IMPLEMENTACIÓN DEL SOFTWARE EDUCATIVO GANALITICA3D PARA POTENCIAR LA VISUALIZACIÓN EN GEOMETRÍA ANALÍTICA TRIDIMENSIONAL

MARTHA INÉS BOHÓRQUEZ BONILLA

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

BOGOTÁ, D.C.

2020

IMPLEMENTACIÓN DEL SOFTWARE EDUCATIVO GANALITICA3D PARA POTENCIAR LA VISUALIZACIÓN EN GEOMETRIA ANALÍTICA TRIDIMENSIONAL

MARTHA INÉS BOHÓRQUEZ BONILLA

Tesis de grado presentada como

requisito parcial para optar por el título

de Licenciada en Matemáticas

Asesor:

ÓSCAR JAVIER MOLINA JAIME

Prof. Departamento de Matemáticas UPN

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

BOGOTÁ, D.C.

2020

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
Educadora de educadores

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

ACTA DE EVALUACIÓN DE TRABAJO DE GRADO

Presentados y aprobados el documento escrito y la sustentación del Trabajo de Grado titulado **"IMPLEMENTACIÓN DEL SOFTWARE EDUCATIVO GANALITICA3D PARA POTENCIAR LA VISUALIZACIÓN EN GEOMETRÍA ANALÍTICA TRIDIMENSIONAL"**, elaborado por la estudiante **BOHÓRQUEZ BONILLA MARTHA INÉS**, identificada con el Código **2015140083** y Cédula **1016098596**, el equipo evaluador, abajo firmante, asigna como calificación **cuarenta y ocho (48)** puntos.

El mismo equipo evaluador recomienda la siguiente sugerencia de distinción:

Ninguna ☐ Meritoria ☒ Laureada ☐

El Trabajo de Grado, presentado como monografía, constituye un requisito parcial para optar al título de **Licenciada en Matemáticas**.

En constancia se firma a los quince (15) días del mes de octubre de 2020.

Dr. ÓSCAR JAVIER MOLINA JAIME
Asesor del Trabajo de grado

Dra. LEONOR CAMARGO URIBE
Jurado del Trabajo de grado

Dr. CARLOS ROBERTO PÉREZ MEDINA
Jurado del Trabajo de grado

Dedicatoria

Dedico con mucho amor mi trabajo de grado...

A Dios

Porque me ha dado la oportunidad de estar bien y poder crecer cada día.

A mis abuelos, especialmente mi abuelo Libardo.

Por haberme dado fuerzas para continuar con mis proyectos. Por escucharme y motivarme a continuar con mis estudios mientras me acompañaba en esta vida.

A mis padres y hermanos.

Por ser mi motor, porque siempre han estado a mi lado apoyándome. Especialmente mi madre Blanca y mi hermano Wilmer que siempre han creído en mí.

A mi sobrino Dylan

Porque ha llegado a alegrar nuestras vidas.

A mi tía Omaira

Por preocuparse por mí, por su apoyo incondicional.

A Cesar

Porque ha estado en los momentos más difíciles de mi carrera, por sus consejos y porque su presencia en mi vida ha sido inspiración y me ha ayudado a crecer.

Y a toda mi Familia, por confiar en mí, gracias por ser parte de mi vida y por permitirme ser parte de su orgullo.

Agradecimientos

A Dios. Por darme salud, vida y sabiduría a lo largo de mi formación como docente de matemáticas.

A mi Asesor, el profesor Óscar Molina. Por su paciencia, enseñanzas, tiempo y dedicación a lo largo de la elaboración de mi trabajo de grado.

A la profesora Leonor Camargo. Por sus orientaciones y por instruirme en el camino de la investigación.

A mis maestros. Por su tiempo y esfuerzo, por compartir sus conocimientos. Estos me han ayudado a llegar a este nivel. Especialmente a la profe Nubia Soler, al profe Orlando Aya, a la profe Carmen Samper y al profe Donado.

A Mariana Barrera, Nelson Osorio, Cita Álvarez, Holman Sandoval y Jhon niño, por su amistad y apoyo a lo largo de la carrera.

A las instituciones educativas que me abrieron sus puertas para hacer mis prácticas de aula.

Y a todas las personas que me acompañaron en este proceso, porque de alguna manera me apoyaron para alcanzar este sueño.

Resumen

Esta propuesta de trabajo de grado se presenta como una ayuda didáctica para el profesor de matemáticas de educación media o universitaria. Se compone de tres partes: (1) la teoría en la que se aborda el estudio matemático de las superficies cuadráticas, (2) la teoría didáctica, que incluye una propuesta de habilidades de visualización enfocadas a la 3D y (3) el diseño y la propuesta de 5 secuencias de tareas, diseñadas según el marco de Gómez Mora y Velasco (2018) para desarrollar con los softwares GAnalitica3D y GeoGebra. El objetivo es introducir las superficies cuadráticas y desarrollar habilidades de visualización por medio de cambios de registro, es decir, de la representación algebraica a la gráfica y viceversa; en un sentido análogo al propuesto por Mason (1987) en el que asocia símbolos con representaciones.

Palabras clave

Diseño de tareas, superficies cuadráticas, habilidades de visualización, representación algebraica, representación gráfica, objetos primarios de la EOS, GeoGebra, GAnalítica3D

Tabla De Contenido

ILUSTRACIONES

FIGURAS

TABLAS

Introducción

El presente documento es una monografía de Trabajo de Grado, requisito para optar por el título de Licenciada en Matemáticas, de la Universidad Pedagógica Nacional. Presentamos una propuesta didáctica para introducir las superficies cuadráticas y desarrollar habilidades de visualización por medio de cambios de registro, es decir, de la representación algebraica a la gráfica y viceversa. Consideramos que la propuesta sería pertinente para estudiantes de secundaria (grados décimos y once, principalmente) o primeros semestres de la licenciatura en matemáticas, que hayan estudiado geometría analítica 2D, pero no superficies cuadráticas.

Nosotros estamos interesados en que los estudiantes desarrollen habilidades de visualización en álgebra en un sentido análogo al propuesto por Mason (1987) en el que asocia símbolos con representaciones, con el propósito de que estos le provean significado geométrico a una expresión algebraica o simbólica. En particular nosotros abordamos el tema de las superficies en geometría analítica siguiendo la propuesta de Lehmann (1980); en ese sentido, la propuesta alude a asuntos como intersecciones de la superficie con los ejes coordenados, intersecciones de los planos coordenados con la superficie, secciones por planos paralelos a los planos coordenados y simetría con respecto al origen, los ejes y planos coordenados. Sobre estos asuntos versan las secuencias de tareas que se diseñaron con base en las herramientas que ofrecen los softwares GAnalitica3D y GeoGebra.

Para el diseño de la propuesta hemos utilizado parte de la propuesta de Gómez, Mora y Velasco (2018) respecto al *análisis de instrucción*. De manera específica, hemos utilizado lo relativo a la descripción de una secuencia, usando los siete elementos que estos autores sugieren para describir una tarea.

Con estas ideas en mente, hemos planteado el documento a la luz de los siguientes cinco capítulos:

En el primer capítulo se presenta la justificación del trabajo de grado, basada en la importancia de ganar habilidades de visualización en 3D de las superficies cuadráticas. Exponemos, además, el objetivo general y los objetivos específicos del trabajo.

El segundo capítulo presenta los referentes conceptuales del estudio. Este consta de dos partes, el referente matemático y el referente didáctico. En la primera abordamos las principales definiciones y teoremas necesarios para abordar las superficies cuadráticas y lo correspondiente a su estudio, propuesto por Lehmann (1980). La segunda versa sobre los siguientes aspectos: (i) Visualización en tres dimensiones; (ii) visualización de expresiones algebraicas a la manera de Mason (1987); (iii) indicadores de habilidades de visualización espacial basados en las propuestas de Ramírez (2012) y Ramírez y Flores (2017), ajustados a superficies cuadráticas; (iv) diseño de tareas según la propuesta de Gómez, Mora y Velasco (2018); (v) propuesta de objetos primarios del Enfoque Ontosemiótico (Godino, Batanero y Font, 2007) y (vi) uso de softwares especializados para procesos de instrucción. En la respectiva sección, se explicita cómo estos distintos aspectos se relacionan.

En el tercer capítulo presentamos la metodología para llevar a cabo el diseño de las secuencias de tareas, el cual se fundamentó en el *Análisis de Instrucción* que sugiere Gómez, Mora y Velasco (2018). En el cuarto capítulo describimos cada una de las secuencias utilizando los elementos que proponen estos autores.

En el quinto capítulo exponemos las conclusiones del trabajo indicando el nivel de desarrollo de los objetivos del trabajo planteados, el nivel de abordaje de las habilidades de visualización en cada una de las secuencias, las limitaciones del trabajo y los principales aportes que me dejó el trabajo como futura docente.

Capítulo 1

Planteamiento del problema

1.1 Justificación

La enseñanza de la geometría analítica juega un papel muy importante en las matemáticas. Dentro de esta área se abordan temas como la introducción de coordenadas, la aplicación del álgebra simbólica a los problemas geométricos, la clasificación general de curvas y superficies de segundo y tercer orden, etc. Esta área permite hacer un trabajo conjunto entre la geometría sintética de Euclides y el álgebra (Soto, 2013). Ofrece a los estudiantes un campo en el que pueden desarrollar habilidades tanto de visualización espacial como de razonamiento abstracto.

El curso de geometría analítica que realicé como estudiante de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, estaba enfocado en la geometría bidimensional con el tratamiento de curvas 2D y el estudio algebraico de estas; se profundizó en diferentes sistemas coordenados -rectangular, oblicuo- o con métricas alternativas a la usual -métrica del taxista-; esto, con el fin de determinar el tipo de curva que se establece en un sistema alternativo cuando su ecuación se da en el sistema usual o viceversa. Esta experiencia fue muy interesante y enriquecedora ya que se fortalecieron mis habilidades de visualización. Sin embargo, no tuve oportunidad de estudiar asuntos relativos a las superficies cuadráticas, por ejemplo, su representación gráfica o algebraica y sus propiedades básicas. Al iniciar el curso de cálculo multivariado, donde algo de ello es necesario, sentí muchas falencias para abordar con idoneidad algunos temas. En ese contexto, evidencié que aquellas habilidades de visualización adquiridas en el curso de geometría analítica no eran suficientes para hacer un estudio juicioso de objetos 3D desde un punto de vista analítico.

Mi experiencia académica es un ejemplo de algo más generalizado. El currículo implementado escolar (incluso universitario) ha mostrado que la geometría espacial (sintética o analítica) no es tan estudiada como la geometría plana; desde un punto investigativo, también se reporta que existen mayores estudios e intenciones respecto de la geometría plana que la del espacio, independientemente de su dominio –sintético o analítico– (Sinclair, et al., 2016).

Con el contexto citado previamente, junto con la idea de Lehmann (1980, pág. 318) - según la cual lograr comprender la tercera dimensión de la geometría analítica del espacio, exige de los estudiantes más de su habilidad de visualización de aquella que se requirió para figuras en el plano -, vemos la necesidad de abordar, de manera deliberada, contenidos de la geometría analítica en tercera dimensión en contextos escolares o universitarios. Para contribuir en este asunto, con este trabajo nos adentramos en el diseño de secuencias de tareas que, mediante el uso de softwares especializados (GAnalitica3D y GeoGebra), permita desarrollar habilidades de visualización 3D teniendo en cuenta dos registros, la representación gráfica y la representación algebraica de superficies cuadráticas. Nuestro propósito es considerar la idea de Mason (1987) según la cual es posible nombrar atributos de los objetos observando una representación algebraica de estos. Teniendo en cuenta esta última idea, hacemos una propuesta de indicadores de habilidades de visualización espacial basados en las propuestas de Ramírez (2012) y Ramírez y Flores (2017), pero considerando también representaciones algebraicas.

En consecuencia, hemos diseñado cinco secuencias de tareas siguiendo la propuesta para diseñar tareas de Gómez, Mora y Velasco (2018), abordando el estudio de las superficies cuadráticas (elipsoide, hiperboloide de una hoja, hiperboloide de dos hojas y cilindro elíptico) mediante el uso de los softwares GAnalítica3D y GeoGebra. Estas secuencias se fundamentan en la importancia de la visualización espacial y la geometría analítica dentro de los contenidos y espacios de aprendizaje, por cuanto, consideramos, contribuyen al desarrollo de procesos de razonamiento espacial, de habilidades de resolución de problemas y de conceptualización de objetos vía la multiplicidad de registros (Clements y Battista, 1992; Castiblanco, Urquina, Camargo, y Acosta, 2004; citados por Suarez y León, 2016).

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo general

Diseñar secuencias de tareas que promuevan el desarrollo de habilidades de visualización tridimensional de superficies cuadráticas en estudiantes de grado 10, 11 o primeros semestres de universidad, por medio de los softwares GAnalitica3D y GeoGebra.

1.2.2 Objetivos específicos

1. Profundizar en el tratamiento de las superficies cuadráticas elipsoide, hiperboloide de una y dos hojas y cilindro elíptico, mediante el uso de los softwares GAnalitica3D y GeoGebra, para estudiar las posibilidades de visualización que estos ofrecen.
2. Construir un marco didáctico sobre la visualización espacial con el que se pueda obtener indicadores de desarrollo de la visualización.
3. Diseñar una tabla de indicadores de habilidades de visualización en el contexto de la representación gráfica y algebraica de las superficies cuadráticas.
4. Diseñar secuencias de tareas que promuevan el desarrollo de habilidades de visualización con el fin de estudiar las propiedades y características de las superficies cuadráticas de tipo I: elipsoide, hiperboloide de una y dos hojas y cilindro elíptico.

Capítulo 2

Referentes Conceptuales

Este capítulo presenta los principales referentes necesarios para abordar el estudio. Específicamente consta de dos secciones, una en la que se exponen los referentes de índole matemático y otra en la que se describen los asuntos relativos a la didáctica de las matemáticas. En la primera sección se presentan los preliminares necesarios para abordar los objetos que están involucrados en la secuencia didáctica; en lo que respecta a lo didáctico, tenemos en cuenta el proceso de visualización a la manera de Mason (1987), el uso de software en la enseñanza de la geometría teniendo como base la visualización en tres dimensiones según Gutiérrez (1996), Ezquerro (2014), González y Bolzicco (2019), entre otros; y el diseño de tareas teniendo en cuenta los aportes de Gómez, Mora y Velasco (2018); y para el análisis didáctico se tendrá en cuenta el enfoque onto semiótico de la propuesta del EOS particularmente en lo que tiene que ver con la identificación de objetos matemáticos y el análisis a posteriori según Godino, Batanero, y Font (2007).

2.1 Referente matemático

En esta sección se exponen aquellas definiciones y teoremas que son necesarios para sustentar, desde un punto de vista matemático, la secuencia de tareas. Para este caso en particular, usamos como referentes las propuestas de Kindle (1970) y Lehmann (1980).

Nosotros estamos interesados en que los estudiantes desarrollen habilidades de visualización en álgebra en un sentido análogo al propuesto por Mason (1987). Siguiendo esta idea, Lehmann (1980) propone un procedimiento compuesto de cinco pasos para el estudio de las superficies desde su expresión analítica, de forma tal que se pueda reconocer el comportamiento de una representación gráfica con base en la expresión analítica con la cual esta se puede hacer corresponder; dichos pasos consisten en determinar:

1. Intersecciones de la superficie con los ejes coordenados.

2. Intersecciones de los planos coordenados con la superficie.
3. Simetría con respecto a los planos coordenados, ejes coordenados y a1 origen.
4. Secciones por planos paralelos a los planos coordenados.
5. Extensión de la superficie.

Particularmente, en este estudio se abordan los asuntos 1, 2, 3 y 4 en el marco de las secuencias de tareas que proponemos mediante este trabajo. En consecuencia, nuestros referentes conceptuales aluden a los objetos involucrados en ellos. A continuación, se presentan las principales definiciones y teoremas asociados, para luego, mediante tablas, presentar las diferentes propiedades (que sintetizan los teoremas) que se abordan en las secuencias con el propósito de que los estudiantes logren desarrollar la competencia de visualización de interés.

2.1.1 Definiciones y teoremas necesarios para abordar las superficies cuadráticas

En este apartado se presentan descripciones de objetos básicos necesarios para introducir las superficies cuadráticas en $\mathbb{R}^3$. Se abordan definiciones básicas como la de punto y distancia entre dos puntos en el espacio en $\mathbb{R}^3$.

Definición 1. La **coordenada de un punto en el espacio en** $\mathbb{R}^3$ se determina mediante sus proyecciones a tres planos perpendiculares dos a dos denominados planos coordenados. A partir de la coordenada del punto de proyección en cada uno de estos planos, se puede establecer la coordenada del punto en $\mathbb{R}^3$.

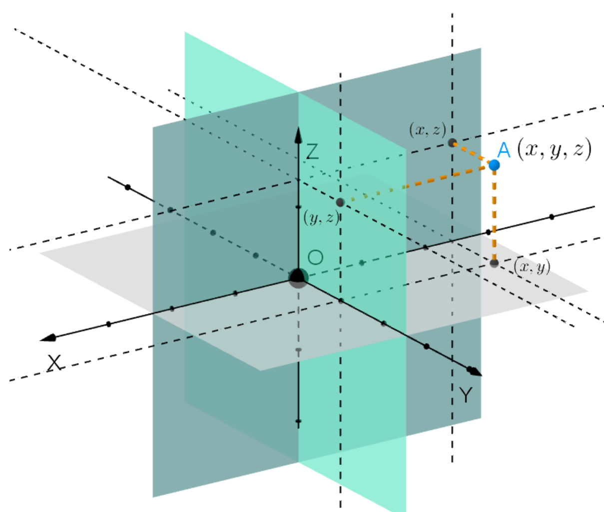


Figura 2.1-1: Coordenada de un punto en el espacio

Por ejemplo, la proyección del punto A en cada uno de los planos sería de la siguiente manera: la proyección en el plano XY esta dada por las coordenadas (x, y), en el plano XZ por las coordenadas (x, z) y en el plano YZ por las coordenadas (y, z), como resultado de juntarlas se obtienen las coordenadas (x, y, z) del punto A como se muestra en la Figura 2.1-1.

Las rectas de intersección de los planos coordenados son los ejes OX, OY y OZ o X, Y, Z que se llaman ejes coordenados y cuyo sentido positivo se indica mediante flechas (ver Figura 2.1-1). Los **planos coordenados** XY, XZ y ZY dividen al espacio en ocho octantes numerados de la forma siguiente: el octante I está limitado por los semiejes positivos; los octantes II, III y IV son los situados en el semiespacio superior determinado por el plano XY y numerados en sentido contrario al de las agujas del reloj alrededor del eje OZ. Los octantes V, VI, VII y $VIII$ son los situados en el semiespacio inferior determinado por el plano xy, correspondiéndose el V con I, etc.

Teorema 1. La distancia euclidiana en $\mathbb{R}^3$ entre dos puntos en el espacio $P_1\ x_1, y_1, z_1$ y $P_2\ x_2, y_2, z_2$ está dada por la expresión

$$d = \sqrt{\ x_2 - x_1\ ^2 +\ y_2 - y_1\ ^2 +\ z_2 - z_1\ ^2} \qquad (1)$$

Demostración: Dados dos puntos cualesquiera (ver Figura 2.1-2) en el espacio $P_1\ x_1, y_1, z_1$ y $P_2\ x_2, y_2, z_2$ vamos a determinar la distancia $d = P_1P_2$. Por cada uno de los puntos P_1 y P_2 hagamos pasar planos paralelos a los tres planos coordenados. Estos planos forman un paralelepípedo recto rectangular que tiene a P_1P_2 por diagonal y a P_1V_1, P_1V_2, y P_1V_3, por aristas. Estos planos dan también las proyecciones ortogonales de P_1 y P_2, sobre los planos y ejes coordenados. Así, P'_1 y P'_2 son las proyecciones ortogonales respectivas de P_1 y P_2 sobre el plano XY , y $P'_1\ P'_2$ es la proyección P_1P_2 sobre el plano XY. También A_1, B_1 y C_1 son las proyecciones ortogonales respectivas de P_1 sobre los ejes X , Y y Z, y A_2, B_2 y C_2 son las proyecciones respectivas de P_2 sobre los ejes X , Y y Z.

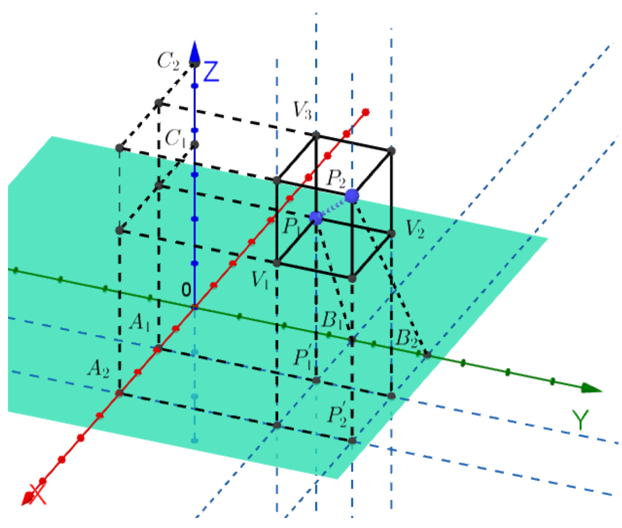


Figura 2.1-2 Distancia euclidiana en $\mathbb{R}^3$entre dos puntos en el espacio

Mediante una doble aplicación del teorema de Pitágoras, se tiene que el cuadrado de la longitud de la diagonal de un paralelepípedo recto rectangular es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de sus aristas. Por tanto, podemos escribir

$$d^2 = {P_1P_2}^2 = {P_1V_1}^2 + {P_1V_2}^2 + {P_1V_3}^2 \tag{2}$$

Luego por la definición de las coordenadas de un punto en el espacio, las coordenadas A_1 y A_2 son $(x_1, 0{,}0)$ y $(x_2, 0{,}0)$ respectivamente. Teniendo en cuenta que restando la coordenada del punto inicial de la coordenada del punto final se obtiene la longitud de un segmento dirigido se tiene: $P_1V_1 = A_1A_2 = x_2 - x_1$

Análogamente, se tiene $P_1V_2 = B_1B_2 = y_2 - y_1$ y $P_1V_3 = C_1C_2 = z_2 - z_1$

Sustituyendo estos valores en la ecuaci6n (2), se obtiene $d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$ de donde $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$, quedando demostrado.

2.1.2 Superficies cuadráticas

En esta sección se fundamenta el estudio de las superficies que se involucran en la secuencia de tareas. En primera instancia, se expone la definición de intersección de una superficie; en seguida, se presenta el estudio de la ecuación de una superficie en la cual se alude a la influencia de los coeficientes y los signos para las variables independientes en ella para tipificar las superficies, establecer sus simetrías (axial, puntual, lineal), y determinar propiedades de las superficies de tipo uno.

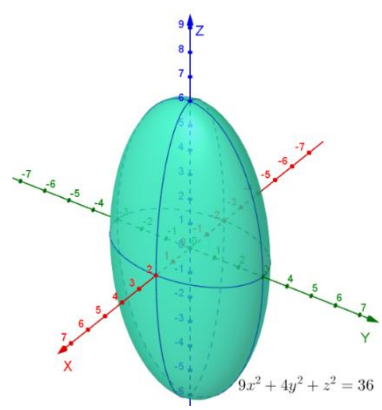


Figura 2.1-3: Superficie cuadrática

Definición 2. Se llama **superficie** al conjunto de puntos, y solamente de aquellos puntos, cuyas coordenadas satisfacen una sola ecuación de la forma $F(x, y, z) = 0$. Por ejemplo, la superficie representada en la Figura 2.1-3.

Definición 3. La **intersección de una superficie** en un eje coordenado es la coordenada correspondiente del punto de intersección de la superficie y el eje coordenado.

2.1.2.1 Procedimiento para el estudio de las superficies

Antes en la Sección 2.1 se comentó que Lehmann (1980) propone un procedimiento compuesto de cinco pasos para el estudio de las superficies; el quinto paso "extensión de la superficie" hace referencia a la determinación de los intervalos de variación para los cuales los valores de x, y y z son valores reales, al despejar una de las variables en función de las otras dos. Teniendo la extensión se puede determinar: la localización general de la superficie en el espacio coordenado y si la superficie es cerrada o de extensión indefinida.

Para ilustrar estos 5 pasos, se usa la siguiente ecuación como ejemplo:

$$9x^2 + 4y^2 + z^2 = 36 \tag{3}$$

Cuando la ecuación no está en forma canónica es necesario expresarla de esta forma ya que facilita determinar las propiedades de la superficie que representa. Para la expresión (3), basta con dividirla entre 36 para expresarla en su forma canónica, como sigue:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{36} = 1 \tag{4}$$

Intersecciones: Las intersecciones con los ejes y los planos coordenados se hallan de manera análoga a como se hace en la geometría analítica en $\mathbb{R}^2$; esto es, reemplazando a x, y ó z por cero y haciendo los respectivos estudios de corte, dependiendo de cuál sea la intersección que se quiere hallar.

A continuación, se hallan las intersecciones con los ejes y los planos coordenados de la ecuación (4):

Si $x = 0$, se obtiene en el plano YZ la elipse: $\dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{36} = 1$

si $y = 0$, se obtiene en el plano XZ la elipse: $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{z^2}{36} = 1$

si $z = 0$, se obtiene en el plano XY la elipse: $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

Reemplazando por cero a dos de las variables se obtienen los cortes con los ejes coordenados

Si $x = 0$ y $y = 0$ se obtiene que los cortes con el eje z son ± 6: $\dfrac{z^2}{36} = 1, z = \pm 6$

Si $x=0$ y $z=0$ se obtiene que los cortes con el eje y son ± 3: $\quad \dfrac{y^2}{9}=1, y=\pm 3$

Si $z=0$ y $y=0$ se obtiene que los cortes con el eje x son ± 2: $\quad \dfrac{x^2}{4}=1, x=\pm 2$

Por lo tanto, las intersecciones con el eje X son ± 2 , con el eje Y ± 3, con el eje Z ± 6. Las intersecciones de la superficie con los planos coordenados (ver Figura 2.1-4) son: con el plano XY la elipse $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1,\ z=0$; con el plano XZ la elipse $\frac{x^2}{4}+\frac{z^2}{36}=1,\ y=0$ y con el plano YZ la elipse $\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{36}=1,\ x = 0$.

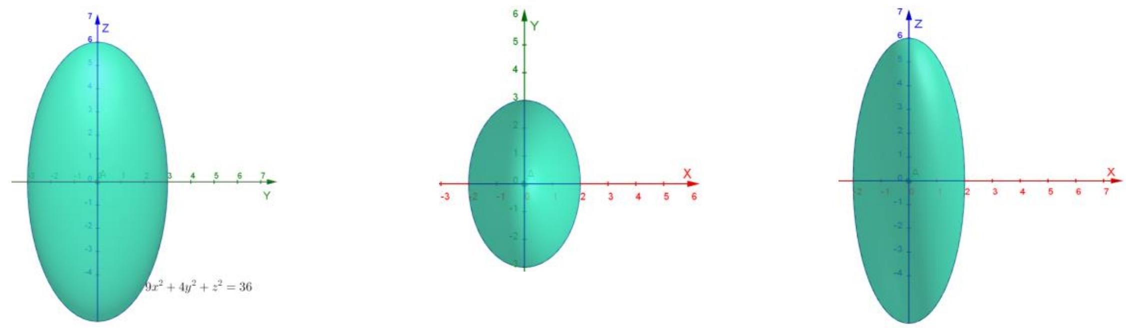


Figura 2.1-4: Intersecciones de los planos coordenados con la superficie $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{36}=1$

Simetría: La superficie es simétrica con respecto a los planos YZ, XY y XZ, los ejes X, Y y Z y el origen.

Secciones: Las secciones se determinan cortando la superficie por planos paralelos a los planos coordenados. Se reemplaza una a una las variables x, y y z por k -siendo k una constante arbitraria- y haciendo los respectivos despejes, se obtienen los respectivos cortes por planos paralelos a los planos coordenados como sigue:

Si se corta la superficie (4) por los planos paralelos a cada uno de los planos coordenados, se obtienen diferentes curvas en las intersecciones de estos planos con la superficie -llamadas curvas de nivel -. Siendo k una constante: los planos $z = k$ determinan las elipses $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}= \frac{36-k^2}{36},\ z = k$, siempre que $k\leq 6$; los planos $y = k$ cortan a la superficie en las elipses $\frac{x^2}{4}+\frac{z^2}{36}=\frac{9-k^2}{9},\ y = k$, siempre que $k\leq 3$; los planos $x = k$ cortan a la superficie en las elipses $\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{36}=\frac{4-k^2}{4},\ x = k$, (ver Figura 2.1-5).

Figura 2.1-5: Sección de un plano paralelo al plano coordenado XY en el elipsoide $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{36}=1$ y secciones de planos paralelos al plano coordenado XY.

Más adelante se precisa un procedimiento para estudiar la propiedad simetrías en una superficie.

Extensión. Por la ecuación (4) se observa que no hay restricciones para los valores que x, z y y pueden tomar en $\mathbb{R}$. En la Figura 2.1-5. a) se exhibe la representación luego de hacer la discusión de su respectiva ecuación.

Este procedimiento es análogo para el estudio de todas las superficies. En lo que sigue, se presentan las definiciones, teoremas y procedimientos necesarios para poder precisar cada uno de los elementos que hacen parte del procedimiento propuesto por Lehmann (1980), particularmente ajustado a las superficies que interesan abordar en este estudio.

Inicialmente se hace un estudio enfocado en la simetría para luego empezar a estudiar las intersecciones con los ejes coordenados, intersecciones de los planos coordenados con la superficie, las secciones por planos paralelos a los planos coordenados y extensión de las ecuaciones de las superficies que se abordan en este estudio; paralelamente se hace una clasificación en dos tipos de superficies según sus propiedades.

2.1.2.2 Procedimiento para determinar la simetría de una superficie

Definición 4. Simetría respecto a un punto. Dos puntos diferentes P_1 y P_2 en el espacio son simétricos respecto a un punto P, si el punto P es punto medio del segmento que tiene por extremos los puntos P_1 y P_2.

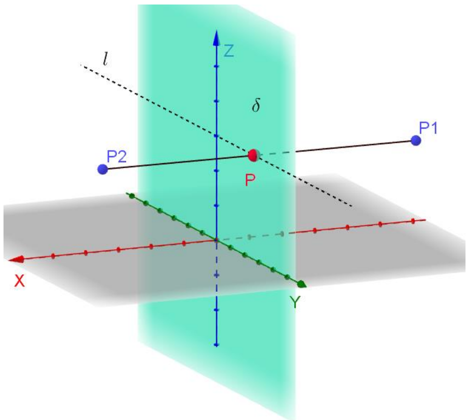


Figura 2.1-6: Puntos simétricos respecto a un plano, una recta y un punto

Definición 5. Simetría respecto a una recta. Dos puntos diferentes P_1 y P_2 en el espacio son **simétricos** con respecto a una recta l en el plano δ si la recta l es mediatriz del segmento determinado por dos puntos P_1 y P_2.

Simetría respecto a un plano. Se dice que dos puntos diferentes P_1 y P_2 en el espacio son **simétricos** con respecto a un plano δ si y solamente si el plano es el plano mediador del segmento que tiene por extremos los puntos P_1 y P_2. En la Figura 2.1-6 se ilustra la simetría respecto a un punto, una recta y un plano.

Definición 6. Se dice que una superficie es **simétrica** con respecto a un plano δ si el simétrico de cada punto de la superficie, respecto al plano δ, es también un punto de la superficie.

Para ilustrar, se selecciona la superficie cuya ecuación es $9x^2 + 4y^2 + z^2 = 36$ que se ha considerado anteriormente. Esta vez se aborda de manera más detallada el estudio relativo a la simetría. Se había dicho que la superficie $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{36} = 1$ es simétrica con respecto a los planos YZ, XY *y* XZ, los ejes X, Y *y* Z y el origen. A continuación, se explica el porqué de esta propiedad:

Para estudiar las simetrías respecto a un punto, una recta y un plano en $\mathbb{R}^\mathbf{3}$ se hace un estudio análogo al realizado en $\mathbb{R}^\mathbf{2}$, este consiste en hacer un análisis del signo de las variables según la simetría que se quiere hallar.

En $\mathbb{R}^\mathbf{2}$ solo se tienen dos variables (x y y), si se analiza el signo de las dos variables y éstas no modifican la curva, la curva es simétrica respecto al origen. Por ejemplo, si se toma un punto cualquiera $P\ x,y$ que pertenezca a una curva $f\ x,y\ = 0$, para que la curva sea simétrica respecto al origen debe haber otro punto $P'\ -x,-y$ que pertenezca a la curva de tal manera que el origen sea el punto medio del segmento PP' y al reemplazar sus coordenadas en la ecuación de la curva, estas la satisfagan.

Por otra parte, para ver si hay simetría respecto a un eje se analiza el signo de la variable contraria a la del eje elegido, en caso de que la curva no se modifique ésta es simétrica respecto al eje elegido. Por ejemplo, si un punto cualquiera $P \; x, y$ pertenece a la curva para que la curva sea simétrica respecto al eje X debe haber otro punto $P' \; x, -y$ sobre la curva, en consecuencia el segmento PP' queda bisecado perpendicularmente por el eje X; en este caso, al reemplazar x e y en la ecuación de la curva por las coordenadas de P', estas satisfacen la expresión.

Ahora extendiendo este estudio a las superficies cuadráticas en $\mathbb{R}^{\mathbf{3}}$ las simetrías se hallan de la siguiente manera:

Como en $\mathbb{R}^3$ se tienen tres variables (x, y y z), para hallar la simetría respecto al origen se hace un análisis de las tres variables; es decir, si un punto cualquiera $P \; x, y, z$ pertenece a la superficie $f \; x, y, z \; = 0$ y el punto $P' \; -x, -y, -z$ también pertenece a la superficie por lo que el origen es el punto medio del segmento PP' entonces la curva será simétrica respecto al origen. Para ver si una superficie es simétrica respecto a un eje coordenado, se hace un análisis de los signos de las dos variables contrarias a la del eje respecto al que se quiere ver la simetría y si al cambiar los signos de las variables la curva no se altera esta es simétrica respecto a este eje. Por ejemplo, si se considera el mismo punto P pero el punto P$'$ tiene por coordenadas $P' \; x, -y, -z$ y el eje X es la bisectriz del segmento PP' entonces la superficie es simétrica respecto al eje X.

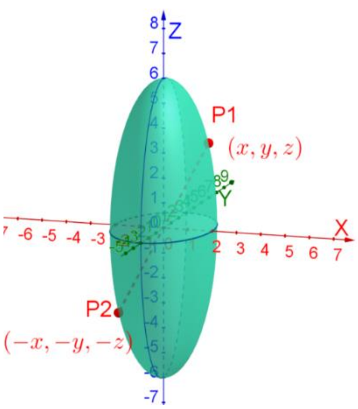


Figura 2.1-7: Simetría respecto al origen de la superficie $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{36} = 1$

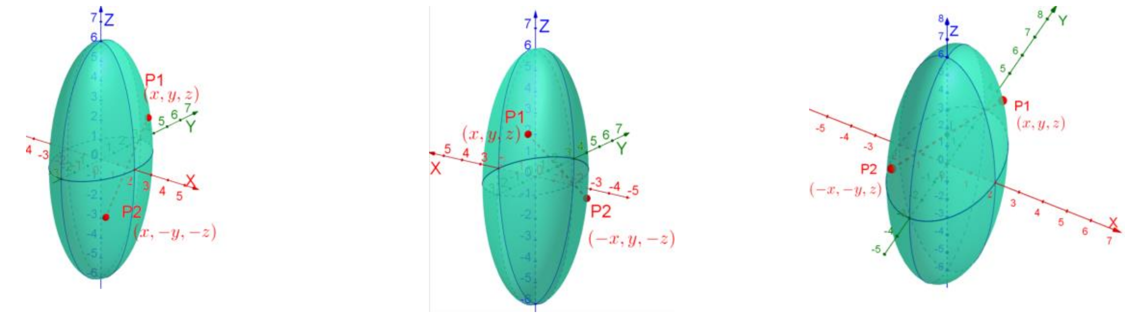
En este caso la superficie (5), es simétrica respecto al origen y a los tres ejes coordenados dado que:

Si un punto cualquiera $P \; x, y, z$ pertenece a la superficie y $P' \; -x, -y, -z$ también, entonces la superficie es simétrica respecto al origen. (ver Figura 2.1-7).

Si un punto cualquiera $P \; x, y, z$ pertenece a la superficie y $P' \; x, -y, -z$ también, entonces la superficie es simétrica respecto a el eje X (ver *Figura 2.1-8*a).

Si un punto cualquiera $P \; x, y, z$ pertenece a la superficie y $P' \; -x, y, -z$ también, entonces la superficie es simétrica respecto al eje Y (ver *Figura 2.1-8* b).

Si un punto cualquiera $P \; x, y, z$ pertenece a la superficie y $P' \; -x, -y, z$ también, entonces la superficie es simétrica respecto a el eje Z. (ver Figura 2.1-8)



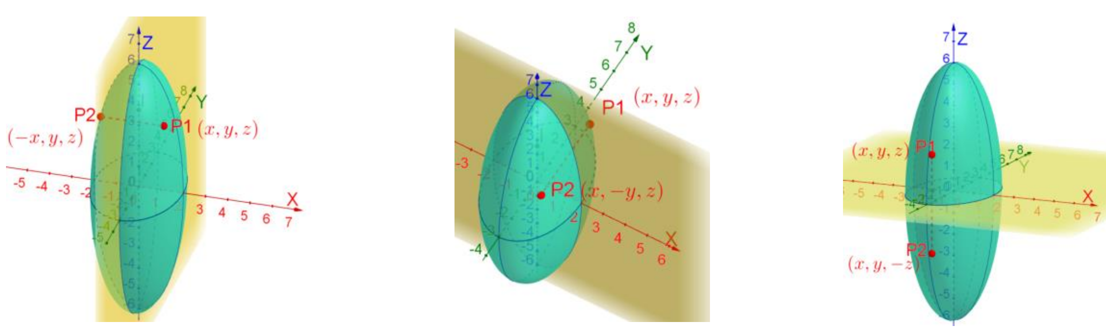
a) Respecto al eje X b) Respecto al eje Y c) Respecto al eje Z

Figura 2.1-8: Simetrías de la superficie $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{36} = 1$ respecto a los ejes coordenados

Por otra parte, si se quiere ver si una superficie es simétrica respecto a un plano, se analiza el signo de la variable que no hace parte del plano del que se quiere establecer la simetría de la superficie. Por ejemplo, si una superficie es simétrica respecto al plano XY, entonces hay un punto $P\ x, y, z$ y un punto $P'\ x, y, -z$ que pertenecen a la superficie y cumplen que el plano XY es el plano mediador del segmento PP' y al cambiar el signo de la variable z la superficie no se altera.

En el caso de la ecuación (5) la superficie es simétrica respecto a los tres planos coordenados:

Respecto al plano XY, pues si (x, y, z) pertenece a la superficie entonces $(x, y, -z)$ también pertenece a la superficie (ver Figura 2.1-9 c)). Lo es también respecto al plano XZ dado que si (x, y, z) pertenece a la superficie entonces $(x, -y, z)$ también pertenece a la superficie (ver Figura 2.1-9 b)). Análogamente también es simétrica respecto al plano YZ pues si (x, y, z) pertenece a la superficie entonces $(-x, y, z)$ también pertenece a la superficie (ver Figura 2.1-9 a).



a) Respecto al plano YZ b) Respecto al plano XZ c) Respecto al plano XY

Figura 2.1-9: Simetrías de la superficie $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{36}=1$ respecto a los planos coordenados

Con base en esto último se siguen los siguientes teoremas:

Teorema 2. Si la ecuación de una superficie no se altera cuando se cambia el signo de una de las variables, la superficie es simétrica con respecto al plano coordenado a partir del cual se analiza la variable cuyo signo se modificó y recíprocamente.

Teorema 3. Si la ecuación de una superficie no se altera cuando se les cambia el signo a dos de sus variables, la superficie es simétrica con respecto al eje coordenado a lo largo del cual se estudia la variable cuyo signo no se cambió, y recíprocamente.

Teorema 4. Si la ecuación de una superficie no se altera cuando sus tres variables cambian de signo, la superficie es simétrica con respecto al origen, y recíprocamente.

A continuación, se presenta la Tabla 2.1-1 en la que encuentra resumida la información de los tres teoremas anteriores.

Tabla 2.1-1 Simetría de una superficie

Si la ecuación de la superficie no se altera cuando las variables x , y y z son reemplazadas por	La superficie es simétrica con respecto al
$-x\ , y, z$	Plano YZ
$x\ , -y, z$	plano XZ
$x\ , y, -z$	Plano XY
$-x, -y, z$	Eje Z
$-x, y. -z$	eje Y
$x. -y. -z$	eje X
$-x\ , -y, -z$	Origen

2.1.2.3 Superficies cuadráticas en $\mathbb{R}^3$

En este capítulo se presentan las superficies cuadráticas de tipo I o superficies cuadráticas que tienen un centro (son simétricos respecto a un punto; en este estudio se hará respecto al origen) y de tipo II o superficies cuadráticas sin centro (no son simétricas respecto al origen). A continuación, se presenta la información respecto a las superficies de tipo I, que son las de interés para este estudio. Para ello, se precisa su expresión o ecuación en su forma general, y a partir de las condiciones de sus coeficientes, una discusión de las especies de superficies que son casos especiales de esta.

2.1.2.3.1 Clasificación de las superficies cuadráticas en $\mathbb{R}^3$

Las superficies cuadráticas en $\mathbb{R}^3$ se pueden clasificar en dos tipos: las superficies cuadráticas que tienen el origen como centro de simetría y las superficies cuadráticas sin centro de simetría.

Las superficies cuadráticas que tienen como centro de simetría el origen, tienen por expresión la ecuación $Mx^2 + Ny^2 + Pz^2 = R$[1]. La naturaleza de las especies de superficies de tipo I depende de los coeficientes (M, N, P y R), de los cuales uno o más pueden ser cero, pero no todos.

A continuación, se muestra el comportamiento de cada tipo de superficie dependiendo de si los coeficientes son positivos, negativos o nulos en cada ecuación, para las superficies cuadráticas de tipo I:

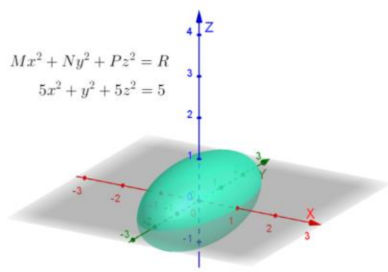
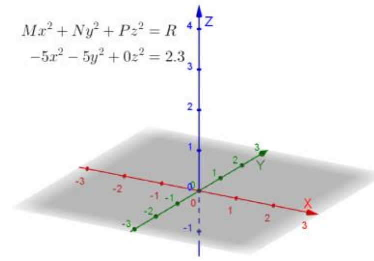
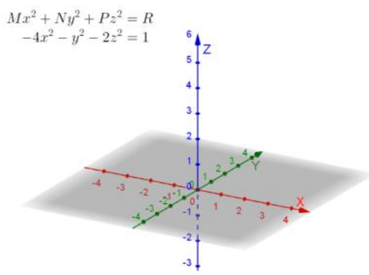
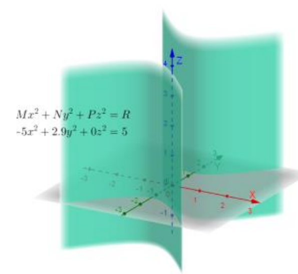
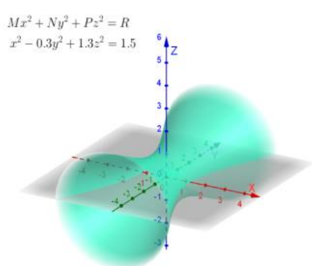
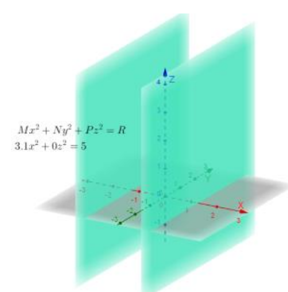
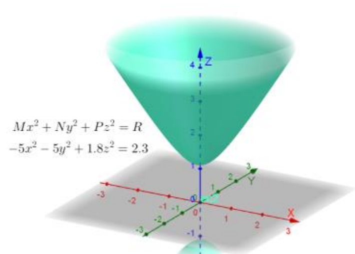
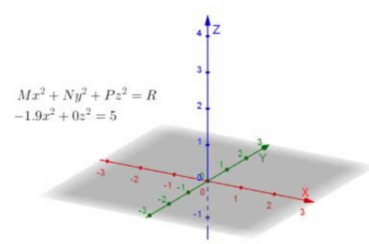
Dada la expresión

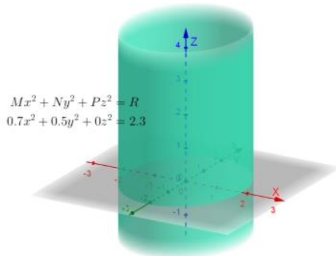
$$Mx^2 + Ny^2 + Pz^2 = R \tag{5}$$

Cuando R es mayor que cero y los coeficientes M, N, P toman valores positivos, negativos o cero surgen las siguientes superficies cuadráticas:

[1] *El tipo II de superficies cuadraticas se puede expresar con la ecuación* $Mx^2 + Ny^2 = Sz$ y haciendo un estudio de sus coeficientes se pueden generar dos tipos de superficies el paraboloide elíptico y el paraboloide hiperbólico (Ver anexo A).

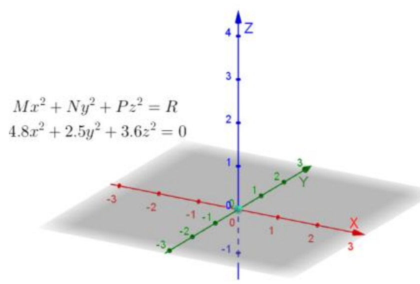
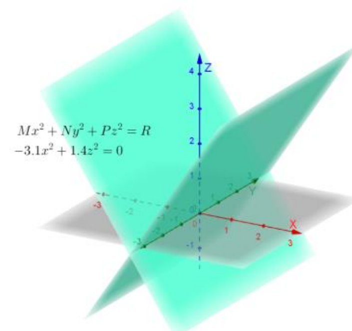
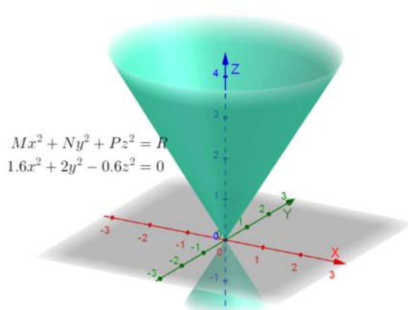
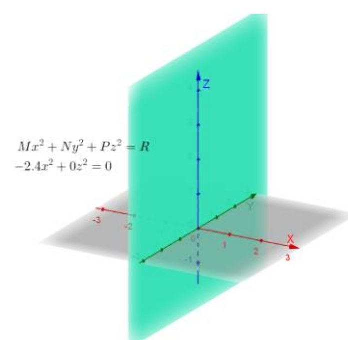
Tabla 2.1-2 Superficies cuadráticas de tipo I con R mayor que cero

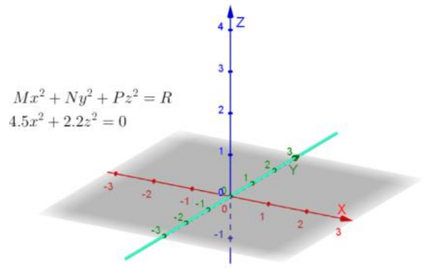
Coeficientes M, N, P	Lugar geométrico	Coeficientes M, N, P	Lugar geométrico
Todos positivos	 Elipsoide	Uno cero y dos negativos	 Ningún lugar geométrico
Todos negativos	 Ningún lugar geométrico	Uno cero, uno positivo y uno negativo	 Cilindro hiperbólico recto
Dos positivos y uno negativo	 Hiperboloide de una hoja	Dos cero, uno positivo	 Dos planos paralelos diferentes
Uno positivo y dos negativos	 Hiperboloide de dos hojas	Dos cero, uno negativo	 Ningún lugar geométrico

Uno cero y dos positivos	 Cilindro elíptico

Por otra parte, si R es igual a cero y los coeficientes M, N, P toman valores positivos, negativos o cero surgen las siguientes superficies cuadráticas:

Tabla 2.1-3 Superficies cuadráticas de tipo I con R igual a cero

Coeficientes M, N, P	Lugar geométrico	Coeficientes M, N, P	Lugar geométrico
Todos del mismo signo	 Un solo punto, el origen	Uno cero dos de signos contrarios	 Dos planos que se cortan
Dos positivos y uno negativo	 Cono recto	Dos cero	 Un plano coordenado (dos planos coincidentes)

Uno cero y dos del mismo signo	 Todos los puntos sobre un eje coordenado

Las **superficies cuadráticas de tipo uno** se puede escribir de forma canónica como sigue:

Se multiplica la ecuación (5) por el reciproco de R: $\frac{Mx^2}{R} \pm \frac{Ny^2}{R} \pm \frac{Pz^2}{R} = 1$

Luego, reescribiendo esta expresión se obtiene: $\pm \frac{1}{\frac{R}{M}} x^2 \pm \frac{1}{\frac{R}{N}} y^2 \pm \frac{1}{\frac{R}{P}} z^2 = 1$

Haciendo $a^2 = \frac{R}{M} \quad b^2 = \frac{R}{N} \quad c^2 = \frac{R}{P}$ la ecuación (5) se puede expresar de forma canónica como sigue:

$$\pm \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{6}$$

Con base en la expresión canónica (6) determinada a partir de la ecuación (5), se deduce que cada superficie cuadrática de Tipo I que tiene el origen como centro de simetría –o centro de la superficie–, tiene a los planos coordenados como planos de simetría –llamados también planos principales–, a los tres ejes coordenados como ejes de simetría –llamados también ejes principales.

Si todos los coeficientes en la ecuación (6) son negativos, no hay lugar geométrico. Por tanto, si se considera los tres casos, según el número de coeficientes positivos sea tres, dos o uno, se tiene entonces algunos tipos de superficies como:

a) Esfera y Elipsoide, todos los coeficientes positivos.

b) Hiperboloide de una hoja, dos coeficientes positivos, uno negativo.

c) Hiperboloide de dos hojas, un coeficiente positivo, dos negativos.

d) un cilindro elíptico recto un coeficiente es cero y dos son positivos.

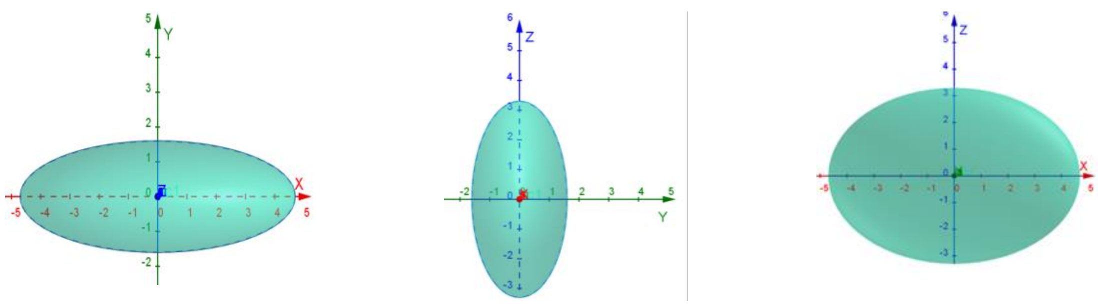
A continuación, se amplíala información sobre las Superficies a), b) c) y d):

a) **Elipsoide:** La forma canónica de la ecuación del elipsoide es

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{7}$$

Respecto a la discusión de la ecuación se tiene:

- Las intersecciones con los ejes X , Y y Z son $\pm\, a$, $\pm\, b$ y $\pm\, c$ respectivamente, siguiendo el procedimiento descrito en la sección 2.1.2.1 de superficies cuadráticas. Los seis puntos de intersección del elipsoide con los ejes coordenados se llaman vértices.
- Si $a>b>c$, los segmentos AA', BB' y CC' se llaman, respectivamente, eje mayor, eje medio y eje menor del elipsoide (ver Figura 2.1-11). De manera análoga, $b>a>c$ o $b>c>a$.
- Todas las intersecciones de los planos coordenados con la superficie son elipses. Si se asume que $z=0$ se obtiene en el plano XY, la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, si $x=0$, se obtiene en el plano YZ la elipse $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, y si $y=0$, en el plano XZ se forma la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$. Como se muestra en la Figura 2.1-10.



$a)\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $\quad$ $b)\,\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ $\quad$ $c)\,\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

Figura 2.1-10: Intersecciones de los planos coordenados con una superficie elipsoide

- La superficie es simétrica con respecto a todos los planos coordenados, a todos los ejes coordenados, y al origen (ver Figura 2.1-10).
- Despejando $\frac{z^2}{c^2}$ de $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ se obtiene $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{z^2}{c^2}$ y resolviendo se tiene $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{c^2-k^2}{c^2}$, $k=z$, que es la ecuación de las elipses con $k\leq\pm c$ obtenidas de la intersección de los planos paralelos con el plano XY con la superficie. De manera análoga para el plano XZ y YZ

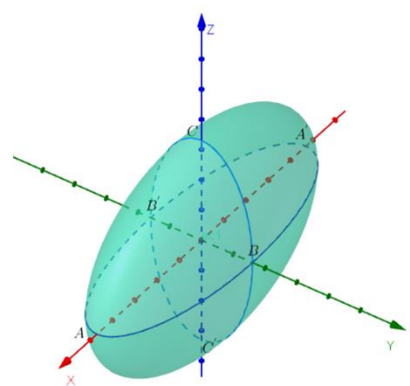


Figura 2.1-11: Elipsoide

se obtienen las ecuaciones de las elipses $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=\frac{b^2-k^2}{b^2}, k \leq \pm b$ y $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\frac{a^2-k^2}{a^2}, k \leq \pm a$, respectivamente.

Por lo tanto, todas las secciones del elipsoide hechas por los planos paralelos a los coordenados son elipses dentro de los límites de la superficie, que es cerrada y esté contenida en su totalidad dentro del paralelepípedo que tiene por caras los planos $x = \pm\, a$, $y = \pm\, b$ y $z = \pm\, c$. En la **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.** se presenta la construcción de la elipse después de la discusión de su ecuación.

A partir de lo anterior se puede ver que la esfera es un caso particular del elipsoide donde $a^2 = 1,\ b^2 = 1$ y $c^2 = 1$ por lo que el estudio de la ecuación que se presenta a continuación es análogo al del elipsoide.

D. La **superficie esférica** se define como el lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan de un punto fijo. La distancia constante se llama radio y el punto fijo centro.

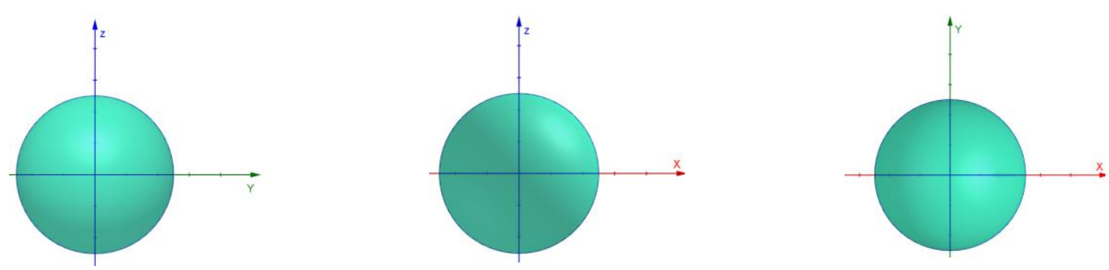
Teorema 6. La ecuación de la superficie esférica cuyo centro es el punto *(h, k, l)* y cuyo radio es la constante r es

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 + (z-l)^2 = r^2 \tag{8}$$

Respecto a la discusión de la ecuación se hará para el caso particular de la esfera cuando su centro es el origen: $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$

En este caso se tiene:

- Las intersecciones con los ejes X , Y y Z son $\pm\, r$, $\pm\, r$ y $\pm\, r$ respectivamente.
- Todas las intersecciones de los planos coordenados con la superficie son circunferencias (ver Figura 2.1-12).



$y^2 + z^2 = r^2$ $\qquad$ $x^2 + z^2 = r^2$ $\qquad$ $x^2 + y^2 = r^2$

Figura 2.1-12: Intersección de los planos coordenados con una esfera

- La superficie es simétrica con respecto a todos los planos coordenados, a todos los ejes coordenados, y al origen.
- Todas las secciones del elipsoide hechas por los planos paralelos a los ejes coordenados son circunferencias:

Con el plano XY, $x^2 + \ y^2 \ = \ r^2 - k^2$, $k = z$

Con el plano XZ, $x^2 + \ z^2 = \ r^2 - k^2$, $k = y$; y

Con el plano YZ, $\quad y^2 + z^2 = \ r^2 - k^2, k = x$.

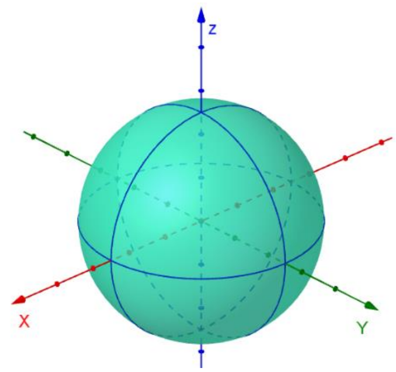


Figura 2.1-13: Esfera

Dentro de los límites de la superficie, es cerrada y está contenida en su totalidad dentro del paralelepípedo que tiene por caras los planos $x = \pm\ r$, $y = \pm\ r$ y $z = \pm\ r$. En la Figura 2.1-13 se presenta la construcción de la esfera después de la discusión de su ecuación y en la Tabla 2.1-4 se ostenta de manera general la discusión de la ecuación del elipsoide

Tabla 2.1-4 Discusión de la ecuación del elipsoide.

Intersecciones con los ejes	X	$\pm\ a$
	Y	$\pm\ b$
	Z	$\pm\ c$
Intersecciones de los planos coordenados con la superficie	XY	Elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
	YZ	Elipse $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$
	XZ	Elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$
Secciones generadas por los planos paralelos a los coordenados	XY	Elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{c^2-k^2}{c^2}$, $k \leq \pm c$
	YZ	Elipse $\frac{y^2}{b^2} + \ \frac{z^2}{c^2} = \frac{a^2-k^2}{a^2}$, $k \leq \pm a$
	XZ	Elipse elipses $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{b^2-k^2}{b^2}$, $k \leq \pm b$,
Simetría	Planos	Todos
	Ejes	Todos
	Origen	Sí

b) **Hiperboloide de una hoja**: El hiperboloide de una hoja tiene tres formas canónicas de la ecuación; estas son:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \qquad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \qquad -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{9}$$

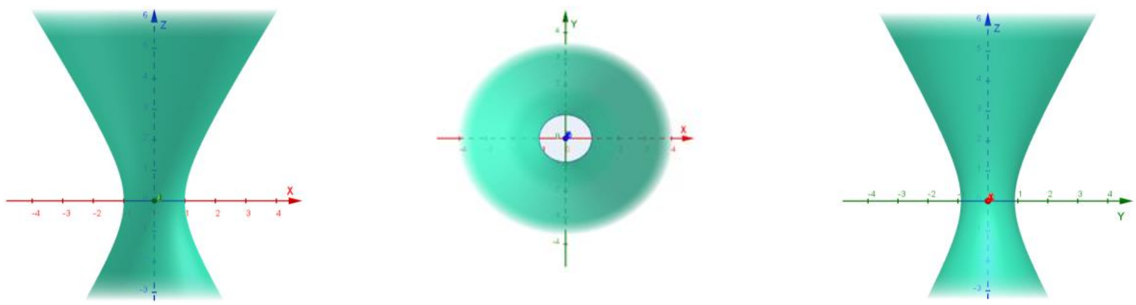
Como las tres superficies solo difieren en sus posiciones con relación a los ejes coordenados la siguiente discusión de la ecuación servirá para las tres:

- Las intersecciones con los ejes X y Y son $\pm\, a$ y $\pm\, b$ respectivamente. No hay intersecciones con el eje Z.
- Las intersecciones de los planos XY, XZ y YZ (ver la Figura 2.1-14) con la superficie son:

  Con el plano XY la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ z=0$

  Con el plano XZ la hipérbola $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\ y=0$

  Con el plano YZ la hipérbola $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\ x=0$



a) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1, \quad y=0$ *b)* $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1, \quad z=0$ *c)* $\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1, \quad x=0$

Figura 2.1-14: Intersecciones de los planos coordenados con una superficie hiperboloide de una hoja.

- La superficie es simétrica con respecto a todos los planos coordenados, ejes coordenados y al origen.

- Las secciones de la superficie por planos paralelos al plano XY, XZ y YZ son respectivamente las elipses: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{k^2}{c^2},\ z=k$; y las hipérbolas $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{k^2}{b^2},\ y=k$; $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{k^2}{a^2},\ z=k.$

Se deduce que, a medida que k aumenta de valor, las elipses aumentan de tamaño. Además, que la superficie no es cerrada, sino que se extiende indefinidamente (ver Figura 2.1-15).

- Cualquier hiperboloide de una hoja se extiende a lo largo del eje coordenado correspondiente a la variable cuyo coeficiente es negativo en la forma canónica de su ecuación.

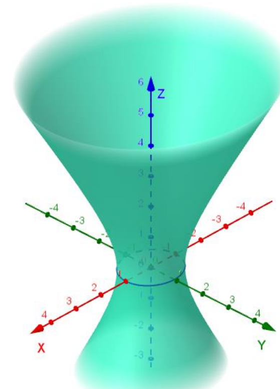


Figura 2.1-15: Hiperboloide de una hoja

La Tabla 2.1-5 presenta de manera general la discusión de la ecuación del hiperboloide de una hoja.

Tabla 2.1-5 Discusión de la ecuación del hiperboloide de una hoja

Intersecciones con los ejes	X	$\pm a$
	Y	$\pm b$
	Z	No hay
Intersecciones de los planos coordenados con la superficie	XY	Elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ z=0$
	YZ	Hipérbola $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\ x=0$
	XZ	Hipérbola $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\ y=0$
Secciones de la superficie por los planos paralelos al plano	XY	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{k^2}{c^2}, \qquad z=k$
Simetría	Planos	Todos
	Ejes	Todos
	Origen	Sí

c) **Hiperboloide de dos hojas:** al igual que el de una hoja, tiene tres formas canónicas de la ecuación; estas son:

$$a)\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \qquad b)-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \qquad c)-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (10)$$

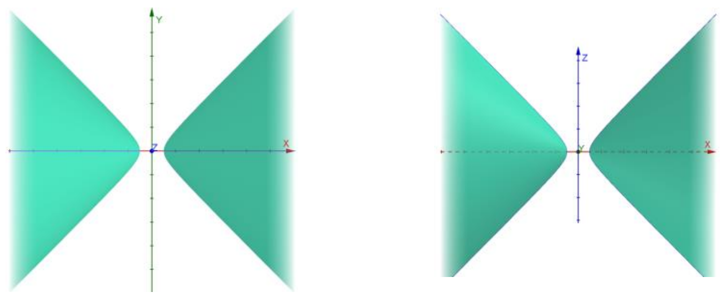
La siguiente discusión de la ecuación (10) a) será representativa para las otras dos (ver resumen en Tabla 2.1-6):

- Las intersecciones con el eje X es $\pm\, a$. No hay intersecciones con el eje Y y Z.
- Las intersecciones sobre los planos XY y XZ con la superficie son (ver Figura 2.1-16):

Con el plano XY la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,\ z = 0$

Con el plano XZ la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,\ y = 0$

No hay con el plano YZ



$a)\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1, \qquad z = 0 \qquad b)\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \qquad y = 0$

Figura 2.1-16: Intersecciones de los planos coordenados con una superficie hiperboloide de dos hojas

- La superficie es simétrica con respecto a todos los planos coordenados, ejes coordenados y al origen.
- Las secciones de la superficie por planos paralelos al plano YZ son las elipses $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{k^2}{a^2} - 1,\ x = k$, siempre que $|k| > a$. Para $k = \pm\, a$, se tiene solamente los dos puntos de intersección con el eje X , $(\pm a, 0{,}0)$. Para valores de k comprendidos en el intervalo $-a < k < a$, no hay lugar geométrico. De esto se sigue que la superficie no es cerrada, sino que está compuesta de dos hojas o ramas diferentes que se extienden indefinidamente.
- Cualquier hiperboloide de dos hojas se extiende a lo largo del eje coordenado correspondiente a la variable cuyo coeficiente es positivo en la forma canónica de su ecuación.

Tabla 2.1-6 Discusión de la ecuación del hiperboloide de dos hojas

Intersecciones con los ejes	X	$\pm\, a$
	Y	No hay
	Z	No hay
Intersecciones de los planos coordenados con la superficie	XY	Hipérbola $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\ z=0$
	XZ	Hipérbola $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\ y=0$
	YZ	No hay
Secciones de la superficie por los planos paralelos al plano	YZ	$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\frac{k^2}{a^2}-1,\ x=k,\ k\ =\pm\, a,$
Simetría	Planos	Todos
	Ejes	Todos
	Origen	Sí

En el caso en el que un coeficiente es cero y dos positivos se obtiene un cilindro elíptico recto.

d) Cilindro

Se llama superficie cilíndrica a la generada por una recta que se mueve de tal manera que se mantiene siempre paralela a una recta fija dada y pasa siempre por una curva fija dada (Ver Figura 2.1-17), la recta móvil se llama generatriz y la curva fija directriz de la superficie cilíndrica.

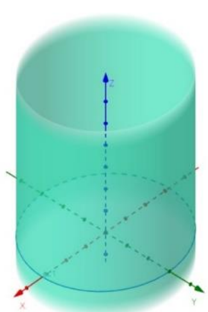


Figura 2.1-17: Cilindro

Teorema 5. Una ecuación representa una superficie cilíndrica recta, cuyas generatrices son perpendiculares al plano coordenado que contiene a la directriz, si y solamente si, la ecuación carece de una de las tres variables y esta no es medida en el plano que contiene la directriz. El lugar geométrico plano de esta ecuación es la directriz.

A continuación, se presenta mediante la Tabla 2.1-7 una clasificación de las superficies cuadráticas de tipo I en $\mathbb{R}^3$ de manera general. En la primera columna se presentan las condiciones para R. Qué pasa si es mayor que cero o igual a cero, en la segunda columna se encuentran las condiciones para los coeficientes dadas por las combinaciones entre los signos de los coeficientes y en la tercera columna se presentan los lugares geométricos como resultado de la primera y segunda columna.

Tabla 2.1-7 Características de cuadráticas de curvas $Mx^2 + \ Ny^2 + \ Pz^2 = R$ según parámetros

Coeficientes		Lugar geométrico
R^*	M, N, P	
Mayor que 0	Todos positivos	Elipsoide
	Todos negativos	Ningún lugar geométrico
	Dos positivos y uno negativo	Hiperboloide de una hoja
	Uno positivo y dos negativos	Hiperboloide de dos hojas
	Uno cero y dos positivos	Cilindro elíptico
	Uno cero y dos negativos	Ningún lugar geométrico
	Uno cero, uno positivo y uno negativo	Cilindro hiperbólico recto
	Dos cero, uno positivo	Dos planos paralelos diferentes
	Dos cero, uno negativo	Ningún lugar geométrico
Igual a 0	Todos del mismo signo	Un solo punto, el origen
	Dos positivos y uno negativo	Cono recto
	Uno cero, dos del mismo signo	Todos los puntos sobre un eje coordenado
	Uno cero dos de signos contrarios	Dos planos que se cortan
	Dos cero	Un plano coordenado (dos planos coincidentes)

*Cuando $R \ < 0$, se invierten los signos de los coeficientes $M. N$ y P: los lugares geométricos correspondientes estarán dados entonces como para $R \ > \ 0$

Un estudio similar se puede hacer para las superficies cuadráticas de tipo dos cuyas propiedades se muestran en el anexo 1. Por otra parte, dado que los estudiantes para los que se realizó el diseño de tareas apenas están iniciando en su aprendizaje frente a las superficies cuadráticas, nos vamos a concentrar solo en las de tipo uno (elipsoide, hiperboloide de una hoja, hiperboloide de dos hojas y cilindro elíptico).

2.2 Referentes didácticos

En esta sección se presentan los referentes didácticos que fundamentan el trabajo. Éste versa sobre tres aspectos esencialmente: visualización en tres dimensiones, diseño de tareas, y uso de software especializados para procesos de instrucción. Dado que se pretende diseñar secuencias de tareas que abordan el proceso de visualización de superficies cuadráticas desde una perspectiva analítica, se expone una descripción de la visualización de expresiones algebraicas a la manera de Mason (1987); así mismo, se ilustran indicadores de habilidades de visualización espacial basados en las propuestas de Ramírez (2012) y Ramírez y Flores (2017), aterrizadas a las superficies cuadráticas. Como las tareas que constituirán el diseño de tareas precisan del uso de un software especializado, se presenta una descripción del potencial de este artefacto en los procesos de visualización en el dominio de la geometría de analítica. Para proponer tareas que apunten al logro de objetivos específicos, es necesario contar con un referente relativo al diseño de tareas; se describe, entonces, la propuesta que hacen respecto a este Gómez, Mora y Velasco (2018). Por otra parte, para la descripción de algunos de los elementos de las secuencias se tienen en cuenta los objetos primarios del enfoque Ontosemiótico, según Godino, Batanero y Font, 2007 (2007).

2.2.1 La visualización en geometría tridimensional

2.2.1.1 Visualizando con los ojos del álgebra

La visualización no es un proceso que solo se pueda lograr a partir de una representación, sino que también puede realizarse en el álgebra, más específicamente con los símbolos. Ver con los ojos del álgebra o hacer palpable los símbolos como lo llama Mason (1987) es un proceso importante en las matemáticas. Al observar una expresión algebraica hay ciertos patrones que informan aspectos sobe el objeto representado y que pueden ser interpretadas de una forma específica tal como lo expresa Mason (1987):

> A menudo, la meta no es específicamente algebraica, sino más bien una búsqueda de patrones o formas reconocibles en los símbolos. Una expresión cuadrática en x y y con iguales coeficientes para x^2 y y^2 es un patrón tal asociado a un círculo. Más aún, la atención no está tanto en "los símbolos" sino "a través de los símbolos". Puesto de otra forma, los símbolos no son meras marcas sobre el papel, sino que indican o hablan de entidades que son casi palpables, casi substanciales. Cuando

esto sucede, los símbolos ya no son abstractamente simbólicos. (Mason, 1987, pág. 2)

Es decir, al "ver" las expresiones x^2 e y^2 juntas pareciera que el patrón llevara a interpretar que hay una circunferencia, como posible significado de los símbolos. Entonces la respuesta al interrogante *qué representan los símbolos* incluye necesariamente tener un tipo de interpretación sobre los símbolos.

Tratar de identificar ciertos patrones en la expresión analítica que permitan hacer una interpretación de esta, en otras palabras, algún tipo de significado es poner en práctica que los símbolos si nos están diciendo cosas. En nuestro caso un significado de la expresión analítica que se asocie a la representación gráfica de una superficie puede ser: el tipo de superficie especifico, o atributos del objeto tales como simetrías, intersecciones con ejes o planos, etc.

2.2.1.2 El uso de software para favorecer la visualización

La visualización es un componente básico para que los estudiantes aprendan geometría tridimensional (Gutiérrez, 1996). La visualización dinámica le permite a los estudiantes tener habilidades para razonar sobre las propiedades esenciales de las figuras, o el objeto matemático que se aborda (Christou, y otros, 2007). Hacer uso de herramientas tecnológicas o de software especializado en las clases de matemáticas se ha vuelto un recurso necesario; esto, por cuanto favorecen procesos de la actividad matemática tales como la visualización, exploración, conjeturación, conceptualización, etc. (Chaves, 2009; Castiblanco, Urquina, Camargo y Acosta, 2004). Es fundamental tener en cuenta que por su naturaleza los objetos matemáticos son abstractos y por lo tanto se debe recurrir a distintas representaciones para su estudio (Duval, 2004); considerar varias representaciones de un objeto y sus relaciones, favorece ostensiblemente su comprensión (Oviedo, Kashiro, Bnzaquen y Gorrochategui, 2012; Schilardii, 2014).

La literatura reporta maneras mediante las cuales se puede favorecer el uso de distintos sistemas de representación, incluso su conversión. Una de ellas es plantear problemas cuyas situaciones y soluciones involucren diversos sistemas de representación (Schilardii, 2014); otra consiste en la manipulación de un Entorno de Geometría Dinámica –EGD– (Gruszycki, Oteiza, Maras, Gruszycki, y Balles, 2012).

Usar software educativo para la enseñanza de la geometría analítica en este caso, permite un vínculo casi instantáneo entre dos representaciones, gráfica y algebraica. Ello, por cuanto permite, de manera simultánea, visualizar un cambio de la representación gráfica del objeto cuando hay un cambio de la representación algebraica y viceversa (Ezquerro, 2014). Tal como afirma Schilardi (2014), aun cuando en geometría analítica el registro más utilizado es la representación gráfica para precisar algunas propiedades de los objetos (pues facilita el aprendizaje), sería deseable que a la representación algebraica se le diera su lugar; la información que se obtiene de las dos representaciones se complementa y por lo tanto no se puede desligar una de la otra.

Con las ideas anteriores, la inclusión de herramientas tecnológicas, particularmente para el contexto de la geometría analítica, permite realizar un análisis del comportamiento de una superficie cuando los parámetros de una expresión algebraica se manipulan y se observan cambios en las representaciones gráficas. Blanco (2009) considera que, en un proceso de trabajo con computadora, la posibilidad de observar los efectos de cambiar un parámetro en una ecuación y ver lo que sucede en la representación gráfica se incrementa; en consecuencia, puede dar lugar a la formulación o verificación de nuevas conjeturas.

Por supuesto, el estudio y comprensión de objetos de la geometría analítica 3D también se beneficia del uso de estos recursos tecnológicos. González y Bolzicco (2019), por ejemplo, advierten que los elementos y propiedades de una superficie cuadrática se logran comprender mejor cuando se usa un entorno digital especializado al respecto; otros autores (e.g., Hoyos, Aristizabal, Vargas y Arcila, (2018); Montecino y Andrade, (2013) plantean que estos recursos fomentan la exploración y el trabajo autónomo del estudiante; en relación con el contenido, favorecen la rotación de las superficies para determinar sus elementos y realizar el cambio de representación de lo algebraico a lo gráfico.

Teniendo en cuenta la importancia de la inclusión de herramientas tecnológicas en la enseñanza de la geometría analítica, en nuestra propuesta de secuencia de tareas hacemos una integración entre la representación gráfica y la representación algebraica de superficies cuadráticas. De manera más específica, hacemos uso de los softwares GAnalítica3D y GeoGebra para desarrollar habilidades de visualización espacial, relativas al estudio de superficies cuadráticas. En la Sección 3.1.3 se exponen las habilidades de visualización que abordamos en este estudio y que intentamos poner en juego con el uso del software citado.

Antes de ello, consideramos propicio proveer una descripción del software que utilizaremos en el mismo.

2.2.2 Descripción del recurso GAnalitica3D

El software GAnalitica3D es producto resultado del proyecto de investigación “incorporación de recursos tecnológicos y contenidos educativos digitales mediante una estrategia de investigación pedagógica para el desarrollo de habilidades de visualización espacial en estudiantes de cálculo vectorial de la universidad del Quindío”, desarrollado por el grupo de estudio y desarrollo de software (GEDES). Consiste en un programa creado para actividades con objetos tridimensionales especialmente para el estudio de las superficies cuadráticas. Este consta de una ventana gráfica, donde se visualiza el plano cartesiano en $\mathbb{R}^3$ y los elementos que se generan en éste (ver Figura 2.2-1).

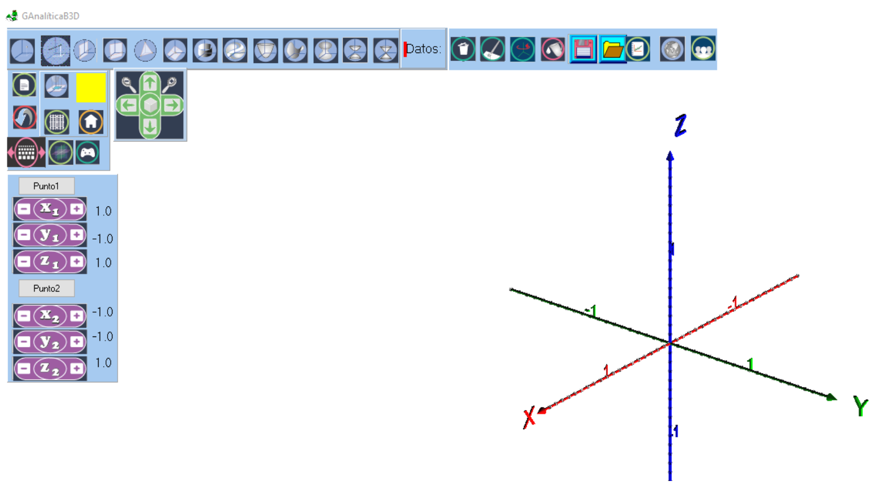


Figura 2.2-1 Pantalla principal del software GAnalitica3D

Además también consta de un menú principal (ver Tabla 2.2-1) y paneles de: configuración (ver Tabla 2.2-2), de control (ver Tabla 2.2-3), de control de actividades y de problemas (ver Tabla 2.2-4).

Tabla 2.2-1 Menú principal del software GAnalitica3D

Menú principal: está compuesto por trece botones que al activarlos generan lugares geométricos.			
	Punto		Elipsoide
	Segmento		Paraboloide
	Plano perpendicular a un eje		Paraboloide hiperbólico

Plano paralelo a un eje	Hiperboloide de una hoja
Plano de la forma $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$	Hiperboloide de dos hojas
Plano que pasa por el origen	Cono
Cilindro	

Tabla 2.2-2 Panel de configuración del software GAnalitica3D

Panel de configuración: está compuesto por 8 botones	
Borra cualquier elemento de la pantalla gráfica	Pasa el programa de español a inglés y viceversa
Pinta cualquier elemento de la pantalla gráfica	Graba todas las figuras de la pantalla
Muestra una rotación del plano tridimensional sobre el eje z	Carga figuras grabadas
Opaca todos los elementos de la pantalla gráfica	Muestra u oculta el informe de las actividades realizadas

Cabe destacar que el software maneja el sistema de coordenadas en décimas y solo permite visualizar las superficies en el intervalo [0.2, 3].

Tabla 2.2-3 Panel de control del software GAnalitica3D

Panel de Control: está ubicado en la parte superior izquierda y está compuesto por botones que controlan configuraciones del software.	
Borra todos los elementos de la ventana gráfica	Muestra oculta una paleta de colores
Deshace lo que se ha borrado en la pantalla gráfica	Muestra/oculta un panel para controlar las cuadriculas de los planos xy, xz y yz
Muestra un panel para mover o desplazar el plano cartesiano 3D de la vista gráfica (izquierda-derecha y arriba- abajo. También permite hacer el zoom de la ventana gráfica.	Muestra/oculta un panel con cuatro botones para las vistas, estos son vista superior vista frontal, vista lateral y vista 3D.

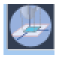
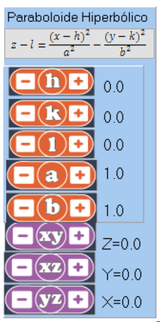
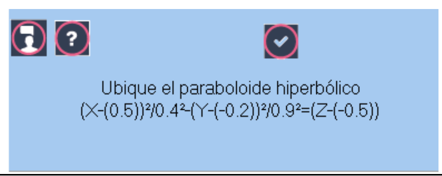
	Despliega un panel de dominio, en el cual se cambia el rango de los números permitidos para el dominio de las variables x e y		Muestra/ oculta los ejes o centro de una superficie sobre la pantalla gráfica
	Cambia el tamaño de los nodos de las curvas y trazas que aparecen en la pantalla gráfica		

Tabla 2.2-4 Panel de control y Panel de problemas del software GAnalitica3D

<table>
<tr><th colspan="2">Panel de control de actividad</th><th>Panel de problemas</th></tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>Permite controlar la actividad presente en la ventana gráfica. Los controles que se presentan permiten manipular los parámetros de las ecuaciones</td>
<td>Según el lugar geométrico que se seleccione, contiene una unas casillas para digitar la respuesta del problema según corresponda.

</td>
</tr>
</table>

2.2.3 Descripción del recurso GeoGebra

GeoGebra es un programa dinámico para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas para educación en todos los niveles. Combina dinámicamente, geometría, álgebra, análisis y estadística. Este consta de una ventana gráfica, que se divide en varias partes: en la parte superior se encuentran los menús y las herramientas; en la parte central, la vista gráfica; a la izquierda, la vista algebraica; a la derecha la hoja de cálculo y en la parte inferior se encuentra la barra de entrada -esta sirve para introducir diferentes tipos de expresiones excepto los menús-, las demás partes pueden visualizarse como lo desee el usuario, activando los ítems correspondientes del menú vista (ver Figura 2.2-2).

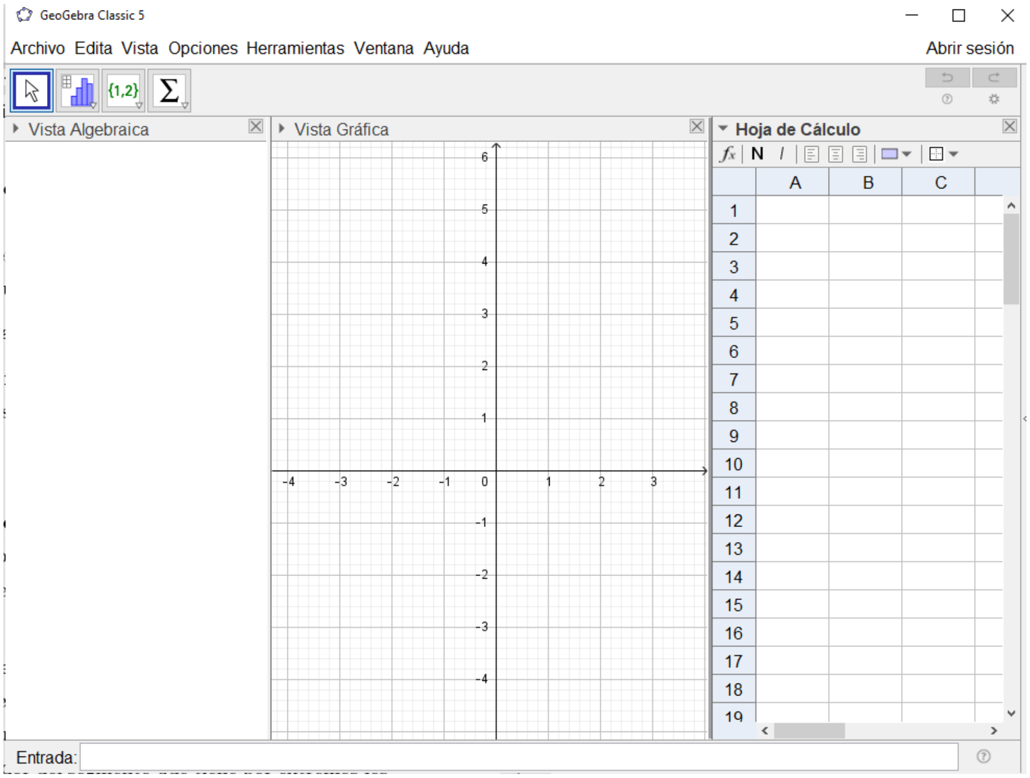


Figura 2.2-2: Vista gráfica de GeoGebra

2.2.4 Indicadores de habilidades de visualización

Para diseñar tareas que involucren ciertas habilidades de visualización en geometría tridimensional, específicamente con relación a superficies cuadráticas, es necesario considerar propuestas que describan este tipo de habilidades. Para el presente estudio consideramos la propuesta de Ramírez y Flores (2017); ajustada a la manera de visualización de expresiones algebraicas propuesta por Mason.

La propuesta de Ramírez y su colega (Ramírez, 2012; Ramírez y Flores, 2017) se fundamenta en la de Del Grande (1990), la cual, a su vez, considera las habilidades de visualización propuestas por Hoffer (1997). Aunque Del Grande propone descripciones para tales habilidades y acciones que las ejemplifican, estas son para estudiantes de primeros niveles escolares.

Desde esta perspectiva, Ramírez y Flores (2017) usan la propuesta de del Grande (1990) precisando indicadores para cada habilidad, esta vez en relación con tareas de resolución de problemas de geometría en los que se abordan temas como: movimientos en el plano, problemas de relleno del espacio (reconocer las propiedades de los poliedros) y analogías y diferencias en tareas en el plano o en el espacio. Esto nos provee una mejor comprensión de cada habilidad de cara a la propuesta de descriptores que se emplea para el desarrollo de este trabajo. De alguna manera, seguimos la idea de Ramírez (2012) según la cual la propuesta de Del Grande puede ser adaptada a las actividades promovidas por tareas de cualquier nivel escolar.

Las descripciones de las habilidades propuestas por estos autores son relativas a representaciones gráficas; nosotros hacemos una propuesta siguiendo las ideas de estos autores, pero aludiendo a habilidades de visualización mediante ejemplificaciones para dos representaciones: representación algebraica a la manera de Mason (1987) y representación gráfica dinámica. La Tabla 2.2-5 presenta dicha propuesta. En ella, en primera instancia, se presenta el nombre de cada habilidad con una descripción general de ella; luego, por columnas, se presentan indicadores que ilustran la habilidad para cada tipo de representación, gráfica y algebraica.

Dado que vamos a usar software dinámico, es decir que permite la posibilidad de arrastre de bola de cristal dejando ver al objeto desde diferentes perspectivas (Castiblanco, Urquina, Camargo, y Acosta, 2004), todas las representaciones que se presentan están en este contexto. En los indicadores relativos a las representaciones gráficas se ponen representaciones de diferentes vistas del objeto, de tal manera que mediante estas es factible identificar propiedades del objeto respecto al sistema coordenado.

Tabla 2.2-5. Indicadores de habilidades de visualización espacial

<table>
<tr><th>Indicadores en contexto representación gráfica</th><th>Indicadores en contexto representación algebraica</th></tr>
<tr><td colspan="2">Identificación visual: Reconocer propiedades de las superficies independientemente del contexto.</td></tr>
<tr><td>Al visualizar la Figura 2.2-3 se identifica que esta representa un elipsoide. Por supuesto, un covenio de representación debe existir; por ejemplo, las sombras inducen que se está representando una figura tridimensional.

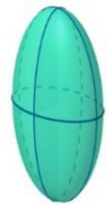



Figura 2.2-3: Representación gráfica de un elipsoide.</td><td>Al visualizar la expresión $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{36}=1$ se identifica que esta representa un elipsoide. Además, que su ancho, alto y su profundidad es de $4u$, $6u$, $12u$ a partir de los denominadores de cada uno de los términos del miembro izquierdo.</td></tr>
<tr><td>Conservación de la percepción: Identificar que una superficie mantiene determinadas propiedades, aunque esta cambie de posición o deje de verse total o parcialmente.</td><td>Conservación de la percepción: Identificar que, independientemente de los símbolos que usen en la expresión algebraica, esta tiene las mismas propiedades.</td></tr>
<tr><td>Identificar que la representación de la Figura 2.2-4 corresponde a un elipsoide que no se ve completamente dada la perspectiva y cercanía con la cual se observa. Para este caso, el Entorno (vista gráfica del software GeoGebra) en el cual se muestra la superficie influye en su representación.

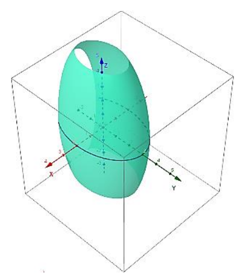



Figura 2.2-4: Elipsoide recortado por la vista gráfica del software.</td><td>Identificar que las expresiones $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ y $\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{s^2}+\frac{z^2}{t^2}=1$ representan al mismo tipo de objeto, un elipsoide, independientemente de que los símbolos (letras indo-arábigas) usados en los denominadores de sus respectivos miembros izquierdos son diferentes.</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>Identificar que, aun cuando la superficie se traslade, esta sigue siendo del mismo tipo –un elipsoide para este caso– (Figura 2.2-5).

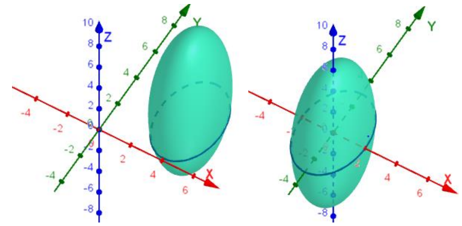



Figura 2.2-5: Elipsoide trasladado.</td>
<td rowspan="2">Identificar que la expresión algebraica $\frac{x-4\ ^{2}}{4}+\frac{y-3\ ^{2}}{9}+\frac{z-2\ ^{2}}{36}=1$ y $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{36}=1$ representan el mismo tipo de objeto (elipsoide); más aún, que la primera expresión representa una traslación del objeto representado por la segunda en 4 unidades en el eje X, 3 unidades en el eje Y y 2 unidades en el eje Z.
Así mismo que la expresión $9x^2+4y^2+z^2=36$ representa el mismo objeto (un elipsoide) que representa la expresión $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{36}=1$.</td>
</tr>
<tr>
<td>Identificar que, aun cuando la superficie se rote, esta sigue siendo del mismo tipo (Figura 2.2-6).

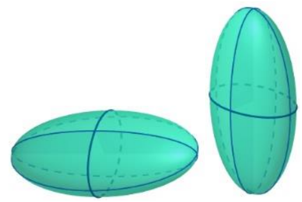
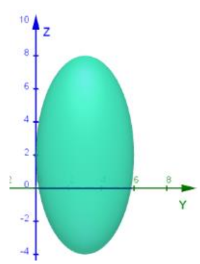
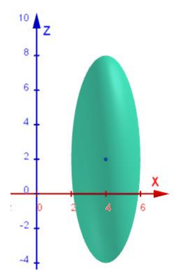
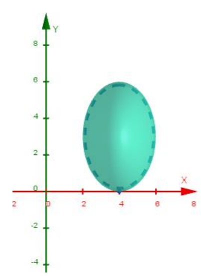



Figura 2.2-6: Elipsoide rotado.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Percepción de la posición de una superficie en el espacio: Relacionar la posición de la superficie, con uno mismo (el observador) o con otro objeto (sistema coordenado) que actúa como referencia.</td>
</tr>
<tr>
<td>Identificar, con base en las diferentes representaciones gráficas de un mismo elipsoide visto desde diferentes perspectivas –de frente al plano YZ (Figura 2.2-7), de frente al plano XZ (Figura 2.2-8) y de frente al plano XY (Figura 2.2-9)–, las siguientes propiedades del objeto con respecto al sistema coordenado de referencia: las coordenadas del punto centro del objeto es $C(4,3,2)$; la superficie no tiene intersección con los ejes X, Y y Z; el ancho, alto y profundo miden, respectivamente, $6u$, $12u$ y $4u$ (equivalente a decir que el semieje en Y mide $3u$; en Z, 6u, y en X, $2u$);
  </td>
<td>Identificar, con base en la expresión $\frac{x-4\ ^{2}}{4}+\frac{y-3\ ^{2}}{9}+\frac{z-2\ ^{2}}{36}=1$, específicamente con base en los parámetros 4, 3 y 2, que el centro del elipsoide tiene la coordenada $C(4,3,2)$.</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><td>Figura 2.2-7: Vista frontal del elipsoide. Figura 2.2-8: Vista lateral derecha del elipsoide. Figura 2.2-9: Vista superior del elipsoide</td><td></td></tr>
<tr><td>Identificar que, la representación de un elipsoide que se interseca con un plano coordenado –por ejemplo, YZ– (Figura 2.2-10), el tipo de curva que surge de la intersección es una elipse.

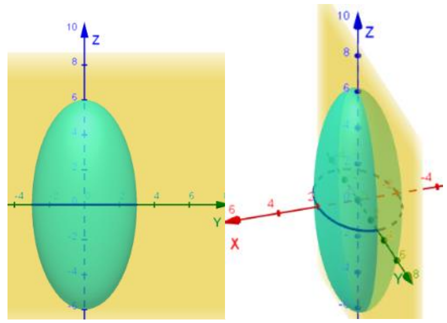



Figura 2.2-10: Elipsoide intersecado por el plano YZ</td><td>Identificar, con base en la expresión $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{36}=1$, que el elipsoide que representa es una superficie simétrica con respecto a los tres ejes coordenados (propiedad dada por el Teorema 4).</td></tr>
<tr><td colspan="2">Percepción de relaciones espaciales: Identificar las relaciones internas entre varios objetos situados simultáneamente en el espacio (equidistancia, simetría, perpendicularidad, posición relativa, etc.).</td></tr>
<tr><td>Identificar, con base en la representación de la Figura 2.2-11, que los puntos P_1 y P_2 son simétricos respecto al origen y a uno de los ejes del sistema (eje Y), puesto que en esta se visualiza que las coordenadas de los puntos P_1 y P_2 son $P_1(-2{,}0{,}0)$ y $P_2(2{,}0{,}0)$.

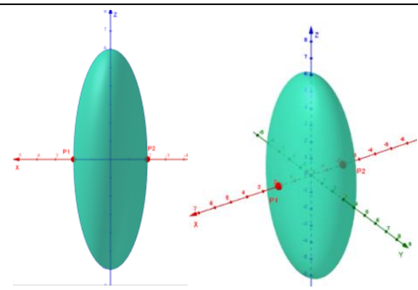
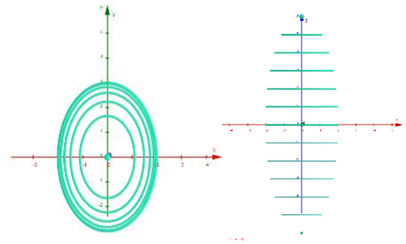
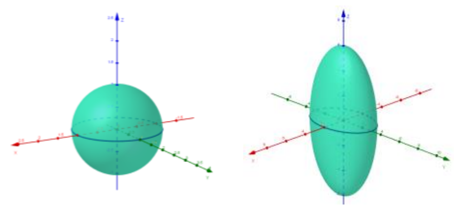



Figura 2.2-11: puntos simétricos respecto al origen y al eje Y en un elipsoide</td><td>Identificar, con base en la expresión $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{36}=1$, que los puntos $P_1(-2{,}0{,}0)$ y P_2 2,0,0 son simétricos respecto al plano YZ, y el origen (propiedad dada por los Teoremas 2, 3 y 4). De manera análoga para los puntos $Q_1(0,-3{,}0)$ y Q_2 0,3,0 respecto al plano XZ, y el origen; y los puntos $R_1(0{,}0,-6)$ y R_2 0,0,6 respecto al plano YX, y el origen.</td></tr>
</table>

Identificar que, dadas las vistas superior y frontal de las intersecciones entre planos paralelos al plano XY y la superficie (Figura 2.2-12), cada elipse que surge de la intersección aumenta de tamaño al acercarse al plano XY y disminuye su tamaño al alejarse.	 Figura 2.2-12: Intersecciones entre planos paralelos al plano XY y un elipsoide	
Discriminación visual: *Comparar varias imágenes reales o mentales para identificar similitudes y diferencias entre ellas.*		
Identificar, con base en las representaciones gráficas de una esfera y un elipsoide (ver Figura 2.2-13), la primera es como la segunda solo que uniforme en su ancho, alto y profundo.	 a) Esfera b) Elipse Figura 2.2-13: Comparación esfera-elipsoide	Dadas las expresiones $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ (1) y $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ (2), identificar que el cambio de signo de la expresión (2) respecto a la (1) implica un cambio en tipo de superficie; esto es, la expresión (1) representa un elipsoide mientras que la ecuación (2) representa un hiperboloide de una hoja. Dadas las expresiones $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{a^2}=1$ (3) y $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ (4), identificar que el cambio en los denominadores de la expresión (4) respecto a la (3) implica un cambio en la superficie; esto es, la expresión (3) representa una esfera mientras que la ecuación (4) representa un elipsoide no necesariamente una esfera.

Con estos indicadores de habilidades se están determinando niveles de especificidad con los cuales se pueden determinar características de las superficies. Estos niveles de especificidad varían dependiendo de la habilidad. Por ejemplo, hay un nivel de especificidad básico como el presentado en el indicador *identificación visual* y uno más general en el caso del indicador *percepción de relaciones espaciales*. En el primer caso la visualización de propiedades de la superficie es inmediata y en el segundo caso se requiere una abstracción de propiedades de los objetos que están contenidos en la superficie, para luego decir propiedades de ésta.

Por otra parte, en la representación algebraica siempre se presenta un sistema de referencia porque es con base en este que se hacen las expresiones, y por lo tanto todas las expresiones algebraicas estarán inducidas por el sistema de coordenadas cartesianas que se están utilizando.

En algunos ejemplos usados en los indicadores de la columna derecha de la Tabla 2.2-5 usamos representaciones algebraicas asociadas a un objeto específico (elipsoide con un *ancho*, un *profundo* y un *alto* específico); sin embargo, la representación usada puede ser genérica y aludir al tipo de objeto (elipsoide). Para ilustrar este detalle, en la Tabla 2.2-6 hemos escrito el indicador asociado a la habilidad *Conservación de la percepción* cambiando los números 4, 9 y 36 por las letras a^2, b^2 y c^2; nótese que la esencia de la descripción de la habilidad no cambia.

Tabla 2.2-6: Ejemplo específico y general para la habilidad de conservación de la percepción

Habilidad: Conservación de la percepción	
Forma específica	Identificar que las expresiones algebraicas $\frac{(x-4)^2}{4}+\frac{(y-3)^2}{9}+\frac{(z-2)^2}{36}=1$ y $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{36}=1$ representan el mismo tipo de objeto (elipsoide); más aún, que la primera expresión representa una traslación del objeto representado por la segunda en 4 unidades en el eje X, 3 unidades en el eje Y y 2 unidades en el eje Z. Así mismo que la expresión $9x^2+4y^2+z^2=36$ representa el mismo objeto (un elipsoide) que representa la expresión $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{36}=1$.
Forma Genérica	Identificar que las expresiones algebraicas $\frac{x-h\;^{2}}{a^2}+\frac{y-k\;^{2}}{b^2}+\frac{z-l\;^{2}}{c^2}=1$ y $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ representan el mismo tipo de objeto (elipsoide); más aún, que la primera expresión

representa una traslación del objeto representado por la segunda en h unidades en el eje X, k unidades en el eje Y y l unidades en el eje Z.

Así mismo que la expresión $Mx^2 + Ny^2 + Pz^2 = R$ representa el mismo objeto (un elipsoide) que representa la expresión $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, donde $a^2 = \frac{R}{M}$, $b^2 = \frac{R}{N}$, $c^2 = \frac{R}{P}$.

2.2.5 Elementos para el diseño de tareas

Los estudiantes aprenden matemáticas cuando al abordar tareas complejas que implican problemas en contextos significativos, ponen en juego los conocimientos y destrezas que han adquirido hasta el momento; además si se involucran en un ambiente donde la comunicación se da entre estudiantes y el profesor, generan una interacción que conlleva al intercambio de ideas y a la solución de la tarea (Gómez, Mora, y Velasco, 2018).

Es importante considerar que el profesor debe fijar aquellas metas de aprendizaje partiendo de la identificación de las limitaciones que tienen los estudiantes, proporcionando tareas para que los estudiantes logren esas metas de aprendizaje y además superen aquellas dificultades. En esta sección nos centramos en aquellos elementos necesarios para el diseño de tareas y para esto nos basamos en los aportes de Gómez, Mora y Velasco (2018) que hacen frente al diseño y secuencia de tareas. Las siguientes definiciones son propuestas por estos autores, las cuales serán tomadas en cuenta para este trabajo.

Una **tarea** es el elemento de enseñanza central del proceso de enseñanza aprendizaje. Son las tareas de aprendizaje que el profesor propone con la intención de brindar oportunidades para que los estudiantes logren las expectativas de aprendizaje y afectivas que ha establecido, y superen las limitaciones que ha conjeturado que ellos tendrán. La **secuencia de tareas** es una ordenación de tareas; esta puede incluir una o más tareas transversales que los estudiantes abordan simultáneamente con otras tareas de la secuencia.

Gómez, Mora y Velasco (2018) proponen siete elementos para describir (diseñar) una tarea (ver Figura 2.2-14): requisitos, metas, formulación, materiales y recursos, tipos de agrupamiento, formas de interacción y temporalidad. A continuación, se describe cada uno:

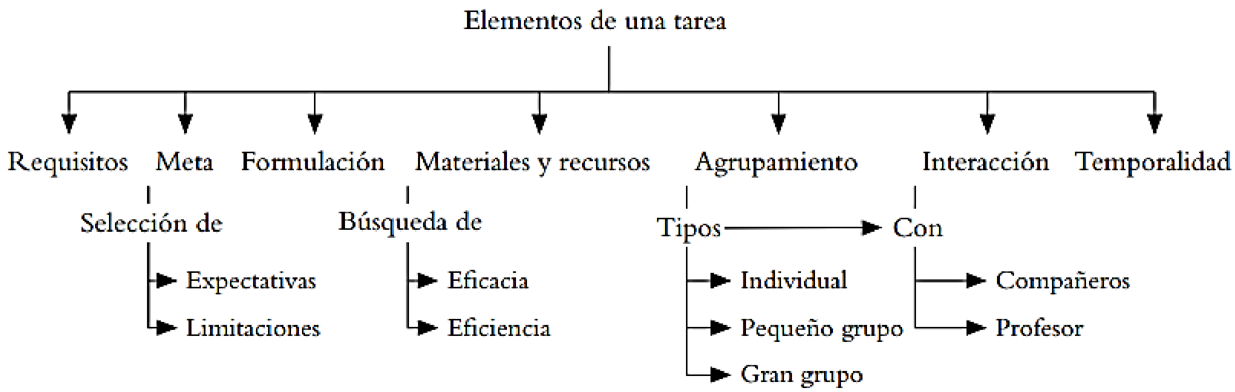


Figura 2.2-14: Elementos de una tarea.

Fuente: Gómez, Mora y Velasco (2018, pág. 212).

Los **requisitos** son aquellos conocimientos y destrezas que se vinculan directamente con las metas y el contenido matemático de la tarea, de acuerdo con el nivel educativo de los estudiantes.

Las **metas** resumen los propósitos que el profesor asigna a la tarea, son los conocimientos y destrezas que se espera desarrollar y aquellas limitaciones, errores y dificultades que pueden llegar a superarse al desarrollarla. Deben ser formuladas con frases concisas sin dar detalles específicos de la tarea o de las expectativas y que delimiten el foco de ésta desde el punto de vista del aprendizaje de los estudiantes.

La **formulación** es la instrucción que se entrega a los estudiantes. Incluye la información de partida y especifica de lo que espera que ellos realicen y produzcan como respuesta. Esta describe un contexto, proporciona una información inicial y requiere que los estudiantes produzcan una información final como su solución.

Los **materiales y recursos** son las herramientas que los estudiantes pueden utilizar para abordar la tarea. Los materiales a diferencia de los recursos son diseñados con fines didácticos, por ejemplo, el marcador y la pizarra son recursos y los softwares de geometría dinámica como GeoGebra o GAnalitica3D son materiales que están diseñados para ayudar en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Los materiales se deben elegir teniendo en cuenta su eficiencia y eficacia (Gómez y Romero (2015) citados por Gómez, Mora y Velazco (2018)). La eficiencia se refiere a la disponibilidad y buen uso de los materiales y recursos y la eficacia se da si contribuye al logro de los propósitos que se tienen en una tarea matemática.

El **agrupamiento** se refiere a las maneras en que se pueden organizar los estudiantes para resolver la tarea, que pueden ser individual, en parejas o grupos. Estas fortalecen el aprendizaje de los estudiantes al interactuar con compañeros o el profesor, por ejemplo, en el trabajo individual el profesor puede evidenciar los errores que han cometido los estudiantes y además promover la práctica de conocimientos. Por otra parte, el trabajo en parejas o en grupos pequeños puede dar paso a una puesta en común para contrastar puntos de vista, procedimientos y soluciones a las tareas propuestas y para afrontar dificultades que el trabajo individual no siempre resuelve.

La **interacción** son las formas en que se prevé que los estudiantes y el profesor interactuarán cuando se aborde la tarea, estas dependen del agrupamiento y ayudan a definir las etapas de la temporalidad. Es necesario planificar y prever la interacción, ésta tiene dos propósitos: fomentar el aprendizaje y permitir que el profesor pueda verificar, en la práctica, cómo se desarrolla el aprendizaje y cómo él puede influir en ese proceso. Además, es importante prever los tipos de interacción ya que aprender matemáticas implica la capacidad de proponer soluciones a un problema que requiere las matemáticas, comunicar esas soluciones, reconocer las soluciones de otras personas y negociar significados para llegar a acuerdos.

La **temporalidad** hace referencia a los momentos y tiempos en los que se atiende a las diferentes partes de la tarea, el profesor puede prever que una tarea matemática se desarrolle como una secuencia de etapas. En cada etapa, el profesor puede establecer qué parte de la formulación de la tarea se realiza, qué materiales y recursos se utilizan, de qué manera se agrupan los estudiantes y qué formas de interacción desea promover.

2.2.6 Objetos primarios

Para presentar de mejor manera los contenidos presentes en los requisitos y metas durante la descripción de las tareas, consideramos pertinente usar la propuesta de tipificación de objetos primarios de la práctica matemática que propone el Enfoque Ontosemiótico –EOS– (Godino, Batanero, y Font, 2007).

Estos autores consideran como *práctica matemática* aquella acción que realiza una persona al resolver problemas matemáticos y comunicar la solución a otras personas. En el estudio de las matemáticas más que una práctica específica para resolver un problema en particular, se destacan los *sistemas de prácticas* (operáticas y discursivas) llevadas a cabo dentro de una institución constituida por varias personas las cuales comparten prácticas sociales en común, el uso de instrumentos y herramientas específicas y particulares. De esta manera, los objetos matemáticos o *entidades primarias* consideradas como "todo aquello que puede ser indicado, todo lo que puede señalarse o a lo cual puede hacerse referencia" durante la actividad matemática, es decir cuando se hace, se comunica o se aprenden dentro de las matemáticas (Godino, 2002); son comprendidas como emergentes de un sistema de prácticas.

A continuación, se presenta una breve descripción de cada uno de los objetos primarios que propone este Enfoque:

Lenguaje: Presente en los términos, expresiones, notaciones, gráficos, etc., que se pueden dar forma escrita, gráfica, oral o gestual durante el trabajo matemático.

Procedimientos: Entendido como aquellas acciones que el sujeto realiza ante las tareas matemáticas tales como operaciones, algoritmos, técnicas, etc.

Conceptos: Dados mediante definiciones o descripciones tales como número, puntos, recta, media, función, etc.

Proposiciones o atributos de los objetos mencionados, que suelen darse como enunciados o proposiciones.

Argumentos: Se pueden dar de manera deductiva o de otro tipo y son utilizados para validar y explicar procedimientos y proposiciones.

Capítulo 3

Metodología

La metodología seguida para este estudio se fundamentó en el *Análisis de Instrucción* que sugiere Gómez, Mora y Velazco (2018) el cual proporciona los conceptos y herramientas para diseñar una secuencia de tareas del área de matemáticas que contribuya al logro de expectativas y superación de dificultades de aprendizaje, aunque no se desarrolló por completo. Específicamente, en este trabajo de grado nos concentramos en el diseño de tareas (o secuencia de tareas). En tal sentido, las fases del estudio se determinaron con base en este aspecto, teniendo en cuenta, claro está, que una primera consistió en la elaboración del marco referencial. A continuación, describimos las fases llevadas a cabo para el desarrollo del estudio.

Fase 1. Construcción del marco teórico. Para este caso, dada la naturaleza y objetivos del trabajo, hubo necesidad de plantear un marco de referencia que aludiera al estudio de las superficies cuadráticas para abordar los objetos que están involucrados dentro de la secuencia (ver Sección 2.1). Así mismo, hubo necesidad de poner una descripción sobre el uso del Software de Geometría Dinámica; esto nos permitió tener una base con la cual reconocer el potencial de las herramientas de tales recursos para favorecer procesos de la actividad matemática como la visualización y para abordar las múltiples representaciones de un objeto matemático, en este caso la representación algebraica y la gráfica de las superficies cuadráticas (ver Sección 2.2.1.2). Por supuesto, en la descripción de las secuencias de tareas (particularmente en lo que respecta al elemento *recursos*), este potencial es explicitado y descrito con precisión. También se conceptualizó y se plasmó en una tabla los indicadores de habilidades de visualización en entornos viso espaciales y algebraicos (ver Tabla 2.2-5).

Uno de los referentes más importantes en el trabajo es el de Gómez, Mora y Velasco (2018), no solo porque nos proporciona las fases para desarrollar el presente trabajo, sino porque nos provee una conceptualización sobre constructos centrales para el estudio: tarea, secuencia de tareas y los elementos que constituyen una tarea (ver Sección 2.2.4).

Fase 2. Precisión de los tipos de problemas. Como se dijo antes, tendremos en cuenta los siete elementos que describen una tarea propuestos por Gómez y sus colegas, para el diseño de cada secuencia de tareas. Ahora bien, previo al desarrollo mismo del diseño, hubo la necesidad de precisar los contenidos generales que se abordarían en cada secuencia. Para ello, tuvimos en cuenta la problemática planteada en la Sección 1.1 y las superficies en las que se concentra el software GAnalitica3D (ver Sección 2.2.2) y, a partir de ello, los referentes matemáticos y habilidades de visualización descritos en las Secciones 2.1 y 2.2.3 respectivamente. En este sentido, fueron determinadas cinco secuencias sobre contenidos específicos asociados a habilidades de visualización concretas; cada una de estas está centrada en un objeto matemático lo cual no significa que el profesor que tenga acceso a este material no pueda usar otra superficie para abordar el mismo contenido, la Tabla 2.2-1 expone el tipo de problema y el contenido asociado a cada tipo de tarea orientado al desarrollo de la habilidad.

Tabla 2.2-1: Tipos de problemas y contenido de la secuencia

Tipo de problema	Contenido sobre el que versa la secuencia
Reconocimiento del tipo de objeto a partir de cambios en la expresión algebraica de ciertas superficies, con base en su representación algebraica.	Se consideran todas las superficies cuadráticas (elipsoide, hiperboloide de una hoja, hiperboloide de dos hojas y cilindro). De manera específica se pretende aludir a las habilidades de *identificación* y *discriminación visual*.
Reconocimiento del tipo de objeto que se genera en la intersección entre la superficie con diferentes planos.	Se consideran todas las superficies cuadráticas (elipsoide, hiperboloide de una hoja, hiperboloide de dos hojas y cilindro). De manera específica se pretende aludir al indicador dos de la habilidad de *percepción de relaciones espaciales* y a la habilidad *percepción de la posición de una superficie en el espacio.*
Reconocimiento de las propiedades de un tipo de objeto a partir del cambio de uno de los parámetros en su expresión algebraica.	Se considera el elipsoide y algunas de sus propiedades en las que es posible establecer características que apuntan a los cambios que tiene una expresión algebraica cuando sucede una rotación, una traslación, etc. De manera específica se pretende aludir a las habilidades *percepción de la posición de una superficie en el espacio* y *conservación de la percepción*

Reconocimiento de relaciones internas entre objetos que hacen parte de la superficie cuadrática.	Se considera el hiperboloide de una y dos hojas y la propiedad simétrica con la identificación de objetos internos de esta superficie. De manera más específica se pretende aludir a la habilidad *percepción de relaciones espaciales.*
Reconocimiento de los cambios que se debe hacer a la expresión algebraica de una representación gráfica dada, para obtener una segunda.	Se considera el cilindro y el comportamiento de sus parámetros, a partir de la determinación de una expresión algebraica que se pueda inferir a partir de una representación gráfica dada. De manera más específica estamos a la habilidad *percepción de la posición de una superficie en el espacio.*

Fase 3. Diseño de secuencias de tareas. Para esta fase, tuvimos en cuenta los siete elementos que describen una tarea propuestos por Gómez, Mora y Velasco (2018), para el diseño de cada secuencia de tareas. En tal sentido, la descripción de cada uno de tales elementos (asociada a cada una de las secuencias) se convierte en una *subfase* que posibilita el desarrollo del estudio; en consecuencia, las subfases del desarrollo del estudio son: *descripción de requisitos*, *descripción de metas*, *descripción de materiales y recursos y formulación*

Para cada secuencia (cuyo contenido se presentó en la Tabla 2.2-1) se llevó a cabo la descripción de estos elementos (en cada una de tales descripciones es lo que hemos denominado *subfases*). En el Capítulo 4, se presenta el desarrollo de la Fase 3 del estudio.

Vale precisar, que para lo relativo a las subfases *descripción de requisitos* y *descripción de metas* usamos como herramienta analítica la propuesta del Enfoque Ontosemiótico sobre objetos primarios (ver Sección 2.2.5). Este referente nos permitió identificar de manera más eficaz aquellos contenidos (en términos de objetos primarios) considerados requisitos para abordar las tareas y aquellos contenidos a los que se quería apuntar con el abordaje de estas. Se utilizó también la tabla habilidades de visualización que se presentaron en la Sección 2.2.3 para, específicamente, precisar las metas a las cuales se va a apuntar a cada tarea o secuencia de tarea o aquellas que debe tener un estudiante para abordarlas.

Respecto a la subfase *formulación*, vale la pena comentar que, una vez que cada tarea o secuencia era formulada, se implementaba a una persona que recientemente había culminado grado 11, para pilotearla. Con base en ello, se pudo hacer algunos ajustes a los enunciados; además, dicho pilotaje permitió identificar algunas dificultades que se pueden presentar al abordar las secuencias de tareas.

Fase 4. Se escribieron las conclusiones del trabajo de grado y se produjo el documento de informe final. En cuanto a las conclusiones se intentó contrastar lo recopilado en el marco teórico y didáctico y lo abordado en las secuencias, además se hace énfasis en las limitaciones y los objetivos cumplidos.

A manera de resumen para que el lector pueda tener una mejor idea de cómo el marco teórico se utiliza para la descripción de las tareas, presentamos la Tabla 2.2-2 en la que se relaciona cada una de las subfases con el elemento teórico que se utilizó.

Tabla 2.2-2: Relación del marco teórico y didáctico con la metodología.

Elementos para el diseño de tareas, según el análisis de instrucción de Gómez Mora y Velasco (2018)	Elementos de los marcos teóricos usados en la metodología.
Requisitos y metas	Se tuvo en cuenta principalmente los objetos primarios de la EOS y las habilidades de visualización consignadas en la Tabla 2.2-5 de las Secciones 2.2.4 y 2.2.6
Materiales y recursos	Se tuvo en cuenta lo relativo al uso del software de geometría dinámica y de geometría 3D, específicamente lo que respecta a las secciones 2.2.1- 2.2.3
Agrupamiento y temporalidad	Tuvimos en cuenta lo relativo a la propuesta metodológica del grupo de enseñanza y aprendizaje de la geometría.
Interacción	Esta se consideró dentro de las potenciales soluciones de los estudiantes a las tareas y también teniendo en cuenta cómo se iban involucrando las habilidades de visualización en las secuencias de tareas.

Capítulo 4

Diseño de tareas

En esta sección presentamos el diseño de las tareas que, en términos de Gómez, Mora y Velazco (2018), consiste en la descripción de cada uno de los elementos que ellos proponen como sus componentes. Para el diseño que proponemos hemos determinado que, de manera particular, los elementos relativos a requisitos, recursos, agrupamiento, interacción y temporalidad serán descritos de manera genérica puesto que estos son similares para todas las tareas propuestas (ver Sección 4.1). Hecho esto, presentaremos, para cada secuencia que diseñamos, una descripción específica de los otros elementos; en ese marco, vamos a presentar de manera específica la formulación, los requisitos, las metas, la interacción y temporalidad que constituyen cada una de las secuencias (ver Sección 4.2). Cuando sea necesaria, una descripción específica respecto de los elementos recursos, agrupamiento, interacción y temporalidad será hecha en su momento.

4.1 Descripción de Algunos Elementos Comunes

Presentaremos la descripción genérica de cinco elementos que permiten describir una tarea, para nuestras secuencias, a saber: requisitos, recurso, agrupamiento, interacción y temporalidad; esto teniendo en cuenta que para todas las secuencias de tareas varias de sus características se presentan de forma muy similar.

Como *requisitos* mínimos para que los estudiantes puedan desarrollar las secuencias de tareas, ellos deben contar con algunos conocimientos y destrezas orientadas a objetos primarios de la EOS. Estos se presentan a continuación; los requisitos asociados a las habilidades de visualización se enuncian en el marco de las descripciones hechas para los objetos primarios:

- *En cuanto a lenguaje*: Se requiere que los estudiantes tengan un lenguaje verbal y simbólico básico respecto a expresiones algebraicas. Además, que reconozcan representaciones gráficas y algebraicas asociadas a las cónicas y a objetos geométricos en dos dimensiones especialmente de la geometría analítica básica; así mismo, que reconozcan propiedades básicas de las cónicas (semiejes, centro, focos, vértice) a partir de sus representaciones gráficas o algebraicas.

- *En cuanto a procedimientos:* Se requiere que los estudiantes puedan: Transformar expresiones algebraicas a expresiones equivalentes; elaborar bosquejos de representaciones gráficas de cónicas con base en representaciones algebraicas de éstas; proveer una representación algebraica y gráfica de una cónica con base en elementos básicos que permiten determinarla (semiejes, focos, vértices, rectas directrices, etc.); determinar en una cónica los intervalos de variación para los cuales los valores de x y y son valores reales; esto permite determinar si la superficie es cerrada o si es de extensión indefinida.
- *En cuanto a conceptos:* los estudiantes deben contar con algunos conceptos básicos de la geometría analítica tanto en dos dimensiones como en tres dimensiones, tales como: plano cartesiano, coordenada, distancia entre puntos, etc. Por otra parte, deben reconocer en una expresión algebraica de una cónica o una superficie - escrita de forma canónica -; así mismo que los elementos $\boldsymbol{h, k, l}$ serán denominados parámetros, mientras que $\frac{1}{a^2}, \frac{1}{b^2}, \frac{1}{c^2}$, serán denominados, en adelante, coeficientes.
- *En cuanto a proposiciones*: las proposiciones comunes que son requisito y que se presentan a continuación se relacionan con las proposiciones que hemos puesto en el marco teórico en la Sección 2.1. Estas atienden al dominio 2D, puesto que se supone que los estudiantes ya han abordado las cónicas y dominan temas de geometría analítica 2D; consideramos que de esta manera los estudiantes podrán tener una mayor interpretación de algunas superficies. Estas proposiciones son:
    - Una función es par si para todo x del dominio, $f(-x) = f(x)$. Gráficamente, ello implica que la curva es simétrica con respecto al *eje y*.
    - Una función es impar si para todo x del domino $f(-x) = -f(x)$. Gráficamente, ello implica que la curva es simétrica con respecto al *origen* del plano cartesiano.
    - La ecuación general de una elipse con centro en el origen es $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, es simétrica respecto a los ejes y al origen, tiene cortes con el eje X en $(-a, 0)$ y $(a, 0)$, con el eje Y en $(0, -b)$ y $(0, b)$, la longitud del eje mayor es $2a$ y la longitud del eje menor es $2b$.

- La hipérbola, que tiene por ecuación $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, es simétrica respecto a los ejes y al origen, tiene cortes con el eje X en $(-a, 0)$ y $(a, 0)$,y la longitud del eje mayor es $2a$ y la longitud del eje conjugado es $2b$.
- Si los coeficientes $\frac{1}{a^2}$ y $\frac{1}{b^2}$ de la ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ son positivos, la curva es una elipse. Si uno de los coeficientes es negativo y el otro positivo, se genera una hipérbola. Si los coeficientes $\frac{1}{a^2}$ y $\frac{1}{b^2}$ son positivos e iguales se genera una circunferencia.

En cuanto a los *Recursos* se tiene como requisito usar dos softwares: GAnalitica3D para desarrollar las secuencias de tareas 1, 2, 3 y 5, y GeoGebra para abordar la secuencia 4, dado que para esta última se requiere una mayor rigurosidad para la exploración de simetrías de la superficie. Las herramientas que contienen estos softwares permiten enfocarse en el estudio de las superficies cuadráticas; especialmente, GAnalitica3D tiene herramientas que permiten manipular parámetros de las expresiones; GeoGebra ofrece un complemento para abordar las secuencias propuestas. En la descripción de cada secuencia (ver Sección 4.2) se especifica qué del software se usa y para qué.

Advertimos que ambos softwares son de fácil acceso puesto que GeoGebra se puede descargar en la página GeoGebra.org y el software GAnalitica3D se encuentra disponible en sitios web[2] donde puede ser descargado. Además, se pueden instalar en computadores que no tengan mayores requisitos.

Para el desarrollo de la secuencia se requiere que tanto el profesor como los estudiantes conozcan las funcionalidades de las herramientas de los softwares. Así mismo, sugerimos que previo a la implementación de las tareas que proponemos, el profesor debe implementar una tarea mediante la cual los estudiantes se familiaricen con las herramientas de los softwares. Para el caso del software GAnalitica3D en las páginas web antes referenciadas existen insumos a partir de los cuales el profesor puede hacer tareas de este tipo.

En cuanto al *Agrupamiento*: Todas las secuencias están diseñadas para que los estudiantes trabajen en parejas. De esta forma se fomenta una interacción estudiante - estudiante y

[2]https://jarincon3.wixsite.com/calculovectorial

http://academia.uniquindio.edu.co/academia/investigacion/gedes/index.php/descargas estudiante - problema que luego dé lugar a una puesta en común donde se contrasten los distintos puntos de vista sobre las producciones.

La *Interacción* que se debe dar durante el desarrollo de las secuencias se describe enseguida: Inicialmente, el profesor da las instrucciones para realizar las tareas. Luego los estudiantes abordan la tarea mediante trabajo colaborativo y proponen una solución para esta. Durante el desarrollo de la tarea el profesor actúa como orientador, pasando por los grupos de trabajo para ver los resultados a los que van llegando los estudiantes y dado el caso, resuelve dudas concretas o da sugerencias sobre la solución de la tarea. Después, cuando cada grupo ya tenga una propuesta de solución a la tarea, se genera una socialización en la que el profesor guía a los estudiantes y gestiona el intercambio de ideas para construir significados compartidos. El profesor actúa también como un "director de orquesta", administrando las propuestas de los estudiantes, controlando el uso adecuado de argumentos e institucionalizando el conocimiento.

Cabe resaltar que según Gómez, Mora y Velasco (2018), en la subfase de *interacción* se deben contemplar dificultades que tienen los estudiantes al abordar una tarea y las posibles maneras en que el profesor actuará para que estas sean superadas. Desde esta perspectiva, vale indicar que las secuencias en sí mismas están planeadas para superar la dificultad a la que alude Ezquerro (2014), la cual consiste en la no identificación, tratamiento y relación entre distintos registros de representación. Atendiendo a lo anterior, mediante las secuencias de tareas se pretenden superar, específicamente, las siguientes dificultades de los estudiantes: (i) la no identificación de características y propiedades a partir de la representación –gráfica o algebraica– de la superficie, (ii) la no combinación y conversión entre la representación gráfica y algebraica, y (iii) el no uso de conocimientos de la geometría analítica bidimensional para abordar las diferentes superficies cuadráticas.

En cuanto a la *temporalidad*: está dada por la interacción expuesta anteriormente y por lo tanto se define en tres etapas: (i) actividad autónoma de los grupos de estudiantes para proveer una propuesta de solución a la tarea, (ii) socialización o puesta en común de las distintas propuestas y (iii) validación de la solución de la tarea e institucionalización de las características de las superficies. Para cada una de las tareas el tiempo mínimo que se requiere es de 30 minutos; dependiendo de la riqueza de la tarea que se esté abordando y de la participación misma de los estudiantes, en la descripción de las secuencias se sugerirá alguna idea más al respecto.

4.2 Secuencias de tareas

En primera instancia vamos a presentar la formulación de secuencias de tareas desde su tipología y enseguida se hará su respectiva descripción.

4.2.1 Reconocimiento del tipo de objeto a partir de cambios en la expresión algebraica de ciertas superficies, con base en su representación algebraica.

Para abordar las secuencias de tareas 2 a la 5 se requiere de una buena identificación del objeto que se va a estudiar, razón por la que en la siguiente secuencia se abordan estas superficies.

Secuencia de tareas 1

i. Observe en el *panel de control de actividad* (ver Ilustración 1) la expresión algebraica general de las superficies cuadráticas *elipsoide*, *hiperboloide de una hoja, hiperboloide de dos hojas,* y *cilindro elíptico*, y determine qué cambios se producen en esta cuando se cambia de un tipo de superficie a otro.

   Para sistematizar la información encontrada, complete el siguiente esquema y luego responda las preguntas. Use como ejemplo la información completada para el elipsoide:

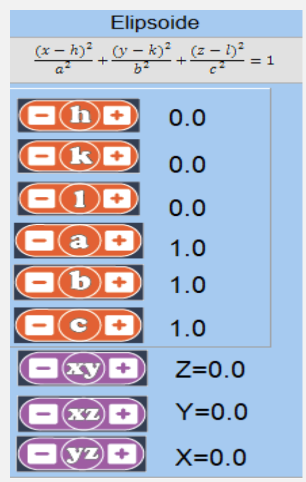


Ilustración 1:Panel de control de actividad software GAnalitica3D

Elipsoide
Expresión algebraica asociada: $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}+\frac{(z-l)^2}{c^2}=1$
Si en la expresión anterior se cambia uno de los coeficientes por un coeficiente negativo, entonces se produce una

Hiperboloide de una hoja
Expresión algebraica asociada: ____
Si en la expresión anterior se cambia __________________________________ por ____, entonces se produce una

Hiperboloide de dos hojas
Expresión algebraica asociada: ____
Si en la expresión anterior se cambia __________________________________ por ________________________________, entonces se produce un

Cilindro Elíptico
Expresión algebraica asociada: ____

ii. Con base en los resultados de la tabla anterior, para cada tipo de superficie escriba la expresión algebraica que le corresponde.

iii. Compare todas las superficies por parejas y determine qué cambios se le deben hacer a la expresión algebraica de una para obtener la otra.

Con esta secuencia se apunta a determinar lo que hemos denominado superficies cuadráticas de tipo I (ver Sección 2.1.2.3). A continuación, presentamos la descripción para esta secuencia.

Requisitos

Para el desarrollo de esta secuencia los requisitos son mínimos; estos han sido expuestos dentro de los requisitos generales para todas las secuencias, en la Sección 4.1.

Metas

Metas orientadas a objetos primarios

1. Reconocer las características de las expresiones algebraicas que representan las superficies cuadráticas elipsoide, hiperboloide de una hoja, hiperboloide de dos hojas, y cilindro elíptico. Por ejemplo, reconocer los intervalos de variación para los cuales los valores de x, y y z son valores reales; que x, y y z son variables reales; que $\frac{1}{a^2}, \frac{1}{b^2}$ y $\frac{1}{c^2}$ son coeficientes; etc.
2. Identificar cómo, con base en la representación gráfica, cambios de signos en la representación algebraica implica un cambio en el tipo de superficie.

De manera más específica, se pretende que los estudiantes logren establecer una conceptualización de las superficies cuadráticas según su representación gráfica y su representación algebraica. Para este caso específico, reconocer el tipo de superficie con sus representaciones. De esa forma, se espera que los estudiantes enuncien cosas como:

1. La representación gráfica de un elipsoide es como un huevo o como un balón de fútbol americano.
2. La representación gráfica de un elipsoide es esta y señalar una representación como la de la Figura 4.2-1.
3. La ecuación de un elipsoide tiene una expresión algebraica de la forma $\frac{x-h\;^{2}}{a^2} + \frac{y-k\;^{2}}{b^2} + \frac{z-l\;^{2}}{c^2} = 1$, donde h, k y l son números reales cualesquiera y $\frac{1}{a^2}, \frac{1}{b^2}$ y $\frac{1}{c^2}$ son reales positivos.
4. La ecuación de un hiperboloide de dos hojas es $-\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} + \frac{(z-l)^2}{c^2} = 1$

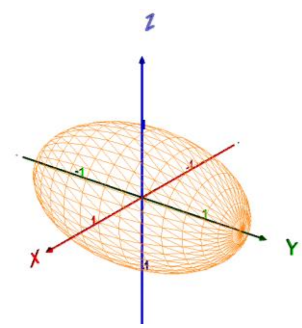


Figura 4.2-1 Elipsoide

Así mismo, se pretende que los estudiantes formulen *Proposiciones* como:

Si en la expresión $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} + \frac{(z-l)^2}{c^2} = 1$ que representa un elipsoide se le cambia uno de los coeficientes $\frac{1}{a^2}, \frac{1}{b^2}$ o $\frac{1}{c^2}$ por uno negativo, entonces la nueva ecuación representa un hiperboloide de una hoja; si se le cambia dos de los coeficientes por uno negativo, entonces la nueva ecuación representa un hiperboloide de una hoja.

Metas orientadas a habilidades de visualización

1. Favorecer el desarrollo de la habilidad *Identificación visual*, consistente en asociar la representación algebraica con la representación gráfica y un tipo de superficie.
2. Favorecer el desarrollo de la habilidad *Discriminación visual,* consistente en
   - Identificar qué cambios en los signos de los coeficientes de la representación algebraica, implican un cambio en el tipo de superficie. Por ejemplo, al comparar las representaciones algebraicas $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}+\frac{(z-l)^2}{c^2}=1$ y $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{y-k\;^2}{b^2}-\frac{(z-l)^2}{c^2}=1$, reconocer que la primera expresión representa un elipsoide y la segunda un hiperboloide de dos hojas.

Interacción y temporalidad

De acuerdo con las etapas definidas en la temporalidad en la Sección 4.1, en la primera etapa los estudiantes deben abordar la tarea en parejas durante aproximadamente 20 minutos. En esta etapa se espera que ellos realicen una exploración y luego, mediante la interacción grupal, generen el planteamiento de las posibles respuestas a lo solicitado en la tarea.

Prevemos que los estudiantes pueden abordar la tarea de esta secuencia como se presenta en la Tabla 4.2-1. Para facilitar la presentación de posibles producciones de los estudiantes, exponemos dos tipos de respuesta. Las respuestas R1 contemplan las tres formas de la expresión algebraica y por lo tanto son generales; en las respuestas R2 solo se tiene en cuenta una forma (un ejemplo) de la expresión algebraica, que es la que aborda el software, por lo tanto, estas son específicas. En la siguiente tabla se presentan ejemplos de respuesta R1 y R2.

Tabla 4.2-1 Posibles soluciones a la Tarea 1

Elipsoide
Expresión algebraica asociada: $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}+\frac{(z-l)^2}{c^2}=1$
R1: Si en la expresión anterior se cambia uno de los coeficientes por un coeficiente negativo, entonces se produce una
R2: Si en la expresión anterior se cambia el coeficiente $1/c^2$ por un coeficiente negativo, entonces se produce una

Hiperboloide de una hoja
Expresión algebraica asociada: $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}-\frac{(z-l)^2}{c^2}=1$
R1: Si en la expresión anterior se cambia uno de los dos coeficientes positivos por uno negativo, entonces se produce una
R2: Si en la expresión anterior se cambia el signo del coeficiente $1/a^2$ para que sea negativo, entonces se produce una

Hiperboloide de dos hojas
Expresión algebraica asociada: $-\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}+\frac{(z-l)^2}{c^2}=1$
R1: Si en la expresión anterior se cambian los coeficientes negativos por uno positivo y ademas uno de ellos se cambia por un coeficiente cero, entonces se produce un
R2: Si en la expresión anterior se cambia el signo de $1/a^2$ para que sea positivo y el coeficiente de $1/b^2$ por un cero, entonces se produce un

Cilindro Elíptico
Expresión algebraica asociada: $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$

El ítem ii pide establecer, con base en los resultados de la tabla anterior, la expresión algebraica que le corresponde a cada tipo de superficie. Para este caso para cada superficie presentamos una manera en la que los estudiantes pueden dar respuesta a este ítem.

- La ecuación de un elipsoide tiene una expresión algebraica de la forma $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}+\frac{(z-l)^2}{c^2}=1$
- La expresión algebraica de un hiperboloide de una hoja es $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}-\frac{(z-l)^2}{c^2}=1$

- Al hiperboloide de dos hojas le corresponde una expresión algebraica de la forma $-\frac{x-h\ ^2}{a^2}-\frac{y-k\ ^2}{b^2}+\frac{(z-l)^2}{c^2}=1$
- El cilindro tiene por ecuación $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$

El ítem iii pide comparar las superficies por parejas y determinar qué cambios se le deben hacer a la expresión algebraica de una para obtener la otra. Con ello se pretende que los estudiantes determinen los cambios que se le debe hacer a una expresión algebraica de una superficie de tipo dos, para obtener otra. Teniendo en cuenta que en total se generarían 12 proposiciones –ya que en esta secuencia se están abordando 4 tipos de superficies– solo presentamos tres de ellas ya que las restantes se enuncian de manera análoga.

- Si a la expresión $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}+\frac{(z-l)^2}{c^2}=1$, que representa un elipsoide, se le cambia uno de los coeficientes por uno negativo, entonces la nueva ecuación representa un hiperboloide de una hoja.
- Si a la expresión $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}+\frac{(z-l)^2}{c^2}=1$, que representa un elipsoide, se le cambia dos de los coeficientes por dos negativos, entonces la nueva ecuación representa un hiperboloide de dos hojas.
- Si a la expresión $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}+\frac{(z-l)^2}{c^2}=1$, que representa un elipsoide, se le cambia uno de los coeficientes por un cero, entonces la nueva ecuación representa un cilindro.

Durante el desarrollo de la tarea pueden presentarse dificultades (ver Tabla 4.2-2). Sugerimos un plan de acción del profesor ante las dificultades en la segunda etapa, que corresponde a la socialización. En esta etapa los estudiantes exponen sus producciones y pueden hacer explícitas sus dificultades. Esta puesta en común puede tomar 45 - 60 minutos.

Tabla 4.2-2: Dificultad 1, secuencia 1.

Dificultad 1	
Dificultad que presentan los estudiantes	No indicar todas las posibilidades de cambio que puede tener una expresión dada, para convertirla en una expresión algebraica que represente otro tipo de curva. No percatarse que independiente de los coeficientes $1/a^2$, $1/b^2$ o $1/c^2$ que se escojan para ser negativos –uno o dos de estos– implica un

	cambio en el tipo de superficie. Por ejemplo, no se logra establecer que si un coeficiente es negativo (dejando los otros positivos), la expresión es un hiperboloide de una hoja; o que, si dos coeficientes son negativos, la expresión es un hiperboloide de dos hojas.
Intervención del profesor para contra-rrestarla	Debido a que la ecuación canónica de una superficie tiene tres formas y el estudio para cada una es análogo entre sí, el software solo contempla para cada superficie un caso. El profesor puede aprovechar producciones de los estudiantes en donde muestre un ejemplo en el que un coeficiente es negativo (por ejemplo, $1/c^2$) y otro en que dos (por ejemplo, $1/c^2$ y $1/b^2$) lo sean y, con base en ello, ilustrar que para el primer caso se forma un hiperboloide de una hoja, y para el segundo un hiperboloide de dos hojas. En su defecto, puede preguntar por el tipo de superficie que se forma en cada caso.

Por otra parte, puede presentarse la siguiente dificultad en el proceso de generalización (ver *Tabla 4.2-3*):

Tabla 4.2-3: Dificultad 2 secuencia 1

Dificultad 2	
Dificultad que presentan los estudiantes	No manipular todos los parámetros que posibilita el software, sino solamente uno. Esto impide establecer las generalizaciones esperadas.
Intervención del profesor para contra-rrestarla	El profesor puede aprovechar producciones de los estudiantes en donde muestre un ejemplo en el que $1/c^2$ es negativo, otro en el que $1/b^2$ lo sea, u otro en que lo sea $1/a^2$ y, con base en ello, ilustrar que, para cada uno de tales casos, siempre se forma un hiperboloide de una hoja. Algo similar podría hacer, pero tomando producciones de los estudiantes en donde muestre ejemplos en el que dos coeficientes son negativos y, con base en ello, ilustrar que, para cada uno de tales casos, siempre se forma un hiperboloide de dos hojas.

	En su defecto, en cualquiera de los dos casos, el profesor puede preguntar la generalización que se puede hacer con base en cada conjunto de ejemplificaciones.

En la tercera etapa el profesor direccionará las respuestas de los estudiantes a través de preguntas adicionales o reformulaciones, de tal manera que se dé respuesta a la tarea de la manera correcta; es decir, institucionalizando cada una de las expresiones algebraicas de las superficies que se abordarán en las demás secuencias. Esta última etapa tendrá una duración de aproximadamente 20-30 minutos.

4.2.2 Reconocimiento del tipo de objeto que se genera en la intersección entre la superficie con diferentes planos

Secuencia de tareas 2

Use la herramienta *plano perpendicular a un eje*, el *panel de vistas* y la *bola de cristal* para determinar y observar los cortes que se generan entre la superficie y los planos paralelos a los planos coordenados.

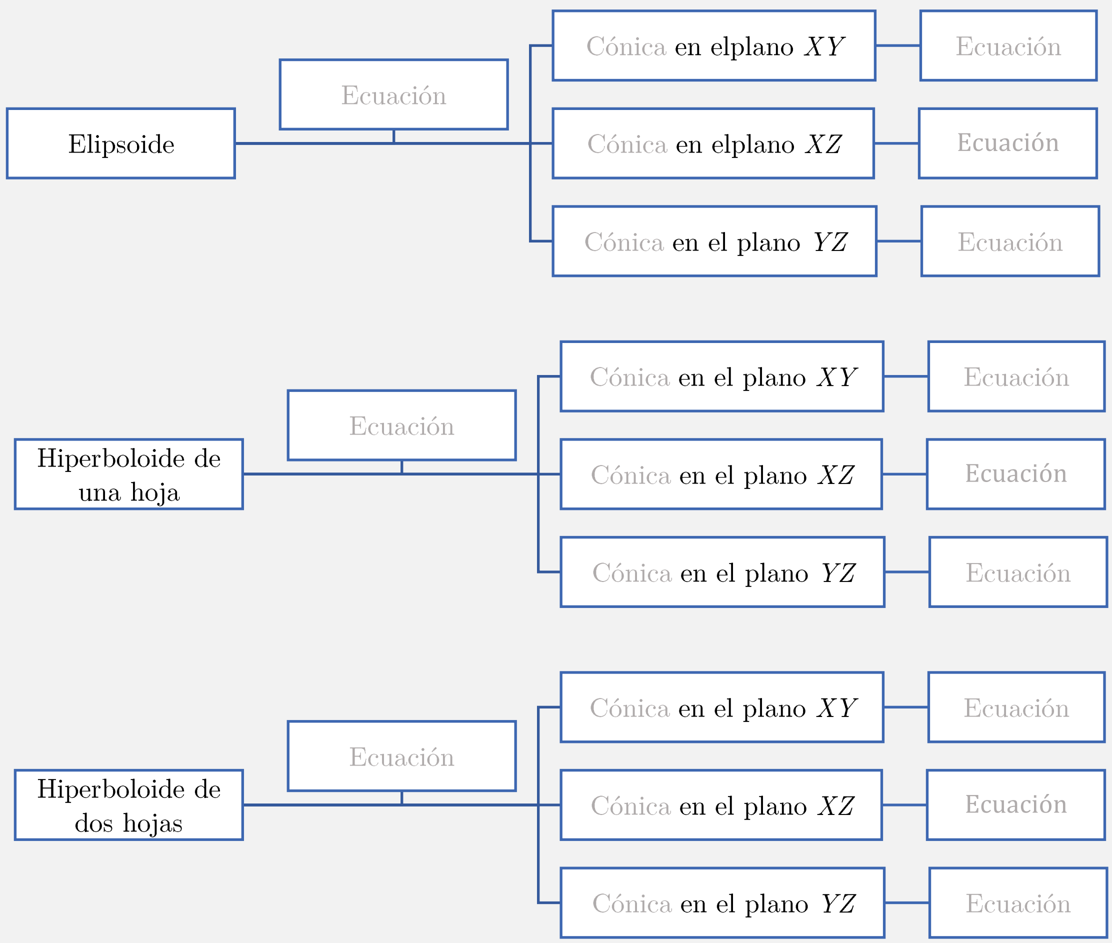
i. Seleccione el tipo de superficie y asigne un valor numérico a los parámetros a, b y c. Luego modifique –en el panel de control– los parámetros del plano perpendicular a un eje y observe la intersección entre la superficie y dicho plano. Complete la siguiente tabla con la información encontrada. Donde dice "Figura" debe poner la representación gráfica asociada.

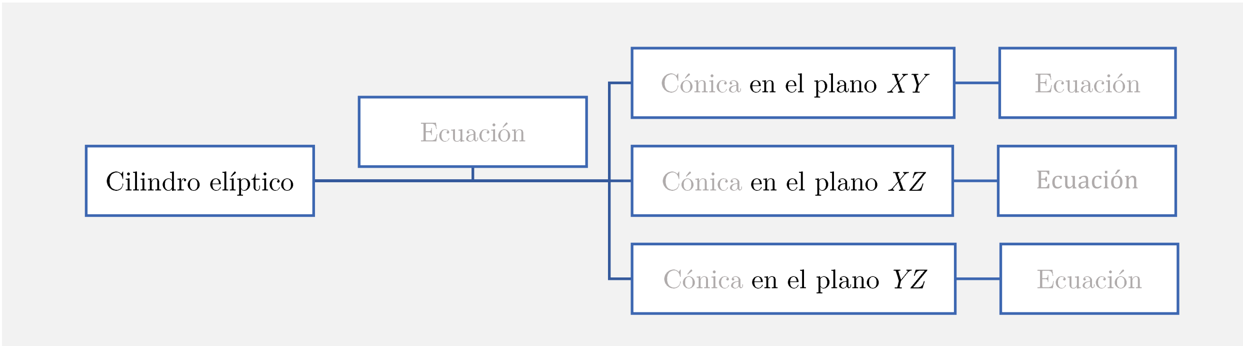
Tipo de superficie	Cónica que se genera en los planos paralelos al plano coordenado		
	XY	XZ	YZ
Elipsoide	Figura	Figura	Figura
$\frac{(x)^2}{(a=?)^2}+\frac{(y)^2}{(b=?)^2}+\frac{(z)^2}{(c=?)^2}=1$	Tipo: _________	Tipo: _________	Tipo: _________
Hiperboloide de una Hoja	Figura	Figura	Figura
$\frac{(x)^2}{(a=?)^2}+\frac{(y)^2}{(b=?)^2}-\frac{(z)^2}{(c=?)^2}=1$	Tipo: _________	Tipo: _________	Tipo: _________
Hiperboloide de dos hojas	Figura	Figura	Figura

$\frac{(x)^2}{(a=?)^2}-\frac{(y)^2}{(b=?)^2}-\frac{(z)^2}{(c=?)^2}=1$	Tipo: ________	Tipo: ________	Tipo: ________
Cilindro elíptico	Figura	Figura	Figura
$\frac{(x)^2}{(a=?)^2}+\frac{(y)^2}{(b=?)^2}=1$	Tipo: ________	Tipo: ________	Tipo: ________

ii. Con base en los resultados de la tabla anterior, para cada tipo de superficie mencione qué sucede con las curvas que se generan a partir de la intersección del plano y la superficie, cuando se desplaza el plano.

iii. Con base en los resultados de la tabla del ítem i, observe para cada tipo de superficie, cómo se relaciona la cónica que se genera en cada uno de los planos coordenados con la expresión algebraica de la primera columna. Determine la ecuación de estas cónicas y complete las siguientes tablas con la información encontrada.





Con esta secuencia se apunta a lo que hemos denominado *estudio de la ecuación de una superficie*, en lo que respecta a determinar las curvas de las intersecciones de planos con la superficie cuadrática para determinar algunas propiedades de la superficie (ver sección 2.1.2.1). A continuación, presentamos la descripción para esta secuencia.

Requisitos

Para desarrollar esta secuencia es necesario que los estudiantes hayan realizado la secuencia número uno y por lo tanto los requisitos son los siguientes:

Requisitos orientados a objetos primarios

1. Reconocer las características de las expresiones algebraicas que representan las superficies cuadráticas elipsoide, hiperboloide de una hoja, hiperboloide de dos hojas, y cilindro elíptico, por ejemplo reconocer los intervalos de variación para los cuales los valores de x, y y z son valores reales, que x, y y z son variables reales, que $\frac{1}{a^2}, \frac{1}{b^2}$ y $\frac{1}{c^2}$ son coeficientes, etc.
2. Reconocer la representación algebraica de las cónicas. Esto es lo especificado en los requisitos comunes de la Sección 4.1

Requisitos orientados a habilidades de visualización

1. Haber desarrollado la habilidad *Identificación visual*, consistente en asociar la representación algebraica con un tipo de superficie.
2. Haber desarrollado la habilidad *Discriminación visual,* consistente en:
   - Identificar qué, cambios en los signos de los coeficientes de la representación algebraica implican un cambio en el tipo de superficie.

- Identificar, con base en las representaciones gráficas de dos tipos de superficies, cómo cambia el ancho, alto y profundo entre estas.

Metas

Metas orientadas a objetos primarios

1. Identificar el tipo de curva que se genera con la intersección entre las superficies (elipsoide, hiperboloide de una hoja, hiperboloide de dos hojas y cilindro elíptico) y el plano paralelo a los planos coordenados.
2. Identificar la representación algebraica de las cónicas que se determinan con la intersección entre las superficies (elipsoide, hiperboloide de una hoja, hiperboloide de dos hojas y cilindro elíptico) y los planos coordenados, con base en la representación algebraica de la superficie.

De manera más específica, se pretende que los estudiantes logren establecer una relación entre lo abordado en el 2D y el 3D, es decir, entre las cónicas y las superficies cuadráticas según su representación gráfica y su representación algebraica. Para este caso específico, reconocer qué cónicas componen un tipo de superficie al estudiar las intersecciones de planos paralelos a los planos coordenados y la superficie a partir de sus representaciones. De esa forma, se espera que los estudiantes enuncien cosas como:

1. Las intersecciones entre un elipsoide y los planos paralelos a los planos coordenados generan elipses.
2. Las elipses, que se generan en la intersección entre los planos coordenados y un elipsoide, son las elipses con mayor tamaño.
3. La intersección entre el hiperboloide de una hoja $\frac{x^{\ 2}}{1^2}+\frac{y^{\ 2}}{1^2}-\frac{z^{\ 2}}{1^2}=1$ y el plano YZ es una hipérbola y señalar una representación como la de la Figura 4.2-2.
4. La elipse que surge de la intersección entre el plano coordenado XY y el elipsoide $\frac{x^{\ 2}}{1^2}+\frac{y^{\ 2}}{1.2^2}+\frac{z^{\ 2}}{0.6^2}=1$ es $\frac{x^{\ 2}}{1^2}+\frac{y^{\ 2}}{1.2^2}=1$.

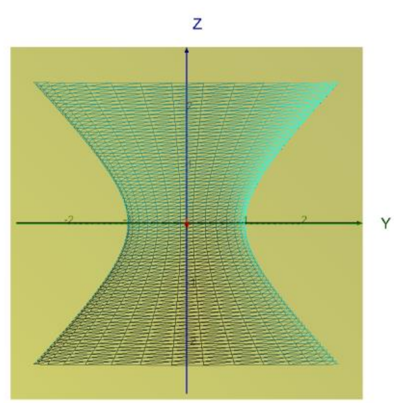


Figura 4.2-2:Sección de un hiperboloide de una hoja por el plano YZ

5. Las cónicas que surgen de la intersección entre los planos coordenados XY, XZ y YZ y un hiperboloide de una hoja son respectivamente la elipse: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$; y las hipérbolas $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ y $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.

Metas orientadas a habilidades de visualización

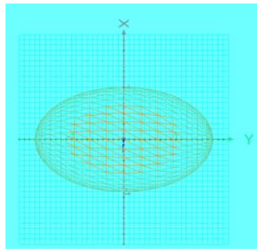
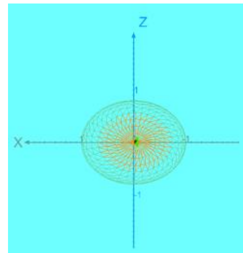
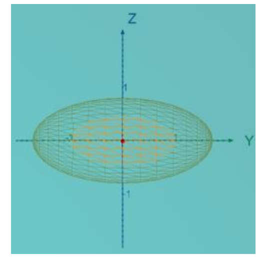
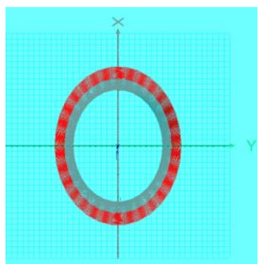
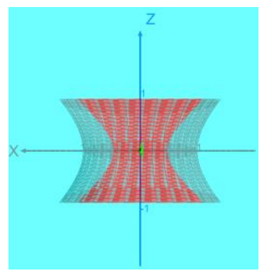
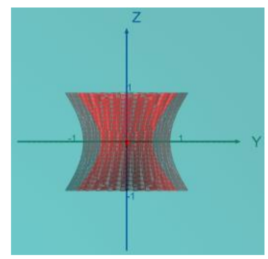
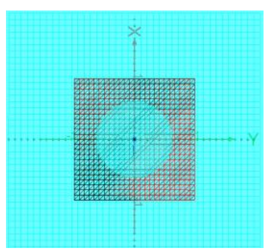
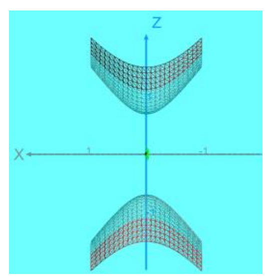
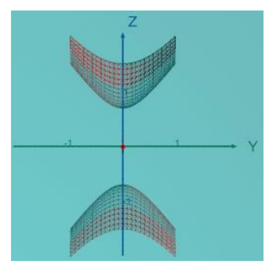
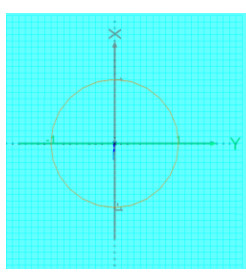
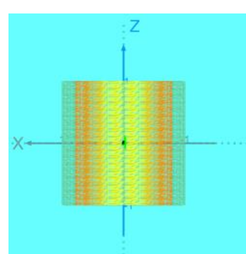
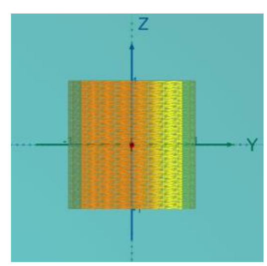
1. Favorecer el desarrollo de la habilidad *percepción de la posición de una superficie en el espacio* consistente en identificar, teniendo como referencia las cónicas generadas en la intersección y el sistema coordenado, algunas propiedades de las superficies como su extensión respecto a los ejes o sus intersecciones con estos.
2. Favorecer el desarrollo de la habilidad *percepción de relaciones espaciales*, consistente en identificar, a partir de las vistas superior, lateral y frontal de las intersecciones entre planos paralelos a uno de los planos coordenados y la superficie, el comportamiento de la superficie, a partir de la cónica que resulta de dicha intersección.

Interacción y temporalidad

De acuerdo con las etapas definidas en la Sección 4.1. Durante la primera etapa los estudiantes deben abordar la tarea en parejas y realizar una exploración para plantear las posibles respuestas a lo solicitado, durante aproximadamente 30 minutos.

Prevemos que los estudiantes pueden abordar el ítem i de la tarea como se presenta en la Tabla 4.2-4, en esta se pide completar la información respecto al tipo de cónica que se genera en la intersección de la superficie con los planos coordenados. Algunas de las superficies resultantes de fijar los parámetros a, b y c con las que pueden completar las columnas 2-4 de la tabla son las que se presentan en la columna 1.

Tabla 4.2-4: Cónicas que se generan en la intersección de los planos paralelos al plano coordenado y una superficie cuadrática

Tipo de superficie	Cónica que se genera en los planos paralelos al plano coordenado		
	XY	XZ	YZ
Elipsoide $\frac{(x)^2}{(1)^2}+\frac{(y)^2}{(1.7)^2}+\frac{(z)^2}{(0.8)^2}=1.$			
	Tipo: Elipse	Tipo: Elipse	Tipo: Elipse
Hiperboloide de una Hoja $\frac{(x)^2}{(1)^2}+\frac{(y)^2}{(0.8)^2}-\frac{(z)^2}{(0.9)^2}=1.$			
	Tipo: Elipse	Tipo: Hipérbola	Tipo: Hipérbola
Hiperboloide de dos hojas $-\frac{x^{\ 2}}{(1)^2}-\frac{y^{\ 2}}{1.7^{\ 2}}+\frac{(z)^2}{(0.8)^2}=1.$			
	Tipo: Elipse	Tipo: Hipérbola	Tipo: Hipérbola
Cilindro elíptico $\frac{(x)^2}{(1)^2}+\frac{(y)^2}{(1)^2}=1$			
	Tipo: Elipse	Tipo: Dos rectas paralelas	Tipo: Dos rectas paralelas

En el ítem ii se pide mencionar, con base en los resultados de la tabla anterior, qué sucede con las curvas que se generan a partir de la intersección del plano y la superficie, cuando se desplaza el plano, en cada tipo de superficie. Para este caso presentamos la siguiente manera en la que los estudiantes pueden dar respuesta:

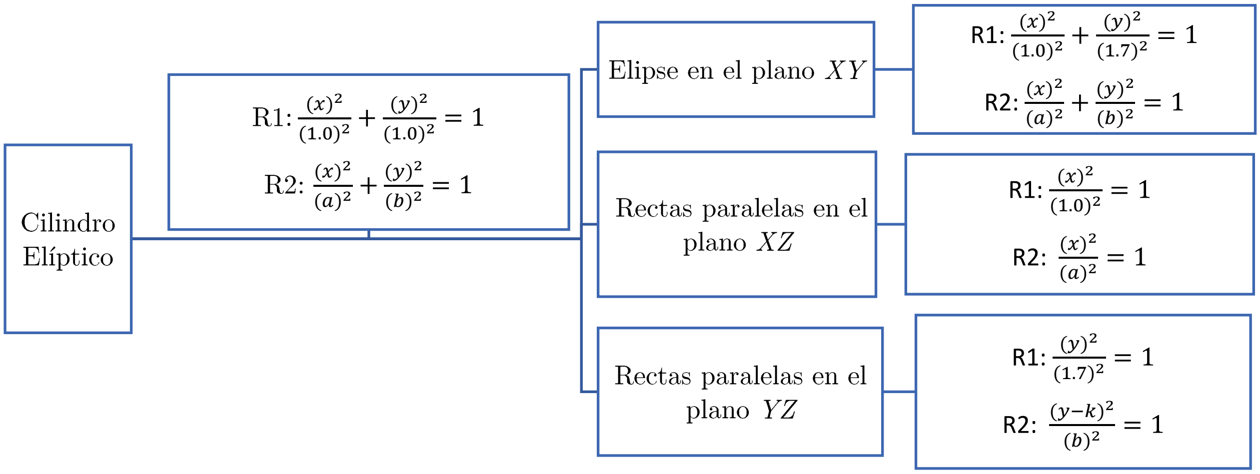
- Elipsoide: las elipses que se generan en cada uno de los planos paralelos a los planos XY, XZ y ZY, aumentan de tamaño cuando el plano paralelo se acerca al plano coordenado y disminuye al alejarse. La elipse más grande en cada plano indica las dimensiones del elipsoide.
- Hiperboloide de una hoja y dos hojas: las elipses que se generan en los planos paralelos al plano XY, aumentan de tamaño cuando el plano paralelo se aleja del plano coordenado. La elipse del plano XY es la menor de la familia de elipses. Las hipérbolas son más abiertas cuando se acercan a los planos XZ y ZY. Por ende, el hiperboloide de una hoja, por ejemplo, se extiende indefinidamente lo largo del eje Z y es cerrada.
- Cilindro elíptico: la elipse mantiene su tamaño cuando el plano paralelo al plano XY, se desplaza. Las rectas paralelas se acercan cuando el plano paralelo se aleja del plano coordenado XZ. Por ende, el cilindro elíptico se extiende infinitamente respecto al eje Z.

El ítem iii pide determinar, para cada superficie, la ecuación de la cónica que se genera en cada uno de los planos coordenados. Para dar respuesta a este ítem los estudiantes deberán igualar a cero una a una las variables en cada una de las expresiones algebraicas de los tipos de superficies - este procedimiento es como el que se indica en la Sección 2.1.2.3 -. Para facilitar la presentación de posibles producciones de los estudiantes, exponemos dos tipos de respuesta. Las respuestas R1 contemplan un caso particular (un ejemplo) del tipo de superficie y las respuestas R2 contemplan el tipo de superficie en general.

- Elipsoide
  - R1: $\frac{(x)^2}{(1.0)^2}+\frac{(y)^2}{(1.7)^2}+\frac{(z)^2}{(0.8)^2}=1$
    R2: $\frac{(x)^2}{(a)^2}+\frac{(y)^2}{(b)^2}+\frac{(z)^2}{(c)^2}=1$
  - Elipse en el plano XY
    - R1: $\frac{(x)^2}{(1.0)^2}+\frac{(y)^2}{(1.7)^2}=1$
      R2: $\frac{(x)^2}{(a)^2}+\frac{(y)^2}{(b)^2}=1$
  - Elipse en el plano XZ
    - R1: $\frac{(x)^2}{(1.0)^2}+\frac{(z)^2}{(0.8)^2}=1$
      R2: $\frac{(x)^2}{(a)^2}+\frac{(z)^2}{(c)^2}=1$
  - Elipse en el plano YZ
    - R1: $\frac{(y)^2}{(1.7)^2}+\frac{(z)^2}{(0.8)^2}=1$
      R2: $\frac{(y)^2}{(b)^2}+\frac{(z)^2}{(c)^2}=1$

- Hiperboloide de una hoja
  - R1: $\frac{(x)^2}{(1.0)^2}+\frac{(y)^2}{(0.8)^2}-\frac{(z)^2}{(0.9)^2}=1$
    R2: $\frac{(x)^2}{(a)^2}+\frac{(y)^2}{(b)^2}-\frac{(z)^2}{(c)^2}=1$
  - Elipse en el plano XY
    - R1: $\frac{(x)^2}{(1.0)^2}+\frac{(y)^2}{(0.8)^2}=1$
      R2: $\frac{(x)^2}{(a)^2}+\frac{(y)^2}{(b)^2}=1$
  - Hipérbola en el plano XZ
    - R1: $\frac{(x)^2}{(1.0)^2}-\frac{(z)^2}{(0.9)^2}=1$
      R2: $\frac{(x)^2}{(a)^2}-\frac{(z)^2}{(c)^2}=1$
  - Hipérbola en el plano YZ
    - R1: $\frac{(y)^2}{(0.8)^2}-\frac{(z)^2}{(0.9)^2}=1$
      R2: $\frac{(y)^2}{(b)^2}-\frac{(z)^2}{(c)^2}=1$

- Hiperboloide de dos hojas
  - R1: $\frac{(x)^2}{(1.0)^2}-\frac{(y)^2}{(0.8)^2}+\frac{(z)^2}{(0.9)^2}=1$
    R2: $\frac{(x)^2}{(a)^2}+\frac{(y)^2}{(b)^2}-\frac{(z)^2}{(c)^2}=1$
  - Elipse en el plano XY
    - R1: $\frac{(x)^2}{(1.0)^2}+\frac{(y)^2}{(0.8)^2}=-1$
      R2: $\frac{(x)^2}{(a)^2}+\frac{(y)^2}{(b)^2}=\frac{(z)^2}{(c)^2}-1$
  - Hipérbola en el plano XZ
    - R1: $-\frac{(x)^2}{(1.0)^2}+\frac{(z)^2}{(0.9)^2}=1+\frac{(y)^2}{(0.8)^2}$
      R2: $-\frac{(x)^2}{(a)^2}+\frac{(z)^2}{(c)^2}=1+\frac{(y)^2}{(b)^2}$
  - Hipérbola en el plano YZ
    - R1: $-\frac{(y)^2}{(0.8)^2}+\frac{(z)^2}{(0.9)^2}=1+\frac{(x)^2}{(1.0)^2}$
      R2: $-\frac{(y)^2}{(b)^2}+\frac{(z)^2}{(c)^2}=1+\frac{(x)^2}{(a)^2}$



Durante el desarrollo de la tarea pueden presentarse dificultades en relación con la representación gráfica (ver Tabla 4.2-5) y la algebraica (ver Tabla 4.2-6). Sugerimos un plan de acción del profesor ante las dificultades en la segunda etapa, que corresponde a la socialización. En esta etapa los estudiantes exponen sus producciones y pueden hacer explícitas sus dificultades. Esta puesta en común puede tomar 40 - 50 minutos.

Tabla 4.2-5: Dificultad 1, secuencia 2.

	Dificultad 1
Dificultad que presentan los estudiantes	Contemplar la expresión algebraica de la familia de cónicas, que resulta de la intersección entre la superficie y los planos paralelos a los planos coordenados, y no solo la cónica, que resulta de la intersección de la superficie con uno de los planos coordenados. Esto es, en el proceso no cancelan uno de los términos al reemplazar una variable por cero sino despejan uno de los términos de la expresión algebraica de la superficie.
Intervención del profesor para contrarrestarla	El profesor puede aprovechar producciones de los estudiantes en donde muestre un ejemplo de la ecuación de una familia de cónicas, por ejemplo las elipses ${\frac{x}{1^2}}^2 + {\frac{y}{1.2^2}}^2 = 1 + \frac{q^2}{0.6^2}$, q un real; y se reemplaza a q por 0 y con base en ello, ilustrar que para el caso en el que se reemplaza a q por un valor específico, se está encontrando la expresión algebraica de una sola cónica y por lo tanto la ecuación de dichas elipses no representa la elipse que se forma en el plano coordenado XY.

Tabla 4.2-6: Dificultad 2, secuencia 2.

Dificultad 2	
Dificultad que presentan los estudiantes	Interpretar la intersección entre los planos paralelos a los planos coordenados y la superficie como una cónica sólida.
Intervención del profesor para contrarrestarla	El profesor puede formular preguntas para orientar a los estudiantes como: ¿las superficies elipsoide, hiperboloide de una hoja, hiperboloide de dos hojas y cilindro elíptico son sólidas? ¿si se corta la superficie con un plano paralelo a uno de los planos coordenados que debería aparecer en la intersección?, etc.

En la tercera etapa el profesor direccionará las respuestas de los estudiantes a través de preguntas adicionales o reformulaciones, de tal manera que se dé respuesta a la tarea de la manera correcta; es decir, institucionalizando cada una de las expresiones algebraicas de la familia de cónicas que hacen parte de cada tipo de superficie cuadrática. Esta última etapa tendrá una duración de aproximadamente 20-30 minutos.

4.2.3 Reconocimiento de las propiedades de un tipo de objeto a partir del cambio de uno de los parámetros en su expresión algebraica

Secuencia de tareas 3

Teniendo en cuenta la ecuación general de la superficie cuadrática elipsoide, haga clic en el botón *elipsoide* y usando las herramientas *panel del domino del plano XY, vistas, la bola de cristal* y *las cuadrículas de los planos coordenados* –que se encuentran ubicadas en el panel de control– aborde cada uno de los siguientes ítems.

$$\frac{x-h\ ^{2}}{a^2}+\frac{y-k\ ^{2}}{b^2}+\frac{z-l\ ^{2}}{c^2}=1$$

a. Dada la expresión algebraica $\frac{(x-h)^2}{(0.7)^2}+\frac{(y-k)^2}{(1.2)^2}+\frac{(z-l)^2}{(2.5)^2}=1$, use el *panel de control de actividad* para asignarle un valor específico a los parámetros h, k y l, tomando en cuenta los casos de la tabla siguiente. Para cada caso, observe la representación gráfica asociada tomando en cuenta la *vista superior*, *vista frontal* y *vista lateral* provistas por el software.

i. Complete la siguiente tabla:

	Caso	Cambio producido en la representación gráfica (tome en cuenta el sistema coordenado para indicar el cambio)
1	$h = k = l = 0$	La superficie dada tiene su centro en el origen.
2	$h = k = 0;\ l \neq 0$	La superficie...
3	$h = l = 0; k \neq 0$	
4	$k = l = 0; h \neq 0$	
5	$h \neq k \neq l \neq 0$	

ii. Los parámetros h, k y l aluden a las coordenadas de un elemento de la superficie, ¿cuál es ese elemento?

iii. Con respecto al caso en el que $h = k = l = 0$, ¿qué cambios produce en la superficie un cambio en alguno de los parámetros h, k o l?

b. Use el *panel de control de actividad* para obtener $h = k = l = 0$ y asigne un valor numérico a los parámetros a, b y c. Asigne los mismos valores a los parámetros a, b y c, pero ahora en diferente orden hasta hacer las tres combinaciones posibles. Tome un pantallazo de la representación gráfica y las vistas –XY, YZ y XZ– de cada caso y complete la siguiente tabla:

Vista general	Vista superior	Vista frontal	Vista lateral
Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica
$\frac{(x-h)^2}{(a=?)^2} + \frac{(y-k)^2}{(b=?)^2} + \frac{(z-l)^2}{c=?\ ^2} = 1$	XY	YZ	XZ
Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica
$\frac{(x-h)^2}{(a=?)^2} + \frac{(y-k)^2}{(b=?)^2} + \frac{(z-l)^2}{c=?\ ^2} = 1$	XY	YZ	XZ
Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica
$\frac{(x-h)^2}{(a=?)^2} + \frac{(y-k)^2}{(b=?)^2} + \frac{(z-l)^2}{c=?\ ^2} = 1$	XY	YZ	XZ

i. Compare la representación gráfica de la *vista superior* de cada caso (segunda columna) de la tabla, y reporte las similitudes y diferencias entre estas. Puede usar las herramientas: vistas, panel dominio y bola de cristal del software.

ii. Repita el ejercicio del ítem i, pero considerando la *vista frontal*, y luego la *vista lateral.*

iii. De manera general, ¿qué le sucede a la superficie cuando se hacen los cambios indicados en los ítems anteriores?

iv. ¿Es válido lo establecido en el ítem iii para cualquier trio de números que considere como parámetros h, k y l?

c. Use el *panel de control de actividad* para obtener $h = k = l = 0$ y asigne un valor numérico a los parámetros a, b y c.

i. Asigne los mismos valores a los parámetros a, b y c, considerando los casos de la siguiente tabla. Tome un pantallazo de la representación gráfica y las vistas –XY, YZ y XZ- de cada caso y complete la siguiente tabla:

Vista general	Vista superior	Vista frontal	Vista lateral
Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica
$a \neq b \neq c$	XZ	YZ	XY
Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica
$a = b$	XZ	YZ	XY
Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica
$b = c$	XZ	YZ	XY
Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica
$c = a$	XZ	YZ	XY
Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica
$a = b = c$	XZ	YZ	XY

ii. Cada parámetro a, b y c, ¿qué indica de la superficie?

iii. Para cada caso de la tabla, ¿qué propiedad puede decir de la superficie?

Con esta secuencia pretendemos estudiar los atributos que adquiere algún tipo de superficie cuando los parámetros de la expresión algebraica cambian de manera muy específica (como las impuestas en los ítems de la secuencia): rotación de 90° (cuando se manipula a, b y c de la forma indicada) y traslación de una superficie o cambio de su centro (cuando se manipula h, k o l de la forma indicada) –ver Sección 2.2, Tabla 2.2-5.–. A continuación, presentamos la descripción para esta secuencia.

Requisitos

Para desarrollar esta secuencia es necesario que los estudiantes hayan realizado la secuencia número dos, por lo tanto, los requisitos son los siguientes:

Requisitos orientados a objetos primarios

1. Identificar el tipo de superficie según su expresión algebraica y representación gráfica.
2. Identificar el tipo de curva que se genera con base en la intersección de las superficies con los planos coordenados.

Requisitos orientados a habilidades de visualización

Haber desarrollado la habilidad percepción de la posición de una superficie en el espacio, consistente en asociar la representación algebraica de la superficie con las intersecciones de esta con los planos coordenados.

Metas

Metas orientadas a objetos primarios

1. Reconocer algunas de las propiedades del elipsoide a partir de cambios en los parámetros h, k y l de su expresión algebraica.
2. Reconocer algunas de las propiedades del elipsoide a partir de cambios en los parámetros a, b y c de su expresión algebraica.
3. Identificar, con base en la representación gráfica, que los parámetros de la superficie son independientes entre sí.

Específicamente, se pretende que los estudiantes logren establecer propiedades como:

1. Los parámetros h, k y l aluden a las coordenadas del centro de la superficie.
2. Si se cambian los parámetros h, k y l, la superficie tiene una traslación si esta se compara con una superficie que tiene la misma expresión, salvo que con parámetros $h = k = l = 0$ (i.e., centrada en el origen del sistema coordenado).
3. El parámetro h determina un desplazamiento del elipsoide en el sentido del eje X. El parámetro k determina un desplazamiento del elipsoide en el sentido del eje Y y el parámetro l determina el desplazamiento del elipsoide en el sentido del eje Z.

4. Los parámetros a, b y c indican qué tan alargado o achatado está el elipsoide respecto al eje X, Y o Z respectivamente. De manera más formal, se pretende establecer las siguientes definiciones de los elementos del elipsoide:

   El parámetro a determina en el elipsoide los vértices $(a, 0{,}0)$ y $(-a, 0{,}0)$.

   El parámetro b determina en el elipsoide los vértices $(0, b, 0)$ y $(0, -b, 0)$.

   El parámetro c determina en el elipsoide los vértices $(0{,}0, c)$ y $(0{,}0, -c)$.

   Si $a > b > c$, entonces:

   Eje en x: El eje mayor del elipsoide está determinado por el parámetro a y es el segmento cuyos extremos son los puntos $(a, 0{,}0)$ y $(-a, 0{,}0)$ y su medida es $2a$.

   Eje en y: El eje medio del elipsoide está determinado por el parámetro b y es el segmento cuyos extremos son los puntos $(0, b, 0)$ y $(0, -b, 0)$ y su medida es $2b$.

   Eje en z: El eje menor del elipsoide está determinado por el parámetro c y es el segmento cuyos extremos son los puntos $(0{,}0, c)$ y $(0{,}0, -c)$ y su medida es $2c$.

Metas orientadas a habilidades de visualización

1. Favorecer el desarrollo de la habilidad *Percepción de la posición de una superficie en el espacio*, en los siguientes sentidos:
   i. Relacionar la posición de la representación gráfica de la superficie respecto al sistema coordenado tridimensional, a partir de su expresión algebraica.
   ii. Identificar propiedades del elipsoide (intersección de superficie con ejes, longitud de ejes, centro de superficie) a partir de observar distintas representaciones gráficas de esta.
2. Favorecer el desarrollo de la habilidad *Conservación de la percepción,* en el sentido de identificar que, a partir de la expresión algebraica o gráfica, aunque la superficie elipsoide se traslade, esta sigue siendo del mismo tipo.
   i. Identificar que, aun cuando la superficie elipsoide se rote 90°, esta sigue siendo del mismo tipo.

Interacción y temporalidad

La descripción para esta secuencia se hará tarea por tarea y teniendo en cuenta las etapas definidas en la temporalidad en la Sección 4.1.

Tarea a: En la primera etapa los estudiantes deben abordar la tarea en parejas y mediante la interacción grupal generan el planteamiento de las posibles respuestas a lo solicitado en la tarea, durante aproximadamente 30 minutos. Prevemos que los estudiantes pueden abordar las tareas de esta secuencia como se presenta en la Tabla 4.2-7. Para facilitar la presentación de posibles producciones de los estudiantes respecto del ítem i de la tarea a, proponemos dos tipos de respuesta: R1 que contemplan el centro de la superficie como el elemento que sufre el cambio y R2 que son respuestas que aluden a cómo afecta el cambio a toda la superficie.

Tabla 4.2-7: Posibles respuestas de los estudiantes, del tipo de atributos que adquiere un elipsoide cuando los parámetros $h.k$ y l de su expresión algebraica cambian específicamente.

Caso		Cambio producido en la representación gráfica (tome en cuenta el sistema coordenado para indicar el cambio)
1	$h = k = l = 0$	R1: La superficie está en el origen. El centro de la superficie se encuentra en la coordenada (0,0,0).
		R2: La superficie no se desplaza sobre alguno de los ejes.
2	$h = k = 0;\ l \neq 0$	R1: El centro de la superficie se desplaza sobre el eje Z. Pero no cambia la forma de la superficie.
		R2: La superficie se desplaza sobre el eje Z.
3	$h = l = 0; k \neq 0$	R1: El centro de la superficie se desplaza sobre el eje Y. Pero no cambia la forma de la superficie.
		R2: La superficie se desplaza sobre el eje Y.
4	$k = l = 0; h \neq 0$	R1: El centro de la superficie se desplaza sobre el eje X. Pero no cambia la forma de la superficie.
		R2: La superficie se desplaza sobre el eje X.
5	$h \neq k \neq l \neq 0$	R1: El centro de la superficie Se desplaza a la coordenada (h, k, l). Pero no cambia la forma de la superficie.
		R2: La superficie se desplaza sobre el eje Z, el eje Y, y el eje X tantas unidades como indique el número que se le asignó a cada parámetro.

Para el ítem ii de la tarea a se pide identificar el elemento de la superficie al que aluden los parámetros h, k y l, al dar su coordenada. Para este ítem consideramos que los estudiantes pueden llegar a respuestas del tipo R1; la idea sería que tales parámetros representan el centro de la superficie.

Para el ítem iii de la tarea a se pide identificar cómo se afectan ciertos atributos de la superficie cuando hay un cambio en alguno de los parámetros h, k o l; prevemos que los estudiantes pueden presentar tres tipos de respuestas para esta pregunta: (R1) alusión de un caso específico, es decir, diciendo qué sucede al modificar los parámetros h, k o l con valores positivos o negativos específicos; (R2) alusión al comportamiento del centro del elipsoide respecto al cambio generado en los parámetros; (R3) alusión a una respuesta generalizada según el comportamiento de los parámetros.

R1: Teniendo en cuenta la ecuación $\frac{(x-h)^2}{(0.7)^2}+\frac{(y-k)^2}{(1.2)^2}+\frac{(z-l)^2}{(2.5)^2}=1$. Si tomamos a $h=2, k=0$ y $l=0$, el elipsoide se desplaza 2 unidades en el semieje positivo X. Si tomamos a $h=0,\ k=-1.5$ y $l=0$, la elipse se desplaza -1.5 unidades en el semieje negativo Y. Si tomamos a $h=0,\ k=0\ y\ l=2.5$, la elipse se desplaza 2.5 unidades en el semieje positivo Z. Una variación a esta respuesta es que los estudiantes puedan decir, respectivamente, cosas como la superficie se mueve 2 unidades hacia la derecha, 1.5 unidades hacia atrás, y 2.5 unidades hacia arriba, dependiendo de la posición del sistema coordenado que se tenga (ver Figura 4.2-3).

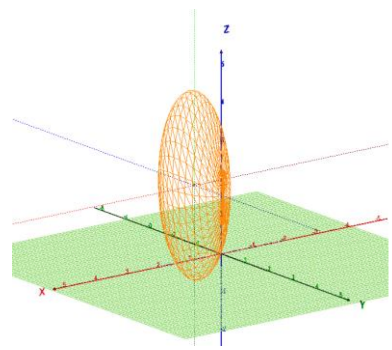


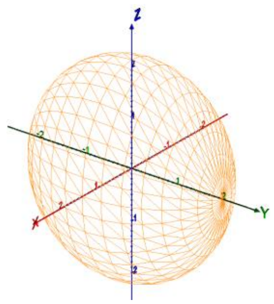
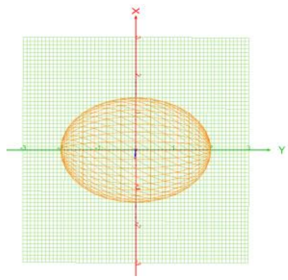
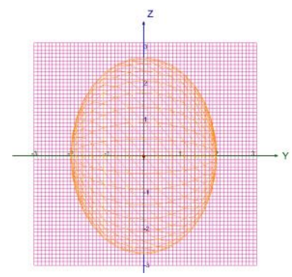
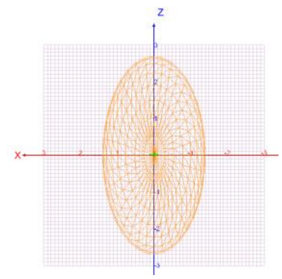
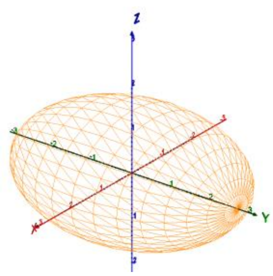
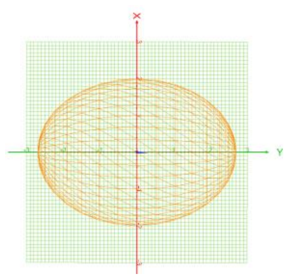
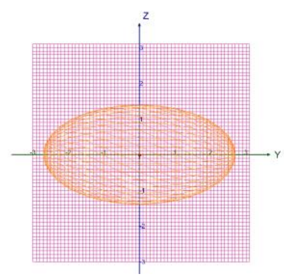
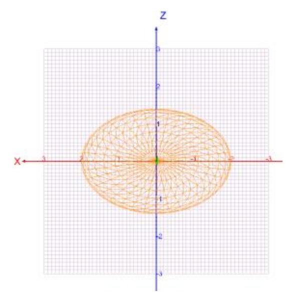
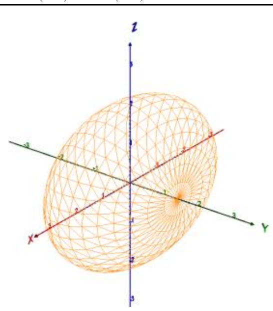
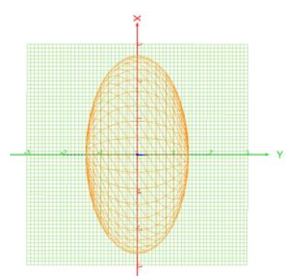
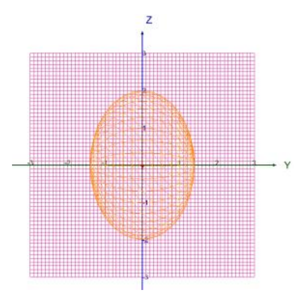
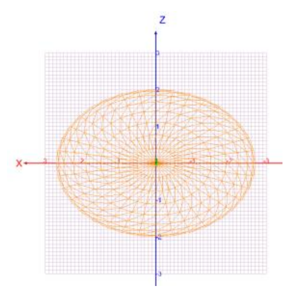
Figura 4.2-3 Elipsoide en el sistema coordenado

R2: Cambiar tales parámetros, produce un desplazamiento del centro de la superficie respecto a los ejes, es decir h determina cuantas unidades se desplaza en el eje X, k respecto al eje Y y l respecto al eje Z.

R3: El parámetro h determina el desplazamiento del elipsoide en el eje X. El parámetro k determina el desplazamiento del elipsoide en el eje Y y el parámetro l determina el desplazamiento del elipsoide sobre el eje Z. La dirección dependerá de si h, k o l toman valores positivos o negativos. Y h, k y l determinan la coordenada del centro del elipsoide.

Para el caso de la Tarea b, prevemos que los estudiantes proporcionen respuestas como las siguientes. Inicialmente, se les pide a los estudiantes completar la tabla (ver Tabla 4.2-8) con la representación gráfica y las vistas – XY, YZ y XZ– de cada caso, que surge de asignar un valor numérico a los parámetros a, b y c en diferente orden hasta hacer las tres combinaciones posibles. Una manera de completar dicha tabla es:

Tabla 4.2-8 Posible solución ítem i de la tarea b

Vista general	Vista superior	Vista frontal	Vista lateral
			
$\frac{(x-h)^2}{(1.4)^2}+\frac{(y-k)^2}{(2.0)^2}+\frac{(z-l)^2}{2.7^{\ 2}}=1$	XY	YZ	XZ
			
$\frac{(x-h)^2}{(2.0)^2}+\frac{(y-k)^2}{(2.7)^2}+\frac{(z-l)^2}{1.4^{\ 2}}=1$	XY	YZ	XZ
			
$\frac{(x-h)^2}{(2.7)^2}+\frac{(y-k)^2}{(1.4)^2}+\frac{(z-l)^2}{2.0^{\ 2}}=1$	XY	YZ	XZ

Para el ítem i de la tarea b se pide comparar la representación gráfica de la *vista superior* de cada caso (segunda columna) de la tabla, y reportar las similitudes y diferencias entre estas. Algunas de las similitudes y diferencias que pueden enunciar los estudiantes son:

Similitudes:

- En las tres vistas superiores se genera una elipse con centro en el origen.
- Observando el eje mayor y menor de cada elipse formada en la vista superior de cada caso, se tiene que:
    - El semieje mayor de la elipse del caso uno tiene la misma medida que el semieje menor del caso dos.
    - El semieje mayor del caso dos tiene la misma medida que el semieje mayor del caso tres.
    - El semieje menor del caso uno tiene la misma medida que el semieje menor del caso tres.

Las tres similitudes presentadas antes están enfocadas en los semiejes mayor y menor de la elipse. Una variación a estas respuestas es que los estudiantes usen lenguaje informal, no refiriéndose a semiejes sino al ancho y alto o profundo del elipsoide.

Diferencia: Las tres elipses que se observan en la vista superior de cada caso parecen tener el mismo tamaño o ser la misma, pero rotada 90°.Para el ítem ii de la tarea b se pide repetir el ejercicio del ítem i, pero considerando la *vista frontal*, y luego la *vista lateral.* Las respuestas que prevemos para este ítem serán análogas a las del ítem i.

Para el ítem ii de la tarea b se pide repetir el ejercicio del ítem i, pero considerando la *vista frontal*, y luego la *vista lateral.* Las respuestas que prevemos para este ítem serán análogas a las del ítem i.

En el ítem iii se pide identificar de manera general, qué le sucede a la superficie cuando se hace los cambios indicados en los ítems anteriores; prevemos tres posibles tipos de respuestas:

R1: Las elipses que se observan en cada uno de los planos del primer caso son los mismos del caso dos y tres, la diferencia es que están cambiando de posición, como si rotara 90°. Por ejemplo, si no tenemos en cuenta los ejes, la elipse observada en el plano XY para el primer caso tiene las mismas características que la elipse que se observa en el plano XZ del segundo caso y la del plano YZ en el tercer caso. La elipse está cambiando su posición respecto a los ejes, como si rotara 90° cada caso con respecto al anterior.

R2: Aunque la representación de la curva, por ejemplo, la observada en el plano XZ del caso uno, sea la misma para el plano YZ del caso dos y XY en el caso tres, las dimensiones de la elipse están cambiando respecto a los ejes.

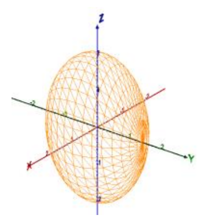
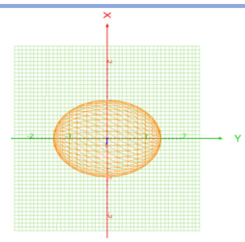
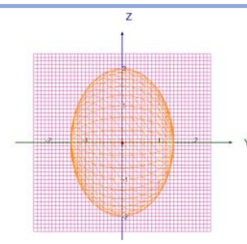
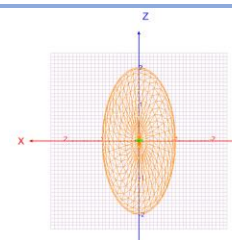
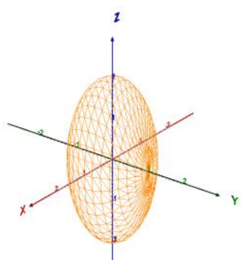
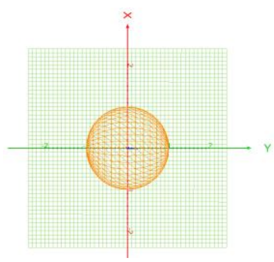
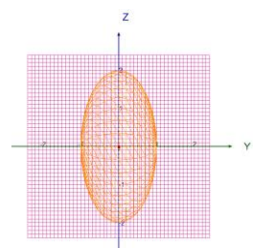
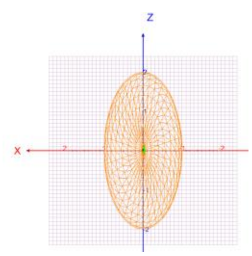
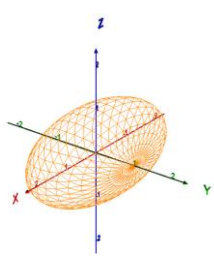
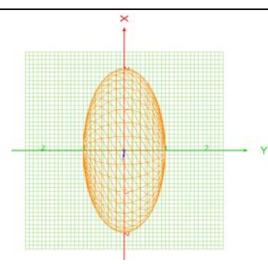
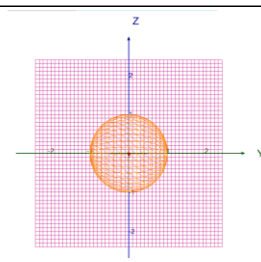
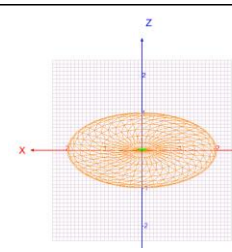
R3: La superficie conserva sus propiedades, pero está rotando.

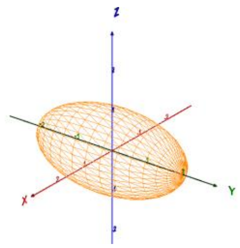
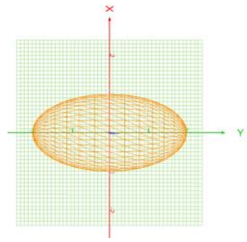
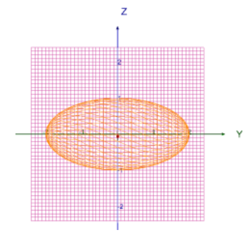
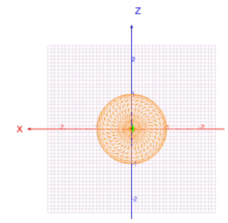
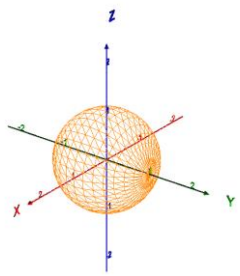
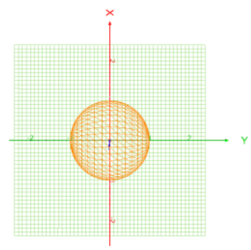
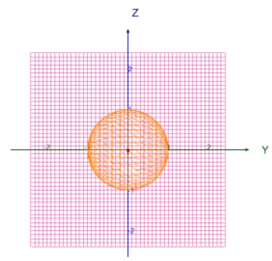
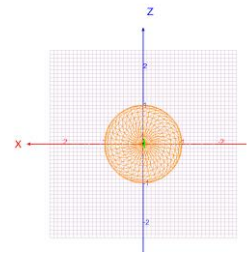
En el ítem iv de la tarea b se pide validar si lo establecido en el ítem iii se cumple para cualquier trio de números que considere como parámetros a, b y c Una posible respuesta sería: Sí, puesto que los valores que se le asignan a los parámetros a, b y c del elipsoide son fijos y al permutarlos la superficie se rota pues el ancho, alto y profundo de la superficie cambia de eje un eje.

Para la tarea c prevemos que los estudiantes pueden proveer las siguientes respuestas:

Para el ítem i se pide completar una tabla con representaciones gráficas que busca estudiar lo que sucede con un elipsoide cuando se impone que los parámetros a, b o c pueden ser iguales entre sí. La Tabla 4.2-9 presenta una posible manera de diligencia dicha tabla.

Tabla 4.2-9 Posible solución ítem i de la tarea c

Vista general	Vista superior	Vista frontal	Vista lateral
			
$a \neq b \neq c,\ \frac{(x-0)^2}{(1.0)^2}+\frac{(y-0)^2}{(1.4)^2}+\frac{(z-0)^2}{2.0^2}=1$	XY	YZ	XZ
			
$a=b,\ \frac{(x-0)^2}{(1.0)^2}+\frac{(y-0)^2}{(1.0)^2}+\frac{(z-0)^2}{(2.0)^2}=1$	XY	YZ	XZ
			
$b=c,\ \frac{(x-0)^2}{(2.0)^2}+\frac{(y-0)^2}{(1.0)^2}+\frac{(z-0)^2}{1.0^2}=1$	XY	YZ	XZ

			
$\boldsymbol{c=a}$, $\frac{(x-0)^2}{(1.0)^2}+\frac{(y-0)^2}{(2.0)^2}+\frac{(z-0)^2}{1.0^{\ 2}}=1$	XY	YZ	XZ
			
$\boldsymbol{a=b=c}$, $\frac{(x-0)^2}{(1.0)^2}+\frac{(y-0)^2}{(1.0)^2}+\frac{(z-0)^2}{1.0^{\ 2}}=1$	XY	YZ	XZ

Para el ítem ii se pide identificar lo que indica cada parámetro a, b y c en la superficie. Una posible respuesta es que podían proveer los estudiantes es la siguiente:

El parámetro a indica qué tan alargada o achatada está el elipsoide respecto al eje X; de manera más formal, que su dimensión en el eje X es $2a$ El parámetro b, indica qué tan alargado o achatado está el elipsoide respecto al eje Y; de manera más formal, que su dimensión en el eje Y es $2b$ El parámetro c, indica qué tan alargado o achatado está el elipsoide respecto al eje Z, de manera más formal, que su dimensión en el eje Z es $2c$.

Para el ítem iii se pide decir qué propiedad cumple la superficie en cada caso de la Tabla 4.2-10. Para esta pregunta se prevén dos tipos de respuestas: Las respuestas R1 están enfocadas a propiedades generales de la superficie, es decir observando lo que sucede en las tres dimensiones; las respuestas R2 están enfocadas a lo que sucede en cada uno de los planos coordenados es decir en dos dimensiones.

Tabla 4.2-10: Posible solución ítem iii de la tarea c

Caso		Propiedad de la superficie respecto a la representación gráfica
1	$a \neq b \neq c$	**R1:** El ancho, alto y profundo de la superficie se corresponde con los parámetros a, b y c;. En este caso, el ancho, alto y profundo de la superficie es diferente.

		R2: Cuando un elipsoide tiene todos los parámetros son diferentes, las elipses que se forman en cada uno de los planos coordenados tienen diferentes dimensiones.
2	$a = b$	**R1:** El ancho y el alto de un elipsoide son iguales cuando los parámetros a y b son iguales y diferentes a c.
		R2: Cuando un elipsoide tiene los parámetros a y b iguales y c diferente, se genera una circunferencia en el plano XY y en el plano YZ una elipse con las mismas características que en el plano XZ.
3	$b = c$	**R1** El alto y lo profundo de un elipsoide son iguales cuando los parámetros b y c son iguales y diferentes a a.
		R2: Cuando un elipsoide tiene los parámetros b y c iguales y diferentes de a, se genera una circunferencia en el plano YZ y en el plano XY una elipse con las mismas características que en el plano XZ, pero rotada 90°.
4	$c = a$	**R1:** El ancho y lo profundo de un elipsoide son iguales cuando los parámetros a y c son iguales y diferentes de b.
		R2: Cuando un elipsoide tiene los parámetros a y c iguales y b diferente, se genera una circunferencia en el plano XZ y en el plano XY una elipse con las mismas características que en el plano YZ pero rotada.
5	$a = b = c$	**R1:** El alto, ancho y profundo del elipsoide tienen las mismas dimensiones y por lo tanto se genera una esfera.
		R2: Cuando un elipsoide tiene los parámetros a, b y c iguales en cada uno de los planos XY, YZ y XZ se genera una circunferencia.

Cuando los estudiantes aborden la secuencia, se pueden presentar algunas dificultades, por lo que sugerimos un plan de acción del profesor. La Tabla 4.2-11 presenta posibles dificultades y maneras en las que profesor podría actuar ante ellas. Consideramos que estas pueden emerger en lo que hemos denominado segunda etapa de la temporalidad, que corresponde a la socialización. En esta etapa los estudiantes exponen sus producciones y pueden hacer explícitas sus dificultades. Esta puesta en común puede tomar 30 - 40 minutos por tarea.

Tabla 4.2-11 Dificultades asociadas a la secuencia de tareas 3

Dificultad 1	
Dificultad del estudiante	Comparar las vistas gráficas de la superficie con distintas escalas.

Intervención del profesor para contrarrestarla	El profesor puede usar los pantallazos de dos de las vistas de un elipsoide que no tengan la misma escala en intentar formular preguntas orientadoras para enfatizar que si los ejes no están en la misma escala se pueden generar dificultades para compararlas.

En cuanto a la rotación y traslación:

Dificultad 2	
Dificultad del estudiante	No identificar la invarianza del tipo de superficie aun cuando la expresión cambie según las indicaciones de la tarea (las cuales sugieren una rotación o una traslación del objeto).
Intervención del profesor para contrarrestarla	El profesor puede hacer uso de las vistas gráficas presentadas en las tareas b y c para que los estudiantes cuenten cuántas unidades tiene el semieje mayor y el semieje menor de las elipses que se forman en cada una de las vistas de los planos XY, YZ y XZ y comparen dichas vistas con cada uno de los casos. Esto con el fin de que identifiquen que las propiedades de la superficie no están cambiando.

Dificultad 3	
Dificultad del estudiante	No relacionar la representación gráfica y la algebraica cuando a la superficie se le cambien parámetros que induce una traslación o una rotación.
Intervención del profesor para contrarrestarla	El profesor puede usar los resultados que los estudiantes dieron a la tarea 2, específicamente las tablas de los ítems a y b de la tarea, y generar preguntas que orienten a los estudiantes para identificar qué cambios sucede en la expresión algebraica cuando la gráfica se "traslada" o se "rota 90°" respecto a los ejes del sistema. Por ejemplo, estas preguntas pueden ser: • Teniendo en cuenta la tabla del ítem b ¿Qué sucede cuando dos elipses son idénticas, pero están en vistas diferentes? ¿Qué relación hay entre los parámetros de las expresiones algebraicas con las que surgen dichas elipses? • Teniendo en cuenta la tabla del ítem a ¿los parámetros h, k y l producen un cambio en el tipo de superficie? ¿Cuándo los parámetros h, k y l son todos cero y después pasan a ser todos diferentes, qué cambio se produce en la representación del elipsoide?

Se espera que al finalizar las puestas en común se logren institucionalizar los resultados que se exponen a continuación.

Con respecto a la tarea a relativa a los cambios que produce en la superficie los parámetros h, k y l:

- El parámetro h determina el desplazamiento del elipsoide en el eje X. El parámetro k determina el desplazamiento del elipsoide en el eje Y y el parámetro l determina el desplazamiento del elipsoide sobre el eje Z.
- Si se cambian los parámetros h, k y l en la representación algebraica de una superficie, el centro de la superficie se traslada a la coordenada (h, k, l).
- Cuando una superficie se desplaza no cambian sus propiedades

Con respecto a las tareas b y c, relativa a los cambios que produce en la superficie los parámetros a, b y c cuando se les asigna valores haciendo las tres combinaciones:

- Si las expresiones algebraicas de dos superficies cuadráticas tienen los mismos valores para los parámetros a, b y c, aunque en diferente orden, entonces una de las superficies esta rotada 90° respecto a la otra.
- Cuando una superficie se rota sus propiedades no cambian.
- Los parámetros *a, b* y *c* indican qué tan alargado o achatado está el elipsoide respecto al eje X, Y o Z respectivamente. Específicamente, 2a indica la medida del eje mayor, 2b indica la medida del eje medio y 2c indica la medida del eje menor.

Esta última etapa tendrá una duración de aproximadamente 15 - 20 minutos.

4.2.4 Reconocimiento de relaciones internas entre objetos que hacen parte de la superficie cuadrática.

Para el desarrollo de esta secuencia se utilizará el software GeoGebra, ya que para el estudio de las simetrías se requiere un poco más de rigurosidad al momento de estudiar las superficies.

Secuencia de tareas 4

Para el desarrollo de la secuencia, tenga presente las siguientes definiciones de simetría respecto a un punto, una recta y un plano.

> *Simetría respecto a un punto.* Dos puntos diferentes P_1 y P_2 en el espacio son simétricos respecto a un punto P, si y solo si el punto P es punto medio del segmento que tiene por extremos los puntos P_1 y P_2.
>
> *Simetría respecto a una recta.* Dos puntos diferentes P_1 y P_2 en el espacio son simétricos con respecto a una recta l en el plano δ si y solo si la recta l es mediatriz del segmento determinado por dos puntos P_1 y P_2.

Simetría respecto a un plano. Se dice que dos puntos diferentes P_1 y P_2 en el espacio son simétricos con respecto a un plano δ si y solo si el plano es el plano mediador del segmento que tiene por extremos los puntos P_1 y P_2.

Dada la siguiente expresión algebraica $\frac{x^2}{(4)^2}+\frac{y^2}{(5)^2}-\frac{z^2}{(3)^2}=1$ grafíquela en GeoGebra, cree un punto cualquiera $A(x,y,z)$ que pertenezca a la superficie y siguiendo las indicaciones realice las siguientes tareas (use los botones -punto, recta, perpendicular e intersección - de la barra de herramientas, la barra de entrada y el arrastre de bola de cristal para construir los objetos a los que se hace referencia en la instrucción de cada ítem):

a. Construya la recta que pasa por el punto A y el centro de la superficie y nombre el otro punto de intersección, entre dicha recta y la superficie, como A'. Compare las coordenadas de los puntos A y A' y ubicando el punto A en cada uno de los octantes, responda las siguientes preguntas:

i. Para cada punto A, ¿Existe siempre el punto A' de tal manera que este pertenezca a la intersección de la recta y la superficie?

ii. Elija un punto que pertenezca a cada uno de los octantes y complete la siguiente tabla de forma similar a como se ilustra para el caso I:

Octante	Coordenadas	¿Qué pasa con las coordenadas del punto A' cuando se manipula el punto A?
I	$A(7.76, 7.38, 6.67)$ $A'(-7.76, -7.38, -6.67)$	Cuando las coordenadas de A son positivas, todas las coordenadas del punto A' son negativas.
II	A (, ,) A'(, ,)	
II	A (, ,) A'(, ,)	
IV	A (, ,) A'(, ,)	
V	A (, ,) A'(, ,)	
VI	A (, ,) A'(, ,)	
VII	A (, ,) A'(, ,)	
VIII	A (, ,) A'(, ,)	

iii. Con base en la experiencia con los ítems i y ii complete la siguiente tabla respondiendo a la pregunta ¿Dado un punto A, cuál sería la coordenada de A'?.

Octante	Coordenada de A	Coordenada de A'	Octante	Coordenada de A	Coordenada de A'
I	(x, y, z)	$(-x, -y, -z)$	III	$(-x, -y, z)$	(, , ,)
II	$(-x, y, z)$	(, , ,)	VI	$(-x, y, -z)$	(, , ,)
IV	$(x, -y, z)$	(, , ,)	VIII	$(x, -y, -z)$	(, , ,)
V	$(x, y, -z)$	(, , ,)	VII	$(-x, -y, -z)$	(, , ,)

iv. Con base en los tres ítems anteriores ¿qué puede decir de la superficie?

b. Construya la recta perpendicular al eje X por el punto A y nombre el punto de intersección, entre dicha recta y la superficie, como A'; repita el procedimiento considerando los demás ejes.

i. P ara cada punto A, respecto a cada recta perpendicular construida, ¿Existe siempre el punto A' de tal manera que este pertenezca a la intersección de la recta y la superficie?

ii. Compare las coordenadas de los puntos A y A' y ubicando el punto A en cada uno de los octantes, complete la siguiente tabla (tenga en cuenta que el punto A que se fija en cada octante es el mismo para todas las rectas perpendiculares).

Octante	Coordenadas		
	Perpendicular al eje X por A y A’	Perpendicular al eje Y por A y A’	Perpendicular al eje Z por A y A’
I	A (4.95 , 5.59, 4)	A (4.95 , 5.59, 4)	A (4.95 , 5.59, 4)
	A' (4.95, −5.59, −4)	A' (−4.95, 5.59, −4)	A' (−4.95, −5.59, 4)
II	A (, ,)	A (, ,)	A (, ,)
	A' (, ,)	A' (, ,)	A' (, ,)
III	A (, ,)	A (, ,)	A (, ,)
	A' (, ,)	A' (, ,)	A' (, ,)

IV	$A\ (\quad,\quad,\quad)$	$A\ (\quad,\quad,\quad)$	$A\ (\quad,\quad,\quad)$
	$A'\ (\quad,\quad,\quad)$	$A'\ (\quad,\quad,\quad)$	$A'\ (\quad,\quad,\quad)$
V	$A\ (\quad,\quad,\quad)$	$A\ (\quad,\quad,\quad)$	$A\ (\quad,\quad,\quad)$
	$A'\ (\quad,\quad,\quad)$	$A'\ (\quad,\quad,\quad)$	$A'\ (\quad,\quad,\quad)$
VI	$A\ (\quad,\quad,\quad)$	$A\ (\quad,\quad,\quad)$	$A\ (\quad,\quad,\quad)$
	$A'\ (\quad,\quad,\quad)$	$A'\ (\quad,\quad,\quad)$	$A'\ (\quad,\quad,\quad)$
VII	$A\ (\quad,\quad,\quad)$	$A\ (\quad,\quad,\quad)$	$A\ (\quad,\quad,\quad)$
	$A'\ (\quad,\quad,\quad)$	$A'\ (\quad,\quad,\quad)$	$A'\ (\quad,\quad,\quad)$
VIII	$A\ (\quad,\quad,\quad)$	$A\ (\quad,\quad,\quad)$	$A\ (\quad,\quad,\quad)$
	$A'\ (\quad,\quad,\quad)$	$A'\ (\quad,\quad,\quad)$	$A'\ (\quad,\quad,\quad)$

iii. Para cada columna identifique qué similitudes hay entre las coordenadas.

iv. ¿Qué relación hay entre el eje y las coordenadas de la columna correspondiente?

v. Teniendo en cuenta los ítems i a iv ¿qué propiedad puede decir de la superficie?

c. Sea A un punto cualquiera en la superficie dada al inicio. En la ventana de entrada de GeoGebra introduzca $A' = (x\ A\ , y\ A\ , z(A))$ y modifique, según cada una de las siguientes preguntas, las coordenadas del cuadro de dialogo que aparece al hacer doble clic sobre el punto A':

i. ¿Qué pasa si en lugar de poner $x\ A$ pone $-x\ A$ y deja los demás positivos? ¿El punto A' pertenece a la superficie? ¿Qué condición tiene el punto A respecto al punto A'?

ii. ¿Qué pasa si en lugar de poner $y\ A$ pone $-y\ A$ y deja los demás positivos? ¿El punto A' pertenece a la superficie? ¿Qué relación tiene el punto A respecto al punto A'?

iii. ¿Qué pasa si en lugar de poner $z\ A$ pone $-z\ A$ y deja los demás positivos? ¿El punto A' pertenece a la superficie? ¿Qué condición tiene el punto A respecto al punto A'?

iv. Con base en los tres ítems anteriores ¿qué puede decir de la superficie?

d. Teniendo en cuenta las respuestas dadas a las tareas a. b y c, ¿qué puede decir de la superficie que dicha expresión representa?

Con esta secuencia pretendemos estudiar las simetrías -respecto a un punto, una recta y un plano (ver Sección 2.1.2.2, ver Tabla 2.1-1)- del hiperboloide de una hoja mediante el estudio de relaciones entre las coordenadas de puntos que pertenecen a la superficie, específicamente haciendo un análisis del signo de las variables según la simetría que se quiere hallar, apuntando a las propiedades dadas por los teoremas 2, 3 y 4 de la Sección 2.1.2.2. A continuación, presentamos la descripción para esta secuencia.

Requisitos

Para desarrollar esta secuencia es necesario que los estudiantes hayan realizado la secuencia número uno, y cumplan siguientes requisitos:

Requisitos orientados a objetos primarios

1. Reconocer cuándo una expresión es simétrica desde el punto de vista algebraico y geométrico.

Requisitos orientados a habilidades de visualización

1. Identificar los octantes del plano coordenado tridimensional.

Metas

Metas orientadas a objetos primarios

1. Reconocer algunas de las propiedades de las simetrías - central, axial y planar- de un hiperboloide de una hoja, haciendo un análisis del signo de las variables x, y y z de su expresión algebraica.
2. Identificar que, si la ecuación de un hiperboloide de una hoja no se altera cuando se cambia el signo de una de las variables, entonces la superficie es simétrica respecto al plano coordenado a partir del cual se analiza las variables cuyos signos no se modificaron.
3. Identificar que, si la ecuación de una superficie no se altera cuando se les cambia el signo a dos de sus variables, la superficie es simétrica con respecto al eje coordenado a lo largo del cual se estudia la variable cuyo signo no se cambió.

4. Identificar que, si la ecuación de una superficie no se altera cuando sus tres variables cambian de signo, la superficie es simétrica con respecto al origen.

Específicamente, se pretende que los estudiantes logren establecer las simetrías de la superficie hiperboloide de una hoja, según su representación gráfica y su representación algebraica, luego de hacer determinados cambios en las coordenadas de un punto que satisface la ecuación de dicha superficie. Para este caso específico, hay que identificar que el hiperboloide de una hoja es simétrico respecto al origen, los ejes y los planos coordenados. De esa forma, los estudiantes pueden enunciar cosas como:

1. Para todos los segmentos AA' cuyos extremos pertenecen a la superficie, el origen es el punto medio de estos.
2. Si para todo punto que satisface la ecuación de un hiperboloide de una hoja, al cambiarle el signo de dos de las variables de su coordenada este sigue satisfaciendo la ecuación, entonces la superficie es simétrica respecto al eje coordenado cuya variable no cambió de signo.
3. Si los puntos $A\ (x, y, z)$ y $A'\ (x, -y, -z)$ satisfacen la ecuación del hiperboloide de una hoja, entonces el eje X es la mediatriz del segmento AA'.
4. Los puntos A y A' equidistan del plano XZ o el plano XZ es perpendicular por su punto medio al segmento AA' señalando la Figura 4.2-4.

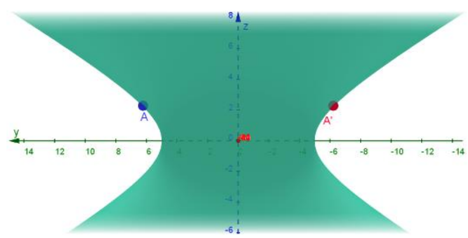


Figura 4.2-4 Simetría respecto al plano coordenado XZ

Metas orientadas a habilidades de visualización

1. Favorecer el desarrollo de la habilidad *Percepción de relaciones espaciales* en el siguiente sentido:
   i. Identificando, con base en la representación gráfica de una superficie, cuándo dos puntos son simétricos respecto al origen, a uno de los ejes y a uno de los planos.
   ii. Identificando, con base en la representación algebraica de una superficie, que dos puntos son simétricos respecto al origen, a uno de los ejes y a uno de los planos.
   iii. Identificando, con base en la representación algebraica de una superficie, cuándo esta es simétrica respecto al origen, a uno de los ejes y a uno de los planos.

Interacción y temporalidad

La descripción para esta secuencia se hará tarea por tarea y teniendo en cuenta las etapas definidas en la temporalidad en la Sección 4.1. Las posibles dificultades que pueden presentar los estudiantes en el desarrollo de esta secuencia se exponen en la Tabla 4.2-15.

Tarea a: En la primera etapa los estudiantes deben abordar la tarea en parejas y mediante la interacción grupal generan el planteamiento de las posibles respuestas a lo solicitado en esta, durante aproximadamente 40 minutos. Prevemos que los estudiantes pueden abordar la tarea a de la siguiente manera:

Inicialmente se les pide a los estudiantes seguir unas instrucciones para construir una recta que cumpla ciertas condiciones, entre estas que pase por el origen. Respecto al ítem i, presentamos tres formas en las que pueden dar respuesta los estudiantes, estas son:

R1: Si el punto A satisface la ecuación entonces el punto A', cuyas coordenadas son las mismas que las del punto A pero de signo contrario, también satisface la ecuación.

R2: Siempre existe un punto A' que pertenece a la superficie cuando se mueve a A

R3: Para cada punto A siempre existe un punto A' que pertenece a la intersección de la recta con la superficie.

Para el ítem ii de la tarea a, se les pide a los estudiantes completar la tabla con las coordenadas de puntos A que pertenezcan a cada uno de los octantes para determinar lo que sucede con las coordenadas del punto A' cuando se manipula A. La Tabla 4.2-12 presenta una manera de completarla; las respuestas R1 corresponden a respuestas donde se analiza explícitamente el signo de las variables de la coordenada del punto A y A', y las R2 están enfocadas a la ubicación de la coordenada A' respecto a los octantes.

Tabla 4.2-12 posible solución al ítem ii de la tarea a

Octante	Coordenadas	¿Qué pasa con las coordenadas del punto A' cuando se manipula el punto A?
I	$A(7.76, 7.38, 6.67)$ $A'(-7.76, -7.38, -6.67)$	R1: Cuando las coordenadas de A son positivas, todas las coordenadas del punto A' son negativas. R2: Las coordenadas del punto A' están siempre en el octante VII
II	$A(-5.54, 6.34, 4.79)$	

	$A'(5.54, -6.34, -4.79)$	R1: Si las coordenadas del punto A tienen únicamente la variable x negativa entonces las coordenadas de A' tienen las variables y y z negativas. R2: Las coordenadas del punto A' están siempre en el octante VIII
III	$A(-6.42, -5.6, 5.04)$ $A'(6.42, 5.6, -5.04)$	R1: Si las coordenadas del punto A tienen únicamente las variables x y y negativas entonces las coordenadas de A' tienen la variable z negativa. R2: Las coordenadas del punto A' están siempre en el octante V
IV	$A(3.88, -5.82, 3.42)$ $A'(-3.88, 5.82, -3.42)$	R1: Si las coordenadas del punto A tienen únicamente la variable y negativa entonces las coordenadas de A' tienen las variables x y z negativas. R2: Las coordenadas del punto A' están siempre en el octante VI
V	$A(4.74, 3.65, -2.9)$ $A'(-4.74, -3.65, 2.9)$	R1: Si las coordenadas del punto A tienen únicamente la variable z negativa entonces las coordenadas de A' tienen las variables x y y negativas. R2: Las coordenadas del punto A' están siempre en el octante III
VI	$A(-5.57, 4.57, -4)$ $A'(5.57, -4.57, 4)$	R1: Si las coordenadas del punto A tienen únicamente las variables x y z negativas entonces las coordenadas de A' tienen la variable y negativa. R2: Las coordenadas del punto A' están siempre en el octante IV
VII	$A(-4.61, -6.02, -4)$ $A'(4.61, 6.02, 4)$	R1: Cuando las coordenadas de A son negativas, todas las coordenadas del punto A' son positivas. R2: Las coordenadas del punto A' están siempre en el octante I
VIII	$A(5.19, -5.23, -4)$ $A'(-5.19, 5.23, 4)$	R1: Si las coordenadas del punto A tienen únicamente las variables y y z negativas entonces las coordenadas de A' tienen la variable x negativa. R2: Las coordenadas del punto A' están siempre en el octante II

Para el ítem iii se pide contestar a la pregunta ¿Dado un punto A, cuál sería la coordenada de A'? completando la tabla con base en la información de los ítems i y ii. La respuesta a esta pregunta está enfocada a llegar a una generalización de lo encontrado en dichos ítems y se presenta en la Tabla 4.2-13.

Tabla 4.2-13 solución del ítem i de la tarea a

Octante	Coordenada de A	Coordenada de A'	Octante	Coordenada de A	Coordenada de A'
I	(x, y, z)	$(-x, -y, -z)$	III	$(-x, -y, z)$	$(x, y, -z)$
II	$(-x, y, z)$	$(x, -y, -z)$	VI	$(-x, y, -z)$	$(x, -y, z)$
IV	$(x, -y, z)$	$(-x, y, -z)$	VIII	$(x, -y, -z)$	$(-x, y, z)$
V	$(x, y, -z)$	$(-x, -y, z)$	VII	$(-x, -y, -z)$	(x, y, z)

Para el ítem iv se pide a los estudiantes que con base en los tres ítems anteriores diga una propiedad de la superficie. Algunas de las posibles respuestas a este ítem que podrían dar los estudiantes - teniendo en cuenta las definiciones de simetría iniciales - son:

R1: La superficie es simétrica respecto al origen
R2: Para todos los segmentos AA' cuyos extremos pertenecen a la superficie, el origen es el punto medio de estos.

Par el caso de la Tarea b, prevemos que los estudiantes provean respuestas como las siguientes. Inicialmente los estudiantes deben seguir unas instrucciones para construir una recta perpendicular a cada uno de los ejes por el punto A y encontrar el punto A' que pertenece a la intersección entre dicha recta y la superficie (ver Figura 4.2-5).

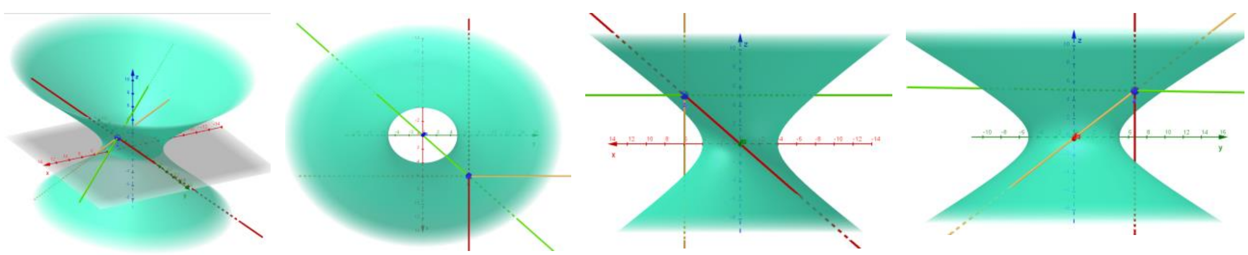


Figura 4.2-5: Intersecciones de rectas perpendiculares a los ejes coordenados con un hiperboloide de una hoja.

Luego mediante una exploración en el ítem i los estudiantes deben contestar si para cada punto A, respecto a cada recta perpendicular construida, existe siempre el punto A' de tal manera que este pertenezca a la intersección de la recta y la superficie; las posibles respuestas que se contemplan son las siguientes:

R1: Para cada punto A siempre existe un punto A' que pertenece a la intersección de la recta perpendicular al eje X y la superficie.

R2: Para cada punto A siempre existe un punto A' que pertenece a la intersección de la recta perpendicular a cada eje y la superficie.

Para el ítem ii se les pide a los estudiantes completar la tabla con las coordenadas de puntos A, que pertenezcan a cada uno de los octantes, para determinar lo que sucede con las coordenadas del punto A' cuando se manipula A. La Tabla 4.2-14 presenta una manera de completarla.

Tabla 4.2-14 posible solución al ítem ii de la tarea a

Octante	Coordenadas		
	Perpendicular al eje X por A y A'	Perpendicular al eje Y por A y A'	Perpendicular al eje Z por A y A'
I	$A\ (4.95\ ,5.59,4)$	$A\ (4.95\ ,5.59,4)$	$A\ (4.95\ ,5.59,4)$
	$A'\ (\ 4.95,-5.59,-4)$	$A'\ (-4.95,5.59,-4)$	$A'\ (-4.95,-5.59,4\ )$
II	$A\ (\ -5.87,5.4,4.57)$	$A\ (\ -5.87,5.4,4.57)$	$A\ (\ -5.87,5.4,4.57)$
	$A'\ (\ -5.87,-\ 5.4,-\ 4.57\ )$	$A'\ (\ 5.87,5.4,-\ 4.57)$	$A'\ (\ 5.87,-\ 5.4,4.57\ )$
III	$A\ (\ -6.2,-6.92,5.46)$	$A\ (\ -6.2,-6.92,5.46)$	$A\ (\ -6.2,-6.92,5.46)$
	$A'\ (\ -6.2,6.92,-5.46)$	$A'\ (\ 6.2,-6.92,-5.46)$	$A'\ (\ 6.2,6.92,5.46)$
IV	$A\ (\ 6.27,-5.19,4.77)$	$A\ (\ 6.27,-5.19,4.77)$	$A\ (\ 6.27,-5.19,4.77)$
	$A'\ (6.27,5.19,-\ 4.77)$	$A'\ (-6.27,-\ 5.19,-4.77)$	$A'\ (-6.27,5.19,-4.77)$
V	$A\ (4.96,6.61,-4.53)$	$A\ (4.96,6.61,-4.53)$	$A\ (4.96,6.61,-4.53)$
	$A'\ (4.96,-\ 6.61,4.53)$	$A'\ (-4.96,6.61,4.53)$	$A'\ (-4.96,-6.61,-4.53)$
VI	$A\ (\ -6.66,5.16,-5.05)$	$A\ (\ -6.66,5.16,-5.05)$	$A\ (\ -6.66,5.16,-5.05)$
	$A'\ (\ -6.66,-5.16,5.05)$	$A'\ (\ 6.66,5.16,5.05)$	$A'\ (\ 6.66,-5.16,-5.05)$
VII	$A\ (\ -6.03,-3.56,-4)$	$A\ (\ -6.03,-3.56,-4)$	$A\ (\ -6.03,-3.56,-4)$
	$A'\ (\ -6.03,3.56,4)$	$A'\ (\ 6.03,-3.56,4)$	$A'\ (\ 6.03,3.56,-4)$
$VIII$	$A\ (\ 3.77,-5.12,-2.91)$	$A\ (\ 3.77,-5.12,-2.91)$	$A\ (\ 3.77,-5.12,-2.91)$
	$A'\ (\ 3.77,5.12,2.91)$	$A'\ (\ -3.77,-5.12,2.91)$	$A'\ (\ -3.77,5.12,-2.91)$

El ítem iii pide identificar qué similitudes hay entre las coordenadas de los puntos A y A', que pertenecen a la superficie y a las rectas perpendiculares a cada uno de los ejes coordenados; prevemos que una posible respuesta que pueden dar los estudiantes a este ítem es:

Respecto a la perpendicular al eje X: la variable x mantiene el mismo valor y signo en las coordenadas del punto A y A' a diferencia de las variables y y z. Respecto a la perpendicular al eje Y: la variable y mantiene el mismo valor y signo en las coordenadas del punto A y A' a diferencia de las variables x y z y respecto a la perpendicular al eje Z: la variable z mantiene el mismo valor y signo en las coordenadas del punto A y A' a diferencia de las variables y y z.

Por otra parte, para el ítem iv se pide encontrar qué relación hay entre cada uno de los ejes y las coordenadas de la columna correspondiente (ver Tabla 4.2-14), por lo que una manera en la que prevemos que los estudiantes pueden contestar es:

Si los puntos $A\ (x, y, z)$ y $A'\ (x, -y, -z)$ satisfacen la ecuación del hiperboloide de dos hojas, entonces el eje X es la mediatriz del segmento AA'. De manera similar, si los puntos $A\ (x, y, z)$ y $A'\ (-x,\ y, -z)$ satisfacen la ecuación del hiperboloide de dos hojas, entonces el eje Y es la mediatriz del segmento AA'. Si los puntos $A\ (x, y, z)$ y $A'\ (-x, -y, z)$ satisfacen la ecuación del hiperboloide de dos hojas, entonces el eje Z es la mediatriz del segmento AA'.

Para el ítem v se pide identificar una propiedad de la superficie, a partir de la información encontrada en los ítems anteriores, prevemos que los estudiantes pueden dar dos tipos de respuestas - teniendo en cuenta las definiciones de simetría iniciales -: R1 en las que se usa la definición de simetría respecto a una recta y lo concluido en el ítem iv; y R2: en las que se usa la definición de simetría respecto a una recta pero además se hace una recopilación de lo concluido en los ítems anteriores.

R1: La superficie es simétrica respecto a cada uno de los ejes X, Y, y Z.

R2: Si para todo punto que satisface la ecuación de un hiperboloide de una hoja, al cambiarle el signo de dos de las variables de su coordenada este sigue satisfaciendo la ecuación, entonces la superficie es simétrica respecto al eje coordenado en el que se estudia a la variable que no cambió de signo.

En el caso de la tarea c, inicialmente los estudiantes deberán crear el punto A' con coordenadas que dependen de un punto A en la superficie dada –hecho que en GeoGebra se escribe como $A' = (x\ A\ , y\ A\ , z(A))$ en la ventana de "entrada"–. Antes de dar respuesta a cada ítem deberán modificar las coordenadas del punto A' según la instrucción dada. En cada ítem se hacen varias preguntas por lo que las respuestas que prevemos incluyen varias situaciones.

Para el ítem i se pide identificar qué pasa cuando en lugar de poner $x\ A$ se pone $-x\ A$ y se deja las demás variables positivas en la coordenada del punto A'. Además, se pide contestar a las preguntas ¿El punto A' pertenece a la superficie? y ¿Qué condición tiene el punto A respecto al punto A'? Para este ítem consideramos que los estudiantes pueden dar dos respuestas, en la R1 se identifica el plano XZ como el plano mediador del segmento y en la R2 se centra en la relación que hay entre los puntos A y A', esto es:

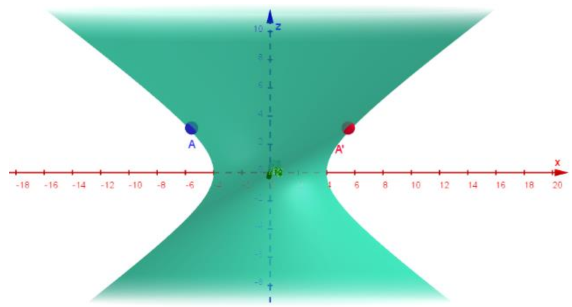


Figura 4.2-6 vista frontal de un hiperboloide de una hoja

R1: Al observar la vista frontal (plano XZ, ver Figura 4.2-6) se identifica que el segmento AA' siempre está paralelo al plano XY. Para cada punto A siempre hay un punto A' que pertenece a la superficie. A es el simétrico de A' respecto al plano YZ.

R2: Si el punto A está a un lado de la mitad de la superficie entonces A' esta siempre en la otra mitad donde no está A . El punto A' siempre pertenece a la superficie. A está siempre a la misma distancia del plano YZ que A' del plano YZ.

Para los ítems ii y iii se prevé que los estudiantes den respuestas de manera análoga que en el caso del ítem i.

El ítem iv pide con base en los tres ítems anteriores identificar una propiedad de la superficie por lo que prevemos que los estudiantes pueden dar respuestas como:

R1: La superficie es simétrica respecto a los tres planos XY, YZ y XZ.

R2: Si para todo punto que satisface la ecuación de un hiperboloide de una hoja al cambiarle el signo de una de las variables de su coordenada este sigue satisfaciendo la ecuación, entonces la superficie es simétrica respecto al plano coordenado, cuyas variables no se cambiaron de signo.

Finalmente, en el caso de la tarea d se pide decir una propiedad de la superficie que se estudió, pero teniendo en cuenta las respuestas dadas a las tareas a, b y c. Se prevé que los estudiantes pueden enunciar lo siguiente:

> La superficie hiperboloide de una hoja cuya ecuación es $\frac{x^2}{(4)^2}+\frac{y^2}{(5)^2}-\frac{z^2}{(3)^2}=1$ es simétrica respecto al origen, los ejes y los planos coordenados.

Cuando los estudiantes aborden la secuencia, se pueden presentar algunas dificultades, por lo que sugerimos un plan de acción del profesor. La Tabla 4.2-15 presenta posibles dificultades y maneras en las que profesor podría actuar ante ellas. Consideramos que estas pueden emerger en lo que hemos denominado segunda etapa de la temporalidad, que corresponde a la socialización. En esta etapa los estudiantes exponen sus producciones y pueden hacer explícitas sus dificultades. Esta puesta en común puede tomar 20 - 30 minutos por tarea.

Tabla 4.2-15 Dificultades asociadas a la secuencia de tareas 4

	Dificultad 1
Dificultad del estudiante	No visualizar los planos coordenados que son planos mediadores del segmento AA'
Intervención del profesor para contrarrestarla	El profesor puede aprovechar una de las producciones de los estudiantes en la que no hayan logrado identificar uno de los planos mediadores y usando el software construir dicho plano. Luego pedir a los estudiantes que identifiquen la relación entre el segmento AA' y el plano creado.
	Dificultad 2
Dificultad del estudiante	No ingresar de manera adecuada las coordenadas en el programa (instrucción de la tarea c).
Intervención del profesor para contrarrestarla	En primer lugar, el profesor ilustra cómo construir en GeoGebra el punto A' de forma tal que sus coordenadas dependan de las coordenadas de un punto A dado. En un segundo momento, el profesor puede aprovechar producciones de los estudiantes para hacer un contraste entre lo que sucede con el punto A', cuando sus coordenadas no quedan dependiendo de las coordenadas del punto A.
	Dificultad 3

Dificultad del estudiante	No identificar correctamente los octantes en el sistema coordenado tridimensional.
Intervención del profesor para contrarrestarla	El profesor puede usar una de las representaciones que los estudiantes tengan en GeoGebra, de la superficie que se abordó y generando cubos que simulen contener cada octante, hacer el ejercicio de ubicar un punto en determinado octante, para encontrar todas las posibles combinaciones de signos de las variables en una coordenada.

Se espera que al final de las puestas en común se logren institucionalizar los teoremas 2, 3 y 4 de la Sección 2.1.2.2; estos son:

Teorema 2. Si la ecuación de una superficie no se altera cuando se cambia el signo de una de las variables, la superficie es simétrica con respecto al plano coordenado a partir del cual se analiza la variable cuyo signo se modificó y recíprocamente.

Teorema 3. Si la ecuación de una superficie no se altera cuando se les cambia el signo a dos de sus variables, la superficie es simétrica con respecto al eje coordenado a lo largo del cual se estudia la variable cuyo signo no se cambió, y recíprocamente.

Teorema 4. Si la ecuación de una superficie no se altera cuando sus tres variables cambian de signo, la superficie es simétrica con respecto al origen, y recíprocamente.

Esta última etapa tendrá una duración de aproximadamente 20 minutos.

4.2.5 Reconocimiento de los cambios que se debe hacer a la expresión algebraica de una representación gráfica dada, para obtener una segunda.

Secuencia de tareas 5

Dado que la ecuación de un cilindro elíptico es

$$\frac{(x-0.3)^2}{(0.6)^2}+\frac{(y+0.8)^2}{(1)^2}=1$$

a. Use el software GAnalitica3D para proveer su representación gráfica, tomando en cuenta la *vista superior*, *vista frontal* y *vista lateral* provistas por el software. Con ello, complete la siguiente tabla:

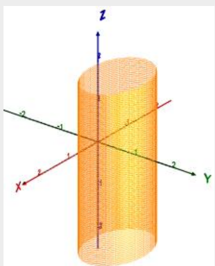
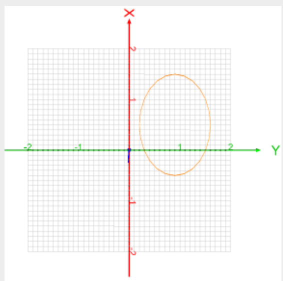
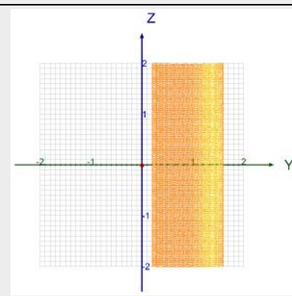
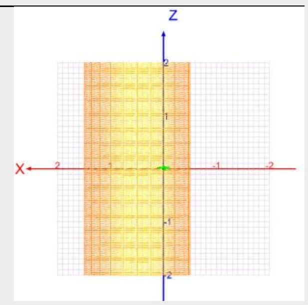
Tabla 1

Vista general	Vista superior	Vista frontal	Vista lateral

Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica
$\frac{(x-0.3)^2}{(0.6)^2}+\frac{(y+0.8)^2}{(1)^2}=1$	*XY*	*YZ*	*XZ*

b. Dadas las siguientes representaciones gráficas asociadas a un único cilindro:

Tabla 2

Vista general	Vista superior	Vista frontal	Vista lateral
			
?	*XY*	*YZ*	*XZ*

i. Establezca qué cambios hay que hacerles a los parámetros de la expresión algebraica del ítem a para que sus representaciones gráficas resultantes sean las que se presenta en la Tabla 2. Argumente su respuesta.

ii. Con la información proporcionada en el ítem i, escriba la expresión algebraica del cilindro cuyas representaciones gráficas se presentan en la Tabla 2.

iii. Indique qué información provee sobre el cilindro cada parámetro h y k, y a y b de la expresión $\frac{(x-h)^2}{\mathrm{a}^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$

c. Haga clic en el *botón cilindro* y *luego en el panel de problemas*; haga clic en el botón *generar nuevos problemas* hasta encontrar un cilindro elíptico (como el que se muestra en la Ilustración 2, por ejemplo) y un enunciado como el que se muestra en la Ilustración 3:

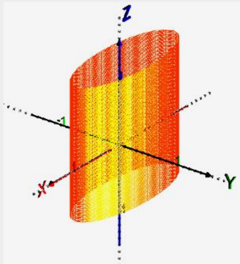


Ilustración 2: Cilindro de la sección de problema.

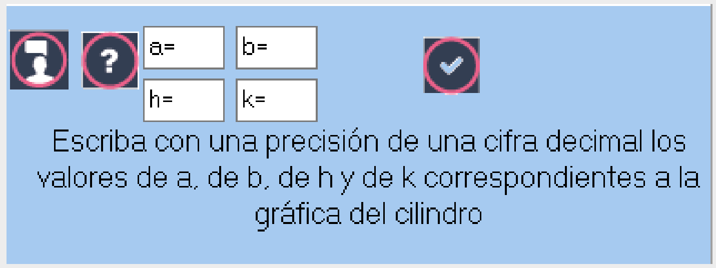


Ilustración 3: Enunciado de la sección de problemas que corresponde a un cilindro.

Use únicamente los *botones de vistas*, *nodos en los ejes* y *cuadrículas* para dar respuesta al problema y provea la ecuación correspondiente.

Con esta secuencia se apunta a determinar los cambios que se le debe hacer a una expresión algebraica para obtener otra, teniendo en cuenta una representación gráfica de un objeto del mismo tipo al que representa la expresión dada. Con esta secuencia, además se hace una recopilación de lo trabajado en las anteriores secuencias tomando en cuenta algunos de los asuntos propuestos por Lehmann (1980) para estudiar superficies (por ejemplo, las intersecciones con los ejes coordenados y las intersecciones de los planos coordenados con la superficie). A continuación, presentamos la descripción para esta secuencia.

Requisitos

Para el desarrollo de esta secuencia se requiere que los estudiantes hayan realizado todas las secuencias anteriores; por lo tanto, los requisitos son los siguientes:

Requisitos orientados a objetos primarios

1. Identificar las expresiones algebraicas que representan a cada una de las superficies cuadráticas.
2. Identificar las curvas de intersección entre planos paralelos a los planos coordenados y la superficie desde el punto de vista algebraico y geométrico.
3. Identificar qué cambios produce cada uno de los parámetros a, b, c, h, k y l en la superficie.

Requisitos orientados a habilidades de visualización

1. Haber desarrollado la habilidad *Identificación visual*, consistente en asociar la representación algebraica con la representación gráfica y un tipo de superficie.
2. Haber desarrollado la habilidad *percepción de la posición de una superficie en el espacio* consistente en identificar, teniendo como referencia las cónicas generadas en la intersección y el sistema coordenado, algunas propiedades de las superficies como su extensión respecto a los ejes o sus intersecciones con estos.
3. Haber desarrollado la habilidad *percepción de relaciones espaciales*, consistente en identificar, a partir de las vistas superior, lateral y frontal de las intersecciones entre planos paralelos a uno de los planos coordenados y la superficie, el comportamiento de la superficie, a partir de la cónica que resulta de dicha intersección.

Metas

Metas orientadas a objetos primarios

> Identificar la variación de un parámetro en una expresión algebraica de una superficie, a partir de cambios en la representación gráfica.

Específicamente se busca que los estudiantes logren establecer la expresión algebraica de un cilindro, a partir de las representaciones gráficas de las vistas de otro, tomando como referencia su ecuación. Se espera que los estudiantes enuncien cosas como:

1. La ecuación que corresponde al cilindro de la Tabla 2 tiene la misma forma de la ecuación dada en la Tabla 1. Lo que cambia es el valor de los parámetros; el centro ya no es $(0.3, -0.8)$ sino que es el centro de la elipse que se determina con base en la vista superior de la tabla 2, es decir (0.5, 0.9). Así mismo, el ancho de esta elipse cambia en -0.3 décimas, por lo que el nuevo b es 0.7 y el alto cambia en 0.4 décimas, por lo que el nueva a es 1.0 (ver Figura 4.2-7), se identificó que el parámetro a ha variado en 0.4 décimas de la tabla 1 a la tabla 2.

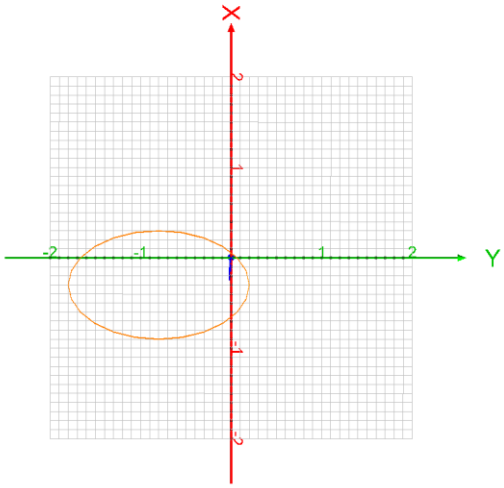


Tabla 1

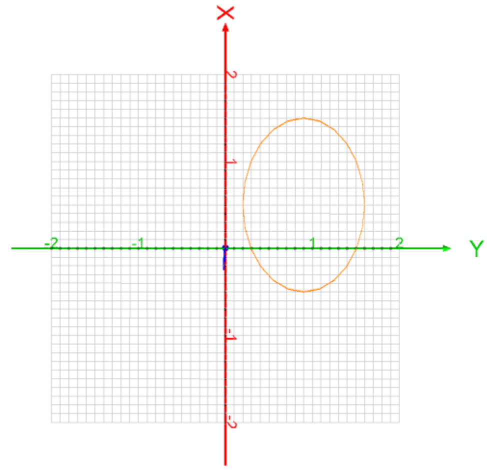


Tabla 2

Figura 4.2-7: Vistas superiores de dos cilindros

2. Un cilindro, cuya ecuación general es $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$, tiene como base una elipse con centro (h, k) y semiejes a y b.
3. Identificar que en la vista superior se pueden observar los ejes X y Y, en la vista frontal los ejes Y y Z, y en la vista lateral los ejes X y Z, y así mismo se pueden observar los parámetros a y b, b y c y a y c respectivamente.

Metas orientadas a habilidades de visualización

Favorecer el desarrollo de la habilidad *Percepción de la posición de una superficie en el espacio*, identificando, con base en las diferentes representaciones gráficas de un cilindro, propiedades como coordenadas del punto centro, el ancho, alto y profundo, de la superficie.

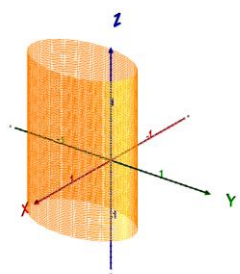
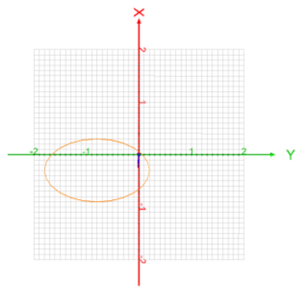
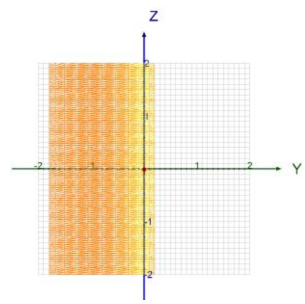
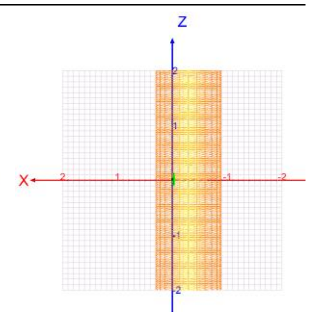
Interacción y temporalidad

Al igual que las anteriores secuencias la descripción se hará tarea por tarea y teniendo en cuenta las etapas definidas en la temporalidad en la Sección 4.1. En la primera etapa los estudiantes deben abordar cada una de las tareas en parejas y mediante la interacción grupal generan el planteamiento de las posibles respuestas a lo solicitado en cada una de estas, durante aproximadamente 30 minutos. Prevemos que los estudiantes pueden dar respuesta a las tareas de la siguiente manera:

Tarea a: En esta tarea se pide graficar y poner en la Tabla 1 cada una de las vistas de la representación gráfica del cilindro dado. Prevemos que los estudiantes pueden llenarla como se muestra en la Tabla 4.2-16.

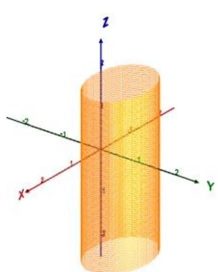
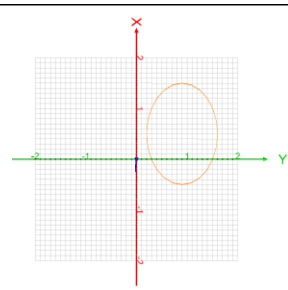
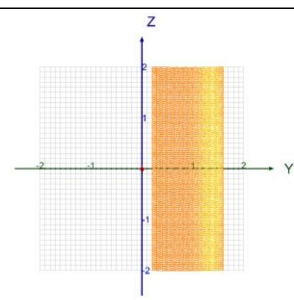
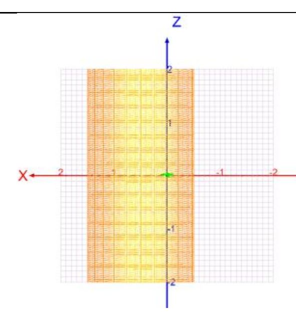
Tabla 4.2-16: Posibles respuestas de los estudiantes a la tarea a de la secuencia 5

Tabla 1

Vista general	Vista superior	Vista frontal	Vista lateral
			
$\frac{(x+0.3)^2}{(0.6)^2}+\frac{(y+0.8)^2}{(1)^2}=1$	XY	YZ	XZ

En el caso de la Tarea b, se pide establecer los cambios que hay que hacerles a los parámetros de la expresión algebraica del ítem a para que sus representaciones gráficas resultantes sean las que se presenta en la Tabla 2.

Tabla 2

Vista general	Vista superior	Vista frontal	Vista lateral
			
?	XY	YZ	XZ

Prevemos que los argumentos de los estudiantes pueden dar lugar a tres respuestas para obtener información de los parámetros, una en la que se observa únicamente la vista superior, otra en la que se usan las vistas lateral y frontal y otra en la que se observan las tres vistas para determinar las décimas en las que varió cada parámetro. Las respuestas pueden ser:

> R1: Al observar la vista superior de la Tabla 2 se determina que la medida del eje mayor de la elipse es 2.0, es decir $2a = 2.0$, por lo tanto, $a = 1.0$. De igual manera el eje menor mide $2b = 1.4$, entonces $b = 0.7$; por lo tanto, en la expresión de la tabla 1, el parámetro a debe aumentar y el parámetro b debe disminuir. Por otra parte, los parámetros h y k deben aumentar.
>
> R2: Al observar la vista frontal y contar las décimas del ancho del cilindro y dividirla en dos se encuentra que $b = 0.7$. Haciendo un proceso similar en la vista lateral, se obtiene que $a = 1.0$. Luego, los parámetros a y b del cilindro de la Tabla 1 deben aumentar y disminuir, respectivamente, en 0.4 y -0.3 décimas.
>
> R3: Es necesario modificar los parámetros h y k ya que el cilindro de la Tabla 2 se trasladó. El parámetro a se debe aumentar en 0.4 décimas y el parámetro b se debe disminuir en -0.3 décimas.

El ítem ii pide escribir la expresión algebraica del cilindro cuyas representaciones gráficas se presentan en la Tabla 2. Por lo que prevemos que, de acuerdo con las respuestas del ítem i, los estudiantes pueden llegar a la siguiente expresión algebraica:

$$\frac{(x-0.5)^2}{(1.0)^2}+\frac{(y-0.9)^2}{(0.7)^2}=1$$

Para el ítem iii se pide indicar la información que provee sobre el cilindro cada uno de los parámetros de la expresión $\frac{(x-h)^2}{\mathrm{a}^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$. Se espera que los estudiantes puedan dar una respuesta como la siguiente:

> El parámetro h determina un desplazamiento del cilindro en el sentido del eje X. El parámetro k determina un desplazamiento del cilindro en el sentido del eje Y. Los parámetros a y b determinan las longitudes de los semiejes mayor y menor de la elipse, que es base del cilindro.

La Tarea c pide a los estudiantes resolver uno de los problemas que se proponen en el software GAnalitica3D. Prevemos que los estudiantes usarán las *vistas*, las *cuadrículas de los planos coordenados* y la *herramienta nodos en los ejes*, para determinar el valor de los parámetros de la ecuación del cilindro. Ilustramos la situación con uno de los problemas que los estudiantes pueden encontrar, dado que el software está programado para que ello sea aleatorio:

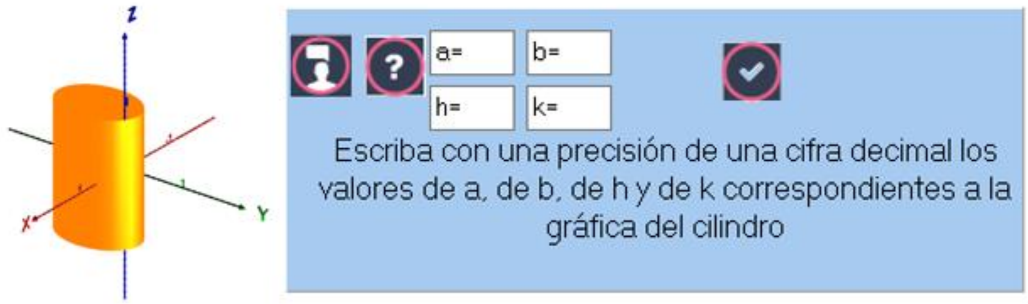


Figura 4.2-8: Problema para encontrar los valores de los parámetros h, k, a y b

Con el ejemplo de Figura 4.2-8, los estudiantes, para determinar los parámetros h y k, pueden considerar la vista superior del cilindro (ver Figura 4.2-9) y usar las herramientas *ejes del objeto* y *nodos* con la cuales determinar que las coordenadas del centro de la elipse, son $C(0.2, -0.3)$; así las cosas, determinan que $h = 0.2$ y $k = -0.3$.

Para determinar los parámetros a y b, ellos podrían tener en cuenta la coordenada del centro de la elipse (C) y contar las decimas que hay desde este punto hasta uno de los extremos de cada uno de los semiejes (determinados por la intersección de la elipse con las rectas de color azul y rojo – Figura 4.2-9–), encontrando así, que $a = 0.7$ y $b = 0.5$.

Al escribir estos valores en las casillas correspondientes, encontramos que estas satisfacen la representación algebraica y gráfica del cilindro, apareciendo un mensaje como el ilustrado en la Figura 4.2-10 .

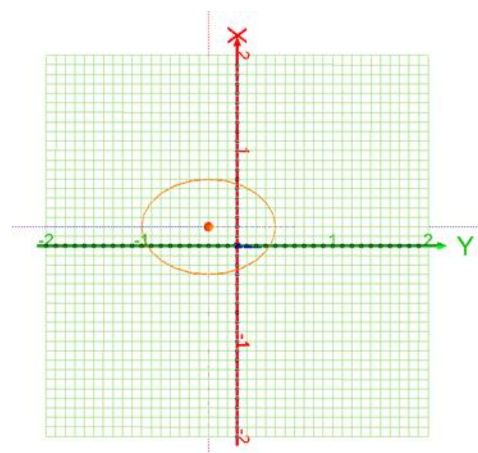


Figura 4.2-9: Vista superior de un cilindro

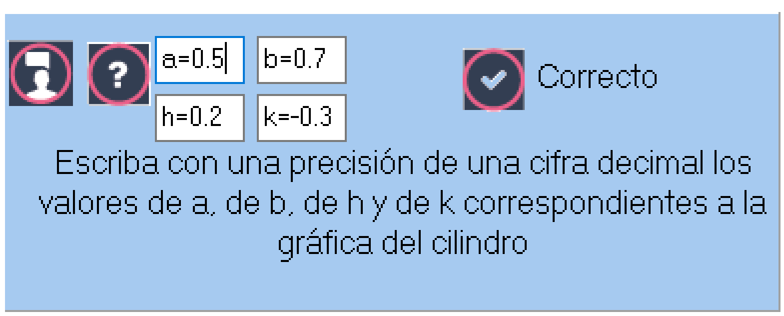


Figura 4.2-10: Respuesta a la tarea c de la secuencia 5

Cuando los estudiantes aborden la secuencia, se pueden presentar algunas dificultades, por lo que sugerimos un plan de acción del profesor. La Tabla 4.2-17 presenta posibles dificultades y maneras en las que profesor podría actuar ante ellas. Consideramos que estas pueden emerger en lo que hemos denominado segunda etapa de la temporalidad, que corresponde a la socialización. En esta etapa los estudiantes exponen sus producciones y pueden hacer explícitas sus dificultades. Esta puesta en común puede tomar 30 - 40 minutos por tarea.

Tabla 4.2-17 Dificultades asociadas a la secuencia de tareas 5

Dificultad 1	
Dificultad del estudiante	Identificar de manera incorrecta los valores de los parámetros debido a que no los asocia con las representaciones gráficas y el sistema cartesiano de referencia. Puede ocurrir, por ejemplo, que los estudiantes no asocien correctamente los valores de los parámetros h y k con el centro de la elipse base, o intercambien los valores de los parámetros a y b no asociándolos correctamente según los ejes respectivos. .
Intervención del profesor para contrarrestarla	El profesor puede usar el pantallazo de la vista superior de uno de los cilindros que se abordaron y su respectiva ecuación, con el fin de aclarar la importancia de asociar correctamente cada uno de los ejes con los parámetros. Puede mostrar que, aunque la superficie mantenga su forma, si se intercambian los valores de los parámetros, la superficie se rota 90° y por lo tanto la expresión algebraica no correspondería con la representación gráfica. Así mismo, el profesor puede recordar lo que han significado los parámetros h y k en tareas anteriores; esto es, que representan las coordenadas del centro de las cónicas o superficies estudiadas previamente.

Se espera que, en la tercera etapa, al final de la puesta en común, se logre institucionalizar el procedimiento para identificar los valores de los parámetros en cada una de las vistas gráficas, esto es:

1. Identificar de qué eje depende cada uno de los parámetros a, b, h y k.
2. Identificar que en la vista superior se pueden observar los ejes X y Y, en la vista frontal los ejes Y y Z, y en la vista lateral los ejes X y Z, y así mismo se pueden observar los parámetros a y b, b y c y a y c respectivamente.

de tal manera que se dé respuesta a las tareas de la manera correcta. Esta última etapa tendrá una duración de aproximadamente 20 minutos.

Capítulo 5

Conclusiones

Las conclusiones están escritas en términos de los siguientes cuatros asuntos: nivel desarrollo de los objetivos del trabajo planteados, nivel de abordaje de las habilidades de visualización en cada una de las secuencias, las limitaciones del trabajo y los principales aportes que me dejó el trabajo como futura docente.

Relativas a los objetivos específicos:

- Se profundizó en el tratamiento de las superficies cuadráticas elipsoide, hiperboloide de una y dos hojas y el cilindro elíptico mediante el uso del software GAnalitica3D y GeoGebra, para estudiar las posibilidades de visualización que estos ofrecen. Inicialmente se construyó un marco matemático en el que se aborda el estudio de superficies cuadráticas propuesto por Lehman (1980) y se contrastó con las posibles herramientas que el software Ganalitica3D ofrece para su desarrollo.
- Se construyó un marco didáctico sobre la visualización espacial con el que se puede obtener indicadores de desarrollo de la visualización. Dado que encontramos muy poca documentación al respecto de la visualización de superficies cuadráticas en sus diversas representaciones (gráfica o algebraica), se diseñó una tabla de indicadores de habilidades de visualización en el contexto de la representación gráfica y algebraica de las superficies cuadráticas (ver Tabla 2.2-5). Para ello se tomó como base la propuesta de Suarez y León (2016).
- Se diseñaron cinco secuencias de tareas que, con base en nuestra descripción (análisis *a priori*) y como se puede ver en la sección siguiente, apuntan a la promoción del desarrollo de habilidades de visualización expuestas en la Tabla 2.2-5, que involucran las superficies cuadráticas de tipo I.

Relativas a objetos y habilidades involucrados en las secuencias

Mediante las secuencias tuvimos la intención de involucrar diferentes tipos objetos primarios (presentados en la Sección 2.1) y habilidades de visualización (como las citadas en la sección 2.2.4) en el marco del estudio de las superficies cuadráticas de tipo I. Para dar cuenta de que este propósito fue abordado presentamos, respectivamente, la Tabla 4.2-1 y la Tabla 4.2-2. En ellas indicamos qué objetos se trabajaron y en qué secuencia, y qué habilidad (con su indicador) está involucrada en cada secuencia.

Tabla 4.2-1: Objetos matemáticos abordados en las secuencias

SECCIÓN	DEFINICIÓN	Secuencia/ Tarea/ Ítem
2.1.1	1. Coordenada de un punto en $\mathbb{R}^3$	4/Todas
2.1.2	2. Definición de superficie	1/a/implícito
	3. Intersección de una superficie	2/a/i
2.1.2.2	4. Simetría respecto a un punto	4/a/iv
	5. Simetría respecto a una recta	4/b/v
	6. Simetría respecto a un plano	4/c/iv
	7. simetría de una superficie respecto a un plano	4/c/iv
SECCIÓN	TEOREMA	
2.1.1	1. Distancia euclidiana en $\mathbb{R}^3$ entre dos puntos	4/implícito
2.1.2.2.	2. Si la ecuación de una superficie no se altera cuando se cambia el signo de una de las variables, la superficie es simétrica con respecto al plano coordenado a partir del cual se analiza la variable cuyo signo se modificó y recíprocamente.	4/c/iv
	3. Si la ecuación de una superficie no se altera cuando se les cambia el signo a dos de sus variables, la superficie es simétrica con respecto al eje coordenado a lo largo del cual se estudia la variable cuyo signo no se cambió, y recíprocamente.	4/b/v
	4. Si la ecuación de una superficie no se altera cuando sus tres variables cambian de signo, la superficie es simétrica con respecto al origen, y recíprocamente.	4/a/iv

	Superficies cuadráticas de tipo I con R mayor que cero		Secuencia
2.1.2.3	Elipsoide	Discusión de la ecuación	1, 2 y 3
	Hiperboloide de una hoja		1, 2 y 4
	Hiperboloide de dos hojas		1 y 2
	Cilindro elíptico		1, 2 y 5
	Cilindro hiperbólico recto		No se abordó

Tabla 4.2-2: Indicadores de habilidades abordados en las secuencias de tareas

Habilidad	Indicadores en contexto representación gráfica	Secuencia/ Tarea/ Ítem
Identificación visual: Reconocer propiedades de las superficies independientemente del contexto.	Identificar el tipo de superficie a partir de la gráfica sin usar un sistema referencial.	1/a/i
Conservación de la percepción: Identificar que una superficie mantiene determinadas propiedades, aunque cambie de posición o deje de verse total o parcialmente.	Identificar un tipo de superficie, aunque no se vea completamente	No se abordó
	Identificar cuando una superficie esta trasladada	3/a/i
	Identificar cuando una superficie esta rotada	3/b/iii
Percepción de la posición de una superficie en el espacio: Relacionar la posición de la superficie, con uno mismo (el observador) o con otro objeto (sistema coordenado) que actúa como referencia.	Identificar la posición de la representación gráfica de la superficie respecto al sistema coordenado tridimensional.	3/a/i
	Identificar, con base en diferentes representaciones gráficas de una misma superficie - vista desde diferentes perspectivas -, las diferentes propiedades del objeto.	3/a/iii, 3/b/iii 3/c/iii, 5/b/i/ii 5/c
	Identificar el tipo de curva que se forma en la intersección del plano coordenado con la superficie.	2/a/i
Percepción de relaciones espaciales: Identificar las relaciones internas entre varios objetos situados simultáneamente en el espacio (equidistancia, simetría, perpendicularidad, posición relativa, etc.).	Identificar con base en la representación gráfica de una superficie si dos puntos son simétricos respecto al origen o a uno de los ejes coordenados.	4/a, c
	Identificar la relación que guardan las curvas que se forman en las intersecciones entre planos paralelos a uno de los planos coordenados y la superficie a partir de las vistas superior y frontal.	2/a/iii

Discriminación visual: Comparar varias imágenes reales o mentales para identificar similitudes y diferencias entre ellas.	Identificar con base en las representaciones gráficas de dos superficies sus diferencias y similitudes	1/a/iii

Habilidad	Indicadores en contexto representación algebraica	Secuencia/ Tarea/ Ítem
Identificación visual: Reconocer propiedades de las superficies independientemente del contexto.	Identificar a partir de la expresión algebraica que tipo de superficie representa.	1/a/ii
Conservación de la percepción: Identificar que, independientemente de los símbolos que usen en la expresión algebraica, esta tiene las mismas propiedades.	Identificar que, aunque dos expresiones tengan diferentes símbolos estas representan el mismo objeto.	No se abordó
	Identificar a partir de la expresión algebraica si la superficie está trasladada	3/a/iii
Percepción de la posición de una superficie en el espacio: Relacionar la posición de la superficie, con uno mismo (el observador) o con otro objeto (sistema coordenado) que actúa como referencia.	Identificar a partir de los parámetros de la expresión algebraica las coordenadas del centro de la superficie	3/a/ii
	Identificar con base en la expresión algebraica si la superficie es simétrica respecto a los ejes.	4/b/iii, iv, v
Percepción de relaciones espaciales: Identificar las relaciones internas entre varios objetos situados simultáneamente en el espacio (equidistancia, simetría, perpendicularidad, posición relativa, etc.).	Identificar con base en la expresión algebraica si dos puntos son simétricos respecto al origen o a uno de los planos coordenados.	4/a/ii, iii 4/c/i, ii, iii, iv
Discriminación visual: Comparar varias imágenes reales o mentales para identificar similitudes y diferencias entre ellas.	Identificar que un cambio de signo en la expresión algebraica implica un cambio de tipo de superficie.	1/a/i

A continuación, presentamos unos comentarios generales sobre los contenidos de las secuencias, que consideramos que un profesor debe tener en cuenta a la hora de hacer su implementación:

- Como se advirtió desde un inicio, las secuencias 1, 2 y 3 se pueden ajustar para cualquiera de las superficies cuadráticas. En contraste, la secuencia 5, relativa a la escritura de una ecuación dada un cambio de una representación gráfica, no se ajusta muy bien a todas las superficies cuadráticas; particularmente, cuando hicimos un ensayo de implementación preliminar o pilotaje, considerando un hiperboloide de dos hojas no tuvimos mucho éxito puesto que para el sujeto que la abordó, no fue fácilmente identificable, mediante las representaciones gráficas, los posibles cambios en los coeficientes. Dado que los ajustes hechos al enunciado para este caso siempre arrojaron la misma dificultad, consideramos viable que esta secuencia es ajustable para elipsoides principalmente.
- Cada secuencia está apuntando a un asunto específico en relación con lo conceptual y al desarrollo de una o dos habilidades de visualización. Para ver esto de mejor manera, la siguiente tabla sintetiza los objetos y la habilidad involucrada en cada ítem de cada secuencia. Esta tabla es diferente a las tablas 4.2-1 y 4.2.2, pues esta se ordena por secuencia; las anteriores se ordenan por habilidades y conceptos.

Tabla 4.2-3: Objetos y habilidades involucrados en las secuencias de tareas.

Secuencia	Objeto Matemático	Habilidades	ítem
1	Reconocer las características de las expresiones algebraicas que representan las superficies cuadráticas elipsoide, hiperboloide de una hoja, hiperboloide de dos hojas, y cilindro elíptico.	Favorecer el desarrollo de la habilidad *Identificación visual*, consistente en asociar la representación algebraica con la representación gráfica y un tipo de superficie.	I, ii
	Identificar cómo, con base en la representación gráfica, cambios de signos en la representación algebraica implica un cambio en el tipo de superficie.	Favorecer el desarrollo de la habilidad Discriminación visual, consistente en identificar qué cambios en los signos de los coeficientes de la representación algebraica, implican un cambio en el tipo de superficie.	iii

2	Identificar el tipo de curva que se genera con la intersección entre las superficies (elipsoide, hiperboloide de una hoja, hiperboloide de dos hojas y cilindro elíptico) y el plano paralelo a los planos coordenados.	Favorecer el desarrollo de la habilidad *percepción de relaciones espaciales*, consistente en identificar, a partir de las vistas superior, lateral y frontal de las intersecciones entre planos paralelos a uno de los planos coordenados y la superficie, el comportamiento de la superficie, a partir de la cónica que resulta de dicha intersección.	I,ii
	Identificar la representación algebraica de las cónicas que se determinan con la intersección entre las superficies (elipsoide, hiperboloide de una hoja, hiperboloide de dos hojas y cilindro elíptico) y los planos coordenados, con base en la representación algebraica de la superficie.	Favorecer el desarrollo de la habilidad *percepción de la posición de una superficie en el espacio* consistente en identificar, teniendo como referencia las cónicas generadas en la intersección y el sistema coordenado, algunas propiedades de las superficies como su extensión respecto a los ejes o sus intersecciones con estos.	Iii
3	Reconocer algunas de las propiedades del elipsoide a partir de cambios en los parámetros h, k y l de su expresión algebraica.	Favorecer el desarrollo de la habilidad *Percepción de la posición de una superficie en el espacio, r*elacionando la posición de la representación gráfica de la superficie respecto al sistema coordenado tridimensional, a partir de su expresión algebraica.	a/i/ii
	Reconocer algunas de las propiedades del elipsoide a partir de cambios en los parámetros a, b y c de su expresión algebraica.	Favorecer el desarrollo de la habilidad *Percepción de la posición de una superficie en el espacio, i*dentificando propiedades del elipsoide (intersección de superficie con ejes, longitud de ejes, centro de superficie) a partir de observar distintas representaciones gráficas de esta.	b c/iii
	Identificar, con base en la representación gráfica, que los parámetros de la superficie son independientes entre sí.	Favorecer el desarrollo de la habilidad *Conservación de la percepción,* en el sentido de identificar que, a partir de la expresión algebraica o gráfica, aunque la	a/iii c/ii

<table>
<tr><td></td><td></td><td>superficie elipsoide se traslade o rote 90°, esta sigue siendo del mismo tipo.</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="4">4</td><td>Reconocer algunas de las propiedades de las simetrías - central, axial y planar- de un hiperboloide de una hoja, haciendo un análisis del signo de las variables x, y y z de su expresión algebraica.</td><td rowspan="4">Favorecer el desarrollo de la habilidad Percepción de relaciones espaciales:
Identificando, con base en la representación gráfica de una superficie, cuándo dos puntos son simétricos respecto al origen, a uno de los ejes y a uno de los planos.
Identificando, con base en la representación algebraica de una superficie, que dos puntos son simétricos respecto al origen, a uno de los ejes y a uno de los planos.
Identificando, con base en la representación algebraica de una superficie, cuándo esta es simétrica respecto al origen, a uno de los ejes y a uno de los planos.</td><td>a/ii
b/ii, iii.
c/ i, ii, iii</td></tr>
<tr><td>Identificar que, si la ecuación de un hiperboloide de una hoja no se altera cuando se cambia el signo de una de las variables, entonces la superficie es simétrica respecto al plano coordenado a partir del cual se analiza las variables cuyos signos no se modificaron.</td><td>c/ iv
d</td></tr>
<tr><td>Identificar que, si la ecuación de una superficie no se altera cuando se les cambia el signo a dos de sus variables, la superficie es simétrica con respecto al eje coordenado a lo largo del cual se estudia la variable cuyo signo no se cambió.</td><td>b/i, iv, v.
d</td></tr>
<tr><td>Identificar que, si la ecuación de una superficie no se altera cuando sus tres variables cambian de signo, la superficie es simétrica con respecto al origen.</td><td>a/i, iii, iv
d</td></tr>
<tr><td>5</td><td>Identificar la variación de un parámetro en una expresión algebraica de una superficie, a partir de cambios en la representación gráfica.</td><td>Favorecer el desarrollo de la habilidad Percepción de la posición de una superficie en el espacio, identificando, con base en las diferentes representaciones gráficas de un cilindro, propiedades como coordenadas del punto centro, el ancho, alto y profundo, de la superficie.</td><td>a, b, c</td></tr>
</table>

- Con base en la Tabla 4.2-3, se puede decir que con la secuencia 4 estamos apuntando, particularmente, a que los estudiantes empíricamente tengan certeza de los teoremas 2, 3 y 4 presentados en la sección 2.1.2.2. La secuencia 3 tiene como objetivo que los estudiantes logren establecer unas características esenciales de las representaciones algebraicas que le permitan reconocer el tipo de curva que está representando cada una de estas. Por su parte, con la secuencia 1 estamos apuntando necesariamente a un reconocimiento de la expresión algebraica con la representación gráfica y viceversa y, eventualmente, a lograr una conceptualización del objeto relativa a su asociación con algún objeto físico. Dicho esto, y tal como lo sugiere Gómez, Mora y Velasco (2018), hacer un contraste entre las metas explicitadas en la descripción y una tabla como las antes presentadas, deja ver la idoneidad de la secuencia. Dado que, para este caso, la correspondencia es alta, consideramos que nuestra propuesta, a priori, es idónea en términos de los objetivos planteados para ella.

Limitaciones de la propuesta:

1. Con base en las tablas Tabla 4.2-1 y la Tabla 4.2-2 se puede evidenciar que hubo algunos objetos o indicadores de visualización que no fueron abordados mediante las secuencias. Así, por ejemplo, no se trataron el cilindro hiperbólico recto y los indicadores “Identificar un tipo de superficie, aunque no se vea completamente” e “Identificar que, aunque dos expresiones tengan diferentes símbolos estas representan el mismo objeto” que hacen parte de la habilidad *conservación de la percepción*.

   La razón de no abordar el cilindro hiperbólico radica en el hecho de que este objeto es complejo con respecto a los demás. Podría ser menester diseñar una secuencia en la que se aludan a esos asuntos con el fin de aumentar el nivel de dificultad; por ejemplo, la secuencia dos se puede modificar para que los estudiantes hallen la ecuación de la familia de cónicas que se encuentran al intersecar planos paralelos a los planos coordenados con la superficie; esto con la intención de favorecer el desarrollo de la habilidad *percepción de la posición de una superficie en el espacio* y el proceso de composición de una superficie por curvas de nivel o familias de curvas.

   Así mismo, se podría diseñar una secuencia que apunte a desarrollar el indicador “Identificar un tipo de superficie, aunque no se vea completamente” de la habilidad conservación de la percepción. Consideramos que tareas que involucren vistas de solo algunas de las secciones de alguna superficie por planos paralelos a alguno de los planos coordenados, podría ser una alternativa. Esto no lo pudimos plantear dadas las limitaciones de los softwares utilizados.

2 Con nuestra propuesta, nosotros solo abordamos superficies cuadráticas de tipo I. Consideramos, entonces, que sería afortunado hacer un trabajo similar a este involucrando secuencias que aludan al tipo II de superficies cuadráticas.

3 Respecto al software GAnalitica3D, aunque este ofrece herramientas interesantes para estudiar las superficies cuadráticas, tiene serias limitaciones. Por ejemplo, no tiene herramientas para fijar puntos en las superficies o posibilidades de dinamismo; por esta razón, hubo necesidad de usar el software GeoGebra en la secuencia 4 para estudiar las simetrías respecto al origen, los ejes y planos coordenados.

4 Consideramos afortunado hacer una implementación que contemple más estudiantes. Las dificultades provocadas por la pandemia del COVID-19 durante el desarrollo de este trabajo de grado, no generaron condiciones para poder hacer un pilotaje que contemplara más sujetos, como fue pensado en un principio.

En términos de la formación como futura profesora:

Involucrarme en el diseño y descripción de secuencias de tareas desde la propuesta de Gómez, Mora y Velasco, contemplando algunos elementos del EOS, me permitió enriquecer mi competencia analítica en términos de análisis didáctico.

Usar estas perspectivas teóricas y hacer una implementación de la propuesta a modo de pilotaje, me ayudó a ganar sensibilidad respecto a todos los asuntos que se deben contemplar para proponer una secuencia de tareas a un grupo de estudiantes; más aún, de temas complejos y poco tratados en los currículos implementados. Entre estos asuntos, destaco los siguientes:

- Aprendí que cuando se usa un software, este no se debe subutilizar; es menester conocerlo con cierta profundidad de forma tal que se le debe sacar el mayor provecho posible. Así mismo gané conciencia de un artefacto puede obstaculizar el proceso de aprendizaje de los estudiantes.
- Aprendí que plantear el enunciado de un problema requiere tener claras los requisitos para poder abordarla y los objetivos que se quieren lograr con ella. Por ejemplo, si los requisitos no son claros, es probable que el problema genere una frustración en los estudiantes porque, quizá, no se contempló si la tarea está a su alcance.

Precisar los objetivos me sirvió mucho para que la interacción, al momento del pilotaje, fluyera un poco más y nunca perdiera su norte.

- Gané conciencia que diseñar una secuencia de tareas implica tiempo, mucho tiempo. Pero también, que una única secuencia es susceptible de abordar muchos contenidos y habilidades.
- Gané conciencia de que pensar en diferentes soluciones a los problemas y las posibles dificultades que pueden presentar los estudiantes al abordarlos, ayuda al profesor a tener un plan para orientar y ayudar a los estudiantes de forma tal que las metas de aprendizaje se logren.

Bibliografía

Blanco, H. (2009). Representaciones gráficas de cuerpos geométricos. Un análisis de los cuerpos a través de sus representaciones. *(Tesis de maestria).* Instituto politécnico nacional secretaria de investigación y posgrado, México, D. F., México.

Castiblanco, C., Urquina, H., Camargo, L., y Acosta, M. (Abril de 2004). *Incorporación de nuevas tecnologías al curriculo de matemáticas de la educación básica secundaria y media de Colombia.* (B. y. Ministerio de Educación NacionaL. Dirección de calidad de la Educación Preescolar, Ed.) Bogotá D. C., Colombia: Enlace editores LTDA.

Chavez, E. (26 de Febrero de 2009). *Taller "Alcances y limitaciones del geogebra para la enseñanza de conceptos elementales de la geometría analítica".* Obtenido de https://www.academia.edu/1332494/TALLER_ALCANCES_Y_LIMITACIONES_DEL_GEOGEBRA_PARA_LA_ENSE%C3%91ANZA_DE_CONCEPTOS_ELEMENTALES_DE_LA_GEOMETR%C3%8DA_ANAL%C3%8DTICA_

Christou, C., Jones, K., Pitta-Pantazi, D., Pittalis, M., Mousoulides, N., Matos, J., . . . Boytchev, P. (2007). Developing student spatial ability with 3D software applications. *Paper presented at the 5th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME).* Larnaca, Cyprus.

Duval, R. (2004). *Semiosis y Pensamiento Humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales.* Cali, Colombia: Universidad del valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática.

Ezquerro, M. (5 de Junio de 2014). Uso de Geogebra en la enseñanza de geometría analítica en 4° de la ESO. *Trabajo fin de máster.* Universidad internacional de la Rioja, Galdakao, Vizcaya. Obtenido de https://reunir.unir.net/bitstream/handle/123456789/2428/ezquerro.garcia.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Godino, J. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. (L. P. Sauvage, Ed.) *Recherches en didactique des mathématiques, 22*(2/3), 237-284.

Godino, J., Batanero, C., y Font, V. (4 de January de 2007). The onto-semiotic approach in mathematics education. *ZDM Mathematics Education* (39), 127-135. doi:101007/s11858-006-0004-1

Gómez, P., Mora, M., y Velasco, C. (2018). Análisis de instrucción. En P. Gomez, *Formacion de profesores de matemáticas y práctica de aula: conceptos técnicas curriculares* (págs. 197-268). Bogotá, Colombia: Universidad de los Andes.

González, S., y Bolzicco, V. (8-10 de Mayo de 2019). La visualización en geometría analítica como estrategia de aprendizaje. *V Jornadas de Enseñanza e Investigación Educativa en el campo de las Ciencias Exactas y Naturales.* Ensenada: Universidad Nacional de la Plata. Obtenido de http://sedici.unlp.edu.ar/bitstream/handle/10915/78549/Documento_completo.pdf-PDFA.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Gruszycki, A., Oteiza, N., Maras, P., Gruszycki, L., y Balles, H. (2012). Uso de geogebra para potenciar las diferentes representaciones en geometría analítica. *Conferencia latinoamericana de GeoGebra* (págs. 520-523). Urugyay: Universidad Nacional del Chaco Austral Argentina. Obtenido de http://www.geogebra.org.uy/2012/actas/31.pdf

Gutiérrez, A. (1996). Visualization in 3-Dimensional Geometry: In Search of a Framework. *Proceedings of the 20th International Conference of the P.M.E.*,, (págs. 3-19). Valencia (Spain).

Hoyos, E., Aristizabal, J., Vargas, O., y Arcila, D. (Mayo de 2018). Enseñanza de la geometría analítica 3D mediada con recursos digitales. *XIV Coloquio Regional de Matemáticas y IV Simposio de Estadística.* Pasto.

Kindle, J. (1970). *Teoria y problemas de Geometria analítica. Plana y del espacio.* México: Libros McGraw-Hill.

Lehmann, C. (1980). *Geometria analítica.* México D. F: Limusa.

Mason, J. (1987). ¿Qué representan los simbolos? En C. Janvier, *Problems of representation in teaching and learning of mathematics.* Cali: Traduccioón realizada en el Seminario de Representación en Matemáticas de la Maestría en Educación Matemática de la Universidad del Valle 1995.

Montecino, A.,yAndrade, M. (2013). La visualización espacial como herramienta en el entendimiento de lo tridimencional. En R. Flores, *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (págs. 418-488). México DF, México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Oviedo, L., Kashiro, A., Bnzaquen, M.,yGorrochategui, M. (2012). Los registros semióticos de representación en matemática. *Aula Universitaria 13*, 29-36.

Ramírez, U. (2012). Habilidades de visualización de los alumnos con talento matemático. *(Tesis Doctoral).* Universidad de Granada, Granada.

Ramírez, U.,yFlores, P. (2017). Habilidades de visualización de estudiantes con talento matemático: comparativa entre los test psicométricos y las habilidades de visualización manifestadas en tareas geométricas. *Enseñanza de las ciencias.*, 179-196.

Schilardii, A. (31 de Marzo de 2014). Estilos de aprendizaje. Importancia de la visualizacion en la geometria. Bogotá D. C., Colombia.

Sinclair, N., Bartolini Bussi, M., de Villier, M., Jones, K., Kortenkamp, U., Leung, A.,yOwens, K. (2016). Recent research on geometry education: an ICME-13 survey team report. *ZDM - Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 48*(5), 691–719.

Soto, A. (2013). El papel de la geometría analítica en la enseñanza de las matemáticas en la educación básica y media. *(Tesis de maestria).* Universidad Nacional de Colombia, Medellín, Colombia. Obtenido de http://bdigital.unal.edu.co/11823/1/43737863.2014.pdf

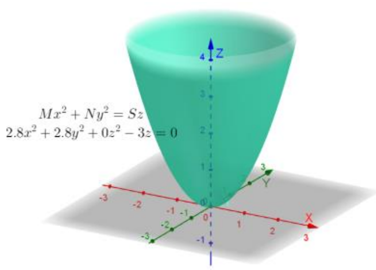
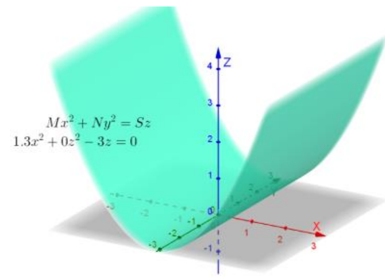
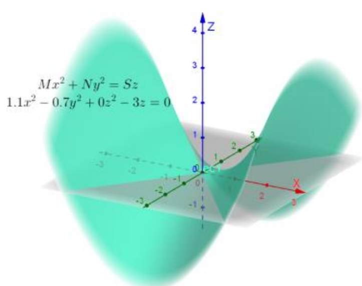
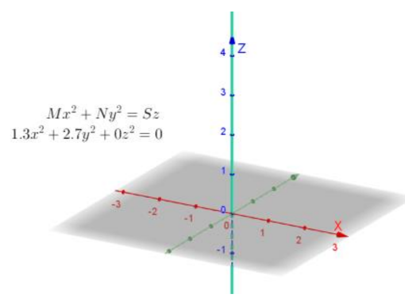
Suárez, W.,yLeón, O. (2016). El aprendizaje de la visualizaciónespacial en niños y en niñas. *Revista Horizontes Pedagógicos, 18*(2), 110-119. Obtenido de https://horizontespedagogicos.ibero.edu.co/article/view/18209/908

Anexos

Anexo A: Superficies cuadráticas de tipo II

Observando el comportamiento de las superficies cuadráticas de tipo *II*: $Mx^2 + Ny^2 = Sz$ cuando S es mayor que cero y los coeficientes M, N toman valores positivos, negativos o cero surgen las superficies cuadráticas de la *Tabla 0-1*:

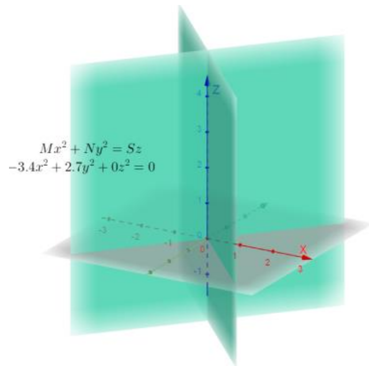
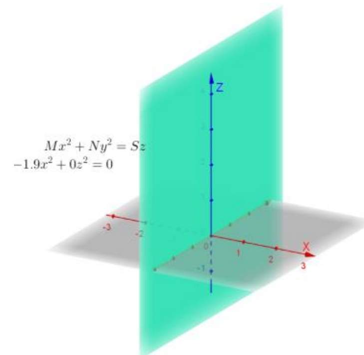
Tabla 0-1: superficies cuadráticas de tipo *II* con S mayor que cero.

Coeficientes M, N	Lugar geométrico	Coeficientes M, N	Lugar geométrico
Del mismo signo	 Paraboloide elíptico	Uno cero	 Cilindro parabólico recto
Signos opuestos	 Paraboloide hiperbólico	Del mismo signo	 Todos los puntos sobre un eje coordenado

Cuando S es igual a cero y los coeficientes M, N toman valores positivos, negativos o cero surgen las superficies cuadráticas de tipo *II* de la *Tabla 0-2*:

Tabla 0-2 superficies cuadráticas de tipo *II* con S igual a cero.

Coeficientes M, N	Lugar geométrico	Coeficientes M, N	Lugar geométrico

Signos opuestos	 Dos planos que se cortan	Uno cero	 Un plano coordenado (dos planos coincidentes).

Las ***superficies cuadráticas de tipo dos*** o superficies cuadráticas sin centro. Se pueden escribir bajo su forma canónica como sigue:

$$\pm\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = cz \tag{11}$$

De la ecuación (11) se deduce que las superficies cuadráticas sin centro tienen dos planos de simetría (los planos YZ y XZ) llamados planos principales, un eje de simetría (el eje Z) llamado eje principal, pero ningún centro de simetría.

Atendiendo a las diversas combinaciones posibles de signos en la ecuación (11), se deduce que, en esencia, existen solamente dos tipos diferentes de superficies:

a) Paraboloides elípticos (aquellos en que los coeficientes de los términos de segundo grado son del mismo signo).

b) Paraboloides hiperbólicos (aquellos en que los coeficientes de los términos de segundo grado son de signos contrarios).

Finalmente observando las tablas antes presentadas (Tabla 0-1, Tabla 0-2) se concluye que, si uno o más coeficientes son cero, el lugar geométrico, si existe, está entre los lugares geométricos: Planos que se cortan, planos coordenados, dos planos paralelos, superficies del cilindro y cono rectos, una sola recta, y un punto.

Si ningún coeficiente es cero, las tablas muestran que el lugar geométrico, si existe, es una de las tres cuadráticas con centro: el elipsoide y los hiperboloides de una y dos hojas, y las dos cuadráticas no centrales: los paraboloides elíptico e hiperbólico.

A continuación, se presenta mediante la Tabla 0-3 una clasificación de las superficies cuadráticas en $\mathbb{R}^{\mathbf{3}}$ de manera general. En la primera columna se presentan las condiciones para R o S que pasa si es mayor que cero o igual a cero, en la segunda columna se encuentran las condiciones para los coeficientes dadas por las combinaciones entre los signos de los coeficientes y en la tercera columna se presentan los lugares geométricos como resultado de la primera y segunda columna.

Tabla 0-3 Características de cuadráticas de curvas $Mx^2 + \ Ny^2 = Sz$ según parámetros

Coeficientes		Lugar geométrico
S^{**}	M, N	
Mayor que 0	Del mismo signo	Paraboloide elíptico
	Signos opuestos	Paraboloide hiperbólico
	Uno cero	Cilindro parabólico recto
	Del mismo signo	Todos los puntos sobre un eje coordenado
Igual a 0	Signos opuestos	Dos planos que se cortan
	Uno cero	Un plano coordenado (dos planos coincidentes).

**Cuando $S < 0$, se invierten los signos de los coeficientes M y N; los lugares geométricos correspondientes estarán dados entonces como para $S > 0$