ACTIVIDADES PARA RE-DESCUBRIR EL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

ZULLY TATIANA MONROY MARIÑO
DIEGO ALEJANDRO RIVEROS PRIETO

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
BOGOTÁ D.C.
2020

ACTIVIDADES PARA RE-DESCUBRIR EL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

ZULLY TATIANA MONROY MARIÑO
CC: 1014265157
Código: 2014240036

DIEGO ALEJANDRO RIVEROS PRIETO
CC: 1032486890
Código: 2015140070

Trabajo de grado para optar el título de Licenciados en Matemáticas

Asesor:
ORLANDO AYA C.

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
BOGOTÁ D.C.
2020

DEDICATORIA

El presente trabajo está dedicado principalmente a mi familia, ya que han sido un apoyo constante en mi formación universitaria y personal, a mi madre Lida, quien me ha guiado con su amor y comprensión y a mi padre Alejandro por ser mi mejor amigo, consejero y ejemplo a seguir.

Diego Alejandro Riveros Prieto.

Este trabajo está dedicado principalmente a mi mamá, la cual siempre me apoyó y no dejó que me diera por vencida. A mis amigos quienes fueron un gran apoyo emocional durante el tiempo en que escribía esta tesis y por último a mi familia quienes me apoyaron y me acompañaron durante este proceso.

Zully Tatiana Monroy Mariño

AGRADECIMIENTOS

Primero a nuestras familias, por apoyarnos en todo momento.
Al profesor Orlando Aya, nuestro director de tesis por compartir con nosotros su tiempo, conocimientos y experiencias.

A todos nuestros compañeros que de una u otra manera nos ayudaron con el desarrollo de la tesis, solucionando las actividades o apoyándonos de alguna manera.

A nuestros amigos más cercanos que todo el tiempo estuvieron a nuestro lado apoyándonos en momentos que más lo necesitábamos.

Por último, a la Universidad Pedagógica Nacional por formarnos como educadores y brindarnos una oportunidad cada vez que la necesitamos.

TABLA DE CONTENIDO

TABLA DE ILUSTRACIONES

Introducción

El trabajo que se presenta a continuación tiene como finalidad describir y analizar los objetos matemáticos relacionados con el teorema fundamental del cálculo, incluyendo allí el límite, la derivada y la integral. Desde una breve recopilación histórica de los mismos hasta una formalización actual de dichos objetos o cuando menos la forma en que son presentadas en el aula.

Por otra parte, el trabajo no pretende solo describir los objetos matemáticos y analizarlos, sino que presenta una propuesta didáctica hacia un re-descubrimiento del teorema fundamental del cálculo, tanto en la primera parte del teorema como en la segunda parte del mismo y que busca que se dote de un nuevo significado al mismo.

En ese sentido el trabajo se divide en cuatro marcos, en los cuales se apoya la propuesta didáctica que se presenta en otro capítulo del presente trabajo. El primer marco que se presenta es el de antecedentes, en el que se realiza una recopilación de algunos textos relacionados directamente con el teorema, así como también una sucinta revisión histórica. El segundo marco es el matemático, en él se plasman los objetos matemáticos necesarios para la correcta comprensión del teorema, incluyendo lo presentado en tres libros de texto universitarios. El tercero es el marco tecnológico, el cual está enfocado en las implicaciones del uso de herramientas tecnológicas en el aula y su uso en contextos didácticos para una mejor significación de algunos objetos matemáticos. Por último, el trabajo presenta un cuarto marco, el didáctico; en él se brinda, de manera global, los elementos sobre cómo abordar la enseñanza de objetos del cálculo necesarios para el re-descubrimiento del teorema desde la propuesta presentada. Además, se abordan algunas dificultades a tener en cuenta para el análisis de dicha propuesta de enseñanza.

En un capítulo aparte se encuentra la propuesta didáctica, en la cual se presentan el diseño de dos actividades con su respectiva justificación a la luz de lo presentado en los marcos de referencia. Posteriormente se realiza el análisis de los resultados de las actividades antes mencionadas que fueron aplicadas a un grupo de estudiantes de un programa de formación inicial de profesores de matemáticas. Por último se exponen las conclusiones y sugerencias obtenidas del desarrollo y análisis del trabajo.

Justificación

El teorema fundamental del cálculo relaciona los dos campos básicos del trabajo del análisis matemático, el cálculo diferencial y el integral. La importancia que tiene este teorema se ve, en muchas ocasiones, reducida a un procedimiento de verificación dejando oculta su importancia dentro del campo del análisis tal y como Newton y Leibniz lograron presentarlo a la comunidad matemática de su tiempo. La mayoría de las secuencias didácticas presentadas en textos escolares parten de la presentación de la derivada a través del problema con la recta tangente y el cálculo integral desde la determinación de áreas bajo la curva, (Stewart, 2012; Larson, 2010), dejando como vínculo entre los dos campos el teorema fundamental del cálculo.

Por otra parte, históricamente, se ha presentado el teorema fundamental del cálculo enunciado en dos partes; una referente a “la derivada de una integral” (o derivada e integral como “procesos” inversos) y otra referida al cálculo de áreas o integrales de manera más eficaz, sin tener que recurrir a sumas reiteradas de pequeños rectángulos y luego haciendo el paso al límite.

Teniendo en cuenta la dificultad que se presenta al entender este concepto matemático a nivel universitario, evidenciado a lo largo del proceso académico llevado por parte de los autores, se pretende desarrollar una actividad o una serie de actividades, propuesta inicialmente para un curso de Cálculo Integral, de un programa de formación inicial de profesores de matemáticas, donde, a partir del uso de conceptos geométricos previos, se re-descubra de manera intuitiva en qué consiste el teorema fundamental del cálculo y se pueda establecer una relación comprensiva del mismo, es decir se lo dote de un significado para su proceso de aprendizaje.

Es importante resaltar el deseo que se tiene con el diseño de las actividades de lograr que el estudiante descubra por sí mismo, el papel fundamental que cumple este teorema en el cálculo. Para dicho descubrimiento es importante que en la enseñanza se haga algo más que demostrar el teorema. De este modo, se generó el interés de los autores para considerar una mejor manera de abordar el teorema fundamental del cálculo, procurando así una interiorización del mismo o cuando menos que se dé una aproximación más significativa.

Para los autores es importante el uso de tecnología en el diseño e implementación de las actividades, pues permite que los estudiantes puedan explorar, conjeturar, y estimar; ya que estos procesos, entre otros, son necesarios en el aprendizaje, y según autores como Tall (1992), Vinner y Heershkowitz (1980) y Dreyfus (1991), ya que fortalecen el desarrollo del Pensamiento Matemático Avanzado (PMA) y por lo tanto la compresión de la matemática en sí misma.

Objetivos

El presente trabajo pretende entonces generar una secuencia de actividades que permitan dotar de un significado al teorema fundamental del cálculo, así se formulan los siguientes objetivos para el mismo.

Objetivo General

Diseñar una secuencia de actividades con el fin de generar que los estudiantes de los primeros cursos de un programa de formación inicial de profesores de matemática, y en particular de la Licenciatura en Matemáticas la Universidad Pedagógica Nacional, redescubran y den significado al teorema fundamental del cálculo.

Objetivos específicos

- Proponer actividades donde sea necesario relacionar las áreas de las figuras geométricas con el concepto de integral.
- Implementar las TIC, principalmente mediante el uso de applets en entornos de geometría dinámica, para facilitar la visualización de las funciones y sus respectivas integrales.
- Generar un entorno de exploración que permita resignificar el enunciado general del teorema fundamental del cálculo.

1. Antecedentes

Con el fin de enriquecer el trabajo que se va a llevar a cabo, se indagaron diversas fuentes entre las cuales se encuentran algunos documentos que vale la pena destacar, pues son de importancia para desarrollar cada uno de los marcos que se proponen. Particularmente, y siendo consecuentes con el enfoque de la propuesta del Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional de Bogotá- Colombia; el cual sugiere la presencia de elementos disciplinares (propios de las matemáticas o de la educación matemática), que se denominaran marco matemático; elementos didácticos, que se mencionaran como marco didáctico y elementos del uso de las tecnologías de la educación e información, que se llamará marco tecnológico.

Para el desarrollo del marco matemático y teniendo en cuenta que el teorema fundamental del cálculo se ha presentado a la comunidad matemática y a los estudiantes desde hace mucho tiempo es importante analizar algo del contexto histórico del mismo. En la tesis doctoral, *"El teorema fundamental del cálculo: un estudio sobre algunos aspectos, fórmulas y métodos relacionados con su aplicación"*, Ponce (2013), menciona que a pesar de que muchas veces se parte de la errónea idea de creer Newton y Leibniz fueron los creadores del cálculo y su formalización, existen múltiples versiones preliminares del teorema fundamental del cálculo que habían partido de conceptos como la recta tangente y áreas bajo la curva. Reseña que Isaac Barrow en 1669 publicaba sus "*lecciones geométricas*", donde logró establecer una relación entre las cuadraturas (áreas bajo las curvas) y las tangentes, siendo así el primero en descubrir y demostrar la naturaleza inversa entre los problemas ya mencionados que actualmente se conocen como el teorema fundamental del cálculo. A pesar de ello, Barrow no logró hacer un uso eficaz de su descubrimiento, pues no desarrolló completamente su idea.

Tal como se mencionó anteriormente, Leibniz y Newton lograron, de manera independiente, la formalización de la relación existente entre el área bajo las curvas y las rectas tangentes a funciones; y por ello Ponce (2013) menciona la contribución específica de cada uno de ellos. Los trabajos de Leibniz, que datan de 1675, abordan el estudio de las curvaturas y desarrollan la integración y la diferenciación. Leibniz fue el que incorporó los símbolos que se conocen actualmente para derivar y para integrar "d" y "$\int$" y de algún modo los introdujo con un sentido de operadores funcionales. Finalmente, en el año 1693 publicó un artículo llamado

"*Acto Eruditorum*" donde reduce el problema de las cuadraturas, que se encontraba vigente en esa época, a encontrar una curva con una "regla de tangencia". Lo que diferenció el trabajo de Leibniz del de Barrow fue que no solo dio un resultado geométrico, sino que utilizó de manera analítica el cálculo que él mismo había inventado.

Por su parte, Newton se encontraba desarrollando numerosas investigaciones para la misma época, sin embargo, a diferencia de Leibniz, no publicaba todos sus resultados ya que se encontraba trabajando en muchos campos de las ciencias paralelamente, principalmente en física y matemáticas. Los primeros avances respecto al teorema son presentados por Newton datan del año 1711 y otros incluso sólo se conocieron después de su muerte, pero están fundamentados en su trabajo *"De analysi per aequationes numero terminorum infinitas"* de 1669.

Desde 1748 hasta 1860 se fue formalizando el teorema fundamental del cálculo por matemáticos como la italiana Mari Gaetana Agnesi, los franceses Lacroix, Cauchy y De Freycinet y el irlandés Lardner, entre otros. Como puede apreciarse el teorema fundamental del cálculo se volvió un problema central de la comunidad científica del siglo XVII y hasta la primera mitad del XIX.

En cuanto al marco didáctico este documento también resulta útil pues en él se presentan algunas sugerencias metodológicas y dificultades en torno a la enseñanza del teorema fundamental del cálculo en la educación superior, lo cual es importante para cumplir el objetivo general propuesto en el presente trabajo. Teniendo en cuenta que en dicho documento se menciona la importancia del uso de la tecnología para el cálculo de algunas funciones primitivas, dicha mención es enriquecedora para el marco tecnológico que se presentará en esta propuesta, pues uno de los objetivos específicos es el uso de la tecnología para el desarrollo de las actividades.

Otro documento a destacar en los antecedentes es *"Una propuesta de acercamiento alternativo al teorema fundamental del cálculo"* elaborada por Robles, Tellechea & Font (2014). En ella, es posible reconocer algunos elementos básicos para construir el marco matemático, ya que se presentan algunas consideraciones matemáticas y los conceptos importantes que se han trabajado en el cálculo y que llevaron a poder descubrir y formular el teorema fundamental del cálculo. En cuanto al marco didáctico, el artículo aporta una manera de diseñar la secuencia de actividades para lograr una mejor comprensión del teorema fundamental del cálculo, justificadas teóricamente.

Por su parte, en la tesis doctoral: *"La enseñanza y aprendizaje del cálculo integral en entorno computacional: actitudes de los estudiantes hacia el uso del programa de cálculo simbólico"*, Depool (2004) presenta como objetivo principal el diseñar, implementar y evaluar un módulo instruccional para la enseñanza del concepto de integral definida en estudiantes de primer curso de ingeniería, y analizar las actitudes de los estudiantes frente a las matemáticas y el aprendizaje con un software o en concreto con el uso de las TIC. El estudio experimental se centró en torno a dos ámbitos, el primero afectivo y el segundo cognitivo. En ese sentido el primero es analizar las actitudes de los estudiantes hacia las matemáticas, el uso de ordenadores y el aprendizaje con DERIVE ®. En el segundo, se determina la comprensión del concepto de la integral definida por parte de los estudiantes.

Teniendo en cuenta que la segunda parte del teorema fundamental del cálculo se encuentra estrechamente relacionado con lo que se denomina la integral definida, el documento anterior aporta principalmente información necesaria para el diseño de las propuestas, en concreto de la segunda parte de la misma que será presentada posteriormente. A su vez aporta al marco tecnológico, teniendo en cuenta que el estudio experimental se centró en torno a la actitud de los estudiantes hacia las matemáticas y en concreto con el uso de las TIC y cómo se modifican las mismas en un entorno tecnológico.

Finalmente, Pochulu, Font & Rodríguez (2013), en su documento *"Criterios de diseño de tareas para favorecer el análisis didáctico en la formación de profesores"* analizan las actividades de diseño y rediseño de tareas efectuadas por profesores de matemáticas durante un ciclo formativo. El ciclo que comprende seis fases: (a) seminario virtual de 10 semanas de duración, (b) encuentro presencial inicial donde se presentan los diseños de tareas, y al mismo tiempo, se realizan rediseños y ajustes en virtud de los análisis didácticos realizados, (c) implementación de la secuencia de tareas, (d) selección de algunos episodios de las clases implementadas (a partir de registros de videos) (e) análisis presencial de los episodios de las clases y (f) encuentro presencial final donde se analizaron episodios de clase y se reflexiona sobre el proceso antes mencionado. Pochulu, Font & Rodríguez (2013) resaltan que la competencia en el análisis didáctico se logra desarrollar al diseñar, aplicar y valorar secuencias de aprendizaje, mediante técnicas de análisis didáctico y criterios de calidad, para establecer ciclos de planificación implementación, valoración y plantear propuestas de mejora.

Por otra parte, introducen el concepto de “caracterización de tarea profesional” como tareas que son propuestas a los profesores o futuros profesores con el objetivo de que realicen análisis didácticos con base en sus conocimientos, creencias, experiencias previas, o bien utilizando herramientas teóricas que van emergiendo en su formación.

Los documentos mencionados ofrecen un panorama global que aporta al diseño de las actividades que se proponen, implementan y analizan en el presente trabajo de grado, ya que evidencian los elementos teóricos fundamentales a considerar, pero además develan los elementos para facilitar el análisis didáctico y a tener en cuenta en la caracterización de tarea profesional.

2. Marco Matemático

Teniendo en cuenta las necesidades tanto de los autores del trabajo que diseñan las actividades como de los estudiantes, quienes solucionan cada una de ellas, se construye este marco matemático, con el apoyo de textos universitarios como (Spivak, 1988), (Apostol, 1988) y (Stewart, 2012) y asumiendo un orden conceptual en que son desarrollados cada uno de los conceptos y definiciones necesarios y que de alguna forman deben estar en el sustento de la propuesta desde el campo disciplinar.

2.1. Función

Función es uno de los conceptos más importantes de las ramas de la matemática, y está presente tanto en el cálculo como en la teoría de conjuntos. Sin embargo, no es tan evidente asignarle una definición y por esa razón en (Spivak, 1988, p.49) se le asigna una "definición provisional" la cual es:

"Una función es una regla que asigna a ciertos números reales un número real".

Esta definición está considerada como intuitiva ya que es el proceso que se hace al tener una función, es decir al tener la función x^2 todos los números reales se elevarán al cuadrado y así se les asignará un nuevo número. Spivak (1988) aclara que no en todos los casos es posible que dicha regla pueda ser aplicada para todos los números y que los números que son finalmente asignados se conocen actualmente como dominio de la función. Además de definir la función es importante hablar acerca de su notación pues la notación correcta para dicho concepto es $f(x)$ lo que significa que se usará la regla con f al cual se le asigna un número x la lectura es "$f\ de\ x$".

Dicho lo anterior, es posible pensar en que las funciones de pueden operar entre ellas, es decir que se pueden sumar restar, multiplicar y dividir, al realizar dichas operaciones bastará con operar sus imágenes, es decir el número que se asigna. Sin embargo, dado que no toda *"asignación"*, en los términos descritos, es una función, es importante tener una definición formal y clara de lo que ésta es, por tal razón (Spivak, 1988, p.60) la define formalmente de la siguiente manera:

"Una función es una colección de pares de números con la siguiente propiedad: sí (a, b) y (a, c) pertenecen a la colección, entonces $b = c$; en otras palabras, la colección no debe contener dos pares distintos con el mismo primer elemento".

2.2. Límite

El concepto del límite es, quizás sin dudarlo, el concepto más difícil del cálculo infinitesimal ya que es una noción de una función que va al infinito, es decir que es una noción de infinitud, lo cual genera bastantes dificultades para su comprensión. En (Spivak, 1988, p.107). Una vez más intentan explicar dicho concepto con una definición provisional en la cual se describe el proceso que se realiza con el mismo, lo cual no significa que sea su definición formal. La definición provisional para el límite se describe a continuación

"Una función f tiende hacia el límite l cerca de a, si se puede hacer que $f(x)$ esté tan cerca como queramos de l haciendo que x esté suficientemente cerca de a pero siendo distinto de a".

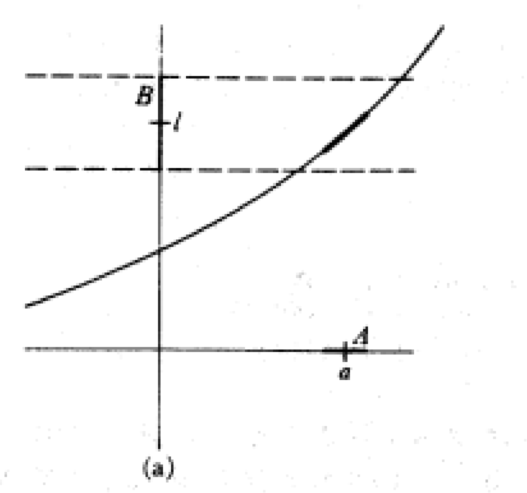


Figura 1. Spivak, 1988, Definición provisional de límite,Gráfica,p.107

En la figura 1, se puede identificar que el hecho de que $f(x)$ esté en el intervalo B cuando x está en el intervalo A, es decir que queda entre las rectas horizontales, eso significa que la función $f(x)$ tiende a l cerca de a.

La definición formal resulta ser compleja. Sin embargo, su significado se resume en lo mencionado anteriormente, en (Spivak, 1988, p.118). Se presenta como:

"La función f tiende hacia el límite l en a significa: para todo $\epsilon > 0$ existe algún $\delta > 0$ tal que, para todo x, si $0 < |x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - l| < \varepsilon$".

2.3. Continuidad

El concepto de la continuidad de una función está estrechamente relacionado con el límite de dicha función en un punto, basta con pensar cuando el límite de una función x tiende a b es la imagen de la función $f(x) = f(b)$.

Es posible que suceda siempre y cuando la función esté definida en $x = b$, sin embargo, no siempre sucede, por esa razón se decidió diferenciar las funciones que cumplen con ello o no como funciones continuas o no continuas. Intuitivamente una función es continua cuando no tiene interrupciones o saltos en su gráfica, la definición formal de función continua que se presenta en (Spivak, 1988, p.142) es la siguiente:

"La función f es continua en a si $lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ "

Hasta el momento tan solo se ha hablado de que una función es continua en un punto, sin embargo, es posible que una función sea o no continua en un intervalo (a, b) o en un intervalo cerrado $[a, b]$, la definición en ese caso en Spivak (1988, p.147). Es:

1. *"f es continua en x para todo x de (a, b)".*
2. $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$ y $\lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)$.

2.4. Cotas superiores e inferiores

El concepto de cotas superiores e inferiores está presente en algunos de los teoremas más importantes del cálculo infinitesimal, en los cuales se mencionan tanto la continuidad como las cotas superiores e inferiores de las funciones, dichos teoremas carecen de importancia para el trabajo que se desea realizar acá, sin embargo, el concepto de cotas superiores e inferiores es importante, puesto que más adelante se abordarán con fines didácticos particularmente para acotar sumas de rectángulos. De esa manera se definen a continuación las cotas superiores e inferiores tal como se presentan en (Spivak, 1988, p.171).

"Un conjunto A de números reales se dice que es acotado superiormente si existe un número x tal que$x \geq a$ Para todo a que pertenece a A. Un número x con esta propiedad se dice que es cota superior de A"

A pesar de que la definición menciona conjuntos numéricos esta propiedad se cumple para cualquier conjunto. (Spivak, 1988, p.172). Se conoce como supremo al menor número de las cotas superiores es decir que " x es supremo de A si cumple que:

1. x es cota superior de A
2. Si y es una cota superior de A entonces $x \leq y$"

En cuanto a las cotas inferiores (Spivak, 1988, p.173). La define como:
"*Un conjunto A de números reales se dice que es acotado inferiormente si existe un número x tal que $x \leq a$ Para todo a que pertenece a A Un número x con esta propiedad se dice que es cota inferior de A".*
Se conoce como ínfimo al mayor número de las cotas inferiores es decir que x es ínfimo de A si cumple que:

1. x es cota inferior de A
2. Si y es una cota inferior de A entonces $x \geq y$.

2.5. Derivada

Tal como se ha mencionado la derivada es uno de los dos conceptos centrales del cálculo junto con la integral. Si bien todos los conceptos que se han mencionado hasta ahora son parte fundamental de la disciplina, dichos conceptos sólo son una preparación para las ideas generales que se presentan en adelante, los conceptos que son verdaderamente característicos del cálculo infinitesimal.

Se destaca que las ideas mencionadas anteriormente proceden de una conexión íntima entre los conceptos matemáticos y ciertas ideas físicas. Muchos conceptos e incluso infinidad de teoremas pueden describirse en problemas físicos, pero tal como lo realizan en (Spivak, 1998, p.197) se definirán las ideas en forma matemática precisa y su significado se discutirá en términos de problemas matemáticos. Teniendo en cuenta que es una tarea compleja analizar las propiedades generales de las funciones, es importante cuando se empiezan a restringir las funciones, Puesto que las funciones continuas constituyen a una clase tan restringida, es natural que se hallen algunos teoremas no triviales para ellas, sin embargo los resultados más interesantes acerca de funciones solo se obtienen cuando se limita aún más la atención a funciones que son "razonables" y cuyo comportamiento es aún más regular que la mayor parte de las funciones continuas.

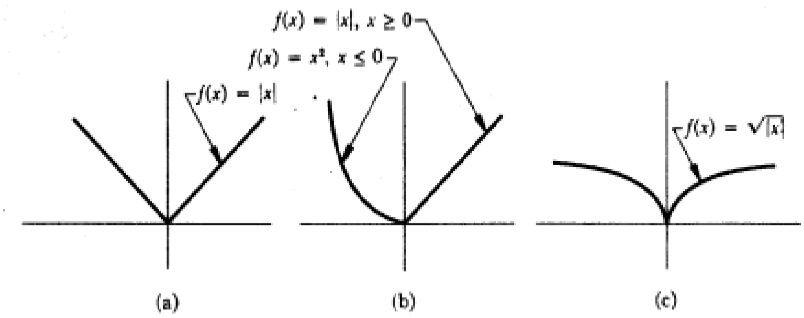


Figura 2 . Spivak, 1988, Comportamientos irregulares,Gráfica,p.197

La figura 2 muestra tres tipos de funciones continuas cuyos comportamientos son irregulares, dichas gráficas se encuentran *"quebradas"* en algún punto, en particular en $(0,0)$, las comillas se usan para precisar que el término de funciones quebradas no existe, simplemente en (Spivak, 1988, p.198) indican que una función es "quebrada" en un punto en el que no se puede trazar una recta tangente.

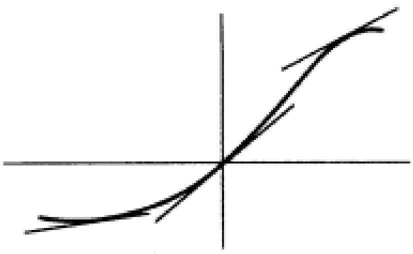


Figura 3 . Spivak, 1988, Rectas tangentes a una función,Gráfica,p.197

A diferencia de las gráficas de la figura 2, en la figura 3, se observa la gráfica de una función donde es posible trazar una recta tangente en cada punto de la gráfica. Es preciso, entonces, aclarar que definir la recta tangente como una recta que corta a la gráfica solamente una vez sería demasiado restrictiva y demasiado amplia a la vez, es decir inútil.

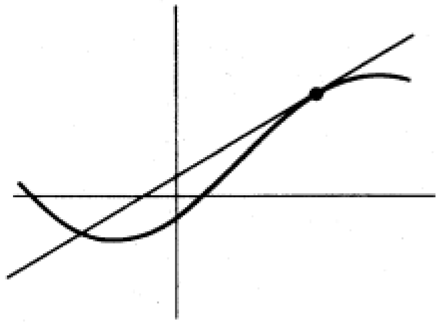


Figura 4 .Spivak, 1988, Definición restrictiva,p.198

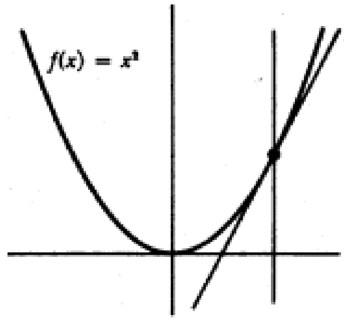


Figura 5. Spivak, 1988, Definición amplia,p.198

Con dicha definición es posible que se considere una recta como no tangente cuando en realidad lo es, tal como en la figura 4. De otra parte, se hace que la definición sea restrictiva, o que resulte posible que en una gráfica haya dos tangentes en cada uno de los puntos, como en la figura 5. Lo cual hace a la definición amplía e imprecisa.

Además, sería posible trazar más de una recta tangente en las gráficas de las funciones de la figura 2, lo cual contradice lo que se considera como funciones "quebradas" en (Spivak, 1988, p.198). Tal como se muestra en la figura 6.

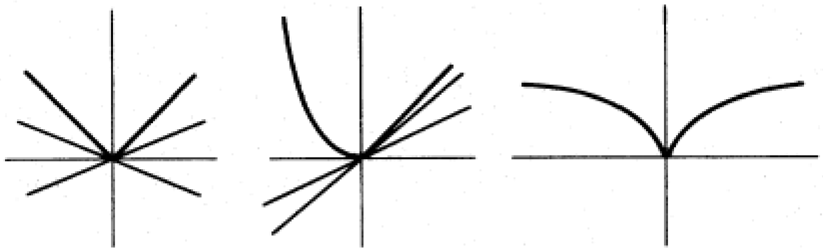


Figura 6 .Spivak, 1988, Contradicción de funciones "quebradas". , p.198

Una manera más eficaz de abordar la definición de tangente es a través de las rectas secantes y utilizando la notación de límite. Si $h \neq 0,$ entonces los dos puntos distintos $(a, f(a))$ y $(a + h, f(a + h))$ determinan una recta secante a la curva, tal como se observa en la figura 7, su pendiente se obtiene a partir de la definición de pendiente, la cual es:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Teniendo en cuenta la anterior definición y las coordenadas de la recta ya mencionada, su pendiente es:

$$m = \frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a}$$

Teniendo en cuenta las operaciones indicadas la pendiente queda expresada finalmente como:

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

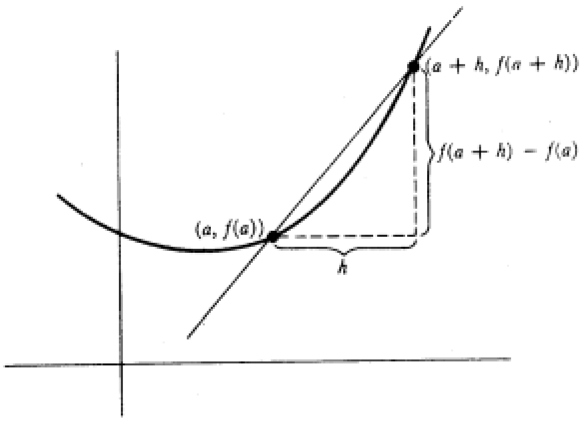


Figura 7. Spivak, 1988, Recta secante a una curva, p.199.

Por otra parte se sabe que por $(a, f(a))$ pasan infinitas rectas secantes a la curva, sin embargo la recta tangente resulta ser el límite, en algún sentido, de dichas rectas secantes tal como se observa en la figura 8, cuando h se aproxima a 0. Es posible que nunca se haya hablado de límites de rectas, sin embargo es posible hablar del límite de sus pendientes, finalmente la pendiente entonces de la recta tangente en $(a, f(a))$ debería ser

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \text{ conforme } h \to 0.$$

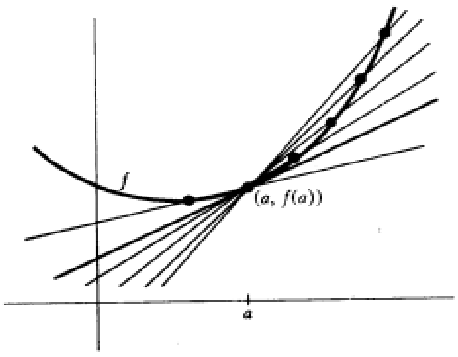


Figura 8. Spivak, 1988, Límite de las pendientes de las rectas secantes, p.199

Con lo mencionado anteriormente es posible hablar sobre la definición y algunos comentarios que se presentan en (Spivak, 1988, p.201)

"La función f es derivable en a si:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \quad existe.$$

En este caso el límite se designa por $f'(a)$ y recibe el nombre de derivada de f en a. (se dice también que f es derivable si f es derivable en a para todo a del dominio de f)."

El primer comentario que se hace es en realidad un añadido, ya que se define la recta tangente a la gráfica f en $(a, f(a))$ como la recta que pasa por dicho punto y tiene por pendiente $f'(a)$, lo cual quiere decir que la tangente en el punto $(a, f(a))$ solo está definida si f es derivable en a. El segundo comentario se refiere a la notación, el símbolo $f'(a)$ recuerda ciertamente la notación funcional. En efecto, para cualquier función f se designa por f' a la función cuyo dominio de todos los números a tales que f es derivable en a, el valor de a es

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Para ser precisos f' tendrá como parejas ordenadas los puntos

$\left(a \ , \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right)$ Para todo a que esté en el dominio de f y que el limite exista

Dicha función f'recibe el nombre de derivada de f. Esto hace que el concepto de tangencia sea un concepto local.

2.5.1. Derivada desde la física

El tercer comentario que se presenta en (Spivak, 1988, p.202). Es algo más extenso que los dos primeros ya mencionados anteriormente y hace referencia a la interpretación que tiene la derivada desde la física, ya que como se mencionó en el capítulo anterior las ideas ya presentadas se pueden describir en problemas físicos, Se considera una partícula que se mueve a lo largo de una recta, como se muestra en la figura 9. Sobre la cual se ha elegido un origen, y una dirección en la cual las distancias a partir del origen se escriben como números positivos, mientras que las distancias a partir del origen de los puntos de la otra dirección se escriben como números negativos. Sea $s(t)$ la distancia de la partícula al origen en el tiempo t.

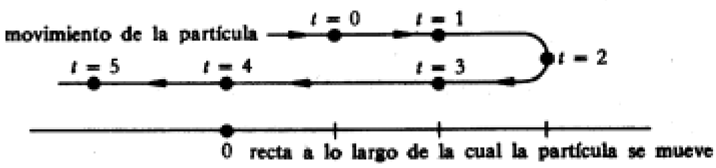


Figura 9. Spivak, 1988, Movimiento de la partícula,p.202

Debido a que la distancia está determinada para cada número t, es decir la partícula estará a una distancia del origen todo el tiempo, la situación física suministra automáticamente cierta función s. La gráfica de s indica la distancia de la partícula hasta el origen sobre el eje vertical, en términos del tiempo, indicado sobre el eje horizontal, como se muestra en la figura 10.

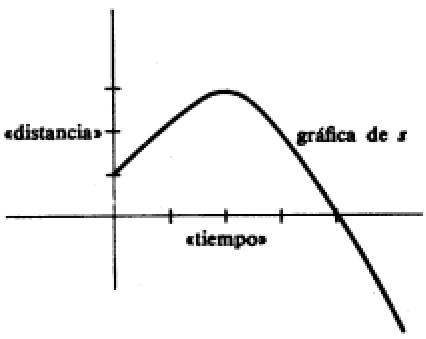


Figura 10. Spivak, 1988, Función movimiento de la partícula, p.202

El cociente $\frac{s(a+h)-s(a)}{h}$ tiene una interpretación física natural es la velocidad media de la partícula durante el intervalo de tiempo entre a y $a+h$. Para cualquier a, esta velocidad media depende por supuesto de h. Por otra parte, el límite

$$\lim_{h \to 0} \frac{s(a+h) - s(a)}{h}$$

Depende exclusivamente de a y existen importantes razones físicas para considerar dicho límite, ya que la definición para la velocidad instantánea de la partícula está sujeta a dicho límite, por esa razón la velocidad instantánea queda definida como $s'(a)$.

Es importante notar que la velocidad instantánea no corresponde a ninguna cantidad observable. Aunque no es justo decir que la velocidad instantánea no tiene nada que ver con la velocidad media, es preciso aclarar que la velocidad instantánea es decir $s'(t)$ no es $\frac{s(a+h)-s(a)}{h}$, para ningún h. Únicamente es el límite de las velocidades medias de la partícula cuando h tiende a 0. En ese sentido la noción de la derivada desde la física se entiende cómo "variación" ya sea de la posición en función del tiempo como en el ejemplo anterior o una variación de otra magnitud física en función del tiempo, o de una manera más general la variación de una magnitud en función de otra.

2.5.2. Derivación

Hasta aquí se ha mencionado la definición de la derivada y cómo se construyó dicha definición, pero más allá de eso (Spivak, 1988, p.227). Resalta que el proceso de hallar la derivada de una función recibe el nombre de derivación, y que por lo tanto es relevante pensar en el concepto de diferenciabilidad. Dado que para hallar la derivada de alguna función es necesario hacer un proceso laborioso a partir de su definición, es cierto que dicho proceso es válido para hallar la derivada de alguna función sin embargo a través del tiempo se han desarrollado múltiples teoremas con los cuales es posible derivar un gran número de funciones sin necesidad de recurrir a la definición de la derivada.

2.6. Integrales

A pesar de que ya se hablo acerca de la derivada, el cual es un concepto fundamental en el desarrollo del cálculo infinitesimal, sin embargo, no despliega toda su fuerza hasta que se alía con la integral, el segundo concepto fundamental del cálculo. Al principio, lo mencionado puede parecer una falacia, ya que cuando se menciona la derivada no se necesita la integral para su construcción o descubrimiento, sin embargo, una vez se estudie todo con respecto a la integral se apreciará con mayor claridad la conexión entre los dos conceptos fundamentales del cálculo antes mencionados.

Para definir la integral se suele hacer de una forma esencialmente complicada, ya que viene a formalizar un concepto que es aparentemente sencillo, e intuitivo: el área de una superficie. Sin embargo, la integral como función resulta un poco más difícil de formalizar ya que implica el manejo de familias paramétricas de funciones y no una función en particular a menos que sobre ella se establezca un conjunto de condiciones iniciales o de valores en la frontera.

En geometría se deducen las fórmulas para hallar áreas de muchas figuras planas, sin embargo, raramente se da una definición aceptable de área. El área de una región se define a veces como el número de cuadrados de lado uno que caben en la región sin que ellas se solapen. Pero dicha definición resulta inadecuada o insuficiente para todas las regiones con excepciones de las más simples. Por ejemplo, el círculo de radio 1 tiene por área el número irracional π, pero no es claro cuál es el significado de "π cuadrados". Incluso si se considera un círculo de radio $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$, cuya área es 1, resulta difícil explicar de qué manera un cuadrado de lado 1 puede llenar dicho círculo, ya no parece posible dividir el cuadrado de lado 1 en pedazos que puedan completar el círculo de alguna manera.

La integral por su parte se encarga de identificar áreas de algunas regiones muy especiales (ver figura 11): aquellas que están limitadas por el eje horizontal x, rectas verticales por $(a, 0)$ y $(b, 0)$, y la gráfica de una función f tal que $f(x) \geq 0$ para todo x del intervalo $[a, b]$. Dicha región se denota por $R(f, a, b)$. Cabe aclarar que las regiones incluyen rectángulos y triángulos, así como muchas otras figuras geométricas importantes.

El número que se asigna eventualmente como área de $R(f, a, b)$ recibe el nombre de integral de f sobre $[a, b]$. En realidad, la integral se define también para funciones que no satisfacen la condición $f(x) \geq 0$ para todo x en $[a, b]$. Si f es la función mostrada en la figura 12, la integral representa la diferencia entre las áreas de las regiones de sombreado claro y de sombreado fuerte ("área algebraica") de $R(f, a, b)$.

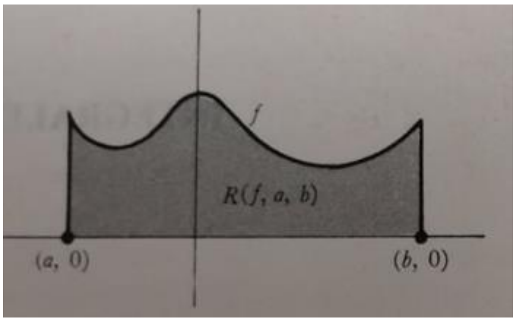


Figura 11. Spivak, 1988, área de figuras especiales ,p.346

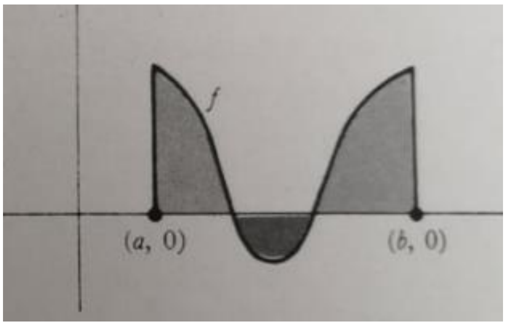


Figura 12. Spivak, 1988, área algebraica ,p.346

La idea de la definición se va a indicar a partir de la figura 13. El intervalo $[a, b]$ se ha dividido en cuatro subintervalos

$$[t_0, t_1]\ [t_1, t_2]\ [t_2, t_3]\ [t_3, t_4]$$

Por medio de números t_0, t_1, t_2, t_3, t_4 de tal forma que

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4 = b$$

Sobre el primer intervalo $[t_0, t_1]$ la función f tiene el valor mínimo m_1 y el valor máximo M_1 ; análogamente, sea m_1, el valor mínimo y M_1 el valor máximo de f sobre el intervalo i-esimo $[t_{i-1}, t_i]$.

$$s = m_1[t_1 - t_0] + m_2[t_2 - t_1] + m_3[t_3 - t_2] + m_4[t_3 - t_4]$$

La suma anterior representa el área total de los rectángulos que quedan dentro de la región $R(f, a, b)$. Mientras que por otro lado la siguiente suma representa el área total de los rectángulos que contienen la región $R(f, a, b)$.

$$S = M_1[t_1 - t_0] + M_2[t_2 - t_1] + M_3[t_3 - t_2] + M_4[t_3 - t_4]$$

Lo que se debe observar como guía en el intento de definir el área A de $R(f, a, b)$ será la observación de que A debe satisfacer

$$s \leq A\ y\ \ A \leq S$$

Y además siempre será verdad, cualquiera que sea la división que se haga del intervalo $[a, b]$. Es de esperar que las condiciones determinen el área A.

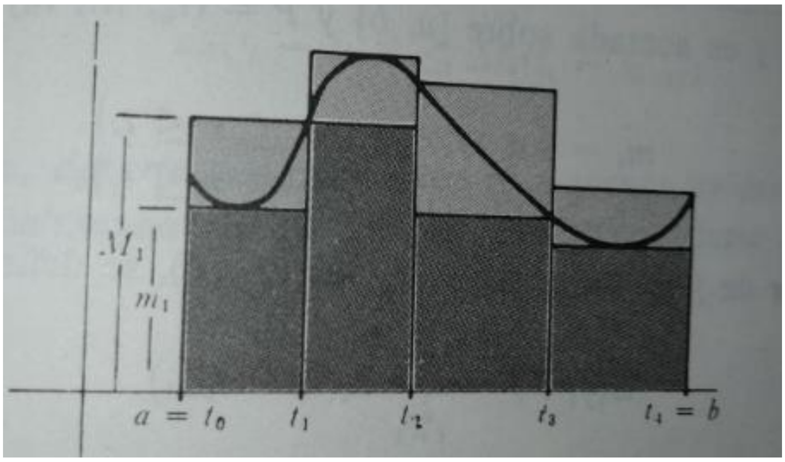


Figura 13. Spivak, 1988, idea de la definición de área, p.347.

Teniendo en cuenta lo mencionado anteriormente en (Spivak, 1988, p.347) plantea definiciones y procesos para llegar a la formalización del área, en ese sentido mencionan la siguiente definición para particiones:

"Sea $a < b$. Recibe el nombre de partición del intervalo [a, b] toda colección finita de puntos de [a, b], de los cuales uno es a y otro es b."

Los puntos de una partición pueden ser numerados de la misma manera que se ha hecho anteriormente, es decir $t_0, \dots, t_n$ de manera que

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b.$$

En ese sentido se ha generalizado la numeración de una partición y siempre se hace una numeración de este tipo.

Con lo enunciado anteriormente, para la figura 13, se hace necesaria una definición para las sumas que se mencionaron, en ese sentido en (Spivak, 1988, p. 348) se hace la siguiente definición:

"Supongamos que f es acotada sobre $[a, b]$ y $P = \{t_0, \dots, t_n\}$ es una partición de $[a, b]$. Sea

$$m_i = \inf\ \{f(x): t_{i-1} \le x \le t_i\}$$

$$M_i = \text{Sup}\ \{f(x): t_{i-1} \le x \le t_i\}$$

La suma inferior de f para P, designada por $L(f, p)$ se define poniendo

$$L(f, P) = \sum_{t=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}).$$

La suma superior de f para P, designada por $U(f, P)$, se define poniendo

$$U(f,P) = \sum_{t=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1})."$$

Las sumas inferior y superior corresponden a las sumas s y S del ejemplo de la figura 13 representan las áreas totales de los rectángulos que quedan por debajo y por encima de la gráfica f. Cabe resaltar que las sumas fueron definidas sin recurrir al concepto de área.

Spivak (1998) aclara, pertinentemente, que la condición de que f esté acotada sobre $[a,b]$ es esencial para que los m_i y M_i queden definidos. Y también aclara que fue necesario definir a m_i y M_i como ínfimos y supremos, en vez de máximos y mínimos, ya que no se exige que f sea continua.

Es evidente que en relación con las sumas inferiores y superiores: Si P es una partición cualquiera, entonces

$$L(f,P) \leq U(f,P)$$

Se aclara que las letras L y P corresponden a las iniciales de las palabras inglesas “lower” (inferior) y “upper” (superior).

Sin embargo, hay una relación que no se hace tan evidente y para ello se enuncia y demuestra el siguiente teorema en (Spivak, 1988, p. 352).

Teorema

Sean $P_1 y$ P_2 particiones de $[a,b]$, y sea una función acotada sobre $[a,b]$. Entonces

$$L(f,P_1) \leq U(f,P_2).$$

Teniendo en cuenta dicho teorema Spivak (1988) considera y aclara que la región (R,f,a,b) es demasiado irrazonable para merecer que se le asigne un área. En ese sentido se intenta disfrazar la irrazonabilidad con la siguiente definición, la cual se encuentra en (Spivak, 1988, p. 355).

“*Una función f acotada sobre $[a,b]$ es integrable sobre $[a,b]$ si* $sup\,\{L(f,P)$: *Pes una partición* $[a,b]\} = inf\,\{U(f,P)$: *P es una partición de* $[a,b]$*}.*

En este caso, este número común recibe el nombre de integral de f sobre $[a,b]$ y se denota por

$$\int_a^b f.$$

La integral $\int_a^b f$ recibe el nombre de área de R (f, a, b) cuando $f(x) \geq 0$ para todo x de $[a,b]$.

En ese sentido es posible afirmar que si f es integrable entonces

$$L(f, P) \leq \int_{a}^{b} f \leq U(f, P) \; para\ todas\ las\ particiones\ P\ de\ [a, b].$$

Además $\int_a^b f$ es el único número con esta propiedad.

La definición antes mencionada únicamente prepara, pero no resuelve, el problema planteado, no se conoce cuales funciones con integrables ni tampoco como se halla la integral de f sobre $[a, b]$ cuando f es integrable, sin embargo para el trabajo acá propuesto basta tener claro que la integral es el área de las funciones sobre un intervalo $[a, b]$.

Por otra parte, en (Stewart, 2012, p.372) se hace una definición para la integral definida de la siguiente manera:

"Si f es una función continua definida para $a \leq x \leq b$, dividimos el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos de igual ancho $\Delta x = \frac{(b-a)}{n}$. Sean $a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n = b$ los puntos de estos subintervalos y sean $x^*{}_1, x^*{}_2, \ldots, x^*{}_n$ los puntos muestras en estos subintervalos, de modo que $x^*{}_1$ se encuentre en el i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Entonces la integral definida de f desde a hasta b, es

$$\int_{a}^{b} f\,(x) dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x^*{}_i)\,\Delta x"$$

La definición anteriormente mencionada se llama suma de Riemann, en honor del matemático alemán Bernhard Riemann (1826-1866), indica que la integral definida de una función integrable puede aproximarse dentro de cualquier grado de exactitud mediante la suma de Riemann, la diferencia en el abordaje radica, esencialmente, en que por sumas superiores e inferiores el valor de la integral, si existe, queda siempre acotada por un único número real del cual se sabe que siempre estará por encima de cualquier suma finita L y por debajo de cualquier suma finita U; en tanto que por las sumas de Riemann sólo se tendría esa certeza si el comportamiento de la función es monótono en el intervalo de integración.

2.7. Teorema fundamental del cálculo

A continuación, se presenta un resumen de lo que se encuentra en algunos textos como (Spivak, 1998); (Stewart, 2012) y (Apóstol, 1988) con respecto al teorema fundamental del cálculo, teniendo en cuenta que se divide en dos partes.

2.7.1. Primera parte del teorema fundamental del cálculo

Es suficiente con lo que se ha mencionado en los apartados anteriores para intuir que si f es integrable, entonces $F(x) = \int_a^b f$ también es continua; es natural preguntarse qué ocurre si la función original f es continua. El resultado es que F es derivable (y su derivada es particularmente sencilla), a partir de dicha información se enuncia el siguiente teorema, el cual es el más importante del cálculo infinitesimal, por ello recibe su nombre y se enuncia en (Spivak, 1988, p.399) de la siguiente manera:

"Teorema (Primer teorema fundamental del cálculo infinitesimal)

Sea f integrable sobre $[a.b]$ y defínase F sobre $[a,b]$ por

$$F(x) = \int_a^b f$$

Si f es continua en c de $[a,b]$, entonces F es derivable en c, y

$$F'(c) = f(c)$$

(Si $c = a \; o \; b,$ entonces $F'(c)$ se entiende que representa la derivada por la derecha o por la izquierda de F.)"

La demostración del primer teorema fundamental del cálculo infinitesimal que se enunció anteriormente se presenta a continuación tal como se hace en (Spivak, 1988, p.400).

Demostración

Se supone que c está en (a,b); es fácil suplir las modificaciones necesarias para $c = a$ o $c = b$. Por definición.

$$F'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{F(c+h) - F(c)}{h}$$

La demostración se divide en dos casos, en el primero se supone que $h > 0$. Entonces

$$F(c+h) - F(c) = \int_c^{c+h} f.$$

En ese sentido se define m_h y M_h como se muestra a continuación y en la figura:

$$m_h = \inf \; \{f(x): c \leq x \leq c+h\}$$
$$M_h = \sup \; \{f(x): \; c \leq x \leq c+h\}.$$

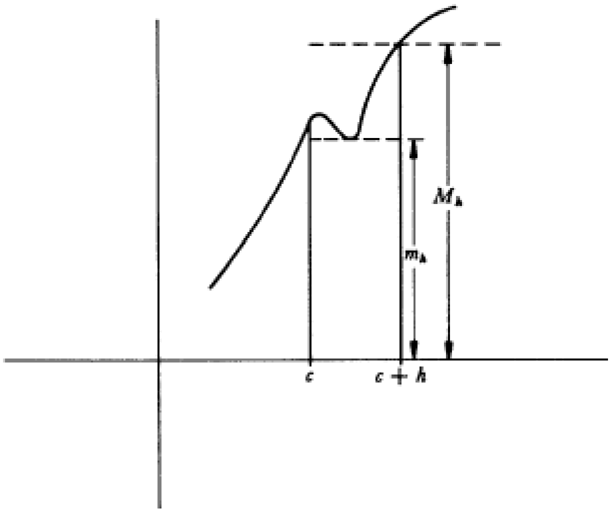


Figura 14. Spivak, 1988, ínfimo y supremo para la demostración, p.400.

Para continuar con la demostración, teniendo en cuenta como se definen los ínfimos y supremos se tiene que

$$m_h \cdot h \leq \int_c^{c+h} f \leq M_h \cdot h$$

Por tal razón al dividir h en la anterior desigualdad y al sustituir la integral por su equivalencia como diferencia, escrita anteriormente se obtiene.

$$m_h \leq \frac{F(c+h) - F(c)}{h} \leq M_h$$

El segundo caso es suponer que $h \leq 0$, basta con hacer un cambio en pocos detalles del razonamiento. Sea

$$m_h = \inf \{f(x): c + h \leq x \leq c\}$$

$$M_h = \sup \{f(x): c + h \leq x \leq c\}.$$

Entonces

$$m_h \cdot (-h) \leq \int_{c+h}^{c} f \leq M_h \cdot (-h).$$

por ser

$$F(c+h) - F(c) = \int_c^{c+h} f = -\int_{c+h}^{c} f.$$

se obtiene

$$m_h \cdot h \geq F(c+h) - F(c) \geq M_h \cdot h.$$

Debido a que $h < 0$, la división por h invierte de nuevo la desigualdad, obteniendo el mismo resultado que en el caso anterior:

$$m_h \leq \frac{F(c+h)-F(c)}{h} \leq M_h$$

La anterior desigualdad se cumple para cualquier función integrable, sea o no continúa. Sin embargo, puesto que f es continúa en c, se cumple que:

$$\lim_{h\to 0} m_h = \lim_{h\to 0} M_h = f(c),$$

Lo cual demuestra finalmente que

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(c+h)-F(c)}{h} = f(c)$$

A pesar de que el teorema ya mencionado trata solamente de la función obtenida al variar el límite superior de integración, se menciona en (Spivak, 1988, p.402) que un sencillo artificio indica lo que ocurre cuando se varia el límite inferior. Si se define G por

$$G(x) = \int_x^b f,$$

entonces

$$G(x) = \int_a^b f - \int_a^x f.$$

En consecuencia, si f es continua en c, entonces

$$G'(x) = -f(c).$$

En ese sentido se puede afirmar con toda seguridad que el teorema se extiende al caso en que la función

$$F(x) = \int_a^x f$$

la cual está definida incluso para $x < a$. En ese caso se puede escribir

$$F(x) = -\int_x^a f,$$

de tal modo que si $c < a$ se tiene

$$F'(c) = -\big(-f(c)\big) = f(c)$$

Exactamente el mismo resultado que daba antes, es importante resaltar que en cualquier caso la derivabilidad de F en c queda asegurada por la continuidad de f en c. Sin embargo, el teorema es interesante cuando f es continua en todos los puntos de $[a,b]$. En ese caso

$$F' = f.$$

Desde otro punto de vista, se encuentra en (Apostol, 1988, p.247), que abordan el teorema fundamental del cálculo de manera diferente ya que se afirma que la relación entre el proceso de integración y la derivación es semejante a la relación que se encuentra en "elevar una cantidad al cuadrado" y "extraer la raíz cuadrada de una cantidad", en ese sentido se hace la aclaración pertinente de que si se eleva un número positivo al cuadrado y se le extrae la raíz cuadrada positiva del resultado, finalmente se obtiene el número original. Teniendo en cuenta dicha información se asegura que análogamente, si se calcula la integral de una función continua f se obtiene una nueva función que después de derivada reproduce la función original f.

Un ejemplo de ello es $f(x) = x^2$, una integral indefinida A de f queda:

$$A(x) = \int_c^x f(t)\,dt = \int_c^x t^2\,dt = \frac{x^3}{3} - \frac{c^3}{3}$$

Donde c es una constante. Derivando la expresión anterior se obtiene: $A'(x) = x^2 = f(x)$. A partir del ejemplo que se ilustra anteriormente, se enuncia el teorema en (Apostol, 1988, p.247) de la siguiente manera:

"*Primer teorema fundamental del cálculo. Sea f una función integrable en $[a, x]$ para cada x de $[a, b]$. Sea c tal que $a \leq c \leq b$ y definamos una nueva función a del siguiente modo:*

$$A(x) = \int_c^x f(t)\,dt \;\; si\; a \leq x \leq b.$$

Existe entonces la derivada $A'(x)$ en cada punto x del intervalo abierto (a, b) en el que f es continua, y para tal x tenemos

$$A'(x) = f(x)."$$

Para comenzar se encuentra una interpretación geométrica del teorema, la cual sugiere por qué el teorema debe ser cierto; luego se hace una demostración analítica.

Para la interpretación geométrica es necesario el apoyo de una gráfica, tal como se presenta a continuación.

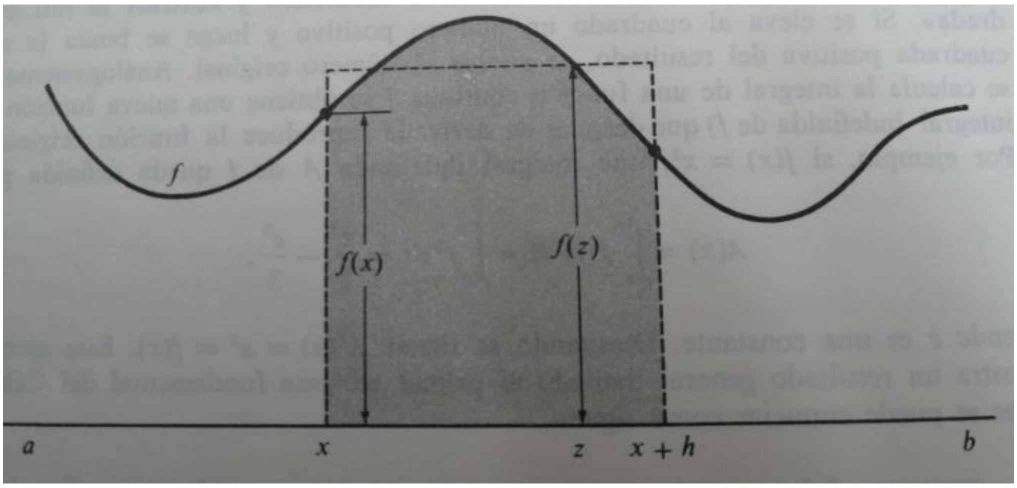


Figura 15. Apostol, 1988, interpretación geométrica primer teorema fundamental del cálculo, p.248.

La figura 15 muestra la gráfica de una función f en un intervalo $[a, b]$, además h es positivo y se cumple que

$$\int_x^{\infty+h} f(t)dt = \int_c^{x+h} f(t)dt - \int_c^{x} f(t)dt = A(x+h) - A(x).$$

Con la ayuda del teorema del valor medio se afirma que

$$A(x+h) - A(x) = hf(z), donde\ x \leq z \leq x+h$$

En ese sentido se obtiene que

$$\frac{A(x+h) - A(x)}{h} = f(z)$$

Teniendo en cuenta lo que se construye hasta ahora y debido a que $x \leq z \leq x+h$, se encuentra que $f(z) \to f(x)$ cuando $h \to 0$ con valores positivos. Sin embargo para valores negativos se razona de manera similar, en ese sentido $A'(x)$ existe y es igual a $f(x)$.

En (Apostol, 1988, p. 249) se encuentra la demostración analítica, en la cual empiezan de la siguiente manera:

Sea x un punto en el que f es continua y con x fija, se obtiene:

$$\frac{A(x+h) - A(x)}{h}$$

Para demostrar el teorema se ha de probar que el cociente tiende a $f(x)$ cuando $h \to 0$. El numerador es:

$$A(x+h) - A(x) = \int_c^{x+h} f(t)dt - \int_c^{x} f(t)dt = \int_x^{x+h} f(t)\ dt.$$

Si en la última integral se escribe $f(t) = f(x) - [f(t) - f(x)]$ resulta:

$$A(x+h) - A(x) = \int_x^{x+h} f(x)dt + \int_x^{x+h} [f(t) - f(x)]dt = hf(x) + \int_x^{x+h} [f(t) - f(x)\ dt$$

De donde se obtiene

$$\frac{A(x+h) - A(x)}{h} = f(x) + \frac{1}{h}\int_x^{x+h} [f(t) - f(x)]dt.$$

Por tal razón, para completar la demostración es necesario demostrar que

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} [f(t) - f(x)]dt = 0$$

Para esa demostración es necesario hacer uso de la continuidad de f en x. Si se designa $G(h) = f(x) + \frac{1}{h}\int_x^{x+h}[f(t) - f(x)]dt$. Se trata de demostrar que $G(h) \to 0$ cuando $h \to 0$. Aplicando la definición de límite, se ha de probar que para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$G(h) < \varepsilon\ siempre\ que\ 0 < h < \delta$$

En virtud de la continuidad de f en x , dado un ε existe un número positivo δ tal que:

$$|f(t) - f(x)| < \frac{1}{2}\ \varepsilon$$

Teniendo en cuenta que

$$x - \delta < t < x + \delta$$

Si se elige h de manera que $0 < h < \delta,$ entonces cada t en el intervalo $[x, x+h]$ satisface que $x - \delta < t < x + \delta$ y por esa razón se verifica $|f(t) - f(x)| < \frac{1}{2}\ \varepsilon.$ Se verifica entonces para cada t de ese intervalo.

Finalmente aplicando la siguiente propiedad $\left|\int_x^{x+h} g(t)dt\right| \leq \left|\int_x^{x+h} g(t)dt\right|$, cuando $g(t) = f(t) - f(x)$, y lo antes construido se obtiene la siguiente expresión.

$$\left|\int_x^{x+h} |f(t) - f(x)|dt\right| \leq \left|\int_x^{x+h} |f(t) - f(x)|dt\right| \leq \int_x^{x+h} \frac{1}{2}\varepsilon\ dt \leq \frac{1}{2}h\varepsilon < h\varepsilon$$

al dividir la anterior expresión por h se verifica que $G(h) < \varepsilon\ siempre\ que\ 0 < h < \delta.$ Si $h < 0,$ un razonamiento similar demuestra se verifica para $0 < |h| < \delta,$ lo cual completa la demostración del teorema.

Para finalizar con la primera parte del teorema fundamental del cálculo se hace un resumen de lo plasmado en (Stewart, 2012), en el cual se resalta que el nombre del teorema fundamental del cálculo es pertinente y apropiado ya que establece una fuerte conexión entre las dos ramas del cálculo: el cálculo diferencial y el cálculo integral. Se hace una importante recopilación histórica entre el problema que conllevo a la construcción del cálculo diferencial (recta tangente) y el cálculo integral (área), además se le da crédito principal a Newton y Barrow como principales artífices de descubrir la conexión entre dichos problemas aparentemente poco relacionados, a diferencia de los dos textos anteriores en este caso la discusión sobre el teorema fundamental del cálculo nace a raíz de un ejemplo en particular.

Según Stewart (2012) si se define una función

$$g(x) = \int_0^x t\,dt = \frac{x^2}{2}$$

Se observa que $g'(x) = x$; es decir que $g' = f$. En otras palabras, si g se define como la integral de f, entonces g resulta ser, aunque sea en este caso, una anti derivada de f.

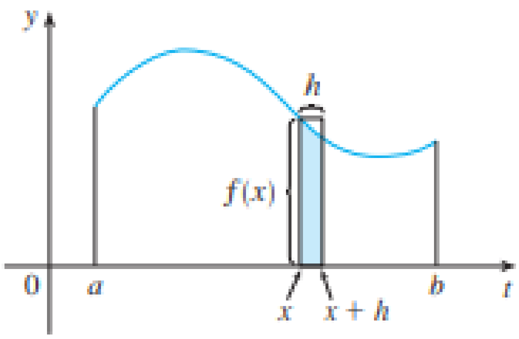


Figura 16 . Stewart, 2012, Área de la gráfica con rectángulos, p.388.

A fin de calcular $g'(x)$ a partir de la definición de derivada, en primer lugar se observa que, para $h > 0$, $g(x+h) - g(x)$ se obtiene el resultado de las áreas; por tanto, el área bajo la gráfica de f de x a $x + h$, tal como se muestra en la figura 16. Para h pequeñas, se puede observar que el área es aproximadamente igual al área del rectángulo con altura $f(x)$ y ancho h:

$$g(x+h) - g(x) \approx hf(x)$$

Por tal razón

$$\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \approx f(x)$$

En consecuencia, se espera que

$$g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = f(x)$$

A partir de dicho planteamiento, en (Stewart, 2012, p.388) se asegura que esto corresponde a la primera parte del teorema fundamental del cálculo el cual se enuncia de la siguiente manera:

"Teorema fundamental del cálculo, parte 1

Si f es continua sobre $[a, b]$, entonces la función g definida por

$$g(x) = \int_a^x f(t) \quad a \leq x \leq b$$

Es continua sobre $[a, b]$ y derivable sobre (a, b) y $g'(x) = f(x)$."

A continuación, se presenta la demostración del teorema que se enunció anteriormente se presenta tal como se hace en (Stewart, 2012, p.388).

Para empezar se supone que x y $(x+h)$ están en (a, b), entonces

$$g(h+x) - g(x) = \int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\ dt$$

$$= \left(\int_a^x f(t)\ dt + \int_x^{x+h} f(t)\,dt\right) - \int_a^x f(t)\ dt$$

$$= \int_x^{x+h} f(t)\ dt$$

Y de este modo, para $h \neq 0$

$$\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\ dt$$

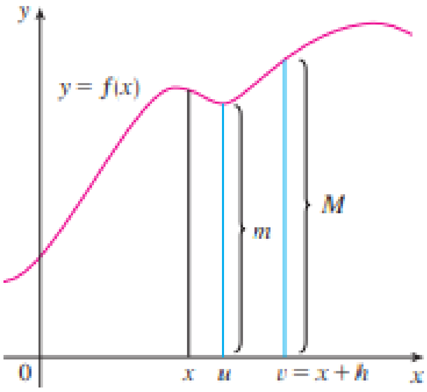


Figura 17. Stewart, 2012, Apoyo teorema del valor extremo, p.388

Por ahora se supone que $h > 0$. Debido a que f es continua sobre $[x, x+h]$, el teorema del valor extremo demostrado en (Stewart, 2012, p.286) establece que hay números u y v en $[x, x+h]$ tales que $f(u) = m$ y $f(v) = M$, donde m y M son los valores mínimos y máximo absolutos de f sobre el intervalo $[x, x+h]$, tal como se muestra en la figura 17.

Teniendo en cuenta algunas propiedades de las integrales se obtiene

$$mh \leq \int_{x}^{x+h} f(t)\ dt \leq Mh$$

Lo que significa que

$$f(u)h \leq \int_{x}^{x+h} f(t)\ dt \leq f(v)h$$

Dado que $h > 0$, se puede dividir la desigualdad entre h.

$$f(u) \leq \frac{1}{h}\int_{x}^{x+h} f(t)\ dt \leq f(v)$$

Entonces, con lo antes ya mencionado se reemplaza la expresión por la siguiente desigualdad:

$$f(u) \leq \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \leq f(v)$$

En caso de que $h < 0$ se obtiene la anterior desigualdad de manera muy similar, entonces sea $h \rightarrow 0$. Entonces $u \rightarrow x$ y $v \rightarrow x$, ya que u y v quedan entre x y $x + h$. Por tal razón.

$$\lim_{h\to 0} f(u) = \lim_{u\to x} f(u) = f(x) \quad y \quad \lim_{h\to 0} f(v) = \lim_{v\to x} f(u) = f(x)$$

Para finalizar aclarando que f es continua en x. De acuerdo con la desigualdad mencionada anteriormente teoremas de la comprensión demostrado en (Stewart, 2012, p.105) se obtiene que

$$g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f(x)$$

Si $x = a \text{ o } b$, entonces el límite anterior se puede interpretar como un límite unilateral, entonces con el teorema ya demostrado en (Stewart, 2012, p.158) se demuestra que g es continua sobre $[a, b]$.

Teniendo en cuenta la notación de Leibniz para derivadas, en (Stewart, 2012, p. 389) se expresa el teorema fundamental del cálculo como

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)\, dt = f(x).$$

Se quiere evidenciar con lo expuesto anteriormente, que, si bien el teorema tiene un único enunciado, la forma en que este puede ser presentado, abordado y formalizado puede diferir en varios aspectos y

2.7.2. Segunda parte del teorema fundamental del cálculo

En (Spivak, 1988, p.403) se enuncia un colorario que, según el autor, reduce los cálculos de integrales a una trivialidad.

Colorario

Si f es continua sobre $[a, b]$ y $f = g'$ para alguna función g, entonces

$$\int_a^b f = g(b) - g(a).$$

Sea

$$F(x) = \int_a^x f.$$

entonces $F' = f = g'$sobre $[a, b]$. En consecuencia, existe un número c tal que

$$F = g + c.$$

El número c puede calcularse fácilmente: se observa que

$$0 = F(a) = g(a) + c,$$

De modo que $c = -g(a)$; así pues,

$$F(x) = g(x) - g(a).$$

Esto se cumple, en particular, para $x = b$. Así pues,

$$\int_a^b f = F(b) = g(b) - g(a).$$

La demostración del teorema puede hacer que parezca inútil, sin embargo, el colorario es tan útil que es llamado con frecuencia como el segundo teorema fundamental del cálculo infinitesimal, el teorema se enuncia en (Spivak, 1988, p.405) como se presenta a continuación.

“Teorema 2 (Segundo teorema fundamental del cálculo infinitesimal)

Si f es integrable sobre $[a,b]$ y $f = g'$ para alguna función g, entonces

$$\int_a^b f = g(b) - g(a)\,."$$

Sea $P = \{t_0, \dots, t_n\}$ una partición cualquiera de $[a,b]$. Según el teorema del valor medio existe un punto x_i en $\{t_{i-1}, t_i\}$ tal que

$$\begin{aligned} g(t_i) - g(t_{i-1}) &= g'(x_i)(t_i - t_{i-1}) \\ &= f(x_i)(t_i - t_{i-1}). \end{aligned}$$

Si

$$\begin{aligned} m_i &= \inf\ \{f(x): t_{i-1} \leq x \leq t_i\}, \\ M_i &= \sup\ \{f(x): t_{i-1} \leq x \leq t_i\}, \end{aligned}$$

Entonces evidentemente

$$m_i(t_i - t_{i-1}) \leq f(x_i)(t_i - t_{i-1}) \leq M_i(t_i - t_{i-1}),$$

Es decir,

$$m_i(t_i - t_{i-1}) \leq g(t_i) - g(t_{i-1}) \leq M_i(t_i - t_{i-1}).$$

Sumando estas ecuaciones para $t = 1, \dots, n$ se obtiene

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1})\ \leq g(b) - g(a) \leq \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1})$$

De manera que

$$L(f,P) \leq g(b) - g(a) \leq U(f,P)$$

Para cualquier partición P. lo cual significa que

$$g(b) - g(a) = \int_a^b f.$$

Si se estudia como presenta la segunda parte del teorema fundamental del cálculo en (Apostol, 1988, p.250) se observa que antes enuncian un teorema que lo nombran como teorema de la derivada nula y se escribe a continuación, como se presenta.

"Teorema de la derivada nula. Si $f'(x) = 0$ para cada x en un intervalo abierto I, es f constante en I."

Apostol (1988) Afirma que cuando el teorema de la derivada nula se utiliza combinado con el primer teorema fundamental del Cálculo, conduce directamente al segundo teorema fundamental. Además, antes de enunciar el segundo teorema fundamental define una función primitiva o antiderivada, como se va a presentar a continuación:

Una función P se llama primitiva (o anti derivada) de una función f en un intervalo abierto I si la derivada de P es f, esto es $P'(x) = f(x)$ para todo x en I.

Se aclara que se dice que P es una primitiva de f y no es única, ya que también lo es $P + k$ para cualquier constante k. Recíprocamente dos primitivas P y Q de la misma función f sólo pueden diferir en una constante porque su diferencia $P - Q$ tiene la derivada

$$P'(x) - Q'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

Para toda x en I y por tanto, según el teorema de la derivada nula, $P - Q$ es constante en I.

Por otra parte, el primer teorema fundamental del cálculo afirma que se puede construir una primitiva de una función continua por integración. Cuando se combina esa información con el hecho de que dos primitivas de la misma función tan sólo difieren en una constante, se obtiene el segundo teorema fundamental del cálculo, que se enuncia de la siguiente manera:

"Segundo teorema fundamental del cálculo. Supongamos f continua en un intervalo abierto I, y sea P una primitiva cualquiera de f en I. Sea P una primitiva cualquiera de f en I. Entonces, para cada c y cada x en I, tenemos

$$P(x) = P(c) + \int_c^x f(t)\, dt\,."$$

Para demostrar el teorema se pone $A(x) = \int_c^x f(t)\,dt$. Debido a que f es continua en cada x de I, el primer teorema fundamental indica que $A'(x) = f(x)$ para todo x de I. Es decir, A es una primitiva de f en I. Puesto que dos primitivas de f pueden diferir tan sólo en una constante, debe ser $A(x) - P(x) = k$. Para una constante k. Cuando $x = c$, implica que $-P(x) = k$, ya que $A(c) = 0$. Por consiguiente, $A(x) - P(x) = -P(c)$ de lo que se obtiene.

$$P(x) = P(c) + \int_c^x f(t)\,dt.$$

El teorema finalmente indica cómo se encuentra una primitiva P de una función continua f. Integrando f desde un punto fijo c a un punto arbitrario x y sumando la constante $P(c)$ se obtiene $P(x)$. Pero la importancia real del teorema radica en que si se pone la conclusión del teorema de la siguiente manera:

$$\int_c^x f(t)dt = P(x) - P(c).$$

Se ve claramente que se puede calcular el valor de una integral mediante una simple substracción si se conoce una primitiva P. El problema de calcular una integral se ha transformado en otro problema, el de hallar la primitiva P de f.

Finalmente se analiza cómo se aborda el teorema en (Stewart, 2012, P.391), cabe aclarar que a diferencia de las otras propuestas no se tiene en cuenta algún teorema o colorario previo para enunciarlo, cómo se presenta a continuación:

"Teorema fundamental del cálculo, parte 2

Si f es continua sobre $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Donde F es una antiderivada de f; es decir, una función tal que $F' = f$."

Para demostrar el teorema Stewart (2012) realiza un procedimiento similar a lo que presentó Apostol (1988), sin embargo, se presenta el proceso de la siguiente manera:

Sea $g(x) = \int_a^x f(t)dt$. De acuerdo con la parte 1, se sabe que $g'(x) = f(x)$; es decir, g es una anti derivada de f. Si Fes cualquier otra antiderivada de f sobre $[a, b]$, entonces apoyándose en un colorario demostrado en (Stewart, 2012, p.288), la diferencia entre F y g es una constante:

$$F(x) = g(x) + C$$

Para $a < x < b$. Pero tanto F como g son continuas sobre $[a, b]$ y de este modo, al obtener los límites de ambos miembros de la anterior expresión (Cuando $x \to a^+$ y $x \to b^-$), se observa que también se cumple cuando $x = a$ y $x = b$.

Si se hace $x = a$ en la fórmula para $g(x)$, se obtiene

$$g(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$$

Entonces, al aplicar la expresión obtenida a partir del colorario demostrado en (Stewart, 2012, p.288) con $x = b$ y $x = a$, se tiene

$$F(b) - F(a) = [g(b) + C] - [g(a) + C]$$
$$= g(b) - g(a) = g(b) = \int_a^b f(t)dt$$

La conclusión que se realiza a nivel general acerca de la parte 2 del teorema fundamental es que establece que si se conoce una anti derivada F de f, entonces se puede evaluar $\int_a^b f(x)\, dt$ simplemente calculando la diferencia de los valores de F en los extremos del intervalo $[a, b]$.

3. Marco Tecnológico

Teniendo en cuenta que la tecnología ha sido primordial para la humanidad, y se ha tornado casi que indispensable en el mundo contemporáneo, y más hoy cuando la pandemia generada por el Covid-19 obliga al distanciamiento social y ello a su vez a virtualizar muchas de nuestras realidades, se debe resaltar la importancia que tiene en el aula de clases presenciales o virtuales y en especial en la educación matemática, tal como se menciona en (Castiblanco, 2000, p.21).

Se resalta que el Ministerio de Educación Nacional de Colombia notó la baja presencia, por no decir ausencia, para el año 2000, de herramientas tecnológicas incorporadas en el currículo. Por esta razón, desarrolló una fase piloto de un proyecto llamado "Incorporación de nuevas tecnologías al currículo de las matemáticas de la educación básica y media en Colombia"; este proyecto fue desarrollado en 60 instituciones educativas (44 colegios de educación básica secundaria y media y 16 escuelas normales superiores) de 17 departamentos y 3 ciudades. El principal propósito de dicho proyecto era mejorar la calidad de enseñanza de las matemáticas y la capacidad de aprendizaje mediante los recursos expresivos que la tecnología pone al alcance de las instituciones educativas.
Castiblanco (2000) plantea que, otro aspecto importante del proyecto ya mencionado, era que además de que el docente profundice en sus conocimientos también cuestione y reconozca el papel fundamental que tienen las nuevas tecnologías en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Para organizar el currículo se plantearon tres ejes a partir de lo planteado por MEN (1998), los procesos de aprendizaje, los conocimientos básicos y el contexto, teniendo en cuenta dichos ejes es cuando se reconoce el papel fundamental de las nuevas tecnologías para dinamizar y propiciar los cambios ya mencionados en el currículo, en ese sentido Castiblanco (2000) afirma que para profundizar las reflexiones sobre el uso de las nuevas tecnologías se han desarrollado investigaciones desde 1998 con los aportes y asesoría de Luis Moreno Armella, del CINVESTAV de México, y para quien las ideas centrales de la investigación debían ser:

- La mediación de las herramientas computacionales.
- Los signos y los sistemas de representación ejecutables.
- El conocimiento como conocimiento situado.

A continuación, se presenta una interpretación sobre lo que se menciona en (Castiblanco, 2000, p.22) de cada una de las ideas centrales de la investigación desarrollada para para profundizar las reflexiones sobre el uso de las nuevas tecnologías.

La mediación de las herramientas computacionales.

En esta idea central se resalta la importancia de la interacción del estudiante con sus instrumentos materiales o simbólicos, ya que, en todos los casos el conocimiento producido depende directamente de los instrumentos de mediación que se utilicen para su construcción, es decir que las herramientas tecnológicas reciben un papel decisivo en la construcción de un conocimiento, pues actúa como un instrumento de mediación para construirlo.

Los signos y los sistemas de representación ejecutables.

Teniendo en cuenta que la producción de signos y de representaciones es crucial para el estudio de un conocimiento y para gran parte de la cognición y apropiación del contenido matemático, los sistemas de representación se convierten en un instrumento de mediación en la construcción del contenido matemático y como ya se mencionó la construcción de dicho contenido depende directamente del instrumento de mediación.

En ese sentido se debe ser conscientes de que cuando se habla de un contenido matemático sin pensar en las formas de representación o a través de ellas el trabajo se hace muy difícil ya que es a través de las representaciones que las personas se acercan cognitivamente a los objetos y particularmente a los objetos matemáticos. Por ejemplo, cuando se habla de una función, es posible pensar en la gráfica, su fórmula o en la tabla, y es en este momento cuando la tecnología toma la importancia que se merece, ya que existen software que poseen mejores características que los sistemas de representación hechos con lápiz y papel, además permite ventajas a la hora de realizar una transnumeración entre los tipos de representaciones de una función en menos tiempo y con mayor eficacia.

El conocimiento como conocimiento situado.

Para nadie es un secreto que el contexto, la interacción social del estudiante, forma parte fundamental de la construcción del contenido matemático, desde esa perspectiva se puede afirmar que los instrumentos computacionales otorgan una direccionalidad al proceso de construcción del conocimiento, eso implica que para la selección y diseño de estrategias de enseñanza se facilita con instrumentos computacionales o tecnológicos.

En resumen, la tecnología brinda múltiples beneficios en la educación matemática; por dicha razón las actividades que se proponen en este trabajo son principalmente apoyadas en la tecnología, en especial en el software Geogebra®. Por ésta razón se analiza la pertinencia del software a partir de lo expuesto en (Ruiz, Ávila, & Villa-Ochoa ,2013, p.453) quienes concluyen que este programa resulta ser una herramienta útil en el aula ya que permite que los estudiantes muestren a través de la práctica los conocimientos adquiridos, además es un excelente instrumento de mediación, pues posee innumerable beneficios para la educación matemática, entre ellos exploración, conjeturación y validación de conjeturas así como favorecer la integración de diferentes registros de representación.

De otra parte, Castro, Cáliz, & Fuentes (2013) presentan tres escenarios o actividades particulares en el software Geogebra®, en los cuales se busca que los estudiantes relacionen el cálculo diferencial e integral para que sea de fácil la comprensión del teorema fundamental del cálculo. En ese sentido se busca generar escenarios dinámicos que mediante la representación geométrica de la derivada y de la integral los estudiantes generen una comprensión "intuitiva" del teorema fundamental del cálculo, razón por la cual las actividades propuestas más adelante se centran principalmente en la geometría, también se hace uso de diversas herramientas tecnológicas para poder proponer conceptos matemáticos nuevos. Por último, cabe resaltar que Castro, Cáliz, & Fuentes, (2013) afirman que en los MEN de Buenos Aires se indica que Geogebra® es un software que le posibilita al estudiante visualizar los conceptos matemáticos, realizar construcciones libres o dirigidas y/o explorar e investigar hipótesis.

Adicionalmente Castro, Cáliz, & Fuentes, (2013) aclaran que la secuencia de actividades que se proponen en son los llamados escenarios de aprendizaje, los cuales son fundamentalmente desarrollados con Geogebra®, y tienen como principal objetivo una construcción comprensiva del teorema fundamental del cálculo a partir de la relación entre la representación gráfica de la derivada (recta tangente) y la integral (como área bajo la curva). Para el desarrollo de la secuencia se proponen cuatro fases como referencia para su implementación.

Fase 1: Problematizar una situación comprensión, sentido y representación del problema. Es relevante en esta fase la secuencia entre las preguntas que se propongan, por tal razón son importantes las preguntas en las cuales se relacionan preguntas anteriores.

Fase 2: La exploración visual y empírica. En esta fase es importante la exploración para lograr una buena comprensión del problema propuesto en la fase anterior.

Fase 3: Búsqueda de múltiples métodos de solución. Lo relevante en esta fase es la búsqueda de diversos métodos para resolver el problema propuesto en la primera fase.

Fase 4: Episodio de reflexión. En esta fase es importante verificar cómo se resolvió el problema propuesto en la primera fase, para de esa manera interiorizar los conceptos matemáticos presentes en las fases anteriores.

Finalmente se mencionan tres escenarios en los que Castro, Cáliz, & Fuentes, (2013) buscan una comprensión "intuitiva" del teorema fundamental del cálculo teniendo en cuenta las cuatro fases ya mencionadas, para así lograr un buen desarrollo de dichos escenarios.
Primer escenario: Se construye una actividad que permite ver la relación de la función derivada como la pendiente de una recta tangente en un punto a y la gráfica de dicha curva.
Segundo escenario: Se propone una construcción que posibilita la visualización de la integral definida de una función en un intervalo $[a, b]$y la gráfica de la función original para que se pueda observar la relación que existe entre ellas.
Tercer escenario: Se propone una construcción en la que se relaciona la gráfica de la función integral, con la gráfica de la función derivada con la gráfica de la función original para de algún modo complementar lo que se conoce como procesos inversos.

Para terminar cabe resaltar que Castro, Cáliz, & Fuentes, (2013) afirman que durante el desarrollo de los tres escenarios propuestos guían a los estudiantes a través de preguntas, justificando así la importancia que recae sobre las fases que se mencionan anteriormente, dichas preguntas orientadoras se encuentran en (Castro, Cáliz, & Fuentes, 2013, p. 591).

4. Marco Didáctico

Para la construcción de este marco, se tienen en cuenta dos grandes aspectos. El primero, con relación al diseño de las actividades y la justificación desde la parte geométrica que propone Turégano (1998) por otra parte, lo escrito por Artigue (1995) en relación con el análisis de los problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos en el aprendizaje y la enseñanza de los principios del cálculo.

Inicialmente para el contexto didáctico se parte de lo disciplinar y su relación con la forma en que se estructura el pensamiento matemático. Una de las formas en el proceso de integración es presentado, tal vez la manera más convencional, como la operación o proceso inverso de la diferenciación y cómo se expone en (Turégano, 1994, p. 128) de ésta forma los estudiantes pueden ver que el teorema fundamental del cálculo, tiende un puente conceptual entre la integración con la diferenciación y con ello entre dos estructuras matemáticas aparentemente independientes. De otra parte, se suele entonces abordar la “integral definida”, que algunos denominan simplemente como “la integral” para diferenciarlo del proceso de anti derivar y que es denominado usualmente como “integral indefinida”, desde un proceso asociado a una continuación de la formalización y generalización de la noción de área que los estudiantes han venido construyendo desde los primeros años de escolaridad. Así va realizando una transición conceptual que busca que el individuo se familiarice, inicialmente, con el cálculo de áreas de superficies de curvas cerradas conocidas y que de cierto modo podrían denominarse convencionales a un estudio generalizado de aquéllas que están limitadas por una curva sólo por arriba o por abajo o por dos curvas en general (problema del área entre curvas).

Según lo propuesto en (Turégano, 1998, p.236) “el estudiante llega a convencerse realmente de que hay un número que mide el área”, y que de alguna manera este proceso puede resultar un poco más intuitivo aun cuando no se tenga formalizada el área matemáticamente. Sin embargo, el pensar que se puede asociar una función a dicho valor dependiendo de un parámetro que puede ir cambiando puede resultar más difícil, pero tal vez menos que la idea de límite (ni qué decir de su definición formal) que resulta indispensable al momento de determinar la pendiente de una recta tangente a una curva dada, en un punto de la misma, a partir de la pendiente de una cuerda o recta secante. Así se genera una tensión conceptual adicional y es la tangencia local versus la tangencia global, aspecto que, aunque no será abordado en el presente trabajo, pero no por ello se debe dejar de mencionar.

La introducción a la integral definida mediante su definición geométrica permite establecer una relación integral-medida que favorece la transferencia a otros contextos como es el caso de las aplicaciones. Así, se puede entender que siempre que se esté trabajando en un contexto que relaciona dos magnitudes continuas (o que eventualmente puedan ser tratadas como tal sin desvirtuar la realidad) y sea factible modelarla a través de una expresión algebraica se puede analizar la situación desde los contextos del cálculo diferencial y/o integral, y que ya sea la pendiente de la recta tangente en un punto dado o la acumulación de área bajo la curva de la función pueden tener o no una interpretación de dicho número (acompañado de unas unidades) en el contexto mismo del problema.

De otra parte, el poder tener una representación algebraica puede resultar insuficiente para conceptualizar el objeto matemático, de allí que al utilizar simultáneamente diferentes representaciones como la gráfica, tabular o verbal de los mismos, se favorece no sólo el tener un sistema de representaciones que aproxime al concepto, sino el establecimiento de conexiones entre ellas, siendo estas conexiones las que marcan las diferentes etapas del aprendizaje en los estudiantes, ya que como han manifestado numerosas corrientes de la didáctica de las matemáticas, el individuo se aproxima a los objetos matemáticos es a través de sus representaciones.

Un entorno que posibilita el manejo simultáneo de representaciones de los objetos matemáticos es el ordenador o más puntualmente los softwares que hoy en día están disponibles tanto en los computadores como en los teléfonos móviles y tabletas y que además se encuentran disponibles para ser descargados en los dispositivos o para ser trabajados online. Un caso particular como lo es el entorno de geometría dinámica y de cálculo simbólico como Geogebra ® evidencia el papel que juega la potencia visual en la conceptualización de objetos matemáticos, ya que ayuda a la formación y transformación de intuiciones y a la creación de imágenes del concepto, aun cuando estas inicialmente no sean las adecuadas, los errores cometidos estudiantes sirven para mejorar el aprendizaje y completar las imágenes del concepto, tratando de unirlas en un todo articulado.

Ahora bien, en el proceso de aprendizaje de los objetos matemáticos del cálculo, investigadores en didáctica de las matemáticas como Artigue (1995) han clasificado las dificultades de este proceso en tres grandes tipos, a saber:

- Aquellas asociadas con complejidades de los objetos básicos, como lo son números reales, sucesiones, funciones; y a la conceptualización de dichos objetos para iniciar una enseñanza del cálculo.
- Aquellas asociadas con la conceptualización y formalización de la noción del límite, el cual es el concepto que se considera como el centro del campo del cálculo. En esta categoría caben todos los procesos asociados con el paso al límite
- Aquellas vinculadas con relación a los modos de pensamiento puramente algebraicos, y a las especificidades del trabajo técnico en el cálculo. Por ejemplo, los algoritmos que son necesarios para la solución de objetos matemáticos.

Teniendo en cuenta que, para el diseño de las actividades propuestas en este trabajo, resulta relevante considerar cada una de las dificultades, ya que ellas aportan evidencias para caracterizar algunas formas de conceptualizar y dotar de significado los objetos matemáticos, en este caso al Teorema Fundamental del Cálculo, se presenta un análisis de estas desde la teoría de la didáctica de las matemáticas propuesta por Artigue (1995)

Dificultades asociadas con los objetos básicos del cálculo.

Artigue (1995) menciona que numerosas investigaciones muestran que para los estudiantes es un problema evidente el establecer las relaciones existentes entre los diferentes conjuntos de números, es decir los estudiantes comprenden que en los reales se encuentran otros conjuntos numéricos como los enteros, los decimales, los racionales, sin embargo, pueden construir relaciones inexactas entre ellos por ejemplo confundir los números reales y los números decimales o realizar operaciones dentro de los conjuntos numéricos de manera inadecuada. Otra de las dificultades es la asociación de los reales con la recta numérica, pues no corresponde necesariamente con la visión del continuo numérico y esto repercute en la conceptualización de muchos objetos matemáticos. En el caso de la determinación de la integral definida, asociada al área bajo la curva, se puede presentar un obstáculo en comprender si se requiere o no la condición de continuidad para que la función sea integrable en un intervalo y que implicaciones tiene esto.

Otro de los conceptos básicos del cálculo en el cual se tiene dificultades es el de función, ya que en algunas investigaciones se han observado dificultades con la identificación de lo que en realidad es una función, y se muestra una brecha entre las definiciones dadas por lo estudiantes y entre la clasificación de lo que es y no es una función y el tipo de funciones con el que se puede estar trabajando según el tipo de variables involucradas. Por otro lado, otras investigaciones se han centrado en la asociación entre la función y su fórmula o la asociación entre la función y su representación gráfica. Incluso aunque la enseñanza de las matemáticas ha evolucionado y los enfoques conjuntistas han desaparecido estas dificultades se mantienen presentes en el proceso de aprendizaje de los conceptos básicos del cálculo.

Artigue (1995) plantea que en los últimos años se han presentado muchos trabajos en donde a través de nuevas tecnologías se ha tratado de solventar dichas dificultades y aunque se han tenido muchos avances ha sido imposible solucionarlas y se siguen presentando, y esta afirmación parece continuar vigente y cobra más relevancia a la hora de asociar la función propiamente dicha, con otros conceptos como el de derivada y el de integral. Esta dificultad se acrecienta cuando se quiere diferenciar la derivada en un punto de la función derivada, o la integral en un intervalo dado de la función integral y se agudiza si se quiere manejar conceptos generales como diferenciabilidad e integrabilidad de una función.

Dificultades asociadas con la conceptualización de la noción del límite.

Al igual que en el apartado anterior, las investigaciones que se analizan en (Artigue, 1995) mencionan la evidente dificultad en la conceptualización de la noción del límite. Y se evidencia cómo las dificultades asociadas a la definición y formalización de este concepto repercuten en la conceptualización de otros ya que es el concepto de límite el centro del cálculo. Uno de los obstáculos epistemológicos que aparece es que relaciona al límite con el significado que se le da en el sentido común y que evoca el término del límite como una barrera intraspasable y no alcanzable, tal como una marca o un último término de un proceso, lo cual ayuda a reforzar concepciones propias de la convergencia. Desde el punto de vista algebraico “finito”, el principio de “continuidad” que propone Leibniz.

Artigue (1995) plantea que las dificultades que se presentan en torno a la noción del límite tienen que ver con su doble status operacional, lo que significa que los estudiantes consideran que al realizar un límite se hacen dos procesos diferentes uno que se efectúa sobre una variable y otro sobre los valores de la función.

En particular para el presente trabajo al abordar el teorema fundamental del cálculo y evaluar la integral definida se propone establecerlo a través de sumas, ya sea las de Riemann o por suma de cotas inferiores y superiores, la dificultad se puede presentar en el paso al límite de dichas sumas y que se presente una evidencia de que dicho límite existe.

Dificultades asociadas con la ruptura entre el álgebra y el cálculo

Existe una evidente relación entre el cálculo y el álgebra, ya que el análisis y desarrollo, no sólo de procesos asociados a la evaluación y cálculo de resultados, sino en la definición propia de los conceptos, se apoyan en procesos y conceptos algebraicos y por lo tanto quien aspire a tratar con cierto grado de facilidad y comprensión dichos conceptos matemáticos deberá tener competencias algebraicas.

Ser consciente de la ruptura que existe entre el pensamiento numérico y el algebraico que emerge en la enseñanza del álgebra no es suficiente pues, como lo señala Artigue (1995) falta incorporar investigaciones en las que se evidencie y analice la ruptura entre el álgebra y el cálculo ya que este paso ha sido poco tratado y es una de las principales dificultades asociadas con los procesos de enseñanza y aprendizaje del cálculo. En (Artigue, 1995, p.115) se cita como el trabajo realizado por Legrando quien ha sido uno de los pocos investigadores que apuntan a la ruptura antes mencionada en la enseñanza del cálculo a pesar de los casi 25 años que han pasado de la afirmación de Artigue, este aspecto sigue sin ser profundizado. En el presente trabajo se busca que mediante las argumentaciones presentadas ya sea en manera del lenguaje natural o del simbolismo algebraico, se puedan evidenciar algunos aspectos de esa ruptura.

Para lo anterior, en relación con el presente trabajo se debe tener en cuenta que en el álgebra se trabaja con demostraciones que apuntan al manejo de varias igualdades o con el tratamiento de ecuaciones y desigualdades, particularmente si se quiere establecer un acotamiento de la integral definida. Sin embargo, de una manera formal, en el cálculo no sucede de la misma manera, ya que si se quiere entrar en el campo de las demostraciones se requiere tener una comprensión que con frecuencia no se encuentra en el manejo usual de los estudiantes y en ocasiones ni de los profesores. Por ejemplo, para hacer demostraciones en cálculo no se trabaja con igualdades si no que se realiza un acotamiento que no necesariamente implica determinar la inecuación necesaria a satisfacer sino a la determinación de una vecindad que cumpla con lo que se pide. Las no distinciones entre estos dos aspectos hacen que se pueda llegar a consideran que el álgebra y el cálculo son exactamente lo mismo, y que lo único que se aporta son herramientas algorítmicas más sofisticadas.

Las realizaciones didácticas a nivel universitario

En este apartado se pretende tener en cuenta algunas realizaciones didácticas para ilustrar la diversidad de trabajos que se han llevado a cabo con respecto al cálculo y la complejidad de los problemas a resolver cuando se busca actuar directamente sobre los procesos de enseñanza. Algunas de las investigaciones que se han realizado con respecto a dichas realizaciones didácticas corresponden a un nivel universitario, y se han realizado especialmente en Francia, ya que se quieren mantener una relación entre las operaciones formales y los conceptos claves del cálculo, en particular se ha abordado la convergencia de sucesiones numéricas, procesos diferenciales e integrales y la enseñanza de las ecuaciones diferenciales.

Teniendo en cuenta que el objetivo principal de este trabajo está centrado en los procesos diferenciales e integrales, dichas realizaciones didácticas son las que se tienen en cuenta y se describen a continuación.

Procesos diferenciales e integrales

Algunas de las realizaciones didácticas que se han trabajado a nivel universitario en procesos diferenciales e integrales han sido desarrolladas por las comunidades de educadores matemáticos partiendo de las relaciones estrechas entre la física y las matemáticas y de los aspectos históricos que las relacionan. Artigue (1995) realizó una investigación con el objetivo de comprender el funcionamiento de la enseñanza de los dos procesos en dichas disciplinas y sus efectos sobre las concepciones que los estudiantes desarrollan frente a la derivación y la integración. Se logró determinar que, en el ciclo básico universitario, se tienen dos funciones:

- Una función de aproximación puramente local, es decir estudio específico de curvas, funciones, superficies, etc.
- Una función de aproximación lineal en pasos de lo local a lo global, es decir un estudio de leyes de variación, determinación o definición de magnitudes geométricas o físicas, etc.

Si bien es cierto las relaciones entre la física y la matemática se pueden establecer, esto no garantía que las principales dificultades que se presentan sean persistentes, así ocurre que los estudiantes usualmente piensan que hacer procedimientos de las integrales mecánicamente significa que saben cálculo integral, pero en general se puede verificar que, aunque sean hábiles en lo algoritmo no pueden dar cuenta de lo que significa. De una manera objetiva, en las integrales y en los procesos de derivación la dificultad usual es que se convierte en procesos de aproximación o de paso al límite y posiblemente esto se pueda evidenciar mucho más fácilmente cuando se presenta la derivada como la recta tangente a una curva, pero ya no resulta tan evidente al hacer la integral como una aproximación en el paso al límite de una suma. Adicionalmente se presenta otra dificultad cuando se tratan de presentar la integral y la derivada como procesos inversos, la cual es una dificultad que se pretende superar a partir del desarrollo de las actividades propuestas en este trabajo ya que son las dos formas del teorema fundamental del cálculo y lo que se denomina el teorema del cambio total lo que posibilita cerrar esta brecha.

5. Propuesta didáctica

Antes de abordar la propuesta didáctica, se presenta un esquema que sintetiza de manera global los referentes teóricos empleados en los marcos de referencia empleados y desglosados en los apartados anteriores y que sirven de insumo sobre el cual se estructura la propuesta.

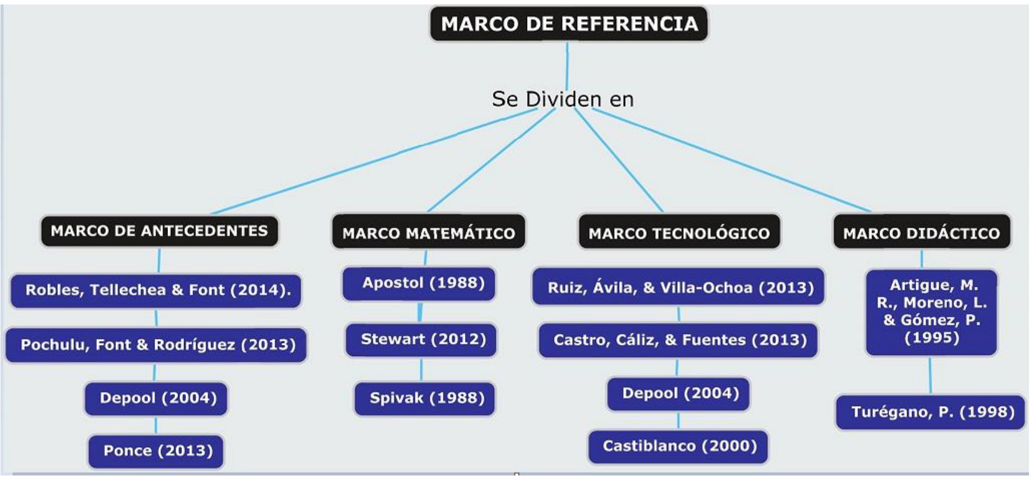


Figura 18, Elaboración propia, marco de referencia.

Tal como lo plantean Robles, Tellechea & Font (2014) el diseño de actividades se ha considerado un aspecto clave para conseguir una enseñanza de calidad. Por tal razón en este trabajo se propone una secuencia actividades con el fin de llevar a cabo la comprensión de manera intuitiva del teorema fundamental del cálculo, resaltando la importancia del orden que se propone para la implementación de las actividades ya que Robles, Tellechea & Font (2014) afirman que una adecuación "pobre" puede obstaculizar la correcta comprensión del objeto matemático.

Para el diseño de las secuencias de actividades se tuvo en cuenta lo propuesto por Castro, Cáliz, & Fuentes, (2013) y expuesto en el capítulo 3 del presente trabajo, pues se expone la importancia de estructurar una secuencia de actividades o, como ellos lo llaman, escenarios de aprendizaje para una comprensión; en nuestro caso la noción intuitiva del teorema fundamental del cálculo, y alrededor de ello se articula el objetivo para el diseño de las actividades. Teniendo en cuenta dichos escenarios de aprendizaje, las actividades diseñadas se centran principalmente en el escenario dos y el escenario tres, los cuales proponen construcciones que posibiliten la visualización de la integral definida en un intervalo y la relación con respecto a la gráfica de la función original; por otra parte posibilita observar la relación entre las dos gráficas ya mencionadas y la gráfica de la derivada, lo anterior con el fin de hacer evidente que la integral y la derivada son procesos inversos.

Por otra parte Castro, Cáliz, & Fuentes, (2013) plantean la importancia de evidenciar 4 fases diferentes en los escenarios de aprendizaje planteados; en ese sentido, se tienen en cuenta las fases para el diseño de cada uno de los ítems presentados en las actividades propuestas: la fase 1 resalta la importancia de vincular las preguntas con una situación problema o en su defecto vincularlas entre ellas; la fase 2, menciona la importancia de la exploración visual y empírica; la fase 3, menciona la búsqueda de múltiples métodos de solución y la fase 4 se trata de una fase de reflexión que busca que el estudiante verifique cómo se resolvieron las preguntas, con el fin de interiorizar los conceptos matemáticos.

Por otra parte, Labraña, 2000; Robles, Del Castillo y Font; 2012 (como se citó en Robles, Tellechea & Font, 2014, p.78). Mencionan la importancia de las perspectivas geométricas y gráficas en los procesos de conceptualización y significación a los procesos de la derivación e integración y es por esta razón que las actividades están propuestas desde una perspectiva geométrica y gráfica utilizando imágenes de las funciones planteadas en las actividades y el apoyo fundamental que se potencia con el uso del entorno de Geogebra®.
Además de lo anteriormente mencionado, es importante resaltar lo planteado en el capítulo 3 el cual habla sobre el papel que cumplen las herramientas tecnológicas en la construcción de conocimiento; por esa razón las actividades están propuestas pensando en que el estudiante debe realizar exploración para que logre conjeturar y poder establecer generalidades. En este caso, puntualmente se espera que logre resignificar el teorema fundamental del cálculo.

Cabe anotar antes de pasar a describir las actividades propiamente dichas, que debido a la emergencia sanitaria que se presentó a nivel mundial por el COVID-19 surgió la necesidad de modificar la propuesta inicial de actividad, ya que se había diseñado para que su implementación fuera de manera presencial (Ver Anexo 1). Sin embargo, la cuarentena obligatoria llevó a la suspensión de actividades académicas in situ, y por ello se debió repensar la actividad y virtualizarla haciendo uso de las herramientas que la tecnología brinda, específicamente Google Forms® y que posibilitara recoger los insumos de análisis que el trabajo requería. (Ver Anexo 2).

5.1. Actividad 1

La primera actividad tiene como finalidad el desarrollo intuitivo de la primera parte del teorema fundamental del cálculo, la cual se define y demuestra en el capítulo 2. Teniendo en cuenta el capítulo 4 se prioriza lo planteado por Robles, Tellechea & Font (2014) para el diseño de la secuencia de ítems de la actividad para evitar obstaculizar la correcta comprensión del objeto matemático y lo propuesto por Castro, Cáliz, & Fuentes, (2013) para los escenarios de aprendizaje y sus respectivas fases.

Esta actividad está compuesta por 5 puntos, de los cuales el primer punto tiene 3 literales, el segundo, tercer y cuarto punto tienen 5 literales y el quinto punto tiene 2 literales. A continuación, se presenta una descripción de la pregunta o acción a realizar y qué es lo esperado.

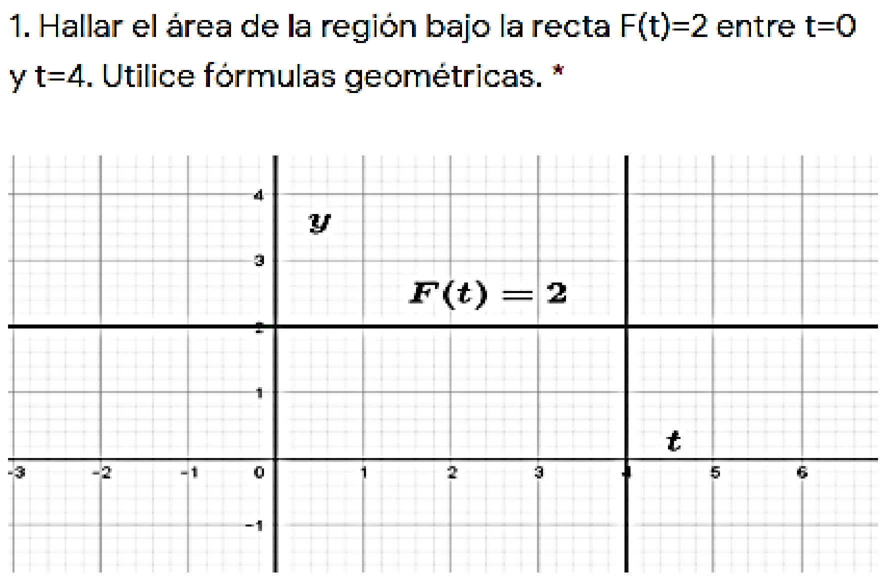


Figura 19. Elaboración propia, Actividad 1

Primero, segundo y tercer punto: En estos puntos se espera que el estudiante, luego de realizar una visualización de la figura presentada, logre encontrar el área a partir de fórmulas geométricas, en ese sentido el estudiante realiza la integral sin necesidad de evocar su definición, a su vez según lo mencionado en el capítulo 4, lo planteado por Artigue, 2002; Czarnocha, Loch, Prabhu y Vidakovich, 2001; Labraña, 2000; Robles, Del Castillo y Font; 2012 (como se citó en Robles, Tellechea & Font, 2014, p.78). El uso de perspectivas geométricas y gráficas se espera dote de sentido el proceso de integración y con ello se da respuesta a lo propuesto desde la fase 1 según lo planteado por Castro, Cáliz, & Fuentes, (2013).

Ítem	Respuesta o acción esperada
A. Si x∈ R, x>0 sea A(x) el área de la región bajo la recta F (t)=2 entre t=0 y t=x. Plantee una expresión para A(x).	Se espera que el estudiante generalice el proceso llevado a cabo anteriormente y plantee una expresión en términos de x para el área, lo cual hace parte de la fase 3 propuesta por Castro, Cáliz, & Fuentes, (2013) en el capítulo 3 y 4 de este trabajo.
B. Derive A(x) obtenida en el ítem anterior	Se espera que el estudiante derive la expresión planteada en el ítem anterior.
C. Escriba una conclusión del resultado.	Se espera que el estudiante logre identificar el enunciado presentado en el capítulo 2 presentado para la primera parte del teorema fundamental del cálculo, lo cual hace evidente la fase 4 propuesta por Castro, Cáliz, & Fuentes, (2013).
D. Sea c∈[0, x]. Halle A'(c) y f(c)	Se espera que el estudiante evalúe en la expresión del ítem *B* y en la función original los valores correspondientes para un número real que pertenezca al intervalo.
E. Teniendo en cuenta el ítem D, escriba una nueva conclusión	Se espera que el estudiante logre identificar el enunciado presentado en el capítulo 2 y propuesto como relación de los objetos matemáticos involucrados (Spivak, 1988, p.399).

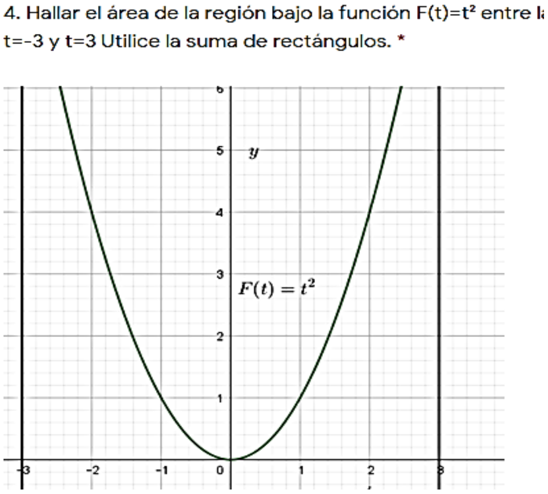


Figura 20.Elaboración propia, Actividad 1

Cuarto punto: En este ítem se espera que el estudiante, luego de realizar una visualización de la función propuesta logre encontrar el área a partir de sumas de rectángulos lo cual hace parte de la fase 3 propuesta por Castro, Cáliz, & Fuentes, (2013) ya que hasta este punto se han solucionado los puntos anteriores de forma diferente, en ese sentido el estudiante está buscando múltiples métodos de solución a un mismo problema, y puede realizar una aproximación a la integral; por esa razón es importante analizar lo propuesto por Artigue

(1995) expuesto en el capítulo 4 con relación a las dificultades que conllevan los procesos infinitos al resolver un límite en las sumas de rectángulos.

Ítem	Respuesta o acción esperada
A. Haga visible todo en la construcción y explore. (Ver anexo 3)	Se espera que el estudiante explore la construcción diseñada por los autores de este trabajo en Geogebra®. (Ver anexo 3), este ítem es importante ya que como se mencionó en el capítulo 3 según lo que afirman Castro, Cáliz, & Fuentes, (2013) Geogebra® es un software que permite al estudiante la posibilidad de visualizar los conceptos matemáticos y/o explorar e investigar conjeturas y además hace parte de la fase 2 propuesta para el escenario de aprendizaje.
B. ¿Qué relación observa entre suma superior, inferior, suma de rectángulos y el área de la función?	Se espera que a partir del ítem anterior el estudiante plantee una conjetura en relación con las sumas de rectángulos y compruebe dicha conjetura.
C. Sea $x \in R$ $x>-3$. Sea $A(x)$ el área de la región bajo la función $F(t)=t^2$ entre las rectas $t=-3$ y $t=x$. Calcule el área bajo esa curva con sumas de rectángulos.	Se espera que el estudiante, de manera similar a lo hecho en los literales A de los tres primeros puntos, generalice el proceso llevado a cabo en el cuarto punto con sumas de rectángulos.
D. Derive $A(x)$ obtenida en el ítem anterior	Se espera que el estudiante tenga en cuenta la conclusión presentada en los literales C de los tres primeros puntos e intuya que la derivada de la expresión del ítem anterior es la función original.
E. Escriba una conclusión del resultado	Se espera una conclusión de manera similar a los presentados en los literales C de los primeros tres puntos, lo cual hace evidente la fase 4 propuesta por Castro, Cáliz, & Fuentes, (2013) en los capítulos 3 y 5 del presente trabajo.

Quinto punto: En este punto se le brinda libertad al estudiante de que elija una función, ya que se busca que el estudiante extrapole a partir de lo realizado a lo largo de la actividad.

5. Ingrese un ejemplo de una función *A, Teniendo en cuenta lo resuelto en el taller ¿Cuál será la expresión A(x)?* *B. Teniendo en cuenta lo resuelto en el taller ¿Cuál será la expresión A'(x)? (Escriba sus conclusiones en términos de la función propuesta en el punto 5)*

Para los literales A y B: Se espera que el estudiante teniendo en cuenta lo realizado a lo largo del taller, usando las fases propuestas por Castro, Cáliz, & Fuentes, (2013), e intuya la respuesta de manera anticipada es en este punto donde se espera encontrar expresiones verbales o algebraicas que expresen de manera explícita o implícita el contenido de la primera parte del teorema fundamental del cálculo.

5.2. Actividad 2

La segunda actividad tiene como finalidad general el desarrollo intuitivo de la segunda parte del teorema fundamental del cálculo, la cual se define y demuestra en el capítulo 2. Para el desarrollo de la actividad son fundamentales las herramientas tecnológicas, se proponen en esta actividad procesos algebraicos complejos en los que surge la necesidad de una representación gráfica. Es por eso que, teniendo en cuenta el capítulo 3 y en (Castilblanco, 2000, p.22), se resaltan las virtudes que brinda los diferentes software comparados con los sistemas de representación hechos a lápiz y papel, y la gran ventaja que presentan a la hora de realizar una transnumeración entre los diferentes tipos de representaciones de una función evitando así posibles errores y agilizando el proceso de evaluación numérica que podría ser requerido y por lo tanto, de ser así, el entorno podría ser utilizado eventualmente como una herramienta de verificación de resultados.

Como se menciona en el capítulo 3 Se decide utilizar Geogebra ® para realizar la construcción, ya que resulta ser una herramienta útil en el aula, el software elegido para realizar el cuestionario con las preguntas y las instrucciones correspondientes a la construcción fue Google Forms® (Ver anexo 4).

La actividad está compuesta por 15 ítems, los cuales son instrucciones teniendo en cuenta la construcción realizada en Geogebra® por los autores de este trabajo (Ver anexo 5), gran parte de los ítems brindan información relevante cuya finalidad es:

Ítem	Respuesta o acción esperada
5. ¿Qué relación observa que hay entre F y f?	El ítem 5: Se espera que el estudiante al explorar la construcción identifique que la función *F* es la integral de la función *f.*
7. ¿Qué coordenadas tienen P y Q teniendo en cuenta los valores que le dio a A y a B, con respecto a F?	El ítem 7: Se espera que el estudiante identifique que los puntos *P* y *Q* hacen parte de la función *F* y son imágenes los puntos A y B elegidos en el eje de la abscisas, es decir *F(A)* *y* *F(B).*
9. ¿Qué coordenadas tienen C y D teniendo en cuenta las coordenadas de P y Q?	El ítem 9: Se espera que el estudiante identifique que los puntos *C* y *D* hacen parte de la misma recta de los puntos *P* y *Q,* sin embargo, se encuentran sobre el eje y, es decir que las coordenadas de esos puntos son *(0, F(A)* y *(0, F(B))* respectivamente.
10. ¿Cómo se halla la distancia entre C y D? ¿Cuánto es?	El ítem 10: Se espera que el estudiante identifique que debido a que los puntos hacen parte de la misma recta (eje y) su distancia se halla a través de la resta entre sus coordenadas en *y*, es decir *F (B)-F(A).*

13 Teniendo en cuenta el ítem 10, 11 y 12 ¿Qué puede concluir? (Escriba sus conclusiones en términos de f, F, A y B).	El ítem 13: Se espera que el estudiante identifique que el área de la función *f* entre los intervalos *A* y *B* elegidos es lo mismo que la distancia entre los dos puntos, es decir que *área f = F (B)-(FA).*
14 Generalizar el proceso para cualquier A y cualquier B.	El ítem 14: Se espera que el estudiante teniendo en cuenta los desarrollado durante todo el desarrollo de la actividad, identifique la segunda parte del teorema fundamental del cálculo presentado en el capítulo 2 sacado de *(*Spivak, 1988, p.405).

En el siguiente capítulo se presentaran y analizaran los resultados obtenidos de la implementación realizada de las dos actividades.

6. Análisis de los resultados de la implementación de las actividades

A continuación, se presenta un análisis de las actividades desarrolladas por 14 estudiantes de la Universidad Pedagógica Nacional del programa de formación inicial de profesores de la licenciatura en Matemáticas Los participantes fueron escogidos aleatoriamente de un listado de estudiantes que ya hubiesen cursado, en la línea del cálculo los espacios de Precálculo, Cálculo Diferencial y Cálculo Integral. Lo anterior implica que la muestra comprendía estudiantes desde 4 semestre hasta 10 semestre, con lo cual algunos ya han cursado cursos como Cálculo en Varias Variables, Series y si son estudiantes de séptimo semestre en adelante, y alguno de ellos que han optado por la línea de profundización en Análisis han trabajado los cursos de Análisis Matemático y Ecuaciones Diferenciales. No se presenta un detalle de este aspecto ya que no es relevante para los objetivos del trabajo, pero podría ser considerado si se quiere analizar, por ejemplo, cómo cambia la significación del teorema fundamental del cálculo a medida que se avanza en el programa de formación.

Las actividades fueron construidas en el software Google Forms® como se mencionó en el capítulo 5 y dada la contingencia sanitaria del Covid-19 se dejó un espacio prudencial para que los participantes pudieran realizarlas en un plazo de dos semanas cuando su disponibilidad de tiempo se lo permitiera. Además de las actividades, se planearon dos encuentros virtuales con los participantes; uno de ellos para indagar acerca de su conocimiento con relación al teorema fundamental del cálculo y el otro para recibir una retroalimentación sobre su percepción sobre las actividades.

Teniendo en cuenta lo mencionado anteriormente los análisis que aquí se presentan se dividirán en dos partes, una reflexión con relación a las producciones de las actividades y una con relación a lo mencionado por los estudiantes durante los encuentros, los autores optaron por enumerar a los estudiantes cumpliendo con un acuerdo ético sobre confidencialidad en el manejo de datos.

Para los análisis de las producciones de las actividades se plantearon cuatro diferentes categorías, teniendo en cuenta lo que se mencionó en el capítulo 4 de este trabajo, en especial lo relacionado con las dificultades usuales que se presentan en el cálculo, a continuación, se presenta una tabla que las sintetiza.

CLASIFICACIÓN DE CATEGORÍAS

CATEGORÍA 1	Se encuentran las producciones que no presentan ninguna dificultad.
CATEGORÍA 2	Se sitúan las producciones que presentan dificultad conceptual asociada con los objetos básicos.
CATEGORÍA 3	Se hallan las producciones con alguna dificultad asociada con la conceptualización y formalización de la noción de límite.
CATEGORÍA 4	Se presentan las producciones que presentan dificultades vinculadas con relación a la ruptura entre el cálculo y el álgebra.

6.1 Actividad 1

La actividad 1 (ver anexo 2), como ya se mencionó, está centrada en el desarrollo intuitivo de lo que se denomina primera parte del teorema fundamental del cálculo, ya que se pretende que, a partir del hallazgo de algunas áreas de figuras ubicadas en un plano cartesiano y la derivada de dichas áreas, el estudiante identifique la relación inversa entre la integral y la derivada.

Para el análisis de la actividad se tiene en cuenta las categorías anteriormente descritas, por esa razón los autores optaron por clasificar las respuestas de los estudiantes en cada uno de los ítems propuestos en la actividad 1. A continuación se presentan algunos de los hallazgos más importantes:

- En la primera categoría
  - Primer punto

    Como primera parte los estudiantes hallaron el área priorizando la parte geométrica de la figura que se genera bajo la función $F(t) = 2$, usando fórmulas geométricas Del área de figuras conocidas en éste caso $Área = Base \cdot Altura$.

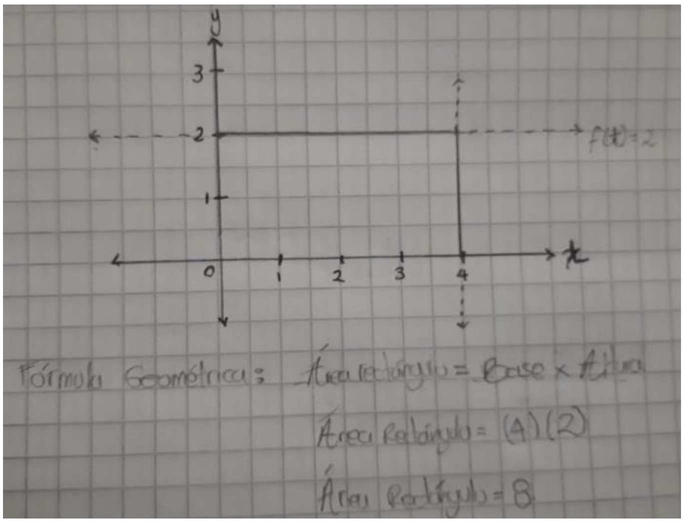


Figura 21. Elaboración estudiante 1, Producción del ítem 1 de la actividad 1

Posteriormente hallaron el área de la figura entre la recta $t = 0$ y $t = x$. En ese sentido se observa que los estudiantes de manera intuitiva encontraron la expresión del área $A(x)$.

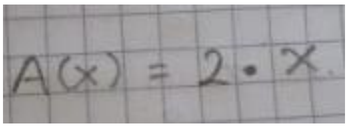


Figura 22. Elaboración estudiante 2, Producción del ítem 1 a de la actividad

Una vez planteada la expresión $A(x)$, los estudiantes derivaron la expresión; sin embargo, todos los estudiantes manejaron de manera correcta este ítem.

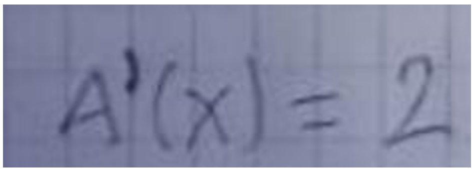


Figura 23. Elaboración estudiante 3, Producción del ítem 1b de la actividad

Para terminar el punto 1 los estudiantes realizaron una conclusión con respecto al proceso desarrollado en los ítems anteriores, los estudiantes en su mayoría identificaron que la derivada del área es la función original, uno de los participantes concluyó de manera concreta que “si derivo la expresión voy a tener como resultado la función inicial”.

- Segundo punto

En el segundo punto a diferencia del primero el área estaba determinada por una función lineal entre $t = 0$ y $t = 6$, los estudiantes, al igual que en el punto anterior, utilizaron fórmulas geométricas para determinar el área de la figura $\left(Area = \frac{base\ x\ altura}{2}\right)$.

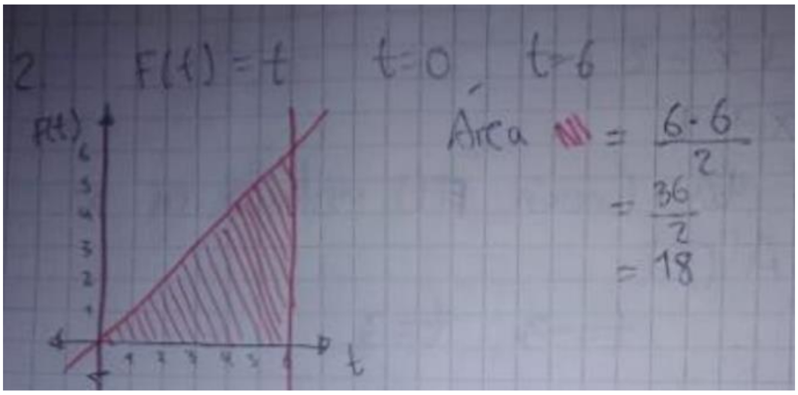


Figura 24. Elaboración estudiante 2, Producción del ítem 2 de la actividad 1

Posteriormente el estudiante debía plantear una expresión para el área determinada por la misma función pero entre $t = 0$ y $t = x$, a diferencia de lo que desarrollaron los estudiantes en el ítem 1(a) se determinó la expresión $A(x)$ priorizando analíticamente las distancias entre puntos definida en coordenadas cartesianas.

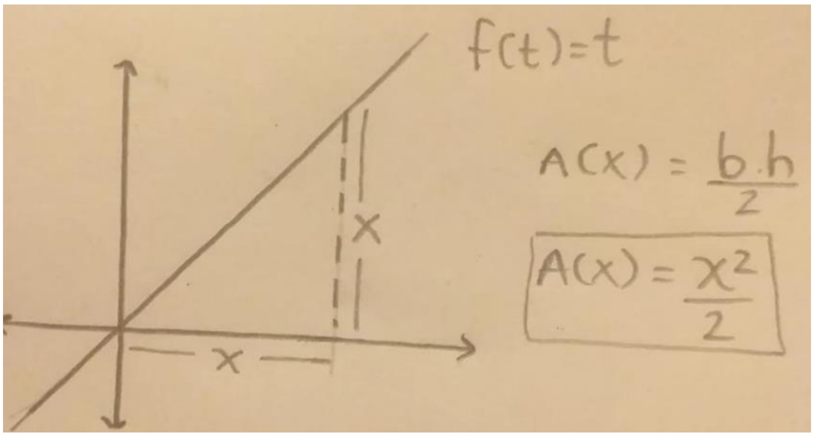


Figura 25. Elaboración estudiante 4, Producción del ítem 2a de la actividad 1.

Una vez planteada la expresión $A(x)$, los estudiantes derivaron la expresión; sin embargo, todos los estudiantes manejaron de manera correcta este ítem.

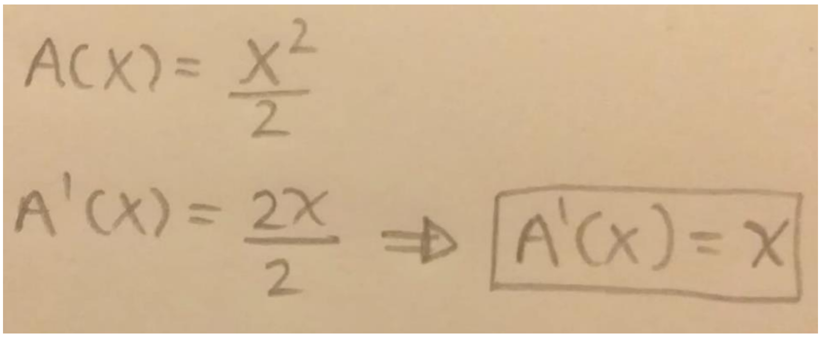


Figura 26. Elaboración estudiante 4, Producción del ítem 2b de la actividad 1.

Posteriormente el estudiante debía plantear una conclusión con lo desarrollado a lo largo del taller hasta el momento, en general la mayoría de los estudiantes lograron identificar de manera precisa la misma conclusión que en el punto anterior, un estudiante concluyó que "Se obtiene nuevamente una función de la forma $A´(x) = F(t)$".

Una vez concluido, se les pidió a los estudiantes que evaluaran un c que pertenezca al intervalo $[0, x]$ en la función $A'(x)$ y $f(t)$, de manera general los estudiantes evaluaron correctamente el punto c en la función.

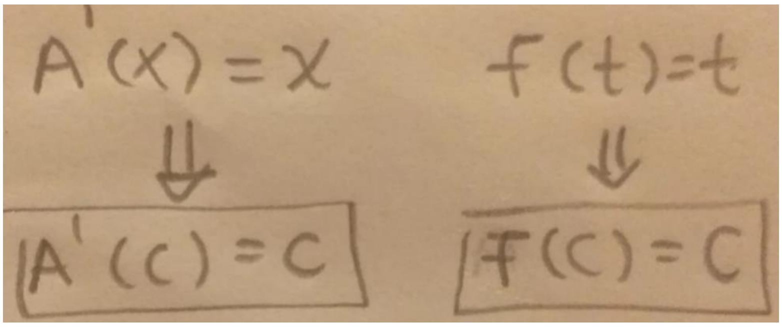


Figura 27. Elaboración estudiante 4, Producción del ítem 2d de la actividad 1.

Para terminar el punto 2 los estudiantes debían realizar una conclusión teniendo en cuenta lo encontrado en el punto 2(d), para ello los estudiantes de manera general lograron identificar lo que se esperaba, un participante concluyó "Si se refieren a F(c) entonces se puede concluir que A´(c) tiene el mismo valor que F(c) para cualquier c". Por otra parte otro estudiante concluyó lo mismo; sin embargo lo expresó de manera diferente, el estudiante escribió en lenguaje simbólico que "$f(c) = A'(c)$".

- Tercer punto

De la misma manera que en los puntos anteriores los estudiantes debían determinar el área que está acotada por la función lineal y las rectas $t = 1$ y $t = 3$. Esto determina un trapecio. Algunos estudiantes identificaron el área de la figura directamente a partir de la fórmula del área del trapecio; otros la identificaron a partir de la suma de áreas entre el rectángulo y el triángulo lo que implícitamente devela el hecho de poder aplicar propiedades topológicas de la función área y el principio de no superposición de las superficies.

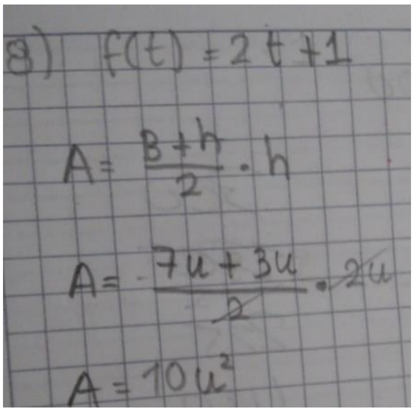


Figura 28. Elaboración estudiante 3, Producción del ítem 3 de la actividad 1 (trapecio).

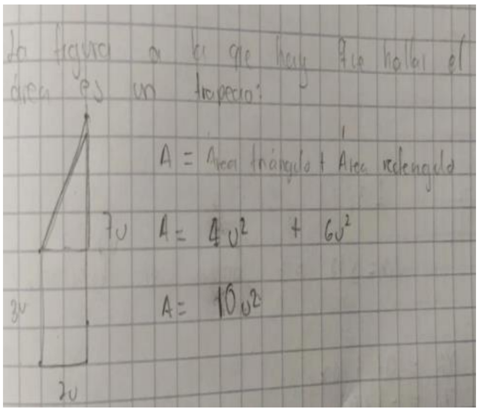


Figura 29. Elaboración estudiante 5, Producción del ítem 3 de la actividad 1 (Triángulo y rectángulo).

Posteriormente se solicitó a los estudiantes que determinaran una expresión para el área bajo la misma función pero determinada por las rectas $t = 1$ y $t = x$, en este punto se identificó que a diferencia de los puntos 1 y 2 la cantidad de estudiantes que respondieron correctamente disminuyo, por otra parte aquellos estudiantes que lo hicieron de manera correcta se apoyaron fuertemente en el proceso utilizado en los puntos 1 y 2.

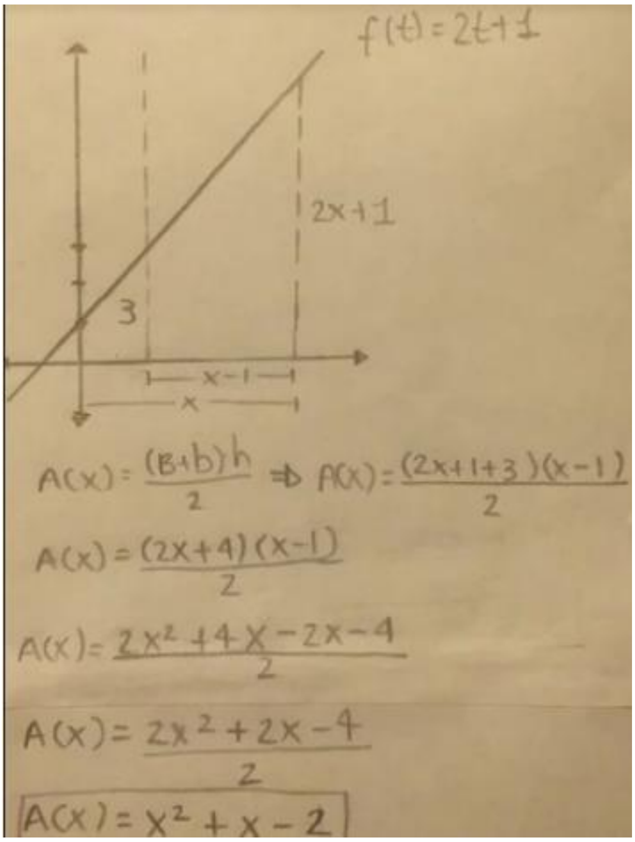


Figura 30. Elaboración estudiante 4, Producción del ítem 3a de la actividad 1 (trapecio).

Posteriormente se les solicitó que derivaran la expresión $A(x)$; en general todos los estudiantes hallaron correctamente la derivada de la expresión.

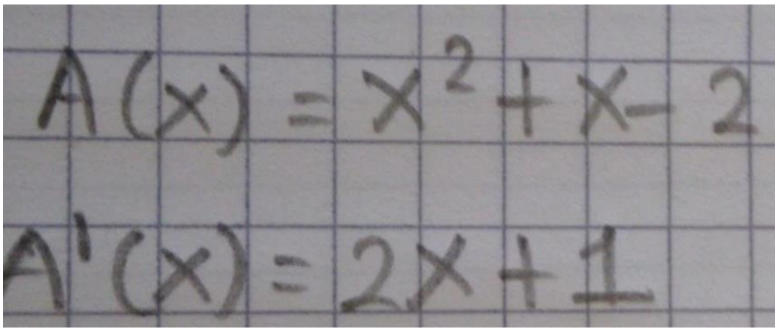


Figura 31. Elaboración estudiante 3, Producción del ítem 3b de la actividad

Posteriormente se les solicitó que a partir de lo desarrollado a lo largo del punto 3 escribieran una conclusión. La gran mayoría ya había notado lo que debía suceder y concluyeron teniendo en cuenta la información; por ejemplo un participante reportó lo siguiente: "La función dada $f(t)$ es igual al resultado que se obtiene al derivar la función $A(x)$".

Posteriormente en los ítem 3(d) y 3(e) se les solicitó lo mismo que en los puntos 2(d) y 2(e), en general los estudiantes que plantearon de manera aceptable la expresión $A(x)$ y concluyeron lo mismo que en el punto 2.

- Cuarto punto

Para el desarrollo del cuarto punto se les solicito a los estudiantes que hallaran el área que se determina bajo la función $f(t) = t^2$ entre las rectas $t = -3$ y $t = 3$ utilizando la suma de rectángulos, además se hizo una construcción en Geogebra® (anexo3) para que facilitaran el proceso; sin embargo, algunos estudiantes utilizaron las sumas de Riemann mientras otros se apoyaron fundamentalmente de la construcción.

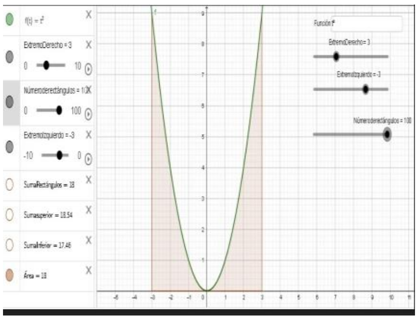


Figura 32. Elaboración estudiante 3, Producción del ítem 4 de la actividad 1.

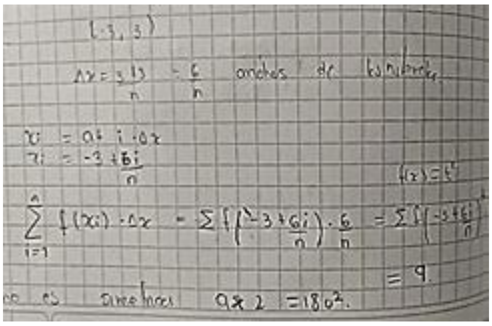
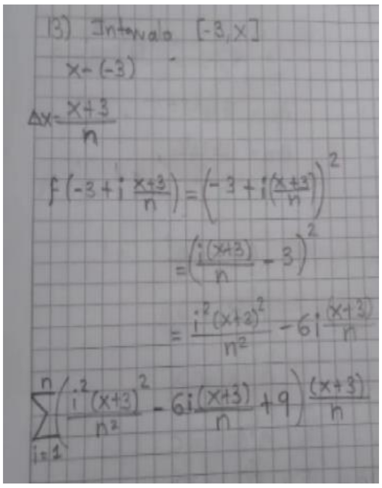


Figura 33. Elaboración estudiante 1, Producción del ítem 4 de la actividad 1.

Posteriormente la indicación era expresar el área que se determina bajo la misma función pero entre las rectas $t = -3$ y $t = x$, en este punto se identificó como la cantidad de estudiantes que lo realizaron correctamente disminuyó considerablemente, quizá por la dificultad que se presenta al realizar la suma de rectángulos, algunos estudiantes; sin embargo, manejaron correctamente la suma de rectángulos para hallar el área que se planteaba.



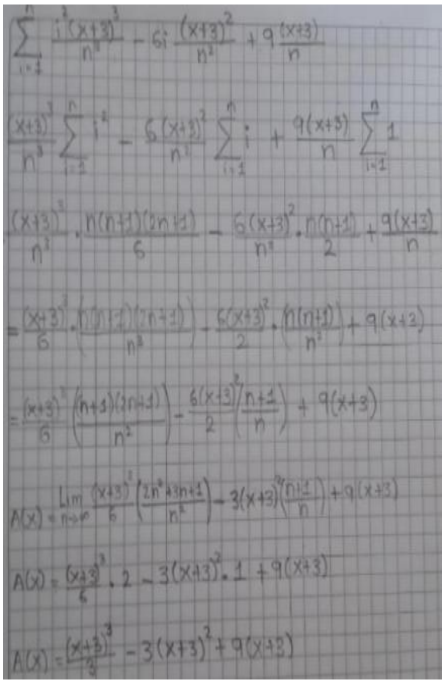


Figura 34.Elaboración estudiante 3, Producción del ítem 4b de la actividad 1.

Una vez realizado ese punto la instrucción que se presenta es derivar la expresión de $A(x)$, en esa instrucción todos los estudiantes derivaron la expresión que determinaron en el punto ya mencionado.

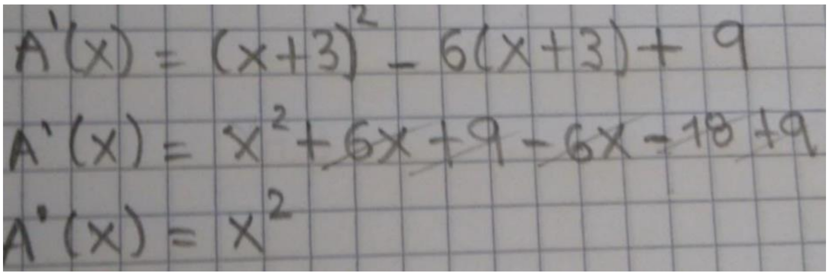


Figura 35. Elaboración estudiante 3, Producción del ítem 4c de la actividad 1.

Al terminar la derivada los estudiantes debían hacer una conclusión de lo que se había trabajado, la mayoría de los estudiantes que habían planteado de manera correcta la expresión $A(x)$ lograron la conclusión de manera correcta. Uno de ellos concluyó "con las sumas hallamos el área que sería la integral de esa función y al derivar esto encontramos la función inicial, muy similar a lo que se encontró anteriormente, pero creo que de esta manera se entiende mejor el proceso".

- Quinto punto

Para finalizar la actividad 1 se solicita que los estudiantes planteen una función y que a través de lo desarrollado a lo largo del taller escriban una conclusión, una de las que más llama la atención de los autores del trabajo fue la que realizó un participante que manifestó “Nuevamente y como sucedió en los otros ejercicios propuestos las funciones $f(x)$ y $A'(x)$ son iguales”.

- En la categoría dos

Tal como se mencionó al comienzo de este capítulo, la categoría dos hace referencia a aquellos estudiantes que presentaron alguna dificultad en conceptos básicos del cálculo.

- Primer punto

Al comenzar con la actividad la instrucción que se daba a los estudiantes era hallar el área de una región que se determina bajo una función constante y dos rectas; sin embargo la función que se definió estaba en términos de t, un estudiante en particular cometió un error de interpretación, ya que le esta asignando simbología desde un contexto (en este caso físico) ya que interpreta que la t son unidades de tiempo, aún cuando no se ha definido de esa manera esto podría deberse a una fuerza en la representación simbólica que asocia la variable t al tiempo.

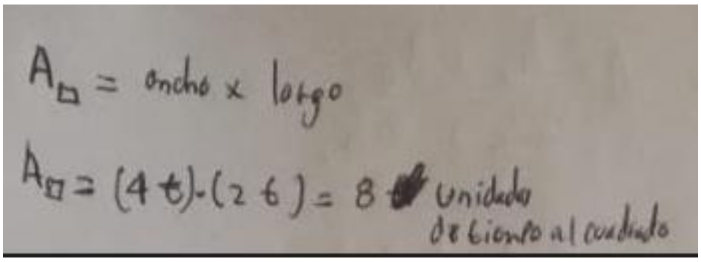
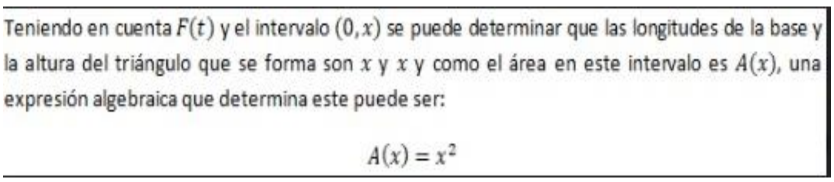


Figura 36. Elaboración estudiante 10, Producción del ítem 1 de la actividad 1.

- Segundo punto

En el punto 2(a) los estudiantes debían plantear una expresión para el área determinada por una función lineal que pasa por el origen determinado por las rectas $t = 0$ y $t = x$, un estudiante en particular cometió un error en un concepto básico del cálculo, el cual corresponde a la confusión al hallar el área de un rectángulo y el área de un triángulo.


Teniendo en cuenta $F(t)$ y el intervalo $(0, x)$ se puede determinar que las longitudes de la base y la altura del triángulo que se forma son x y x y como el área en este intervalo es $A(x)$, una expresión algebraica que determina este puede ser:

$$A(x) = x^2$$

Figura 37. Elaboración estudiante 7, Producción del ítem 2a de la actividad 1.

○ Tercer punto

En el punto 3(a) los estudiantes debían determinar el área acotada por la función lineal y las rectas $t = 1$ y $t = 3$ y el eje horizontal. Se forma la figura geométrica que se conoce como trapecio, dos estudiantes en particular cometieron el mismo error al expresar el área, al realizar una inadecuada conceptualización de las distancias en coordenadas cartesianas, ya que al hallar el área del trapecio descomponiéndola en la de las superficies no superpuestas del el triángulo y el rectángulo no lograron expresar correctamente las dimensiones del triángulo ni la base del rectángulo.

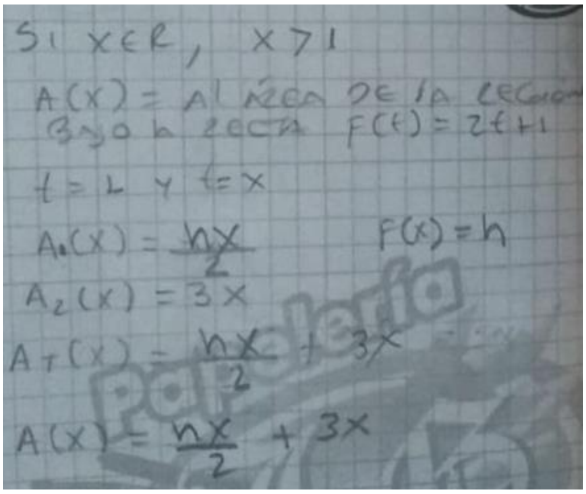


Figura 38. Elaboración estudiante 7, Producción del ítem 3a de la actividad 1.

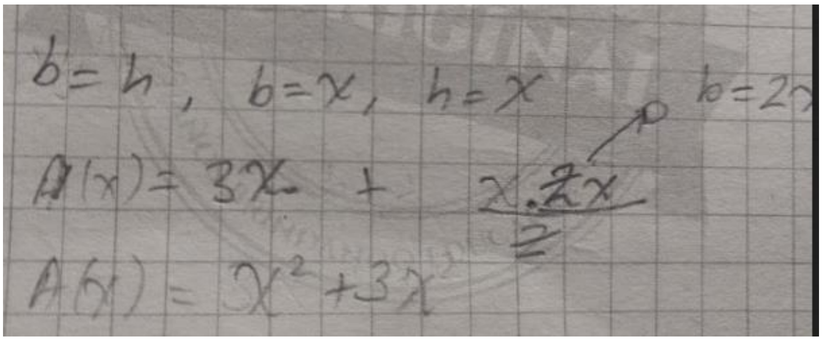


Figura 39. Elaboración estudiante 8, Producción del ítem 3a de la actividad 1

En el punto 3(c) se identifica que el estudiante 8 concluyó de manera incorrecta, pues al determinar la expresión $A(x)$ cometió el error mencionado, lo que lo llevó a concluir que "La derivada no da como resultado la misma recta, debería, pero viendo el ejercicio con detenimiento se puede ver que la recta siempre va a cortar en 3, por ende da como resultado $2x + 3$".

Es de notar que este caso devela que el estudiante puede evocar la teoría pero que no necesariamente lo hace de manera adecuada ya que no se cuestionó sobre su resultado, sino que seguramente pensó que era posible encontrar un contraejemplo. Esto marca lo expuesto por Tall (1992).

- En la categoría tres

  Al comienzo de este capítulo se mencionó que la categoría tres se corresponden con las dificultades con relación a la noción del límite, teniendo en cuenta que en la actividad 1 tan solo un punto brinda la posibilidad de evaluar dicha noción. Los autores optaron por analizar tan solo el punto 4(c). Tres estudiantes cometieron un error al plantear la sumatoria de rectángulos ya sea en el establecimiento del paso al límite o en el desarrollo del mismo.

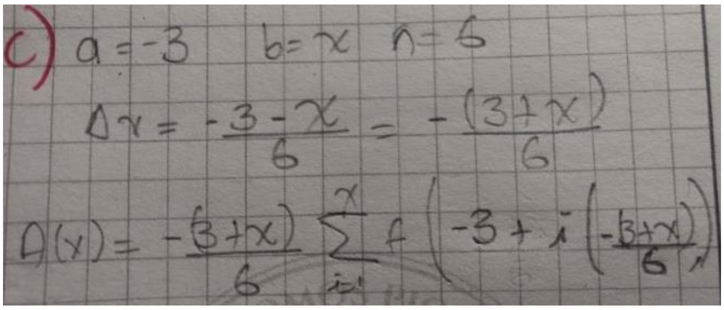


Figura 40. Elaboración estudiante 8, Producción del ítem 4c de la actividad 1.

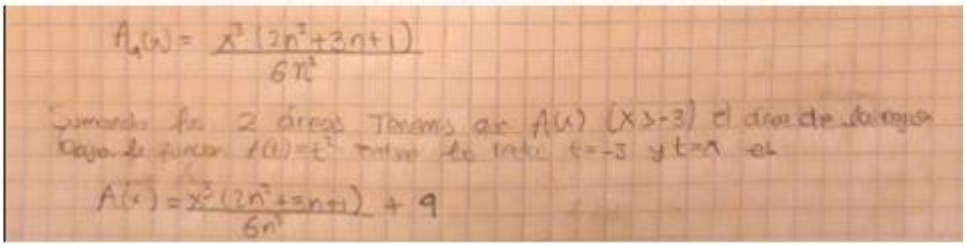


Figura 41.Elaboración estudiante 1, Producción del ítem 4c de la actividad 1.

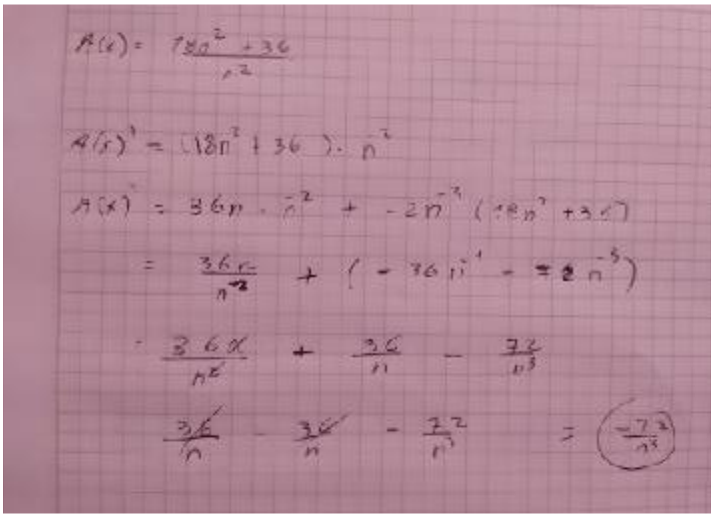


Figura 42.Elaboración estudiante 9, Producción del ítem 4c de la actividad 1

Como consecuencia del desarrollo inadecuado del punto 3(c) ambos estudiantes concluyeron de manera incorrecta el punto 4(d), se presenta a continuación la conclusión a la que llegaron, el estudiante 1 reportó que “No sabía qué concluir”.

El estudiante 8 por otra parte concluyó que “Aunque la derivada no da lo mismo que la función planteada se puede concluir que igualmente cuando se deriva, da una función cuadrática”.

Finalmente, el estudiante 9 en su conclusión reportó que no veía una relación del resultado, con la función original.

- En la categoría cuatro

Para la categoría cuatro se tienen destinadas aquellas producciones de los estudiantes en los que se evidencie alguna dificultad en relación con la ruptura entre el cálculo y el álgebra; sin embargo, en la actividad 1 ninguna de las producciones evidenció rasgos de ésta categoría.

6.2 Actividad 2

La actividad 2 (ver anexo 4) está centrada en el desarrollo intuitivo de lo que se denomina la segunda parte del teorema fundamental del cálculo, a partir de la exploración de una construcción realizada en la herramienta tecnológica Geogebra®, y vinculándolo con las distancias entre dos puntos con coordenadas cartesianas para llegar a vincularlo con lo que se denomina el teorema del cambio total.

Para el análisis de la actividad se tiene en cuenta las categorías descritas al comienzo de este capítulo, la actividad presenta algunos ítems que sirven como guía para la exploración en la construcción, es por ello que los autores optaron por clasificar las respuestas de los estudiantes en los ítems 5, 7, 9, 10, 13 y 14 propuestos en la actividad 2.

Algunos de los hallazgos más importantes se reportan a continuación:

- Quinto ítem

  Para este punto se solicita que los estudiantes hagan visibles las funciones F y f y que, teniendo en cuenta la construcciones, se indique qué relación tienen las dos funciones. En particular la función F se construyó como la integral de la función f, y la función f es seleccionada por los participantes. La mayoría de los estudiantes identificaron dicha relación, estando de esa manera en la categoría 1. En especial un participante concluyó explícitamente que "F es la integral de f". Por otra parte algunos estudiantes identificaron la misma relación aunque la establecen en el orden inverso, es decir que "la función f es la derivada de la función F", o usando un lenguaje funcional del tipo"F es una antiderivada de f".

  Algunos estudiantes que no identificaron la relación de qué F es la integral de la función f, se fijaron en otro tipo de relaciones, por ejemplo un estudiante concluyó que "f y F se intersecan", otro estudiante concluyó que "tienen dos puntos en común", los autores optaron no incluir estas respuestas en alguna de las categorías ya que a pesar de que los estudiantes no identificaron la relación, la conclusión no lleva a pensar en alguna de las dificultades categorizadas.

  Llamó especial atención la selección que tomó un estudiante, y que al proponer la actividad nunca se pensó en esa posible opción; el participante eligió como función e^x, por esa razón F será la misma f, el estudiante concluyó que "son la misma función". Posiblemente un rediseño de la actividad implique proponer o bien una función específica o que realicen el análisis con dos funciones diferentes y pedir que establezcan una relación que sea general, independientemente de la función seleccionada.

- Séptimo ítem

En el ítem anterior se solicita que hagan visibles los puntos $P\ y\ Q$, teniendo visibles los dos puntos, en el ítem siete se piden las coordenadas de los dos puntos, teniendo en cuenta la función F y el intervalo que queda determinado por los valores de A y B seleccionados por ellos.

Todos los estudiantes identificaron correctamente las coordenadas de los puntos; sin embargo solo alguno de ellos tuvo en cuenta los valores A y B y la función F, ubicándose de esa manera en la categoría 1, un estudiante concluyó concretamente que " $P = (A, F(A))\ y\ Q = (B, F(B))$".

Varios estudiantes identificaron las coordenadas de los puntos, sin relacionarlos con la función F, los autores consideran los estudiantes se pueden categorizar en la categoría 2, ya que no identifican las coordenadas que corresponden a las ordenadas de los puntos. Lo anterior se refleja en una conclusión de un participante, quien manifiesta que "La coordenadas en x de los puntos $P\ y\ Q$ son los valores asignados a A y B."

Por otra parte algunos estudiantes en sus conclusiones escribieron las coordenadas que observaron en la construcción, los autores optaron por clasificar dichas respuestas en la categoría 3, ya que no presentan una generalización para los valores de A y B, se conforman con una particularización para el caso que ellos están analizando, un ejemplo de ello fue un estudiante que concluyó que "$P(0,0), Q(2,4)$,$A = 0;\ B = 2$".

- Noveno ítem

En el ítem anterior se solicita que hagan visibles los puntos C y D, de manera similar que en el ítem anterior se piden las coordenadas de los dos puntos, teniendo en cuenta las coordenadas de P y Q.

Todos los estudiantes identificaron correctamente las coordenadas de los puntos; sin embargo solo alguno de ellos tuvo en cuenta las coordenadas de los puntos

Q y P , ubicándose de esa manera en la categoría 1. Un estudiante concluyó concretamente que
"$C = \big(0, F(B)\big)\ D = \big(0, F(A)\big)$".

A diferencia del ítem anterior, solo un estudiante identificó las ordenadas de los puntos sin preocuparse de las abscisas, los autores clasificaron esta respuesta en la categoría 2, ya que es posible que tenga una dificultad en identificar que las coordenadas cartesianas están compuestas por abscisas y ordenadas, el participante concluyó que "sus componentes en y son los mismos", es usual que en el lenguaje cotidiano al solicitarse un punto las personas sólo hagan referencia a los valores de las abscisas sin tener en cuenta que un punto está conformado en el plano por una pareja ordenada .

Por otra parte algunos estudiantes en sus conclusiones escribieron las coordenadas que observaron en la construcción, los autores optaron por clasificar dichas respuestas en la categoría 3, ya que no presentan una generalización para los valores$F(A)$ y $F(B)$, les resulta suficiente con referirse a una particularización, un ejemplo de ello fue un estudiante que concluyó que "$C = (0{,}12)\ D = (0, -4)$" para referirse a la especificidad del ejemplo por él escogido.

- Décimo ítem

  Para el ítem diez se pide que los estudiantes hallen la distancia entre los puntos C y D, teniendo en cuenta las coordenadas obtenidas en el ítem anterior. Gran parte de los estudiantes concluyeron que la distancia entre los dos puntos se halla con la definición usual de las coordenadas cartesianas, ubicándose así en la categoría 1. Un estudiante concluyo que
  "$CD = |F(A) - F(B)|$".

  Algunos estudiantes escribieron conclusiones particulares, dependiendo a la función escogida por ellos, lo cual para los autores representa que la respuesta se puede clasificar en la categoría 3, pues no realiza una generalización adecuada.

  Un estudiante en particular concluyó que "Esta distancia se halla integrando la función f y colocando como límites de integración los números puestos en A y

B", para los autores esta respuesta se puede clasificar en la categoría 4, ya que el estudiante concluye desde un objeto matemático del cálculo como lo es la integral, en un ítem donde se le solicita un proceso meramente algebraico.

- Décimo tercer ítem

En el ítem 11 y 12 se le ha solicitado al participante que haga visible el área entre la función f en el intervalo $[A, B]$, así como la distancia entre C y D, con la información visible en la construcción el ítem trece se les solicita que hagan una conclusión en relación con los ítems ya mencionados. Gran parte de los estudiantes identificaron correctamente que el área bajo la función f en el intervalo $[A, B]$ es igual a la longitud determinada por el segmento CD. Destacando la conclusión de un estudiante quien reportó que "respectivamente, al calcular la distancia entre C y D estamos hallando el área de la región que se encuentra bajo f en el intervalo $[A, B]$"

De manera particular la conclusión de un estudiante se clasificó en la segunda categoría, ya que se presenta un error conceptual de un objeto básico del cálculo, al comparar las coordenadas de los puntos ya que él concluyó que "$F(A) = f(A)$ y $F(B) = f(B)$", lo cual no es correcto.

- Decimocuarto ítem

En el último ítem se solicita a los estudiantes que generalicen lo desarrollado a lo largo de la actividad para diferentes valores de A y B.

En general todos los estudiantes llegaron a la conclusión que se esperaba; a pesar de que no la plantearon de manera simbólica, tal cual como se enuncia la segunda parte del teorema fundamental del cálculo, algunas de las conclusiones que se destacan son:

Estudiante 1: "Para encontrar la distancia, de dos puntos C y D en intervalo continuo A y B de una función, dado por los resultados de esos intervalos dentro de F, se puede calcular".

Estudiante 2: "El área determinada en el intervalo (A, B) de la función f es el valor absoluto de $F(B) - F(A)$."

6.3 Análisis en el encuentro virtual

Tal como se mencionó al comenzar el presente capítulo se realizaron dos encuentros virtuales por medio de la plataforma Zoom ®, y afortunadamente 10 de los 14 estudiantes se hicieron presentes en los encuentros, en ellos se buscaba respectivamente determinar que ideas previas tenían ellos sobre el teorema fundamentalmente del cálculo y el recoger aportes y opiniones o reflexiones post-acción.

Para empezar cada uno de los encuentros, además de agradecerles por su asistencia y colaboración dadas las circunstancias en que se desarrollaron los mismos, en medio de las restricciones impuestas por la pandemia y las limitantes de horarios de disponibilidad, se les dio una indicación sobre el propósito específico de encuentro. Para el primero se les solicitó que en el chat de Zoom ®, escribieran lo que conocieran o recordaran del teorema fundamental del Cálculo. Lo anterior con el fin de identificar lo que ellos tienen como preconcepto o como definición personal del concepto o como lo denomina Tall (1998) “Concept Imagen”

En lo reportado, los autores al analizar las respuestas identificaron que varios estudiantes recuerdan o tan solo evocan una de las dos partes de la formulación del teorema fundamental del Cálculo.

Para el segundo encuentro se buscaba de fondo una retroalimentación y una reflexión post-acción. Para ello inicialmente se realizó una explicación por parte de los autores de la intención de las actividades y del trabajo mismo en general. Posterior a ello se les pidió a los estudiantes que hicieran de manera verbal algunas sugerencias con respecto al desarrollo de las actividades, de las cuales se puede afirmar que a los estudiantes en general les pareció interesante la secuencia de las actividades. Algunas manifestaciones también indicaron que les habían parecido muy extensas pero que se justificaba porque seguía una secuencia que permitía relacionar los objetos que se iban construyendo y explorando. Dentro de los comentarios se quiere resaltar que en la reflexión sobre lo que les dejó la actividad, un estudiante afirmó que al realizar el taller identificó claramente que “el teorema fundamental del cálculo afirma que la derivación y la integración son operaciones inversas”.

7. Conclusiones y recomendaciones

A continuación se presentan algunas conclusiones y recomendaciones que los autores consideraron más relevantes a lo largo del desarrollo del presente trabajo, principalmente se centran en lo encontrado en el análisis realizado en el capítulo seis, ya que el objetivo general que se planteó al iniciar el trabajo fue diseñar una secuencia de actividades con el fin de generar que los estudiantes de los primeros cursos de un programa de formación inicial de profesores de matemática, y en particular de la Licenciatura en Matemáticas la Universidad Pedagógica Nacional, redescubrieran y resignificaran al teorema fundamental del cálculo.

De manera universal se considera que se cumplió el objetivo general, pues en el diseño de cada una de las actividades los elementos de análisis fueron considerados. En la actividad 1 se relacionó las áreas de figuras geométricas directamente con el concepto de integral, se implementaron las TIC en ambas actividades; además el entorno de geometría dinámica fue primordial para el desarrollo de la actividad 2; finalmente dicho entorno de exploración, junto con la secuenciación de las preguntas propuestas, permitió que el estudiante dotara de significado el enunciado general del teorema fundamental del cálculo.

Con respecto a los análisis de las actividades y en especial con lo que se discutió en el encuentro virtual, los autores concluyen que de manera global se logró el objetivo, ya que, al percibir las respuestas de los estudiantes, efectivamente las actividades lograron que los estudiantes re-descubran el teorema fundamental del cálculo. Algunos manifestaron que a pesar de saber que usan el teorema fundamental del cálculo al hacer integrales definidas, no conocen la significación del mismo, otros estudiantes por su parte manifestaron que al realizar una de las actividades identificaron que la integral y la derivada son procesos inversos y qué no eran conscientes de que el teorema fundamental del cálculo hace notar dicha relación inversa. Por otra parte, es importante tener en cuenta la cantidad de ítems que se plantean en las actividades, debido a que pueden resultar reiterativas y extensas, tal como sucedió en la actividad 1 sin embargo se prefirió mantener el diseño para no hacer un salto abrupto y aprovechar al máximo el referente geométrico asociado a la integral.

Las herramientas tecnológicas jugaron un papel fundamental en este trabajo, especialmente por el momento que se vive a nivel mundial por la emergencia sanitaria, pues las actividades se pudieron readaptar de acuerdo a las necesidades de los autores y sin afectar ningún tipo de proceso que generan las actividades, dicha adaptación se realizó en Google Forms®, lo cual a su vez facilitó el proceso de revisión y análisis de las producciones de los participantes en las actividades. Adicionalmente cada una de las actividades se implementó con la ayuda del software Geogebra®, ya que permite una exploración continua de lo que se está trabajando y una óptima relación entre lo realizado en la exploración y lo que se pregunta en las actividades, así como la posibilidad de que el participante pueda recurrir simultáneamente a diferentes registros de representación de los objetos matemáticos.

Finalmente, a partir de las conclusiones mencionadas anteriormente surgen una serie de recomendaciones que los autores desean agregar como parte final de este trabajo.
La primera sugerencia es dividir las actividades en más momentos, para evitar que se torne extensa y reiterativa, e incluso para evitar que los estudiantes de alguna manera no deseen terminarla, o en su defecto no deseen realizar una segunda actividad, pensando en que será igual de extensa. Afortunadamente, y se quiere reiterar en eso, se contó con una excelente disposición de los participantes sin la cual el alcance del trabajo se hubiera restringido significativamente.

Como segunda sugerencia es aprovechar el software Geogebra® al máximo e intentar que los estudiantes de alguna manera exploren de una mejor manera el programa aumentando los intervalos que se les solicita en la actividad 2, para que se identifique, en caso de que así se requiera, una generalización, pues como ya se reportó algunos concluyen sobre un caso específico. Por otro lado, es importante tener en cuenta el caso de los estudiantes que no manejen adecuadamente el software, es prudente hacer una inducción del manejo del software (En una reunión previa).

Dos sugerencias que surgieron en el desarrollo del trabajo están relacionadas con realizar el encuentro, ya sea virtual o presencial tanto antes del desarrollo de las actividades como después del desarrollo de las mismas, para referirse no solo al preconcepto sino a la generalidad de la actividad en sí de manera que se encuentre un contraste claro y el análisis sea más preciso. La otra sugerencia es incluir en las actividades un contexto físico, pues en gran parte de los marcos se evidenció la estrecha relación entre el teorema fundamental del cálculo y la física.

Para finalizar, los autores notaron la importancia de identificar si los estudiantes al realizar la significación del teorema fundamental del cálculo priorizan la parte geométrica de las representaciones gráficas o priorizar la parte analítica que se presenta en las mismas.

8. Referencias

Apostol, T., (1988). Calculus. Vol I. Ed. Reverte. Bogotá.

Artigue, M., Doudady, R., Moreno, L., & Gómez, P. (1995). Ingeniería didáctica en educación matemática. pp. 97-140.

Castiblanco, A. C. (2000). Incorporación de nuevas tecnologías al currículo de matemáticas. pp. 21-23.

Castro, W. D. P., Cáliz, S. R. S., & Fuentes, S. R. (2013). El teorema fundamental del cálculo: Escenarios para su comprensión. Revista científica, 588-592.

Depool, R. (2004), La enseñanza y aprendizaje del cálculo integral en un entorno computacional. Actitudes de los estudiantes hacia el uso de un programa de cálculo simbólico (PES), Tesis doctoral, Servicio de Publicaciones de la Universidad de La Laguna.

Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. En Tall, D. (Ed.), Advanced Mathematical Thinking, 3-21. Dordrecht/ Boston/ London: Kluwer Academic Publishers.

Larson, R., Hostetler, R. P., Edwards, B. H., Roa, M. D. C. H., López, E. F., Bernal, M. R., & Palacios, E. (2010). *Cálculo esencial*. Cengage Learning.

Ministerio de Educación Nacional-MEN. (1998). Lineamientos curriculares de Matemáticas.

Pochulu, M., V. Font y M. Rodríguez (2013), "Criterios de diseño de tareas para favorecer el análisis didáctico en la formación de profesores", Actas del VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática (CIBEM), Montevideo, FISEM, pp. 4988-4998.

Ponce, J. C. (2013). *El Teorema Fundamental del Cálculo: un estudio sobre algunos conceptos, fórmulas y métodos relacionados con su aplicación (Tesis de doctorado).* Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México Distrito Federal.

Robles, M., Tellechea, E., & Font, V. (2014). Una propuesta de acercamiento alternativo al teorema fundamental del cálculo. *Educación matemática*.

Ruiz, M., Ávila, P., & Villa-Ochoa, J. (2013). Uso de Geogebra como herramienta didáctica dentro del aula de matemáticas. pp. 446-454.

Spivak, M. (1988). Cálculo infinitesimal. Reverté.

Stewart, J. (2012). Cálculo de una Variable. Trascendentes tempranas. Cengage Learning. México.

Tall, D. (1992).The transition to advanced mathematical thinking functions, limits, infinity, andproof. En Grouws, D. (Ed.), Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, 495-511. Reston,Va: National Council Of Teachers Of Mathematics, Inc.

Turégano, P. (1998). Del área a la integral: un estudio en el contexto educativo. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, *16*(2), 233-250.

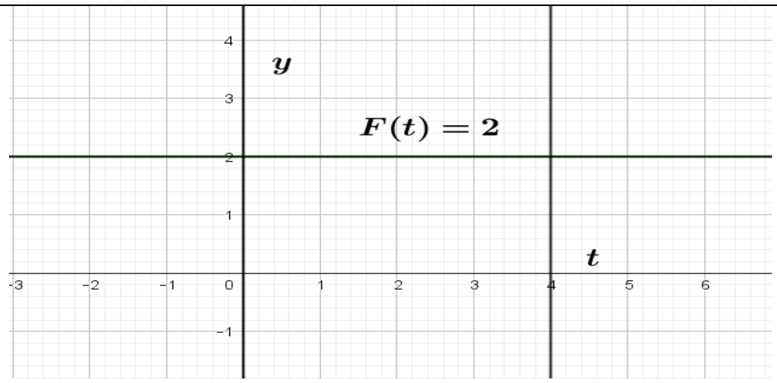
Vinner, S., Heershkowitz, R.:(1980), Concept Images and Common Cognitive Paths in the Development of some Simple Geometrical Concepts, Proceedings of PME4, Berkeley, 177-184.

9. Anexos

9.1. Anexo1. (Primera versión actividad parte del teorema fundamental de cálculo).

Nombre del Estudiante:	Día	Mes	Año

1. Hallar el área de la región bajo la recta $f(t) = 2$ entre $t = 0 \, y \, t = 4$. Utilice fórmulas geométricas.

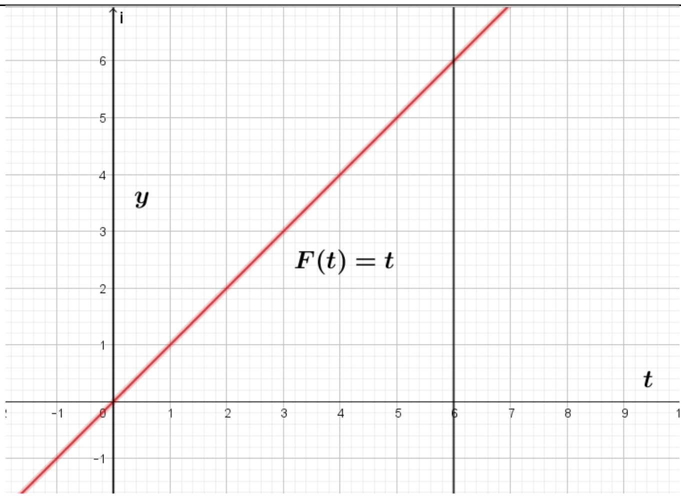


   a. Si $x \in \mathbb{R}, x > 1$ sea $A(x)$ el área de la región bajo la recta $f(t) = 2$ entre $t = 0 \; y \; t = x$
   b. Plantee una expresión para $A(x)$.

   c. Derive $A(x)$ obtenida en el ítem anterior y escriba una conclusión del resultado.

   ____

2. Hallar el área de la región bajo la recta $f(t) = t$ entre $t = 0 \, y \, t = 6$. Utilice fórmulas geométricas.

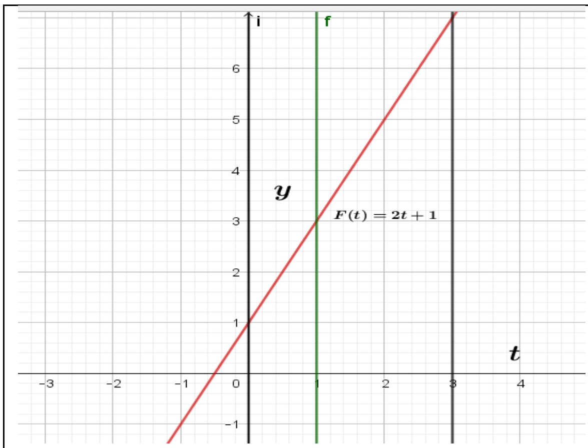


a. Si $x \in \mathbb{R}, x > 1$ sea $A(x)$ el área de la región bajo la recta $f(t) = t$ entre $t = 0$ y $t = x$. Plantee una expresión para $A(x)$.

b. Derive $A(x)$ obtenida en el ítem anterior y escriba una conclusión del resultado.
____.

c. Sea $c \in [0, x]$. Halle $A'(c)$ y $f(c)$ y concluya.
____
____

3. Hallar el área de la región bajo la recta $f(t) = 2t + 1$ entre $t = 1$ y $t = 3$. Utilice la geometría



a. Si $x \in \mathbb{R}, x > 1$ sea $A(x)$ el área de la región bajo la recta $f(t) = 2t + 1$ entre $t = 1$ y $t = x$. Plantee una expresión para $A(x)$.

b. Derive $A(x)$ obtenida en el ítem anterior y escriba una conclusión del resultado.

____

____

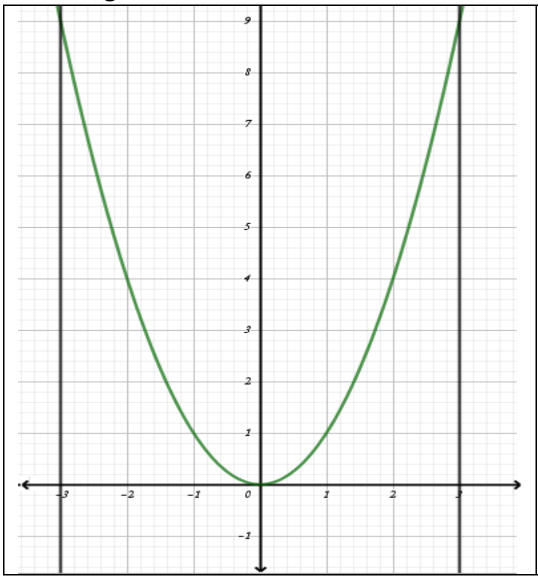
c. Sea $c \in [0, x]$. Halle $A'(c)$ y $f(c)$ y concluya.

____

____

____

4. Hallar el área de la región bajo la función $f(t) = t^2$ entre las rectas $t = -3$ y $t = 3$ Utilice la suma de rectángulos.



a. Sea $x \in \mathbb{R}, x > -3$ sea $A(x)$ el área de la región bajo la función $f(t) = t^2$ entre las rectas $t = -3$ y $t = x$. Calcule el área bajo esa curva con sumas de rectángulos.

b. Derive $A(x)$ obtenida en el ítem anterior y escriba una conclusión del resultado.

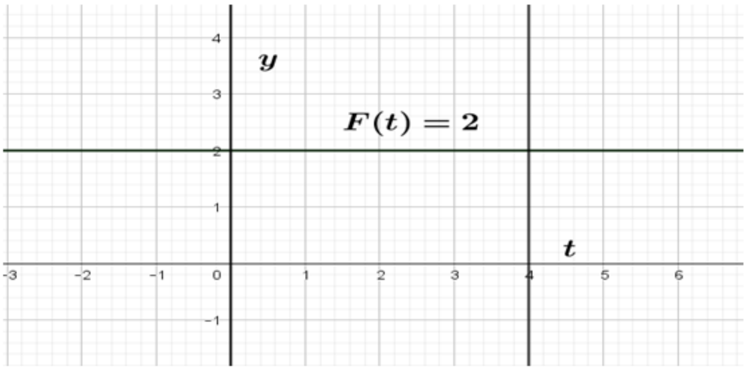
____

____

9.2. Anexo2. (Primera actividad del teorema fundamental de cálculo en software).

La actividad 1 se encuentra disponible:
https://docs.google.com/forms/d/e/1FAIpQLSezZArhGDdFs9LPWjBJNg-ePMNB99Ducu-440pleUC6VIHVew/viewform

1. Hallar el área de la región bajo la recta F(t)=2 entre t=0 y t=4. Utilice fórmulas geométricas. *



Agregar archivo

A. Si x∈R ,x>0 sea A(x) el área de la región bajo la recta F(t)=2 entre t=0 y t=x. Plantee una expresión para A(x). *

Agregar archivo

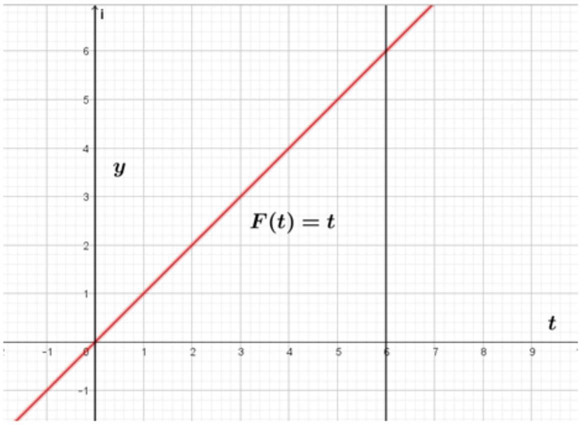
B. Derive A(x) obtenida en el ítem anterior

Agregar archivo

C. Escriba una conclusión del resultado. *

Tu respuesta

2. Hallar el área de la región bajo la recta F(t)=t entre t=0 y t=6. Utilice fórmulas geométricas. *



Agregar archivo

A. Si x∈R ,x>0 sea A(x) el área de la región bajo la recta F(t)=t entre t=0 y t=x. Plantee una expresión para A(x). *

Agregar archivo

B. Derive A(x) obtenida en el ítem anterior *

Agregar archivo

C. Escriba una conclusión del resultado. *

Tu respuesta

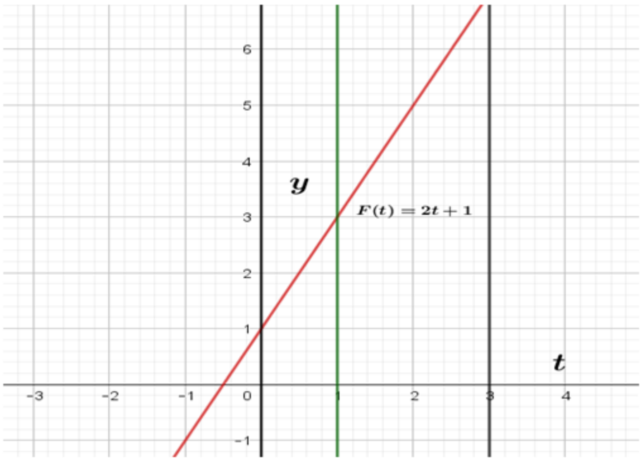
D. Sea c∈[0,x]. Halle A'(c) y f(c) *

Agregar archivo

E. Teniendo en cuenta el ítem D, escriba una nueva conclusión *

Tu respuesta

3. Hallar el área de la región bajo la recta F(t)=2t+1 entre t=1 y t=3. Utilice la geometría *



Agregar archivo

A. Si x∈R ,x>1 sea A(x) el área de la región bajo la recta F(t)=2t+1 entre t=1 y t=x. Plantee una expresión para A(x). *

Agregar archivo

B. Derive A(x) obtenida en el ítem anterior *

Agregar archivo

C. Escriba una conclusión del resultado. *

Tu respuesta

D. Sea c∈[0,x]. Halle A'(c) y f(c) *

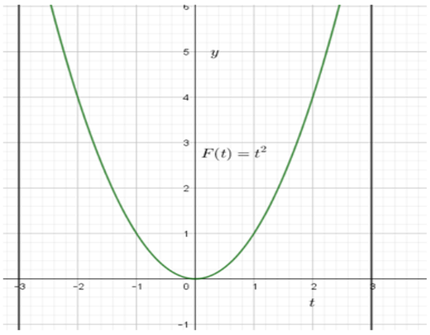
Agregar archivo

E. Teniendo en cuenta el ítem D, escriba una nueva conclusión *

Tu respuesta

Para la última parte del taller puede apoyarse en el siguiente link elaborado en geogebra en caso de que se requiera. (No se requiere en los items C,D,E del punto 4)
https://www.geogebra.org/m/tkybq8kw

4. Hallar el área de la región bajo la función F(t)=t² entre las rectas t=-3 y t=3 Utilice la suma de rectángulos. *



Agregar archivo

A. Haga visible todo en la construcción y explore.

Tu respuesta

B. ¿Qué relación observa entre suma superior, inferior, suma de rectángulos y el área de la función?

Tu respuesta

C. Sea x∈R x>-3. sea A(x) el área de la región bajo la función F(t)=t² entre las rectas t=-3 y t=x. Calcule el área bajo esa curva con sumas de rectángulos.

Agregar archivo

D. Derive A(x) obtenida en el ítem anterior *

Agregar archivo

E. Escriba una conclusión del resultado *

Tu respuesta

5. Ingrese un ejemplo de una función *

Tu respuesta

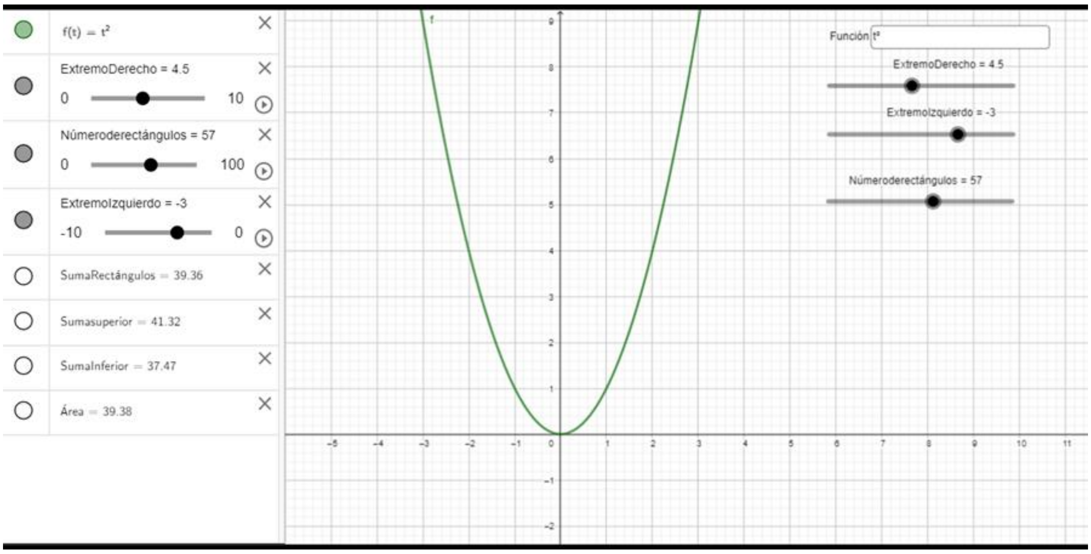
A. Teniendo en cuenta lo resuelto en el taller ¿ Cuál será la expresión A(x)? *

Tu respuesta

B. Teniendo en cuenta lo resuelto en el taller ¿ Cuál será la expresión A'(x)? (Escriba sus conclusiones en términos de la función propuesta en el punto 5) *

Tu respuesta

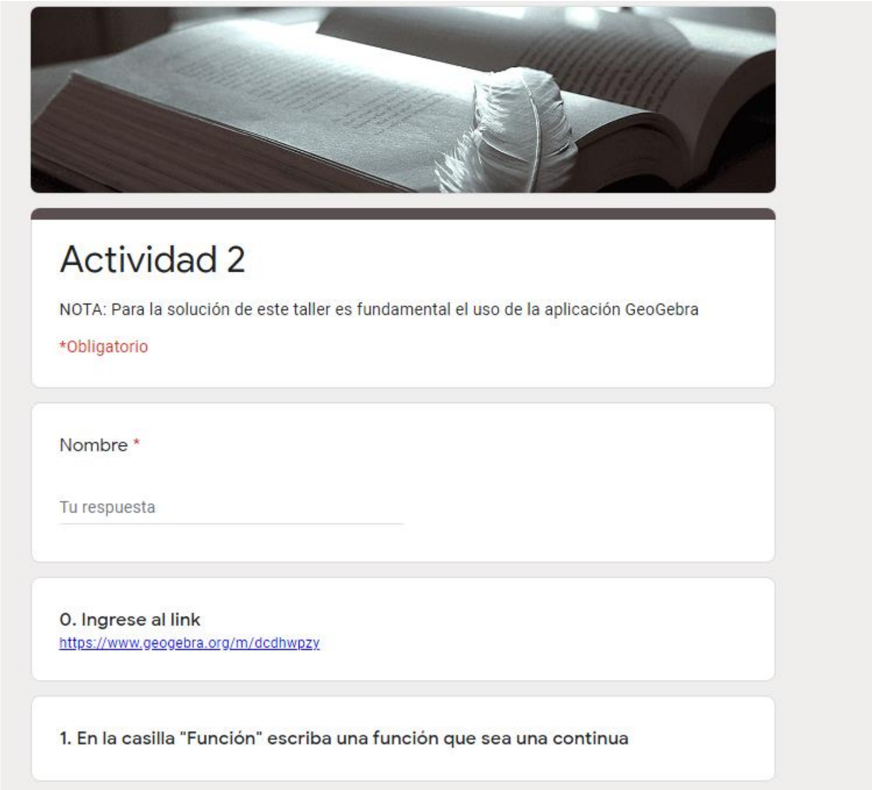
9.3. **Anexo3. (Construcción de apoyo primera actividad del teorema fundamental de cálculo).**



9.4. Anexo4. (Segunda actividad del teorema fundamental de cálculo en software).

La actividad 2 se encuentra disponible en:

https://docs.google.com/forms/d/e/1FAIpQLSfliSXRQZYFzRMcvPqhfVLMOAeLrNor-vRCCf3nEt19JkQ_IQ/viewform



2. Hacer visible la función f

3. Ingresar un intervalo [A,B] en el que la función sea continua

4. Hacer visible a F

5. ¿Qué relación observa que hay entre F y f? *

Tu respuesta

6. Hacer visible los puntos P y Q

7. ¿Qué coordenadas tienen P y Q teniendo en cuenta los valores que le dió a A y a B, con respecto a F? *

Tu respuesta

8. Hacer visible los puntos C y D y el segmentoCD

9. ¿Qué coordenadas tienen C y D teniendo en cuenta las coordenadas de P y Q? *

Tu respuesta

10. ¿Cómo se halla la distancia entre C y D? ¿Cuánto es? *

Tu respuesta

11. Hacer visible área y áreasombreada

12. Hacer visible la distancia CD y comparar el resultado del ítem 10

13 Teniendo en cuenta el ítem 10, 11 y 12 ¿Qué puede concluir? (escriba sus conclusiones en términos de f, F, A y B). *

Tu respuesta

14 Generalizar el proceso para cualquier A y cualquier B. *

Tu respuesta

Enviar

9.5. Anexo5. (Construcción de apoyo segunda actividad del teorema fundamental del cálculo).