo neto de campo magnético a través de cualquier superficie cerrada es igual a cero. En ultima instancia, la historia de la ecuación [IV] facilita observar que los trabajos de Oersted permitieron que Ampère formulara una ley que definía a las corrientes eléctricas como fuente fundamental del campo magnético (Gómez & Gonzáles, 2012). Sin embargo,

> Esta ley, solo era válida para corrientes estacionarias o continuas que generaban campos magnéticos constantes, pues, no era compatible con la ecuación de continuidad de la corriente eléctrica que obedecía el principio de conservación de la carga, es decir, la ley de Ampere presentaba inconvenientes al tratar con corrientes eléctricas variables en el tiempo (generadoras de campos magnéticos variables) (Vargas & Barrera, 2016).

Maxwell en la construcción de su teoría encuentra algo "nuevo y extraño", en particular, la ecuación para el campo magnético de corrientes estacionarias se conocía únicamente en la forma que proponía Ampere:

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{J}{\varepsilon_0} \tag{5}$$

Maxwell al observar que la "correspondencia entre los campos electicos y magnéticos era tal que la variación de uno implicaba la creación del otro" (Vargas & Barrera, 2016). Propuso evitarlo, agregando algo que denomino corriente de desplazamiento $\left(\frac{\partial E}{\partial t}\right)$ en el segundo término de la ecuación (5) obteniendo de esta manera la ecuación [IV] de su teoría electromagnética, consistente con la conservación de la carga eléctrica para campos dependientes del tiempo. (Feynman & Leighton, Las ecuaciones de Maxwell, 1998)

ANTECEDENTES

Los trabajos de grado y las investigaciones científicas que se toman como antecedentes a nivel nacional e internacional permiten observar de manera amplia la importancia de la simetría, las leyes de conservación, la historia de la simetría en la teoría electromagnética y la importancia de la investigación en la enseñanza de la física. En primera instancia está el trabajo hecho por Nelson González y Diana Santamaría en el año 2008 a nivel de pregrado de la Universidad Distrital Francisco José De Caldas y que lleva como título “INTRODUCCIÓN A LAS TEORÍAS GAUGE EN FÍSICA” se caracteriza por desarrollar detalladamente el concepto de simetría, hasta llegar al concepto de simetría gauge en la modernidad, en este sentido, permite forjar el camino que lleva el presente trabajo al mostrar de manera puntual algunos aspectos relevantes entorno a la simetría gauge y la urgencia de investigar con respecto al proceso que hizo surgir esta teoría.

Por otro lado, esta Carlos Camelo a nivel de pregrado de la Universidad Pedagógica Nacional (UPN), con su trabajo “SOBRE LA ESTRUCTURA NUCLEAR: EL MODELO DE YANG – MILLS COMO UNA EXPLICACIÓN A SU ESTABILIDAD” elaborado en el año 2018, en donde el trabajo contiene una estructura conceptual que permite ser apreciada desde una perspectiva formal y fenomenológica, desde el modelo de los pensadores Cheng Ning Yang y Robert Mills acerca de la simetría gauge, siendo considerando este trabajo fundamental, al notar en él, la demanda de una explicación del surgimiento de la simetría gauge, dado que en el contexto moderno (Cuántico), se vuelve fundamental, aunque no se logra ver una introducción comprensible a este tema en particular.

La respuesta que le da la TRE a la falta de simetría al electromagnetismo está muy bien explicada en el trabajo de Edwin Vargas y Edwin Barrera, del año 2016, a nivel de pregrado de la UPN y que es titulado “ANÁLISIS DE LA FALTA DE SIMETRÍA DEL ELECTROMAGNETISMO CLÁSICO Y SU SOLUCIÓN RELATIVISTA: TENSOR DE CAMPO ELECTROMAGNÉTICO.” En donde el potencial vectorial resulta ser un ente fundamental, aportando por un lado en la construcción del contexto histórico y, por otro lado, permitiendo comprender de una mejor forma la practicidad del potencial vectorial en la teoría electromagnética consistente con la TRE.

Un artículo de carácter internacional es el de Andrés Aceña escrito en el año 2017 en la Universidad Nacional de Cuyo, Argentina, y que tiene como título “La transición a la formulación covariante del electromagnetismo” en donde resalta que un curso de electromagnetismo debería ir de la mano con la explicación de la teoría de la relatividad, justificando de esta manera que estas dos teorías deberían ser aprovechadas de la mejor manera en el contexto de la enseñanza debido a que mediante la formulación covariante y la descripción del electromagnetismo en términos de potenciales, las ecuaciones toman formas mas sencillas y de interpretación más directa. De igual manera está el artículo de Pedro Walter Lamberti y Víctor Rubén Rodríguez hecho en el año 2019 en la universidad Nacional de córdoba, Argentina, y que lleva como título “Hermann Weyl y el gauge” en donde esbozan de manera general una aproximación conceptual a la noción de la idea gauge desde el punto de vista de Weyl, esto con el fin de contribuir entorno a la comprensión de sus alcances desde un contexto histórico.

Por último, se tiene a Luis Sánchez - Tejerina San José, con el trabajo a nivel de doctorado de la Universidad de Valladolid del año 2014 titulado “¿Qué es una Teoría Gauge?” en donde se revisa la idea gauge a partir del electromagnetismo, hasta la definición moderna, teoría de Yang – Mills, proporcionando al presente trabajo de grado una base fundamental en cuestión de análisis histórico y matemático.

CAPÍTULO 1

EL SURGIMIENTO DE LA SIMETRÍA GAUGE

Personajes influyentes en la física anterior al siglo XX como Kepler, Newton, Maxwell, entre otros, observaron principios de simetría y conservación en sus teorías físicas considerando que estos principios son consecuencia de las leyes de la naturaleza y dejando de lado la consideración de que estos podrían ser el resultado de la estructura misma en la cual las leyes de la naturaleza se formalizan (Gross, 1996).

Por ejemplo, la teoría electromagnética es una de las teorías en física con mejor fundamento teórico y experimental, esta teoría es explicada mediante la estructura matemática que formula Maxwell en el año 1865.

> Con la formulación de las ecuaciones de Maxwell para la electrodinámica, se dio el primer paso en el desarrollo de las teorías Gauge, donde dichas ecuaciones resultaron poseer una simetría que involucraba la libre elección de un potencial para la descripción de éstas. Esta cualidad de las leyes de Maxwell no fue comprendida sino años más tarde, cuando se interpretó que esta libertad de elección era en sí misma una transformación gauge. (González & Santamaría, 2008)

Esta transformación gauge no fue descrita si no hasta 1918, por Hermann Weyl, al observar una estructura matemática que era similar a la estructura de la TRG y que podía reescribir con esta a la teoría electromagnética.

1.1 A manera de historia

A principios del siglo XIX, el estudio de lo eléctrico y lo magnético estaba totalmente separado, aunque había evidencia de algunos fenómenos producidos por la electricidad en movimiento a los cuales no se les daba aun una respectiva explicación “Se estaba labrando un nuevo campo de investigación en torno a la electricidad en movimiento […] la electricidad y el magnetismo tenían más cosas en común de lo que se había pensado” (AVILA, 2013).

En 1820 Christian Oersted se da cuenta de la existencia de una relación, entre el campo eléctrico ($\vec{E}$) y el campo magnético ($\vec{B}$), afirmando a que no respondían a dinámicas independientes, es decir, los fenómenos eléctricos pueden producir fenómenos magnéticos (Riaño, 2019). Andre Marie Ampère retoma los experimentos hechos por Oersted, conduciéndolo a afirmar que “el magnetismo se puede explicar como un conjunto de corrientes eléctricas dentro de la materia cuyos efectos son los de producir el magnetismo en esta” (AVILA, 2013). Ampère formaliza su teoría electromagnética, y propone que la relación matemática que caracteriza la dependencia entre corriente y campo magnético está ligada con la ley de Biot y Savart. “Escogiéndose por su dependencia explícita de la distancia y no del tiempo” (Riaño, 2019). Proponiendo de esta manera Ampère la expresión para el campo magnético como:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \tag{1.1.1}$$

y, por tanto, la expresión de la divergencia del campo magnético:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \tag{1.1.2}$$

Estas ecuaciones de Ampère fueron aceptadas en el siglo XIX, pues en muchos casos, no en todos, se acomodaban a los resultados experimentales de manera muy eficiente “aunque su teoría estaba llena de limitaciones y dificultades, fue digna de admiración por parte de los pensadores de la época, y en especial Faraday” (AVILA, 2013).

Los experimentos hechos por Oersted hicieron que Faraday, cerca del año de 1821, pensara alrededor de fluidos eléctricos y tomara el concepto de corriente como un estado no habitual de la materia, en el que los objetos conductores se encuentran al interactuar con el polo de un imán.

Por otro lado, el trabajo de Faraday al ser puramente experimental, lo llevó a mostrar que las ecuaciones propuestas por Ampère (1.1.1) y (1.1.2) en su teoría electromagnética, no eran apropiadas para describir las dinámicas de los campos eléctrico y magnético, ya que los resultados teóricos difieren bastante de los resultados experimentales.

Faraday se desligó del pensamiento común entre los científicos de esa época, con respecto a la naturaleza de la corriente, orientando su trabajo a la creación de experimentos que permitieran obtener efectos eléctricos por medio del magnetismo, notando que la obtención de corriente mediante el magnetismo (de manera estática) no permanecía constante en el tiempo, variaba. Esta situación le generó gran inquietud, tal fue, que lo llevó a pensar en que la obtención de corriente no permanecía ya que, la presencia de un objeto magnetizado (Imán), afectaba el estado natural del material con el que se estuviera trabajando (Alambre) (AVILA, 2013). Faraday lo denominó estado Electro-tónico en respuesta a las dinámicas del campo magnético y su relación con la corriente (Riaño, 2019).

Sin embargo, el principal problema que tenía Faraday con respecto al estado Electro-tónico consistía en que no se podría dar cuenta de alguna manifestación o efecto que permitiera evidenciarlo, por lo que no pudo ser aceptado en el sentido en el que no se podía sustentar su veracidad.

Faraday sigue con la creación de experimentos que permitieren darle sustentabilidad y propone líneas de fuerza.

> Faraday desarrolló la idea de líneas de fuerza, concepto en oposición a la acción a distancia, pues, no concebía que las interacciones físicas entre los cuerpos se dieran de manera instantánea sin algo que los conectara, de esta manera, supuso que las líneas de fuerza rodeaban el conductor por el cual pasaba la corriente y en conjunto,

daban cuenta de un campo que permitía la interacción entre cuerpos eléctricos y magnéticos. De esa manera Faraday le asocio un campo eléctrico a la interacción entre cuerpos eléctricos y un campo magnético a la interacción entre objetos magnéticos, o cuerpos que exhibían propiedades magnéticas (Vargas & Barrera, 2016).

Faraday se da cuenta que el movimiento constante de un imán hacia delante y hacia atrás en el interior de una bobina produce una corriente y dependiendo del sentido del movimiento del imán, la aguja del galvanómetro, o medidor de corriente, mostraba que la magnitud de corriente variaba, con esta situación, Faraday se da cuenta que la corriente facilitaba el movimiento en un sentido o en el otro dependiendo del rumbo en el cual el imán se moviera, además, la rapidez con la que el imán se moviese influía en la magnitud de intensidad de corriente siendo mayor o menor respecto a la rapidez con la que fuese movido el imán (Vargas & Barrera, 2016). Ver figura 2.

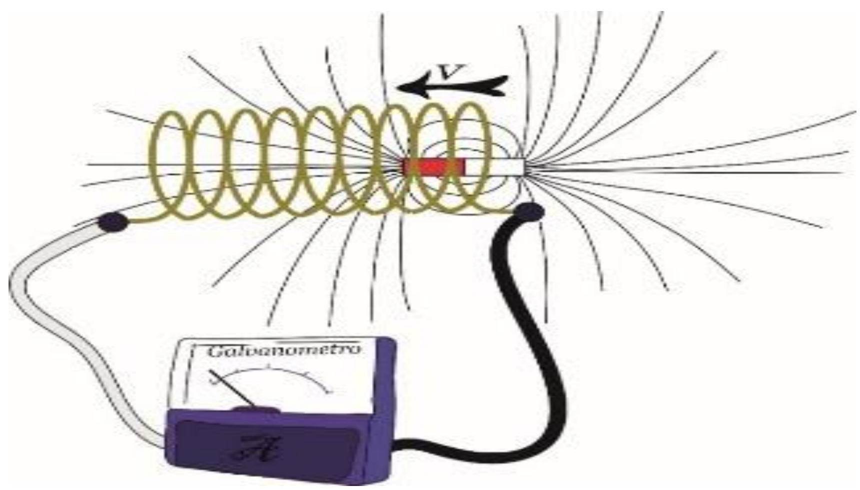

Figura 2. Representación del movimiento de un imán dentro de una espira - Ley de inducción de Faraday. (Dreamstime, 2000-2020)

Faraday falla de nuevo con la teoría de líneas de fuerza debido a que sigue sin poder dar cuenta o evidencia de la existencia de dicho estado, sin embargo, las ideas de Faraday marcaron significativamente el pensamiento de Maxwell, puesto que él, estaba dándose a la tarea de encontrar una teoría unificada de los fenómenos eléctricos y los fenómenos magnéticos.

Maxwell retoma los trabajos de Faraday, ya que encuentra interesante la mirada alternativa alrededor de este estado (dejando a un lado el pensamiento Newtoniano) y resulta proponiendo "una relación entre éste, el campo magnético y el campo eléctrico, dotando al estado Electro-tónico de una gran importancia, ya que a través de este estado se determinan y sustentan los campos" (AVILA, 2013). En este sentido, Maxwell propone el estado electro tónico, no como un estado de la materia como lo proponía Faraday, si no como un estado del cual está dotado el medio en el cual están presentes los campos eléctrico y magnético, es decir, Maxwell detalladamente hace una revisión del sentido físico del estado Electro-tónico, al igual que su respectiva formulación matemática, pero es cuando publica su tratado de electricidad y magnetismo que pasa algo peculiar, pues él deja de nombrar el estado electro tónico e inicia a nombrar el Potencial vectorial habiendo evidencias de que es la misma entidad[2]y es aquí en donde no nombra sus propias consideraciones acerca del estado Electro-tónico proponiendo de esta manera el potencial vectorial como una relación netamente matemática.

Por otro lado, Maxwell se da cuenta que las ecuaciones que proponía Ampère (1.1.1) y (1.1.2), no guardaban una dependencia explícita o implícita del tiempo, dado que él se encuentra con una inconsistencia en la alteración que produce tener campos eléctricos y magnéticos dependientes del tiempo, modifica la ecuación de divergencia del campo magnético ($\vec{B}$) y junto con otras consideraciones, propone un conjunto de expresiones que fundamentan su teoría electromagnética, en este mismo sentido, introduce la idea de potencial vectorial, siendo esta la formalización matemática del estado Electro-tónico (Riaño, 2019).

[2] Ver (AVILA, 2013)

1.2. La teoría electromagnética y su aparente falta de simetría

Carl Sagan en su libro "El mundo y sus demonios", comenta que Maxwell tenía una intuición de simetría cuando estaba construyendo su teoría electromagnética.

> La intuición de Maxwell mantuvo la simetría entre los campos magnéticos y eléctricos. Incluso en un vacío, con ausencia total de electricidad y hasta de materia […] las ecuaciones iban a representar a la naturaleza, y Maxwell creía que la naturaleza era bella y elegante (Sagan, 2000)

La teoría electromagnética fue un éxito total por unas décadas, ya que tenía un sustento fuerte en experimentos que corroboraban la teoría, sin embargo, con el transcurso del tiempo los científicos de finales del siglo XIX se percataron de que en algunos aspectos la teoría fallaba, puntualmente se fijaron en que la teoría electromagnética de Maxwell no cumplía con el principio de relatividad Galileano.

Por ejemplo, el profesor Fabio Vélez (Vélez, 2016) comenta que uno de estos problemas radica en el siguiente experimento mental:

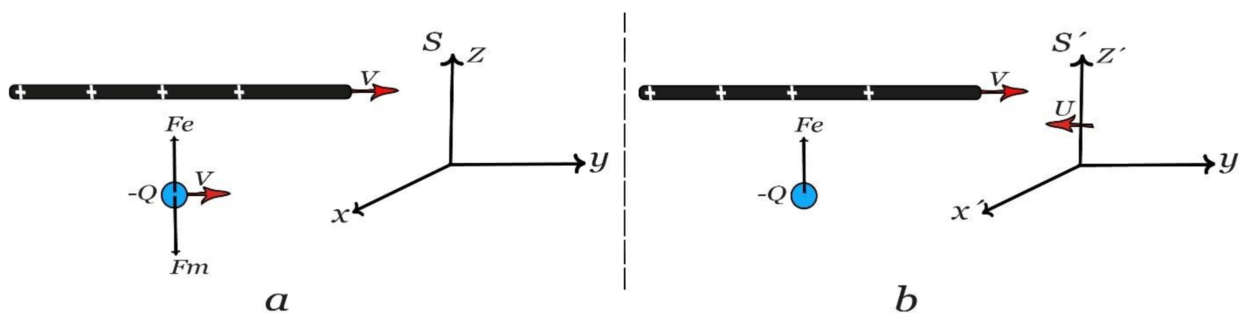

Figura 3. Experimento mental – Aparente falta de simetría en la teoría electromagnética.[3] (Vélez, 2016)

[3] En el caso a de la figura, se tiene una configuración en la cual el sistema se compone de una barra (cargada positivamente) y una esfera (cargada negativamente), este sistema se mueve con velocidad V, acercándose al observador S. En el caso b de la figura, se muestra la misma configuración del sistema barra-esfera, con la única diferencia de que este sistema está en reposo respecto al observador S, y es este observador el que se mueve hacia el sistema barra-esfera (Vélez, 2016)

Suponga la configuración de la figura 3, en el caso a aparecen dos fuerzas opuestas sobre una esfera, fuerza magnética y la fuerza eléctrica (Figura 3, Parte a). Por el contrario, en el caso b (Figura 3, Parte b), solo se muestra fuerza eléctrica, por ende, este experimento mental hace pensar en torno a que, si el principio de relatividad Galileano se aplicara a los fenómenos magnéticos no debería haber diferencia entre el movimiento de la carga respecto al observador y el movimiento del observador respecto a la carga.

De acuerdo con esta reflexión aparentemente existe falta de simetría en la teoría electromagnética, y aunque se trató de dar una explicación desde los movimientos aparentes y reales, esta definición no resulto ser satisfactoria[4].

Teniendo en cuenta el ejemplo anterior y las teorías físicas anteriores a la teoría electromagnética puntualmente la mecánica de Newton, que cumplía con el principio de relatividad Galileano, se pudo proponer tres posibles escenarios para dar respuesta a estos problemas en el electromagnetismo.

Según Vargas & Barrera los tres escenarios que se pensaron en esa época fueron,

> La teoría electromagnética de Maxwell resultaba estar errada; Se debía reafirmar o poner en duda la existencia de un sistema de referencia privilegiado sobre el cual realizar todas las mediciones de los demás sistemas de referencia; Las transformaciones de Galileo no eran las correctas (Vargas & Barrera, 2016).

Los físicos de este entonces descartaron los primeros dos presupuestos y se quedaron con que “Las transformaciones de Galileo no eran las correctas*”*, por ende, solo habían dos opciones, se podían modificar las ecuaciones de Maxwell para que fuesen covariantes con respecto a las ecuaciones de Galileo o se podían reemplazar las ecuaciones de Galileo por otro sistema de

---

[4] Revisar (Vélez, 2016)

ecuaciones en donde la velocidad de la luz sea la misma en todos los marcos inerciales y que estas ecuaciones cumplieran con ser covariantes con respecto a las ecuaciones de Galileo.

Albert Einstein opto por la segunda opción (Vélez, 2016).

1.3 La Teoría de la Relatividad Especial y la falta de simetría en el electromagnetismo de Maxwell

Científicos como Lorentz y Poincaré estaban preocupados ya que la física aparentemente terminada de finales de siglo XIX estaba tambaleando, en este sentido, llega Albert Einstein que, a la edad de 26 años publica en el año 1905 un artículo denominado "Zur Elektrodynamik Bewegter Korperr" o traducido al español "Sobre la electrodinámica de los cuerpos en movimiento", esta publicación partiría en dos la historia de la física al proponer el principio de relatividad, sustentando que las leyes fundamentales de la física deben tener la misma forma en todos los marcos inerciales, al igual que las señales lumínicas se deben propagar en el vacío rectilíneamente con la misma velocidad en todo tiempo, en todas las direcciones, en todos los marcos inerciales.

La constancia de la velocidad de la luz marco un hito histórico, por un lado le dio solución a varios problemas que había en la física de ese entonces, con respecto a la cinemática y a la dinámica de los cuerpos en movimiento, y por otro lado, contradijo radicalmente el principio de adición de velocidades de Galileo que rigió durante más de cuatro siglos; la falta de covariación de las leyes electromagnéticas se había solucionado al reemplazar las ecuaciones de transformación de galileo de manera que la velocidad de la luz fuese la misma para todos los marcos inerciales (Vélez, 2016). Dejando totalmente por fuera, la teoría del éter.

Una de las consecuencias de esta teoría propuesta por Albert Einstein, fue la explicación a las fallas que presentaba la teoría electromagnética, a manera de ejemplo logra explicar el problema presentado en la sección 1.2 afirmando que da exactamente igual que el sistema barra- esfera se mueva hacia el observador o que el observador se mueva hacia el sistema, ya que la carga en los dos escenarios experimenta una fuerza de igual magnitud. (Vélez, 2016) Ver (Figura 4, Parte a y b).

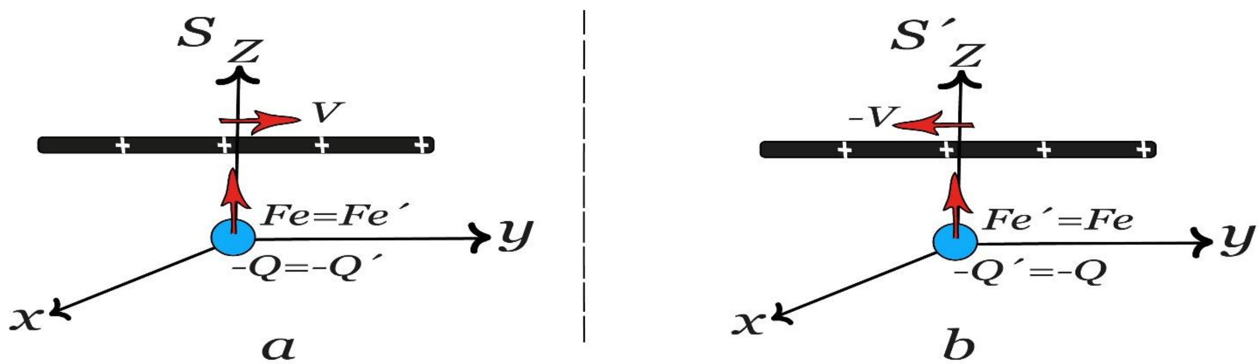

Figura 4. Solución por parte de la TRE a la falta de simetría de la teoría electromagnética - experimento mental. (Vélez, 2016)

Dando explicación a la falta de invariancia en la teoría electromagnética[5].

Por otro lado, Einstein al publicar su artículo en 1905 inicia a abordar preguntas como ¿Es concebible que el principio de relatividad sea válido también para sistemas acelerados entre sí? dejando el principio de relatividad de los movimientos uniformes a un lado, entra en el problema de los movimientos acelerados, pensando en lo que resultaría en el año de 1915 como la Teoría de la Relatividad General (TRG). (Uribe Veléz, 2018)

[5] La fuerza eléctrica que aparece actuando sobre la esfera, no presenta problema ya que no hay distinción entre el caso anterior (clásico) y este (relativista), pues en ambas situaciones aparece esta fuerza, caso a y caso b, con respecto a la fuerza magnética. "A pesar del supuesto movimiento absoluto, no se detecta ninguna fuerza magnética, por la simple razón de que, a pesar de ser arrastrados por la Tierra el observador y el sistema barra-esfera están en reposo relativo." (Vélez, 2016). El análisis formal de la falta de simetría del electromagnetismo se encuentra en (Vargas & Barrera, 2016)

1.4 El papel de la Teoría de la Relatividad General en el origen de la simetría gauge.

Einstein estudio los trabajos hechos por el matemático Bernhard Riemann en donde le llamo la atención un concepto en particular, el concepto de métrica, Riemann decía que la métrica debía ser apreciada como algo físicamente considerable ya que era una propiedad intrínseca del espacio y de la materia, junto con esta idea, Einstein termina construyendo la TRG al complementar el concepto afirmando que, los fenómenos de la gravitación se atribuyen a la métrica de Riemann ya que, las leyes a través de las cuales interactúan las métricas son las leyes de la gravitación (O´raifeartaigh, 1997).

La TRG propone la existencia de un principio llamado principio de equivalencia, este principio consiste en que los experimentos que son hechos en un laboratorio que cae libremente en un campo gravitacional, tienen resultados indistinguibles de los resultados de los mismos experimentos en un marco inercial en el espacio vacío (Uribe Veléz, 2018). Como característica se tiene que, en un campo gravitacional real no se produciría la misma aceleración en cada punto del espacio, pues para que fuera una misma aceleración se tendría que escoger un marco de referencia dentro de una región infinitamente pequeña en donde el campo gravitacional pueda considerarse uniforme.[6]

Esta situación crea un problema fundamental, por ejemplo, si varias personas caen en muchos ascensores, una persona por ascensor, y notan que junto a ellas hay una partícula aparentemente en reposo, y cada una de las personas quiere hacer una medición para poder determinar la

[6] Una diferencia esencial entre la TRE y la TRG, es que un marco de referencia solo puede definirse "localmente" o en un solo punto en un campo gravitacional. (Moriyasu, 1983)

trayectoria de la partícula que lo acompaña en el ascensor ¿Se podrían relacionar las mediciones individuales entre sí? ¿Una transformación de Lorenz entre los ascensores serviría?

En respuesta está que, si los diferentes elevadores estuvieran relacionados solo por una transformación de Lorentz, la aceleración tendría que ser independiente de la posición y el campo gravitacional no podría disminuir con la distancia desde la fuente (Moriyasu, 1983).

Einstein resolvió el problema de relacionar los marcos de caída cercanos, definiendo una nueva relación matemática conocida como conexión[7], por ejemplo, cuando se hacen transformaciones curvilíneas en lugar de transformaciones lineales, aparecen unos coeficientes que se denominan componentes de una conexión o en los textos de TRG aparecen como símbolos de Christoffel. (Moriyasu, 1983)

Hermann Weyl observando la TRG pensó en que si los efectos de un campo gravitacional pueden describirse mediante una conexión ¿podrían otras fuerzas de la naturaleza como el electromagnetismo también estar asociadas con conexiones similares?

1.5 La idea de Hermann Weyl

Para el año 1918 Einstein ya había publicado su TRE y su TRG en donde las dos teorías comparten un par de ideas fundamentales

1. No hay marcos de referencia absolutos en el universo, pues el movimiento físico de cualquier sistema debe describirse en relación con un marco de coordenadas especificado por un observador.
2. Las leyes de la física deben ser las mismas independientemente de la elección del marco de referencia que se tome.

[7] Ver (Moriyasu, 1983)

La formulación de estas teorías jugó un papel clave en el desarrollo de la simetría gauge, puntualmente la TRG, pues se puede afirmar que el trabajo de Weyl es una consecuencia directa del trabajo de Einstein (Brading & Castellani, 2003).

El punto de partida de Hermann Weyl no estaba centrado en la unificación de las fuerzas fundamentales de la naturaleza, la unificación fue fortuita, es decir, inesperadamente resulto de un problema percibido en la geometría de Riemann que giraba en torno al concepto de transferencia paralela infinitesimal de un vector, *"El transporte paralelo de vectores en general, no era trivial debido a la curvatura del espacio tiempo"* (Brading & Castellani, 2003).

Weyl hace el intento de solucionar esta inconsistencia metodológica al crear una geometría infinitesimal,[8] permitiendo un cambio de escala en una unidad local de longitud (recalibrar la métrica en cada punto del espacio tiempo) (Brading & Castellani, 2003). Esta geometría al admitir estos cambios de escala describió no solo la TRG si no también la teoría electromagnética, trayendo como consecuencia por un lado que las ecuaciones de Maxwell fuesen invariantes ante una transformación gauge y por otro lado que todas las medidas físicas son relativas, dependiendo de su ubicación espacio tiempo.

El problema de Weyl radicaba en que la transferencia paralela de un vector es en general no integrable (O´raifeartaigh, 1997). Es decir, en la geometría de Riemann la conexión de Christoffel garantiza la conservación de la longitud de un vector ante un desplazamiento, sin embargo, la orientación de este es dependiente del camino (Walter & Rubén, 2019)

Al igual que cita Walter & Rubén (2019)

> "La idea para mi teoría de campo unificada de la gravitación y el electromagnetismo basada en el principio de la invariancia gauge apareció en una conversación con Willy

[8] Esta teoría era acorde a la prohibición de acción a distancia que es el sello distintivo de las teorías de campo. (Rodriguez, 2008)

> Scherrer, entonces un joven estudiante de matemáticas. Le había explicado que los vectores cuando son llevados alrededor por desplazamiento paralelo pueden retornar a su punto de partida en dirección cambiada. Y él me preguntó "¿También con longitud cambiada?". Por supuesto que le di la respuesta ortodoxa en ese momento, pero en mi pecho roía la duda" (Weyl, 2009c, p. 168).

Weyl afirmaba que el valor del módulo (longitud) de un vector sometido a un transporte paralelo dependía del camino que se tomara en tal transporte, de manera que para describir un espacio que tomase en cuenta tal propiedad era necesario introducir un nuevo conjunto de funciones que fuesen arbitrarias, positivas y suaves de la posición, esta situación conduce a Weyl a separar el concepto de desplazamiento paralelo de la métrica $g_{\mu\nu}$ e introducir su noción de conexión afín, considerando que para dos puntos infinitesimalmente próximos, la longitud debía recalibrarse en una transferencia infinitesimal de vectores (Walter & Rubén, 2019).

A demás, una verdadera geometría infinitesimal, según Weyl, debía reconocer solo un principio para transferir la magnitud y dirección de un vector a un punto infinitamente cercano y distante (O´raifeartaigh, 1997).

Con la intención de solucionar el problema antes mencionado, Weyl propone una sustitución de ajuste de la métrica $g_{\mu\nu}(x) \rightarrow e^{\oint A_\mu dx^\mu} g_{\mu\nu}(x)$ añadiendo un factor de escala gravitacional. Este ajuste lleva el nombre de transformación gauge y el significado intrínseco de esta transformación radica en que, si un sistema físico es invariante con respecto a algún grupo global de transformaciones continuas, entonces este sistema, debe seguir siendo invariante cuando ese grupo de transformación se considera local (Walter & Rubén, 2019).

En otras palabras, la idea gauge propone que para cada clase de fenómenos fundamentales habrá una ley que contenga un ente de ajuste en donde este podrá ser descrito mediante un grupo conveniente G, particularmente trayendo a colación la teoría electromagnética de Maxwell se tiene que las leyes clásicas del electromagnetismo son una teoría gauge cuyo grupo de invariancia son las funciones escalares que tienen gradiente, es decir, el conjunto de estas funciones que dejan invariantes en este caso a los campos magnético y eléctrico, es a lo que se le llama grupo de simetría que se hará evidente más adelante con la función escalar de ajuste (χ), no obstante, al igual que con la teoría electromagnética, al añadir dicho factor de escala Weyl admitió la invariancia de las coordenadas de la TRG ya que en la geometría de Riemann la métrica se fija hasta un factor de escala global y él al proponer esta sustitución, hace de esa escala una propiedad local de la métrica, siendo esta la primera aplicación deliberada de la simetría gauge. (Walter & Rubén, 2019)

1.6 El potencial vectorial como sustento clave para la idea gauge.

De manera general y sin ánimos de profundizar en la geometría de Weyl, la simetría gauge consiste en agregar un factor de ajuste a una transformación infinitesimal de un vector transportado paralelamente.[9]

Este factor de ajuste que Weyl nota en su geometría infinitesimal $e^{\oint A_\mu dx^\mu}$ permite observar que el cuadripotencial A_μ podría ser de gran utilidad, al querer justificar y sustentar su teoría.

Con respecto a la teoría electromagnética de Maxwell, puntualmente con respecto al campo electromagnético, Weyl observa que este es un ente tal que si se reajusta un término cualquiera se debe esperar modificaciones en los demás, es así que los valores permitidos del campo electromagnético forman un ente de cuatro dimensiones denominado cuadripotencial magnético, en donde este concepto viene del planteamiento matemático del potencial vectorial propuesto por Maxwell (Rodriguez, 2008).

[9] Ver (Weyl, The continuum , 1987)

Weyl procuró ver en el potencial vectorial junto a una función escalar de ajuste (χ), el sustento más fuerte de su teoría, confirmando que el potencial vectorial ante una transformación gauge era perfectamente compatible con la teoría electromagnética al dejar los campos eléctricos y magnéticos sin cambios.

CAPÍTULO 2

EL POTENCIAL VECTORIAL Y EL FACTOR DE AJUSTE

Hermann Weyl al crear su geometría infinitesimal en respuesta al problema del transporte paralelo infinitesimal de la geometría de Riemann y al considerar el factor de ajuste, creyó describir no solamente la gravedad sino también la teoría electromagnética, observando que el potencial vectorial junto al término de ajuste resultaba conveniente a la hora de permitirse reescribir la teoría electromagnética en términos de su estructura matemática con el fin de dar un sustento valido a su teoría.

2.1 El potencial vectorial y las ecuaciones sin salida

El rotacional del campo eléctrico ($\vec{E}$) en el caso electrostático indica que este es un campo conservativo, es decir que es igual a cero, por ende su divergencia es diferente de cero, por lo tanto el campo eléctrico puede ser expresado en términos de un potencial escalar φ, de igual manera con respecto al campo magnético, este presenta una divergencia igual a cero debido a la no existencia de monopolos magnéticos, por ende su rotacional es diferente de cero, es decir, el campo magnético no puede ser expresado en términos de un potencial escalar, pero si en términos de otro campo vectorial denominado potencial vectorial ($\vec{A}$).

Obteniendo de esta manera las relaciones

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \tag{2.1.1}$$

$$\vec{E} = -\nabla\varphi \tag{2.1.2}$$

Siendo la expresión (2.1.1) la formalización matemática del potencial vectorial y la expresión (2.1.2) el campo eléctrico escrito en términos del potencial escalar.

Resulta conveniente introducir el potencial vectorial y el potencial escalar a las ecuaciones de Maxwell con la intención de obtener un número menor de ecuaciones que satisfagan estas ecuaciones de forma idéntica.

Primero que todo, se recurre a la segunda ecuación de Maxwell que describe el campo eléctrico

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad [II]$$

De esta manera si se tiene presente la definición del campo magnético (2.1.1) se podría reescribir la ecuación del campo eléctrico como:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial (\nabla \times \vec{A})}{\partial t} \qquad (2.1.3)$$

Observando de esta manera que esta expresión conduce a derivar con respecto al tiempo y ahí sí con respecto al espacio, de modo que:

$$\nabla \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = 0 \qquad (2.1.4)$$

Recordando que el rotacional del campo eléctrico es cero ($\nabla \times \vec{E} = 0$) puesto que las variaciones del campo eléctrico con el tiempo son cero, entonces el campo eléctrico puede ser expresado como el gradiente de una función escalar (2.1.2) de tal manera que se puede expresar como:

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla \varphi \qquad (2.1.5)$$

En donde esta expresión significa que la definición de campo eléctrico puede estar descrita en términos de los potenciales escalar y vectorial:

$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \tag{2.1.6}$$

Ahora bien, la definición de campo eléctrico (2.1.6) junto con la definición del campo magnético (2.1.1) satisfacen de manera idéntica las ecuaciones de Maxwell correspondientes al campo eléctrico [I] y al campo magnético [IV].

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{I}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{\vec{J}}{\varepsilon_0} + \frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \tag{IV}$$

Reescribiendo la definición de los campos [I] y [IV] en términos del campo eléctrico (2.1.6) y del campo magnético (2.1.1), se obtienen dos ecuaciones diferenciales de segundo orden que satisfacen a las ecuaciones de Maxwell de manera idéntica.

$$\nabla^2\varphi + \frac{\partial(\nabla \cdot \vec{A})}{\partial t} = -4\pi\rho \tag{2.1.7}$$

$$\nabla^2\vec{A} - \frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} - \nabla\left(\nabla \cdot \vec{A} + \frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) = -4\pi\vec{J} \tag{2.1.8}$$

De esta manera se reduce el conjunto de cuatro ecuaciones de Maxwell a dos ecuaciones acopladas, covariantes y por ende consistentes con la TRE.

Gracias a la simetría gauge, puntualmente a la simetría del potencial vectorial junto a su término de ajuste, se puede salir de este callejón sin salida. (Neuenschwander, 2011)

2.2 Lo que concierne a la función escalar de ajuste

Teniendo en cuenta la propiedad que dice que el rotacional de un gradiente de una función escalar es cero

$$\nabla \times \nabla\chi = 0 \tag{2.2.1}$$

Entonces teniendo en cuenta la ecuación 2.1.1 para cualquier función escalar χ existe un numero infinito de potenciales vectoriales tal que:

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\chi \tag{2.2.2}$$

Debido a:

$$\nabla \times \vec{A} = \nabla \times \vec{A} + \nabla \times \nabla\chi = \nabla \times \left(\vec{A} + \nabla\chi\right) = \nabla \times \vec{A}' = \vec{B} \tag{2.2.3}$$

Es decir, se tiene que un potencial vectorial $\vec{A}$ conducirá al campo magnético $\vec{B}$ para alguna situación en particular, pero al mismo tiempo, habrá otro campo vectorial $\vec{A}'$ que guiara al mismo campo magnético $\vec{B}$.

Es decir, los potenciales vectoriales $\vec{A}$ y $\vec{A}'$ deben estar definidos como

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}' = \nabla \times \vec{A} \tag{2.2.4}$$

Por tanto, la diferencia entre ellos seria nula

$$\nabla \times \vec{A}' - \nabla \times \vec{A} = \nabla \times \left(\vec{A}' - \vec{A}\right) = 0 \tag{2.2.5}$$

Es en este apartado donde entra a jugar un papel importante y transcendental la función de ajuste χ, ya que el potencial vectorial primado $\vec{A}'$ será un potencial igualmente satisfactorio que conduce al mismo campo magnético $\vec{B}$ que el potencial no primado $\vec{A}$.

Este es un detalle “trivial” que sorpresivamente se ha tornado una piedra angular de la física moderna (Rodriguez, 2008). Pues este detalle es el que permite que la estructura matemática creada por Hermann Weyl (Simetría gauge) se sustente al reescribir el electromagnetismo admitiendo esta libertad en la elección de los potenciales, siendo este detalle la practicidad y el elemento más básico de la idea gauge.

2.3 La función escalar de ajuste y el electromagnetismo

A manera de síntesis, la idea entonces seria buscar una generalización del formalismo de Maxwell consistente con la TRE no en términos de campos, si no en términos de potenciales, en este caso particular con las ecuaciones (2.1.7) y (2.1.8) teniendo presente la libertad que brindan dichos potenciales, escalar y vectorial.

Se puede tomar provecho de la libertad del factor de ajuste al notar que las ecuaciones (2.1.7) y (2.1.8) se expresan a través de sus derivadas, pues de manera explícita se puede tomar partido desde el hecho elemental de que una función $f(x)$ y otra función $f(x)+c$, en donde c es una constante, tienen la misma derivada, es decir, la idea gauge en esta situación se extiende a los potenciales debido a que hay una cierta libertad en la elección del valor de la constante.

Ahora bien, ya se ha dicho que la libertad que brinda el potencial vectorial deja sin cambio alguno al campo magnético, es decir, no se modifica mediante una transformación o lo que es igual no es alterado, pero si se supone un par de potenciales $\{\varphi, \vec{A}\}$ y $\{\varphi', \vec{A}'\}$ que corresponden a los campos eléctrico y magnético respectivamente, no diferirían en nada, puesto que el par primado conduciría a los mismos campos que el par de potenciales no primados, es decir estos deben ser iguales para cualquier función escalar (χ).

Se logra agregar el gradiente de la función escalar de ajuste $(\nabla\chi)$ al potencial vectorial $(\vec{A})$, siempre y cuando se reste simultáneamente la derivada con respecto al tiempo de dicha función escalar de ajuste $\left(\frac{\partial\chi}{\partial t}\right)$ al potencial escalar.

Quedando el potencial escalar como:

$$\varphi' = \varphi - \frac{\partial\chi}{\partial t} \tag{2.3.1}$$

Expresando el hecho de que un cambio local en el potencial escalar φ, se compensa por un cambio local en el potencial vectorial $\vec{A}$, de tal manera que las ecuaciones de Maxwell quedan invariantes, ante una transformación gauge (Rodríguez E. , 2006).

Retomando las ecuaciones (2.1.7) y (2.1.8) se logra el desacoplamiento de estas explotando la libertad que implica las definiciones (2.2.2) y (2.3.1) al proporcionar una variedad infinita de potenciales $(\varphi', \vec{A}')$ que conducen a los mismos campos eléctrico y magnético, en este orden de ideas se eligen un conjunto de potenciales $(\varphi, \vec{A})$ que estén relacionados entre sí y que conducen a obtener la condición del gauge de Lorentz.

$$\nabla \cdot A + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \tag{2.3.2}$$

Al hacer una transformación gauge a los potenciales $(\varphi', \vec{A}')$ con la intención de satisfacer el gauge de Lorentz, se obtiene:

$$\nabla \cdot A' + \frac{\partial \varphi'}{\partial t} = 0 = \nabla \cdot A + \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \nabla^2 \chi - \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} \tag{2.3.3}$$

Por tanto, siempre que se pueda encontrar una función escalar de ajuste (χ) se puede encontrar un tipo de restricción que limite los potenciales, proponiendo una función conveniente que en este caso toma la forma:

$$-\left(\nabla \cdot A + \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) = \nabla^2 \chi - \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} \tag{2.3.4}$$

La función conveniente (2.3.4) satisface las ecuaciones (2.1.7) y (2.1.8) permitiendo el desacoplamiento de dichas ecuaciones, obteniendo un par de ecuaciones de onda inhomogéneas, una para el potencial escalar φ y otra para el potencial vectorial $\vec{A}$ equivalentes en todos los aspectos a las ecuaciones de Maxwell y que satisfacen de igual manera la TRE.

$$\nabla^2 A - \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -4\pi\vec{J} \tag{2.3.4}$$

$$\nabla^2 \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi\rho \tag{2.3.5}$$

Evidenciando de esta manera una practicidad elemental del término de ajuste que se presenta en este caso particular como una función escalar (χ).

Siendo este el sustento más fuerte de la idea elemental de la simetría gauge.

2.4 El cuadripotencial y la formulación covariante

En el año de 1918 pasaron dos grandes acontecimientos que marcaron la historia de la física, por un lado, Weyl realiza el primer intento de derivar la conservación de la carga eléctrica mediante su estructura matemática llamada simetría gauge, y, por otro lado, a manera de comentario, Emmy Noether, publica un manuscrito en el cual habla acerca de la conexión entre simetrías y cantidades conservadas, provocando una profunda comprensión de las leyes como principios de conservación de energía (Byers, 1998).

La mayoría de los campos evolucionan según ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden, la teoría electromagnética no es indiferente (Neuenschwander, 2011). En respuesta a esto, dichos campos muestran leyes de conservación descritos mediante lo hecho por Emmy Noether, conduciendo entonces a formular la teoría electromagnética de forma covariante.

Sin ser este el propósito del trabajo es conveniente comentar que la teoría electromagnética escrita de forma covariante, recurriendo a los potenciales escalar y vectorial en lugar de los campos eléctrico y magnético, hace esta teoría consistente con la TRE permitiendo que las ecuaciones tomen formas más sencillas de entendimiento y su interpretación sea más directa (Aceña, 2017).

Los potenciales $(\varphi, \vec{A})$ pueden ser reunidos en un cuadripotencial espacio tiempo, descrito como:

$$A_\mu = (\varphi, \vec{A}) = (A_0, A_1, A_2, A_3) \tag{2.4.1}$$

Trabajando en la métrica de Minkowski y sabiendo que un tensor generalmente relaciona todo tipo de transformaciones permisibles, se permite subir y bajar índices del cuadripotencial

$$A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu \quad y \quad A^\mu = g^{\mu\nu} A_\nu \tag{2.4.2}$$

La TRE posibilito la explicación a la falta de simetría del electromagnetismo (Ver sección 1.2), es decir, la posibilidad de que un observador pueda dar cuenta de efectos eléctricos mientras que otro mide efectos magnéticos y eléctricos, viene de la TRE al presentar el tensor de campo electromagnético que puede ser deducido a partir del potencial vectorial.[10]

> *"el tensor de campo electromagnético es la representación de un fenómeno que se caracteriza por medio de las componentes de los campos eléctricos y magnéticos según cada sistema de referencia. […] la relatividad de los sistemas de referencia hace posible que el fenómeno electromagnético se caracterice de distintas formas conservando su simetría para todo observador."* (Vargas & Barrera, 2016)

A manera de ejemplo, se tiene que las propiedades de una partícula respecto a su interacción con el campo electromagnético están determinadas por un solo parámetro que es la carga, y las propiedades del campo respecto a su interacción con la carga está caracterizada por el cuadripotencial A_μ cuyas componentes son funciones de las coordenadas y del tiempo.

[10] Ver (Vargas & Barrera, 2016)

La interacción del campo con la partícula en movimiento es asociada al cuadripotencial mediante la diferencia de las derivadas covariantes de dicho ente, definiéndose así el tensor de campo electromagnético. (Landau & Lifshitz, Teoria clasica de los campos, 1992)

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \qquad (2.4.3)$$

De esta manera se encuentra el tensor que modela las relaciones entre las componentes de los campos eléctrico y magnético que caracterizan el campo electromagnético bajo el cual se mueve una partícula inmersa en dicho campo:

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \qquad (2.4.4)$$

Explícitamente una transformación gauge del cuadripotencial puede ser escrita covariantemente como:

$$A_\mu{}' \to A_\mu + \partial_\mu \chi \qquad (2.4.5)$$

Bajo esta transformación el tensor de campo electromagnético, que estaría dado para un vacío isótropo y homogéneo, cambia al tensor primado:

$$F_{\mu\nu} \to F'_{\mu\nu}$$

$$F'_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu{}' - \partial_\nu A_\mu{}' \qquad (2.4.6)$$

$$F'_{\mu\nu} = \partial_\mu (A_\nu + \partial_\nu \chi) - \partial_\nu \left(A_\mu + \partial_\mu \chi\right)$$

$$F'_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}$$

De esta manera el tensor de campo electromagnético ($F_{\mu\nu}$) queda invariante, al añadir una función de ajuste ($\partial_\mu \chi$) al cuadripotencial, que es análogo a la función de ajuste del potencial vectorial.

CAPÍTULO 3

LA IMPORTANCIA DE LA IDEA GAUGE ENTORNO AL POTENCIAL VECTORIAL EN EL APRENDIZAJE DE FÍSICA

Coloquialmente se dice que el dinero no es necesario, pero ha servido de mucho (Rodriguez, 2008) de igual forma el potencial vectorial no es muy nombrado en los entornos académicos a nivel de pregrado, pero ha sido indispensable en el desarrollo de la física moderna, por otro lado ‘‘Tanto el profesorado como los libros de texto realizan una introducción desestructurada de la Física moderna, que no pone de manifiesto su ruptura con la Física clásica y la existencia de diferencias entre ambas” (Gil, Senent, & Solbes). En respuesta a esta situación se puede acudir al potencial vectorial ya que presenta un camino para llegar de lo clásico a lo moderno (Relativista, más no cuántico en este caso) sin necesidad de desligar lo uno con lo otro, haciendo de esta transición algo estructurado, entendible y ameno para su comprensión.

3.1 La mirada de los libros entorno al electromagnetismo desde el potencial vectorial

Se hace la revisión de algunos textos que giran en torno al aprendizaje de física, ingeniería o saberes afines, como por ejemplo “Física universitaria”, de Hugh Young y Roger Freedman (Sears • Zemansky), “Física para la ciencia y la tecnología”, de Paul Tipler y Gene Mosca, “Física para ciencias e ingeniería con física moderna” de Raymond Serway y John Jewett, entre algunos libros más; en estos libros se encuentra que sus explicaciones referentes a temas de electromagnetismo en general son amenas y muchas veces explicitas, sin embargo, en su gran mayoría dejan a un lado la explicación del potencial vectorial, no obstante, se encuentra que en varios de estos libros nombran la conservación de la carga eléctrica desde la perspectiva de la corriente de desplazamiento y la ley de Ampere – Maxwell, insinuando que al aplicar la ley de conservación de la energía y teniendo presente que la fuerza electrostática es conservativa, se puede dejar a un lado el formalismo matemático que involucra fuerzas (como en mecánica Newtoniana) y pasar a la explicación de los fenómenos de esta clase en términos de potenciales, mostrando explícitamente la definición del potencial escalar (Serway & Jewett, 2009).

Es de resaltar que en el libro “Física Volumen II: Campos y ondas” (Alonso & Finn, 1970) afirman que la descripción de un campo electromagnético dependiente del tiempo no basta solamente con un potencial escalar, sino por el contrario, se necesitan dos potenciales, uno llamado, potencial escalar, y el otro llamado potencial vectorial, omitiendo su respectiva explicación (Alonso & Finn, 1970).

Además y no menos importante, en los libros “Clasical Electrodynamics” de John David Jackson y “Introduction To Electrodynamics (Fourth edition)” de David J. Griffiths, los cuales son muy nombrados, se presenta una explicación formal del potencial vectorial y del término de ajuste, sin embargo, de manera reiterada, no se hace evidente la relación entre simetría y el estudio del potencial vectorial que en conjunto permiten observar la idea que está a la base del surgimiento de la simetría gauge.

Ahora bien, la relación entre simetría y el potencial vectorial fue producto de la teoría de Weyl que en su artículo de 1918 condujo a definir la simetría gauge como un ente llamado “termino de ajuste” que permitía recalibrar las medidas en física, en el caso del potencial vectorial la recalibración condujo a obtener infinitos potenciales que sin importar cual se escogiese dejaba inalterado el campo electromagnético ante la mirada de cualquier observador. Esta concepción trajo como utilidad el limitar dicho ente de ajuste proponiéndolo como un factor conveniente, gauge de Lorentz en este caso, logrando proponer la teoría electromagnética como una teoría gauge.

Con respecto al potencial vectorial Richard Feynman, en su libro "Electromagnetismo y materia" (Feynman & Leighton, Electromagnetismo y materia, 1998) sí desarrolla los conceptos de potencial escalar y potencial vectorial, es de resaltar la manera en la cual él hace su explicación amena y entendible, sin embargo, aunque presenta algunos apartados precisos acerca del potencial vectorial, él no muestra la simetría implícita del término de ajuste en relación con la idea primaria de la simetría gauge.

3.2 El factor de ajuste como ente de introducción a física moderna

El potencial vectorial en la teoría electromagnética puede verse reflejado en un ejemplo tradicional que aparece frecuentemente en los libros de electromagnetismo, este consiste en encontrar la magnitud de campo magnético de un alambre recto infinito por el cual transita corriente. Ver figura 5

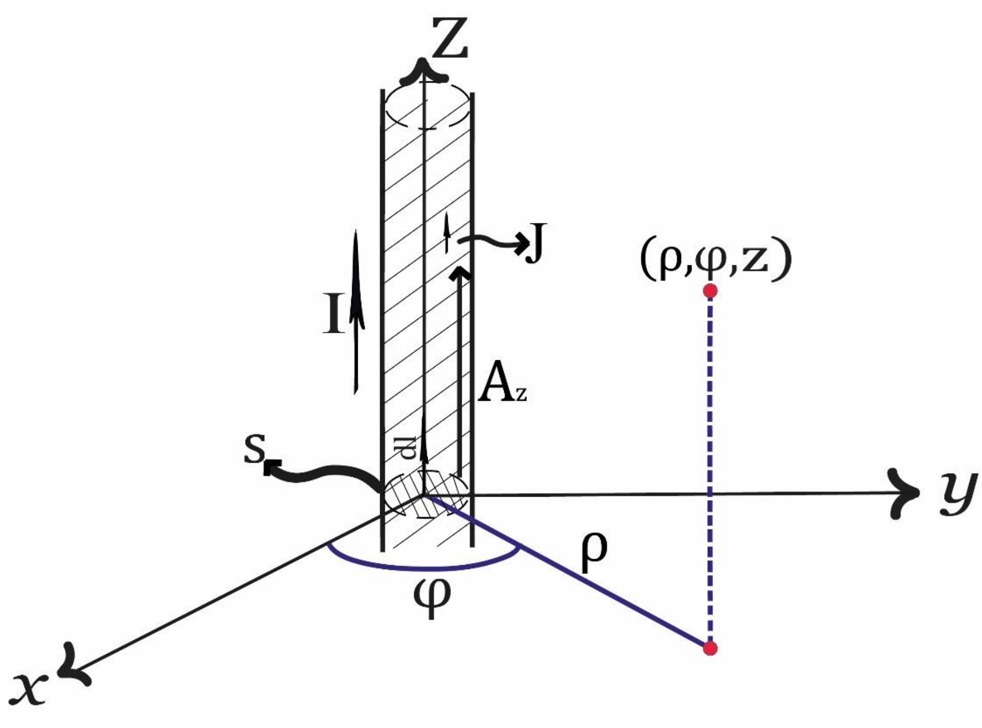

Figura 5. Alambre recto infinito por el cual transita corriente a lo largo del eje Z. *(Feynman & Leighton, Electromagnetismo y materia, 1998)*

La solución a este problema tiene dos caminos, por un lado, puede utilizarse la ley de Ampère que muestra como resultado en coordenadas cilíndricas la expresión de campo magnético como:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\hat{e}_\varphi \tag{3.2.1}$$

Y que es la más tratada por los libros de texto[11], o, por otro lado, se encuentra la solución mediante el potencial vectorial[12], que no es tan común al aprovechar la libertad en la libre elección del factor de ajuste.

Dicho factor puede ser añadido a la expresión que se usa en los cursos elementales de electromagnetismo para obtener el campo magnético en términos de la densidad de corriente $\vec{J}$ y junto con la definición 2.1.1, se puede obtener la expresión para el potencial vectorial:

$$\vec{A}(x) = \int d\vec{x}' \, \frac{\vec{J}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \nabla\chi(\vec{x}') \tag{3.2.2}$$

Lo cual conduce a una solución similar en comparación con la ley de Ampere

$$A_z(\rho,\varphi) = \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\rho \tag{3.2.3}$$

Lo que lleva de manera más general a obtener la expresión de campo magnético:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\hat{e}_\varphi \tag{3.2.4}$$

Sin ánimos de profundizar en los desarrollos matemáticos[13], la intención es notar como el potencial vectorial junto con el factor de ajuste permite llegar al mismo resultado que con la ley de Ampere.

---

[11] Ver (Feynman & Leighton, Electromagnetismo y materia, 1998)
[12] Ver (Pantoja, 2006)
[13] Ver Anexo A

Con esta situación de precedente y dejando en claro que existen infinidad de ejercicios similares, se quiere mostrar que al reconocer la libertad del parámetro de ajuste para encontrar la magnitud del campo magnético y al notar que el resultado es el mismo independientemente del camino que sea tomado, se muestra sugestiva la idea de permitir que la simetría gauge en relación con el potencial vectorial fuese nombrada en los entornos académicos al estar a la base de lo que se supone que es lo más trabajado en un curso de electromagnetismo clásico para poder labrar un camino que sea estructurado, entendible y ameno en la comprensión de una organizada transición a física moderna.

Así como se puede proponer la situación anterior, con la obtención de la magnitud de campo magnético alrededor de un alambre recto infinito por el cual transita corriente que estaría clasificado dentro de lo que se conoce como física clásica, también se podría hablar acerca de un caso particular que permitiese ser estructurado y justificado por medio del potencial vectorial junto con su simetría implícita desde uno de los tópicos de física moderna.

Por ejemplo, se puede proponer el caso de una carga en un campo electromagnético que estaría en respuesta a que

> El electromagnetismo nació como una teoría relativista, siendo esta la que llevo al nacimiento de la TRE, entonces puede ser explotada u aprovechada al máximo en la enseñanza […] La idea es que no se vean como dos teorías disconexas (Schwichtenberg, 2019).

En este sentido, una partícula que se mueve en un campo electromagnético puede ser descrita mediante el principio de mínima acción y conceptos más generales que se enmarcan en la física moderna. El principio de mínima acción ofrece elegancia, unidad, comprensión más profunda y generalización (Neuenschwander, 2011).

En el sentido estricto del problema, la descripción de una partícula dentro de un campo electromagnético estaría dada por la acción[14] para una partícula libre y un término que describe la interacción de la partícula con el campo (cuadripotencial vectorial), definiendo la función acción correspondiente como:

$$s = \int_a^b \left(-mc\,ds - \frac{e}{c} A_\mu dx^\mu\right) \tag{3.2.4}$$

Puntualmente se trae a colación este caso ya que en los libros “Interacción electromagnética teoría clásica” De J. Quintana y F. López, “Física teórica teoría clásica de los campos” de Landau y Lifshitz en el volumen 2, entre algunos otros, muestran cómo con la aplicación del cuadripotencial vectorial que va de la mano con la simetría gauge, admite de manera precisa observar la invariancia de la teoría electromagnética en términos del principio de mínima acción, confirmando de esta manera que el estudio del potencial vectorial abre una gran gama de temas interesantes a estudiar tanto en lo que se considera física clásica como física moderna.

De esta manera se podría sacar el mayor provecho con respecto al aprendizaje de física teniendo como base y puente de conexión el potencial vectorial ya que trae de la mano la idea gauge.

Por otro lado, se muestra que el sentido y la funcionalidad practica del potencial vectorial se vuelve más relevante en física cuando satisface la TRE, es decir, cuando se caracteriza como cuadripotencial, donde con el transcurso del tiempo los físicos hacen el intento de llegar a su apogeo mediante la idea fundamental gauge, que bien se puede afirmar, radica en la formulación del potencial vectorial junto con la simetría implícita que trae el factor de ajuste.

[14] Ver (Feynman & Leighton, El principio de mínima acción, 1998)

3.3 A manera de cierre

Anteriormente ya ha sido nombrado que este tipo de ideas entorno a simetría gauge se construye mediante la idea de grupo. A sabiendas de que el grupo que se toma en este caso es el conjunto de funciones escalares que admiten el operador gradiente, llevando de esta manera a que las leyes clásicas del electromagnetismo sean una teoría gauge, tiene su contraparte en mecánica cuántica ya que un cambio gauge en este contexto está ligado no a un cambio de escala sino a un cambio de fase (Rodriguez, 2008). Sin ánimos de entrar en detalles este este cambio de fase estaría definido por un grupo más general que es denominado $U(1)$ en donde ya haría parte del esquema matemático que exige la mecánica cuántica.

Con esto se quiere llegar a que el estudio del potencial vectorial va más allá, pues junto con el factor de ajuste conduce a un camino que requiere la generalización de varios conceptos que tienen como rumbo la física moderna, aunque sin dejar a un lado la idea que está a la base de lo que usualmente es lo más tratado en los cursos de electromagnetismo a nivel universitario.

En respuesta está que la gran mayoría de textos modernos de teoría de campo relativista dejan a un lado la concepción del potencial vectorial junto con el factor de ajuste ya que arrancan con matemáticas avanzadas y conceptos abstractos, siguiendo la idea de los pensadores Chen Ning Yang y Robert Mills, dejando a un lado la idea en esencia de la teoría siendo inaceptable pues como se afirmó anteriormente, el estudio de la idea gauge desde Hermann Weyl, ha mostrado una nueva perspectiva al notar que se puede hacer una estructurada y entendible introducción a física moderna, pues aunque se contextualiza a lo largo del trabajo el potencial vectorial en la teoría electromagnética de Maxwell, haciendo una pequeña introducción a su generalización con la TRE, se torna fundamental en física al permitir no solamente estructurar una teoría tan completa y compleja como lo es la teoría electromagnética, sino también, evolucionar hasta tener la pretensión de querer explicar las cuatro fuerzas de interacción fundamentales.

Ahora bien, se muestra que Hermann Weyl es el padre de la simetría gauge, sin embargo, su explicación es diferente a lo que se encuentra en libros modernos de teoría de campo relativista por ejemplo, Weyl dio el primer paso de identificar la conexión gauge con el cuadripotencial que es donde la idea gauge se torna entendible, o también fue la primera persona en hacer la conexión entre la conservación de la carga eléctrica y la simetría gauge, tema que no es tan fácil encontrar en los libros, en el presente trabajo se hace el intento de mostrar como el potencial vectorial permite comprender la esencia de la idea gauge, sin embargo cuando ya se habla del cuadripotencial, Weyl lo que pretendió ver allí es como la acción asociada con su unificación de las teorías de gravitación y electromagnetismo eran invariantes ante una variación arbitraria de la acción, tema que se sale de los propósitos de este trabajo, no obstante se torna interesante resaltar que el estudio de la simetría gauge y en particular del potencial vectorial abren una gama muy amplia de estudio que sabiendo manejar estructurada y progresivamente se podría tornar como una extensa variedad de temas para el aprendizaje de física moderna, viendo temas que se desprenden o que complementan la teoría, como los teoremas de conservación de Emmy Noether o grupos de Lie, entre otros. Abriendo más aún la infinidad de temas cuando en 1922 Erwin Rudolf Josef Alexander Schrödinger afirma que sería provechoso cambiar el factor de escala que proponía Hermann Weyl por un factor de fase que podría ser transcendental en mecánica cuántica (O´raifeartaigh, 1997).

CONCLUSIONES

En este trabajo se realizó un análisis historiográfico acerca del surgimiento de la simetría gauge durante el primer tercio del siglo XX y su relación con la teoría electromagnética alrededor del potencial vectorial según Hermann Weyl, en donde se resaltó la importancia en el aprendizaje del electromagnetismo y su introducción a la física moderna.

Se destaca el hecho elemental de que la idea gauge haya surgido del intento de Hermann Weyl al tratar de dar explicación a un problema en la geometría de Riemann y que tomando como base la TRG, pudiese revelar un factor de recalibración para las medidas en física aportando de esta manera una idea fundamental.

Se muestra sobresaliente ver cómo con la idea que propone el potencial vectorial acerca de la libertad que tiene este para conducir a un mismo campo magnético, se pueden estudiar temas relacionados con el electromagnetismo tomando un camino alterno al que proponen una gran gama de libros de texto, conduciendo de esta manera a conocer de forma estructurada y comprensible uno de los caminos que hay para la transición de lo que se considera como física clásica a física moderna.

Lo más importante del análisis es ver en sí el fundamento de la idea gauge mediante el potencial vectorial y la libre elección de los potenciales por medio del factor de ajuste, ya que en algunos libros de texto muestran esta idea de manera trivial, comentando que no hay necesidad de enfatizar debido a que es común y sabido por todos, dejando así un sin sabor para las personas que están interesadas en estos temas, sin embargo, se muestran importantes, aportando en el campo de estudio y de reflexión sobre las simetrías en física.

BIBLIOGRAFIA

Aceña, A. (2017). La transición a la formulación covariante del electromagnetismo. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, nº 1.

Acevedo, C. L. (2019). Analisis y consecuencias de la teoría especial de la relatividad si el segundo postulado: una contrucción alternativa para la comprensión del postulado. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógiga Nacional.

Alonso, M., & Finn, E. (1970). *Fisica Volumen II - Campos y Ondas.* Cumaná: Fondo Educativo Interamericano,S.A.

Andrade, D. F. (2017). Sobre el Potencial Vectorial en Mecánica Cuántica. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

AVILA, S. (2013). Sobre la naturaleza del potencial vectorial, su sentido y significado. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Bermúdez, D. (2019). Sobre la enseñanza de la Mecánica cuántica a propósito de las transformaciones de simetría: Reflexión, Rotación y Paridad. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Brading, K. A. (2002). Which symmetry? Noether, Weyl, and conservation of electric charge. *Studies in History and Philosophy of Modern Physics 33* (págs. 3–22). Oxford: Elsevier Science Ltd.

Brading, K., & Brown, H. R. (2000). Noether’s Theorems and Gauge Symmetries. Oxford: University of Oxford.

Brading, K., & Castellani, E. (2003). *Symmetries in physics.* Cambridge: Cambridge University press.

Braun, E. (1992). *Electromagnetismo: De la ciencia a la tecnología.* México, D.F.: Fondo de cultura economica.

Byers, N. (1998). E. Noether's Discovery of the Deep Connection Between Symmetries and Conservation Law. *the Heritage of Emmy Noether.* Los Angeles: Physics Department, UCLA.

Creaciónpropia. (2020). Simetria de rotación. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagogica Nacional.

Creaciónpropia. (s.f.). *Experimento de Oersted*. Obtenido de Experimento de Oersted: http://www.maquinascientificas.es/07experimento%20oersted.htm

Cruz, Y., Rodríguez, J. F., & Salas, R. F. (2016). *Notas de geometría diferencial y aplicaciones a la física.* Bogotá, D.C. - Colombia: Sello Editorial Universidad Colegio Mayor de Cundinamarca.

Cuesta, Y., & Mosquera, C. (2018). Reflexiones en torno a la importancia de la investigación en enseñanza de la física cuántica. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógia Nacional.

Davies, P. (1986). *Super-Fuerza.* Barcelona: Salvat Editores, S.A.

Dreamstime. (2020). *Amperímetro Ejemplos Y Vectores*. Obtenido de Amperímetro Ejemplos Y Vectores: https://es.dreamstime.com/illustration/amper%C3%ADmetro.html

Feynman , R., Leighton, R., & Sands, M. (1998). *Mecánica, radiación y calor.* México: Addison Wesley Longman de México S.A. de C.V.

Feynman, R., & Leighton, R. (1998). El principio de mínima acción. En R. Feynman, & R. Leighton, *Electromagnetismo y materia* (pág. 19). México: Addison Wesley Longman de México S.A de C.V.

Feynman, R., & Leighton, R. (1998). *Electromagnetismo y materia.* México: Addison Wesley Longman de México S.A de C.V.

Feynman, R., & Leighton, R. (1998). Las ecuaciones de Maxwell. En R. Feynman, & R. Leighton, *Electromagnetismo y materia* (págs. 18-1, 18-2). México: Addison Wesley Longman de México S.A de C.V.

Gardner, M. (1985). *Izquierda y derecha en el cosmos.* Barcelona: Salvat Editores, S.A.

Gerard´t, H. (1980). Teorias gauge de las fuerzas entre partículas elementales . *Revista investigacion y ciencia* , Vol. 47.

Gil, Senent, & Solbes. (s.f.). Analisis critico de la introducción de la física moderna en la enseñanza media. 16-21.

Goldstein, H. (1994). *MECANICA.* Barcelona: Editorial Reverte, S.A.

Gómez, P., & Gonzáles, E. (2012). *Las ecuaciones de Maxwell.* España: Gómez, Pedro-Gonzáles, Esteban.

González, N. D., & Santamaría, D. P. (2008). Introducción a las Teorías Gauge en Física. Colombia: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Griffiths, D. (2013). *Introduction to electrodynamics. Fourth Edition.* United States of America: Pearson Education, Inc.

Gross, D. J. (1996). The role of simmetry in fundamental physics . *Symetries Throughout the sciences*, 14256–14259.

JACKSON, J. D. (1962). *CLASSICAL ELECTRODYNAMICS.* New York . London . Sydney: John Wiley & Sons, Inc.

Klein, F. (2006). *Lecciones sobre el desarrollo de la matemática en el siglo XIX.* Barcelona : Editorial Crítica, S. L.

Kosso, P. (2000). The Empirical Status of Symmetries in Physics. *British Society for the Philosophy of Science*, págs. 81-98.

Lanczos, C. (1949). *The Variational Principles Of Mechanics.* Canada: EDITORIAL BOARD.

Landau, L. D., & Lifshitz, E. M. (1992). *Teoria clasica de los campos.* Barcelona: EDITORIAL REVERTÉ, S.A.

Landau, L. D., & Lifshitz, E. M. (1994). *MECÁNICA.* Barcelona: EDITORIAL REVERTÉ, S.A.

Moriyasu, K. (1983). *An elementary Primer for Gauge Theory.* Seattle: World Scientific Publishing Co Pte Ltd.

Neuenschwander, D. (2011). *Emmy Noether´s Wonderful Theorem.* Baltimore: The Johns Hopkins University Press.

O´raifeartaigh, L. (1997). *The dawning of gauge theory.* New Jersey: Pricenton University Press.

O'Raifeartaigh, L., & Straumann, N. (1999). *Early History of Gauge Theories and Kaluza-Kleinn Theories, with a Glance at Recent Developments.* Zurich, Switzerland: Dublin Institute for Advanced Studies ; Institut fur Theoretische Physik der Universitat Zurich–Irchel.

Ostermann, F., & Moreira, M. A. (2000). Física contemporánea en la escuela secundaría: una experiencia en el aula involucrando formación de profesores. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 391-04.

Pantoja, N. (2006). *Notas de Clase Electromagnetismo* . Bogotá : Universidad de los Andes.

Quigley, C. (2003). *On the Origins of Gauge Theory.*

Riaño, C. A. (2019). Sobre el potencial vector. Un análisis físico-matemático en el lagrangiano de Darwin y su extensión a la mecánica cuántica. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Rodríguez, E. (2006). Invariancia de norma como principio dinámico, el modelo estandar y la simetria de familias.

Rodriguez, J. D. (2008). *Electromagnetismo Y Geometria.* Bogotá.

Rodríguez, O. L. (2014). La cosmovisión de Pierre Duhem. Una perspectiva fenomenológica. *Grupo ECCE Estudios Culturales sobre las Ciencias y su Enseñanza - Universidad de Antioquia*, 105-122.

Rogan, J., & Muñoz, V. (s.f.). *Introducción a la física matematica* . Santiago : Universidad de Chile.

Ron, J. M. (s.f.). Einstein, Felix Klein, David Hilbert y Hemann Weyl.

Sagan, C. (2000). *El mundo y sus demonios.* Barcelona: Editorial Planeta, S. A.

Schwichtenberg, J. (2019). Demystifying Gauge Symmetry. *Institut fur Theoretische Teilchenphysik*, 1-36.

ScienceDaily. (2012). *¿Por que estamos hechos de materia? supercomputando la diferencia entre materia y antimateria.* Brookhaven National Laboratory.

Serway, R., & Jewett, J. (2009). *Física para ciencias e ingeniería, Volumen 2, Séptima edición con Física Moderna.* México, D.F: Cengage Learning Editores, S.A. de C.V.

szwolf1. (s.f.). *freepng.es*. Obtenido de freepng.es: https://www.freepng.es/png-fwouop/

Tipler, P., & Mosca, G. (2010). *Física para la ciencia y la tecnología* . Barcelona: REVERTÉ,S.A.

Tromba, A., Marsden, J., López, M., & Andrade, S. (1991). *Calculo Vectorial* . Wilmington - Delaware: ADDISON-WESLEY IBEROAMERICANA, S.A.

Uribe Veléz, F. (2018). *Apuntes de relatividad general.* Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Vargas, E., & Barrera, E. (2016). Análisis de la falta de simetría del electromagnetismo clásico y su solución relativista: tensor de campo electromagnetico. *análisis de la falta de simetría del electromagnetismo clásico y su solución relativista: tensor de campo electromagnetico*. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Vélez, F. (2016). *Apuntes de RELATIVIDAD.* Bogotá: Corcas editores SAS.

Vidal. (s.f.). *CERN. Violacion CP - Simetrias mirando de cerca el LHC*. Obtenido de CERN: https://www.lhccloser.es/taking_a_closer_look_at_lhc/0.lhcb/idioma/es_ES

Vizgin, V. P. (1994). *Unified Field Theories in the first third of the 20th century.* Moscow: Birkhäuser Verlag.

Walter, P., & Rubén, V. (2019). Hermann Weyl y el gauge . *Epistemología e Historia de la Ciencia*, 7-16.

Wey, H. (1980). *Symmetry.* New Jersey: Princeton University Press .

Weyl, H. (1975). *La simetria.* Barcelona: Promoción Cultural, S.A.

Weyl, H. (1987). *The continuum* . New York : The Thomas Jefferson University Press.

Weyl, H., & Brose, H. (1922). *Space-Time-Matter.* United States of America: DOVER PUBLICATIONS, INC.

Young, H., & Freedman, R. (2009). *Física universitaria con fisica moderna.* Mexico D.F.: Pearson Educación de México, S.A. de C.V.

ANEXOS

ANEXOS A

Solución al ejercicio propuesto. Ver figura 5.

Encontrar la magnitud de campo magnético producido por un hilo recto infinito a través del cual fluye una corriente I.

$$I(t) = \begin{cases} 0, si\ t \leq 0 \\ I_0, si\ t > 0 \end{cases}$$

El alambre se encuentra ubicado a lo largo del eje Z.

Teniendo presente las relaciones:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \qquad \text{A.1}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \qquad \text{A.2}$$

Al igual que la relación propuesta por Ampère

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \qquad \text{A.3}$$

Se tiene entonces que mediante la comparación entre A.1 y A.3 se encuentra:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \mu_0 \vec{J} \qquad \text{A.4}$$

Por otra parte, sabiendo:

$$\nabla^2 A = \nabla(\nabla \cdot A) - \nabla \times (\nabla \times A) \qquad \text{A.5}$$

$$(\nabla^2 A)_Z = \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} = \nabla^2 A_Z \qquad \text{A.6}$$

$$\nabla^2 A = \nabla^2 A_x \hat{\imath} + \nabla^2 A_y \hat{\jmath} + \nabla^2 A_z \hat{k} \qquad \text{A.7}$$

Y teniendo presente:

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla \chi \qquad \text{A.8}$$

$$\nabla \cdot A = 0 \qquad \text{A.9}$$

Y como la divergencia del potencial vectorial es igual a cero (A.9), se tiene:

$$\nabla^2 A = -\nabla \times (\nabla \times A) \qquad \text{A.10}$$

Por tanto, de A.4 se obtiene la relación:

$$\nabla^2 A = -\mu_0 \vec{J} \qquad \text{A.11}$$

Donde esta expresión es el laplaciano del potencial vectorial, que es satisfecho por la ecuación de Poisson, por ende, utilizando tal solución:

$$\vec{A}(\rho) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{J}}{|\vec{\rho} - \vec{\rho}'|} dv \qquad \text{A.12}$$

Utilizando coordenadas cilíndricas y teniendo presente que dv es el diferencial de volumen por el cual transita la corriente, s la superficie horizontal, dl el diferencial de longitud, J la densidad de corriente e I la corriente, entonces se puede ver que:

$$dv = sdl \qquad \text{A.13}$$

$$Jdv = Jsdl \qquad \text{A.14}$$

$$Jsdl = Idl \qquad \text{A.15}$$

De modo tal que la integral quede como:

$$\vec{A}(\rho) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \int \frac{dl}{\rho} \qquad \text{A.16}$$

Donde

$$dl = d\rho \qquad \text{A.17}$$

$$\vec{A}(\rho) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \int \frac{d\rho}{\rho} \qquad \text{A.18}$$

Obteniendo de esta manera la expresión en coordenadas cilíndricas del potencial vectorial

$$\vec{A}(\rho) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \ln{(\rho)} \tag{A.19}$$

Que teniendo en cuenta la expresión del campo magnético A.1, haciendo los respectivos procedimientos se encuentra la expresión para el campo magnético:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi\rho} \hat{e}_{\varphi} \tag{A.20}$$