

VARIACIÓN (EN EL CÁLCULO) VS VARIABILIDAD (EN LA ESTADÍSTICA):  
UN MARCO DE REFERENCIA

LAURA VIVIANA CÁRDENAS BAUTISTA  
CRISTIAN GIOVANNY CUERVO PÉREZ

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL  
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS  
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS  
BOGOTÁ, D.C.  
2019

VARIACIÓN (EN EL CÁLCULO) VS VARIABILIDAD (EN LA ESTADÍSTICA):  
UN MARCO DE REFERENCIA

LAURA VIVIANA CÁRDENAS BAUTISTA  
CRISTIAN GIOVANNY CUERVO

Trabajo de grado para optar por el título de Licenciados en Matemáticas

Directora:

---

Ingrith Álvarez Alfonso  
Magister en Docencia de la Matemática


UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL  
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS  
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS  
BOGOTÁ, D.C.

2019

## AGRADECIMIENTOS

*A nuestros padres, familiares y amigos quienes nos acompañaron durante todo  
este proceso*


*A nuestra asesora por su interés y comprensión*

 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL <i>Advancing the Pedagogical</i>	<b>FORMATO</b>	
	<b>RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE</b>	
Código: FOR020GIB	Versión: 01	
Fecha de Aprobación: 10-10-2012	Página 4 de 92	

<b>1. Información General</b>	
<b>Tipo de documento</b>	Trabajo de Grado
<b>Acceso al documento</b>	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
<b>Título del documento</b>	Variación (en el Cálculo) vs Variabilidad (en la Estadística): Un marco de referencia.
<b>Autor(es)</b>	Cárdenas Bautista, Laura Viviana; Cuervo Pérez, Cristian Giovanni
<b>Director</b>	Álvarez Alfonso; Ingrith
<b>Publicación</b>	Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional, 2019. 91 p.
<b>Unidad Patrocinante</b>	Universidad Pedagógica Nacional
<b>Palabras Claves</b>	PENSAMIENTO VARIACIONAL, PENSAMIENTO ALEATORIO, CÁLCULO, ESTADÍSTICA, VARIACIÓN, VARIABILIDAD

<b>2. Descripción</b>
<p>En este trabajo de grado se realiza una indagación documental sobre las nociones de variación (en el campo del Cálculo) y variabilidad (en la Estadística), ya que en el transcurso de la formación académica como futuros docentes de matemáticas ha sido una constante encontrarse con que estos términos son utilizados indistintamente.</p> <p>Para esto se inicia una revisión bibliográfica de algunos artículos, libros e investigaciones, con la finalidad de realizar la caracterización y comparación de las dos nociones a la luz de categorías establecidas, para posteriormente identificar si hay diferencia entre ellas o si existe una estrecha relación, que no permite distinguir una de la otra, en el momento de referirse a estas en el entorno del aula de matemáticas.</p>

<b>3. Fuentes</b>
<p>Batanero, C., &amp; Díaz, C. (2011). Estadística con proyectos. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Granada, España.</p> <p>Behar, R. (2018, octubre). Importancia del contexto en la formación del pensamiento Estadístico. Trabajo presentado en el Tercer Encuentro Colombiano de Educación Estocástica [3°ECEE], Popayán, Colombia.</p> <p>Bonilla, M., Romero, J., Narváez, D., &amp; Bohórquez, L. (2015). Características del</p>

 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL <small>Advancing the Education</small>	<b>FORMATO</b>	
	<b>RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE</b>	
Código: FOR020GIB	Versión: 01	
Fecha de Aprobación: 10-10-2012	Página 5 de 92	

proceso de construcción del significado del concepto de variación matemática en estudiantes para profesor de matemáticas. Avances de investigación en educación matemática.

Botella, J., León, O., San Martín, R., & Barriopedro, M. (2001). Análisis de datos en Psicología I. Teoría y ejercicios. Madrid: Pirámide.

Caballero, M., & Cantoral, R. (2013). Una caracterización de los elementos del pensamiento y lenguaje variacional. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 26, pp. 463-46.

Caballero, M., & Cantoral, R. (2017). Una caracterización de la noción sistema de referencia para el tratamiento del cambio y la variación. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Cantoral, R. (2013). Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional. Secretaría de Educación Pública, México D.F., México.

Cantoral, R., & Farfán, R. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. Épsilon, 42(14), 3.

Cantoral, R., Molina, J.G. & Sánchez, M., 2005. Socio epistemología de la predicción. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. México. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Castro, D., & Zabala, J. (2018, octubre). Variación Estadística: un estudio con profesores en ejercicio. En Trabajo presentado en el Tercer Encuentro Colombiano de Educación Estocástica [3°ECEE]. Asociación Colombiana de Educación Estocástica. Popayán, Colombia.


Chaves, E. (2016). La enseñanza de la Estadística y la Probabilidad, más allá de procedimientos y técnicas. Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, (15), pp. 21-31.

Colmenares, E. (2012). Medidas de dispersión, variación o variabilidad, [en línea]. Bogotá: Escuela Colombiana de Carreras Industriales. Disponible en: <https://es.slideshare.net/EnedinaRodriguez/medidas-de-dispersin-variacion-o-variabilidad> [2018, 2 de diciembre].

Departamento Administrativo Nacional de Estadística [DANE], (2008, junio). Estimación e interpretación del coeficiente de variación de la encuesta censal [en línea]. Disponible en: [https://www.dane.gov.co/files/investigaciones/boletines/censo/est\\_interp\\_coefvariacion.pdf](https://www.dane.gov.co/files/investigaciones/boletines/censo/est_interp_coefvariacion.pdf) [2018, 2 de diciembre].

Fernández, F., Andrade, L., & Méndez, M. (2018). Hacia un fortalecimiento de la idea de distribución estadística en la formación de estudiantes para profesores de matemáticas. Manuscrito no publicado, Universidad Pedagógica Nacional, Colombia.

Fernández, F., Andrade, L., & Sarmiento, B. (2009). La idea de variación en la

 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL <i>Advancing the possibilities</i>	<b>FORMATO</b>	
	<b>RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE</b>	
Código: FOR020GIB	Versión: 01	
Fecha de Aprobación: 10-10-2012	Página 6 de 92	

educación estadística. Memorias VIII Encuentro Nacional de Educación Matemática y Estadística. Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá, Colombia.

García, M., & Ruiz, F. (2009). El estudio de la variación, primeras aproximaciones en la educación básica y su efecto en estudiantes de educación superior. X Congreso Nacional de Investigación Educativa. educación y conocimientos disciplinares. Instituto Pedagógico Nacional. México D.F., México.

Garfield, J., & Ben-Zvi, D. (2005). A framework for teaching and assessing reasoning about variability. Consejo editorial del SERJ. University of Minnesota.

Godino, J., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(3): pp.325-355.

Godino, J., Batanero, C., & Roa, R (2005). Análisis ontosemiótico de problemas combinatorios y de su resolución por estudiantes universitarios. (pp. 1-31).

Godino, J. Font V., & Wilhelmi, M. (2006). Análisis ontosemiótico de una lección sobre suma y resta. *RELIME Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. Número Especial, pp. 131-155.

Gould, R. (2011). Variability: One Statistician's view. Department of Statistics, UCLA.

Gómez, J. L. L., & Romero, L. R. (2008). Análisis didáctico y formación inicial de profesores: competencias y capacidades en el aprendizaje de los escolares. 3(1), pp. 35-48.

Hauger, G. (1995). Rate of change knowledge in high school and college students. Ponencia presentada en la reunión anual de la American Educational Research Association. Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association (San Francisco, CA).

Huamán, D. (2011). Fuentes de información. Curso: Módulo 1. Fuentes de información. Centro de gestión de conocimiento OPS/OMS Perú.


Konold, K., & Higgins, T. L. (2003). Reasoning About Data, En J. Kilpatrick; W. G. Martin; D. Shifter, (eds.), *A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics*, National Council of Teachers of Mathematics, VA, USA

López, J., Piovesan, S., & Patrón, C. (2016). Orientaciones para realizar una monografía de revisión. Facultad de Odontología. Departamento de Publicaciones. Uruguay.

Ministerio de Educación Nacional [MEN]. (1998). Lineamientos Curriculares de Matemáticas. Bogotá, Colombia.

Ministerio de Educación Nacional [MEN]. (2004). Pensamiento Variacional y tecnologías computacionales. Ministerio de Educación Nacional. Bogotá, Colombia.

Ministerio de Educación Nacional [MEN]. (2006). Estándares Básicos de

 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL <small>Advancing the Pedagogical</small>	<b>FORMATO</b>	
	<b>RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE</b>	
Código: FOR020GIB	Versión: 01	
Fecha de Aprobación: 10-10-2012	Página 7 de 92	

Competencias en Matemáticas. Bogotá, Colombia.

Peters, S. A. (2011). Robust Understanding of Statistical Variation. *Statistics Education Research Journal*, 10(1).

Pfannkuch, M., & Wild, C. (1999). *Statistical Thinking in Empirical Enquiry*. Department of statistics, University of Auckland. Auckland, New Zealand.

Ramírez, M. (2015). Una mirada a la probabilidad en los libros de texto de secundaria. (Tesis de Maestría). Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá, Colombia.

Reséndiz, E. (2006). La variación en las explicaciones de los profesores en situación escolar. (Tesis de doctorado), CINVESTAV-IPN: Dpto. de Matemática Educativa.


Ruiz, J. (2017). Síntesis de la investigación sobre variabilidad y dispersión en estadística. Trabajo Fin de Máster. Universidad de Granada.

Sánchez, E. (2010). La importancia de la variación en la enseñanza de la Estadística de bachillerato. [en línea]. Disponible en: <https://repensarlasmatematicas.files.wordpress.com/2012/09/s11-importancia-de-la-variacion3b3n-estad3adstica.pdf>

Vrancken, S., & Engler, A. (2014). Una introducción a la derivada desde la variación y el cambio: resultados de una investigación con estudiantes de primer año de la universidad. Universidad Nacional del litoral. Santa fe, Argentina.

#### 4. Contenidos

Desde el programa de pregrado de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, se estructura un trabajo de grado en el cual se busca establecer un marco de referencia para el estudio de las nociones de variación y variabilidad a través de la caracterización y comparación (diferencias y similitudes) de las mismas. Teniendo en cuenta ello, este trabajo se resume en cuatro capítulos; en el primer capítulo se expone la necesidad e importancia que tiene el desarrollo de este trabajo, así como algunas evidencias del problema planteado, que no es más que el uso indistinto de las nociones de variación y variabilidad en los dos campos del conocimiento ya mencionados, situación que genera confusiones tanto en la enseñanza del Cálculo como de la Estadística. Ya que este uso indistinto se presenta tanto en documentos que trabajan estos términos, como en el aula donde se muestran estos, de tal forma que a primera vista parecen ser sinónimos. Adicional a ello como antecedentes se reportan cuatro investigaciones relacionadas con el tema de estudio, una de ellas se preocupa por la enseñanza de estas dos nociones de forma conjunta, las dos siguientes

 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL <i>Advancing the Pedagogical</i>	<b>FORMATO</b>	
	<b>RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE</b>	
<b>Código: FOR020GIB</b>	<b>Versión: 01</b>	
<b>Fecha de Aprobación: 10-10-2012</b>	<b>Página 8 de 92</b>	


especifican el estudio de la variabilidad en la Estadística y la otra trata la enseñanza de la variación en el Cálculo; lo que finalmente conlleva a formular los objetivos, los cuales giran en torno a poder caracterizar y sí es el caso diferenciar estas dos nociones.

En el segundo capítulo se presenta la estrategia metodológica, la cual hace alusión a la revisión bibliográfica, que consiste en la recuperación y recopilación de un conjunto de documentos que se publican sobre un tema específico. Se recolectan y analizan un total de 10 documentos que se emplean como referentes para caracterizar las nociones de acuerdo con el campo de estudio. Se eligen estos documentos teniendo en cuenta sugerencias de profesores de Cálculo y Estadística, bases de datos, memorias de publicaciones de revistas o eventos, y documentos encontrados en la web al buscar “cómo enseñar variación, cómo enseñar variabilidad, variación y variabilidad similitudes y diferencias, y variación en la Estadística”; además, en estos documentos se consideran aspectos como: que presenten o intenten mostrar una descripción o “definición” de las nociones, que muestren elementos matemáticos relacionados con las nociones de variación y variabilidad, y que presenten situaciones a modo de ejemplo donde se identifiquen las nociones de estudio.

En el tercer capítulo se realiza la caracterización de las nociones de variación y variabilidad desde el Enfoque Ontosemiótico, donde se considera principalmente conceptos (introducidos mediante definiciones o descripciones), lenguaje (términos, expresiones, notaciones, gráficos) inmersos en estas; así como el análisis que se puede hacer de las situaciones donde se encuentran inmersas tales nociones. En este mismo capítulo se presenta una comparación de dichas nociones, haciendo un paralelo entre los conceptos, lenguaje y situaciones en común, donde se identifica y analiza si son totalmente diferentes, o si por el contrario se comportan de manera similar en ambos campos del conocimiento, y por ende no es posible realizar una diferenciación entre ellos desde cada uno de los componentes de caracterización asumidos.

Se cierra el documento con el cuarto capítulo en el que se presenta un análisis de los resultados obtenidos en el capítulo anterior, desde donde se concluye que las nociones de estudio son diferentes para cada una de las áreas. Aunque en los dos campos se hace alusión al término variación, este tiene significados distintos, ya que mientras que en el Cálculo se asocia a los conceptos de razón de cambio, función y derivada, en la Estadística se asocia a ideas de dispersión, por lo que es necesario hacer este tipo de diferenciación entre ellas, especialmente en relación con los elementos que se ponen en juego como lo son la variable, parámetros y



 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL <i>Administración de la Calidad</i>	<b>FORMATO</b>	
	<b>RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE</b>	
Código: FOR020GIB	Versión: 01	
Fecha de Aprobación: 10-10-2012	Página 9 de 92	

representaciones gráficas. Mientras que el término variabilidad es utilizado en la Estadística como un sinónimo de variación, haciendo alusión al comportamiento de los datos.


### 5. Metodología

Se realiza una revisión bibliográfica de tipo descriptiva cuya finalidad según López, Piovesan y Patrón (2016) es proporcionar al lector una puesta al día sobre conceptos útiles en áreas de constante evolución, su utilidad en la enseñanza y campos conexos. Además de ser una revisión de tipo integradora que, según dichos autores, pretende demostrar que el autor ha investigado la literatura y evaluado críticamente su calidad, por lo que va más allá de la mera descripción de los documentos identificados, e incluye un grado de análisis e innovación conceptual. Esta revisión bibliográfica se realiza sobre artículos, libros y reportes de investigaciones; para ello se recolectan, organizan y clasifican los documentos. En primera instancia se identifica la noción sobre la que trata el documento (variación o variabilidad) o el área de las matemáticas en la que se centra (Cálculo o Estadística). Se opta por hacerlo de esta forma ya que por ejemplo algunos autores pueden trabajar en Estadística, pero en sus documentos se hace alusión a la noción de variación (la que se ha considerado para este trabajo como parte del Cálculo). Luego de organizar los insumos, se procede a hacer una lectura y análisis detenido de estos a la luz de los criterios que han de permitir diferenciar las nociones, planteados estos desde el Enfoque Ontosemiótico (descripción o “definición” de las nociones; elementos matemáticos relacionados con las nociones de variación y variabilidad, o situaciones), para confrontarlas e identificar diferencias y similitudes.

### 6. Conclusiones

Finalmente, luego de realizar este análisis se logra concluir que la noción de variación, aunque se emplea en ambas áreas (Cálculo y Estadística), ésta es diferente en cada una de ellas. Mientras que para el Cálculo representa y se asocia a los conceptos de razón de cambio, función, límite y derivada, para la Estadística se asocia con la dispersión de los datos. Por otro lado, se encuentra que la noción de variabilidad es utilizada solamente en Estadística y designa el comportamiento de los datos, específicamente en relación con la dispersión.

El diferenciar estas nociones en cada una de las áreas permite que el aprendizaje de estas sea más profundo y significativo, ya que son las ideas que subyacen a

 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL <i>Advancing the Quality of Education</i>	<b>FORMATO</b>	
	<b>RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE</b>	
<b>Código: FOR020GIB</b>	<b>Versión: 01</b>	
<b>Fecha de Aprobación: 10-10-2012</b>	<b>Página 10 de 92</b>	

cada pensamiento y es importante trabajarlas con el propósito de no solo aprender procesos algorítmicos inherentes, sino también los conceptos y constructos que encierran, para que de esta manera se vean beneficiadas aquellas personas que de una u otra manera tienen profesiones donde deben estudiar estos conceptos, y no solo los que estudian carreras a fines con las matemáticas. Es por lo que los primeros actores del proceso pedagógico que deben ser conscientes y hacer dicha diferenciación son los docentes, ya que la enseñanza y aprendizaje debe ir más allá de los procesos algorítmicos, para los cuales se cuentan con diferentes tipos de herramientas (calculadoras, computadores, celulares, etc.); mientras que los procesos como el razonamiento o el inferir recae sobre el ser humano mismo.

<b>Elaborado por:</b>	Cárdenas Bautista, Laura Viviana; Cuervo Pérez, Cristian Giovanni
<b>Revisado por:</b>	Álvarez Alfonso, Ingrith

<b>Fecha de elaboración del Resumen</b>	12	11	2019



FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS  
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

## ACTA DE EVALUACIÓN DE TRABAJO DE GRADO

Presentados y **aprobados** el documento escrito y la sustentación del Trabajo de Grado, en el tipo Monografía, titulado: "**Variación (en el cálculo) vs. Variabilidad (en la Estadística): un marco de referencia**", elaborado por los estudiantes:

**Laura Cárdenas Bautista** código 2014140023 y cédula 1031147420.

**Cristian Geovanny Cuervo Pérez** código 2014140030 y cédula 1033747674.

Como requisito parcial para optar al título de **Licenciado en Matemáticas**, el jurado evaluador asigna **43** puntos al mismo.

Sugerencia de Distinción: Ninguna  Meritoria  Laureada

En constancia se firma a los doce (12) días del mes de marzo de 2020.

Directora del Trabajo: Profesora Ingrith Alvarez A.  
INGRITH ALVAREZ ALFONSO

Jurado: Profesor Harry A. Gomez E  
HARRY AUGUSTO GÓMEZ ESPINOSA

## CONTENIDO

	pág.
CONTENIDO .....	11
TABLAS .....	13
ILUSTRACIONES .....	15
INTRODUCCIÓN .....	1
1. CAPÍTULO 1 .....	3
1.1 PROBLEMA .....	3
1.2 ANTECEDENTES .....	10
1.3 JUSTIFICACIÓN .....	16
1.4 OBJETIVOS .....	17
1.4.1 OBJETIVO GENERAL .....	17
1.4.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS .....	17
2. CAPÍTULO 2 .....	18
3. CAPÍTULO 3 .....	24
3.1 CARACTERIZACIÓN DE LA VARIACIÓN EN EL CÁLCULO .....	24
3.2 CARACTERIZACIÓN DE LA VARIABILIDAD EN LA ESTADÍSTICA .....	43
3.3 RESULTADOS: VARIACIÓN vs VARIABILIDAD .....	63
4. CONCLUSIONES .....	71
REFERENCIAS .....	74

## TABLAS

	pág.
Tabla 1. Relación entre Pensamiento Aleatorio y Pensamiento Variacional .....	4
Tabla 2. Fuentes de información consideradas para este estudio .....	22
Tabla 3. Conceptos [Cr1]. Bonilla, Romero, Narváez y Bohórquez (2015) .....	25
Tabla 4. Lenguaje [Cr2]. Bonilla, Romero, Narváez y Bohórquez (2015) .....	26
Tabla 5. Situaciones [Cr3]. Bonilla, Romero, Narváez y Bohórquez (2015) .....	26
Tabla 6. Conceptos [Cr1]. Caballero y Cantoral (2017).....	28
Tabla 7. Lenguaje [Cr2]. Caballero y Cantoral (2017) .....	29
Tabla 8. Situaciones [Cr3]. Caballero y Cantoral (2017) .....	30
Tabla 9. Conceptos [Cr1]. Vrancken y Engler (2014) .....	32
Tabla 10. Lenguaje [Cr2]. Vrancken y Engler (2014) .....	33
Tabla 11. Situaciones [Cr3]. Vrancken y Engler (2014).....	34
Tabla 12. Conceptos [Cr1]. Cantoral (2013).....	36
Tabla 13. Lenguaje [Cr2]. Cantoral (2013) .....	36
Tabla 14. Situaciones [Cr3]. Cantoral (2013) .....	37
Tabla 15. Conceptos [Cr1]. MEN (2014) .....	39
Tabla 16. Lenguaje [Cr2]. MEN (2014).....	41
Tabla 17. Situaciones [Cr3]. MEN (2014).....	42
Tabla 18. Conceptos [Cr1]. Garfield y Ben-Zvi (2005).....	45
Tabla 19. Lenguaje [Cr2]. Garfield y Ben-Zvi (2005) .....	46
Tabla 20. Situaciones [Cr3]. Garfield y Ben-Zvi (2005) .....	47
Tabla 21. Conceptos [Cr1]. Gould (2011).....	49
Tabla 22. Lenguaje [Cr2]. Gould (2011) .....	50
Tabla 23. Situaciones [Cr3]. Gould (2011) .....	52
Tabla 24. Conceptos [Cr1]. Fernández, Andrade y Sarmiento (2009).....	54
Tabla 25. Lenguaje [Cr2]. Fernández, Andrade y Sarmiento (2009) .....	55
Tabla 26. Situaciones [Cr3]. Fernández, Andrade y Sarmiento (2009) .....	56

Tabla 27. Conceptos [Cr1]. Peters (2011).....	58
Tabla 28. Lenguaje [Cr2]. Peters (2011) .....	58
Tabla 29. Situaciones [Cr3]. Peters (2011).....	59
Tabla 30. Conceptos [Cr1]. Ruiz (2017) .....	61
Tabla 31. Lenguaje [Cr2]. Ruiz (2017) .....	61
Tabla 32. Situaciones [Cr3]. Ruiz (2017).....	62
Tabla 33. Elementos similares en las nociones variación y variabilidad .....	63
Tabla 34. Ejemplo de variable en una situación de variación.....	65
Tabla 35. Ejemplo de variable en una situación de variabilidad .....	65
Tabla 36. Ejemplo de parámetro en una situación de variación.....	66
Tabla 37. Ejemplo de parámetro en una situación de variabilidad .....	66
Tabla 38. Ejemplo de gráfico en variación.....	67
Tabla 39. Ejemplo de gráfico en variabilidad.....	68
Tabla 40. Ejemplo de situación de variación .....	68
Tabla 41. Ejemplo de situación de variabilidad .....	68
Tabla 42. Elementos propios de cada una de las nociones .....	69

## ILUSTRACIONES

	pág.
Ilustración 1. Ejemplo uso indistinto de términos: variación y variabilidad .....	6
Ilustración 2. Representación gráfica de la variabilidad .....	7
Ilustración 3. Presentación para la clase de Estadística .....	8
Ilustración 4. Coeficiente de variación como medida de la variabilidad.....	9
Ilustración 5. Variación Estadística: un estudio con profesores en ejercicio. ....	11
Ilustración 6. Fases de la revisión bibliográfica .....	19

## INTRODUCCIÓN

El presente trabajo de grado muestra un marco de referencia sobre las nociones de variación (en el campo del Cálculo) y variabilidad (en el campo de la Estadística) donde se habla de variación dentro del Pensamiento Variacional y de variabilidad dentro el Pensamiento Aleatorio con el propósito de establecer si estas dos nociones, utilizadas indistintamente en los procesos de formación académica, son totalmente diferentes o si, por el contrario, se habla de la misma noción en ambas ramas de la matemática.

El uso indistinto con el que se trabajan estas nociones ha motivado a los autores del presente documento a preguntarse si realmente son diferentes o si comparten las mismas características (llámense conceptos, objetos, procesos, etc.). Para ello se realiza la caracterización y posterior comparación de las dos nociones, tratando de establecer similitudes o diferencias, a partir de lo que se expone sobre ellas en diferentes documentos escritos.

Para iniciar el estudio se hace el análisis desde los principales referentes curriculares de la educación en Colombia, tales como: Lineamientos Curriculares de Matemáticas [LCM] (MEN, 1998) y, Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas [EBCM] (MEN, 2006). Luego de realizar este análisis se opta por hacer una revisión bibliográfica como metodología de indagación; se consulta y analiza un total de 10 documentos, 5 asociados al Pensamiento Variacional y 5 asociados al Pensamiento Aleatorio. La elección de los textos se debe a que, sin importar el campo de trabajo (Cálculo o Estadística), tratan las nociones de variación y variabilidad.

En seguida, se expone el análisis de los documentos y se presenta la caracterización de las nociones a partir de los conceptos y procedimientos



matemáticos de estas (v.g. variable, razón de cambio, parámetro, cuantificar, predecir, etc.). Luego de realizar esta caracterización, se presenta una comparación entre los componentes inmersos en dichas nociones; comparación que se realiza con la finalidad de establecer qué tan disyuntas son las nociones, si se puede hablar indistintamente de ellas, o si es necesario hacer énfasis en su distinción durante su proceso de enseñanza y aprendizaje, reconociendo similitudes y diferencias, con el objetivo de que no se sigan cometiendo errores en el uso del lenguaje matemático e identificando el contexto matemático (Cálculo o Estadística) en que es pertinente y correcto utilizarlas.

Finalmente presenta a modo de conclusión lo encontrado a partir de esta caracterización. Esto permite responder los cuestionamientos formulados inicialmente: por ejemplo, que efectivamente la variación y la variabilidad son términos distintos cuando se emplean en cada uno de los pensamientos. Sin embargo, desde la Estadística se utilizan los términos variación y variabilidad como sinónimos para estudiar el comportamiento de los datos. El desarrollo de estas conclusiones lleva a proponer de manera global algunas recomendaciones didácticas para el tratamiento de conceptos en los cuales están involucradas las nociones de estudio, tales como: centrarse más en los conceptos de fondo que en los procesos algorítmicos, asociando cada pensamiento a ideas más profundas y no solamente en el Cálculo a las funciones, derivadas e integrales, y en la Estadística a medidas de centro y dispersión. Estas ideas son el puente para llegar a la construcción de la noción de variación y variabilidad, respectivamente.

## 1. CAPÍTULO 1

En este capítulo se detalla el problema de estudio, así como sus antecedentes. Se presentan cuatro trabajos que dan una visión del estado actual del estudio de cada una de estas nociones. Dentro de este capítulo también se expone la justificación que alienta la preocupación y el interés de los autores por caracterizar las nociones e identificar si su uso indistinto trae problemas en la enseñanza-aprendizaje de los campos asociados. Finalmente se muestran los objetivos del trabajo, tanto generales como específicos, los cuales se centran en caracterizar e identificar similitudes y diferencias fundamentales que permitan hacer el contraste entre estas nociones.

### 1.1 PROBLEMA

Desde la experiencia como estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, y en el transcurso de la formación académica como futuros profesores de matemáticas, se observa en los cursos propios de la carrera por parte de los profesores, que los términos variación y variabilidad se usan indistintamente haciendo parecer que el utilizar el uno o el otro en cualquier contexto es correcto.

Analizando esta situación desde la perspectiva de la enseñanza, parece que sin importar el pensamiento que se desee desarrollar (Variacional o Aleatorio), se observa que la prioridad de los estudios se centra en los procesos algorítmicos asociados a los conceptos de estudio, lo que no permite hacer distinción (si es que existe) entre variación y variabilidad. Esta situación va en contravía de lo que proponen los referentes curriculares nacionales, los cuales promueven trabajar en el análisis de conceptos que en procedimientos algorítmicos sin sentido.

Se puede evidenciar en los referentes curriculares de la educación en Colombia, que ni en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas [LCM] (MEN, 1998), ni en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas [EBCM] (MEN, 2006) se encuentra mencionada la palabra variabilidad. Sin embargo, desde los EBCM, en el Pensamiento Aleatorio se recurre a conceptos relacionados con el Pensamiento Variacional. Después de una revisión detallada de dichos documentos, se logra presentar en la Tabla 1 apartes de los referentes que develan la relación que hay entre tales pensamientos y el uso de las nociones en cuestión.

LINEAMIENTOS CURRICULARES DE MATEMÁTICAS (MEN, 1998)	
Pensamiento Aleatorio (Estadística)	Pensamiento Variacional (Cálculo)
Para este pensamiento no se encuentra párrafo alguno que haga referencia a variación o variabilidad.	<p>“De esta forma se amplía la visión de la <b>variación</b><sup>1</sup>, por cuanto su estudio se inicia en el intento de cuantificar la <b>variación</b> por medio de las cantidades y las magnitudes” (p. 49).</p> <p>“Entre los diferentes sistemas de representación asociados a la <b>variación</b> se encuentran los enunciados verbales, las representaciones tabulares, las gráficas de tipo cartesiano o sagital, las representaciones pictóricas e icónicas” (p. 49).</p> <p>“La relación explícita entre las variables que determinan una gráfica puede ser iniciada con situaciones de <b>variación</b> cualitativa y con la identificación de nombres para los ejes coordenados” (p. 50).</p>
ESTÁNDARES BÁSICOS DE COMPETENCIAS EN MATEMÁTICAS (MEN, 2006)	
Pensamiento Aleatorio (Estadística)	Pensamiento Variacional (Cálculo)
“El tratamiento de las situaciones que involucran fenómenos estocásticos hace necesario el recurso a conceptos relacionados con el pensamiento <b>variacional</b> <sup>2</sup> ” (p.70).	“El estudio del cambio se puede iniciar a través del análisis de fenómenos de <b>variación</b> representados en gráficas y tablas. Esta manera de acercarse al pensamiento variacional está muy relacionada con el manejo de los sistemas de datos y sus representaciones” (p. 67).

Tabla 1. Relación entre Pensamiento Aleatorio y Pensamiento Variacional  
Fuente. Propia

<sup>1</sup> Se hace uso de la negrilla para resaltar el uso de la palabra, pero la misma no es original del texto citado.

<sup>2</sup> Esta cita no está asociada directamente al Pensamiento Aleatorio, pero hace parte de las relaciones que se identifican entre los dos pensamientos analizados, según lo que se presenta en los EBCM (MEN, 2006).

Partiendo de estos documentos, se generan confusiones respecto a algunos conceptos que se trabajan en cada uno de los pensamientos mencionados, porque, como es posible observar, los referentes curriculares intentan mostrar una relación al enfatizar en algunas similitudes referidas principalmente a la representación, pero en general no propician el espacio para la diferenciación de estas nociones y recalcan que el estudio de las situaciones que involucran fenómenos estocásticos necesitan recurrir a conceptos relacionados con el Pensamiento Variacional.

Por otro lado, desde la experiencia investigativa de uno de los autores de este trabajo como monitor en el proyecto de investigación “Hacia un fortalecimiento de la idea de distribución estadística en la formación de estudiantes para profesores de matemáticas” (Fernández, Andrade & Méndez, 2018), que se desarrolló durante los periodos académicos 2017-1 y 2017-2 asociado a la línea de investigación en Educación Estadística del DMA-UPN, se logra evidenciar cómo desde la Estadística, al abordar de forma prioritaria los procesos algorítmicos, se trabaja indistintamente las nociones intuitivas de variación y variabilidad, lo que genera confusión no solo lingüística, sino también conceptual, interfiriendo ello en el desarrollo del pensamiento matemático desde la perspectiva del Pensamiento Variacional y el Pensamiento Aleatorio. Dentro de dicho proyecto se aplicó un instrumento de recolección de la información donde se indagaba por la variable estadística a partir de ejemplos, y se encontraron respuestas como: “*Un ejemplo de una variable puede ser X o Y*”, “Se observa sobre variabilidad que: los datos no varían, pero la forma de clasificarlos si puede llegar a variar” (Fernández, Andrade & Méndez, 2018, p. 4).

Por otro lado, en el libro de Botella, León, San Martín y Barriopedro (2001) se puede observar un claro ejemplo del uso indistinto de estas dos nociones:

**TEMA 2.4.**  
**MEDIDAS DE VARIABILIDAD**

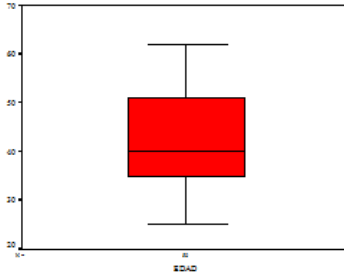
1. INTRODUCCION.
2. MEDIDAS DE VARIACION.
  - 2.1. VARIANZA Y DESVIACION TIPICA.
  - 2.2. CALCULO Y PROPIEDADES DE LA VARIANZA.
  - 2.3. OTRAS MEDIDAS DE VARIACION.
3. REPRESENTACION GRAFICA DE LA VARIABILIDAD.

Ilustración 1. Ejemplo de uso indistinto de términos: variación y variabilidad  
Fuente. Botella, León, San Martín y Barriopedro (2001)

Es evidente como estos autores empiezan hablando de medidas de variabilidad, pero después hablan de medidas de variación, lo que parece indicar que mencionar una o la otra no presenta ninguna diferencia. Lo que es interesante analizar de este documento es que está estructurado para el curso Análisis de datos para la carrera de Psicología en la Universidad de Murcia (España). Esto invita a reflexionar si el proceso de aprendizaje de las personas que hagan uso de este libro no se verá alterado por la falta de distinción entre las nociones, o si simplemente creará un obstáculo cuando se trabaje con otro libro donde si se haga tal distinción. También llama la atención el ir y venir de los términos (y al parecer, por ende, de las nociones) ya que luego de trabajar medidas de variación, tratan la representación gráfica de la variabilidad, nuevamente sin ninguna aclaración que genere distinción.

### **3. REPRESENTACION GRAFICA DE LA VARIABILIDAD.**

#### **REPRESENTACION DE CAJA Y BIGOTES:**



- 1. SE CONSTRUYE UNA "REGLA" QUE INCLUYA LOS VALORES  $X_{\max}$  Y  $X_{\min}$ .**
- 2. CON LOS TRES CUARTILES ( $Q_1$   $Q_2$   $Q_3$ ) SE CONSTRUYE LA CAJA.**
- 3.  $X_{\max}$  Y  $X_{\min}$  SE UNEN A LOS BORDES DE LA CAJA.**

Ilustración 2. Representación gráfica de la variabilidad  
Fuente. Botella, León, San Martín y Barriopedro (2001)

Sin embargo, el trato indistinto de las nociones no solo se encuentra en libros de texto universitarios. El doctor Roberto Behar profesor de la Universidad del Valle, por ejemplo, en la conferencia inaugural del Tercer Encuentro Colombiano de Educación Estocástica [3°ECEE] llamada *Importancia del contexto en la formación del pensamiento Estadístico*, también hizo uso indistinto de estas nociones, ya que habló de variación y variabilidad como si se tratara de una misma noción. Pero el aspecto más notorio del uso indistinto en esta conferencia es el momento en el cual el profesor hace referencia a la importancia de la variabilidad en el Pensamiento Estadístico: al hacerlo se remite inmediatamente a la palabra variación diciendo que “la variación es la razón de la ciencia de la Estadística [...], de descubrir patrones” (Behar, 2018). Pero además es interesante esta última frase de “descubrir patrones” ya que nuevamente haciendo referencia a los LCM se encuentra con que esta es una de las tareas primordiales del Pensamiento Variacional y no del Aleatorio como pretende hacer ver el profesor Behar, puesto que en los LCM se dice que “otra herramienta necesaria para iniciar el estudio de la **variación** desde la primaria la constituye el estudio de los patrones” (MEN, 1998, p. 50).

Un caso más neurálgico se presenta en la clase de Estadística del licenciado Eligio Colmenares, profesor de la Escuela Colombiana de Carreras Industriales en Colombia [ECCI], donde se muestran algunos conceptos estadísticos como la varianza, el rango, coeficiente de variación y la desviación típica, pero sin hacer diferenciación alguna entre variación y variabilidad, es más, se presentan estas nociones de forma tal que pareciera que no importa si se habla de la una o de la otra, tal y como se muestra en la Imagen 3.



**Licdo. Eligio Colmenares**

Ilustración 3. Presentación para la clase de Estadística  
Fuente. Colmenares (2012)

Este caso es más impactante por cómo se presentan estas nociones, ya que en los casos anteriores –como en la conferencia del doctor Behar o en el libro de Botella et al.– no se afirma explícitamente que se pueden trabajar estas nociones sin distinción alguna, como si lo hace el licenciado Colmenares en su presentación, cuando hace uso de la conjunción “o”.

Es importante aclarar que estos usos indistintos no se presentan solamente en el ámbito académico y en las aulas, también se puede identificar en los informes de interpretación presentados por el Departamento Administrativo Nacional de Estadística [DANE] (DANE, 2008), donde hacen referencia a la estimación e interpretación del coeficiente de variación de la encuesta Cencensal para el censo

general del año 2005. Allí, cuando los autores se remiten al coeficiente de variación mencionan que este mide la magnitud de la variabilidad de la distribución, lo que hace pensar en ¿se puede medir la variabilidad a través del coeficiente de variación?

#### COEFICIENTE DE VARIACIÓN

Las estimaciones hechas a través de muestra tienen dos tipos de error, que son:

- Errores ajenos al muestreo: Se presentan por procedimientos de observación imperfectos, estos no dependen directamente del desarrollo matemático, esta clase de errores es inherente a toda investigación estadística. En el Censo General 2005 se minimizó cualquier error de este tipo.
- Errores de muestreo: Se presentan debido a que solo se estudia una fracción de la población total. Los errores de este tipo, se pueden estimar a partir de los resultados obtenidos y permite evaluar la calidad de la estimación, siempre y cuando el diseño muestral sea probabilístico.

La forma de medir el error muestral se hace a través del **coeficiente de variación estimado** (*cve*), el cual mide la magnitud de la variabilidad de la distribución muestral del estimador, es decir, es el indicador del grado de aproximación con que se estiman las características del universo y esta dado por:

$$cve = \frac{\sqrt{\hat{V}(\hat{\theta})}}{\hat{\theta}} * 100,$$

Donde  $\hat{V}(\hat{\theta})$  es la varianza muestral de la estimación del parámetro y  $\hat{\theta}$  es el parámetro estimado, o, en otras palabras, se define como la variación porcentual del error estándar con respecto a su estimación, es decir es el cociente entre el error estándar del estimador y el estimador multiplicado por 100.

Ilustración 4. Coeficiente de variación como medida de la variabilidad  
Fuente. DANE (2008)

Luego de observar estos casos, se ve con preocupación que en la formación como futuros docentes de matemáticas estas nociones han sido descuidadas, por lo que es indispensable estudiar y hacer claridad sobre cuestiones asociadas a las mismas: ¿en qué se diferencian, si es que se diferencian, las nociones de variación y variabilidad y cómo estas influyen en la formación de docentes de matemáticas? ¿Son estas dos nociones totalmente diferentes o por el contrario hay una relación estrecha que no permite diferenciarlas y por ende su uso es indistinto? ¿Realmente es necesario hacer distinción entre ellas? ¿El hablar tan



solo de una de ellas crea vacíos conceptuales que pueden acarrear problemas en la enseñanza que desarrolle el futuro docente en el aula de la educación básica?

## 1.2 ANTECEDENTES

A continuación, se presentan cuatro trabajos que han enfocado su investigación en el estudio de las nociones de variación y variabilidad, así como en propuestas didácticas para su enseñanza, con la finalidad de analizar qué aportan y en qué se quedan cortos frente a los procesos de caracterización de dichas nociones.

El primer trabajo corresponde a la conferencia realizada por los profesores de la Universidad del Tolima (Ibagué, Colombia), Castro y Zabala (2018), en el Tercer Encuentro Colombiano de Educación Estocástica, titulada *Variación Estadística: un estudio con profesores en ejercicio*. En esta conferencia los autores comienzan su exposición hablando sobre qué es la variación y si acaso la variación es sinónimo de variabilidad. Inician con un intento de definición del concepto diciendo que la variación es:

- Acción y efecto de variar.
- Cada uno de los subconjuntos del mismo número de elementos de un conjunto dado, que difieren entre sí por algún elemento o por el orden de estos (Castro & Zabala, 2018).

Y la variabilidad estadística, comprende:

- Aleatoriedad: azar, incertidumbre, desorden, dispersión y desviación.
- Estructura: regularidad, tendencias y distribuciones (Castro & Zabala, 2018).

Luego presentan un cuadro comparativo de la caracterización de estas dos nociones:



Ilustración 5. Variación Estadística: un estudio con profesores en ejercicio  
Fuente. Castro y Zabala (2018)

Los autores finalizan la conferencia concluyendo que el estudio de la variación y la variabilidad en la enseñanza de la Estadística es un tema que sigue en proceso de indagación y en constante evolución, por lo que no logran concluir algo definitivo frente a la diferencia entre estas nociones.

El segundo trabajo lo presenta Chaves (2016) en la Conferencia Interamericana de Educación Matemática titulado *La enseñanza de la Estadística y la Probabilidad, más allá de procedimientos y técnicas*, donde realiza un análisis de la enseñanza de la Estadística y la Probabilidad teniendo en cuenta la importancia que han tomado estas áreas en los currículos escolares. Allí da a conocer experiencias de aula que demuestran que este proceso de enseñanza se ha realizado en forma parcializada, debido a que se hace mayor énfasis en los

procedimientos y técnicas, y no en el análisis que está detrás de la información y los datos que se manejan.

Chaves muestra una serie de situaciones que se presentan en el aula y que dejan en evidencia cómo el enseñar Estadística o Probabilidad únicamente desde los meros algoritmos supone un vacío conceptual que se traduce en errores conceptuales. El autor plantea que el proceso educativo debe potenciar la generación de conocimiento que permita al individuo diferenciar entre aquellos argumentos vinculados con procesos estocásticos que son correctos, y los que no lo son (Chaves, 2016).

De esta manera nace la necesidad de profundizar en los conceptos propios de la Estadística, ya que la importancia de los análisis estadísticos se fundamenta en la resolución de problemas vinculados con datos (Chaves, 2016); de ahí el valor del estudio de la variabilidad ya que ésta es el eje conductor que hace latente la importancia de empleo de diferentes técnicas para el manejo de información (Chaves, 2016). Por ello, en dicho trabajo se propone el capítulo de alfabetización en Probabilidad y Estadística, con el que se pretende favorecer el razonamiento estocástico a través de los cinco componentes que formulan Pfannkuch y Wild (1999) para lograr un adecuado razonamiento Estadístico, como lo son: Reconocer la necesidad de los datos, Percepción de la variabilidad, Transnumeración, Razonamiento con modelos estadísticos e Integración de la estadística y el contexto; haciendo énfasis en el segundo componente, percepción de la variabilidad, donde se explica que los estudiantes deben trabajar en percibir la variabilidad de los datos, la cual genera la incertidumbre sobre el mensaje que comunican. La función principal de la Estadística consiste en establecer estrategias para explicar esta variabilidad y el impacto que provoca en el análisis del problema (Pfannkuch & Wild, 1999).

Aunque Chaves se preocupa por la enseñanza crítica de la Probabilidad y la Estadística, y hace especial énfasis en la importancia de la variabilidad en este proceso, no profundiza en su conceptualización. Ni siquiera presenta algún tipo de caracterización de este concepto, ni estrategias que ayuden a los estudiantes a reconocer la variabilidad en las situaciones de estudio.

Como tercer antecedente se presenta el artículo de Sánchez (2010) titulado *La importancia de la variación en la enseñanza de la Estadística de bachillerato*, donde se propone una reconsideración del concepto de variación en la enseñanza de la Estadística. La manera que sugiere para tratar esta noción en los programas de Estadística no corresponde con la importancia y riqueza del concepto, debido a que el proceso de enseñanza se centra más en los algoritmos, enfatizando en este caso en las medidas de dispersión y en su cálculo. Además de la poca relación que hay con el análisis de datos.

Por todo lo anterior, el autor manifiesta la importancia que tiene la variación en Estadística afirmando que la variación y sus causas cobran un papel central en el Pensamiento Estadístico. También tiene en cuenta el modelo de pensamiento científico que proponen Wild y Pfannkuch (1999) quienes arguyen que “la variación es la razón de ser de la Estadística, sin variación no habría necesidad de Estadística” (p. 201). Por otro lado, Sánchez (2010) menciona a Konold y Higgins (2003) quienes discuten que:

Anticipar y observar la **variabilidad**<sup>3</sup> dentro de un grupo no es difícil. Lo que es difícil es lograr cuantificar la variabilidad y percibir y caracterizar a un grupo como un todo cuando los individuos en el grupo difieren uno de otro (p. 202).

---

<sup>3</sup> Los autores del trabajo resaltan la palabra variabilidad para que se distinga dentro de la cita.

También se observa que este autor fundamenta sus afirmaciones citando autores y textos escritos en lengua inglesa, lo que deja abierta la posibilidad de que se presenten errores de traducción frente a los términos de variación y variabilidad. Es así como Sánchez, al sustentar sus afirmaciones citando autores de habla anglosajona, menciona la variabilidad y la variación sin distinción, utilizando estas nociones sin hacer ningún tipo de claridad sobre si son distintas o si por el contrario se pueden utilizar indistintamente, pues significan lo mismo.

Teniendo en cuenta lo anterior, es evidente que los conceptos relacionados con la variabilidad son fundamentales para la Estadística. Sin embargo, no se logran encontrar reportes que presenten la comprensión de los estudiantes sobre las nociones de dispersión y variabilidad.

El cuarto y último antecedente refiere a García y Ruiz (2009) y el trabajo <sup>14</sup>presentado en el X Congreso Nacional de Investigación Educativa titulado *El estudio de la variación, primeras aproximaciones en la educación básica y su efecto en estudiantes de educación superior*. Los autores presentan los resultados de dos investigaciones realizadas en el Instituto Pedagógico Nacional de México; investigaciones que apuntan al estudio de la variación, siendo un concepto fundamental para analizar fenómenos físicos y de la vida cotidiana.

Dada la importancia de la noción de variación, es interesante observar cómo estudiantes de educación superior, que ya han llevado cursos de Cálculo, tienen dificultades para trabajar con elementos propios de este concepto. Esta dificultad se debe a que los estudiantes inician el estudio de la variación proporcional directa e inversa, y se limitan únicamente al uso de la regla de tres sin darle al concepto de variación el sentido que le corresponde, tal y como lo mencionan García y Ruiz (2009).

Los estudiantes que ya han cursado la asignatura de Cálculo tienen dificultades para: proponer y trabajar con expresiones algebraicas que representan relaciones entre cantidades; obtener información de la gráfica de una función; identificar los intervalos en que es creciente o decreciente; y, relacionar las representaciones tabular, algebraica y gráfica de estas funciones (p. 2).

Para García y Ruiz (2009), el estudio de la variación se fundamenta en el concepto de función, en el modelado del cambio, en la relación de las variables independiente y dependiente y los cambios en la variable dependiente en relación con la independiente. Son estos los elementos que contribuyen al conocimiento de la razón de cambio y la construcción e interpretación de gráficas que representan diferentes fenómenos.

Ahora bien, para que un estudiante logre desarrollar el conocimiento concerniente a la razón de cambio, según Hauger (1995), citado en García y Ruiz (2009), debe identificar el comportamiento de una función: razón de cambio global, en un intervalo y puntual. La razón de cambio global se refiere a las propiedades generales de una función; en un intervalo, al describir el cambio de la variable dependiente para diferentes intervalos en los que se encuentra la variable independiente; y puntual, es decir instantánea, tiene que ver con qué rapidez cambia la variable dependiente respecto a un valor de la variable independiente.

Partiendo de estos temas, la investigación de García y Ruiz se centra en dos objetivos particulares, el primero, es presentar las concepciones de los estudiantes en sus primeras exploraciones, considerando que las variables involucradas en los problemas están relacionadas mediante una variación proporcional (García & Ruiz, 2009); y el segundo es presentar actividades que favorezcan en los estudiantes la construcción del concepto de variación.

Dentro de los objetivos planteados por los autores para desarrollar su investigación, se ve la intención de que los estudiantes construyan el concepto de variación a partir del desarrollo de situaciones problema donde esta hace presencia, pero no se forja una caracterización clara del concepto, a tal punto que se pretende la construcción del concepto sin un horizonte de a dónde se debe apuntar. Pareciera que tratan de alejar a los estudiantes meramente de las ideas de variación que han acogido durante su paso por la escuela, pero sin hacer claro este concepto o una nueva noción que deben adoptar.

### 1.3 JUSTIFICACIÓN

Desde la perspectiva de la enseñanza, al parecer sin importar el pensamiento que se desee desarrollar (Variacional o Aleatorio), se observa que la misma se centra en los procesos algorítmicos asociados a los objetos de estudio. Aunque Caballero y Cantoral (2013) afirman que el estudio de la variación es un elemento necesario para poder significar las ideas y conceptos del Cálculo, el actual discurso matemático escolar no propicia este desarrollo de ideas variacionales. Por otro lado, Reséndiz (2006) dice que el discurso matemático escolar parece inhibir el progreso de ideas variacionales al centrar la atención en el desarrollo de destrezas mecánicas y algorítmicas que no dejan ver la naturaleza variacional propia de los elementos que se estudian en el campo del Cálculo.

Esta misma situación se vivencia en la enseñanza de la Estadística, ya que ella se centra en la memorización y aplicación de fórmulas, más que en un análisis de los datos, emisión de conclusiones y toma de decisiones basados en los mismos. Paraphraseando a Batanero y Díaz (2011), no tiene mucho sentido dedicar horas y horas a la adquisición de algoritmos ya que debido a la presencia de calculadoras y ordenadores esto es obsoleto, por lo que para adelantar la enseñanza de los temas estadísticos debe haber un cambio en el enfoque, recomendando el

desarrollo del razonamiento estadístico y la presentación de la Estadística como instrumento para resolver problemas y no como conjunto de técnicas.

Es así como futuros licenciados de matemáticas, nos encontramos con que se presenta un vacío conceptual en las nociones de variación y variabilidad, y es nuestro interés realizar un estudio de ellas, en donde se identifique las características propias de cada una para, si es el caso, poderlas diferenciar. Esto con el fin de que la enseñanza y el aprendizaje de tales nociones sean significativos, dejando de lado los procesos meramente algorítmicos.

#### 1.4 OBJETIVOS

A continuación, se presentan los objetivos que guían el presente trabajo.

##### 1.4.1 OBJETIVO GENERAL

Generar una propuesta teórica en donde se conceptualicen y diferencien las nociones de variación (en Cálculo) y variabilidad (en Estadística).

##### 1.4.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Identificar características propias de las nociones de variación y variabilidad.
- Establecer similitudes y diferencias que presentan las nociones de variación y variabilidad.
- Proyectar impactos pedagógicos que tiene la diferenciación de las nociones de variación y variabilidad.



## 2. CAPÍTULO 2

En este capítulo se presenta la estrategia metodológica seleccionada para realizar el trabajo. Dicha metodología es la revisión bibliográfica, que consiste en la recuperación y recopilación de un conjunto de documentos que se publican sobre un tema específico; dentro de los documentos se busca y analiza información que permita alcanzar los objetivos propuestos.

Para este trabajo, se propone una revisión bibliográfica de tipo descriptiva e integradora, ya que proporciona al lector una puesta al día sobre conceptos útiles en áreas en constante evolución. También es denominada revisión crítica (López, Piovesan & Patrón, 2016) porque tiene como objetivo demostrar que el autor ha investigado la literatura y evaluado críticamente su calidad.

Se ha escogido este tipo de revisión bibliográfica ya que, más allá de describir los documentos que son consultados, se busca llevar a cabo un análisis y una crítica de estos. La revisión bibliográfica, según López, Piovesan y Patrón (2016), permite planificar y, de manera sistemática, examinar los documentos que se pretenden como fuente para el estudio, e ir seleccionando la información pertinente que conlleve el desarrollo de las ideas que respondan a las necesidades que se plantean. Para desarrollar este tipo de tarea los autores proponen que se debe determinar con claridad los temas de estudio, la adecuada documentación, el sumario ordenado y la referencia de los orígenes de la información.

Para llevar a cabo esta metodología se deben tener en cuenta los siguientes pasos:

1. Organización de los temas expuestos. Es una estrategia que sirve a la construcción de nuevo conocimiento al desarrollar la habilidad para organizar los datos.

2. Adecuada documentación. Es una característica fundamental de la revisión bibliográfica, ya que consiste en revisar qué se ha escrito y publicado sobre el tema o área de la investigación, que sea acorde y ayude a nutrir el desarrollo de trabajo.
3. Sumario ordenado y la referencia de los orígenes de la información. Es un instrumento riguroso que se formula lógicamente y que implica el análisis crítico de información relevante, documentación escrita y sus contenidos. Además, el desarrollo de este es una actividad que obedece a procesos inductivos (recolección y sistematización de los datos) y deductivos (interpretación y nueva construcción).

Bajo los pasos anteriores, se propone un esquema denominado *Fases de la revisión bibliográfica*, el cual sintetiza la organización del estudio que se pretende llevar a cabo en el presente trabajo de grado.

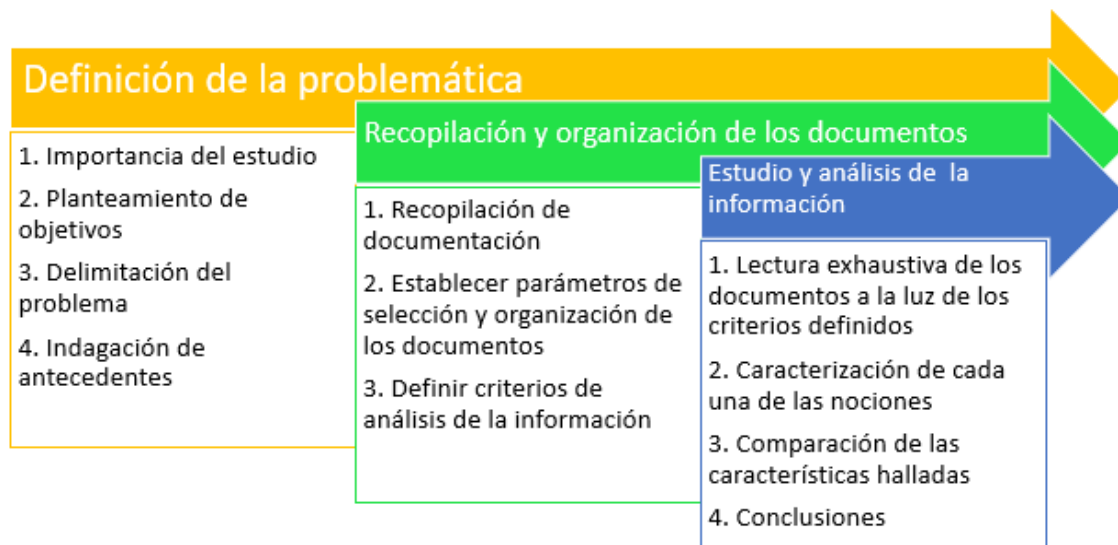


Ilustración 6. Fases de la revisión bibliográfica  
Fuente. Propia

Para el desarrollo de la primera fase, y como se mencionó en un apartado anterior, la problemática emergió desde la experiencia investigativa de uno de los autores de este trabajo como monitor en un proyecto de investigación asociado a la línea de investigación en Educación Estadística del DMA-UPN. En esta experiencia se

logra evidenciar cómo desde la Estadística, al abordar de forma prioritaria los procesos algorítmicos, se trabajan indistintamente las nociones intuitivas de variación y variabilidad, lo que genera una serie de confusiones tanto lingüísticas como conceptuales en relación con estas dos nociones. Seguido, se realiza la indagación de antecedentes, para esto se consulta bibliografía relativa a la enseñanza y, la caracterización y comparación de dichas nociones. Finalmente se procede a explicitar la importancia de realizar este estudio para delimitar los objetivos que dan un horizonte al mismo, que en este caso es la caracterización y posterior comparación de las nociones de variación y variabilidad.

Para llevar a cabo la segunda fase, recopilación y organización de los documentos, se recurre a fuentes de información, entendidas según Huamán (2011) como “diversos tipos de documentos que contienen información para satisfacer una demanda de información o conocimiento” (p. 4), para este caso la demanda de conocimiento es la caracterización y diferenciación de las nociones de variación y variabilidad. Entre ellas se encuentran, tesis, patentes, trabajos de conferencias, opiniones de expertos y publicaciones oficiales.

Para determinar dichas fuentes, primero se realiza una recopilación de documentos teniendo en cuenta sugerencias de profesores de Estadística y de Cálculo (Orlando Aya, Nubia Soler, John Jairo Zabala, entre otros) y documentos encontrados en la web al realizar búsquedas respecto a: cómo enseñar variación, cómo enseñar variabilidad, variación y variabilidad similitudes y diferencias, variación en la Estadística.

Seguido a esto, se procede a determinar los parámetros de selección y organización de la información, por lo que se consolida un listado de las fuentes, teniendo en cuenta que esta selección se realiza fundamentalmente por su campo de acción (Cálculo y Estadística) y por el trabajo que se hace sobre las nociones que son objeto de estudio (variación y variabilidad). Tal selección se realiza de

forma independiente para cada noción ya que se ha dificultado encontrar trabajos que desarrollen las dos nociones de forma simultánea y más aún que las caracterice o las comparen.

Para seleccionar las fuentes de información que se van a tener en cuenta para revisión, se consideran los siguientes parámetros:

- Que presenten o intenten mostrar una descripción o elementos que permiten o aportan a la construcción de la noción.
- Que muestren elementos matemáticos relacionados con las nociones de variación y variabilidad.
- Que presenten situaciones, puede ser a modo de ejemplo o ejercicios, donde se trabajen las nociones de estudio.

Luego de establecer los parámetros y atendiendo a estos, se revisan los documentos acopiados para ser parte del análisis, y se eligen los siguientes:

Variación en el Cálculo	Variabilidad en la Estadística
<b>ARTÍCULOS</b>	
<p>Bonilla, M., Romero, J., Narváez, D., &amp; Bohórquez, L. (2015). Características del proceso de construcción del significado del concepto de variación matemática en estudiantes para profesor de matemáticas. <i>Avances de investigación en educación matemática</i>, (7), 73-93.</p> <p>Caballero, M., &amp; Cantoral, R. (2017). Una caracterización de la noción sistema de referencia para el tratamiento del cambio y la variación. <i>Acta Latinoamericana de Matemática Educativa</i>.</p> <p>Vrancken, S., &amp; Engler, A. (2014). Una introducción a la derivada desde la variación y el cambio: resultados de una investigación con estudiantes de primer año de la universidad. Universidad Nacional del litoral. Santa fe, Argentina.</p>	<p>Garfield, J., &amp; Ben-Zvi, D. (2005). <i>A framework for teaching and assessing reasoning about variability</i>. Consejo editorial del SERJ. University of Minnesota.</p> <p>Gould, R. (2011). <i>Variability: One Statistician's view</i>. Department of Statistics, UCLA.</p> <p>Fernández, F., Andrade, L., &amp; Sarmiento, B. (2009). La idea de variación en la educación estadística. <i>Memorias VIII Encuentro Nacional de Educación Matemática y Estadística</i>. Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá – Colombia.</p> <p>Peters, S. (2011). Robust understanding of Statistical variation. <i>Revista de investigación en educación estadística</i>. University of Louisville.</p>
<b>Libros</b>	
<p>Cantoral, R. (2013). <i>Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional</i>.</p>	

Secretaría de educación pública. México D.F., México. Ministerio de Educación Nacional [MEN]. (2004). Pensamiento Variacional y tecnologías computacionales. Bogotá-Colombia.	
Investigaciones	
	Ruiz J. (2017). Síntesis de la investigación sobre variabilidad y dispersión en Estadística. Universidad de Granada.

Tabla 2. Fuentes de información consideradas para este estudio  
Fuente. Propia

Así, de un total de 30 documentos recolectados (11 de Cálculo y 19 de Estadística) se escogieron 5 para cada una de las áreas, los cuales cumplían a cabalidad los parámetros establecidos. Por último, se determinan los criterios de análisis de la información, y para ello se tiene en cuenta el enfoque Ontosemiótico que según Ramírez (2015) es un marco teórico que ha surgido en el seno de la didáctica de las matemáticas, con el propósito de articular diferentes puntos de vista y nociones teóricas sobre el conocimiento matemático, su enseñanza y aprendizaje. Algunos de los autores que han desarrollado esta teoría en sus trabajos, citados por Ramírez (2015), son Godino, Batanero y Roa (2005), Godino y Batanero (1994) y Godino, Font y Wilhelmi (2006), quienes desarrollan un sistema de nociones que según Ramírez (2015):

Permiten dar respuesta a la cuestión del significado de los conceptos matemáticos, y toman como primitiva la noción de “situación–problema” para introducir las nociones de sistema de prácticas (matemáticas), objetos emergentes de los sistemas de prácticas y significado conceptual de un objeto matemático (p. 31).

Es así como, de estos trabajos se destaca el de Godino, Batanero y Roa (2005, p. 25) citado por Ramírez (2015), en el cual se plantean dos tipos de objetos que intervienen en la práctica matemática, los objetos ostensivos (símbolos, gráficos, etc.) y los objetos no ostensivos (conceptos, proposiciones, entre otros). Pero

también proponen una tipología de objetos matemáticos primarios o elementos primarios, los cuales se enuncian a continuación:

- Conceptos (introducidos mediante definiciones o descripciones).
- Propiedades o atributos de los objetos mencionados que suelen darse como proposiciones o enunciados.
- Situaciones (problemas más o menos abiertos, aplicaciones extra-matemáticas o intra-matemáticas, ejercicios, etc.).
- Acciones del sujeto ante las tareas matemáticas (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo, procedimientos, etc.).
- Argumentos (enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos, deductivos o de otro tipo).
- Lenguaje (términos, expresiones, notaciones, gráficos) en sus diversos registros (oral, escrito o gestual).

Para efectos de lo que se pretende en este trabajo, se tienen en cuenta tres de los seis elementos que proponen Godino, Batanero y Roa (2005, p. 25):

- [Cr1] Conceptos (introducidos mediante definiciones o descripciones).
- [Cr2] Lenguaje (términos, expresiones, notaciones, gráficos).
- [Cr3] Situaciones (problemas más o menos abiertos, aplicaciones extra-matemáticas o intra-matemáticas, ejercicios).

Para el análisis de los documentos que se han seleccionado, cabe resaltar que no es necesario que se encuentren los tres elementos (criterios) de manera simultánea dentro de los textos, pero sí se requiere que se encuentren al menos los dos primeros, con el fin de contar con insumos mínimos para el análisis.

Para desarrollar la tercera fase, estudio y análisis de la información, se tiene en consideración los criterios mencionados anteriormente, los cuales permiten una lectura exhaustiva de cada documento. Dicha lectura conllevará a caracterizar cada noción para luego hacer la comparación.

### 3. CAPÍTULO 3

Este capítulo presenta el desarrollo del estudio, en el cual se retoman las fases de la metodología. Aquí se valoran los documentos seleccionados (después de la organización y clasificación, según los parámetros) a la luz de los criterios establecidos, relacionando los hallazgos con los códigos Cr1, Cr2 y Cr3 asociados a tales criterios, lo cual permitirá la caracterización de cada una de las nociones, para la posterior comparación (diferencias y similitudes). En un primer momento se caracteriza la variación desde el Cálculo y luego la variabilidad desde la Estadística, para finalmente establecer un comparativo entre estas dos nociones.

#### 3.1 CARACTERIZACIÓN DE LA VARIACIÓN EN EL CÁLCULO

Para la caracterización de la noción de variación se tuvo en cuenta tres (3) artículos y dos (2) libros. Este análisis pretende identificar los criterios establecidos para la construcción de la noción de variación.

El primer artículo que se analiza es el de Bonilla, Romero, Narváez y Bohórquez (2015), quienes presentan el proceso de construcción del concepto de variación en estudiantes para profesores de matemáticas. Para ello realizan un experimento de enseñanza basado en dos situaciones particulares donde utilizan la derivada y la programación lineal como modelos matemáticos de la variación. Este experimento apunta a la construcción de una comunidad de aprendizaje que estudia la variación y a la estructuración del concepto de variación a través del trabajo con estos modelos.

Así, desde lo reportado en dicho documento (Tabla 3), los autores presentan una definición y dos conceptos puntuales [Cr1]. La primera se expresa desde la definición de variación matemática como cuantificación del cambio, asociando a ello los conceptos de dos modelos matemáticos: la derivada y la programación

lineal. Este tratamiento de los conceptos apunta a la ampliación de las nociones ya existentes en los estudiantes. Cabe resaltar que este estudio de la noción variación se estructura desde dos conceptos (derivada y programación lineal), ya que esta se entiende como la cuantificación del cambio en situaciones con magnitudes continuas y discretas.

<b>[Cr1] CONCEPTOS (DEFINICIONES O DESCRIPCIONES)</b>	
<p>En la página 75, dentro del apartado “La variación como contenido de aprendizaje de los estudiantes para profesores” se presenta la siguiente definición:</p> <p><i>La variación matemática se entiende como la cuantificación del cambio en diversas clases de situaciones con magnitudes continuas y discretas (Cantoral &amp;</i></p> <p>Esta definición es tomada de Cantoral y Farfán (1998); y Cantoral, Molina y Sánchez (2005).</p>	<p>En la página 77 dentro del apartado donde se propone el experimento de enseñanza, se presentan dos modelos matemáticos que permiten cuantificar este cambio, uno de ellos es la derivada, asociada a la cuantificación del cambio con magnitudes continuas.</p> <p><i>matemáticos, la derivada como una medida de la velocidad de cambio en un contexto continuo y la programación lineal como un contexto para modelar la covariación con</i></p>

Tabla 3. Conceptos [Cr1]. Bonilla, Romero, Narváez y Bohórquez (2015)  
Fuente. Propia

Para el criterio relacionado con el lenguaje [Cr2], aunque los autores no expresan explícitamente la necesidad de trabajar las definiciones de términos relacionados con el significado de variación, desde lo reportado en el texto se identifica que dicha definición se relaciona constantemente con palabras o expresiones presentes en proposiciones donde se modelan las situaciones de variación (Tabla 4). Estos términos son: cambio, variable, parámetro, cuantificador, relaciones funcionales, relaciones de covariación y optimización.

<b>[Cr2] LENGUAJE (TÉRMINOS, EXPRESIONES, NOTACIONES, GRÁFICOS)</b>
<p>Los términos resaltados en verde se utilizan reiteradamente durante la exposición del documento, entre ellos: variable, parámetro, cuantificadores, relaciones funcionales y relaciones de covariación; todos ellos son presentados en proposiciones matemáticas donde se pueden reconocer con facilidad.</p>



de situaciones en la que esta presente alguna forma de cambio y su cuantificación. Esto puede traducirse en proposiciones matemáticas que involucren el reconocimiento de variables, parámetros, cuantificadores, relaciones funcionales y relaciones de covariación, y un objetivo: la optimización. En nuestra experimentación en formación de profesores y adoptando una aproximación basada en la resolución de problemas

Tabla 4. Lenguaje [CR2]. Bonilla, Romero, Narváez y Bohórquez (2015)  
Fuente. Propia

Ahora bien, para el criterio relacionado con situaciones [Cr3] se encuentran dos escenarios particulares (Tabla 5) propuestos para trabajar de manera concisa los modelos matemáticos (derivada y programación). Lo que buscan dichos autores con estos problemas es que los estudiantes logren identificar la variación trabajando con magnitudes continuas y discretas, así como los parámetros, variables y todos aquellos elementos relacionados con la noción de variación.


<b>[Cr3] SITUACIONES (PROBLEMAS, APLICACIONES O EJERCICIOS)</b>	
<p>Dentro del marco del experimento de enseñanza que se expone, en la página 78 se propone el siguiente ejercicio:</p>	<p>El segundo problema, página 78, apunta al segundo modelo matemático (programación lineal) y este es:</p>
<p><i>Problema 1. La resistencia de la Viga.</i> La resistencia de una viga de sección rectangular es proporcional al producto de su ancho <math>a</math> por el cuadrado de su altura <math>h</math>. Se quiere aserrar un tronco de madera de forma cilíndrica con diámetro <math>\phi</math> Ødado, una viga de sección rectangular. Pierre asegura que es posible encontrar las dimensiones de la viga de mayor resistencia, calculándolas por medio de pequeñas alteraciones a una de las dimensiones. ¿Estás de acuerdo con esta afirmación?</p>	<p><i>Problema 2. El problema de la fábrica.</i> Una fábrica de partes de avión hace motores y hélices. El costo de producción de los dos productos, no puede superar el millón de dólares. La empresa está entrando en liquidación y necesita ejecutar la mayor cantidad del presupuesto. ¿Cuál es y cómo se adquiere el mayor costo de producción en función de las unidades vendidas de cada una?</p>
	<p>Se evidencia en este modelo la relación entre costos de producción, cantidad de objetos a producir y máxima inversión que se puede realizar (en millones de dólares).</p>
<p>Este problema permite cuantificar el cambio (asociado al concepto de variación) en cuanto a la resistencia del material y las dimensiones de este.</p>	

Tabla 5. Situaciones [Cr3]. Bonilla, Romero, Narváez y Bohórquez (2015)  
Fuente. Propia

Es atrayente el trabajo que realizan los autores al proponerse construir el concepto de variación desde situaciones particulares, ya que la labor permite a los estudiantes refinar y conceptualizar dicha noción. Sin embargo, surge el

interrogante en cuanto a qué otros conceptos o situaciones permiten caracterizar un concepto presente casi en todas las actividades de la vida cotidiana en donde hay cambio, es decir, queda abierta la puerta para nutrir este concepto desde diferentes situaciones y no solo desde las expuestas. Más si tenemos en cuenta que según Gómez y Romero (2008) la enseñanza de las matemáticas inicia con el análisis de contenido, donde el profesor identifica y organiza la multiplicidad de significados de un concepto. De manera que el tener más escenarios de aplicación o reconocimiento del concepto conduce a que la estructura cognitiva sobre el mismo se amplíe y profundicé; esto lo resume Gómez y Romero (2008) en lo que llama el análisis cognitivo ya que el profesor se plantea hipótesis de cómo los escolares pueden progresar en la construcción de conocimiento sobre la estructura matemática cuando se enfrentan a las diferentes tareas. Por esta razón, este experimento de enseñanza es insuficiente para la caracterización de la noción de variación, ya que no bastan las situaciones para caracterizar una noción presente en infinidad de momentos del diario vivir.

El segundo artículo considerado para la caracterización de la noción de variación en el Cálculo es el de Caballero y Cantoral (2017) quienes realizan una investigación que se enfoca en conocer cómo los estudiantes construyen la noción de variación. Dicha construcción la realizan tomando como base el sistema de referencia al cual se le asocian cuatro elementos fundamentales: variable, unidad de referencia, unidad de medida y temporización. Estos elementos son esenciales ya que dan cuenta de cuatro aspectos: ¿qué cambia?, ¿respecto de qué cambia?, ¿cuánto cambia? y ¿cómo cambia?, respectivamente.

Ahora bien, para el primer criterio [Cr1] se encontraron las definiciones de cambio y variación (Tabla 6). Es así como los autores identifican que **la variación es la cuantificación del cambio** pero que a su vez el cambio es la modificación de estado que se presenta en cualquier situación. Además de estas nociones los autores hablan de las estrategias variacionales, que, si bien no permiten construir

la noción de variación, si permite operarla, es decir describirla, cuantificar el cambio, además de reconocer el patrón de regularidad del cambio. Finalmente presentan dos conceptos fundamentales en la construcción de la variación, la causalidad, que permite identificar por qué cambia, y la temporalización que permite describir cómo cambia.

<b>[Cr1] CONCEPTOS (DEFINICIONES O DESCRIPCIONES)</b>	
<p>En la introducción del documento, página 1058, los autores presentan dos nociones que se relacionan: cambio y variación.</p> <p><small>Dentro del PVL, el cambio consiste en toda modificación de estado (posición, forma, altura, peso, etc.), en tanto que la variación se refiere como una cuantificación particular de dicho cambio, no solo en el sentido de empujar una unidad con un número sino también al reconocer aspectos medibles en un fenómeno o situación (Caballero, 2016), ya sea de naturaleza cualitativa o cuantitativa.</small></p> <p>Es así como se dice que el cambio es la modificación de estado en cualquier situación, y la variación es la cuantificación de dicho cambio, pero aquí lo que realmente interesa es la diferencia entre estas dos nociones, ya que, si bien una es la cuantificación de la otra, el cambio se puede percibir en la situación de estudio, lo que no sucede con la variación, ya que como lo dicen los autores es una abstracción de orden superior.</p>	<p>También, en la página 1058, los autores mencionan que la variación no es explícita, es decir, que no se logra identificar a simple vista en las situaciones donde está inmersa. A su vez mencionan que esta se construye luego del análisis de las situaciones mismas.</p> <p><small>La variación no es explícita en los fenómenos, no se observa, sino que se infiere, se calcula, se mide, y por tanto, se construye. Investigaciones previas han mostrado como la variación se opera mediante el uso de estrategias variacionales (Caballero y Cantoral, 2013), pero ahora nos interesa conocer cómo se construye la noción de variación, o dicho de otra forma, ¿cómo opera el pensamiento humano</small></p> <p>Estas estrategias permiten describir el cambio dentro de una situación de variación. Para ello la primera estrategia es la comparación para cuantificar el cambio; seguido se encuentra la seriación, que permite caracterizar el patrón de regularidad de la variación, y finalmente están la estimación y predicción que permiten anticipar sucesos dentro las situaciones de variación.</p>
<p>Para el desarrollo del sistema de referencias que proponen los autores, se hace necesario articular dos conceptos: la causalidad y la temporalización.</p> <p><small>El reconocimiento de una causalidad entre variables (la modificación de una resulta en la modificación de la otra) da pie al reconocimiento del cambio, esto debido a que los datos (sean numéricos, gráficos, verbales) ya no se conciben aislados sino provenientes de una relación particular. Identificar dichas relaciones suele ser omitido en la actividad escolar, dando prioridad a la operatividad de la función, en particular a un tratamiento algebraico.</small></p> <p>La causalidad puede resumirse en identificar si realmente hay una causa de relación entre las variables dentro de la situación de variación, es decir si realmente una variable afecta a la otra. Es así como por medio de la causalidad se reconoce la variación (por qué cambia).</p>	<p>El segundo de los conceptos que se articula es temporalización del cambio.</p> <p><small>Buscamos para usar las estrategias de comparación y seriación, lo que permite dar cuenta de la evolución del cambio. A esto lo denominamos establecer una temporalización del cambio, noción que proviene de la perspectiva piagetiana sobre el desarrollo de la noción de tiempo, aspecto retomado en (Caballero y Cantoral, 2014).</small></p> <p>Concepto clave para identificar cómo se produce el cambio en el tiempo, lo que permite reconocer sucesos intermedios, así como describir, caracterizar y cuantificar el comportamiento de las variables inmersas, es decir identificar cómo cambia.</p>

Tabla 6. Conceptos [Cr1]. Caballero y Cantoral (2017)  
Fuente. Propia

Para el segundo criterio [Cr2], es sugestivo observar que si bien no se hace una descripción explícita de términos relacionados con variación, como lo son: función,

derivada, pendiente, razón de cambio (Tabla 7), si se menciona que el estudio de esta y el cambio, durante la historia han dado pie para la significación y aprendizaje de tales conceptos.

<b>[Cr2] LENGUAJE (TÉRMINOS, EXPRESIONES, NOTACIONES, GRÁFICOS)</b>
<p>Dentro del artículo los autores hacen alusión a varios conceptos como lo son: pendiente, derivada, variable y función.</p> <p>Diversos trabajos han incorporado el estudio del cambio y la variación para la significación y aprendizaje de conceptos matemáticos, ya sea para la construcción de conceptualizaciones más avanzadas de la noción de pendiente y derivada (Nagle, Moore-Russo, Viglietti y Martin, 2013), para dotar de un carácter dinámico a los conceptos de variable y función (Yüksel y Soybaş, 2009), o propiciar un vínculo entre las diferentes conceptualizaciones de la idea de derivada (Sánchez, García y</p> <p>Si bien no se describen ni definen dentro del documento, los mismos autores aclaran que el estudio de la variación ha dado cabida a la significación y al aprendizaje de estos, pero que para efectos de ese estudio estas nociones no se profundizan ya que siempre se caracterizan desde la noción de variación, pero nunca se prioriza la construcción de tal constructo.</p>

Tabla 7. Lenguaje [CR2]. Caballero y Cantoral (2017)  
Fuente. Propia

Finalmente, para el tercer criterio [Cr3] se identifican dos situaciones (Tabla 8). La primera de ellas se propone a manera de ejemplo para mostrar cómo se razona usualmente frente a las situaciones de variación, ya que generalmente percibimos el cambio, pero no profundizamos en las condiciones en las que este se da. La segunda es un ejercicio propuesto como experimento de enseñanza para reconocer las fases del sistema de referencia para la construcción de la variación. Cabe resaltar que los autores enfatizan en que los sistemas de referencia se presentan de manera explícita, como se muestra a continuación.

<b>[Cr3] SITUACIONES (PROBLEMAS, APLICACIONES O EJERCICIOS)</b>
<p>La primera de las situaciones presentadas en el documento es un ejemplo que permite reconocer que, si bien el estudiante se percata del cambio en las situaciones, este no termina de reconocer la variación inmersa en ellas, ya que no tiende a preguntarse de qué modo se produjo este cambio.</p>

...si bien nos percatamos del movimiento de las personas, de su cambio de posición, casi nunca nos cuestionamos por la forma en que se producen dichos cambios, aun cuando podríamos percatarnos de ello: si el movimiento era uniforme, si se presentaban variaciones, es decir, se movían cada vez más rápido o más lento o si alternaban este comportamiento. Menos llegamos a establecer algún sistema de medida para darle valor a esas variaciones del cambio. Es decir, si bien percibimos y comprendemos lo que cambia, el analizar los cambios de ese cambio no es tan natural. Se requiere de un segundo nivel de elaboración teórica, de una abstracción de segundo orden, dando lugar al concepto de variación (Cabrera, 2009, p. 51).

La segunda situación que se propone es un experimento de enseñanza para identificar la forma en que razona el estudiante mediante el sistema de referencia expuesto. Es así como el estudiante más allá de utilizar las estrategias variacionales para operar en la situación construye la noción de variación en cuanto debe identificar cómo se produce este cambio dentro de la situación.

La actividad en concreto que analizamos corresponde a las respuestas de uno de los tres estudiantes. Jacob, al pedirle que bosqueje la gráfica que exprese el incremento de volumen al incrementarse la altura para una botella en concreto (ver figura 2).



Figura 2. Botella correspondiente a la actividad de Johnson (2015)

Tabla 8. Situaciones [Cr3]. Caballero y Cantoral (2017)  
Fuente. Propia

Este artículo es atractivo porque es de los pocos que trazan una hoja de ruta que le permita al lector construir la noción de variación, es decir, que se preocupa por identificar que la noción de variación no es un ente explícito dentro de determinada situación, sino que realmente hay que tener una estrategia para reconocerla, siendo considerada una abstracción superior dentro de las situaciones de variación. Por otro lado, sobresale el aporte que se hace a la enseñanza de esta noción ya que recalcan insistentemente que no se debe procurar la observación y constatación del cambio sino identificar qué y cómo se produce; además de sugerir que, si bien los sistemas de referencia son una estrategia para construir este concepto, pueden ser un arma de doble filo al trabajarlos de forma explícita pues inhiben el desarrollo de ideas y lenguaje variacional.

El tercer y último artículo objeto de análisis en este pensamiento, es el publicado por Vrancken y Engler (2014), en donde se resumen los resultados de una

investigación realizada con estudiantes de primer año de universidad de la carrera Ingeniería Agronómica.

Dicho artículo recalca cómo el estudio del Cálculo juega un rol importante cuando es necesario cuantificar o medir algún fenómeno y las variaciones que se producen en él (Vrancken & Engler, 2014). Sin embargo, también mencionan cómo la enseñanza y el aprendizaje de este se ha centrado netamente en procesos algorítmicos, olvidando así su esencia misma; por lo que proponen un estudio a partir de la derivada y presentan una serie de actividades que permiten analizar diversos escenarios de variación donde se evidencie qué, cómo y cuánto puede cambiar determinada magnitud.

Para el criterio [Cr1] asociado a conceptos, definiciones o descripciones (Tabla 9), se evidencia que se pone en juego descripciones de derivada, cambio (llamado en este documento diferencia) y variación. Es de subrayar como estos autores mencionan la importancia de la variación y el cambio para construir y estudiar el concepto de derivada, asumiendo estos como la idea base para el desarrollo mismo del Cálculo. Aunque en ningún momento proponen una definición de variación, sí proponen su caracterización teniendo en cuenta diversos aspectos.

<b>[Cr1] CONCEPTOS (DEFINICIONES O DESCRIPCIONES)</b>
Los autores enfatizan que uno de los aportes del Cálculo es que permite encontrar leyes que describen cambios y miden o predicen fenómenos, como es el caso especial de la derivada. Mencionan también que la derivada no se debe tomar como un objeto abstracto sino como un concepto desarrollado para cuantificar, describir y pronosticar la rapidez de la variación.  predecirlos. En particular, la derivada permite cuantificar, describir y pronosticar la rapidez de la variación en fenómenos de la naturaleza o de la práctica.
Se alude al cambio como un aspecto central para el desarrollo del Cálculo, el cual es modelado matemáticamente mediante las diferencias (“el cambio entre…”).

este contexto, un concepto primordial es el cambio, modelado matemáticamente mediante la diferencia. Las diferencias dan cuenta de cuánto cambia la variable en un proceso de variación. En este sentido, son el elemento central de todo el cálculo, por eso a esta parte de la matemática se la conoce como matemática de la variación y el cambio.

Los escritores mencionan que la variación se estudia en un sistema o en un cuerpo y consiste en identificar y reconocer magnitudes, sabiendo qué, cómo y cuánto pueden cambiar. Al poder describir o cuantificar estos cambios, se puede concluir que se tienen los conocimientos y las habilidades para usar ideas variacionales y ver la variación en diversas situaciones.

Distintos elementos dan cuenta del desarrollo del pensamiento variacional. Estudiar la variación de un sistema o cuerpo significa ejercer nuestro entendimiento para conocer cómo y cuánto cambia el sistema o cuerpo dado. Es en este sentido que nos referimos a los argumentos de tipo variacional. Decimos que una persona utiliza o comunica argumentos y estrategias variacionales cuando hace uso de maniobras, ideas, técnicas, o explicaciones que de alguna manera reflejan y expresan el reconocimiento cuantitativo y cualitativo del cambio en el sistema u objeto que se está estudiando (CANTORAL; MOLINA; SÁNCHEZ, 2005).

Tabla 9. Conceptos [Cr1]. Vrancken y Engler (2014)  
Fuente. Propia

Dentro del criterio [Cr2] se mencionan expresiones como variación, cambio, razón media de cambio, razón instantánea de cambio e ideas relacionadas con la rapidez de la variación (Tabla 10), las cuales permiten estudiar propiedades de los fenómenos de la realidad a partir de la construcción del concepto de la derivada.

#### [Cr2] LENGUAJE (TÉRMINOS, EXPRESIONES, NOTACIONES, GRÁFICOS)

Continuando con el estudio de la derivada, se observa como los autores relacionan esta con el cambio, la razón promedio de cambio y la razón instantánea de cambio; y más importante aún, la relación con la rapidez de la variación.

La derivada refleja, con gran precisión, una de las propiedades esenciales de los fenómenos de la realidad: la rapidez de la variación. Está relacionada con tres nociones fundamentales: el cambio, la razón promedio de cambio y la razón instantánea de cambio.

Para el diseño de la secuencia de actividades, cuyo propósito es trabajar con las nociones asociadas al Cálculo, los autores en primera instancia aplicaron un cuestionario de caracterización para conocer las bases conceptuales de los estudiantes a este respecto. Se indica que los resultados obtenidos dan cuenta de que los estudiantes presentan deficiencias respecto a ideas variacionales, las cuales son base para el desarrollo de la noción de derivada, por lo que proponen iniciar el trabajo con el estudio del cambio, la razón media de cambio y la razón instantánea.

Los estudios realizados llevaron a plantear la necesidad de un primer acercamiento visual e intuitivo a los conceptos del cálculo diferencial partiendo del estudio de la variación, atendiendo a tres de sus aspectos básicos: el cambio, la razón media de cambio y la razón instantánea de cambio. En estas nociones se encuentra el origen de la derivada. La idea fue,

Tabla 10. Lenguaje [Cr2]. Vrancken y Engler (2014)  
Fuente. Propia

Desde el criterio [Cr3], se puede observar que los autores presentan una serie de situaciones donde proponen construir el concepto de derivada a partir de las nociones de razón media de cambio, mediante el estudio de la pendiente de una recta, el movimiento rectilíneo uniforme y la velocidad no constante (Tabla 11). Luego se estudia la razón instantánea desde la aproximación numérica de la velocidad en un intervalo. Para este trabajo se toma una situación en la cual se exhibe y resalta el tratamiento que se le da a las diferentes representaciones o registros (verbal, gráfico, numérico y algebraico o analítico) de la derivada y demuestran cómo el manejar al menos dos representaciones para un mismo objeto o concepto es fundamental para comprenderlo. De igual forma, hacen énfasis en la importancia de interpretar la información expuesta en gráficas, así como el uso de la 'diferencia' como operación para resaltar el cambio.

**[Cr3] SITUACIONES (PROBLEMAS, APLICACIONES O EJERCICIOS)**

Una vez analizados los resultados obtenidos a partir de la implementación de la secuencia de actividades, los autores plantean una caracterización de las situaciones propuestas a partir de diversos aspectos variacionales, como se muestra a continuación.

Las situaciones planteadas permitieron trabajar distintos aspectos variacionales: la identificación de las funciones como relaciones entre variables en fenómenos de cambio, el análisis del comportamiento de los cambios (que da lugar a la necesidad de encontrar las leyes que describen esos cambios para poder medirlos y predecirlos), la cuantificación de los cambios, el cálculo de razones de cambio que se interpretan como la relación o comparación de los cambios de una variable con respecto a los cambios de la otra variable, la necesidad de encontrar una manera de describir y cuantificar los cambios que se dan a cada instante en una situación, la relación entre las razones de cambio con la pendiente correspondiente. La definición de derivada surgió de manera natural al final de este desarrollo, planteado a partir de la necesidad de cuantificar los cambios en un instante.

Se evidencia que los estudiantes reconocen la 'diferencia' como la operación que permite medir los cambios. Esta actividad parece pertinente ya que a través de ella se puede ver cómo los estudiantes manifiestan que **los cambios** tanto de posición como de tiempo **son constantes**, más



no dicen que no hay o no existe cambio alguno.

**Actividad 2.** La ley que describe la posición de un móvil en cada instante  $t$  (en segundos) a partir de un punto de referencia es  $s(t) = 3t + 1$  metros. Complete la siguiente tabla. Realice la representación gráfica e interprete en la misma las medidas  $t_2 - t_1$  y  $s(t_2) - s(t_1)$  calculadas para uno de los intervalos.

Intervalo $t_1 \leq t \leq t_2$	$\Delta t = t_2 - t_1$	$\Delta s = s(t_2) - s(t_1)$	$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$
$0 \leq t \leq 1$	$1 - 0 = 1$	$4 - 1 = 3$	3
$1 \leq t \leq 2$	$2 - 1 = 1$	$7 - 4 = 3$	3
$2 \leq t \leq 3$	$3 - 2 = 1$	$10 - 7 = 3$	3
$3 \leq t \leq 4$	$4 - 3 = 1$	$13 - 10 = 3$	3

¿Qué concepto físico representan los valores de la última columna de la tabla? Determine las unidades en los que se expresan.  
*Representa velocidad vectorial de un móvil, en m/s*

*Representa el cambio de posición del móvil (m)*

*Representa el cambio de tiempo (seg)*

Cuando los estudiantes asocian el movimiento con la velocidad, ven el desarrollo de ideas variacionales, ya que como arguyen Vrancken y Engler (2014) “los movimientos están determinados por los cambios, y el comportamiento de los cambios es el componente esencial de la variación” (p. 9).

Tabla 11. Situaciones [Cr3]. Vrancken y Engler (2014)  
Fuente. Propia

Finalmente, mencionan que a pesar de que los estudiantes sepan derivar, integrar y hallar límites (desde los procesos algorítmicos), ellos no reconocen ni entienden el significado de la variación en situaciones del contexto real, dado que no conciben las ideas de fondo (Vrancken & Engler, 2014) que subyacen al Cálculo: la variación y el cambio.

El siguiente documento analizado es el libro titulado *Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional*, de Cantoral (2013). En este, el autor forja un recorrido dentro del aula y realiza un análisis de las situaciones de aprendizaje, donde se hace evidente que la enseñanza del Cálculo tiene poca relación con contextos de la vida diaria y de otras áreas del conocimiento como la ingeniería, donde es imprescindible el estudio de situaciones de variación y cambio, así como ejemplos propios de la Física, Química e incluso de la Biología (Cantoral, 2013), y termina siendo una enseñanza donde predomina el algoritmo algebraico centrado en objetos formales (densidad de los racionales e irracionales, el principio de

completez, entre otros) carentes de una relación concreta con la variación y el cambio y capaces de inhibir el desarrollo del Pensamiento Variacional.

Así, desde lo observado en el documento, el autor presenta tres definiciones y una descripción referente a la representación tabular de la función [Cr1]. Dentro de las definiciones es atractiva la concepción de dos términos fundamentales en este estudio (Tabla 12), el cambio como la modificación de estado, y la variación como cuantificación de este cambio. Además, presenta la definición de ‘graficación’ entendiéndose desde dos perspectivas, la primera, como usualmente se trabaja dentro del aula, el conjunto de técnicas que permiten bosquejar una función particular (Cantoral, 2013), y la segunda menos usual, que entiende a la graficación como una forma de interpretar el sentido y significado de las funciones y de sus propiedades (Cantoral, 2013).

Por otro lado, la técnica de representación tabular se expone como el proceso por el cual el estudiante asigna valores a la variable independiente y encuentra su respectivo valor dentro de la función (valor de la variable dependiente), para posteriormente realizar la gráfica de esta.

<b>[Cr1] CONCEPTOS (DEFINICIONES O DESCRIPCIONES)</b>	
<p>En la página 45 del libro, dentro del capítulo 4 denominado una “Una propuesta viable: la visualización como recurso”, el autor inicia con la presentación de las características del Pensamiento Variacional, y en el segundo párrafo da a conocer la descripción de las nociones de cambio y variación.</p> <p>La expresión <b>cambio</b> se entiende como una modificación de estado, en tanto que el vocablo <b>variación</b> la entendemos como cuantificación de dicho cambio. No obstante, la construcción del concepto de variación es un proceso difícil y lento, pues requiere la integración de distintos campos simbólicos, numéricos, algebraicos, analíticos,</p>	<p>La segunda concepción de graficación presentada en la página 46 del libro es:</p> <p><b>una función particular, y otra, menos difundida, que entiende a la graficación como una forma de interpretar el sentido y significado de las funciones y de sus propiedades desde una perspectiva cognitiva.</b></p> <p>Es decir que se entiende la graficación como el medio de interpretación y de análisis de la situación de variación a través de la función que la modela.</p>
<p>Adicionalmente, en la página 46 se menciona que, a través de la revisión a la literatura, se han identificado dos formas de enseñar la graficación de funciones de reales en reales. Una de ellas, la más difundida durante el proceso de enseñanza del cálculo, siendo la técnica para bosquejar la gráfica de una función a partir de procesos de rotación, traslación, reflexión, etc.</p>	

técnica o conjunto de técnicas que permiten bosquejar la gráfica de una función particular, y otra, menos difundida, que entiende a la

Tabla 12. Conceptos [Cr1]. Cantoral (2013)  
Fuente. Propia

Ahora bien, para el criterio relacionado con el lenguaje [Cr2], el autor no expresa explícitamente términos relacionados con el Pensamiento Variacional o con la noción de variación, pero si es recurrente en su discurso el empleo de términos como función, parámetro, número, variable, continuidad, derivada, integral como se presenta en la Tabla 13.

<b>[Cr2] LENGUAJE (TÉRMINOS, EXPRESIONES, NOTACIONES, GRÁFICOS)</b>	
<p>En la página 45 el autor realiza una valoración del proceso de construcción del concepto de variación, y menciona que para ello se debe realizar la integración de varios componentes, aunque no describe ninguno de estos.</p> <p>de dicho cambio. No obstante, la construcción del concepto de variación es un proceso difícil y lento, pues requiere la integración de distintos campos simbólicos, numéricos, algebraicos, analíticos, visuales, gráficos y geométricos, así como una adecuada</p>	<p>Dentro de la valoración de la construcción del concepto de variación, el autor también menciona algunos “procesos matemáticos específicos”, como él los ha denominado, de los cuales tampoco realiza descripción. Entre dichos procesos están, números, variable, constante, parámetro, función, límite, continuidad, derivada, integral, etc.</p> <p>visuales, gráficos y geométricos, así como una adecuada comprensión de procesos matemáticos específicos, como: número, variable, constante, parámetro, función, límite, continuidad, derivada, integral, convergencia, representación e infinito para tener una</p> <p>Aunque es confuso el hecho de que el autor asuma el número, la variable, la constante, el parámetro como procesos matemáticos y no como conceptos u objetos.</p>

Tabla 13. Lenguaje [CR2]. Cantoral (2013)  
Fuente. Propia

Para los ejemplos y situaciones [Cr3], el autor expone una serie de escenarios y problemas que presentan varias similitudes, por ello aquí solo referimos tres problemas (Tabla 14). Esta secuencia es un diseño experimental formulado en diferentes escenarios de aprendizaje para trabajar el concepto de derivada, estimulando el desarrollo del Pensamiento Variacional a través del análisis de situaciones. En la propuesta, el autor intenta alejarse de los tratamientos meramente algebraicos y aritméticos para el análisis de las derivadas, y se preocupa por trabajar procesos y estrategias variacionales como la comparación y

la visualización; pero aún más relevante es el análisis que se hace de la implementación de esta secuencia, ya que si bien está diseñada para alejarse del trabajo algorítmico, los estudiantes que participaron recurren principalmente a elementos memorísticos, algorítmicos y mecánicos debido a que no tienen otros escenarios para significar la derivada (Cantoral, 2013).

**[Cr3] SITUACIONES (PROBLEMAS, APLICACIONES O EJERCICIOS)**

Dentro del capítulo 5 denominado “Algunas sugerencias”, el autor propone una serie de problemas para trabajar el concepto y el papel de la derivada de una función.

Problema II.1 A continuación se muestra una tabla que contiene la tabulación de dos funciones cualesquiera.

x	f <sub>1</sub> (x)	f <sub>2</sub> (x)	x	f <sub>1</sub> (x)	f <sub>2</sub> (x)
-0.45	0.000	0.293	-0.10	0.510	0.541
-0.40	0.032	0.247	-0.05	0.521	0.552
-0.35	0.098	0.201	0.00	0.500	0.540
-0.30	0.173	0.173	0.05	0.461	0.548
-0.25	0.262	0.142	0.10	0.358	0.600
-0.20	0.350	0.100	0.15	0.252	0.618
-0.15	0.401	0.140	0.20	0.192	0.622
-0.10	0.323	0.272	0.25	0.141	0.650
-0.05	0.400	0.400	0.30	0.142	0.673
0.00	0.423	0.457	0.35	0.062	0.682
0.05	0.451	0.538	0.40	0.010	0.701

Nota: es importante que observes que la tabla derecha es la continuación de la tabla izquierda.  
Ahora contesta a las siguientes preguntas:  
¿Cuál de las dos funciones tiene el valor más grande de la derivada en  $x = 0.20$ ?  
¿Cuál de las dos funciones tiene el valor más grande de la derivada en  $x = 0.20$ ?  
¿Cuál de las dos funciones tiene el valor más grande de la derivada en  $x = 0.20$ ?  
Es importante que expliques tus respuestas (González, 1996).

Con este primer problema se busca que el estudiante estime la primera derivada de la función, lo cual requiere del uso de una estrategia variacional de *comparación*.

El siguiente problema que el autor propone, es el de la estimación de la derivada desde un reconocimiento visual.

Problema II.3 A continuación se muestran las gráficas de varias funciones. Todas se intersectan en el mismo punto, decide cuál de ellas tiene derivada mayor en el punto  $x = 1$ . Es importante que expliques tu respuesta.

En este problema se estimula el proceso de visualización y de análisis cualitativo de las gráficas de las funciones, es decir que se propone que el estudiante sea capaz de interpretar las gráficas y estimar el orden de las derivadas que puede tener alguna de ellas sin necesidad de recurrir a los procesos aritméticos o algebraicos para el análisis de la derivada.

El tercer problema es la comparación de la derivada de una función en dos puntos. Con este ejercicio se pretende que el estudiante logre identificar la variación por medio del análisis que se realiza con la derivada a través de la comparación de la inclinación de las tangentes, o bien de la variación sobre la gráfica.

Problema II.4 De la siguiente figura contesta la siguiente pregunta  $f'(b) > f'(a)$ .  
Explica tu respuesta.

Tabla 14. Situaciones [Cr3]. Cantoral (2013)  
Fuente. Propia

Después de realizado este análisis a la luz del criterio, es clara la crítica del autor sobre la enseñanza del Cálculo, por estimular el trabajo con algoritmos descontextualizados y sin ninguna preocupación por el concepto que se está trabajando (para este caso la noción de variación). Él se preocupa y propone no solamente trabajar los procesos algorítmicos sino también los procesos de fondo, argumentando que el aprendizaje de un concepto incluye muchas etapas que pueden desarrollarse durante periodos muy prolongados (Cantoral, 2013).

A pesar de que el autor menciona la importancia de los procesos algorítmicos, de los conceptos previos, de procesos como la visualización, la graficación y la argumentación; pareciera que se queda corto con los ejemplos que trabaja al enfocarse únicamente en la derivada.

El siguiente libro y último documento que se analiza a la luz de los criterios, en el contexto del Cálculo, es el de *Pensamiento Variacional y Tecnologías Computacionales* presentado por el MEN (2004). En él, el Ministerio hace un recorrido tanto histórico –por el desarrollo de la noción de variación y de las ideas variacionales– como por las modificaciones curriculares que se han hecho en Colombia para la introducción del Pensamiento Variacional en el currículo escolar, siempre con la convicción de acercar a los estudiantes al concepto y no profundizar en la enseñanza de procesos algorítmicos. Además de estos recorridos, presentan una propuesta ligada a las tendencias en educación como la incorporación de las nuevas tecnologías en el aula de matemáticas, profundizando en los procesos de representación y graficación de las situaciones en las cuales se ve inmersa la variación.

Es así como desde [Cr1] se observa que intentan caracterizar la noción de variación y presentan las definiciones de variación continua y variación discreta (Tabla 15). En este documento, la mayoría de las veces están asociando la

variación a situaciones o fenómenos de la vida cotidiana las cuales se relacionan con el tiempo.

<b>[Cr1] CONCEPTOS (DEFINICIONES O DESCRIPCIONES)</b>	
<p>En la página 11 del capítulo 2 referido a la variación y el cambio en el currículo de matemáticas de Colombia, se menciona una descripción de variación donde se establece que ésta debe partir de fenómenos de cambio identificados en la vida diaria, donde se intente cuantificar la variación mediante cantidades y magnitudes.</p> <p>En esta forma se plantea que se amplía la visión de la <b>variación</b>, por cuanto su estudio se inicia en el intento de <b>cuantificar la variación por medio de las cantidades y las magnitudes</b>. En los lineamatemáticas, considerando que el <b>significado y sentido acerca de la variación</b> puede establecerse a partir de las situaciones problemáticas cuyos escenarios sean los referidos a <b>fenómenos de cambio y variación de la vida práctica</b>. Se</p> <p>En este texto relacionan el estudio de la variación partiendo de patrones, en el mismo sentido a como se propone desde los LCM.</p> <p><b>Otra herramienta necesaria para iniciar el estudio de la variación desde la primaria la constituye el estudio de los patrones. Éstos incluyen</b></p>	<p>En la página 17 el capítulo 3 referido al 'Pensamiento Variacional en situaciones de variación y cambio', cuando se hablan de las formas de modelación, se definen dos tipos de variación dependiendo la forma como se considere el tiempo, ya sea continuo o discreto.</p> <p>como una magnitud continua. Es decir, cuando se considera el tiempo fluyendo de manera ininterrumpida. En estas circunstancias hablaremos de <b>variación continua</b>. El modelo general para</p> <p><b>La otra forma de modelar una situación en la que interviene el tiempo será cuando se observa la situación en instantes espaciados de tiempo</b> (Algo así como cada una de las fotografías consecutivas de una película que registra la situación en estudio). <b>En este caso hablaremos de variación discreta</b>. Lo que distingue</p> <p>Reconociendo así la variación continua para las situaciones en las cuales el tiempo se mira de forma ininterrumpida y la discreta en situaciones donde se mide en intervalos de tiempo.</p>
<p>Finalmente, en la página 22, aunque no se presenta una definición como tal, se denota como los autores intentan caracterizar la variación a partir de la idea de cambio de una variable respecto a otra.</p> <p><b>tiempo. La variación o cambio en el suceso que se observa con el transcurso del tiempo está relacionado con la idea de cambio de la variable dependiente con respecto al cambio de la variable independiente (tiempo).</b></p>	

Tabla 15. Conceptos [Cr1]. MEN (2014)  
Fuente. Propia

Para el segundo criterio [Cr2], por un lado, se encuentra el lenguaje utilizado para describir la modelación de situaciones que involucran el tiempo y, por otro, las formas de representación en las cuales se presenta la variación. Además de lo

anterior, se menciona de forma reiterada la palabra ‘magnitud’, al igual que el término función, que, si bien no están definidos explícitamente, si son relevantes en la construcción de las ideas variacionales y en las situaciones que involucran la variación (Tabla 16).

<b>[Cr2] LENGUAJE (TÉRMINOS, EXPRESIONES, NOTACIONES, GRÁFICOS)</b>													
<p>En la página 17 del capítulo 3 referido al ‘Pensamiento Variacional en las situaciones de variación y cambio’ se evidencia una fuerte relación entre variación y tiempo, en la mayoría de las situaciones de la vida cotidiana.</p> <p style="text-align: center;">explicita la consideración del tiempo. El cambio y la variación se presentan cuando una circunstancia dada se transforma con el transcurso del tiempo. El poder identificar el fenómeno de</p>													
<p>Aunque los autores del documento no excluyen situaciones que no tienen que ver con el tiempo, se centran en las que se ven relacionados directamente con este, y es así como se comienzan a considerar dos formas de modelación: la primera pensando el tiempo como magnitud continua y la segunda, asumiendo el tiempo como magnitud discreta.</p> <p>ver con el tiempo. Consideraremos dos formas de modelación de situaciones en las que interviene el tiempo. La primera cuando se considera el tiempo (el tiempo es un concepto físico al que le corresponde la magnitud duración según Federici. Ver Sobre el análisis dimensional), como una magnitud continua. Es decir, cuando</p> <p style="text-align: right;">La otra forma de modelar una situación en la que interviene el tiempo será cuando se observa la situación en instantes espaciados de tiempo (Algo así como cada una de las fotogra-</p>													
<p>Luego de considerar estas formas de modelación, se evidencia constantemente que el estudio de la variación se asocia al término magnitud.</p> <p>del tiempo. Se espera que en las descripciones de la situación de cambio se usen expresiones como: tal magnitud aumenta, tal magnitud disminuye, tal magnitud aumenta más rápido que tal otra, tal magnitud disminuye más lentamente que tal otra, tal magnitud ni aumenta ni disminuye, etc.</p>	<p>Además de las formas de modelación, se percibe que la variación tiene múltiples formas de representación: escrita, pictórica, tabular, geométrica, algebraica y gráfica. Dichas representaciones se clasifican en dos grandes grupos, el primero como representaciones cuantitativas, y el segundo como representaciones cualitativas.</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <thead> <tr> <th style="text-align: center;">Duración</th> <th style="text-align: center;">Volumen</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="text-align: center;">t1</td> <td style="text-align: center;">0 cm<sup>3</sup></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">t2</td> <td style="text-align: center;">2.000 cm<sup>3</sup></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">t3</td> <td style="text-align: center;">4.000 cm<sup>3</sup></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">t4</td> <td style="text-align: center;">6.000 cm<sup>3</sup></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">t5</td> <td style="text-align: center;">8.000 cm<sup>3</sup></td> </tr> </tbody> </table>	Duración	Volumen	t1	0 cm <sup>3</sup>	t2	2.000 cm <sup>3</sup>	t3	4.000 cm <sup>3</sup>	t4	6.000 cm <sup>3</sup>	t5	8.000 cm <sup>3</sup>
Duración	Volumen												
t1	0 cm <sup>3</sup>												
t2	2.000 cm <sup>3</sup>												
t3	4.000 cm <sup>3</sup>												
t4	6.000 cm <sup>3</sup>												
t5	8.000 cm <sup>3</sup>												

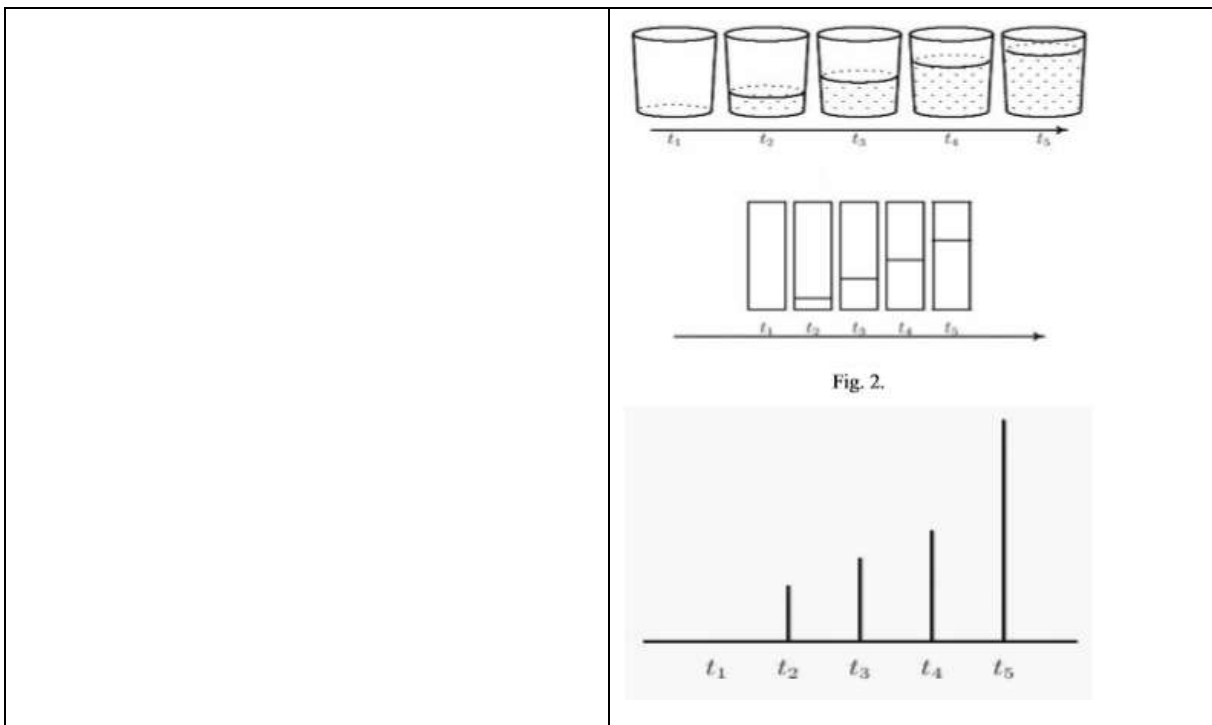


Fig. 2.

Finalmente, en la página 22, en la sección de variable y función, correspondiente al capítulo 3, se menciona nuevamente cómo la idea de función es vital para la construcción del Pensamiento Variacional; y con ella, implícitamente, la idea de variable, donde se muestra la relación entre variable dependiente e independiente.

Así, las funciones numéricas, corazón del pensamiento variacional, están íntimamente relacionadas con el álgebra a través de la ecuación  $y = f(x)$ , con la geometría por la gráfica de la ecuación  $y = f(x)$ , con los números por la correspondencia entre los mismos y con la variación a través de la noción de 'cambio con respecto al tiempo'.

Tabla 16. Lenguaje [CR2]. MEN (2014)  
Fuente. Propia

Para el tercer criterio [Cr3] se encuentran dos situaciones en forma de ejercicio (Tabla 17). La primera de ellas se propone para ejemplificar una situación de variación y cambio que no necesariamente depende del parámetro tiempo, esta es una situación de las que se han denominado dentro del texto como problemas de optimización. Pero aún más interesante que la misma situación, es la forma en que ésta se aborda dentro del texto; en él se propone reportar en una tabla



(representación tabular) las medidas de los lados del rectángulo, para identificar los patrones de variación y así conjeturar sobre las posibles dimensiones del rectángulo para que el área sea máxima. La segunda situación que se presenta en el documento es el llenado de un balde durante un periodo de tiempo, un ejemplo por excelencia de una situación de variación en donde interviene el tiempo; con la que se pretende hacer una interpretación cualitativa de las situaciones de variación y cambio.

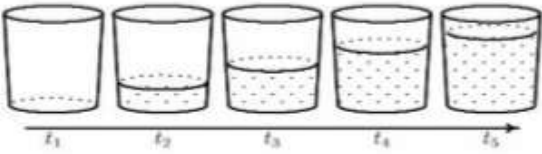
<b>[Cr3] SITUACIONES (PROBLEMAS, APLICACIONES O EJERCICIOS)</b>	
<p>Tal y como se viene mencionando, la variación es un concepto que se asocia a situaciones de la vida real como, por ejemplo, el llenado de un balde con agua, en el cual se involucran diversas magnitudes, tales como área, volumen y tiempo.</p> <p>Por ejemplo, supongamos que estamos en el proceso de llenar un balde con agua. En esta</p> 	<p>Aunque no es una situación de la vida real, ni una situación que involucra el tiempo, se puede evidenciar como se presenta la variación en una situación problema de índole matemático.</p> <p>Encontrar entre todos los rectángulos de igual perímetro el que (los que) tienen área máxima.</p> <p>Al igual que la situación anterior se evidencia como de nuevo la situación relaciona las magnitudes de perímetro y área.</p>

Tabla 17. Situaciones [Cr3]. MEN (2014)  
Fuente. Propia

Haciendo un barrido general de este último documento, resulta ser un excelente ejercicio el que hace el MEN, pues realiza todo un recorrido histórico respecto a la introducción del Pensamiento Variacional en los Lineamientos y Estándares para la educación matemática básica y media en Colombia, así como un recorrido histórico del desarrollo del Cálculo y de la noción de variación a través del tiempo. Pero lo innovador es la propuesta y promulgación del uso de las nuevas tecnologías para incentivar el proceso de visualización en situaciones de variación y cambio; además de ser uno de los documentos que se preocupa por dejar de lado el algoritmo que tanto se ha criticado y promueve representaciones e interpretaciones cualitativas de dichas situaciones. En este texto se proponen algoritmos de tal manera que sean relevantes para los estudiantes dentro del

contexto de la vida cotidiana. Sin embargo, a pesar de que se habla de formas de modelación y de representación, en ningún momento definen la variación, pero sí la clasifican en dos tipos, la variación continua y discreta. Por otro lado, se resalta como los autores relacionan el Pensamiento Variacional con el Pensamiento Aleatorio arguyendo que “el Pensamiento Variacional está relacionado con el Pensamiento Estadístico (tratamiento de datos y regresiones), a través de las formas de representación cuantitativas” (MEN, p. 21).

Una vez realizado el estudio de los cinco documentos y consultados otros tantos, se encuentra que en el área del Cálculo no se hace alusión al término variabilidad; siempre se hace referencia a la noción de variación como la idea base para construir el Cálculo, y a esta la asocian con conceptos como razón de cambio, función y derivada. Es de resaltar como muchos de los autores consultados, aunque critican que se pone mayor atención en los procesos algorítmicos y se descuida el concepto, siguen esta misma línea, es decir, no hay propuesta concreta o sólida que profundice en el significado de la variación, cómo aprenderla o cómo enseñarla. Sin embargo, sí es claro que es un concepto bastante importante no solo a nivel del Pensamiento Variacional sino de las matemáticas mismas y es un constructo que se va desarrollando a lo largo de la vida.

### 3.2 CARACTERIZACIÓN DE LA VARIABILIDAD EN LA ESTADÍSTICA

Para la caracterización de la noción de variabilidad en el contexto de la Estadística, se analizan cuatro artículos y una síntesis de una investigación, a la luz de los criterios predeterminados (Cr1, Cr2 y Cr3).

El primer artículo es de Garfield y Ben-Zvi (2005), quienes analizan una serie de documentos, específicamente dos colecciones de artículos, los cuales pretenden mostrar que la comprensión de la noción de variabilidad es más compleja de lo que la literatura tradicional ha hecho pensar. Esta serie de documentos presentan

ideas generales sobre formas de enseñanza y evaluación de la noción de variabilidad, pero para los autores no son suficientes las propuestas que se presentan en este compilado en cuanto a los aportes al desarrollo del razonamiento estadístico, por lo tanto en su artículo sugieren un modelo epistemológico para la variabilidad que permite el desarrollo del razonamiento, así como consejos y métodos de enseñanza y evaluación que posibiliten desarrollar estas ideas en los estudiantes y que muestren la incidencia de este modelo en la práctica de la Estadística.

Dentro del análisis que se realiza, para el criterio [Cr1] se identifica la presentación de algunos conceptos y definiciones, que apuntan a la construcción de un bloque epistemológico que permita, como lo comentan Garfield y Ben-Zvi (2005), una comprensión profunda de la noción de variabilidad (Tabla 18). Lo que se propone a través de estos conceptos es el avance en cuanto a las nociones intuitivas de la variabilidad y los procedimientos inmersos en el tratamiento de estas, siempre apuntando a desarrollar del razonamiento estadístico.

<b>[Cr1] CONCEPTOS (DEFINICIONES O DESCRIPCIONES)</b>
<p>En la página 93, en la sección titulada 'Desarrollo de la comprensión profunda de la variabilidad' se presentan siete pasos para reconocer la variabilidad, que para los autores son claves en el entendimiento de tal concepto. El primer paso se relaciona con desarrollar ideas intuitivas de variabilidad en diferentes contextos en donde esta se puede identificar:</p> <p><i>1. Developing intuitive ideas of variability</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Recognizing that variability is everywhere (the omnipresence of variability; Moore, 1990, 1997). Individuals vary on many characteristics, and repeated measurements on the same characteristic are variable. Both qualitative and quantitative variables reveal variability of data.</li> </ul> <p>La primera de estas ideas es la omnipresencia de la variabilidad en los datos, es decir, que la variabilidad está presente en cada situación en la vida cotidiana. Como lo comentan los autores no hay dos medidas o dos sucesos idénticos, y es en ese momento en el que la destreza del sujeto para identificar la variable (tanto cuantitativa como cualitativa) es fundamental, ya que esta es la que revela dicha variabilidad.</p>
<p>Siguiendo con el desarrollo de estas ideas intuitivas, para los autores es fundamental reconocer el tipo de variable estadística que está inmersa en la situación, ya que al trabajar con variabilidad es fundamental reconocer los tipos de variables: cuantitativa o cualitativa. Para luego sí realizar el análisis de la situación donde está presente la variabilidad.</p>

1997). Individuals vary on many characteristics, and repeated measurements on the same characteristic are variable. Both qualitative and quantitative variables reveal variability of data.

En la página 94, el segundo paso es describir y representar la variabilidad, para ello los autores hacen alusión a los gráficos estadísticos:

*2. Describing and representing variability*

- Graphs of data show how things vary and may reveal patterns to help us focus on global features of distributions and identify the signal in the noise.
- Different graphs may reveal different aspects of the variability in a data set so it is important to study more than a single graph of a data set.

Esta idea resalta la importancia de los gráficos estadísticos y lo hace desde dos perspectivas, la primera es que los gráficos muestran como varía cada una de las situaciones, mostrando patrones que permiten centrar la atención en aspectos concretos para determinar el tipo de variable presente. La segunda, es que no se puede trabajar únicamente con un gráfico estadístico, ya que cada uno de ellos revela diferentes aspectos de la variabilidad para un mismo conjunto de datos.

Dando continuidad al segundo paso, en la página 94 se presenta lo que los autores denominan resúmenes numéricos, es así como cada uno de estos resúmenes, aporta información diferente sobre la distribución de los datos:

Different numerical summaries tell us different things about the spread of a data set. For example, the Range tells us the overall spread from highest to lowest value, while the Standard Deviation (SD) tells us the typical spread from the mean. The Interquartile Range (IQR) tells us the spread of the middle half of a distribution.

Dentro de estos resúmenes numéricos se encuentra el rango, la desviación estándar y el rango intercuartil. Cada uno proporciona un aspecto diferente de la situación donde está inmersa la variabilidad y que se refleja en los datos; por ejemplo, el rango permite identificar la diferencia entre el valor máximo y el valor mínimo de los datos, y la desviación estándar permite reconocer qué tan cercanos o alejados están todos los datos en el conjunto de mediciones.

También en la página 94 se encuentra la idea de reconocer la variabilidad en tipos diferentes de distribución, y es así como se encuentra el siguiente concepto:

The variability of a bivariate data set (covariation) may reveal a relationship between the variables and whether we might predict values of one variable (y) for values of the other (x).

Este concepto, de la covariación, no es más que la presencia de la variabilidad como medición de la relación que existe entre dos variables.

Tabla 18. Conceptos [Cr1]. Garfield y Ben-Zvi (2005)  
Fuente. Propia

Para el segundo criterio [Cr2], se hace necesario precisar que los autores usan reiteradamente el término distribución, sin definir o hacer claridad de tal concepto

(Tabla 19), como si lo hace con casi todos los demás términos (rango, desviación estándar, variable, covariación, etc.) que utilizan para describir cada uno de los 7 pasos para el desarrollo del proceso cognitivo que permite el análisis de la variabilidad. Es más, se precisa dentro del documento que reconocer la distribución dentro del conjunto de datos es fundamental para distinguir la variabilidad dentro de la situación. Pero además de esto se menciona el rango, la desviación estándar y el rango intercuartil, denominados en su conjunto como resúmenes numéricos.

<b>[Cr2] LENGUAJE (TÉRMINOS, EXPRESIONES, NOTACIONES, GRÁFICOS)</b>
<p>Dentro del discurso de los autores, se reconoce un término que para ellos es fundamental en cuanto a que tiene conexión directa con la noción de variabilidad, y es el término 'distribución', que si bien no se describe literalmente, si se relaciona con los "resúmenes numéricos", como el rango, la desviación estándar y el rango intercuartil, entre otros que presenta el análisis de esta distribución y permite inferir sobre la situación que es objeto de análisis.</p> <p>We can use one number to represent a global feature (such as variability) of the <u>distribution</u>. Different numerical summaries tell us different things about the spread of a data set. For example, <u>the Range</u> tells us the overall spread from highest to lowest value, while the <u>Standard Deviation (SD)</u> tells us the typical spread from the mean. <u>The Interquartile Range (IQR)</u> tells us the spread of the middle half of a <u>distribution</u>.</p> <p style="text-align: right;"><small>Activar Wi</small></p>

Tabla 19. Lenguaje [Cr2]. Garfield y Ben-Zvi (2005)  
Fuente. Propia

Ahora bien, para el criterio [Cr3] se identifica que los autores proponen tres situaciones (Tabla 20). En el contexto que se presentan estas situaciones se tienen claros dos objetivos: el primero, que los estudiantes identifiquen la variabilidad en contextos cercanos y en situaciones cotidianas, y el segundo es que los profesores puedan evaluar el razonamiento que han desarrollado los estudiantes en cuanto a identificar y analizar la variabilidad en estos casos, es así que se prioriza la visualización y análisis de gráficos estadísticos que le permitan a los estudiantes reconocer la variabilidad en la situación propuesta.

<b>[Cr3] SITUACIONES (PROBLEMAS, APLICACIONES O EJERCICIOS)</b>
<p>En la página 96 del texto, se mencionan algunas recomendaciones o consejos para evaluar a los estudiantes cuando se hace referencia a la noción de variabilidad, y estos apuntan a reconocerla</p>

en contextos y situaciones particulares, y a identificar sus elementos en dichas situaciones. Por ejemplo, una actividad que proponen es reconocer variables dentro del aula que puedan ayudar a revelar variabilidad, toman como ejemplo las edades o la altura de los estudiantes.

Items that provide descriptions of variables or raw data sets (e.g., the ages of children in a grade school, or the height of these children) and asking students to describe variability or shape of distribution.

También en este apartado (página 97), se encuentra otra situación de análisis para reconocer la variabilidad:

Given a context, students are asked to think of ways to decrease the variability of a variable (e.g., measurements of one students' jump).

A partir de esta situación se pretende que el estudiante razone de manera inversa, por ejemplo, pedir a los estudiantes que piensen en la forma de medir los saltos hechos por sus compañeros, de tal forma que estos sean siempre iguales, es decir ellos identifican que la variable en este caso es la altura del salto, variable que deben “normalizar”.

En la página 97, en el apartado de evaluación y reconocimiento de la variabilidad con tipos especiales de distribución, se encuentra este ejercicio donde se pretende que el estudiante realice gráficos estadísticos de situaciones donde el conjunto de datos sea bivariado, es decir, que se reconocen dos variables claras, por ejemplo, peso y estatura, y a través de estos gráficos deben determinar si la variabilidad de una de las variables se puede explicar a través de la otra.

Items that provide graphs of bivariate data sets where students are asked to determine if the variability in one variable ( $y$ ) can be explained by the variability in the other variable ( $x$ ).

Este tipo de situaciones le permite al estudiante reconocer primero, y como ya se mencionó, la relación que puede encontrarse entre dos variables que presente un conjunto de datos, pero también le permite reconocer que, en las situaciones de variabilidad, algunas de estas no necesariamente se relacionan con otra. De manera que se demuestra que la variabilidad de un conjunto de datos no es una sola.

Tabla 20. Situaciones [Cr3]. Garfield y Ben-Zvi (2005)  
Fuente. Propia

El trabajo que realizan los autores resulta interesante ya que, si bien parten del análisis de un conjunto de documentos donde concluyen que la comprensión de la noción de variabilidad es compleja y dispendiosa, proponen una serie de lineamientos que permiten apoderarse de esta noción, y esto a partir del reconocimiento de la variabilidad desde una mirada intuitiva, pasando por la descripción y representación, hasta llegar a distinguir y reconocer patrones de variabilidad. Pero no solo se quedan en la propuesta epistemológica, sino que presentan situaciones o formas de trabajar estos lineamientos para que el

estudiante logre apropiarse de la noción, logrando identificarla en contextos cercanos. A esto los autores denominan “puente” entre la teoría y la práctica de la noción de variabilidad.

El segundo artículo que es objeto de análisis es el publicado por Gould (2011) quien estudia y presenta ejemplos de cómo se debe abordar la noción de variabilidad, para que pase de ser un concepto de segundo plano y se vea como el eje fundamental de la Estadística. Como lo comenta el autor, los estadísticos profesionales tratan de minimizar el concepto de variabilidad, asociándolo a meros cálculos que se realizan sobre un conjunto de datos, generando un vacío conceptual en quien inicia el estudio de la Estadística, puesto que, si no se da sentido a estos cálculos y no se logra identificar los patrones de cambio, no consiguen concluir de manera acertada sobre la situación que es objeto de estudio. Es así como por medio de las tres secciones de su artículo pretende mostrar la necesidad de entender el concepto de variabilidad.

En la primera sección el autor muestra un ejemplo por medio del cual describe el proceso de razonamiento con variabilidad, luego de esto exhibe un recorrido histórico de la noción hasta llegar a la postulación del análisis de varianza ANOVA en 1925; y finalmente en la tercera sección analiza tres situaciones donde está presente la variabilidad, enfocado en observar qué aprende el sujeto que realiza el análisis sobre variabilidad.

Dentro de lo observado en este documento, desde el criterio [Cr1], se logran reconocer tres definiciones importantes (Tabla 21); dos de ellas pretenden describir la noción de variabilidad y la tercera describe la noción de variación. Es así como la variación se presenta, primero como el reconocimiento y análisis de patrones dentro de un conjunto de datos, y luego como el reconocimiento de la distribución de los datos, esto antes de emitir algún tipo de crítica o conclusión sobre los datos. Estas dos definiciones resultan un poco confusas ya que asocian

la noción de variabilidad al proceso de reconocer, por un lado, patrones y por el otro la distribución. La siguiente concepción que se identifica es la de variación asociada a aquello que no sigue un patrón definido.

<b>[Cr1] CONCEPTOS (DEFINICIONES O DESCRIPCIONES)</b>
<p>En la página 7, en la introducción, Gould hace referencia a la noción de variabilidad utilizada por Moore (1997).</p> <p style="padding-left: 40px;">The definition for variability used in this discussion is derived from Moore's (1997) definition of data analysis as "the examination of patterns and striking deviations from those patterns". Although Moore was describing the activity of data analysis as a by-product, he provides a wonderfully general</p> <p>Aquí, aunque el autor hace referencia a la noción de variabilidad propuesta por Moore (1997), esta resulta estar asociada a un proceso, y es el de reconocer patrones de cambio dentro del conjunto de datos, así como las variaciones dentro de los datos.</p>
<p>En la misma sección (página 7), Gould hace una aseveración sobre la relación de la distribución, con la noción de variabilidad.</p> <p style="padding-left: 40px;">College level statistics does not completely ignore variability, of course. Many texts and one hopes many instructors discuss the importance of examining the shape of the distribution before making any conclusions about the data. DeVeux, Velleman and Bock (2004) write in their introductory statistics textbook that "the three rules of data analysis are 1) make a picture 2) make a</p> <p>Para el autor, es necesario tanto el reconocimiento de la variabilidad como el reconocimiento de la distribución de los datos para poder realizar un análisis de la situación que se está estudiando y poder concluir sobre la variabilidad en dicha situación.</p>
<p>Dentro de esta misma sección, página 8, se menciona la noción de variación que difiere sustancialmente de variabilidad.</p> <p style="padding-left: 40px;">Moore was describing the activity of data analysis as a by-product, he provides a wonderfully general definition of variation; variation is that which is not pattern. A case study in Section 2 will illustrate how useful and rich variability, using this broad definition, can be. A short examination of the history</p> <p>Aquí se menciona que la variación es aquello que no sigue un patrón, es decir, que se observa el cambio, pero no en una secuencia determinada, diferenciándose de la concepción de variabilidad, que indica que variabilidad es observar los patrones presentes en un conjunto de datos.</p>

Tabla 21. Conceptos [Cr1]. Gould (2011)  
Fuente. Propia

Para el criterio [Cr2] se estudia el proceso de análisis ANOVA y el término de distribución. El proceso de análisis ANOVA es desarrollado con la finalidad de realizar estudios más completos y exactos sobre las causas de variabilidad, este análisis es retomado por el autor como una secuencia histórica del desarrollo del



concepto de variabilidad; pero en sus comienzos se muestra poco fructífero ya que recae en la ambigüedad de tratar la variabilidad como una noción poco útil y termina realizando meros cálculos sin darles ningún sentido. Respecto al término de distribución, este hace parte de una de las definiciones de variabilidad y es que para reconocer la variabilidad es necesario reconocer la distribución, un término que no se hace explícito en el cuerpo del artículo.

<b>[Cr2] LENGUAJE (TÉRMINOS, EXPRESIONES, NOTACIONES, GRÁFICOS)</b>
<p>Haciendo un recorrido histórico, Gould menciona la necesidad que surgió de hacer un análisis más exacto de las causas de la variabilidad en situaciones de la vida diaria, es en este momento que Fisher crea el ANOVA (<i>Analysis of Variance</i>).</p> <p style="text-align: center;"><i>A generation later, in 1925, R.A. Fisher invented ANOVA to cover the need for "a more exact analysis of the causes of human variability." Ironically, ANOVA really tends to treat variability as a nuisance and its main focus, once one is satisfied that the variance is behaving, is to concentrate on comparing means. Nonetheless, once ANOVA was later framed in the context of the linear model, it became possible for researchers to model and investigate variance components directly.</i></p> <p>En un comienzo el análisis de varianza no fue muy productivo ya que trataba la variabilidad como un estorbo, y se continuaba con la idea de trabajar la Estadística solamente mediante cálculos.</p>
<p>Un término bastante utilizado durante el discurso del autor y que toma mayor relevancia en una de las definiciones de variabilidad es el de 'distribución'. No se presenta una definición formal dentro del texto, pero se hace énfasis, por ejemplo, en que se debe reconocer la distribución para poder identificar la variabilidad.</p> <p style="text-align: center;"><i>hopes many instructors discuss the importance of examining the shape of the <u>distribution</u> before making any conclusions about the data. DeVaux, Velleman and Bock (2004) write in their introductory statistics textbook that "the three rules of data analysis are 1) make a picture 2) make a picture and 3) make a picture." Most students learn, often in the first weeks of the course, that the mean by itself is not a sufficient summary of a <u>distribution</u>. But after that variability is brushed aside <del>we see that the vast majority thinks that, but a minority thinks very much. The shape of the</del> <u>distribution</u> is interesting in that it tells us that a simple model, in which we look for "typical" drinking with some people deviating from the norm, will be inappropriate. At the very least a log</i></p>

Tabla 22. Lenguaje [Cr2]. Gould (2011)  
Fuente. Propia

Para el criterio [Cr3] se presentan dos situaciones encaminadas al trabajo sobre razonamiento con variabilidad, en donde se propone la organización de un conjunto de datos con el propósito de ver cómo se pueden ver afectadas las situaciones que son objeto de análisis y por ende la variabilidad en los datos de dichas situaciones. Además de ser capaces de vincular la representación gráfica

con cada uno de los conjuntos de datos presentados, esto como parte fundamental en el reconocimiento de la variabilidad, ya que, por ejemplo, en una situación de temporalidad como es el caso de la lluvia, donde muchas veces se piensa que la variabilidad no está presente o juega un papel secundario, la representación de los datos puede alterar tal percepción.

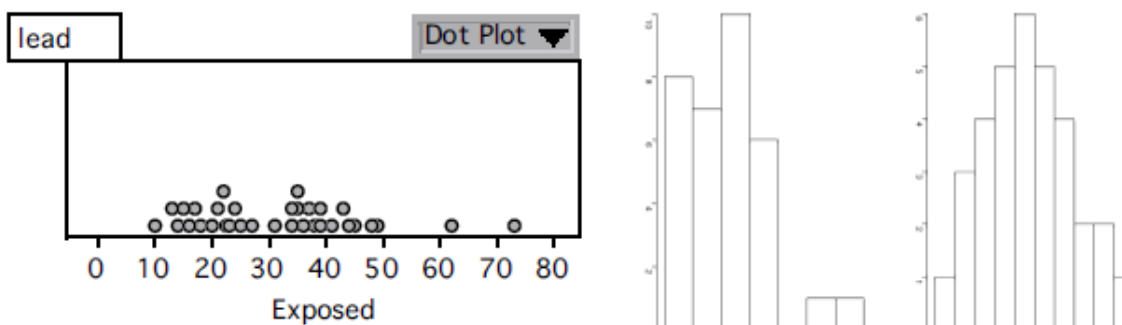
**[Cr3] SITUACIONES (PROBLEMAS, APLICACIONES O EJERCICIOS)**

La tercera sección del documento hace referencia a un ejemplo de razonamiento con variabilidad. En este se presenta una situación particular donde algunos menores se han intoxicado con plomo debido a que sus padres trabajan en una fábrica con este metal. Para dicho estudio se realiza la comparación con un grupo de niños que no han tenido contacto con el plomo o lo han hecho de una forma mínima, iniciando con la pregunta: ¿Es mayor el nivel de plomo de los niños que han sido expuestos o el de los niños que no han tenido contacto directo?

The “research question” is phrased so as to invite a comparison of means. Is the typical lead level of the exposed children higher than the typical lead level of the control children? It is instructive to

Esta pregunta se redacta de tal manera que se invita al estudiante a la comparación a través del análisis de dos gráficos estadísticos que representan los dos grupos de niños.

Lo que se espera es que el estudiante relacione los gráficos con cada grupo de individuos, incluso observando que los gráficos no tienen ningún tipo de escala. Es aquí donde el estudiante empieza a relacionar la variabilidad con la forma de organización de los datos dentro de los gráficos y el contexto de la situación (la exposición al plomo).



Otra propuesta que hace Gould, a modo de ejemplo, es la medición de precipitaciones de lluvia, las cuales tradicionalmente se hacen para predecir las temporadas con más precipitaciones en el año, pero aquí se presenta de modo que se pueda observar cómo se modifica la predicción mediante la reorganización de los datos.

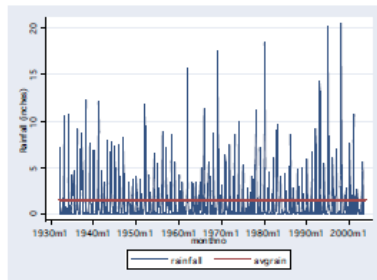


Figure 3. Rainfall in inches at UCLA

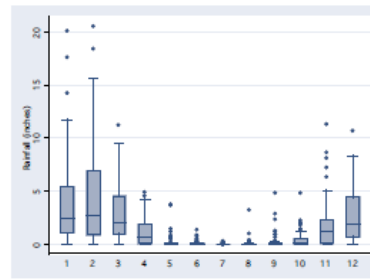


Figure 4. Rainfall by month

Este análisis fruto del proceso de reorganización de los datos se hace a través de las gráficas, es decir que al organizar los datos y representarlos de determinada manera, la variabilidad que se identifica puede cambiar y se puede concluir de forma diferente sobre los asuntos climatológicos.

Tabla 23. Situaciones [Cr3]. Gould (2011)  
Fuente. Propia

Además del análisis realizado a partir de los criterios, es importante resaltar el trabajo de Gould en cuanto al tratamiento que pretende darle a la variabilidad y el razonamiento sobre esta para que deje de estar en un segundo plano y sea comprendida como el eje fundamental del proceso de análisis estadístico, ya que, si se hace una interpretación errónea de ella, las conclusiones que se emitan sobre el conjunto de datos pueden no ser verdaderas. Además de esto el autor invita a los profesores de todos los niveles educativos a proponer observaciones que permitan identificar diferentes perspectivas de los datos. Sin embargo, aunque en el desarrollo de su artículo hace un llamado a trabajar más sobre la variabilidad como la columna vertebral del análisis estadístico, no presenta una concepción precisa de tal noción, dejándola como el reconocimiento de algo (patrones o distribución), es decir, la noción de variabilidad se asocia a un proceso.

El tercer artículo es el de Fernández, Andrade y Sarmiento (2009), titulado *La idea de la variación en la Educación Estadística*, quienes abordan la noción de variación desde lo estocástico. Estos autores son de los pocos que hacen la diferenciación al hablar de la variación desde lo estocástico, haciendo entender que esta noción se puede estudiar en otras áreas.

Los autores proponen el estudio de esta noción ya que la consideran como un componente fundamental para la enseñanza y aprendizaje de la Estadística, aclarando que es una entidad conceptual compleja y que no se limita a la idea de dispersión. Para el estudio de dicha noción, los autores sugieren tres escenarios en los que plantean proyectos pedagógicos de investigación para su respectiva construcción y estudio. El primer escenario se refiere a la variación en conjuntos de datos; el segundo, variación en situaciones de muestreo y el último a la variación en situaciones de probabilidad.

Aunque los autores afirman que la noción de variación ha tenido mayor importancia dentro del Pensamiento Variacional, está también se hace vital para el Pensamiento Aleatorio y no han sido muchos los autores que le den la relevancia que merece. Por eso Fernández, Andrade y Sarmiento (2009) intentan profundizar en esta noción y para ello trabajan cinco definiciones [Cr1]: variación, variabilidad, variabilidad muestral, variación explicada, y variabilidad no explicada (Tabla 24).

<b>[Cr1] CONCEPTOS (DEFINICIONES O DESCRIPCIONES)</b>
<p>Los autores hacen énfasis en que la variación es un componente fundamental tanto en la enseñanza como en el aprendizaje de la Estadística, por lo que recomiendan enfocar dicha enseñanza en torno a esta noción, y se evidencia que, aunque relacionan la noción de variación con la de dispersión, también mencionan otros muchos elementos que de igual manera se relacionan, como lo son aleatoriedad, incertidumbre y distribución.</p> <p>estadística con base en esta idea; se caracteriza la idea de variación como una entidad conceptual compleja que tiene en cuenta mucho más que simplemente la idea de dispersión; y se sugieren tres escenarios de trabajo en los que se pueden comportan o no aleatoriamente. De hecho, la aleatoriedad es sólo un conjunto de ideas, un modelo abstracto, una invención humana que usamos para modelar la variación en la que no vemos patrón. (p. 24)</p> <p>(2004, p. 14) la incertidumbre y la variación están muy relacionadas, ya que debido a que hay variabilidad, vivimos en incertidumbre, y ya que no en todas las cosas hay determinación o certeza sobre ellas, hay variabilidad. En palabras de Makar y Confrey (2005), "mientras que nadie espera que las estaturas de</p> <p>Se evidencia como de una y otra manera la noción de variación es construida a partir de ideas como la dispersión, la aleatoriedad, la incertidumbre, la distribución y por ende su comprensión global se hace más compleja.</p>
<p>Los autores citan a Reading y Shaughnessy (2004), quienes son los primeros en proponer una definición tanto para variación como para variabilidad.</p>

Reading y Shaughnessy (2004, citado en Ben-zvi y Garfield, 2006) definen 'variación' como un sustantivo usado para describir el acto de variar o cambiar una condición y 'variabilidad' como una forma sustantivada del adjetivo variable, que significa que algo es apto o capaz de variar o cambiar. También estos autores hacen una distinción entre lo que se observa que varía y lo que se mide. El término 'variabilidad' se usa igualmente para representar cómo varían los datos.

En este documento los autores hacen el comparativo entre variación y variabilidad, expresando que la variación describe el acto de variar, mientras que la variabilidad es utilizada para la medición de la variación.

Para continuar con el estudio de la variación los autores mencionan y definen la variación explicada y la variación no explicada. Variación explicada o variación de causa especial-sígnal y variación no explicada o variación de causa común-ruido o variación aleatoria.

especial" y "ruido" o variación de "causa común". Así, mientras que la variación explicada, se concreta o caracteriza con base en los patrones o regularidades identificadas, la variación no explicada corresponde a lo que se obtiene, cuando se ha separado de los datos, los patrones identificados. Para los estadísticos esta

Con lo expuesto en la imagen, pareciera ser que en los datos a su vez se presentan dos tipos de variación, variación explicada y no explicada. La primera permite identificar patrones en la información, mientras que la segunda hace referencia a la información filtrada cuando dejan de existir tales patrones.

Los autores enfatizan en dos nociones que conforman el razonamiento estadístico, las cuales son: la noción de muestra representativa y la noción de variabilidad muestral, las cuales a su vez conforman el fundamento de la inferencia Estadística.

variabilidad muestral. Mientras que la primera se refiere a la idea de que una muestra tomada de una población, usualmente tiene características similares a la de la población de la que se toma, la segunda destaca la idea de que las muestras tomadas de una población no son todas iguales y por lo tanto no todas son similares a la población de donde provienen. Además, agregan que "para comprender el propósito que

Se hace referencia a muestra representativa como el estudio de un grupo de una población que va a tener características similares a la población, mientras que variabilidad muestral es el estudio de grupos de una población diferentes que no representan características de la población de donde provienen. Es así como desde estas definiciones, es evidente cómo el estudio de la variabilidad comienza a tomar mayor fuerza en la enseñanza y aprendizaje de la Estadística.

Los autores relacionan la idea variabilidad con la de variación aleatoria, refiriéndose a que la variabilidad está presente en todas partes y se liga con la variación aleatoria ya que esta hace referencia a los datos a los cuales no se les puede identificar ningún patrón.

variación, y la explicación de la variación. La idea de variabilidad presente en todas partes cobra sentido cuando miramos el mundo en que vivimos, en éste es incuestionable que hay un componente de variación aleatoria.

Tabla 24. Conceptos [Cr1]. Fernández, Andrade y Sarmiento (2009)  
Fuente. Propia

Respecto al lenguaje [Cr2], los autores mencionan cómo la construcción de modelos estadísticos es una de las tareas vitales para los estadísticos y cómo esta

se relaciona directamente con la variabilidad de los datos. Debido a la construcción de estos modelos es que se hace recurrente que en este estudio se empleen constantemente términos como: regularidad, relación entre variables, patrones y medidas de dispersión (rango, desviación, varianza). Además, reluce durante la lectura del texto nociones de aleatoriedad, incertidumbre, distribución y dispersión (Tabla 25).

<b>[Cr2] LENGUAJE (TÉRMINOS, EXPRESIONES, NOTACIONES, GRÁFICOS)</b>
<p>Además de la importancia que cobra la variabilidad como fundamento para el desarrollo del Pensamiento Estadístico, los autores también mencionan la construcción de modelos estadísticos como una de las tareas fundamentales para promover tal pensamiento. Es atrayente la relación que proponen de estos modelos con la búsqueda de fuentes de variabilidad, en la identificación de patrones, regularidades y relación entre variables; ya que si recordamos los LCM estas actividades parecieren estar caracterizadas como el fundamento del Pensamiento Variacional. Pero cobran importancia en el Pensamiento Aleatorio ya que permiten identificar la variabilidad en los datos para así hacer predicciones a partir de los mismos.</p> <p>de variabilidad, y se explicita en términos de la identificación de patrones y relaciones entre variables. Si en la identificación de estos modelos no se encuentran regularidades, la opción que queda es estimar la magnitud de la variabilidad y trabajar alrededor de ella. Por otra parte, cuando se logra la identificación de regularidades, no siempre se las puede explicar en términos causales.</p>
<p>En este apartado los autores tratan la variación como una entidad conceptual y proponen medir la variación no solo desde la desviación sino también desde cómo se relaciona con el rango y la varianza.</p> <p>La variación implica diversidad y se refiere a un distanciamiento de una clase o cantidad normal, de un estándar. Una forma de medir la variación en un conjunto numérico de datos es el rango, el cual suministra la dispersión de los datos desde el máximo al mínimo, o la varianza y desviación que cuantifican la dispersión sobre la media aritmética. Para Makar y Confrey (2005), la mayoría de los usos</p>

Tabla 25. Lenguaje [Cr2]. Fernández, Andrade y Sarmiento (2009)  
Fuente. Propia

Respecto a situaciones [Cr3], aunque los autores no proponen ejemplos o ejercicios como tal, sí exponen una forma de comparación que permita ver o estudiar la variación y la incertidumbre. Dicha comparación la plantean teniendo en cuenta la altura de un grupo de niños que tienen la misma edad, para las cuales no se puede especificar cuánto varían, ya que entran en juego otra serie de factores que hacen que se produzca dicha variación.

**[Cr3] SITUACIONES (PROBLEMAS, APLICACIONES O EJERCICIOS)**

Los autores proponen estudiar la siguiente situación donde intentan comparar y establecer la relación presente entre variación e incertidumbre, al mencionar que la incertidumbre depende de la variabilidad y viceversa, es decir, al parecer sin la una no existiría la otra.

variabilidad. En palabras de Makar y Confrey (2005), "mientras que nadie espera que las estaturas de niños de cinco años de edad sean todas iguales, es con frecuencia difícil de comprender qué tanto varían las estaturas de los niños, y que la variabilidad atribuible a las diferencias en sus estaturas es una mezcla de factores explicativos (por ejemplo, la estatura de los padres y la nutrición) y de factores aleatorios o no explicados."

Tabla 26. Situaciones [Cr3]. Fernández, Andrade y Sarmiento (2009)  
Fuente. Propia

Se observa como Fernández, Andrade y Sarmiento resaltan que el término variación es un término muy estudiado en el Pensamiento Variacional, pero que a su vez ocupa un lugar esencial en las ideas que caracterizan al Pensamiento Estocástico (Aleatorio) aunque su estudio en este pensamiento sea insuficiente; por ello proponen el análisis de la variación en la Estadística desde patrones y regularidades, cuando pareciera que este proceso es del Pensamiento Variacional, ya que esto permite hallar en los datos aquella variación que puede ser explicada y la que no, para así construir modelos estadísticos que permitan establecer predicciones.

En este documento es interesante reconocer como los autores asocian el término variación a las nociones de aleatoriedad, incertidumbre y distribución. Con aleatoriedad, al trabajar con la variación no explicada; incertidumbre ya que en todas las situaciones siempre habrá variabilidad de los datos, más nunca habrá certeza, y distribución, como una manera de representar dicha variación.

El cuarto artículo que es objeto de análisis es de Peters (2011), en este se intenta hacer una comprensión robusta de la noción de variabilidad a través de una investigación realizada desde dos perspectivas, la primera, revisando teorías y propuestas acerca de la noción de variabilidad desde documentos de autores como Ben-Zvi y Garfield (2004), Pfannkuch y Wild (1999), Cobb y Moore

(1997), entre otros; y la segunda perspectiva es la empírica donde se aplica una serie de ejercicios a estudiantes y se trata de consolidar esta comprensión de la noción desde el reconocimiento de la variabilidad misma. Este trabajo se centra en cuatro elementos fundamentales como lo son disposición variacional, variabilidad en los datos para variables contextuales, variabilidad en las relaciones entre los datos y variables, y efectos del tamaño de la muestra en la variabilidad.

Para el análisis del primer criterio [Cr1] se presentan cuatro conceptos: la omnipresencia de la variabilidad, que es descrita como la piedra angular de la variabilidad, ya que esta se encuentra o hace presencia en todo y en todas partes; la representatividad de la muestra, que se define con características similares a la población; la variabilidad de la muestra que nace de muestras que no tienen características similares a la población; y la transnumeración de los datos, como el cambio de representación de estos. Por otro lado, relacionan y describen las medidas de centro y variación, como medidas de resumen que permiten la comparación entre conjuntos de datos (Tabla 27).

<b>[Cr1] CONCEPTOS (DEFINICIONES O DESCRIPCIONES)</b>	
<p>En la página 53, en la sección 2.1 llamada <i>Design Perspective</i> (perspectiva de diseño), el autor hace la aclaración que para iniciar un estudio sobre la variabilidad se debe tener presente un concepto fundamental y es la omnipresencia, entendiéndose que la variabilidad está presente en todo y en todas partes.</p> <p><b>2.1. DESIGN PERSPECTIVE</b></p> <p>Research to investigate reasoning about variation illuminates some aspects of understanding and reasoning from a design perspective. Fundamental to understanding variation is recognizing the omnipresence of variability (Cobb &amp; Moore, 1997), recognizing that variability can be seen in everything and everywhere. This recognition</p>	<p>En la página 54, dentro de la misma sección 2.1 el autor realza la importancia de dos nociones y presenta la diferencia entre ellas, representatividad de la muestra y la variabilidad de la muestra, ya que la muestra representativa tiene características similares a la población, mientras que la variabilidad de la muestra resulta de muestras que no son todas idénticas y que no coinciden exactamente con las características de la población.</p> <p>sophisticated reasoning about variation and samples requires balancing two notions: sample representativeness and sample variability (Ruben, Bruce, &amp; Tenney, 1990). Representative samples have characteristics similar to those of the population, whereas</p> <p>sample variability results from samples that are not all identical and do not match the population exactly. Also important are considerations of the effects of sample size on the</p>
<p>En la página 55 el autor hace referencia a la transnumeración (Wild &amp; Pfannkuch 1999) entendiéndose esta como el proceso de cambio de representación de los datos con el fin de observar características que no son evidentes en una u otra representación.</p>	<p>En la página 55 el autor hace referencia a las medidas de resumen, aunque si bien no muestra cuales son, si hace una descripción de su función, permitir la comparación entre conjuntos de datos o entre muestras y poblaciones.</p>



Transnumeration (Wild & Pfandkuch, 1999) includes reasoning with summary statistics such as interquartile range, mean absolute deviation, and standard deviation as numerical representations of data. Research suggests that individuals experience	Summary measures describe data and allow for comparisons between data sets or between samples and populations. Much research focuses on group comparisons (e.g., Malar & Country, 2004, 2005; Watson et al., 2007) and reveals individuals' nonrival
--	--

Tabla 27. Conceptos [Cr1]. Peters (2011)

Fuente. Propia

Para el segundo criterio [Cr2], aunque el autor no hace explícita la descripción de algunos conceptos, sí se hace reiterativo en su discurso términos como: el rango intercuartil, la desviación media absoluta y la desviación estándar, como representaciones numéricas de los datos, para finalmente, exponer las técnicas de muestro fundamental.

<b>[Cr2] LENGUAJE (TÉRMINOS, EXPRESIONES, NOTACIONES, GRÁFICOS)</b>	
Dentro del mismo discurso de la transnumeración y en general dentro del documento, el autor hace referencia términos como rango intercuartil, la desviación media absoluta, la desviación estándar, como representación numérica de los datos.	Insistentemente se hace referencia a las técnicas de muestreo y recolección de datos, aunque no hace explícito ninguna de estas.

Tabla 28. Lenguaje [Cr2]. Peters (2011)

Fuente. Propia

Para el criterio [Cr3] el autor propone una serie de tareas que apuntan a identificar la variabilidad en algunas situaciones, pretendiendo con ello describir la concepción de variabilidad que presentan los estudiantes al permitirles reconocer la naturaleza de esta desde diferentes representaciones como lo son gráficos o situaciones escritas (Tabla 29).

<b>[Cr3] SITUACIONES (PROBLEMAS, APLICACIONES O EJERCICIOS)</b>	
En la página 59, dentro del capítulo 4 llamado <i>Data Collection</i> (Recolección de Datos), se presentan una serie de actividades, la primera de ella es <i>Consultant Task</i> (tarea de consulta), la cual pretende que, sin información sobre cómo los administradores seleccionaron los exámenes, los maestros puedan concluir sin ningún tipo de sesgo, es decir, sin una	La segunda tarea que se presenta es el trabajo con el gráfico de Caliper y como en la tarea anterior se pretende que, en ausencia de contexto, los estudiantes puedan expresar la necesidad de que en este se considere la naturaleza o el patrón esperado de variabilidad para razonar sobre dicha situación.

disposición previa sobre dicha situación para evitar errores a la hora de concluir.

To improve students' test scores on state assessments, administrators from a large school district require students to take practice exams. Two outside consultants create and score the open-ended questions from these exams. Although both consultants use the same rubric to score student responses, the administrators suspect that the consultants do not interpret and apply the rubric in the same way, resulting in differences in scores between the exams scored by the two consultants. The consultants' contract with the district is up for renewal, and the administrators are trying to decide if they should renew the contract. They decide to use the most recent practice exam to compare the scores assigned from each consultant and to decide whether there is a difference in the way the exams were scored. The administrators select 50 exams scored by the first consultant and 50 exams scored by the second consultant. They find that the average score for the 50 exams scored by the first consultant was 9.7 (out of a possible 15 points), while the average score for the 50 exams scored by the second consultant was 10.3 (out of a possible 15 points). What should the administrators conclude about the scores assigned by these two consultants?

Imagine that one of your students asked you to look at this graph of data their lab partners collected during a science lab. The student's partners did not give the names of the variables represented by  $x$  and  $y$ . The student asks you how they might use this graph to predict a value for  $y$ , given a value of 4 for  $x$ . What would you say to the student?

Figure 8. Initial question for the Caliper Task

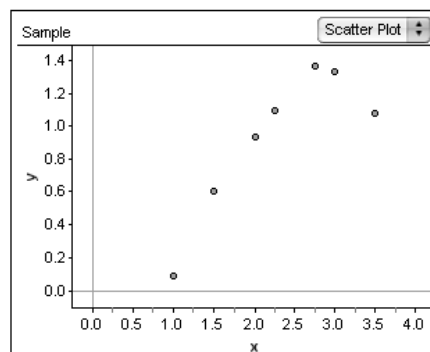


Figure 9. Initial graph for the Caliper Task

Tabla 29. Situaciones [Cr3]. Peters (2011)

Fuente. Propia

Es así como este artículo intenta presentar una de las construcciones más completas de la noción de variabilidad, que aunque no la describe de forma explícita, sí muestra algunos conceptos y lineamientos que rigen el identificar la variabilidad en todo y en todas partes. Sin embargo, para efectos de lo que se pretende en este trabajo, es importante resaltar como durante el texto no se hace distinción alguna de los términos variación y variabilidad.

El último documento que es objeto de análisis es una síntesis de investigación realizada por Ruiz, posterior tesis de doctorado (2017) quien estudia las ideas de variabilidad y dispersión como sinónimos, siendo la base para la enseñanza y aprendizaje de la Estadística.

Para comenzar el estudio de estas nociones, y desde el criterio [Cr1], el autor propone un recorrido que abarca tres miradas, la semántica, la histórica y la social. Es por lo que inicialmente propone las definiciones de dispersión, de variación y de desviación, desde el significado que presenta el diccionario de la Real Academia Española. Cabe resaltar que el autor presenta dichas definiciones

desde el idioma español e inglés, ya que una de las hipótesis que se manejan es que las confusiones entre estos términos se deben a la traducción entre idiomas (Tabla 30).

<b>[Cr1] CONCEPTOS (DEFINICIONES O DESCRIPCIONES)</b>
<p>Antes de proponer definiciones, el autor plantea como en la literatura, muchas veces el término de dispersión, variación y desviación se toman como sinónimos. Sin embargo, menciona como desde la matemática presenta sus diferencias.</p> <p><b>Dispersión:</b> 1. f. Mat. Distribución estadística de un conjunto de valores.  <b>Variación:</b> 1. f. Mat. Cada uno de los subconjuntos del mismo número de elementos de un conjunto dado, que difieren entre sí por algún elemento o por el orden de estos.  <b>Desviación:</b> 1. f. Mat. Diferencia entre la medida de una magnitud y el valor de referencia. («Real Academia Española de la Lengua», 2015)</p> <p>Asume la variación como un concepto amplio que se refiere a las diferencias que existen entre los valores que toma una variable pero que a su vez no es exclusivo de la Estadística, como si lo es la dispersión y la desviación. La desviación se entiende como la diferencia entre un dato y su media, mientras que dispersión, es la variabilidad respecto a un modelo.</p>
<p>Una vez presentadas estas definiciones, el autor exhibe las mismas definiciones en idioma inglés, en donde se puede apreciar que los términos desviación y variación coinciden con las definiciones dadas en español; sin embargo, bajo el término dispersión es que se presentan confusiones, ya que este se limita a la medida del valor máximo y el mínimo, es decir, al rango.</p> <p><b>Spread (dispersión):</b> 1. Rango de variación de algo, por ejemplo, “amplia dispersión de edades”  <b>Deviation (desviación):</b> La cantidad que difiere el valor de una medida individual de un valor fijo llamado media.  <b>Variation (variación):</b> Un cambio en el valor de una función debido a pequeños cambios en el argumento o argumentos de esta (Simpson y Weiner, 2016).</p>
<p>Finalmente, presenta la definición de variabilidad, que al exponerla con un ejemplo, hace que se asuma como un factor de la vida cotidiana presente en todas partes.</p> <p>verdadero valor del fenómeno en cuestión” (Hald, 1998, p.33). Además, en la literatura de educación estadística se utilizan otros términos como “variability” que analiza a continuación y tampoco es exclusivo de la estadística:</p> <p><b>Variability (variabilidad):</b> 1. El hecho de que algo puede variar. Ej. La variabilidad del clima o un grado de variabilidad en el tipo de cambio (Simpson y Weiner, 2016).</p>
<p>Luego de exponer los términos desde definiciones amplias, el autor centra la atención en los términos variación y variabilidad, dando a entender que la variabilidad es una cualidad de algo, mientras que la variación es la descripción de esa cualidad.</p>

adelante, “el término **variabilidad** será entendido como la **característica de una entidad** que es observable, y el término **variación** para referirse a la **descripción o medida de esta característica**” (Reading y Shaughnessy, 2004, p.202).

Tabla 30. Conceptos [Cr1]. Ruiz (2017)  
Fuente. Propia

Por otro lado, para el criterio [Cr2], durante el texto se mencionan constantemente términos como variabilidad, dispersión y variación (Tabla 31). Nuevamente el autor hace ver estos términos como sinónimos o como si su uso se debiera al idioma utilizado. Otra expresión que cobra sentido es el error aleatorio de cual Galileo propone sus primeras propiedades.

**[Cr2] LENGUAJE (TÉRMINOS, EXPRESIONES, NOTACIONES, GRÁFICOS)**

El autor se enfoca en cómo el uso indistinto de estos términos se da por el idioma utilizado; sin embargo, al mencionar y relacionar dichos términos hace uso del conector “y” más no del “o”, por lo que queda la inquietud de hasta dónde su uso es indistinto, es decir, que puede ser lo mismo variabilidad, dispersión y variación.

esta manera nos indican Estepa y Ortega (2006) “podemos decir, sin creer equivocarnos, que el uso indistinto de “**variabilidad**”, “**dispersión**” y “**variación**” es también una constante en la literatura en español.” (p. 174) Lo mismo sucede en lengua

Tabla 31. Lenguaje [Cr2]. Ruiz (2017)  
Fuente. Propia

Finalmente, para el criterio [Cr3], el autor plantea algunas situaciones donde se puede evidenciar cómo se pudo haber iniciado el estudio de la variabilidad, y es así como se remonta a los babilónicos y al estudio de los cuerpos celestes, al intentar cuantificar una noche estrellada, el movimiento del sol y los astros. Otro de los ejemplos es el caso de Hiparco quien estudiaba el paso del sol por un punto durante el solsticio para posteriormente cuestionarse si el año tropical era constante o no, mediante diversas observaciones se comenzó a cuantificar el error y a darse cuenta de que en cada observación obtenía un resultado diferente (Tabla 32).

<b>[Cr3] SITUACIONES (PROBLEMAS, APLICACIONES O EJERCICIOS)</b>
<p>Luego de mencionar superficialmente situaciones de cómo aparentemente pudo iniciar el estudio de la variación, es hasta Galileo que se concreta esta idea, ya que es el primer personaje que plantea una descripción matemática del error y quien supone que los valores se agrupan alrededor de valor verdadero, dando así sentido y enfoque a la dispersión.</p> <p>La distancia de una estrella desde el centro de la Tierra es descrita por un solo número, la distancia real.</p> <p>Para este ejemplo cabe resaltar dos cosas: la primera, cómo surge la variabilidad a través del estudio de situaciones de la vida cotidiana y el por qué se puede decir que la variabilidad está presente en todo lo que nos rodea; y la segunda, la visión que se obtuvo Galileo al intentar ver las alteraciones que presentaba esta situación para así poder determinar una medida más aproximada o exacta.</p>

Tabla 32. Situaciones [Cr3]. Ruiz (2017)  
Fuente. Propia

A lo largo del texto se evidencia cómo el autor al estudiar los términos variación, variabilidad, dispersión, distribución hace énfasis en que el término variación es muy amplio y, por tanto, no es exclusivo de un área determinada, sino de las matemáticas mismas. Mientras que al intentar estudiar el término variabilidad, a este lo asocia como sinónimo del término dispersión, ya que desde el idioma inglés el término dispersión es “spread”. Hace esta relación, ya que el término spread tiene varios significados y esto conlleva a confusiones y errores en el aprendizaje y enseñanza de la Estadística.

Después de terminado el análisis de los cinco documentos, se evidencia que desde el Pensamiento Aleatorio muchos de los autores trabajan el término variación y variabilidad indistintamente, y lo describen como la idea fundamental que subyace a la Estadística pero que además están asociados a las nociones de dispersión, distribución y aleatoriedad.

Cabe resaltar que la variación en la Estadística no hace referencia a un cambio que se produce en una relación de dependencia entre dos variables, sino que está sujeta al comportamiento de un conjunto de datos donde se pueden identificar

patrones o regularidades que permiten que se otorguen características a la población a través de estos datos.

### 3.3 RESULTADOS: VARIACIÓN vs VARIABILIDAD

Una vez terminado el análisis de los documentos se encuentran diferencias y similitudes respecto a las nociones estudiadas a partir de los tres criterios seleccionados las cuales se explicitan a continuación, así como los elementos propios de cada una, para finalmente presentar algunas sugerencias que sirven de guía para la enseñanza y aprendizaje de dichas nociones.

A partir de los criterios [Cr1] y [Cr2] se enlistan en la Tabla 33 los elementos que aparentemente comparten las dos nociones, de manera que a partir de ellos seguidamente se establecen diferencias y similitudes.

	<b>Variación en el Cálculo</b>	<b>Variabilidad en la Estadística</b>
Variable(s)	Dependiente e independiente  Covariación	<ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Aleatoria</li> <li>✓ Cualitativa: <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Nominal</li> <li>▪ Ordinal</li> </ul> </li> <li>✓ Cuantitativa <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Continua</li> <li>▪ Discreta</li> </ul> </li> <li>✓ Covariación</li> </ul>
Parámetros	<ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Constante</li> <li>✓ Variable</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Medidas de tendencia central</li> <li>✓ Medidas de dispersión</li> </ul>
Representación	<ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Cartesiana</li> <li>✓ Tabular</li> <li>✓ Verbal</li> <li>✓ Algebraica</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Gráfico de barras</li> <li>✓ Gráfico de sectores</li> <li>✓ Histogramas</li> <li>✓ Gráfico de líneas</li> <li>✓ Gráfico de dispersión</li> </ul>

Tabla 33. Elementos similares en las nociones variación y variabilidad  
Fuente. Propia

A continuación, se realiza la descripción de cada uno de estos elementos, analizando su papel dentro de las nociones para así mostrar sus similitudes o diferencias.

## Variable

El concepto de variable hace parte fundamental de ambas nociones, tanto en variación como en variabilidad. Es así como los autores consultados sugieren constantemente identificar la variable o variables inmersas en la situación. Aunque el concepto está presente en ambas nociones, esto no quiere decir que las variables que se utilizan en uno u otro pensamiento sean de la misma naturaleza, ya que, dentro del Pensamiento Variacional, se reconocen las variables dependiente e independiente, es decir, en el Cálculo habrá una correlación entre dos variables, para estos casos generalmente se trabaja la variable tiempo (independiente) en relación con otra, ya sea altura, edad, distancia, velocidad, etc.; mientras que en el Pensamiento Aleatorio se reconocen las variables aleatorias, las cuales se caracterizan por asignar un número real a cada elemento del espacio muestral; y las variables estadísticas en donde se pueden identificar las variables cualitativas o cuantitativas, que a su vez se clasifican en nominales u ordinales, y continuas o discretas, respectivamente. Las variables cualitativas que se refieren a características o cualidades que no pueden ser medidas con números, y es con este tipo de variable que podemos caracterizar la principal diferencia entre nociones, puesto que en el cálculo las dos variables al parecer deben ser de tipo numérico, mientras que en la estadística caben variables de índole categórico. La variable cualitativa se puede clasificar en nominal que se caracteriza por que los valores que toma no están sometidos a un criterio de orden (colores o lugar de residencia), y en ordinal que puede tomar distintos valores ordenados siguiendo una escala establecida. Por otro lado, las variables cuantitativas se refieren a atributos que expresan una cantidad o magnitud y se clasifican en continua que es aquella que puede asumir un número incontable de valores y en discreta que es aquella que puede asumir un número contable de valores; estas últimas parecen tener un acercamiento a las características de las variables en el ámbito del pensamiento variacional, por el uso de medidas y magnitudes en la forma de identificarlas.

Finalmente se hace referencia a la covariación desde el Cálculo y la Estadística como medición de la relación que existe entre dos variables.

En la Tabla 34 se presenta un ejemplo de variable para cada una de las nociones, en donde se evidencia cómo se trabaja este concepto.

<b>Situación de variación (Pensamiento Variacional)</b>	
<b>Ejemplo</b>	<b>Análisis</b>
Se quiere construir una caja sin tapa a partir de una hoja de cartón de 20 x 10cm. Para ello, se corta un cuadrado de lado L en cada esquina y se dobla la hoja levantando los cuatro laterales de la caja. Determinar las dimensiones de la caja para que su volumen sea máximo.	En esta situación se puede identificar la variable independiente que en este caso es la altura y la variable dependiente es el volumen de la caja. Las dos expresadas numéricamente y con una unidad de medida. Es así como se puede observar una correlación de variables (altura/volumen) en esta situación, lo que caracteriza una situación de variación.

Tabla 34. Ejemplo de variable en una situación de variación  
Fuente. Propia

<b>Situación de variabilidad (Pensamiento Aleatorio)</b>	
<b>Ejemplo</b>	<b>Análisis</b>
La estatura de los habitantes de una ciudad. Existen infinitos valores posibles, un habitante puede medir 1,784596 metros, otro puede medir 1,589641254125 metros y otro puede medir 1,6457843120 metros. Existen infinitos valores posibles, es decir, un número incontable de valores.	La variable de esta situación es una variable estadística de tipo cuantitativa continua, que hace referencia a la característica 'altura' de los habitantes de una ciudad, es decir, de una población. Esta es una situación de variabilidad ya que solo se observa la altura de una muestra y se esperaría que esto permitiera inferir sobre la población. Sin embargo, se debe tener en cuenta que existen otros factores que hace que la altura entre uno u otro individuo sea diferente, y por ende diferente entre muestras.

Tabla 35. Ejemplo de variable en una situación de variabilidad  
Fuente. Propia

### Parámetro

Es otro de los elementos presentes en ambas nociones y aunque este concepto se encuentra relacionado tanto con la variación como con la variabilidad, en el Pensamiento Variacional, el término se asocia tanto a variable como a constante, es decir, a los factores presentes en la situación y que ayudan a modelarla. Mientras que en el Pensamiento Aleatorio la noción de parámetro se asocia a



cualquier valor característico de la población sujeto de análisis como lo son la media o la desviación típica (medidas de centralización de la población), es así como en este pensamiento el parámetro es la base para poder emitir conclusiones o inferencias sobre la situación de estudio. En la Tabla 36 se presenta un ejemplo donde se intenta mostrar cómo se trabaja el término parámetro.

<b>Situación de variación (Pensamiento Variacional)</b>	
<b>Ejemplo</b>	<b>Análisis</b>
Hallar el valor de $b$ y $m$ para que la curva $y = x^3 + bx^2 + mx + 1$ tenga un punto de inflexión en el punto (0,1) y la pendiente de la recta tangente en ese punto valga 1.	En este ejemplo se identifican como parámetros tanto la variable $x$ , como las constantes $b$ y $m$ que hacen parte de la modelación de dicha situación.

Tabla 36. Ejemplo de parámetro en una situación de variación  
Fuente. Propia

<b>Situación de variabilidad (Pensamiento Aleatorio)</b>	
<b>Ejemplo</b>	<b>Análisis</b>
En un experimento hemos obtenido los siguientes valores: 10, 11, 10, 9, 10, 10. Calcular la media aritmética de los valores del experimento: Número de valores del experimento: 6 valores de muestra $P = (10 + 11 + 10 + 9 + 10 + 10) / 6 = 60 / 6 = 10$	Para esta situación el parámetro que se tuvo en cuenta para realizar las conclusiones sobre el estudio estadístico es el promedio de los resultados del experimento, una media de tendencia central.

Tabla 37. Ejemplo de parámetro en una situación de variabilidad  
Fuente. Propia

### Representaciones

Las representaciones en ambas nociones son de vital importancia, ya que permiten identificar y reconocer elementos tanto de la variación como de la variabilidad (según el pensamiento que se esté trabajando). Por ejemplo, la representación gráfica de una situación de la variación puede hacer referencia a representación tabular, gráfica, verbal o algebraica, las cuales permiten identificar el cambio dentro de la situación de estudio. Mientras que en una situación de variabilidad encontramos una gama de gráficos estadísticos como los son el

gráfico de barras, que se utiliza en variables cuantitativas discretas; el histograma que es equivalente al diagrama de barras, pero para variables continuas o cuando los datos están agrupados en intervalos; el gráfico de sectores que permite representar cualquier tipo de variable estadística, entre otros gráficos.

Es así como los gráficos constituyen una de las principales herramientas en ambas nociones, ya que el representar las situaciones a través de estos permite un mejor análisis ya sea de la variación o la variabilidad de los datos. Cabe mencionar que, al trabajar las representaciones en cada uno de los pensamientos, estas deben cumplir unas características particulares, como, por ejemplo, en el Cálculo, las escalas y los ejes coordenados deben estar debidamente establecidos, mientras que, en la Estadística, aunque si es necesario el uso de escalas en algunos tipos de gráficos, la noción de eje coordenado no aplica.

<b>Representación en variación (Pensamiento Variacional)</b>	
<b>Ejemplo</b>	<b>Análisis</b>
	<p>Como se puede observar en el gráfico existe una correlación de variables (tiempo, velocidad) y una dependencia entre ellas, pero también este gráfico permite deducir la relación inversamente proporcional entre ellas (mientras que el tiempo aumenta, la velocidad disminuye).</p>

Tabla 38. Ejemplo de gráfico en variación  
Fuente. Propia

<b>Representación en variabilidad (Pensamiento Aleatorio)</b>	
<b>Ejemplo</b>	<b>Análisis</b>
	<p>Este gráfico permite identificar los patrones de variabilidad en cuanto a los gustos en colores de una comunidad, donde se puede observar la preferencia por el color rojo.</p>

--	--

Tabla 39. Ejemplo de gráfico en variabilidad  
Fuente. Propia

Desde el criterio [Cr3] se evidencian que las situaciones (ejemplos, ejercicios, problemas) también presentan sus particularidades para tratar la variación y la variabilidad desde cada una de sus áreas. Es así como para el caso del Pensamiento Variacional, se pueden proponer situaciones tanto del contexto real, la vida cotidiana, como situaciones que no sean necesariamente reales, pero sí que se puedan modelar; mientras que, para el Pensamiento Aleatorio, lo mejor es trabajar ejercicios en contexto y especialmente de la vida cotidiana, que sean de mayor provecho y significativos para los estudiantes y en los que se le dé sentido real a la variabilidad.

<b>Situación de variación (Pensamiento Variacional)</b>	
<b>Ejemplo</b>	<b>Análisis</b>
Un aeroplano utiliza una cantidad fija de combustible para despegar, una cantidad fija (diferente) para aterrizar, y una cantidad fija (diferente) por milla cuando está en el aire. ¿Cómo depende la cantidad total de combustible requerido, de la longitud del viaje?	Este ejemplo permite evidenciar, una típica situación de variación, no necesariamente en un contexto real, pero que permite identificar la relación entre variables distancia y cantidad de combustible.

Tabla 40. Ejemplo de situación de variación  
Fuente. Propia

<b>Situación de variabilidad (Pensamiento Aleatorio)</b>	
<b>Ejemplo</b>	<b>Análisis</b>
Elecciones para presidente en Colombia para el periodo 2019-2022.  En <b>Bogotá</b> , Petro obtuvo 1'884.869 votos y Duque 1'447.685 votos. En <b>Barranquilla</b> , Petro obtuvo 242.473 votos y Duque 191.485 votos. En <b>Cali</b> , Petro obtuvo 446.477 votos y Duque 352.766 votos. En <b>Cartagena</b> , Petro obtuvo 176.421 votos y Duque 130.644 votos. En <b>Medellín</b> , Duque obtuvo 693.334 votos y Petro 208.427 votos. En <b>Bucaramanga</b> , Duque obtuvo 168.312 votos y Petro 107.542 votos. En <b>Cúcuta</b> , Duque obtuvo 250.405 votos y Petro 47.204 votos.	La Estadística cobra sentido al trabajar una situación del contexto con datos de la vida real. Para esta situación particular se puede estudiar cómo en cada ciudad la variabilidad de los votos por cada candidato puede ser diferente, y de esta manera inferir sobre el posible ganador de las elecciones.

Tabla 41. Ejemplo de situación de variabilidad  
Fuente. Propia

Una vez analizados los conceptos, términos y situaciones asociadas a cada una de las nociones, se puede concluir que, por un lado, aunque en cada uno de los pensamientos hacen referencia a variables, parámetros, gráficos y situaciones, todos estos son de diferente naturaleza; y por otro, cada pensamiento se construye desde ideas claves o denominadas fundamentales, así, para el Pensamiento Variacional se debe trabajar desde la idea de cambio apoyada de conceptos como función derivada y la relación entre variables (dependiente e independiente), mientras que para el Pensamiento Aleatorio se debe hacer énfasis en la idea de dispersión, trabajando la variación y variabilidad según la situación, es decir, según el contexto, el idioma o el uso que se le quiera dar. Sin embargo, para ambos campos se ha de dejar un poco de lado el énfasis en procesos algorítmicos, dándole mayor fuerza a la construcción y desarrollo de los conceptos clave que conforman cada noción.

Finalmente, se listan en la Tabla 42, y describen aquellos elementos que identifican y caracterizan cada una de las nociones, es decir, las diferencias.

<b>Variación en el Cálculo</b>	<b>Variabilidad en la Estadística</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Razón de cambio:               <ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Promedio</li> <li>✓ Instantánea</li> </ul> </li> <li>• Derivada</li> <li>• Función</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Datos</li> <li>• Dispersión</li> <li>• Distribución</li> </ul>

Tabla 42. Elementos propios de cada una de las nociones  
Fuente. Propia

Ahora bien, se puede ver como cada noción está estructurada por elementos propios que las caracterizan. Para el caso de la variación en el Cálculo, se evidencia como la razón de cambio (entendida como la medida en la cual una variable se modifica en relación a otra) es la idea principal, acompañada de la noción de función (modelación algebraica de la relación entre las variables inmersas en la situación de variación) y de derivada (medida de la velocidad del cambio en un contexto continuo); mientras que el fuerte para la variabilidad o variación en la Estadística es el estudio de los datos y todo lo relacionado con

estos, como es el caso de las medidas de dispersión (parámetros estadísticos que indican cómo se alejan los datos respecto a una determinada medida), lo que sirven como indicador de la variabilidad de los datos. Además de las medidas de dispersión se encuentran la distribución (que indica toda la gama de valores que pueden representarse como resultados de una medición de una situación) y la dispersión (que indica que tan concentrados o alejados se encuentran los datos dentro de una situación).

Es así que luego de identificar aquellos elementos constitutivos presenten en cada una de las nociones, de realizar la respectiva caracterización y de establecer las diferencias que permiten hablar de dos nociones distintas, es preciso realizar algunas recomendaciones al momento de trabajar con dichas nociones, como lo es que profesor dentro del aula procure profundizar en los conceptos más que en los procesos, y esto no es una invitación a dejar de lado el trabajo algorítmico, sino que se le dé más sentido a estos procesos teniendo claro en este caso las nociones que se trabajan (variación o variabilidad), ya que si el estudiante no identifica la variación o a variabilidad dentro de una situación de estudio, difícilmente podrá concluir sobre ella desde los procesos algorítmico que realiza.

Además, estudiar estas nociones de forma más profunda, proporcionará al estudiante herramientas clave al momento de decidir cómo proceder frente a ella, por ejemplo, el estudiante va a ser capaz de identificar la variable o variables que están inmersas dentro de la situación, de identificar los patrones de cambio o la correlación que puede existir entre variables.

De otro lado también es importante resaltar el apoyo que el desarrollo de nueva tecnología brinda en el afianzamiento de estas nociones, permitiendo que el estudiante no se detenga en el proceso algorítmico y profundice más en el análisis de las situaciones.

#### 4. CONCLUSIONES

En este capítulo se presentan las conclusiones sobre el desarrollo y los resultados obtenidos mediante la revisión bibliográfica, lo cual centró su atención en identificar las características propias de las nociones de variación y variabilidad, donde se pretendió conjeturar si realmente son distintas, si se generan errores conceptuales al trabajar estas nociones sin ningún tipo de distinción, o por el contrario determinar si el uso indistinto de estas no conlleva a ningún error y por lo tanto no se hace necesario el hacer énfasis en distinguirlas.

En relación con el objetivo principal del trabajo, de caracterizar y comparar las nociones de variación y variabilidad se reconoce que después de un arqueo bibliográfico de la literatura seleccionada, en ninguno de los documentos analizados, desde el área de Cálculo, los autores trabajan con el término variabilidad; mientras que en los de Estadística, con frecuencia se encontró el término variación, pareciera ser como si esta fuera la “culpable” de la confusión, ya que desde la Estadística, se puede evidenciar como los autores trabajan las nociones de variación y variabilidad como sinónimos, sin embargo, se enfocan más en la variabilidad cuando hablan del comportamiento de los datos, mientras que variación la emplean para todo lo demás, como, por ejemplo, para trabajar las medidas de dispersión, o para caracterizar las situaciones y el contexto. Es así como, se considera que el uso de los términos variación, variabilidad y dispersión desde la Estadística, al trabajarlos como sinónimos e indistintamente genera fuertes obstáculos para la comprensión de esta, por ende, debería hacerse la claridad y trabajar la variabilidad únicamente cuando se estudie el comportamiento de los datos.

Además de esto, se evidencia en los documentos, como a pesar de que los autores intentan trabajar sobre las nociones (variación y variabilidad) que

subyacen tanto al Cálculo como a la Estadística respectivamente, ellos siguen recalcando la importancia que se le da solo a los procesos algorítmicos, cuando esta debería ir más allá de hallar una derivada, de graficar una función, de hallar las medidas de tendencia central o de dispersión. En este caso los procesos de enseñanza-aprendizaje deberían estar centrados en para qué hallarlos, por qué son útiles, qué sentido tienen en el contexto en el que se calculan, entre otros.

Dentro de las similitudes encontradas luego de realizar la caracterización y comparación de las nociones, se halla que, aunque en ambas nociones se emplean términos como variables y parámetros, estos tienen una interpretación diferente, lo que conlleva a que dicha similitud sea solo referente a la palabra empleada más no a su significado ni naturaleza, un caso particular y claro de esto, es la covariación, que si bien hace parte de ambas nociones, en el Cálculo la covariación se expresa en términos de cómo una variable cambia con respecto a la otra (dependiente e independiente), mientras que en Estadística la covariación se utiliza cuando se estudia una misma muestra a partir de más de una variable. Es así como aquí ya se puede afirmar que las nociones de variación y variabilidad son diferentes y es vital en el proceso de formación hacer esta distinción para no generar confusiones principalmente con estos términos. Aunque ya se afirmó que las nociones son diferentes, en ambas se presentan procesos similares en cuanto al análisis de las situaciones donde están inmersas; atendiendo a esto se identifica como la interpretación de gráficos es un proceso que suele asociarse solo a la Estadística, desde donde se puede concluir sobre el comportamiento de la variabilidad de los datos, pero durante este estudio se evidenció que en el Cálculo la interpretación de gráficos también es un proceso esencial, al igual que en la Estadística, ya que permite concluir sobre el comportamiento de la variación y el cambio de una situación modelada; es así como el Cálculo y la Estadística comparten este proceso de análisis y razonamiento a partir de las representaciones gráficas.

Además de esto y aunque parecería que el rastreo de documentos que cumplieran las condiciones establecidas para el análisis de la noción de variación solo desemboca en la producción de una misma comunidad académica (Cantoral), y pareciera un limitante para el estudio de la misma, se debe tomar como una invitación a seguir profundizando en este tema ya que al parecer hay poca producción al respecto.

Finalmente se hace un llamado a ahondar en la enseñanza y aprendizaje de la Estadística en el colegio ya que, normalmente queda relegada y por ende su estudio termina siendo el tratamiento algorítmico y sin sentido de las situaciones, y no se profundiza en nociones fundamentales como la variabilidad. Esto como parte fundamental de la formación del estudiante con miras a el campo donde se quiera formar profesionalmente ya que el estudio y apropiación de las nociones para la enseñanza y aprendizaje de estudiantes de carreras como Psicología, Ingenierías o Humanidades, son pertinentes y de vital importancia ya que les debe proporcionar conocimientos y habilidades para resolver problemas de la vida real.



## REFERENCIAS

- Batanero, C., & Díaz, C. (2011). Estadística con proyectos. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Granada, España.
- Behar, R. (2018, octubre). *Importancia del contexto en la formación del pensamiento Estadístico*. Trabajo presentado en el Tercer Encuentro Colombiano de Educación Estocástica [3°ECEE], Popayán, Colombia.
- Bonilla, M., Romero, J., Narváez, D., & Bohórquez, L. (2015). Características del proceso de construcción del significado del concepto de variación matemática en estudiantes para profesor de matemáticas. Avances de investigación en educación matemática.
- Botella, J., León, O., San Martín, R., & Barriopedro, M. (2001). *Análisis de datos en Psicología I. Teoría y ejercicios*. Madrid: Pirámide.
- Caballero, M., & Cantoral, R. (2013). Una caracterización de los elementos del pensamiento y lenguaje variacional. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 26, pp. 463-46.
- Caballero, M., & Cantoral, R. (2017). Una caracterización de la noción sistema de referencia para el tratamiento del cambio y la variación. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Cantoral, R. (2013). Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional. Secretaría de Educación Pública, México D.F., México.
- Cantoral, R., & Farfán, R. (1998). *Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis*. Épsilon, 42(14), 3.
- Cantoral, R., Molina, J.G. & Sánchez, M., 2005. Socio epistemología de la predicción. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. México. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.
- Castro, D., & Zabala, J. (2018, octubre). *Variación Estadística: un estudio con profesores en ejercicio*. En Trabajo presentado en el Tercer Encuentro

- Colombiano de Educación Estocástica [3°ECEE]. Asociación Colombiana de Educación Estocástica. Popayán, Colombia.
- Chaves, E. (2016). *La enseñanza de la Estadística y la Probabilidad, más allá de procedimientos y técnicas*. Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, (15), pp. 21-31.
- Colmenares, E. (2012). *Medidas de dispersión, variación o variabilidad*, [en línea]. Bogotá: Escuela Colombiana de Carreras Industriales. Disponible en: <https://es.slideshare.net/EnedinaRodriguez/medidas-de-dispersin-variacion-o-variabilidad> [2018, 2 de diciembre].
- Departamento Administrativo Nacional de Estadística [DANE], (2008, junio). *Estimación e interpretación del coeficiente de variación de la encuesta cocensual* [en línea]. Disponible en: [https://www.dane.gov.co/files/investigaciones/boletines/censo/est\\_interp\\_coefvariacion.pdf](https://www.dane.gov.co/files/investigaciones/boletines/censo/est_interp_coefvariacion.pdf) [2018, 2 de diciembre].
- Fernández, F., Andrade, L., & Méndez, M. (2018). *Hacia un fortalecimiento de la idea de distribución estadística en la formación de estudiantes para profesores de matemáticas*. Manuscrito no publicado, Universidad Pedagógica Nacional, Colombia.
- Fernández, F., Andrade, L., & Sarmiento, B. (2009). La idea de variación en la educación estadística. *Memorias VIII Encuentro Nacional de Educación Matemática y Estadística*. Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá, Colombia.
- García, M., & Ruiz, F. (2009). *El estudio de la variación, primeras aproximaciones en la educación básica y su efecto en estudiantes de educación superior*. X Congreso Nacional de Investigación Educativa. educación y conocimientos disciplinares. Instituto Pedagógico Nacional. México D.F., México.
- Garfield, J., & Ben-Zvi, D. (2005). *A framework for teaching and assessing reasoning about variability*. Consejo editorial del SERJ. University of Minnesota.

- Godino, J., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(3): pp.325-355.
- Godino, J., Batanero, C., & Roa, R (2005). *Análisis ontosemiótico de problemas combinatorios y de su resolución por estudiantes universitarios*. (pp. 1-31).
- Godino, J. Font V., & Wilhelmi, M. (2006). Análisis ontosemiótico de una lección sobre suma y resta. *RELIME Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. Número Especial, pp. 131-155.
- Gould, R. (2011). Variability: One Statistician's view. Department of Statistics, UCLA.
- Gómez, J. L. L., & Romero, L. R. (2008). *Análisis didáctico y formación inicial de profesores: competencias y capacidades en el aprendizaje de los escolares*. 3(1), pp. 35-48.
- Hauger, G. (1995). Rate of change knowledge in high school and college students. Ponencia presentada en la reunión anual de la American Educational Research Association. Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association (San Francisco, CA).
- Huamán, D. (2011). Fuentes de información. *Curso: Módulo 1. Fuentes de información*. Centro de gestión de conocimiento OPS/OMS Perú.
- Konold, K., & Higgins, T. L. (2003). Reasoning About Data, En J. Kilpatrick; W. G. Martin; D. Shifter, (eds.), *A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics*, National Council of Teachers of Mathematics, VA, USA
- López, J., Piovesan, S., & Patrón, C. (2016). *Orientaciones para realizar una monografía de revisión*. Facultad de Odontología. Departamento de Publicaciones. Uruguay.
- Ministerio de Educación Nacional [MEN]. (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas*. Bogotá, Colombia.
- Ministerio de Educación Nacional [MEN]. (2004). Pensamiento Variacional y tecnologías computacionales. *Ministerio de Educación Nacional*. Bogotá, Colombia.

- Ministerio de Educación Nacional [MEN]. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas*. Bogotá, Colombia.
- Peters, S. A. (2011). Robust Understanding of Statistical Variation. *Statistics Education Research Journal*, 10(1).
- Pfannkuch, M., & Wild, C. (1999). *Statistical Thinking in Empirical Enquiry*. Department of statistics, University of Auckland. Auckland, New Zealand.
- Ramírez, M. (2015). *Una mirada a la probabilidad en los libros de texto de secundaria*. (Tesis de Maestría). Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá, Colombia.
- Reséndiz, E. (2006). *La variación en las explicaciones de los profesores en situación escolar*. (Tesis de doctorado), CINVESTAV-IPN: Dpto. de Matemática Educativa.
- Ruiz, J. (2017). Síntesis de la investigación sobre variabilidad y dispersión en estadística. Trabajo Fin de Máster. Universidad de Granada.
- Sánchez, E. (2010). *La importancia de la variación en la enseñanza de la Estadística de bachillerato*. [en línea]. Disponible en: <https://repensarlasmatematicas.files.wordpress.com/2012/09/s11-importancia-de-la-variacion3b3n-estadistica.pdf>
- Vrancken, S., & Engler, A. (2014). *Una introducción a la derivada desde la variación y el cambio: resultados de una investigación con estudiantes de primer año de la universidad*. Universidad Nacional del litoral. Santa fe, Argentina.