



**ANÁLISIS Y CONSECUENCIAS DE LA TEORÍA
ESPECIAL DE LA RELATIVIDAD SIN EL
SEGUNDO POSTULADO: UNA CONSTRUCCIÓN
ALTERNATIVA PARA LA COMPRENSIÓN DEL
POSTULADO**

CINDY LORENA ACEVEDO SOTO

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
BOGOTÁ D.C

2019



ANÁLISIS Y CONSECUENCIAS DE LA TEORÍA ESPECIAL DE LA
RELATIVIDAD SIN EL SEGUNDO POSTULADO: UNA
CONSTRUCCIÓN ALTERNATIVA PARA LA COMPRENSIÓN DEL
POSTULADO


CINDY LORENA ACEVEDO SOTO

DOCUMENTO DE MONOGRAFÍA PARA OPTAR POR EL TÍTULO DE
LICENCIADA EN FÍSICA

DIRECTOR
Prof. YESID J. CRUZ

LINEA DE PROFUNDIZACIÓN
LA ENSEÑANZA DE LA FÍSICA Y LA RELACION FÍSICA- MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA


BOGOTÁ D.C, COLOMBIA 2019

 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL <small>Relatividad de la Relatividad</small>	FORMATO
	RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE
Código: FOR020GIB	Versión: 01
Fecha de Aprobación: 10-10-2012	Página 1 de 4

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de Grado
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento	Análisis y Consecuencias de la Teoría Especial de la Relatividad sin el Segundo Postulado: Una Construcción Alternativa para la Comprensión del Postulado.
Autor(es)	Acevedo Soto, Cindy Lorena
Director	Cruz B, Yesid
Publicación	Bogotá, Universidad Pedagógica Nacional, 2019. 98 págs.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional
Palabras Claves	SEGUNDO POSTULADO; PRINCIPIO DE RELATIVIDAD; TEORÍA DE GRUPOS; INVARIANZA; COVARIANZA; LUZ; HOMOGENEIDAD; ISOTROPÍA; CONSERVACIÓN

2. Descripción
<p>El trabajo de grado que se propone inicia con la formalización de la orientación del cuerpo rígido en el espacio para introducir el <i>Grupo Especial Ortogonal SO(3)</i> generalizando las rotaciones respecto a un eje arbitrario. Desde éste desarrollo matemático se llega al concepto de generadores del grupo, cuya forma matemática define de manera específica un invariante y unas transformaciones asociadas; introduciéndonos de ésta manera en la relatividad especial. Haciendo un análisis desde la geometría hiperbólica y de la física deducimos que tales transformaciones, dependiendo de la naturaleza de una constante K, obtenemos bien sea las transformaciones de Galileo o las de Lorentz. Un análisis propio complementado con los supuestos de los trabajos representativos de la <i>Relativity without Light</i> implican que $K=c$, llegando a una construcción propia matemática y física de cómo interpretar el segundo postulado. Desde este formalismo se hace posible construir una justificación a la invarianza de la velocidad de la luz y con ello una interpretación diferente de la fenomenología de la teoría especial de la relatividad.</p>

3. Fuentes
Alonso, M., & Finn, E. J. (1970). <i>Campos y Ondas</i> . Fondo Educativo Interamericano.
Blumental, L. M. (1965). <i>Geometría Axiomática</i> . Madrid: Aguilar S. A. de ediciones.
Cabrera, B. (1986). <i>Principio de Relatividad: Sus fundamentos experimentales y filosóficos y su evolución histórica</i> . Editorial Alta Fulla.
Einstein, A. (1905). Zur Elektrodynamik bewegter Körper (On the electrodynamics of moving bodies) . <i>Annalen der Physik</i> , 1-22.


 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL <small>Realidad y Pedagogía</small>	FORMATO	
	RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE	
Código: FOR020GIB	Versión: 01	
Fecha de Aprobación: 10-10-2012	Página 2 de 4	

- Gao, S. (2017). *Relativity without light: A further suggestion*. Shanxi University: Research Center for philosophy of science and technology.
- Kalotas, T. M., & Lee, A. R. (1978). On the constancy of the velocity of light. *Foundations of Physics*, 8(7/8), 603-607.
- Kennedy, R. J. (1935). The constancy of the velocity of light. *Physical Review*, 533-535.
- Klein, F. (2006). *Lecciones sobre el desarrollo de la matemática en el siglo XIX*. Editorial Crítica: Fundación Iberdrola, traducción de José Luis Arántegui.
- Lee, A. R., & Kalotas, T. M. (1975). Lorentz transformation from the first postulate. *American Journal of Physics*, 43(5), 434-437.
- Levy-Léblond, J.-M. (1976). One more derivation of the lorentz transformation. *American Journal of Physics*, 44(3), 271-277.
- Mermin, N. D. (1984). Relativity without light. *American Journal of Physics*, 52(2), 119-124.
- Ron, J. M. (1983). *El origen y desarrollo de la relatividad*. Alianza Editorial.
- Rovelli, C. (2015). *La realidad no es lo que parece. La estructura elemental de las cosas*. TusQuest.

4. Contenidos

El trabajo está estructurado en tres capítulos y una sección de anexos para complementar algunos desarrollos de temas que considero son interesantes e importantes para tener una idea más profunda de las temáticas que se desarrollan en el cuerpo principal de la monografía.

El primer capítulo consiste en la formalización de la orientación del cuerpo rígido a través del álgebra lineal, siendo éste un modelo pertinente para introducirnos en el desarrollo de la relatividad especial desde la teoría de grupos. El segundo capítulo consiste en el desarrollo propiamente del grupo $SO(3)$ asociado a las rotaciones de un cuerpo rígido en el espacio, para luego desarrollar la relatividad propiamente desde la transformaciones e invariancias que contiene un generador en particular. El tercer capítulo se centra en el análisis de la relatividad sin el segundo postulado, particularmente desde el desarrollo de Shang Gao, interpretando sus supuestos para poder construir un formalismo alternativo de la relatividad especial con el cual se pueda inferir e interpretar el segundo postulado.

 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL <small>Realidad. Es. Pedagogía.</small>	FORMATO
	RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE
Código: FOR020GIB	Versión: 01
Fecha de Aprobación: 10-10-2012	Página 3 de 4

5. Metodología

Con el objetivo de construir una interpretación del postulado se sigue una metodología analítica, caracterizada por la descomposición de un todo en partes o elementos para reconocer sus causas, efectos y relaciones. En este trabajo nos interesamos primordialmente en el segundo postulado de la teoría especial de la relatividad.

Se inicia con la recopilación de los artículos originales de la relatividad sin el segundo postulado, del artículo original de Einstein así como de textos sobre la historia de la física, matemática y física, requeridos para el análisis de los originales; interpretando los aspectos más fundamentales, la estructura lógica e identificando el rol del segundo postulado y sus consecuencias en cada formulación.

Como lo que se pretende es hacer un análisis para construir una interpretación de la invarianza de la velocidad de la luz en el vacío, dado que es anti-intuitivo, se prioriza el análisis de los supuestos que se asumen en los trabajos asociados a la *Relativity without Light* y en el estudio de la teoría de grupos, importante para el estudio de simetrías e invarianzas.

6. Conclusiones

Los trabajos sobre la relatividad sin el segundo postulado deducen una velocidad invariante indeterminada como consecuencia del Principio de Relatividad, la hipótesis de que el tiempo y el espacio son homogéneos y además que el espacio es isotrópico. Sin embargo, son las transformaciones de Lorentz y no las de Galileo las que cumplen el Principio de Relatividad para las leyes de Maxwell, consideración importante ya que mediante ésta prueba se deduce en este trabajo que de las propiedades del espacio y del tiempo resulta una constante, siendo ésta la misma velocidad de la luz, completando así los desarrollos de la relatividad sin el segundo postulado.

Del análisis desarrollado a lo largo del trabajo se propone que quizás a través del Principio de Relatividad así como de englobar las propiedades del espacio y el tiempo en una Ley de Conservación: *La Ley de conservación masa-energía* -una consecuencia de la teoría especial de la relatividad de Einstein-, se puede deducir e interpretar una velocidad invariante. El movimiento tiene efectos a nivel molecular, considerando el paradigma de la estructura atómica de la materia, en el que los cuerpos con masa son susceptibles de transformaciones masa-energía, por lo que los relojes y los cuerpos rígidos se ven afectados. La relatividad no comenzó y terminó en 1905 sino que los resultados del análisis muestran que las reflexiones merecen seguir siendo desarrolladas en otras propuestas de investigación.

Una interpretación del segundo postulado permite una construcción conceptual de la fenomenología de la relatividad especial mucho más profunda en comparación con la manera tradicional de desarrollarla; presentado ventajas pedagógicas para la comprensión de teorías tan complejas. El trabajo pretende motivar a quien ve en la ciencia no un dogma a seguir sino un



UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA
NACIONAL

Excellence in Education

FORMATO

RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE

Código: FOR020GIB

Versión: 01

Fecha de Aprobación: 10-10-2012

Página 4 de 4

camino para reflexionar.

Elaborado por: Cindy Lorena Acevedo Soto

Revisado por: Yesid J. Cruz B.

**Fecha de elaboración del
Resumen:**

20

11

2019

Agradecimientos

El resultado de éste trabajo no hubiese sido posible sin la orientación del Profesor Yesid Cruz, quién además me ha motivado en el análisis de las teorías físicas, en la importancia de la rigurosidad de la formalización matemática y de las consideraciones filosóficas e históricas imprescindibles en el desarrollo de una teoría. Le expreso mediante este trabajo mi gratitud y admiración por su desempeño como docente del Departamento de Física, ya que ha influenciado a lo largo de mi formación académica.

Dedicado a Mis Padres

María Soto

Jorge Acevedo

Una locura es hacer la misma cosa una y otra vez esperando obtener resultados diferentes. Si buscas resultados distintos, no hagas siempre lo mismo.

Albert Einstein

Índice general

	Page
1 Introducción	1
2 Pregunta Generadora de la Investigación	4
2.1 Objetivo General	4
2.1.1 Objetivos Específicos	4
1 Formalización de la Orientación del Cuerpo rígido desde el Álgebra	
 Lineal	5
1 Breve Introducción Histórica al Desarrollo de la Geometría y la Teoría de Grupos en el Siglo XIX	5
2 Orientación del Cuerpo Rígido	8
2.0.1 Transformaciones Ortogonales	11
2.0.2 Ángulos de Euler	13
2 Hacia un Desarrollo Alternativo de la Teoría Especial de la Relatividad desde la Teoría de Grupos	16
0.1 Definición de Grupo	16
0.2 Definición de Subgrupo	17
1 Grupos de Lie	17
2 Desarrollo alternativo de la TER: Una construcción propia desde los generadores de un grupo	26
2.0.1 Reflexión	34
3 Análisis de la Relatividad Especial sin el Segundo Postulado. Hacia una construcción de una Interpretación del Postulado	35
1 Desarrollo del artículo <i>Relativity without Light: A Further Suggestion</i>	36
2 Construyendo una Interpretación	39
2.1 Geometrización de la Transformación de Coordenadas	39
2.2 Una Reflexión sobre tal Invarianza	49
4 Conclusiones	52

1	Anexos	54
1.1	Demostración. Transformaciones Ortogonales	54
1.2	Definiciones y propiedades de las matrices más recurrentes en el formalismo de la Teoría de Grupos, Relatividad y Cuántica.	54
1.3	Teorema de Euler	55
1.4	Propiedades de los Conmutadores	58
1.5	Definición de la Delta de Kronecker y del Símbolo de Levi-Civita	59
1.6	Álgebra de Lie	59
1.7	Generalización de las reglas de conmutación de los generadores de $SO(N)$	63
1.8	Demostración. La Exponencial de una Transformación de Semejanza	64
1.9	Momento Angular	65
1.9.1	Teorema de Noether	67
1.9.2	Los generadores de las rotaciones en el espacio de las funciones	70
1.9.3	El Grupo Especial Unitario $SU(N)$	72
1.9.4	$\text{Spin } \frac{1}{2}$	75
1.9.5	Demostración de la regla de conmutación para el Momento Angular	78
1.10	Deducción de las Funciones Hiperbólicas a partir de la Hiperbólica Equilátera	79
1.11	La Ecuación de Onda no es Covariante ante las Transformaciones de Galileo	82
1.12	Principio de Relatividad, Homogeneidad del Espacio y el Tiempo, Isotropía del Espacio	83
1.13	Grupo de Poincaré	85
1.13.1	Demostración de que las Transformaciones de Lorentz forman un grupo	86
1.13.2	Traslaciones en \mathbb{R}^4	86
1.13.3	Desarrollo tradicional de la formalización de la Relatividad Especial	87
1.13.4	Diagramas de Minkowski	89
1.13.5	Identidades de la norma de los cuadvectores	92
1.13.6	Estructura Causal	92
1.13.7	Álgebra de Lie asociada a los generadores en el grupo de Poincaré	93
1.14	Otras Formas de Interpretación	94

Bibliography 98

1. Introducción

El presente trabajo muestra los resultados de *Relativity without light: A further suggestion* de Shan Gao [7], uno de los artículos más recientes sobre la deducción de las transformaciones de Lorentz así como las mismas consecuencias de la Teoría Especial de la Relatividad (TER) sin asumir el segundo postulado. Desde que A. Einstein publicó su artículo *On the Electrodynamics of moving bodies* en 1905, muchos autores como Roger Kennedy, T. M. Kalotas, A. R. Lee, Levy-Léblond, N. Mermin, [Ver respectivamente sus publicaciones [10] [12] [13] [14] [16]] sustentan por distintos medios, bien sea por análisis propiamente matemáticos y/o físicos, que efectivamente el segundo postulado de la TER no tiene el mismo estatus ontológico que el Principio de Relatividad, puesto que del primer postulado más la presunción de la homogeneidad del espacio y el tiempo, más la isotropía del espacio se deduce una velocidad invariante; que aunque en sus trabajos no la relacionan explícitamente de forma matemática con c , sus desarrollos han conducido a diferentes procedimientos e interpretaciones físicas para tratar de hacer explícita tal relación. Ésta no es la primera vez que un postulado suscite problemas cuando se asume *ad hoc* para basar una teoría o sistema deductivo.

Algunos enunciados dados como postulados tienen mayor complejidad con respecto a otros e intuitivamente parecieran ser demostrables. El caso más conocido en la matemática es el V postulado de la geometría euclidiana. Ningún matemático pudo demostrar la inconsistencia de tal geometría y el V postulado resultó ser efectivamente un inde demostrable. Pero sus intentos por demostrarlo conllevaron al desarrollo de las geometrías no euclidianas que son también consistentes; constituyéndose como una revolución intelectual del siglo XIX. Tal como Leonard M. Blumenthal menciona en su libro

“Las nuevas geometrías sirvieron en realidad para orientar de nuevo el pensamiento humano acerca de la naturaleza de la geometría, y constituyeron además la preparación necesaria para crear un medio cultural que permitiera alcanzar resultados de mayor importancia (...). Yendo en contra de la autoridad inmensa del filósofo Emmanuel Kant quién sostenía la doctrina de que la geometría euclidiana es *inherente a la naturaleza del mundo físico* (...). Para Kant, Dios hace geometría de acuerdo con los *Elementos de Euclides*.” [3] (pp.15-17).

Luego del surgimiento de tales geometrías qué respondería Kant a la pregunta ¿Cuál geometría es la inherente al mundo físico? ya que ahora los postulados de la geometría pierden su carácter apodíctico.

Esta historia es en cierto sentido similar a lo que se ha dado con el segundo postulado de la TER, ya que al parecer, los intentos que han llegado a determinar una velocidad constante universal empiezan a suscitar nuevas hipótesis en sus autores sobre quizás una concepción de espacio y tiempo que pueden nuevamente replantear la física o responder a fenómenos que aún no son comprendidos. Luego desde éste punto de vista más profundo se pretende abordar la TER. Algunas preguntas interesantes son ¿El espacio y el tiempo son continuos o están cuantizados? ¿Será que la comprensión del segundo postulado está relacionada con la mecánica cuántica? como se plantean Shan Gao [7] y Carlo Rovelli [21], ya que los trabajos relacionados con la *Relativity without Light* dan indicios de que son las propiedades del espacio y el tiempo las que conducen a tal invariancia.

Pero si para usted es irrelevante éste problema para algunos físicos no lo ha sido, por lo que han publicado varios artículos en prestigiosas revistas de física mostrando sus desarrollos para interpretar la invariancia de la velocidad de la luz. Además desde que Einstein publicó su teoría deja entrever un cierto problema lógico entre el primer y el segundo postulado. En la introducción del artículo, Einstein expresa

We will raise this conjecture (the purport of which will hereafter be called the “Principle of Relativity”) to the status of a postulate, and also introduce another postulate, which is only apparently irreconcilable with the former namely, that light is always propagated in empty space with a definite velocity c which is independent of the state of motion of the emitting body. [6](p.1)

Dado que este problema no ha sido completamente resuelto, es decir, sigue siendo un problema abierto; en el presente trabajo se hará una revisión de los artículos más importantes para lograr una construcción conceptual propia que relacione los resultados de la *Relativity without Light* con la velocidad de la luz.

La TER es enseñada tradicionalmente desde los dos postulados, y casi nadie sabe de los trabajos que no asumen *a priori* una velocidad invariante. Básicamente desde la forma como Einstein desarrolló su teoría, no da margen para reflexionar sobre las consecuencias

de la TER. Es de esperar que como máximo las habilidades que adquiere un estudiante de física es aplicar las transformaciones de Lorentz, resolver ejercicios de libro sobre la relatividad de la simultaneidad, causalidad, conos de luz, contracción de la longitud y la dilatación tiempo y quizás realizar algunas demostraciones. Desafortunadamente los libros de física no se alejan mucho de esta forma de presentar la TER. Es por ello que desde el departamento de física de la Universidad Pedagógica Nacional se han orientado varios trabajos de grado desde esta perspectiva como una nueva forma de enseñar la TER. Algunos trabajos son los de Edgar Romero, Yeisson Fabian Prada, Andrés Yesid Sierra, [22], [18], [17] entre otros.

Desde el enfoque de ésta propuesta se privilegia el análisis de la relación física y matemática en la construcción de modelos que nos permita abstraer un poco más sobre la teoría, generando más preguntas y relaciones con otras teorías, un aspecto muy importante en el ejercicio docente de física en el que se pueden buscar maneras, desde mi punto de vista, más significativas en el desarrollo de un curso tan complejo como lo es la TER. Para reforzar un poco más ésta idea cito textualmente un fragmento de la introducción del artículo de 1975 de A. R. Lee y T. M. Kalotas *Lorentz transformation from the first postulate*

Nevertheless, these work have not received sufficient emphasis in students text on relativity despite the fact that they allow a much more acceptable philosophical view point to be adopted than is possible in any of the numerous "two postulates" derivations [12]

Análisis y consecuencias de la teoría especial de la relatividad sin el segundo postulado es una propuesta de enseñanza de la relatividad especial dirigido a docentes y estudiantes universitarios con el ánimo de presentar otras formas lógicas de desarrollar un tema; ya que este trabajo está enfocado desde la enseñanza de la TER a través de la relación física-matemática iniciando primero con el desarrollo de la teoría de grupos aplicada a unos casos particulares de la física, luego entrando con la presentación y análisis propio de la relatividad prescindiendo del segundo postulado; yendo un poco más lejos de lo que se ha presentado en los trabajos anteriormente citados.

2. Pregunta Generadora de la Investigación

Con lo anteriormente expuesto surge la siguiente pregunta de investigación: ¿Es posible que desde la Teoría de Grupos y la Geometría, bajo las consideraciones físicas de la Teoría Especial de la Relatividad sin el Segundo Postulado, se pueda deducir explícitamente que la velocidad de la luz en el vacío es un invariante para cualquier marco de referencia inercial?

2.1. Objetivo General

Desarrollar desde la relación Física-Matemática un formalismo alternativo de la Relatividad Especial de Einstein que dé cuenta de las transformaciones de Lorentz sin asumir el segundo postulado, para revisar si es posible deducir desde éste enfoque que la velocidad de la luz debe ser un invariante.

2.1.1. Objetivos Específicos

- Modelar las rotaciones del cuerpo rígido desde la teoría de grupos
- Encontrar las transformaciones y el invariante inherente a un grupo caracterizado por un generador propuesto
- Construir una geometría que represente las transformaciones asociadas al grupo definido
- Aplicar el Principio de Relatividad, la isotropía del espacio más la homogeneidad del espacio y el tiempo a las transformaciones inherentes del grupo
- Reflexionar sobre las implicaciones de una posible deducción de que c sea el invariante bajo los supuestos en el desarrollo del trabajo

Capítulo 1

Formalización de la Orientación del Cuerpo rígido desde el Álgebra Lineal

El presente capítulo comenzará con el estudio de las rotaciones del cuerpo rígido describiéndolo a través del álgebra lineal para deducir las transformaciones ortogonales, que van a ser los elementos del *Grupo Ortogonal* $O(3)$ y el *Grupo Especial Ortogonal* $SO(3)$ como veremos al finalizar este capítulo. Con este modelo matemático que representa las rotaciones en \mathbb{R}^3 podremos introducirnos en el capítulo II para construir el concepto de generador y posteriormente desarrollar la TER sólo desde el formalismo de la Teoría de Grupos.

1. Breve Introducción Histórica al Desarrollo de la Geometría y la Teoría de Grupos en el Siglo XIX

La Geometría y la Teoría de Grupos tuvieron orígenes en problemas y construcciones matemáticas anteriores al siglo XIX. La geometría proviene desde la antigüedad y en particular fue construida formalmente como un sistema deductivo a partir de cinco postulados en la obra *Los Elementos* de Euclides (330 a.C - 275 a.C). La tradición de la geometría clásica permaneció casi inmutable hasta que surgió la geometría no euclidiana motivada por la complejidad del V Postulado, que sugería ser una proposición susceptible de demostración más que un postulado. Tales intentos vienen desde Ptolomeo (siglo II a.C.), Saccheri (1667-1733), Lambert (1728-1777), entre otros, donde sus trabajos se

orientaron a demostrar que el V Postulado es independiente de los otros cuatro. Estos trabajos fueron importantes para los matemáticos del siglo XIX como Karl F. Gauss (1777-1855), Nikolai Lobachevsky (1793-1856) y János Bolyai (1802-1860), quienes concibieron y formularon el primer sistema de geometría no euclidiana mostrando que era una teoría consistente. Bernhard Riemann (1826-1856) concibió un espacio n-dimensional, llamada geometría de Riemann dotada de una métrica, siendo la geometría euclidiana y la geometría elíptica e hiperbólica casos particulares de esta geometría más general [11].

La Teoría de Grupos tiene su origen en la teoría de las ecuaciones algebraicas -donde se referían a las operaciones de grupo como las permutaciones de las n raíces de una ecuación de grado n- que ocupó a varios matemáticos desde el siglo XVI. Los formalismos se dieron para encontrar las raíces de ecuaciones de orden 2, 3 y 4 pero hubo problemas para hallar las raíces a ecuaciones de grado mayores o iguales a cinco, el llamado problema de la quinta insoluble. Abel, matemático noruego en 1824, demostró que no se pueden obtener expresiones radicales para ecuaciones de grados mayor o igual a cinco, pero no niega la existencia de tales raíces sino la forma de obtenerlas. Posteriormente el trabajo de Evariste Galois en 1831, de quien viene el término propiamente de *grupo*, trabajó sobre soluciones por radicales de ecuaciones algebraicas de orden n introduciendo los imaginarios de Galois para dar un carácter general al teorema de raíces de las congruencias de grado n, donde apareció realmente la idea de grupo, demostrando la imposibilidad de resolver ecuaciones de grado mayores o iguales a cinco. No obstante, a pesar del importante trabajo de Galois, la noción de grupo siguió cambiando y en la segunda mitad del siglo XIX, los matemáticos británicos aislaron el concepto de ley de composición y ampliaron el campo del álgebra orientándose al estudio de estructuras algebraicas aplicadas no solo a las soluciones de ecuaciones numéricas sino a otros campos como Boole a la lógica; Hamilton a vectores y cuaterniones; Cayley a matrices. Los mayores aportes a la teoría de grupos vendrían de los trabajos de Sylow, Cayley, Jordan, Lie, Klein, Frobenius, Poincaré, Holder, Pontriagin y otros [22].

Entre los grandes matemáticos del siglo XIX está Sophus Lie (1842-1899), cuyos trabajos se desarrollaron en el campo de la teoría de las transformaciones de grupos continuos introducidas a la geometría y ecuaciones diferenciales, surgiendo los grupos de Lie o álgebras de Lie. La relación de Lie con Felix Klein (1849-1925), matemático alemán, in-

fluyó enormemente en la obra de este último, resultando en el *Programa Erlangen* en 1872 que sustenta que toda geometría se basa en un grupo de transformaciones determinadas, siendo los invariantes de ese grupo lo que la caracteriza. Su trabajo en la geometría y su cátedra en la Universidad de Gotinga en 1886 atrajo a matemáticos y científicos de primer nivel como David Hilbert, Hermann Minkowski, Carl Runge, Ludwig Prandtl o Karl Schwarzschild convirtiendo a Gotinga, la pequeña ciudad alemana, en el centro mundial de la matemática [11].

En el artículo *Sobre la denominada Geometría no Euclidea* de Klein, demostró que tanto la geometría Euclidea como la no Euclidea pueden tratarse como un caso particular de la Geometría Proyectiva. Lo que hizo Klein fue una construcción de modelos proyectivos de los tres tipos de geometrías: la hiperbólica trabajada por Lobatchevsky y Bolyai, la elíptica trabajada por Beltrami y la Euclidea. El enfoque de Klein de que existen tantas geometrías como grupos de transformación, es una perspectiva que permite entender la relatividad desde el punto de vista matemático que se centra en el estudio de lo que permanece constante, (las leyes físicas, los invariantes matemáticos) bajo las transformaciones de Lorentz, por lo que se la puede considerar como una «-geometría de Lorentz-», y a la relatividad general como la geometría del grupo de transformaciones generales, donde el grupo de Lorentz es sustituido por el de las transformaciones de cualquier tipo, siendo así una «-geometría general-». Las ideas de Klein dejan entrever que deja de lado esa concepción concreta del espacio, considerándolo ahora como una **variedad de n-dimensiones** [11].

Por analogía con las transformaciones del espacio, hablamos de transformaciones de la variedad; también forman grupos. Pero allí ya no existe, como sucede en el espacio, un grupo privilegiado con respecto al resto por su significado; cada grupo tiene la misma importancia que cualquier otro. Como generalización de la geometría, surge entonces el siguiente problema general “Dada una variedad y un grupo de transformaciones de la misma; determinar las configuraciones que pertenecen a la variedad con respecto a aquellas propiedades que no son modificadas por las transformaciones del grupo” [11] (p.XVII). Es decir dada una variedad y un grupo de transformaciones de la misma, se trata de desarrollar la teoría de los invariantes de ese grupo [11].

Klein, desde su posición como profesor eminente y administrativo de Alemania, mo-

tivado por la enseñanza y avance de la matemática, favoreció a las matemáticas aplicadas y a la física en el estudio de cuestiones como la teoría del electrón y la electrodinámica, muy relacionadas con la relatividad especial de Einstein. La relatividad especial y la general se pueden entender desde el Programa Erlangen aunque esta no influyó sobre Einstein en la construcción de sus teorías, pero el mismo Klein mostró entusiasmo de como su programa era afín con la teoría de la Relatividad. David Hilbert (1862-1943) y Klein junto con la matemática Emmy Noether (1882-1935), quién investigaba sobre invariantes algebraicos y luego estudió sobre los principios variacionales entre simetrías y leyes de conservación, unieron esfuerzos para elucidar el papel de las identidades de Bianchi en las ecuaciones de campo de la relatividad general. Ésta investigación resultó en los *Teoremas de Noether*, que no sólo son útiles para la relatividad sino para toda la física teórica. La teoría de grupos es una rama versátil de la matemática y en la física se aplica en el estudio de simetrías [11].

2. Orientación del Cuerpo Rígido

El desarrollo matemático y el análisis aquí mostrado está basado principalmente en el libro *Mecánica Clásica* [9].

El cuerpo rígido es una idealización que puede describirse como un sistema de N partículas sometidas a ligaduras holónomas¹ que bajo movimientos siempre se conserven las distancias entre cada par de puntos, es decir no hay deformación. Para especificar la configuración del cuerpo rígido respecto a un sistema de coordenadas, no es necesario tener en cuenta todos los grados de libertad de las N partículas debido a las ligaduras impuestas entre ellas. Fijémonos en un sistema de coordenadas y ubiquemos tres puntos no colineales sobre el cuerpo rígido [9] (Ver Figura 1a).

Para ubicar el primer punto se requieren tres coordenadas que de manera arbitraria son esféricas. Si usted imagina un punto sobre el cuerpo rígido, supongamos que este tiene coordenadas (ρ, θ, ϕ) , aún queda indefinida la orientación ya que puede rotar en cualquier dirección respecto a tal punto; si ubicamos un segundo punto sólo se requieren 2 coordenadas diferentes θ', ϕ' , porque la ligadura lo restringe a moverse sobre una superficie

¹En mecánica clásica una ligadura hólonoa o vínculo holónimo es una función de las coordenadas generalizadas que puede depender del tiempo, pero no de las derivadas de las coordenadas generalizadas

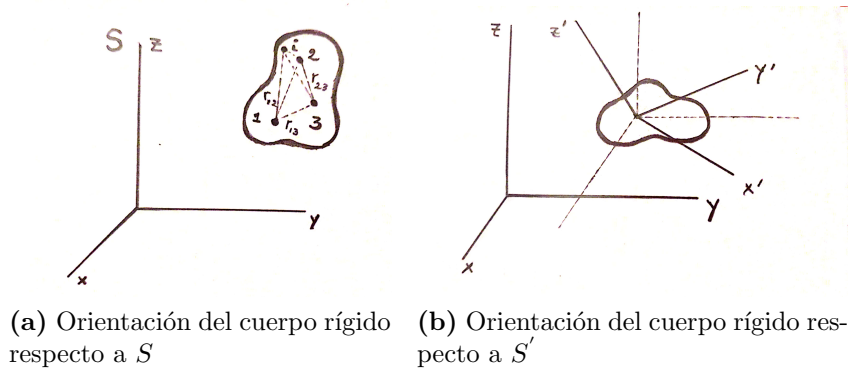


Figura 1: Orientación del Cuerpo Rígido. Tomado del libro Mecánica Clásica de H.Goldstein

esférica centrada en el punto uno. El último punto ubicado está restringido a moverse sobre una trayectoria circular alrededor del eje que pasa por el punto uno y dos, luego sólo requiere de una coordenada ϕ'' . Así necesitamos seis coordenadas independientes mediante las cuales se puede especificar la configuración del cuerpo rígido. En el caso de un cuerpo continuo lo dicho hasta ahora es válido porque la elección de los tres puntos es arbitraria así como de las distancias relativas entre ellos [9].

Si fijamos sobre el cuerpo rígido un vector con el que vamos a suponer su orientación, cuando hagamos una rotación de un ángulo $\phi \neq 2\pi$ alrededor del eje que pasa sobre ese vector; el vector permanecerá invariante, sin embargo es evidente que la orientación ha cambiado. Por lo tanto no es suficiente definir un vector arbitrario ligado al cuerpo, sino que en realidad debemos considerar las tres dimensiones espaciales. Una manera es fijar un sistema de coordenadas al que vamos a llamar S' en el cuerpo rígido para determinar su orientación (Ver Figura 1b). Para tal efecto podemos especificar con tres coordenadas el origen de S' respecto al sistema coordenado externo al cuerpo rígido. Entonces las tres coordenadas restantes deben especificar la orientación de los ejes de S' respecto a un sistema coordenado de ejes paralelos a S con origen común a S' . El método más común para determinar la orientación de los ejes es el de los cosenos directores que se calculan con el producto punto de los vectores unitarios de cada sistema coordenado [9] (Ver Figura 2).

Los ángulos que forman i', j', k' con a i, j, k respectivamente son

$$\alpha_1 = \mathbf{i}' \cdot \mathbf{i} = \cos(i', i) \quad \alpha_2 = \mathbf{i}' \cdot \mathbf{j} = \cos(i', j) \quad \alpha_3 = \mathbf{i}' \cdot \mathbf{k} = \cos(i', k)$$

De la misma forma se hace para calcular los β_i y los γ_i . Cada vector unitario a su vez se puede escribir como una combinación lineal de los vectores de la otra base, por ejemplo si reescribimos $\mathbf{i} = \mathbf{i}_1, \mathbf{j} = \mathbf{i}_2, \mathbf{k} = \mathbf{i}_3$ expresamos la base de S' como la siguiente combinación lineal

$$\mathbf{i}' = \sum \alpha_n \mathbf{i}_n \quad \mathbf{j}' = \sum \beta_n \mathbf{i}_n \quad \mathbf{k}' = \sum \gamma_n \mathbf{i}_n \quad (1.1)$$

donde $n = 1, 2, 3$. Razonando del mismo modo obtenemos la transformación inversa si relacionamos los vectores de S con S' , por ejemplo el vector \mathbf{i} es

$$\mathbf{i} = \alpha_1 \mathbf{i}' + \beta_1 \mathbf{j}' + \gamma_1 \mathbf{k}' \quad (1.2)$$

Estas transformaciones de la base de S' a S muestran nueve cosenos directores que son igualmente válidos para la transformación de coordenadas de (x, y, z) a (x', y', z') . Si S' está siempre fijo al cuerpo rígido y éste se mueve, los cosenos directores $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ para $n = 1, 2, 3$ son funciones del tiempo [9].

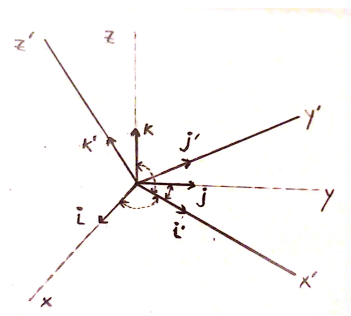


Figura 2: Cosenos directores. Fuente propia

Hemos dicho que tenemos tres coordenadas para especificar el origen de S' respecto a S más nueve cosenos directores para determinar su orientación, escribiendo de manera compacta las relaciones de los cosenos directores tenemos

$$\alpha_n = \mathbf{i}' \cdot \mathbf{i}_n \quad \beta_n = \mathbf{j}' \cdot \mathbf{i}_n \quad \gamma_n = \mathbf{k}' \cdot \mathbf{i}_n$$

Sin embargo, sabemos que solo hay seis coordenadas independientes, luego solo debe haber tres cosenos directores independientes. La razón de ésta reducción es que los vectores de las bases son ortonormales así que cumplen con las siguientes seis relaciones

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1 \quad \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = 0$$

expresando uno de los vectores del producto punto respecto a la base de S' y utilizando la definición de la delta de kronecker $\delta_{lm} = 0$ para $l \neq m$ y $\delta_{lm} = 1$ para $l = m$, el lector puede verificar que se llega a la siguiente expresión

$$\alpha_l \alpha_m + \beta_l \beta_m + \gamma_l \gamma_m = \delta_{lm} \quad (1.3)$$

donde para $l, m = 1, 2, 3$ siendo $l \neq m$ hay tres ecuaciones y otras tres para $l, m = 1, 2, 3$ siendo $l = m$, así que de las nueve relaciones de los cosenos directores $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ restamos las seis relaciones anteriores. La reducción de los nueve cosenos directores a los tres ángulos directores independientes son los ángulos de euler [9].

2.0.1. Transformaciones Ortogonales

Volvamos nuevamente a la expresión (1.1) que corresponde a una transformación de las bases asociadas a S y S' , pero que ahora vamos a representar matricialmente, así que

$$\begin{pmatrix} i' \\ j' \\ k' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ j \\ k \end{pmatrix}$$

y por (1.2) puede comprobar directamente que la transformación inversa corresponde a

$$\begin{pmatrix} i \\ j \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i' \\ j' \\ k' \end{pmatrix}$$

esto implica que

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esto es que $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$. Las transformaciones que satisfacen esta propiedad son transformaciones ortogonales; esta misma propiedad se refleja en (1.3) y exige a su vez que los tres vectores columna de \mathbf{A} , o si lo prefiere, los tres vectores fila sean ortonormales entre si.

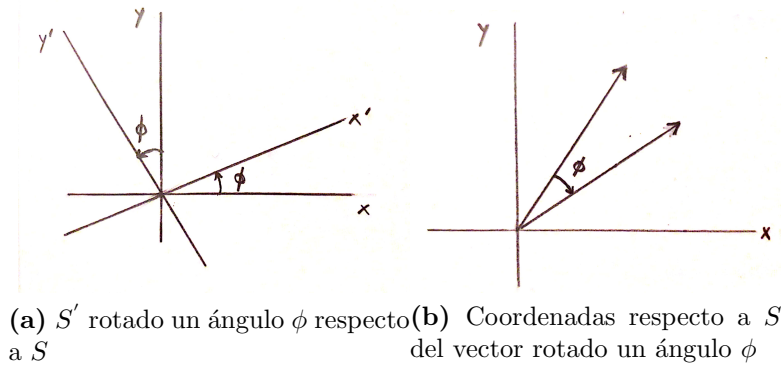


Figura 3: Transformación de coordenadas bajo rotaciones. Tomado del libro Mecánica Clásica de H.Goldstein

Consideremos la rotación de S' respecto a S , donde desde ambos sistemas coordenados se van a determinar las componentes de un vector \mathbf{r} . Descomponiendo el vector en (x', y') y (x, y) respectivamente se demuestra fácilmente que la matriz de transformación aplicada a (x, y) de S depende de un sólo parámetro ϕ

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Veámos que esta rotación de ejes coordenados en el plano cumple la condición de transformación ortogonal [8].

Lo anterior corresponde a la ecuación matricial $\mathbf{r}' = \mathbf{A}\mathbf{r}$, donde pueden surgir dos interpretaciones distintas, la primera que refleja la transformación de las coordenadas del vector \mathbf{r} respecto a dos sistemas coordenados diferentes, llamada interpretación pasiva de la rotación -el sistema coordenado rota un ángulo ϕ en sentido antihorario- (Ver Figura 3a), la segunda interpretación es que el vector \mathbf{r} se transforma en \mathbf{r}' respecto al mismo sistema coordenado, llamada interpretación activa -rota el vector un ángulo ϕ en sentido horario- (Ver Figura 3b). Sin embargo, como nos interesa describir la orientación del cuerpo rígido con la transformación ortogonal es pertinente la primera representación [9].

Si quisiéramos hacer dos rotaciones de S hasta S'' podemos hacer dos transformaciones $S \rightarrow S' \rightarrow S''$, en donde podemos entender la matriz de rotación de $S \rightarrow S''$ como la composición de las transformaciones \mathbf{A} y \mathbf{B} respectivamente, así la transformación es el producto matricial $\mathbf{C} = \mathbf{B}\mathbf{A}$ siendo \mathbf{C} nuevamente una transformación ortogonal [8] (Ver demostración en Anexos 1.1).

Ahora la transformación inversa que denotamos como \mathbf{A}^{-1} hace referencia a las transformación $r' \rightarrow r$, así que para $r \rightarrow r' \rightarrow r$ se debe cumplir la igualdad matricial $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}r = \mathbf{I}r$. En general el producto de matrices no es conmutativo por lo que el orden de las rotaciones o transformaciones es importante para hallar una rotación específica (Ver en Anexos 1.2 algunas definiciones y propiedades de las matrices importantes en el formalismo de la teoría de grupos que se va a llevar a cabo en lo que sigue del trabajo).

2.0.2. Ángulos de Euler

No cualquier matriz ortogonal será adecuada para describir el movimiento del cuerpo rígido ya que además se debe imponer que el determinante de la matriz sea 1. Si asumimos la posibilidad de que sea -1 (por ejemplo la matriz identidad multiplicada por -1) que aplicada sobre un vector columna \mathbf{x} se tiene que $-\mathbf{I}\mathbf{x} = -\mathbf{x}$ invierte todas las componentes del vector. Esto es equivalente a hacer una transformación de un sistema dextrógiro a uno levógiro, dada la inversión de todos los ejes (Ver figura 4). Esto no puede lograrse por un cambio rígido de los ejes, así una inversión no representa un movimiento del cuerpo rígido. En consecuencia las matrices ortogonales deben tener determinante 1, tales transformaciones las llamaremos propias [9].

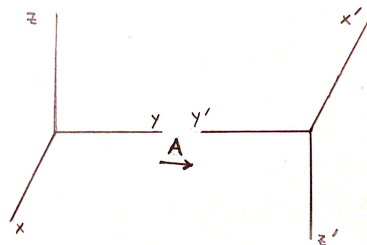


Figura 4: Inversión de ejes. Fuente propia

No existe un único conjunto de parámetros que podemos utilizar para especificar la orientación del cuerpo rígido pero los tres parámetros independientes más comunes son los ángulos de Euler. Cualquier rotación de un sistema de coordenadas queda unívocamente determinado bajo tres rotaciones, cada ángulo de rotación sucesivo son los denominados ángulos de Euler [8].

El orden de las rotaciones es la siguiente. El sistema de ejes xyz rota alrededor de z un ángulo ϕ en sentido antihorario, a este nuevo sistema de coordenadas lo nombramos $\xi\eta\zeta$. Ahora se hace girar este sistema respecto a ξ en sentido antihorario un ángulo θ que

da los ejes $\xi'\eta'\zeta'$ y por este último sistema se hace girar un ángulo ψ respecto al eje ζ' . Esta transformación da el sistema $x'y'z'$ buscado (Ver Figura 5).

Como los ángulos de euler ϕ, θ, ψ especifican cualquier orientación de un sistema de coordenadas rotados respecto a xyz , éstas serán nuestras coordenadas generalizas. Podemos llamar a esta transformación sobre xyz como $\mathbf{A} = \mathbf{R}_z\mathbf{R}_x\mathbf{R}_z$, donde \mathbf{R}_z tiene como parámetro el ángulo ϕ , \mathbf{R}_x el parámetro θ y \mathbf{R}_z con ψ . Las matrices de rotación respecto a los ejes z y x tienen la forma

$$\mathbf{R}_z = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{R}_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

Desarrollando el producto $\mathbf{R}_z\mathbf{R}_x\mathbf{R}_z$ la matriz $\mathbf{A} : xyz \rightarrow x'y'z'$ queda [9]

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \phi - \cos \theta \sin \phi \sin \psi & \cos \psi \sin \phi + \cos \theta \cos \phi \sin \psi & \sin \psi \sin \theta \\ -\sin \psi \cos \phi - \cos \theta \sin \phi \cos \psi & -\sin \psi \sin \phi + \cos \theta \cos \phi \cos \psi & \cos \psi \sin \theta \\ \sin \theta \sin \phi & -\sin \theta \cos \phi & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Esta matriz tiene inversa \mathbf{A}^{-1} . Por las características de ser una matriz ortogonal su

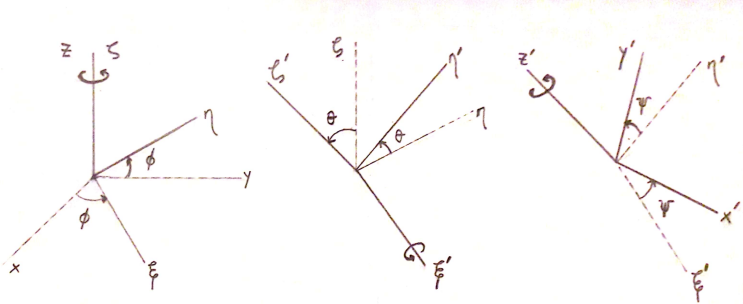


Figura 5: Ángulos de Euler. Tomado del libro Mecánica Clásica de H.Goldstein

inversa es la matriz traspuesta \mathbf{A}^T . Veamos que no necesariamente debe rotarse primero x , luego ξ y después ξ' . En realidad podemos hacer la primera rotación respecto a cualquiera de los tres ejes, luego tenemos tres posibilidades para la primera rotación, para la segunda solo tenemos dos posibilidades -no se pueden hacer dos rotaciones consecutivas sobre el mismo eje-, para la tercera también tenemos dos posibilidades así que en total hay doce formas de hacer las rotaciones en un sistema dextrógiro; algunas de estas formas son más pertinentes para el estudio de cuerpos que rotan ángulos muy pequeños [9]. Todas

estas posibilidades son equivalentes si pensamos en la isotropía espacial y la forma aquí presentada es más común en los textos y con la que probablemente el lector se encuentra familiarizado.

Las transformaciones ortogonales describen entonces la orientación del cuerpo rígido, donde sus parámetros son los ángulos de euler. Acordemos que para $t = 0$ los dos ejes coordenados coinciden, sin embargo bajo rotaciones continuas la matriz de transformación que actúa sobre S que depende de ciertos parámetros, deben ser dependientes del tiempo, por lo tanto la transformación evoluciona continuamente en el tiempo [8].

Por el **Teorema de Euler** que dice “El corrimiento general de un cuerpo rígido con un punto fijo es una rotación alrededor de un cierto eje.” [9](p.202), implica que podemos encontrar siempre un vector ubicado sobre el eje que permanezca invariante bajo una transformación de rotación (Ver demostración en Anexos 1.3).

Antes de finalizar este capítulo, se va especificar el conjunto de matrices M ortogonales de 3×3 como el *Grupo Ortogonal* $O(3)$, matemáticamente esto es

$$O(3) = \{M \mid M^T M = I\}$$

este grupo no representa una transformación de rotación sobre el cuerpo rígido ya que incluye inversiones. Como nos interesan las matrices ortogonales 3×3 con $\det M = 1$, el conjunto de todas las matrices que satisfacen ésta propiedad forman el *Grupo Especial Ortogonal* $SO(3)$, esto es

$$SO(3) = \{M \mid M^T M = I ; \det M = 1\}$$

este subgrupo de $O(3)$ es importante ya que sus elementos describen rotaciones rígidas en el espacio. La definición de grupo y subgrupo se dará en el siguiente capítulo en donde se empezará a desarrollar la Teoría de Grupos haciendo referencia a algunos sistemas físicos.

Capítulo 2

Hacia un Desarrollo Alternativo de la Teoría Especial de la Relatividad desde la Teoría de Grupos

0.1. Definición de Grupo

Sea un conjunto M sobre el que se define una ley de composición interna representada como \oplus . Se tiene que $\forall a, b \in M$, se cumple que $a \oplus b = c$ donde $c \in M$. M es un grupo (M, \oplus) sí y solo sí cumple las siguientes propiedades

- Asociativa. $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$
- Existencia del elemento neutro. $\exists e \mid e \oplus a = a \oplus e = a$
- Existencia del elemento inverso. $\forall a \in M, \exists a^{-1} \mid a^{-1} \oplus a = e$

Si se cumple adicionalmente la conmutatividad el grupo es abeliano [20].

Forman un grupo las rotaciones con respecto al eje que pasa por el centro de un triángulo equilátero que lo dejan invariante, pero una inversión respecto al eje que pase por un vértice también es una posible transformación. Éstas reflexiones no forman por si mismo un grupo, pero sí se complementan con el grupo de las rotaciones. Una transformación que involucre las tres posibles rotaciones y las tres posibles inversiones forman un grupo y cualquier transformación que deje invariante el triángulo es una composición

de los elementos del grupo [22].

0.2. Definición de Subgrupo

Un subconjunto conformado por algunos elementos de un grupo incluyendo el elemento neutro, sí cumple las propiedades del grupo bajo la misma ley de composición, entonces se dice que es un subgrupo. En tres dimensiones tenemos el grupo ortogonal $O(3)$ cuyos elementos son matrices ortogonales, si el determinante de la matrices es -1 implica que incluye inversiones; si el determinante es 1, implica que no incluye inversiones; éste caso particular es el subgrupo $SO(3)$.

Otro ejemplo de subgrupo del grupo de Poincaré son las transformaciones o boost de Lorentz, que son transformaciones de coordenadas entre dos marcos inerciales, uno que se mueve con respecto a otro; sus parámetros son las velocidades relativas [22]. La transformación de coordenadas pueden ser representadas como $x = \mathbf{T}_1(v)x'$ y $x' = \mathbf{T}_2(v')x''$, siendo \mathbf{T} una matriz. Con la deducción de las transformaciones en el capítulo III podrá verificar que cumplen los axiomas de grupo bajo la operación interna del producto entre matrices

- Asociativa. $\mathbf{T}_1(v)(\mathbf{T}_2(u)\mathbf{T}_3(w)) = (\mathbf{T}_1(v)\mathbf{T}_2(u))\mathbf{T}_3(w)$
- Existencia del elemento neutro. $\mathbf{T}_0(0)\mathbf{T}_1(v) = \mathbf{T}_1(v)$
- Existencia del elemento inverso. $[\mathbf{T}_1(v)]^{-1} = \mathbf{T}_1(-v)$ así $\mathbf{T}_1(-v)\mathbf{T}_1(v) = \mathbf{T}_0(0)$

1. Grupos de Lie

La matrices de rotación \mathbf{R}_z , \mathbf{R}_x en (1.4) ha sido deducida directamente a través de relaciones trigonométricas de la interpretación pasiva o activa de la rotación. Toda transformación de rotación deja invariante la norma del vector, luego a través del formalismo de la teoría de grupos podemos buscar una matriz de transformación tal que satisfaga el invariante [8]. Así que supongamos una matriz de rotación \mathbf{R} en el plano tal que $\mathbf{R} : \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}'$ cumpliendo que $\sqrt{x_1'^2 + x_2'^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. Siendo ambas magnitudes positivas es equivalente a decir que el invariante es

$$x_1^2 + x_2^2 = x_1'^2 + x_2'^2 \quad (2.1)$$

Con base en esta relación podemos representar matricialmente la transformación así

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

donde

$$x_1'^2 + x_2'^2 = (R_{11}x_1 + R_{12}x_2)^2 + (R_{21}x_1 + R_{22}x_2)^2$$

siguiendo la ecuación (2.1) se obtiene

$$(R_{11}^2 + R_{21}^2)x_1^2 + (R_{12}^2 + R_{22}^2)x_2^2 + (R_{11}R_{12} + R_{21}R_{22})x_1x_2 = x_1^2 + x_2^2$$

donde se debe cumplir que los dos primeros coeficientes sean uno y el otro cero. Estos resultados son equivalentes al producto de las matrices \mathbf{R}^T y \mathbf{R} como se muestra a continuación

$$\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{21} \\ R_{12} & R_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11}^2 + R_{21}^2 & R_{11}R_{12} + R_{21}R_{22} \\ R_{12}R_{11} + R_{22}R_{21} & R_{12}^2 + R_{22}^2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto el invariante impone la condición a la matriz \mathbf{R} de que $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$, es decir que sea ortogonal. Podemos expresar el invariante (2.1) como el producto del vector columna \mathbf{x} y su traspuesta $\mathbf{x}^T \mathbf{x} = \mathbf{x}'^T \mathbf{x}'$ para generalizar a un vector en un espacio n-dimensional [\[8\]](#).

A este punto sólo se ha tenido en cuenta rotaciones finitas, pero Sophus Lie consideró que rotar un ángulo θ es equivalente a rotar θ/N N veces. Esto es que una rotación finita es

$$R(\theta) = [R(\theta/N)]^N$$

Conforme N es muy grande tenemos la rotación finita en términos de rotaciones infinitesimales

$$R(\theta) = \lim_{N \rightarrow \infty} [R(\theta/N)]^N$$

Para rotaciones infinitesimales $R(\theta/N) \approx \mathbf{I} + \mathbf{A}$ donde \mathbf{A} es una matriz infinitesimal [1], así en la rotación finita $R(\theta) = (\mathbf{I} + \mathbf{A})^N$. Cumpliéndose $\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I}$ escribimos $(\mathbf{I} + \mathbf{A})^T (\mathbf{I} + \mathbf{A})$ y se deduce $\mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^T + \mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{I}$, despreciando términos de segundo orden o mayores para cantidades infinitesimales deducimos la propiedad de la matriz infinitesimal \mathbf{A}

$$\mathbf{A} + \mathbf{A}^T = 0$$

que es la característica de una matriz antisimétrica, en donde las entradas de \mathbf{A} son de la forma $[a_{ii}] = 0$ y $[a_{ij}] = -[a_{ji}]$. La matriz \mathbf{A} tiene la siguiente forma general para cualquier número infinitesimal ϵ [8].

$$\mathbf{A} = \epsilon \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

por lo que la rotación finita queda

$$\mathbf{R}(\theta) = \left[\mathbf{I} + \epsilon \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right]^N$$

La cantidad infinitesimal ϵ es relacionada con el parámetro θ como $\epsilon = \theta/N$, siendo N infinitamente grande. La anterior transformación cumple $\mathbf{A} = \epsilon \mathbf{B}$ [8].

Para continuar con el desarrollo, recordemos que la forma de una expansión de Maclaurin para funciones es

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \quad (2.2)$$

Podemos hacer una extensión a funciones de matrices en (2.2), por lo que aplicándola a la función exponencial de una matriz cuadrada se obtiene

$$e^M = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k}{k!}$$

si M es de dimensión 1×1 reducimos a la exponencial en los números \mathbb{C} . Siguiendo con el desarrollo para la rotación finita $\mathbf{R}(\theta) = [\mathbf{I} + \frac{\theta}{N} \mathbf{B}]^N$, calculando los coeficientes de la

¹La razón de esta expresión es que $\cos \theta \approx 1$ y $\sin \theta \approx \theta$ para ángulos muy pequeños, por ello la matriz de transformación para ángulos infinitesimales puede ser reexpresada como la suma de la matriz identidad y otra matriz infinitesimal

expansión se prueba que $\mathbf{R}(0) = \mathbf{I}$; probando de igual manera para los siguientes términos se deduce

$$\begin{aligned}\mathbf{R}'(\theta) &= N \left(\mathbf{I} + \frac{\theta}{N} \mathbf{B} \right)^{N-1} \frac{\mathbf{B}}{N} & R'(0) &= \mathbf{B} \\ \mathbf{R}''(\theta) &= (N-1) \left(\mathbf{I} + \frac{\theta}{N} \mathbf{B} \right)^{N-2} \frac{\mathbf{B}^2}{N} & R''(0) &= \frac{N-1}{N} \mathbf{B}^2\end{aligned}$$

generalizando para la n-ésima derivada evaluada en cero

$$\mathbf{R}^{(n)}(0) = \frac{(N-1)(N-2)\dots(N-(n-1))}{N^{n-1}} \mathbf{B}^n$$

Como N es grande, calculando el límite es fácil ver que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{R}^{(n)}(0) = \mathbf{B}^n$$

Expresando (2.2) para N infinitamente grande

$$\mathbf{R}(\theta) = \mathbf{R}(0) + \mathbf{R}'(0)\theta + \frac{1}{2!}\mathbf{R}''(0)\theta^2 + \frac{1}{3!}\mathbf{R}^{(3)}(0)\theta^3 + \dots$$

$$\mathbf{R}(\theta) = \mathbf{I} + \mathbf{B}\theta + \frac{1}{2!}\mathbf{B}^2\theta^2 + \frac{1}{3!}\mathbf{B}^3\theta^3 + \dots$$

Vemos que esto coincide con la expansión de la exponencial, así que la rotación finita $\mathbf{R}(\theta) = e^{\theta\mathbf{B}}$. Se puede probar fácilmente que las potencias de la matriz \mathbf{B} cumplen $\mathbf{B}^2 = -\mathbf{I}$, $\mathbf{B}^3 = -\mathbf{B}$, $\mathbf{B}^4 = \mathbf{I}$, $\mathbf{B}^5 = \mathbf{B}$, $\mathbf{B}^6 = -\mathbf{I}$, y así sucesivamente [8]. Haciendo éstas sustituciones se reduce la expansión de $\mathbf{R}(\theta)$ como

$$\mathbf{R}(\theta) = \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots \right) \mathbf{I} + \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots \right) \mathbf{B}$$

resultado que coincide con la expansión en series de Taylor de $\cos \theta$ y $\sin \theta$

$$\mathbf{R}(\theta) = \cos \theta \mathbf{I} + \sin \theta \mathbf{B}$$

Y así deducimos finalmente que la transformación que deja invariante la norma del vector en el plano es

$$\mathbf{R}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Las ecuaciones de transformación de coordenadas bajo tal rotación son

$$x'_1 = \cos \theta x_1 + \sin \theta x_2$$

$$x'_2 = -\sin \theta x_1 + \cos \theta x_2$$

La matriz de transformación anterior está en concordancia con el análisis de las rotaciones del cuerpo rígido.

La rotación finita $\mathbf{R}(\theta) = e^{\theta \mathbf{B}}$ queda en términos de una matriz \mathbf{B} a la que llamaremos generador. Conociendo el generador podemos caracterizar completamente el grupo.

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Para generalizar a tres dimensiones las rotaciones partamos de una rotación del plano xy respecto al origen de coordenadas, que representamos como

$$\mathbf{R}_z(\theta) = \exp \left[\theta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right]$$

esto coincide con una rotación pasiva sobre el eje z en el espacio, luego en el espacio el generador puede ser escrito como

$$\mathbf{R}_z(\theta) = \exp \left[\theta \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right]$$

La matriz es el generador en z . Probando esta formulación en una rotación infinitesimal en torno al eje z tenemos

$$\mathbf{R}_z \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \epsilon \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

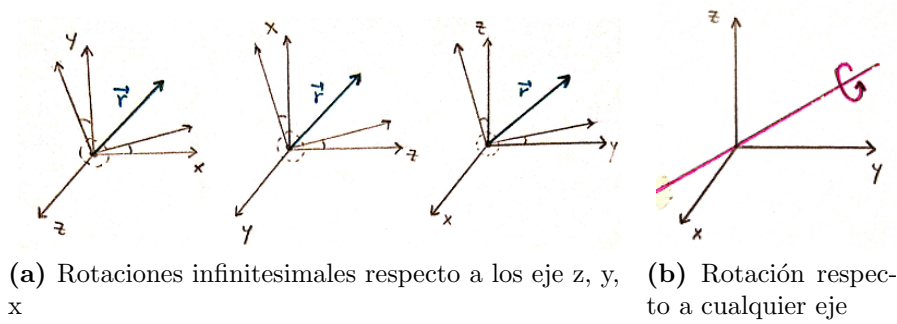


Figura 6: Rotaciones del Cuerpo Rígido. Fuente propia

$$\mathbf{R}_z \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \epsilon \begin{pmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + \epsilon y \\ y - \epsilon x \\ z \end{pmatrix}$$

en donde vemos porque el término $[a_{33}] = 0$ en el generador y no la unidad como pareciera a primera vista. Esta transformación es coherente con la Figura 6a, que muestra respectivamente rotaciones infinitesimales en torno a z, y, x [8]. Una rotación de los otros ejes se define análogamente. Para una rotación alrededor del eje x se deduce

$$x' = x \quad y' = y + \epsilon z \quad z' = z - \epsilon y$$

para una rotación alrededor del eje y se tiene

$$x' = x - \epsilon z \quad y' = y \quad z' = z + \epsilon x$$

de esto escribimos la representación matricial de las rotaciones infinitesimales como

$$\mathbf{R}_x \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \epsilon \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}_y \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \epsilon \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Así se ha deducido los generadores de las rotaciones en el espacio $\mathbf{G}_x, \mathbf{G}_y, \mathbf{G}_z$

$$\mathbf{G}_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{G}_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{G}_z = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cualquier rotación en el espacio hace parte del grupo de rotaciones $SO(3)$ [20]. Sabemos que una rotación genérica tiene la forma $\mathbf{R} = e^{\mathbf{A}}$, donde \mathbf{A} es antisimétrica, por ello la forma general de \mathbf{A} tiene sólo tres parámetros independientes

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$$

Como ya hemos hallado los generadores de rotaciones en el espacio podemos expresar una rotación general, es decir, en torno a un eje arbitrario (Ver Figura 6b.) en términos de tales generadores. Sea la rotación finita $\mathbf{R}(\theta) = e^{\theta\mathbf{B}}$ generada por la matriz antisimétrica \mathbf{B} que debe ser una combinación lineal de los generadores como se escribe a continuación

$$\mathbf{B} = n_x \mathbf{G}_x + n_y \mathbf{G}_y + n_z \mathbf{G}_z$$

Para una rotación infinitesimal

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} + \epsilon(n_x \mathbf{G}_x + n_y \mathbf{G}_y + n_z \mathbf{G}_z)$$

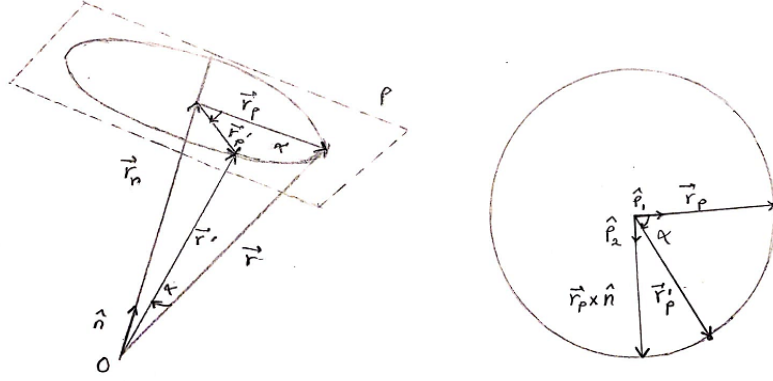
aplicando a un vector \mathbf{r}

$$\mathbf{R} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \epsilon \begin{pmatrix} n_z y - n_y z \\ -n_z x + n_x z \\ n_y x - n_x y \end{pmatrix}$$

la matriz que multiplica a ϵ tiene la misma forma que el producto vectorial entre \mathbf{r} y un vector $\hat{\mathbf{n}}$ quedando

$$\mathbf{R}\mathbf{r} = \mathbf{r} + \epsilon(\mathbf{r} \times \hat{\mathbf{n}})$$

Este resultado se puede interpretar geoméricamente en una rotación activa (Ver Figura



(a) Representación activa de la rotación (b) Representación de la rotación sobre el plano p

Figura 7: Rotación del vector \mathbf{r} en torno a un eje arbitrario. Tomado del libro Mecánica Clásica de H. Goldstein

7a), donde resulta un vector girado en sentido horario. El vector unitario $\hat{\mathbf{n}}$ es un vector sobre el eje de rotación por lo que el vector \mathbf{r} se puede expresar como una combinación lineal $\mathbf{r} = \mathbf{r}_n + \mathbf{r}_p$ siendo \mathbf{r}_n la componente vectorial de \mathbf{r} sobre el eje genérico de rotación y la otra componente un vector sobre el plano p [8], [9].

Según ésta representación deducimos fácilmente que $\mathbf{r}_n = (\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{n}})\hat{\mathbf{n}}$ y $\mathbf{r}_p = \mathbf{r} - (\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{n}})\hat{\mathbf{n}}$. Cuando rotamos el vector \mathbf{r} un ángulo finito α en sentido horario alrededor del eje de rotación, se obtiene el vector $\mathbf{r}' = \mathbf{r}_n + \mathbf{r}'_p$. Geométricamente si establecemos una base sobre el plano p formado por $\hat{\mathbf{p}}_1$ a lo largo de \mathbf{r}_p y $\hat{\mathbf{p}}_2$ perpendicular al anterior, (Ver Figura 7b) el vector rotado queda expresado como

$$\mathbf{r}' = (\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{n}})\hat{\mathbf{n}} + (r_p \cos \alpha)\hat{\mathbf{p}}_1 + (r_p \sin \alpha)\hat{\mathbf{p}}_2$$

Ahora tengamos en cuenta que $\hat{\mathbf{p}}_1 = \frac{\mathbf{r}_p}{r_p}$ y que $\hat{\mathbf{p}}_2 = \frac{\mathbf{r}_p}{r_p} \times \hat{\mathbf{n}}$; deducimos con un poco de álgebra que

$$\mathbf{R}(\alpha) \mathbf{r} = (\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{n}})\hat{\mathbf{n}} + \cos \alpha (\mathbf{r} - (\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{n}})\hat{\mathbf{n}}) + \sin \alpha (\mathbf{r} \times \hat{\mathbf{n}})$$

$$\mathbf{R}(\alpha) \mathbf{r} = (1 - \cos \alpha)(\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{n}})\hat{\mathbf{n}} + \cos \alpha \mathbf{r} + \sin \alpha (\mathbf{r} \times \hat{\mathbf{n}})$$

Así la matriz de rotación $\mathbf{R}(\alpha)$ es

$$\mathbf{R}(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha + (1 - \cos \alpha)n_x^2 & (1 - \cos \alpha)n_y n_x + n_z \sin \alpha & (1 - \cos \alpha)n_z n_x - n_y \sin \alpha \\ (1 - \cos \alpha)n_x n_y - n_z \sin \alpha & (1 - \cos \alpha)n_y^2 + \cos \alpha & (1 - \cos \alpha)n_z n_y + n_x \sin \alpha \\ (1 - \cos \alpha)n_x n_z + n_y \sin \alpha & (1 - \cos \alpha)n_y n_z - n_x \sin \alpha & (1 - \cos \alpha)n_z^2 + \cos \alpha \end{pmatrix}$$

que es la matriz de rotación 3×3 en el espacio respecto a un eje arbitrario. Podría pensarse que en ésta matriz hay cuatro parámetros α, n_x, n_y, n_z en vez de tres como es de esperar, sin embargo las componentes del vector unitario están relacionadas por la norma del vector, así que tenemos cuatro grados de libertad menos una ligadura deducimos los tres parámetros [8], [20].

El conjunto de matrices $SO(3)$ lo podemos definir como

$$SO(3) = \{R \mid R^T R = I, \det R = 1\}$$

tal conjunto de matrices forman un grupo y sus letras hacen referencia al nombre *Grupo Especial Ortogonal*. Las matrices $R(\hat{\mathbf{n}}, \theta)$ pueden ser expresadas como

$$R(\hat{\mathbf{n}}, \theta) = e^{\theta \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{G}}$$

donde $\hat{\mathbf{n}}$ es un vector unitario sobre el eje de rotación, esto en coherencia con el **Teorema de Euler** enunciado en la pág.15.

En general el grupo $SO(N)$ es el grupo especial ortogonal N-dimensional que satisface las mismas condiciones $\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I}$ cuyo determinante es la unidad. Las entradas de estas matrices son números \mathbb{R} . Extendiendo a $SO(4)$ la matriz \mathbf{A} antisimétrica en la rotación finita $R(\theta) = e^{\mathbf{A}}$ debe tener la forma

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{pmatrix}$$

cuyo número de generadores depende del número de letras diferentes posibles en la matriz \mathbf{A} . En $SO(4)$ habrán seis generadores de rotación que no deben interpretarse como

rotaciones respecto a ejes, sino respecto a planos; esto es coherente ya que en cuatro dimensiones los ejes perpendiculares forman seis planos (Ver en Anexos 1.4 y 1.6 propiedades de los conmutadores aplicados en el álgebra de Lie para caracterizar los resultados de los conmutadores de los generadores, relacionados con las constantes de estructura).

Sugiero al lector revisar la sección de Anexos 1.9 para ver como se generaliza el concepto de momento angular a través de la aplicación del Teorema de Noether. Los generadores, que dependiendo de que sean \mathbf{J} , \mathbf{S} o \mathbf{L} , antisimétricos o hermíticos, caracterizan el espacio sobre el que se hacen las rotaciones; en este caso particularmente sobre \mathbb{R}^3 (con los generadores de rotaciones en el espacio), \mathbb{C}^2 (con las matrices de pauli para describir el spin $\frac{1}{2}$) y sobre \mathcal{L} (con el operador momento angular que actúa sobre funciones de valor real). Aunque este tipo de tratamientos son recurrentes en la física cuántica no deja de ser interesante presentarlos en este trabajo como otros ejemplos de la versatilidad de la Teoría de Grupos, siendo además obviados en muchos libros y que como veremos a continuación también podemos hacer un desarrollo análogo para la TER.

2. Desarrollo alternativo de la TER: Una construcción propia desde los generadores de un grupo

El artículo *On the Electrodynamics of moving bodies* de A. Einstein publicado en 1905 desarrolla la Teoría Especial de la Relatividad que replantea las nociones del espacio y el tiempo a partir de dos postulados, con el fin de resolver las asimetrías que resultan al describir fenómenos electromagnéticos desde la teoría de Maxwell en diferentes marcos inerciales. El primer postulado es el Principio de Relatividad, que en una traducción al inglés del artículo original se enuncia como “the laws by which the states of physical systems undergo change are not affected, whether these changes of state be referred to the one or the other of two systems of co-ordinates in uniform translatory motion” [6] (p.4). El segundo postulado es enunciado como “any ray of light moves in the “stationary” system of co-ordinates with the determined velocity c , whether the ray be emitted by a stationary or by a moving body” [6](p.4).

Dado que no queremos mostrar el desarrollo tradicional de la TER con los dos postulados y hasta aquí solo hemos desarrollado el formalismo de la teoría de grupos, a

continuación se van a deducir las transformaciones y el invariante asociados a un generador propuesto; guiándonos por el desarrollo presentado anteriormente sobre las rotaciones de un cuerpo rígido que forman el *Grupo Especial Ortogonal* $SO(3)$. A lo largo de éste desarrollo vamos a desconocer completamente su relación con la TER. Comencemos por indagar el invariante de la siguiente transformación Λ definida como la exponencial de un parámetro ω y una matriz 2×2 que representa el generador de la transformación

$$\Lambda(\omega) = \exp \left[\omega \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right] \quad (2.3)$$

Ésta transformación no es una rotación ya que el generador no es una matriz antisimétrica. A continuación se va a hallar el invariante del grupo haciendo la expansión de Λ en series de Taylor

$$\Lambda(\omega) = \mathbf{I} + \omega \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\omega^2}{2!} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 + \frac{\omega^3}{3!} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^3 + \dots$$

desarrollando las potencias podemos agrupar términos como sigue

$$\Lambda(\omega) = \left(1 + \frac{\omega^2}{2!} + \frac{\omega^4}{4!} + \dots \right) \mathbf{I} + \left(\omega + \frac{\omega^3}{3!} + \frac{\omega^5}{5!} + \dots \right) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Los términos en paréntesis coinciden con la expansión en series de Taylor de $\cosh \omega$ y $\sinh \omega$ respectivamente, así

$$\Lambda(\omega) = \cosh(\omega) \mathbf{I} + \sinh(\omega) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Si aplicamos ésta transformación sobre un vector \mathbf{r} con componentes x^0 y x^1 entonces tenemos

$$\begin{pmatrix} x^{0'} \\ x^{1'} \end{pmatrix} = \Lambda(\omega) \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix}$$

desarrollando el producto resultan las ecuaciones que relacionan tales coordenadas, quedando

$$x^{0'} = \cosh(\omega) x^0 + \sinh(\omega) x^1 \quad ; \quad x^{1'} = \sinh(\omega) x^0 + \cosh(\omega) x^1 \quad (2.4)$$

Como estamos interesados en hallar el invariante asociado a éste grupo encontramos que realizando la siguiente operación

$$(x'^0)^2 - (x'^1)^2 = (\cosh(w)x^0 + \sinh(w)x^1)^2 - (\sinh(w)x^0 + \cosh(w)x^1)^2$$

desarrollando los cuadrados y reduciendo términos semejantes

$$(x'^0)^2 - (x'^1)^2 = (\cosh^2(\omega) - \sinh^2(\omega))(x^0)^2 - (\cosh^2(\omega) - \sinh^2(\omega))(x^1)^2$$

aplicando la identidad de las funciones hiperbólicas $\cosh^2(w) - \sinh^2(w) = 1$ tenemos

$$(x'^0)^2 - (x'^1)^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2 \quad (2.5)$$

De (2.5) inferimos que bajo la transformación $\Lambda(\omega)$ la diferencia de los cuadrados de las componentes permanecen invariantes. Veámos también que (2.5) es similar al invariante de las rotaciones (2.1) -salvo el signo menos-, que es precisamente el producto punto de los vectores como se muestra a continuación

$$\mathbf{x}' \cdot \mathbf{x}' = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$$

$$\begin{pmatrix} x'_1 & x'_2 & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$(x'_1)^2 + (x'_2)^2 + \dots = (x_1)^2 + (x_2)^2 + \dots \quad (2.6)$$

Así bajo una rotación se mantiene invariante el módulo del vector. Podemos generalizar estos invariantes definiendo una operación -*el producto interior*- y para ello es necesario introducir la idea de métrica. En las rotaciones de un vector en un espacio N-dimensional el invariante lo expresamos como $x'^T x' = x^T x$ donde $x^T x = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$; luego para recuperar el resultado (2.5) bajo un producto interior introducimos una matriz g , que denominaremos métrica, quedando entonces $x'^T g x' = x^T g x$

$$\begin{pmatrix} x'^0 & x'^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 & x^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix}$$

Para extender la misma transformación (2.3) a un espacio de más dimensiones, por ejemplo a un espacio cuatridimensional, el generador debe ser una matriz 4×4 quedando la transformación como²

$$\Lambda(\omega) = \exp \left[\omega \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \quad (2.7)$$

Dado que sólo hemos agregado más ceros al generador ¿Será que la transformación seguirá expresada en términos de las funciones hiperbólicas como en (2.3)? para responder ésta pregunta debemos desarrollar la exponencial, pero veamos que el generador es una matriz simétrica y ello permite realizar una transformación de semejanza y calcular fácilmente la exponencial. Llamemos a éste generador \mathbf{K}^1 , para diagonalizarla se debe aplicar una transformación de semejanza así $\mathbf{K}^1 = \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{P}^{-1}$; siendo \mathbf{P} la matriz cuyas columnas son los eigenvectores de \mathbf{K}^1 y \mathbf{B} una matriz diagonal cuyos elementos son los eigenvalores de \mathbf{K}^1 . Realizando éste cálculo puede verificar que se obtiene

$$\mathbf{K}^1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right]^{-1}$$

aplicando la exponencial sobre la transformación de semejanza $e^{\omega\mathbf{K}^1} = e^{\mathbf{P}\omega\mathbf{K}^1\mathbf{P}^{-1}}$ que implica $e^{\omega\mathbf{K}^1} = \mathbf{P}e^{\omega\mathbf{B}}\mathbf{P}^{-1}$ (Ver demostración en Anexos 1.8); luego

$$e^{\omega\mathbf{K}^1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \exp \left[\begin{pmatrix} \omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \left[\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right]^{-1}$$

²Esta generalización de los generadores a más dimensiones se hizo anteriormente en la deducción de los generadores en $SO(3)$, y en Anexos 1.7 de hace un análisis análogo para encontrar los generadores de $SO(4)$

de la exponencial resulta

$$\exp \left[\begin{pmatrix} \omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} e^\omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\omega} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^0 \end{pmatrix}$$

Desarrollando todo el producto obtenemos

$$\Lambda(\omega) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^\omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\omega} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right]^{-1}$$

$$\Lambda(\omega) = \begin{pmatrix} \cosh \omega & \sinh \omega & 0 & 0 \\ \sinh \omega & \cosh \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Recordando que

$$\cosh \omega = \frac{e^\omega + e^{-\omega}}{2} \quad ; \quad \sinh \omega = \frac{e^\omega - e^{-\omega}}{2}$$

verificamos que efectivamente la transformación queda expresada en términos de funciones hiperbólicas (Ver deducción de las funciones hiperbólicas en Anexos 1.10). Aplicando ahora esta transformación a un cuadrivector obtenemos matricialmente que

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \omega & \sinh \omega & 0 & 0 \\ \sinh \omega & \cosh \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

Veamos ahora cuál es el invariante asociado utilizando las ecuaciones de transformación de (2.8). Como en (2.3) dedujimos que el primer término es positivo y el otro negativo, supongamos la siguiente operación

$$(x'^0)^2 - (x'^1)^2 - (x'^2)^2 - (x'^3)^2 = (\cosh \omega x^0 + \sinh \omega x^1)^2 - (\sinh \omega x^0 + \cosh \omega x^1)^2 - x^2 - x^3$$

desarrollando los cuadrados y aplicando la identidad hiperbólica puede comprobar que

$$(x'^0)^2 - (x'^1)^2 - (x'^2)^2 - (x'^3)^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 \quad (2.9)$$

Expresando el invariante (2.9) bajo la definición del producto interior $x'^T g x' = x^T g x$ se deduce que la métrica g asociada a nuestro espacio cuadridimensional viene dado por la matriz

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

Volviendo al caso de las rotaciones en tres dimensiones se mostró que cualquiera de estas transformaciones deja como invariante la norma de los vectores, luego asociado a la rotación más general $R(\theta) = e^{\theta \mathbf{n} \cdot \mathbf{G}}$ está la métrica que es la matriz identidad. Cualquier transformación que pueda ser expresada como $\mathbf{n} \cdot \mathbf{G}$ deja invariante la métrica; es decir se cumple

$$\mathbf{R}^T g \mathbf{R} = g$$

Teniendo en cuenta ahora que en un espacio N-dimensional hay $\frac{n(n-1)}{2}$ grados de libertad, en nuestro espacio habrán 6 grados de libertad, por lo que nuestra transformación (2.7) que solo muestra un parámetro independiente es un caso particular de una transformación más general. Vamos a considerar a continuación tal transformación genérica que deja invariante nuestra métrica.

Sea ahora Λ la transformación genérica de coordenadas de \mathbf{x} a \mathbf{x}' , luego $\mathbf{x}' = \Lambda \mathbf{x}$; al trasponer esta ecuación matricial $(\mathbf{x}')^T = (\Lambda \mathbf{x})^T$ obtenemos $\mathbf{x}'^T \Lambda^T$. Como el invariante es el producto interno escribimos $\mathbf{x}'^T g \mathbf{x}' = \mathbf{x}^T g \mathbf{x}$, donde $\mathbf{x}'^T \Lambda^T g \Lambda \mathbf{x} = \mathbf{x}^T g \mathbf{x}$; por lo tanto $\Lambda^T g \Lambda = g$; o sea que la transformación Λ es una transformación que deja invariante la

métrica (2.10). En notación matricial tenemos

$$\Lambda^T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

De esto se cumple necesariamente que $\det \Lambda^T \cdot \det \Lambda = 1$, como $|\Lambda^T| = |\Lambda|$ existen dos posibilidades y es que $\det \Lambda = \pm 1$. Para definir cuál de éstas dos posibilidades es la correcta veamos que del generador \mathbf{K}^1 se dedujo unas transformaciones hiperbólicas en términos de un parámetro ω que es un número asociado a un área (Ver Anexos 1.10). Como ω puede ser tan pequeño o tan grande como se quiera vamos a desarrollar una transformación infinitesimal para hallar los otros generadores, tal como se hizo con las rotaciones. Partiendo de una transformación infinitesimal sobre un cuadvivector obtendremos que el cuadvivector resultante es casi idéntico al original, pues su norma permanece invariante y solo ha girado un ángulo infinitamente pequeño, y como en $SO(3)$, vamos a indicar nuevamente la transformación infinitesimal como $\Lambda \approx \mathbf{I} + \mathbf{A}$, siendo \mathbf{A} una matriz infinitesimal. Por (2.10) escribimos

$$(I + A)^T g (I + A) = g$$

$$(I + A^T)(g + gA) = g$$

despreciando $A^T g A$ porque los términos de segundo orden son muy pequeños concluimos

$$gA + A^T g = 0 \quad (2.12)$$

Para determinar la matriz \mathbf{A} vamos a partirla en cuatro secciones

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} m & \mathbf{p}^T \\ \mathbf{n} & \mathbf{q} \end{pmatrix}$$

donde p^T es una matriz 1×3 , n es de 3×1 y q es una matriz 3×3 , por lo que la métrica la representamos con una matriz cuyas entradas son matrices. Considerando (2.12) se debe

satisfacer

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & \mathbf{p}^T \\ \mathbf{n} & \mathbf{q} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m & \mathbf{n}^T \\ \mathbf{p} & \mathbf{q}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & \mathbf{p}^T \\ -\mathbf{n} & -\mathbf{q} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m & -\mathbf{n}^T \\ \mathbf{p} & -\mathbf{q}^T \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} m & -\mathbf{n}^T \\ \mathbf{p} & -\mathbf{q}^T \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m & -\mathbf{n}^T \\ \mathbf{p} & -\mathbf{q}^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

de aquí se deduce directamente que $m = 0$, $p^T = n^T$, $p = n$ y $q = -q^T$. Recordando que en las transformaciones de rotación el generador es un matriz antisimétrica y como la matriz q cumple esta misma condición, se propone que q está relacionada con los generadores de las rotaciones en nuestro espacio cuatridimensional. Por lo anterior la matriz \mathbf{A} tiene la forma general

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & \omega & \lambda & \beta \\ \omega & 0 & a & b \\ \lambda & -a & 0 & c \\ \beta & -b & -c & 0 \end{pmatrix}$$

descomponiendo \mathbf{A} en los generadores \mathbf{K}^i y en los generadores \mathbf{G}_i de las rotaciones en el espacio tenemos

$$\mathbf{A} = \omega \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$+ n_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} + n_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + n_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

podemos reescribir ésto de manera más compacta como

$$\mathbf{\Lambda} = \exp[\omega \mathbf{K}^1 + \lambda \mathbf{K}^2 + \beta \mathbf{K}^3 + n_1 \mathbf{G}_1 + n_2 \mathbf{G}_2 + n_3 \mathbf{G}_3] \quad (2.13)$$

siendo $\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2, \mathbf{G}_3$ los generadores de las rotaciones respectivamente a x, y, z ; pero los

generadores $\mathbf{K}^1, \mathbf{K}^2, \mathbf{K}^3$ aún no los hemos relacionado con algún tipo de transformación física ³ sin embargo ya tenemos caracterizado el grupo matemáticamente.

Para terminar de caracterizar $\Lambda = \exp [\lambda \mathbf{K}^2]$ y $\Lambda = \exp [\beta \mathbf{K}^3]$ hacemos nuevamente la transformación de semejanza de cada generador y resolviendo la expansión en series de Taylor puede comprobar que se obtiene

$$e^{\lambda K^2} = \begin{pmatrix} \cosh \lambda & 0 & \sinh \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sinh \lambda & 0 & \cosh \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad e^{(\beta K^3)} = \begin{pmatrix} \cosh \beta & 0 & 0 & \sinh \beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh \beta & 0 & 0 & \cosh \beta \end{pmatrix}$$

En conclusión hemos hallado una transformación genérica que deja invariante la métrica (2.10) caracterizada por seis parámetros. Recordando que las matrices de transformación de rotación quedan en términos de ángulos tenemos que Λ va a quedar expresada en los parámetros $\omega, \lambda, \beta, \theta, \phi, \varphi$. Los últimos tres parámetros son los ángulos de euler pero aún no ha quedado determinado el sentido físico de los primeros tres parámetros, por lo que éste desarrollo se va a llevar a cabo en el capítulo III.

2.0.1. Reflexión

A este punto concluiré que desde el anterior desarrollo puramente matemático no podemos hallar todo su significado geométrico, y esto es porque han faltado los supuestos físicos. Desde este punto de vista, matemática y física se relacionan mediante geometría. Y ahora retomando nuevamente el *Programa Erlangen* que sustenta que toda geometría se basa en un grupo de transformaciones determinadas, siendo los invariantes de ese grupo lo que la caracteriza, implica que cualquier modelo físico geometrizable tiene unas magnitudes físicas únicas invariantes que la identifica. Desde ésta idea se desarrollará el capítulo III.

³Estos generadores serán los generadores de los boost de Lorentz, en Anexos 1.13 se desarrolla la TER de manera tradicional; así podrá comprobar tal relación

Capítulo 3

Análisis de la Relatividad Especial sin el Segundo Postulado. Hacia una construcción de una Interpretación del Postulado

Es posible desarrollar la TER prescindiendo del segundo postulado a través de la homogeneidad del espacio y del tiempo, la isotropía del espacio y el Principio de Relatividad. Con éstas propiedades puede deducirse las transformaciones de Galileo y de Lorentz [7].

De las transformaciones deducidas sale una velocidad invariante indeterminada, por lo tanto, se requiere de una teoría que deduzca una velocidad invariante sin recurrir a la experiencia sino que utilizando un postulado más profundo resulte una teoría más general que la TER [7]. A continuación se va a presentar una de las muchas deducciones de las transformaciones de Lorentz mostrando particularmente el desarrollo de Shan Gao [7], aunque en esencia los trabajos de A. R. Lee, N. Mermin, T. M. Kalotas y Levy-Léblond parten de las mismas propiedades anteriores sobre el espacio y el tiempo y conducen a los mismos resultados (Ver [13], [12], [14], [16]).

1. Desarrollo del artículo *Relativity without Light:* *A Further Suggestion*

Sean dos marcos de referencia inerciales S y S' , donde S' se mueve con velocidad \mathbf{v} constante respecto a S a lo largo del eje x . Para $t = 0$ los orígenes coinciden. Sean las ecuaciones de transformación de las coordenadas x, t respectivamente

$$x' = X(x, t, v) \quad ; \quad t' = T(x, t, v)$$

Consideremos la homogeneidad del espacio y el tiempo. Esto implica que la longitud de una regla no depende de la posición en el marco inercial. Supongamos que hay una regla en el marco S , cuyos extremos están en las posiciones x_1 y x_2 . Por la homogeneidad del espacio la longitud de la regla no cambia si la regla se desplaza un intervalo Δx . Luego para S la longitud de la regla es invariante

$$(x_2 + \Delta x) - (x_1 + \Delta x) = x_2 - x_1$$

Para S' se tiene

$$X(x_2 + \Delta x, t, v) - X(x_1 + \Delta x, t, v) = X(x_2, t, v) - X(x_1, t, v)$$

igual a

$$X(x_2 + \Delta x, t, v) - X(x_2, t, v) = X(x_1 + \Delta x, t, v) - X(x_1, t, v)$$

dividiendo a ambos lados por Δx y tomando el límite cuando $\Delta x \rightarrow 0$ tenemos

$$\left. \frac{\partial X(x, v, t)}{\partial x} \right|_{x_2} = \left. \frac{\partial X(x, v, t)}{\partial x} \right|_{x_1}$$

esto sugiere que las derivadas parciales son constantes ya que son independiente de las posiciones de los extremos de la regla. De esto se deduce que la transformación $X(x, v, t)$ es una función lineal en x . Haciendo un razonamiento análogo para el tiempo se deduce que $T(x, v, t)$ también es una función lineal en t . En conclusión la homogeneidad del espacio y el tiempo implican la linealidad de las transformaciones respecto al espacio y

el tiempo. Suponiendo que los orígenes de ambos sistemas coordenados coinciden para $t = 0$ podemos escribir en notación matricial las transformaciones

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_v & B_v \\ C_v & D_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}$$

siendo las entradas de la matriz funciones solo de la velocidad. Para $t = 0$, $x' = 0$ y $x = vt$, luego desarrollando la primera fila tenemos $x' = A_v x + B_v t = (vA_v + B_v)t$ se deduce que $B_v = -vA_v$

La isotropía del espacio implica que las ecuaciones de las transformaciones deben ser invariantes ante la inversión de los ejes coordenados. Aplicando ésta restricción se encuentra las relaciones $A_{-v} = A_v$, $B_{-v} = -B_v$, $C_{-v} = -C_v$, $D_{-v} = D_v$. Con éstas relaciones podemos determinar la paridad de las funciones en la matriz. Por el principio de relatividad se requiere que las inversas de las transformaciones asuman la misma forma que las iniciales así que escribimos

$$\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{-v} & B_{-v} \\ C_{-v} & D_{-v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix}$$

Los coeficientes de la matriz para la transformación inversa se corresponden con la matriz inversa, así que las entradas correspondientes quedan

$$A_{-v} = \frac{D_v}{A_v D_v - B_v C_v}; \quad B_{-v} = \frac{-B_v}{A_v D_v - B_v C_v}; \quad C_{-v} = \frac{-C_v}{A_v D_v - B_v C_v}; \quad D_{-v} = \frac{A_v}{A_v D_v - B_v C_v}$$

Relacionando estos resultados se tiene $D_v = A_v$ y $C_v = \frac{A_v^2 - 1}{B_v}$ quedando así todos los coeficientes en términos de A_v

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_v & -vA_v \\ -\frac{A_v^2 - 1}{vA_v} & A_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}$$

y luego

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = A_v \begin{pmatrix} 1 & -v \\ -\frac{A_v^2 - 1}{vA_v} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}$$

Ahora si consideramos un marco de referencia S'' que se mueve con velocidad u respecto

a S'

$$\begin{pmatrix} x'' \\ t'' \end{pmatrix} = A_u A_v \begin{pmatrix} 1 & -u \\ -\frac{A_u^2-1}{uA_u^2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -v \\ -\frac{A_v^2-1}{vA_v^2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x'' \\ t'' \end{pmatrix} = A_u A_v \begin{pmatrix} 1 + u\frac{A_v^2-1}{vA_v^2} & -(u+v) \\ -\frac{A_v^2-1}{vA_v^2} - \frac{A_u^2-1}{uA_u^2} & 1 + v\frac{A_u^2-1}{uA_u^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}$$

Por el principio de relatividad esta última transformación debe tener la misma forma que la transformación de S a S' así que los elementos de la diagonal deben ser 1, por lo tanto se debe cumplir

$$\frac{A_v^2 - 1}{v^2 A_v^2} = \frac{A_u^2 - 1}{u^2 A_u^2}$$

como u y v son arbitrarios implica que ambos lados de la ecuación son constantes, llamemos a tal constante κ y despejemos un A_v , nos queda entonces

$$A_v = \frac{1}{\sqrt{1 - \kappa v^2}}$$

esto implica que $A_v \geq 1$ y además la constante $\kappa^{-\frac{1}{2}}$ tiene unidades de velocidad y debe ser un valor tal que esté en el intervalo $0 \leq \kappa \leq \frac{1}{v^2}$. La transformación queda

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 - \kappa v^2}} \begin{pmatrix} 1 & -v \\ -\kappa v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}$$

La ley de suma de velocidades también puede ser deducida. Supongamos que la velocidad relativa de S'' respecto a S es w , de las anteriores deducciones se concluye que $A_w = A_u A_v \left(1 + u\frac{A_v^2-1}{vA_v^2}\right)$ así

$$w = \frac{u + v}{1 + \kappa uv}$$

Lo más importante de estas transformaciones es que hay una magnitud invariante -una velocidad- que satisface las propiedades del espacio y el tiempo indicadas inicialmente. Para $\kappa = 0$ se obtienen las transformaciones de Galileo porque efectivamente el factor de Lorentz es la unidad. Para $\kappa > 0$ se obtienen las transformaciones de Lorentz que conllevan a la dilatación del tiempo y la contracción de la longitud. Este análisis es coherente pero aún insuficiente para relacionar directamente κ con c , aunque experimentalmente se pueda comprobar tal igualdad. Veámos que las implicaciones físicas en los casos $\kappa = 0$ y $\kappa > 0$ son diferentes, aunque matemáticamente lo que la caracteriza difiera solo en el valor de

una constante [7].

Para tener una relación directa con la TER es necesario demostrar que $\kappa > 0$, luego aún no es concluyente desde el desarrollo de Shang Gao si los principios de la *Relativity without Light* implican la invariancia de c . Sin embargo, el autor propone la hipótesis de que el espacio y el tiempo están cuantizados, es decir que haya una mínima longitud y un mínimo tiempo relacionados con la longitud de Planck $L_p = \left(\frac{G\hbar}{c^3}\right)^{\frac{1}{2}}$ y tiempo de Planck $T_p = \left(\frac{G\hbar}{c^5}\right)^{\frac{1}{2}}$ donde $\frac{L_p}{T_p} = c$ [7]. Será que podemos cambiar el postulado II por un postulado más profundo bajo esta interpretación? [7]. Sin dar mayores detalles de ésta hipótesis que puede suscitar mucho interés -está fuera del alcance de esta monografía hacer un estudio más profundo tanto físico como matemático sobre la cuantización espacial y temporal; sugiero al lector consultar el artículo original de Shang Gao [7] y el libro de Carlo Rovelli [21]-, en lo siguiente haré un análisis propio para tratar de relacionar κ y c desde los resultados hallados de la teoría de grupos como del desarrollo de la *Relativity without Light*.

2. Construyendo una Interpretación

2.1. Geometrización de la Transformación de Coordenadas

La transformación Λ (2.13) forma un grupo, pero a continuación la vamos a asociar a una transformación de coordenadas espaciales de forma que \mathbf{r}' , un cuadrivector, es el resultado de aplicar (2.13) sobre \mathbf{r} , o sea $\mathbf{r}' = \Lambda \mathbf{r}$. Ahora supongamos que los coeficientes que acompañan los generadores \mathbf{K} se hacen nulos, quedando Λ solo como una rotación; puede probar que la transformación adopta la forma (3.1), en donde la matriz con los asteriscos resulta de la composición de los generadores de rotación y van a depender únicamente de los ángulos de rotación

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

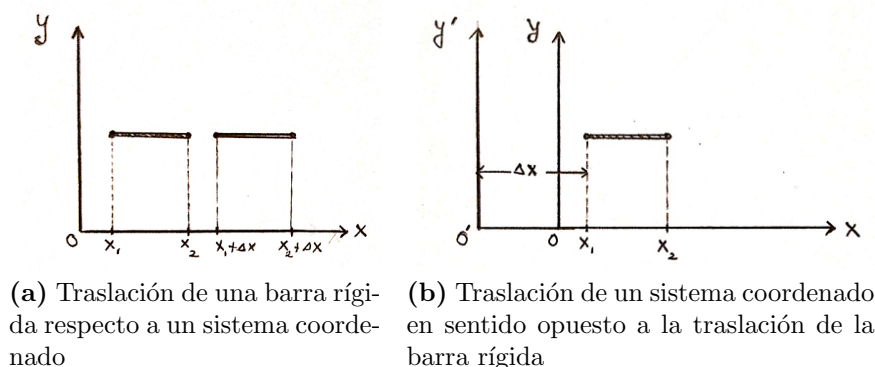


Figura 8: Homogeneidad del Espacio. Fuente propia

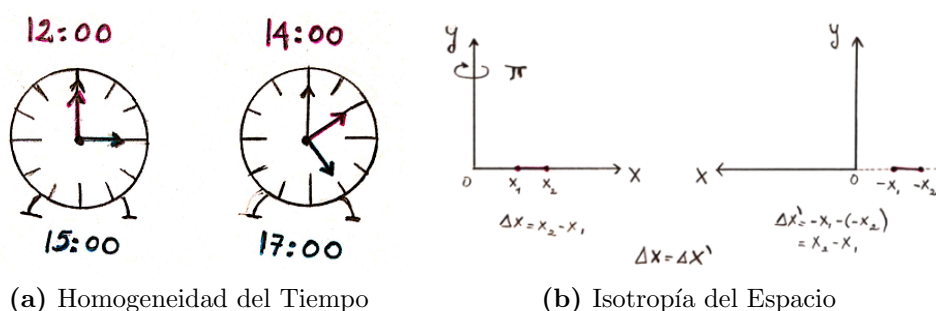


Figura 9: Supuestos de la TER sin luz. Fuente propia

Vamos a ver las implicaciones físicas que se obtienen al aplicar sobre (3.1) los supuestos de la TER sin el segundo postulado. Como la homogeneidad del espacio y el tiempo así como la isotropía hacen parte de tales supuestos, estas propiedades han de ser consideradas en nuestra transformación. Desarrollando (3.1) vemos que hay una coordenada que no es susceptible de ser rotada, por lo cual se propone relacionar x^0 y x^0 como proporcionales al tiempo que se mida en cada marco inercial.

Antes de continuar veamos el significado que adoptan los autores de la *Relativity without light* sobre la homogeneidad y la isotropía. La homogeneidad del espacio se entiende como la invarianza de las distancias espaciales independientemente de las traslaciones que se hagan para observadores en un mismo marco de referencia inercial (Ver Figura 8). La homogeneidad del tiempo está asociada a la equivalencia de los intervalos temporales medidos por observadores distintos en un mismo marco inercial independientemente de la sincronización de sus relojes (Ver Figura 9a).

La isotropía del espacio está relacionada con la invarianza de los intervalos espaciales ante rotaciones de los marcos inerciales (Ver Figura 9b). Como a los marcos inerciales

asociamos sistemas coordenados, implícitamente asumimos que para mantener la invarianza de los intervalos espaciales los sistemas coordenados son rígidos, pues no se debe cambiar la escala de medición (Ver en Anexos 1.12 las definiciones de homogeneidad e isotropía sacados del artículo original de Lévy-leblond).

Los vectores trasladados como en la Figura 10. también satisfacen los supuestos anteriores. Sea el vector \mathbf{x} en el sistema de coordenadas x^0 y x^1 definido por \mathbf{x}_a y \mathbf{x}_b . Sabemos que cualquier vector no trasladado -cuyo origen coincide con el origen de coordenadas- satisface la métrica g en (2.10). Al sumar el vector $\Delta\mathbf{x}$ a cada extremo de \mathbf{x} tenemos el vector $\mathbf{x}'_a = \mathbf{x}_a + \Delta\mathbf{x}$ que coincide con $\Delta\mathbf{x}$ y el vector $\mathbf{x}'_b = \mathbf{x}_b + \Delta\mathbf{x}$ que coincide con la diagonal del paralelogramo formado (Ver Figura 10.). Luego tenemos que $\mathbf{x}'_b - \mathbf{x}'_a = \mathbf{x}'$; calculado el cuadrado de su módulo obtenemos

$$\mathbf{x}' \cdot \mathbf{x}' = (\mathbf{x}'_b - \mathbf{x}'_a) \cdot (\mathbf{x}'_b - \mathbf{x}'_a)$$

$$\mathbf{x}' \cdot \mathbf{x}' = (\mathbf{x}_b + \Delta\mathbf{x} - \mathbf{x}_a - \Delta\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{x}_b + \Delta\mathbf{x} - \mathbf{x}_a - \Delta\mathbf{x})$$

$$\mathbf{x}' \cdot \mathbf{x}' = (\mathbf{x}_b - \mathbf{x}_a) \cdot (\mathbf{x}_b - \mathbf{x}_a)$$

$$\mathbf{x}' \cdot \mathbf{x}' = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$$

Este resultado implica que la traslación de un vector deja invariante la métrica (2.10), por lo que se puede ampliar más nuestro grupo Λ con traslaciones temporal y espaciales -este es el grupo de Poincaré- teniendo cuatro generadores más, sin embargo expresar esto no es necesario para el análisis que vamos a llevar a cabo a continuación.

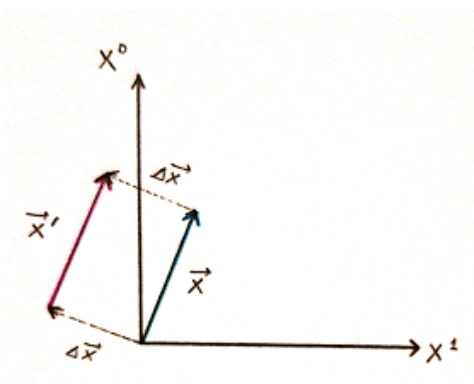


Figura 10: Traslación de coordenadas. Fuente propia

Para caracterizar físicamente las transformaciones de los generadores \mathbf{K}^1 , \mathbf{K}^2 , \mathbf{K}^3

de (2.13) vamos a asociar estas transformaciones al movimiento de un marco inercial con velocidad constante relativa a otro marco inercial (Ver Figura 11.) en donde solo se transforma la coordenada espacial x^1 y la relacionada con el tiempo x^0 , aplicando (2.3) obtenemos las transformaciones hiperbólicas (2.4).

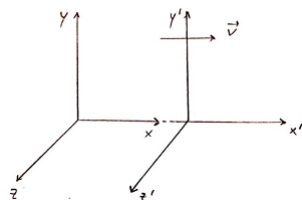


Figura 11: Representación del movimiento de un marco inercial respecto a otro. Fuente propia

Representando el marco en reposo con el sistema rectangular S con coordenadas espaciales (x^0, x^1) ¹ y un sistema S' ligado a un observador en movimiento unidimensional respecto a S con coordenadas (x'^0, x'^1) respectivamente. Aplicando las transformaciones hiperbólicas de \mathbf{K}^1 a las coordenadas de S' tenemos las ecuaciones

$$x^0 = \cosh(\omega) x'^0 + \sinh(\omega) x'^1 \quad ; \quad x^1 = \sinh(\omega) x'^0 + \cosh(\omega) x'^1$$

Las coordenadas que mide el cuerpo en movimiento respecto a S' son respectivamente $(\mathbb{R}, 0)$ donde $x'^0 = \mathbb{R}$ y $x'^1 = 0$ ya que el tiempo transcurre independientemente de si está o no en movimiento. Sustituyendo $x'^1 = 0$ en las ecuaciones de transformación

$$x^0 = \cosh(\omega) x'^0 \quad ; \quad x^1 = \sinh(\omega) x'^0$$

Veamos que la transformación relaciona las coordenadas de S con las de S' mediante las funciones hiperbólicas dependientes del parámetro ω . Cuando ω es constante, para diferentes tiempos de x'^0 vemos que los puntos (x^0, x^1) cumplen la relación $\frac{x^1}{x^0} = \tanh \omega$. Geométricamente si construimos la hipérbola equilátera sobre el eje x^0 (Ver Figura 12.); por definición de las funciones hiperbólicas trazando una recta que va desde el origen y pasa por ese punto, se obtiene el lugar geométrico de las coordenadas que mide S cuando para S' solo transcurre el tiempo, es decir que esa recta es la representación del movimiento de S' . Veamos además en la Figura 12. que la recta está definida por el parámetro ω que es el ángulo formado entre los segmentos OAC , que a su vez es el doble del área de la

¹la coordenada x^0 va a ser la dependiente del tiempo medido en un marco inercial

región sombreada entre OAC (Ver deducción en Anexos 1.10). Si se define otro parámetro ϕ se relaciona análogamente con el área OAB y se tiene otra recta.

Tengamos en cuenta que la matriz de transformación solo puede depender del movimiento relativo, es decir de la velocidad, por lo que ese parámetro ω debe estar relacionado con esa magnitud. Supongamos otro sistema coordenado S'' con una velocidad relativa respecto a S' , la recta que representa su movimiento debe estar asociada a otro parámetro ϕ tal que $\frac{x^1}{x^0} = \tanh \phi$. Hasta aquí podemos decir que las rectas oblicuas representan el movimiento de un sistema y que se diferencian entre si por un parámetro ω .

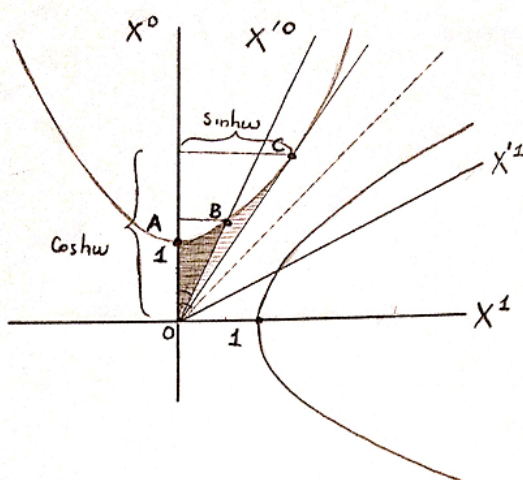


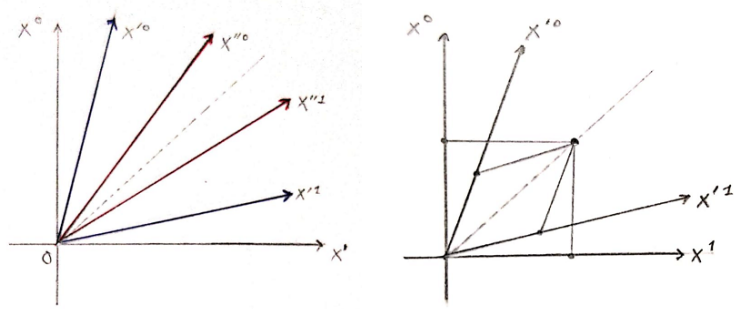
Figura 12: Construcción del plano de coordenadas a partir de la definición de funciones hiperbólicas. Fuente propia

También de $x^0 = \cosh(\omega) x'^0$ se deduce que $x^0 \geq x'^0$ y dado que $\tanh \omega < 1$ implica que $x^0 > x^1$; entonces cualquier sistema en movimiento con respecto a S lo podemos representar con una línea oblicua en S . Lo interesante es que cualquier evento descrito por S -acelerado o no- debe ser una línea cuyas tangentes no tengan como pendiente la unidad. Veamos que para el caso hipotético $x^0 = x^1$ aplicando la transformación inversa se obtienen las ecuaciones

$$x'^0 = \cosh(\omega) x^0 - \sinh(\omega) x^1 \quad ; \quad x'^1 = -\sinh(\omega) x^0 + \cosh(\omega) x^1$$

sacando factor común puede verificar fácilmente que

$$x'^0 = x'^1$$



(a) Construcción del eje x' dada la invarianza de las coordenadas en la diagonal
 (b) Representación del movimiento de S' respecto a S

Figura 13: Relación de coordenadas que son invariantes bajo las transformaciones hiperbólicas. Fuente propia

Por lo que la diagonal es el lugar geométrico de las coordenadas invariantes bajo las transformaciones de Lorentz, esto implica que la línea x'^1 debe ser simétrica respecto a la diagonal (Ver Figura 13).

Hagamos ahora $\tanh \omega = \beta$, entonces $\sinh \omega = \beta \cosh \omega$ y dado que los puntos sobre la hipérbola cumplen $\cosh^2 \omega - \sinh^2 \omega = 1$ se tiene que $\cosh^2 \omega - \beta^2 \cosh^2 \omega = 1$, factorizando tengo $(1 - \beta^2) \cosh^2 \omega = 1$ así que

$$\cosh \omega = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma \quad y \quad \sinh \omega = \beta \gamma$$

Hasta el momento no le hemos dado significado físico a β y γ . Supongamos el marco inercial S'' con cierta velocidad relativa respecto a S' y a su vez S' se mueve con velocidad constante respecto a S (Ver Figura 14) ¿Cómo describiría el observador en S la velocidad o el movimiento de S'' ? para esto aplicamos la siguiente transformación

$$x^0 = \cosh(\omega) x'^0 + \sinh(\omega) x'^1 \quad ; \quad x^1 = \sinh(\omega) x'^0 + \cosh(\omega) x'^1$$

sustituyendo de forma análoga las coordenadas x'^0 y x'^1 en términos de x''^0 y x''^1 tenemos

$$x^0 = \cosh \omega (\cosh \phi x''^0 + \sinh \phi x''^1) + \sinh \omega (\sinh \phi x''^0 + \cosh \phi x''^1)$$

$$x^1 = \sinh \omega (\cosh \phi x''^0 + \sinh \phi x''^1) + \cosh \omega (\sinh \phi x''^0 + \cosh \phi x''^1)$$

resolviendo este producto y agrupando términos semejantes se tiene

$$x^0 = (\cosh \omega \cosh \phi + \sinh \omega \sinh \phi) x''^0 + (\cosh \omega \sinh \phi + \sinh \omega + \cosh \phi) x''^1$$

$$x^1 = (\sinh \omega \cosh \phi + \cosh \omega \sinh \phi) x''^0 + (\sinh \omega \sinh \phi + \sinh \omega + \sinh \phi) x''^1$$

Con las identidades de suma de ángulos se reduce a

$$x^0 = \cosh(\omega + \phi) x''^0 + \sinh(\omega + \phi) x''^1 \quad ; \quad x^1 = \sinh(\omega + \phi) x''^0 + \cosh(\omega + \phi) x''^1$$

ahora como las coordenadas que mide el observador de si mismo en S'' son $(x''^0, x''^1) = (\mathbb{R}, 0)$, sustituyendo esto deducimos

$$x^0 = \cosh(\omega + \phi) x''^0 \quad ; \quad x^1 = \sinh(\omega + \phi) x''^0$$

en donde

$$\frac{x^1}{x^0} = \tanh(\omega + \phi)$$

y aplicando nuevamente las identidades se tiene

$$\frac{x^1}{x^0} = \frac{(\sinh \omega \cosh \phi + \cosh \omega \sinh \phi)}{(\cosh \omega \cosh \phi + \sinh \omega \sinh \phi)}$$

dividiendo todo por $\cosh \omega \cosh \phi$ se concluye

$$\tanh(\omega + \phi) = \frac{\tanh \omega + \tanh \phi}{1 + \tanh \omega \tanh \phi}$$

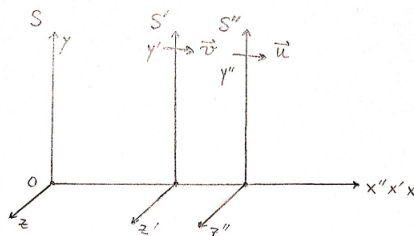


Figura 14: Representación del movimiento de S' respecto a S

Recordemos que $\frac{x^1}{x^0} = \tanh \omega$ es una cantidad adimensional. Cuando la línea es

el lugar geométrico de los puntos de la forma $x^1 = x^0$ estos son invariantes bajo las transformaciones, y a su vez para este caso $\tanh \omega$ no está definido, pero conforme $x^1 \rightarrow x^0$ vemos que las líneas oblicuas tienden a la diagonal, físicamente el cambio de dirección de las rectas deben estar relacionadas con la velocidad relativa, por lo vamos a expresar $\tanh \omega$ en términos de la velocidad. Así entre S y S' tenemos $\frac{x^1}{x^0} = \frac{x^1}{Kt} = \tanh \omega$ donde es trivial que $v = \frac{x^1}{t}$ es la velocidad que mide S de S' . Por análisis dimensional K debe ser una velocidad, tenemos así que $v = K \tanh \omega$. Cuando $x^1 \rightarrow x^0$ tenemos que $\tanh \omega \rightarrow 1$, pero esto no implica que $v \rightarrow K$ puesto que aún bajo el desarrollo expuesto no hemos inferido que K sea un invariante para cualquier marco inercial, puede ser que $K \rightarrow \infty$ cuando $v \rightarrow \infty$. Ahora razonando de la misma manera para S' y S'' se tendría $u = K' \tanh \phi$; por lo anterior expresamos

$$\tanh \omega = \frac{v}{K}$$

Cuando $v \neq 0$ debe ser $K \neq 0$, pero esto no es suficiente para afirmar que $K \neq 0$ y constante. Hasta aquí el problema de la *Relativity without Light: A Further Suggestion* de encontrar explícitamente $K = c$ sigue sin resolverse.

Históricamente recordemos que el problema que motivó el trabajo de Einstein, La electrodinámica de los cuerpos en movimiento se debe a las asimetrías que conllevaban las transformaciones de Galileo, es decir, lo que un observador S describe mediante la ecuación de onda, un observador en S' lo describe mediante una ecuación cuya forma cambia. Ahora siguiendo uno de los experimentos mentales de Einstein que lo condujeron a contradicción es el siguiente; si viajáramos a la velocidad de la luz, no veríamos una onda electromagnética propagándose sino que la veríamos estática. Entonces las ecuaciones de Maxwell ¿para qué observadores serían válidas? Convencido de la veracidad de la teoría electromagnética de Maxwell y de que por el Principio de Relatividad, Einstein propuso que cualquier conjunto de transformaciones de coordenadas debe satisfacer la covarianza de todas las leyes físicas debido a que los marcos inerciales son indistinguibles entre si [4], nunca será posible ver la luz estática; pero esto tampoco implica que debamos medir la misma velocidad independientemente de nuestro estado de movimiento. Aprovechemos la propagación de la luz en un marco S' aplicando las transformaciones hiperbólicas.

Las ecuaciones de Maxwell combinadas implican la propagación de las ondas elec-

tromagnéticas, en específico el campo eléctrico E y el magnético B satisfacen la ecuación de onda \square

$$\nabla^2 E - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0 \quad ; \quad \nabla^2 B - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = 0$$

en su forma más general, vamos a representar el operador laplaciano en coordenadas rectangulares $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$. Podrá comprobar que aplicando las transformaciones de Galileo sobre las coordenadas de la ecuación de onda, ésta no es covariante (Ver anexos 1.11), entrando en contradicción el echo de que por medios electromagnéticos tampoco podemos determinar el estado de movimiento de un marco inercial respecto a otro; luego las transformaciones de Galileo no cumplen el Principio de Relatividad.

Hagamos la prueba con las transformaciones hiperbólicas para el movimiento relativo unidimensional en términos de los parámetros β y K . Tenemos entonces las ecuaciones en términos de las tres coordenadas espaciales y una temporal, quedando

$$x' = \gamma(x - vt) \quad ; \quad y' = y \quad ; \quad z' = z \quad ; \quad t' = \gamma \left(t - \frac{\beta x}{K} \right)$$

recordando que $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ donde $\beta = \frac{v}{K}$. Para simplificar los cálculos vamos a hacer la transformación en la ecuación de onda unidimensional solamente para \mathbf{E} teniendo $E(x, t)$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0$$

Por la regla de la cadena

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{\partial E}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial E}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial x}$$

de las mismas ecuaciones de transformación deducimos

$$\frac{x'}{x} = \gamma \quad ; \quad \frac{t'}{x} = -\gamma \frac{\beta}{K}$$

concluyendo entonces

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \gamma \frac{\partial E}{\partial x'} - \gamma \frac{\beta}{K} \frac{\partial E}{\partial t'}$$

derivando nuevamente y aplicando la regla de la cadena puede verificar que

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \gamma^2 \frac{\partial^2 E}{\partial x'^2} - \gamma^2 \frac{\beta}{K} \frac{\partial^2 E}{\partial t' \partial x'} - \gamma^2 \frac{\beta}{K} \frac{\partial^2 E}{\partial x' \partial t'} + \gamma^2 \frac{\beta^2}{K^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t'^2}$$

Por otro lado la derivada de E con respecto al tiempo es

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -\gamma v \frac{\partial E}{\partial x'} + \gamma \frac{\partial E}{\partial t'}$$

volviendo a derivar

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \gamma^2 v^2 \frac{\partial^2 E}{\partial x'^2} - \gamma^2 v \frac{\partial^2 E}{\partial t' \partial x'} - \gamma^2 v \frac{\partial^2 E}{\partial x' \partial t'} + \gamma^2 \frac{\partial^2 E}{\partial t'^2}$$

Sustituyendo y reduciendo términos en la ecuación de onda unidimensional tenemos

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0$$

$$\gamma^2 \frac{\partial^2 E}{\partial x'^2} + \gamma^2 \frac{\beta^2}{K^2} \frac{\partial E}{\partial t'^2} - \gamma^2 \frac{v^2}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial x'^2} - \frac{\gamma^2}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t'^2} = 0$$

agrupando términos semejantes

$$\left(\gamma^2 - \gamma^2 \frac{v^2}{c^2} \right) \frac{\partial^2 E}{\partial x'^2} - \left(\gamma^2 \frac{v^2}{K^4} - \frac{\gamma^2}{c^2} \right) \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t'^2} = 0$$

Sólo si para las transformaciones hiperbólicas el Principio de Relatividad es inherente se debe cumplir que los coeficientes en paréntesis deben ser la unidad quedando

$$\left(\gamma^2 - \gamma^2 \frac{v^2}{c^2} \right) = 1 \quad ; \quad \left(\gamma^2 \frac{v^2}{K^4} - \frac{\gamma^2}{c^2} \right) = 1$$

por lo tanto

$$\left(\gamma^2 - \gamma^2 \frac{v^2}{c^2} \right) = \left(\gamma^2 \frac{v^2}{K^4} - \frac{\gamma^2}{c^2} \right)$$

factorizando las γ y cancelando

$$1 - \frac{v^2}{c^2} = 1 - \frac{c^2 v^2}{K^4}$$

haciendo un poco más de álgebra se deduce

$$K = c$$

y además se tiene $\kappa = K^{-2}$ De esta manera he demostrado mediante la relación teoría

de grupos, geometría y física que $\kappa \neq 0$ y además constante para todo marco inercial, completando el desarrollo de Shang Gao para el que quedaba indeterminada tal relación.

Hallado este valor entonces expresemos las transformaciones hiperbólicas en términos de las relaciones anteriores. De las ecuaciones de transformación hiperbólicas (2.4) se obtiene

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix}$$

de estas transformaciones siendo $K = c$ y expresando explícitamente el tiempo de la coordenada $x^0 = ct$ y $x^1 = x$ obtenemos las ecuaciones

$$t' = \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} x \right) \quad x' = \gamma (x - vt)$$

donde

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

es el factor de Lorentz. En general podemos escribir este movimiento a lo largo del eje x en el espacio cuatridimensional como

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

que coincide con el x^1 - *boost de Lorentz* (Ver desarrollo de la relatividad en el Anexo 1.13).

2.2. Una Reflexión sobre tal Invarianza

Hagamos un recuento de todo el proceso llevado hasta aquí. Comenzamos con el estudio de la teoría de grupos en la que deducimos el significado de los generadores, con los que podemos expresar cualquier transformación asociada de manera unívoca. Por ejemplo, una rotación en el espacio respecto a un eje arbitrario será equivalente a una composición de rotaciones consecutivas asociadas a los generadores. Con estos podemos caracterizar el grupo determinando las transformaciones correspondientes así como su

invariante. En el capítulo II se supuso un generador particular con el que deducimos el invariante, la métrica y las transformaciones asociadas -las hiperbólicas-; sin dar una relación *a priori* con las transformaciones de Lorentz ni con el espacio de Minkowski.

Con el interés de saber las implicaciones físicas que se tienen con las transformaciones hiperbólicas (2.4), se construyó una geometría desarrollada directamente desde el significado geométrico de la hipérbola equilátera y de la misma definición de las funciones hiperbólicas; para un estudio formal del tema consultar el libro *Hyperbolic Geometry* [2] o *Lobachevski descubridor de la geometría hiperbólica* [5] entre otros artículos [15]. A éste punto los parámetros solo tenían sentido matemático o geométrico, por lo que se relacionaron con una magnitud física, la velocidades relativas entre los marcos inerciales. La deducción de que $K = c$ fue desarrollada de manera autónoma concluyendo que las transformaciones hiperbólicas son equivalentes a las de Lorentz.

Para hallar que $K = c$, una relación que no es trivial, es necesario restringir que las transformaciones satisfagan el Principio de Relatividad ¿Serán las únicas que lo pueden satisfacer tal como Kant pensaba que el espacio era necesariamente euclidiano? Pues aunque no hemos probado ésta hipótesis asumamos que sí son las únicas, y la razón de esto es que en el *Programa Erlangen* se afirma que a toda geometría viene asociado un grupo de transformaciones cuyo invariante es el que la caracteriza. Bajo la relación física y geometría, si c es un invariante es porque se ha de conservar alguna cantidad física ¿Pero que es lo que se conserva?.

Dado que hemos obtenido las mismas transformaciones de Lorentz tendremos las mismas consecuencias de la TER pero no las mismas interpretaciones en torno a la fenomenología inherente a la teoría si desde un comienzo justificamos el segundo postulado. Recordemos que la motivación de este trabajo es construir una interpretación del segundo postulado a través de los principios asociados al espacio y al tiempo como hemos deducido que se puede hacer matemáticamente. Para lograr esto, propongo considerar los resultados de la cinemática relativista; por lo que las ecuaciones que aparecen a continuación las puede encontrar deducidas en cualquier libro formal de relatividad especial.

Para que la TER sea coherente con los principios de conservación, que son base de toda la física, es necesario generalizar magnitudes como la fuerza, momento lineal, aceleración, energía, etc.,. Acorde a esto la cantidad de movimiento relativista es $\mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v}$.

Aplicando el teorema trabajo energía-cinética tenemos que la integral de la fuerza en un intervalo espacial dará como resultado la variación de la energía cinética E_k como $E_k = (\gamma - 1)mc^2$ siendo la energía cinética dependiente sólo de la velocidad, cuando $v = 0$ debemos tener que $E_k = 0$, es decir que para $\gamma mc^2 = E_k + mc^2$ inferimos que la energía total es $E_T = \gamma mc^2$. La relación entre E_T y p relativistas es $E_T^2 = (mc^2)^2 + (pc)^2$. Para cuerpos en reposo y con masa $E_T = mc^2$ y para cuerpos sin masa tenemos que $E_T = pc$.

A la base de la dependencia entre la energía total y la masa está el Principio de Conservación de la Masa-Energía, con la cual ha sido posible llevar a cabo procesos de fisión nuclear y es la base para comprender la cinemática de las partículas a altas energías. De acuerdo con Levy-Léblond, ubicados en un mismo marco inercial, el espacio homogéneo implica que los intervalos espaciales son invariantes bajo traslaciones, entonces la homogeneidad espacial implica la conservación del momento lineal, y de igual forma para los intervalos temporales que no cambian bajo sincronizaciones distintas de los relojes se debe conservar la energía. Según este razonamiento la homogeneidad espacial y temporal implica que haya conservación del momento y de la energía, entonces la invarianza de la luz entraña la conservación masa-energía. La razón de esto es que la covarianza de las leyes físicas, en particular de las leyes electromagnéticas, implicaría que el movimiento deforma los cuerpos con masa, como los relojes, los cuerpos rígidos, etc. así un cambio de la estructura molecular, -considerando un punto de vista atomista de la materia- debido a la transformación masa-energía produciría los efectos de la TER.

Cómo se hubiese desarrollado la TER si la ley conservación masa-energía se hubiese establecido antes que la Teoría de Maxwell ¿la TER sería tan abstrusa o se hubiesen redactado desarrollos para demostrar el segundo postulado? Yendo más allá, quizás *el segundo postulado se puede reemplazar por la Ley de conservación masa-energía* y así sólo nos referimos al movimiento en vez de hablar de espacio y tiempo, de homogeneidad e isotropía, ya que estos son conceptos problemáticos, metafísicos. Prefiero ver procesos de transformación entre masa y energía que conlleven a la invarianza de la velocidad de la luz que la dilatación del tiempo y contracción de la longitud de la que difícilmente se hace una interpretación significativa. **En Anexos 1.4 extendiendo un poco más el análisis sobre la invarianza de la velocidad de la luz.**

Capítulo 4

Conclusiones

Las rotaciones en el espacio quedan completamente caracterizadas a través de los generadores, luego a partir de ellos se pueden hallar las transformaciones asociadas y el invariante, de esta manera se siguió el análisis; partiendo de un generador de la que no hubo ninguna necesidad de hacer algún tipo de referencia a la TER de Einstein para encontrar las transformaciones hiperbólicas y las transformaciones de rotaciones, quedando demostrada su equivalencia con las Transformaciones de Lorentz.

Se encontró que para hacer una contrucción geométrica de las transformaciones hiperbólicas se requiere asociar las transformaciones a un sistema físico, en éste caso las transformaciones posibles del cuerpo rígido. Los resultados hallados son equivalentes a las transformaciones de Lorentz, los diagramas de Minkowski, por lo que este trabajo evidencia la posibilidad de desarrollar de manera alternativa la TER sin asumir el segundo postulado, permitiendo otras interpretaciones, abriendo otras preguntas que desde el formalismo convencional no se plantean.

Se comprueba que efectivamente bajo la relación física-matemática desde la teoría de grupos, la geometría y los supuestos de homogeneidad, isotropía y principio de relatividad resulta una velocidad invariante tal que $K = c$

El formalismo presentado es una propuesta que sintetiza algunos resultados ya previstos en los artículos sobre la relatividad sin Luz, así como algunos desarrollos de la teoría de grupos pero con unas reflexiones y análisis propios que pueden ser de ayuda a los estudiantes de relatividad o docentes que quieran cambiar el orden o la forma de explicar la TER; puesto que la forma lógica de construir una teoría tiene implicaciones en

nuestras construcciones conceptuales. Además se espera motivar a quien vea en la ciencia no un dogma a seguir, sino un camino para reflexionar.

El trabajo hace explícitos desarrollos matemáticos que no son considerados en los libros de texto tradicionales; además desde el punto de vista como fue abordada aquí la Relatividad Especial, se abren caminos de investigación que valen la pena seguir reflexionando y formalizando; pues sólo haciendo construcciones propias podemos replantear la ciencia y buscar mejores modelos pedagógicos para la enseñanza de teorías tan complejas como la TER.

1. Anexos

1.1. Demostración. Transformaciones Ortogonales

Sea $\mathbf{C} = \mathbf{BA}$, luego $\mathbf{C}^T = (\mathbf{BA})^T = \mathbf{A}^T \mathbf{B}^T$. Como $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1}$ y $\mathbf{B}^T = \mathbf{B}^{-1}$ tenemos que $\mathbf{C}^T = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}^{-1} = (\mathbf{BA})^{-1}$ por lo tanto $\mathbf{C}^T = \mathbf{C}^{-1}$, es decir que \mathbf{C} es una matriz ortogonal.

1.2. Definiciones y propiedades de las matrices más recurrentes en el formalismo de la Teoría de Grupos, Relatividad y Cuántica.

Las siguientes definiciones y propiedades son tomadas textualmente del libro Mecánica clásica [9](pp.181-182)

- **Definición 1.** La matriz adjunta se define como la matriz traspuesta conjugada y se denota como $\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{A}^{T*}$
- **Definición 2.** Una matriz que cumple $\mathbf{A} = \mathbf{A}^\dagger$ se denomina autoadjunta o hermítica.
- **Definición 3.** Se dice que una matriz es simétrica si $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$ y antisimétrica si $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T$.
- **Propiedad 1.** Una matriz es unitaria si satisface la condición $\mathbf{A}^\dagger \mathbf{A} = \mathbf{I}$. Como las matrices de rotaciones tienen entradas reales, en este caso no hay distinción entre la matriz traspuesta y la matriz adjunta, es decir hay una equivalencia entre la propiedad unitaria y la ortogonalidad. [1]
- **Propiedad 2.** Sea la traspuesta del producto de dos matrices \mathbf{A} y \mathbf{x} -donde \mathbf{x} es un vector columna-. Si $\mathbf{Ax} = \mathbf{C}$ se tiene $(\mathbf{Ax})^T = \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T = \mathbf{C}^T$, generalmente no hay implicaciones entre el vector columna y su traspuesta, siendo \mathbf{C} un vector columna podemos escribir $\mathbf{Ax} = \mathbf{x} \mathbf{A}^T$
- **Propiedad 3.** Sea \mathbf{A} una matriz ortogonal, por propiedades de los determinantes $|\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}| = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}|$. Como el determinante de la matriz identidad vale uno, se tiene

¹En relatividad especial es necesario introducir matrices complejas

$|\mathbf{A}^T| \cdot |\mathbf{A}| = |\mathbf{I}| = 1$, se debe cumplir además que $|\mathbf{A}^T| = |\mathbf{A}|$ entonces $|\mathbf{A}|^2 = 1$ implica que el determinante de la matriz ortogonal solo puede valer $+1$ o -1 . [9](p.181)

Como se dijo en el capítulo I hay dos interpretaciones cuando se aplica una matriz de rotación, las dos interpretaciones del operador como transformador de un vector o del sistema de coordenadas quedan englobadas en una si intentamos hallar la transformación de un operador bajo un cambio de coordenadas. Consideremos que \mathbf{A} es un operador que actúa sobre un vector \mathbf{F} y que da un vector \mathbf{G} , así $\mathbf{G} = \mathbf{A}\mathbf{F}$. Si se transforma el sistema de coordenadas mediante una matriz \mathbf{B} , las componentes de \mathbf{G} vienen dadas por $\mathbf{B}\mathbf{G} = \mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{F}$ o también $\mathbf{B}\mathbf{G} = \mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{F}$ siendo $\mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1}$ el operador que actúa sobre el vector \mathbf{F} transformado en el nuevo sistema resultando un vector \mathbf{G} transformado en el nuevo sistema coordenado, así que podemos interpretar el operador $\mathbf{A}' = \mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1}$ como la forma que adopta el operador \mathbf{A} cuando se transforma a un nuevo sistema. Luego toda transformación de una matriz que tenga la forma de \mathbf{A}' se denomina transformación de semejanza. [9] (p.182).

1.3. Teorema de Euler

El desarrollo aquí presentado es tomado del libro mecánica clásica [9](pp.202-208).

La exigencia de mantener un punto fijo en la rotación implica que hay un eje que permanece invariante y por ende, cualquier vector sobre este eje es invariante bajo una transformación ortogonal. Es posible demostrar que existe un vector \mathbf{R} que tienen las mismas componentes en S y S' , luego $\mathbf{R}' = \mathbf{A}\mathbf{R} = \mathbf{R}$, escribiendo esto de manera más general se obtiene la ecuación de valores propios $\mathbf{R}' = \mathbf{A}\mathbf{R} = \lambda\mathbf{R}$ donde en general $\lambda \in \mathbb{C}$. λ son los valores propios de la matriz y los vectores asociados que la satisfacen son los vectores propios. Como \mathbf{R} es invariante debemos esperar que $\lambda = 1$, así que una formulación equivalente del teorema de Euler es *-la matriz ortogonal real que especifica el movimiento físico de un cuerpo rígido con un punto fijo tiene siempre el valor propio $+1$ -*.

Para verificar que si existe un $\lambda = 1$ necesitamos solucionar la ecuación de valores propios $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{R} = 0$. Sean las componentes (X, Y, Z) de \mathbf{R} que cumplen el sistema de ecuaciones homogéneo, entonces para hallar una solución no trivial el siguiente determi-

nante es nulo

$$\mathbf{A} - \lambda \mathbf{1} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} - \lambda & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - \lambda & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Esta es la ecuación característica de la ecuación de valores propios y podemos deducir infinitas soluciones del sistema homogéneo, ello es coherente con el hecho de que es posible ubicar infinitos vectores sobre el eje de rotación, por lo tanto la dirección de \mathbf{R} no queda definida por éste método. Por la ecuación de valores propios anterior escribimos el siguiente sistema de ecuaciones homogéneo

$$(\alpha_{11} - \lambda_1)X_{11} + \alpha_{12}X_{21} + \alpha_{13}X_{31} = 0$$

$$\alpha_{21}X_{11} + (\alpha_{22} - \lambda_1)X_{21} + \alpha_{23}X_{31} = 0$$

$$\alpha_{31}X_{11} + \alpha_{32}X_{21} + (\alpha_{33} - \lambda_1)X_{31} = 0$$

donde el primer índice i de X_{ik} se refiere a la componente del vector y el segundo índice a alguno de los tres vectores propios. Podemos escribir considerando simultáneamente los tres valores y vectores propios de manera matricial como

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

y de manera más compacta $\sum_j \alpha_{ij} X_{jk} = \lambda_k X_{ik}$ que es lo mismo a

$$\sum_j \alpha_{ij} X_{jk} = \sum_j X_{jk} \delta_{jk} \lambda_k$$

de esto se deduce la ecuación matricial

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{X}\Lambda$$

siendo Λ una matriz diagonal con los valores propios de \mathbf{A} y \mathbf{X} la matriz 3×3 donde cada vector columna es un vector propio de \mathbf{A} . Multiplicando por la inversa se deduce que $\mathbf{X}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{X} = \Lambda$ que es una transformación de semejanza. Esto significa que la diago-

nalización de la matriz \mathbf{A} nos da sus valores propios. Como \mathbf{A} es ortogonal y necesariamente de determinante $+1$, aplicando las propiedades dadas anteriormente deducimos que $|(\mathbf{A} - \mathbf{I})||\mathbf{A}^T| = |\mathbf{I} - \mathbf{A}^T|$ donde se tiene $|\mathbf{A} - \mathbf{I}| = |\mathbf{I} - \mathbf{A}|$. Como el determinante de una matriz $n \times n$ satisface $|-\mathbf{B}| = (-1)^n|\mathbf{B}|$ para nuestro caso $n = 3$, toda rotación cumple $|\mathbf{A} - \mathbf{I}| = -|\mathbf{I} - \mathbf{A}| = |\mathbf{I} - \mathbf{A}|$. Esto implica que $|\mathbf{A} - \mathbf{I}| = 0$ ² y relacionando esto nuevamente con la ecuación de valores propios

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = 0 \quad \longrightarrow \quad \lambda = 1$$

El determinante de una matriz es invariante bajo una transformación de semejanza y como ya sabemos que uno de estos valores propios es $+1$, entonces los otros dos deben cumplir

$$|\mathbf{A}| = |\mathbf{X}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{X}| = |\Lambda| = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \lambda_2\lambda_3 = 1$$

Ante una transformación ortogonal de un vector, el cuadrado de su módulo es invariante. Sea \mathbf{R} un vector propio complejo³, entonces satisface

$$\mathbf{R}^{T'}\mathbf{R}'^* = (\mathbf{A}\mathbf{R})^T\mathbf{A}\mathbf{R}^* = \mathbf{R}^T\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{R}^* = \mathbf{R}^T\mathbf{R}^*$$

$\mathbf{R}^{T'}\mathbf{R}'^* = \lambda\lambda^*\mathbf{R}^T\mathbf{R}^*$ y esto implica $\lambda\lambda^* = 1$, o sea todos los valores propios tienen módulo unidad.

Si todos los valores son reales podemos considerar que todos sean $+1$, así la matriz de transformación es la identidad, y deja invariante todos los ejes de S . Otra posibilidad es que un valor propio sea $+1$ y los otros dos -1 , en este caso tenemos una matriz de inversión de dos ejes coordenados, o sea una rotación de π alrededor de un eje invariante. También está la posibilidad de que uno sea $+1$ y los otros dos valores propios sean complejos conjugados. En síntesis podemos decir que toda matriz ortogonal no trivial (es decir no cuenta la matriz identidad) tiene un solo valor propio $\lambda = +1$. Podemos hallar los cosenos directores del eje de rotación con respecto a S , esto es haciendo $\lambda = 1$, y se hallan $X, Y,$

²En un espacio con un número par de dimensiones siempre se cumple la identidad de los determinantes, pero no se cumple el teorema de Euler, es decir que una rotación en el plano no deja ningún vector invariante, y la razón es que el eje de rotación es perpendicular al plano.

³la ecuación característica que satisface λ es de orden tres, y todo polinomio de orden tres tiene al menos una raíz real, por lo tanto es necesario considerar el caso en que las otras dos raíces sean complejas

Z del vector \mathbf{R} sobre tal eje, teniendo esas componentes hallamos los cosenos directores respecto a S haciendo los respectivos productos punto.

Mediante una transformación de semejanza es posible transformar cualquier matriz \mathbf{A} en un sistema de coordenadas donde el eje z coincide con el eje de rotación, luego ese nuevo sistema coordenado se obtiene como resultado de la rotación

$$\begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Siendo la traza invariante respecto a la transformación de semejanza se cumple $Tr(\mathbf{A}) = Tr(\Lambda) = 1 + 2 \cos \phi = 1 + e^{i\phi} + e^{-i\phi}$. Analizando este resultado vemos que cuando todos los λ valen $+1$ tenemos una transformación identidad, es decir $\phi = 0$ y en el caso de que los otros dos valgan -1 , $\phi = \pi$. Del Teorema de Euler se desprende que el corrimiento más general de un cuerpo rígido es una traslación más una rotación, esto es llamado el *Teorema de Chasles*.

1.4. Propiedades de los Conmutadores

La definición de conmutador de dos operadores lineales \hat{A} y \hat{B} es

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$$

y el de anticonmutador es

$$\{\hat{A}, \hat{B}\} = \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}$$

puede verificar desde la definición las siguientes propiedades de los conmutadores

- $[\hat{A}, \hat{B}] = -[\hat{B}, \hat{A}]$
- $[\hat{A}, c] = 0$, donde $c \in \mathbb{C}$
- $[\hat{A}, \hat{B} + \hat{C}] = [\hat{A}, \hat{B}] + [\hat{A}, \hat{C}]$
- $[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C} + \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}]$
- $[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}] = [\hat{A}, \hat{C}]\hat{B} + \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}]$
- $[\hat{A}, [\hat{B}, \hat{C}]] + [\hat{B}, [\hat{C}, \hat{A}]] + [\hat{C}, [\hat{A}, \hat{B}]] = 0$ *Identidad de Jacobi*

- $[f(\hat{A}), \hat{A}] = 0$
- $[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}\hat{D}] = -\hat{A}\hat{C}\{\hat{D}, \hat{B}\} + \hat{A}\{\hat{C}, \hat{B}\}\hat{D} - \hat{C}\{\hat{D}, \hat{A}\}\hat{B} + \{\hat{C}, \hat{A}\}\hat{D}\hat{B}$

1.5. Definición de la Delta de Kronecker y del Símbolo de Levi-Civita

La delta de Kronecker se define como el producto punto entre dos vectores de una base ortonormal así

$$\delta_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j$$

luego para $i = j$, $\delta_{ij} = 1$ y para $i \neq j$, $\delta_{ij} = 0$.

El símbolo de Levi-Civita o tensor de Levi-Civita se define como el producto cruz entre los vectores de una base ortonormal, sea

$$\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j = \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_k$$

$$\mathbf{e}_m \cdot (\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j) = \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{e}_k$$

$$\mathbf{e}_m \cdot (\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j) = \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \delta_{mk}$$

entonces

$$\varepsilon_{ijk} = \mathbf{e}_m \cdot (\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j)$$

es decir $\varepsilon_{ijk} = 1$ para permutaciones pares del ordenamiento 1, 2, 3. $\varepsilon_{ijk} = 0$ para al menos dos índices repetidos y $\varepsilon_{ijk} = -1$ para permutaciones impares del ordenamiento 1, 2, 3.

1.6. Álgebra de Lie

Supongamos dos rotaciones $\mathbf{R}_1 = e^{\mathbf{B}}$ y $\mathbf{R}_2 = e^{\mathbf{A}}$ aplicadas consecutivamente darán una transformación $e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{B}} = e^{\mathbf{Z}}$, sin embargo como no podemos garantizar la conmutatividad de las rotaciones en general, $\mathbf{Z} = \log(e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{B}})$ cuyo resultado es dado por la **Fórmula**

de Baker-Campbell-Hausdorff [20]

$$Z = A + B + \frac{1}{2}[A, B] + \frac{1}{12}([A, [A, B]] - [B, [A, B]]) + \dots$$

Como el conmutador satisface la propiedad antisimétrica $[A, B] = -[B, A]$, si este da cero la fórmula anterior también se anula. De otra manera se cumple la propiedad $e^{\mathbf{Z}} = e^{\mathbf{A+B}}$ solo si los operadores conmutan. Expresando las rotaciones en términos de los conmutadores y aplicando algunas propiedades

$$[\theta_1(n_1G_1 + n_2G_2 + n_3G_3), \theta_2(n'_1G_1 + n'_2G_2 + n'_3G_3)] = \theta_1\theta_2([n_1G_1, n'_1G_1] + [n_1G_1, n'_2G_2] + \dots)$$

$$\theta_1\theta_2(n_1n'_1[G_1, G_1] + n_1n'_2[G_1, G_2] + \dots) = \theta_1\theta_2 \sum_{j,i=1}^3 n_i n'_j [G_i, G_j]$$

reduciéndose la expresión en los conmutadores de los generadores. Si A y B estuvieran asociados a rotaciones infinitesimales podemos despreciar términos de orden mayor o igual a dos ya que $[A, B] = AB - BA \approx 0$, así que solo por aproximación las rotaciones infinitesimales conmutan [9].

Recordemos que A y B son matrices antisimétricas donde el conmutador $[A, B] = C$, luego al hallar su traspuesta $[A, B]^T = (AB - BA)^T = C^T$ se deduce $(B^T A^T - A^T B^T) = BA - AB = -[A, B] = -C$; esto demuestra que $C^T = -C$; es decir, C también es antisimétrica. En tres dimensiones cualquier matriz antisimétrica puede expresarse como combinación lineal de los generadores, o sea que de $[G_i, G_j]$ resultará una matriz antisimétrica cumpliéndose necesariamente

$$[G_i, G_j] = \sum_{k=1}^3 C_{ijk} G_k$$

Los coeficientes C_{ijk} son las constantes de estructura. Puede comprobar fácilmente los siguientes resultados de los conmutadores

$$[G_1, G_1] = [G_2, G_2] = [G_3, G_3] = 0 ; [G_1, G_2] = -G_3 ; [G_1, G_3] = G_2 ; [G_2, G_3] = -G_1$$

donde es evidente que $C_{ijk} = -\varepsilon_{ijk}$ siendo ε_{ijk} el símbolo de Levi-Civita [8]. De manera

conveniente reexpresamos $\boxed{4}$ $[G_1, G_2] = -i(-i)G_3 = -iJ_3$ así

$$J_3 = -iG_3 \quad J_2 = -iG_2 \quad J_1 = -iG_1$$

quedando la representación matricial de cada operador $J_k = -iG_k$ de la forma

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad J_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Con la relación $J_k = -iG_k$ se puede deducir las reglas de conmutación para las J así

$$[J_i, J_j] = J_i J_j - J_j J_i = -G_i G_j + G_j G_i$$

$$[J_i, J_j] = [G_j, G_i] = -[G_i, G_j] = \varepsilon_{ijk} G_k = \varepsilon_{ijk} \frac{J_k}{-i}$$

$$[J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk} J_k$$

deduciendo de aquí las constantes de estructura en $SO(3)$ para las J . Finalmente tenemos que las rotaciones en términos de las J , que son matrices hermíticas, quedan representadas como $\boxed{8}$, $\boxed{20}$

$$R(\hat{\mathbf{n}}, \theta) = e^{i\theta \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{J}}$$

En general el grupo $SO(N)$ es el grupo especial ortogonal N-dimensional que satisface las mismas condiciones $\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I}$ cuyo determinante es la unidad. Las entradas de estas matrices son números \mathbb{R} . Extendiendo a $SO(4)$ la matriz A antisimétrica en la rotación finita $R(\theta) = e^A$ debe tener la forma

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{pmatrix}$$

⁴Considerando en general que las entradas de las matrices puedan ser complejas se tiene una teoría completa que puede extenderse al formalismo de la mecánica cuántica. La importancia de trabajar matemáticamente con las J y no con las G , es que en cuántica los observables de la naturaleza se representan por operadores hermíticos $J^\dagger = J$, y el operador evolución temporal se representa por matrices unitarias $U^\dagger U = I$, condiciones que la matriz G no cumple.

cuyo número de generadores depende del número de letras diferentes posibles en la matriz A . En $SO(4)$ habrán seis generadores de rotación que no deben interpretarse como rotaciones respecto a ejes, sino respecto a planos; esto es coherente ya que en cuatro dimensiones los ejes perpendiculares forman seis planos. Una rotación genérica en $SO(4)$ se expresa igualmente como $\mathbf{R} = e^{\theta \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{G}}$, donde resultan seis sumandos en el producto interno. Supongamos la rotación infinitesimal

$$\mathbf{R} = e^{\epsilon G_{12}} = \mathbf{I} + \epsilon \mathbf{G}_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \epsilon & 0 & 0 \\ -\epsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La transformación finita es de la forma [\[8\]](#)

$$R_{12}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bajo la interpretación de la rotación en $SO(4)$ vamos a entender a G_{ij} como la rotación del plano ij y además esta notación implica que el número 1 positivo en la matriz aparece en la fila i y columna j , de tal forma que los generadores son [\[8\]](#)

$$G_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad G_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad G_{14} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$G_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad G_{24} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad G_{34} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

No se debe confundir la métrica de $SO(4)$ que es la matriz identidad con la métrica del **Grupo de Lorentz**.

1.7. Generalización de las reglas de conmutación de los generadores de $SO(N)$

Con los generadores en $SO(4)$ se puede comprobar las siguientes reglas de conmutación

$$[G_{12}, G_{13}] = G_{32} \quad ; \quad [G_{34}, G_{31}] = G_{14} \quad ; \quad [G_{23}, G_{12}] = G_{31}$$

y $[G_{ij}, G_{km}] = 0$ para $i \neq j \neq k \neq m$. Notemos que de estos ejemplos se deduce la siguiente regla

$$[G_{ij}, G_{ik}] = G_{kj} \quad ; \quad [G_{ij}, G_{ki}] = G_{jk}$$

como $[G_{ij}, G_{ik}] = -[G_{ik}, G_{ij}] = -G_{jk}$ tenemos

$$G_{kj} = -G_{jk}$$

de aquí mismo se deduce

$$[G_{ij}, G_{km}] = [G_{ij}, -G_{mk}] = [G_{mk}, G_{ij}]$$

En términos de la delta de Kronecker escribimos las constantes de estructura como

$$[G_{ij}, G_{km}] = G_{mj}\delta_{ik} + G_{jk}\delta_{im} + G_{im}\delta_{jk} + G_{ki}\delta_{jm}$$

expresando cada término G en términos de J

$$[J_{km}, J_{ij}] = -[J_{ij}, J_{km}] = i(J_{mj}\delta_{ik} + J_{jk}\delta_{im} + J_{im}\delta_{jk} + J_{ki}\delta_{jm})$$

y luego multiplicando ambos lados de la anterior igualdad por -1 deducimos

$$[J_{ij}, J_{km}] = -i(J_{mj}\delta_{ik} + J_{jk}\delta_{im} + J_{im}\delta_{jk} + J_{ki}\delta_{jm})$$

Como $G_{ij} = -G_{ji}$ conviene expresar

$$[J_{ij}, J_{km}] = i(J_{jm}\delta_{ik} - J_{jk}\delta_{im} + J_{mi}\delta_{ki} - J_{ki}\delta_{mj})$$

Éstas mismas reglas se aplican para $SO(N)$; donde los subíndices $i, j, k, m = 1, 2, 3, \dots, N$ [8].

Para deducir el número de generadores $SO(N)$ contamos el número de entradas independiente de la matriz antisimétrica $N \times N$. Haciendo la cuenta tenemos en general N^2 entradas en la matriz, a eso le restamos N elementos que son los que van en la diagonal, luego al número restante de elementos los dividimos por 2, o sea hay

$$\frac{N(N-1)}{2}$$

generadores. Esta fórmula depende solo de la dimensión N del álgebra de Lie. Aplicando la anterior fórmula para $N = 2, 3, 4$ respectivamente hay 1, 3, 6 generadores. Esto coincide con el número de generadores hallados anteriormente para $SO(2)$, $SO(3)$ y $SO(4)$ [20].

1.8. Demostración. La Exponencial de una Transformación de Semejanza

Sea a un escalar y \mathbf{K}^1 una matriz simétrica tal que es semejante a una matriz \mathbf{B} diagonal mediante la transformación $\mathbf{K}^1 = \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{P}^{-1}$ entonces la exponencial de la transformación es $e^{a\mathbf{K}^1} = e^{a\mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{P}^{-1}} = e^{\mathbf{P}(a\mathbf{B})\mathbf{P}^{-1}}$, haciendo la expansión en series de Taylor

$$e^{a\mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{P}^{-1}} = \mathbf{I} + \mathbf{P}a\mathbf{B}\mathbf{P}^{-1} + \frac{1}{2!}(\mathbf{P}a\mathbf{B}\mathbf{P}^{-1})^2 + \frac{1}{3!}(\mathbf{P}a\mathbf{B}\mathbf{P}^{-1})^3 + \dots$$

Por propiedad asociativa del producto matricial puede verificar el resultado

$$e^{a\mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{P}^{-1}} = \mathbf{I} + \mathbf{P}(a\mathbf{B})\mathbf{P}^{-1} + \frac{1}{2!}\mathbf{P}(a\mathbf{B})^2\mathbf{P}^{-1} + \frac{1}{3!}\mathbf{P}(a\mathbf{B})^3\mathbf{P}^{-1} + \dots$$

Aplicando la propiedad distributiva se factoriza \mathbf{P} y \mathbf{P}^{-1} teniendo en cuenta que $\mathbf{I} = \mathbf{P}\mathbf{I}\mathbf{P}^{-1}$

$$e^{a\mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{P}^{-1}} = \mathbf{P} \left[\mathbf{I} + (a\mathbf{B}) + \frac{1}{2!}(a\mathbf{B})^2 + \frac{1}{3!}(a\mathbf{B})^3 + \dots \right] \mathbf{P}^{-1}$$

que es a su vez

$$e^{a\mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{P}^{-1}} = \mathbf{P}e^{a\mathbf{B}}\mathbf{P}^{-1}$$

Siendo \mathbf{B} una matriz diagonal es más fácil calcular la exponencial $e^{a\mathbf{B}}$. Por ejemplo tomemos la exponencial de una matriz diagonal 2×2 como se muestra a continuación

$$\exp \left[\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \right] = \mathbf{I} + \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2!} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}^2 + \dots$$

Las potencias de cada matriz son las potencias de los elementos de la diagonal, quedando

$$\exp \left[\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \right] = \mathbf{I} + \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2!} \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 \end{pmatrix} + \dots$$

Sumando las matrices puede verificar que se obtiene

$$\exp \left[\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} \end{pmatrix}$$

1.9. Momento Angular

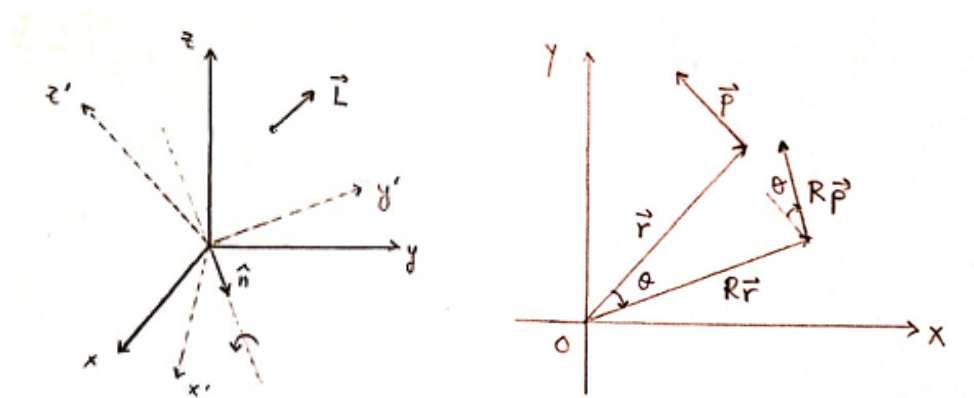
El momento angular es definido en mecánica clásica como la magnitud vectorial

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

o de la misma forma $\mathbf{L} = (x, y, z) \times (p_x, p_y, p_z)$; desarrollando este producto y agrupando términos por componentes resulta

$$\mathbf{L} = (yp_z - zp_y)\hat{\mathbf{i}} + (zp_x - xp_z)\hat{\mathbf{j}} + (xp_y - yp_x)\hat{\mathbf{k}}$$

que son respectivamente L_x, L_y, L_z . Supongamos que tenemos un sistema coordenado xyz y otro $x'y'z'$ que está rotado respecto a un eje cuyo vector unitario es $\hat{\mathbf{n}}$ (Ver Figura 15a). Si \mathbf{L} es el momento angular de la partícula respecto a xyz entonces su componente respecto al eje de rotación es $\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{L}$ [8]. Puede comprobarse que el resultado del producto



(a) Representación de \mathbf{L} respecto a un sistema de coordenadas rotado (b) Rotación de \mathbf{r} y \mathbf{p} bajo el operador R

Figura 15: Momento angular. Fuente propia

punto coincide con el resultado del siguiente producto matricial

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{L} = \mathbf{r}^T (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{G}) \mathbf{p} = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & n_3 & -n_2 \\ -n_3 & 0 & n_1 \\ n_2 & -n_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

Esto mismo se puede escribir en términos de las componentes de $\hat{\mathbf{n}}$ respecto a xyz y de las matrices $\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2, \mathbf{G}_3$ generadoras de las rotaciones en $SO(3)$ así

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{L} = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \left[n_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} + n_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + n_3 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

Supongamos la función $f(x, y) = x^2 + y^2$ y otra función definida como $F(X, Y) = X^2 + Y^2$ donde las variables están relacionadas por $X = x \cos\theta + y \sin\theta$ y $Y = y \cos\theta - x \sin\theta$. Las coordenadas (X, Y) son respectivamente la rotación en un ángulo θ de (x, y) . Si desarrollamos F en términos de f encontramos que $F(X, Y) = f(x, y)$ por lo que éstas funciones son invariantes bajo la transformación rotación. La invariancia es coherente geoméricamente ya que f es un paraboloide y los planos paralelos a xy son los que rotan; las curvas de nivel son circunferencias y la rotación de una circunferencia respecto a su centro la deja invariante, luego no hay distinción entre el paraboloide f y F . También con este ejemplo vemos que el efecto de F sobre el par (x, y) es rotarlo un ángulo θ . Si

consideramos ahora que las rotaciones son infinitesimales, $\cos\theta \approx 1$ y $\sin\theta \approx \theta$, para $\theta = \epsilon$ tenemos $X = x + \epsilon y$ y $Y = y - \epsilon x$ [8].

Recordemos que el diferencial total de una función real de dos variables es $\delta f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y$, en donde $\delta f(x, y) = f(x + \delta x, y + \delta y) - f(x, y)$ por lo tanto tenemos

$$f(x + \delta x, y + \delta y) = f(x, y) + \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y \quad (4.2)$$

Ahora con ésta fórmula haciendo $\delta x = \epsilon y$ y $\delta y = -\epsilon x$

$$\tilde{f}(x, y) = f(x + \epsilon y, y - \epsilon x) = x^2 + y^2 + \frac{\partial f}{\partial x} \epsilon y - \frac{\partial f}{\partial y} \epsilon x$$

desarrollando las derivadas parciales se demuestra que $\tilde{f}(x, y) = f(x, y)$. Entonces si la función es invariante bajo rotación infinitesimal, una rotación finita también es invariante, aunque esto es cierto sólo si tales transformaciones forman un grupo continuo o grupo de Lie [20].

Sea la transformación de rotación \mathbf{R} que depende del parámetro θ que no varía en el tiempo. Si lo aplicamos sobre el vector \mathbf{r} que es el vector posición instantáneo para una partícula que se mueve arbitrariamente y si derivamos con respecto al tiempo $\frac{d}{dt} R(\mathbf{r}(t))$ y multiplicamos por la masa m se tiene $R(m\mathbf{v}(t)) = R\mathbf{p}$. El efecto de R sobre \mathbf{r} y \mathbf{p} es el que se muestra en la Figura 15b.

El lagrangiano de esta partícula sometida a un potencial conservativo es

$$\mathcal{L}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(x, y, z)$$

Este lagrangiano no siempre es invariante bajo rotaciones R , solamente es invariante cuando \mathbf{L} es constante en el tiempo y es solo en estos casos cuando podemos relacionar el momento angular \mathbf{L} con una rotación como se verá a continuación.

1.9.1. Teorema de Noether

Vamos a hacer una rotación finita $R = e^{\theta \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{G}}$ sobre el lagrangiano que podemos deducir a partir de una rotación infinitesimal $R = I + \epsilon \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{G}$; luego $R\mathbf{r} = (I + \epsilon \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{G})\mathbf{r}$.

Aplicando nuevamente (4.2) al lagrangiano transformado

$$\tilde{\mathcal{L}}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = \mathcal{L}(\mathbf{r} + \epsilon \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{G} \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}} + \epsilon \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{G} \dot{\mathbf{r}}) \approx \mathcal{L}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{r}} \right)^T \epsilon \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{G} \mathbf{r} + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \right)^T \epsilon \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{G} \dot{\mathbf{r}}$$

siendo

$$\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{r}} \right)^T = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} \right)$$

ya que el producto debe ser un número \mathbb{R} . Como del lagrangiano deducimos tres ecuaciones por cada grado de libertad de la forma

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right)$$

donde la función a derivar en el tiempo es el **momento generalizado** p ; entonces reescribimos la anterior expresión en términos de p

$$\tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L} + \dot{p}^T \epsilon \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{G} \mathbf{r} + p^T \epsilon \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{G} \dot{\mathbf{r}}$$

reduciéndose evidentemente a

$$\tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L} + \epsilon \frac{d}{dt} [p^T (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{G}) \mathbf{r}]$$

como $\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{G}$ es una matriz antisimétrica debe cumplirse necesariamente $[p^T (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{G}) \mathbf{r}]^T = -r^T (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{G}) p$ y considerando nuevamente (4.1), $-r^T (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{G}) p = -\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{L}$ o sea

$$\tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L} - \epsilon \frac{d}{dt} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{L})$$

Si $\tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L}$ implica $-\epsilon \frac{d}{dt} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{L}) = 0$; como en general $\epsilon \neq 0$ debe ser $\frac{d}{dt} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{L}) = 0$ o sea \mathbf{L} es constante en el tiempo. Esto último se puede interpretar como: Asociada a la simetría de la rotación se asocia la conservación del momento angular. Ésto es un resultado particular del **Teorema de Noether** [8], [9].

Sea el vector $\mathbf{r} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ sobre el que se aplica la rotación R respecto al eje z , $R(\mathbf{r}, \frac{\pi}{2}) = e^{i\frac{\pi}{2} J_3}$. El desarrollo en serie de Taylor de la exponencial produce la matriz de rotación \mathbf{R}_z -hallada en el capítulo I- como es de esperar, que evaluándola para el ángulo

$\frac{\pi}{2}$ da la matriz que precede al vector \mathbf{r} en la siguiente representación

$$R(\mathbf{r}) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

En una rotación pasiva, esta transformación hace que las coordenadas giren $\frac{\pi}{2}$ rad en sentido antihorario y en una interpretación activa el vector rota en sentido horario este mismo ángulo (Ver figura 16). Dado que los ángulos positivos rotan el vector en sentido

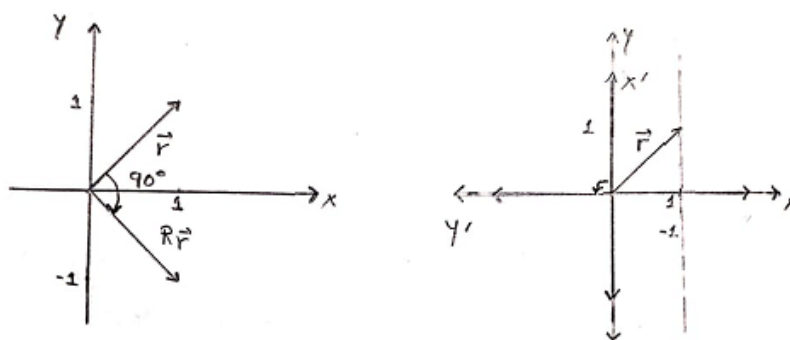


Figura 16: Rotación activa y pasiva en un ángulo recto respectivamente. Fuente propia

horario, para rotaciones activas en sentido antihorario escribimos $R^{-1}(\mathbf{r}, \frac{\pi}{2}) = e^{-i\frac{\pi}{2}J_3}$ donde se cumple que $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$.

Ahora vamos a construir una función que al ser evaluada en un punto del plano rotado tome el mismo valor que una función evaluada en el punto sin rotar, esto es, dado un vector $\mathbf{r} = (x, y)$ sobre el que se ha definido la función $f(x, y) = 2x + 3y$, si rotamos el vector un ángulo de $\frac{\pi}{2}$ en sentido antihorario obtenemos $R^{-1}(x, y) = (-y, x)$. Definamos ahora otra función $F(x, y) = -3x + 2y$; entonces evaluándola en el vector rotado $F(-y, x) = -3(-y) + 2(x) = 2x + 3y = f(x, y)$. Vemos que $f(\mathbf{r}) = F(R^{-1}\mathbf{r})$. En la Figura 17. se muestra esta transformación para $\mathbf{r} = (1, 1)$ donde $R^{-1}\mathbf{r} = (-1, 1)$.

Puede comprobar fácilmente que $F(-1, 1) = f(1, 1) = 5$. Notemos que también podemos hacer la interpretación de que F es la rotación de la función f , ésta extensión de las rotaciones al espacio de las funciones es importante como veremos a continuación. De esta manera vemos que dado un \mathbf{r} en el plano podemos encontrarle una función que tome el mismo valor evaluada en el vector rotado un cierto ángulo.

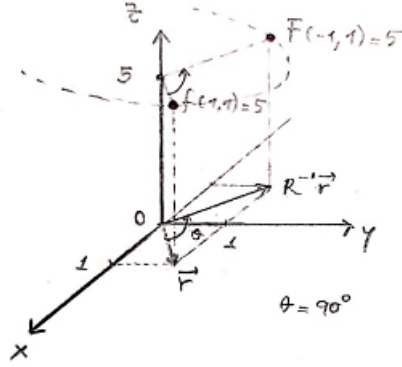


Figura 17: Invarianza de funciones evaluadas sobre vectores rotados. Tomado del curso grupo de Lie de Javier García

1.9.2. Los generadores de las rotaciones en el espacio de las funciones

Calcularemos entonces el generador de una rotación de funciones haciendo una rotación infinitesimal; así para una rotación infinitesimal antihoraria sobre un vector \mathbf{r} hacemos $R^{-1}\mathbf{r} = (I + i\epsilon(\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{J}))\mathbf{r}$. Recordando que $f(x + \delta x) = f(x) + \frac{\partial f}{\partial x}\delta x$; $\hat{\psi} = \psi + \frac{\partial\psi}{\partial r}i\epsilon(\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{J})r$ en donde aplicando la propiedad $a^T Ab = -b^T Aa$ se obtiene $\hat{\psi} = \psi - i\epsilon r^T(\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{J})\frac{\partial\psi}{\partial r}$ que extendiendo a una rotación finita implica $\hat{\psi} = (I - i\theta r^T(\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{J})\frac{\partial}{\partial r})\psi$. y en forma exponencial

$$\hat{\psi} = \exp\left[-i\theta r^T(\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{J})\frac{\partial}{\partial r}\right]\psi$$

$$\hat{\psi} = \exp[-i\theta r^T(\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{J})\nabla]\psi$$

como en cuántica el operador momento es definido como $\mathbf{p} = -i\hbar\nabla$, deducimos que

$$\hat{\psi} = \exp\left[-i\frac{\theta}{\hbar}r^T(\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{J})\mathbf{p}\right]\psi$$

obtenemos finalmente

$$\hat{\psi} = \exp\left[-i\frac{\theta}{\hbar}(\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{L})\right]\psi$$

así éste operador actúa sobre funciones y es a su vez el generador de las rotaciones en \mathbb{R}^3 . El vector $\hat{\mathbf{n}}$ unitario es la dirección en la que se ha hecho la rotación [8]. Supongamos que inicialmente la rotación se hace entorno al eje x, o sea $\hat{\mathbf{n}} = (1, 0, 0)$; así $\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{L} = ir^T(J_1\mathbf{p})$

que en forma matricial corresponde al producto

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{L} = i \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} = yP_z - zP_y$$

que coincide con la componente $L_x = yP_z - zP_y$ del generador \mathbf{L} [8]. Cumpliéndose la regla cíclica también para L_y y L_z . De manera general se cumple

$$[r_i, P_j] = i\hbar\delta_{ij} \quad [r_i, r_j] = 0 \quad [P_i, P_j] = 0$$

Con las anteriores reglas de conmutación se puede probar que las reglas de conmutación de \mathbf{L} en este espacio cumplen

$$[L_i, L_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}L_k$$

Dentro de este formalismo se tiene así que \mathbf{L} es el generador de las rotaciones de las funciones en \mathbb{R}^3 , pero si lo que rotamos son vectores entonces los generadores de tales rotaciones son los \mathbf{J} que cumplen análogamente

$$[J_i, J_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}J_k$$

El momento angular en mecánica cuántica como único concepto tienen tres representaciones dependiendo del espacio sobre el que se aplican las rotaciones.

$$\mathbf{L} = r^T(\hat{\mathbf{n}} \cdot i\mathbf{J})\mathbf{P}$$

Como \mathbf{P} es un operador diferencial \mathbf{L} también lo es; por ejemplo

$$L_z\psi = -i\hbar\left(x\frac{\partial\psi}{\partial y} - y\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)$$

que en general se escribe

$$\hat{\psi} = e^{-i\frac{\theta}{\hbar}(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{L})}\psi$$

es decir que el operador $e^{-i\frac{\theta}{\hbar}(\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{J})}$ rota a ψ alrededor de $\hat{\mathbf{n}}$ un ángulo θ [8], [9], [22].

1.9.3. El Grupo Especial Unitario $SU(N)$

La importancia del grupo $SU(2)$ es que caracteriza el spin de las partículas y $SU(3)$ esta asociada a la cromodinámica cuántica, es decir está relacionada con la propiedad del color de las partículas fundamentales [8]. En $\mathbb{C}^2 = \{\mathbf{x} \mid x_1, x_2 \in \mathbb{C}\}$ el producto escalar se expresa como

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = x^\dagger y = \begin{pmatrix} x_1^* & x_2^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Si hacemos el producto escalar de un complejo consigo mismo el resultado es un número real mayor que cero

$$\begin{pmatrix} a - ib & c - id \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a + ib \\ c + id \end{pmatrix} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq 0$$

Como las transformaciones unitarias cumplen con

$$U^\dagger U = I$$

Aplicando la transformación unitaria U a \mathbf{x} se obtiene $\mathbf{x}' = U\mathbf{x}$ de tal forma que haciendo

$$(Ux)^\dagger Ux = x^\dagger U^\dagger Ux = x^\dagger x = x \cdot x$$

implica

$$\mathbf{x}' \cdot \mathbf{x}' = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$$

En cuántica esto implica la conservación de la probabilidad. Las transformaciones unitarias que dependen de algún parámetro real infinitesimal cumplen también $U(\epsilon) \approx I + \epsilon A$ así $(I + \epsilon A)^\dagger (I + \epsilon A) \approx \epsilon(A + A^\dagger) = 0$, o sea

$$A^\dagger = -A$$

La importancia de que los operadores en cuántica sean hermíticos es que son diagonalizables y tiene valores propios reales, además sus eigenvectores forman una base ortogonal

[8].

Ahora definamos la matriz $A = zB$, donde $z \in \mathbb{C}$ y B es hermítica ($B^\dagger = B$). Sacando su conjugada traspuesta y aplicando $A^\dagger = -A$ tenemos $(zB)^\dagger = z^*B^\dagger = -zB$, esto implica que $z^* = -z$, es decir $z = ib$. Para obtener una expresión lo más simplificada posible escogemos $b = 1$ quedando que $A = iB$. Esto nos lleva a poder expresar la transformación infinitesimal $U(\epsilon) = I + i\epsilon\mathbf{B}$ y de ésta obtener la transformación finita $U(\theta) = e^{i\theta\mathbf{B}}$ [8].

La Matriz B es diagonalizable. Sea λ_1 y λ_2 sus valores propios de tal forma que

$$U(\theta) = \exp \left[i\theta \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \right]$$

Puede fácilmente verificar haciendo la expansión que para

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix} \quad e^{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} e^{a_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{a_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{a_n} \end{pmatrix}$$

Aplicando ésto a la transformación U tenemos

$$U(\theta) = \begin{pmatrix} e^{i\theta\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{i\theta\lambda_2} \end{pmatrix}$$

Luego el $\det U(\theta) = e^{i\theta(\lambda_1 + \lambda_2)}$, donde la suma de los elementos diagonales de \mathbf{B} es su traza. Como esperamos que el operador U transforme como una rotación debemos exigir que $\det U = 1$. Así las matrices que conforman el grupo $SU(N)$ se definen como

$$SU(N) = \{U \mid U^\dagger U = I, \det U = 1\}$$

o de otra manera

$$SU(N) = \{U \mid U(\theta) = e^{i\theta\mathbf{B}}, B^\dagger = B, \text{Tr}(B) = 0\}$$

Sean a, b, c, d las entradas de \mathbf{B} , por su hermiticidad es de esperar que $a^* = a, b^* = c, d^* = d$, es decir que los elementos de la diagonal sean reales y de la anti diagonal sean complejos conjugados. Reexpresando \mathbf{B} bajo estas relaciones en una combinación lineal de matrices con las constantes reales a_1, a_2, a_3 se deduce directamente

$$\mathbf{B} = a_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Éstas son las matrices *Matrices de Pauli*; cada una de estas matrices son respectivamente $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$, por eso tenemos

$$\mathbf{B} = a_1 \sigma_x + a_2 \sigma_y + a_3 \sigma_z$$

esta misma expresión puede escribirse por su forma como $\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}$, asociando las a_i como las componentes de un vector $\hat{\mathbf{n}}$. De esto concluimos que [8]

$$U(\theta) = e^{i\theta \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}}$$

Las matrices de Pauli satisfacen

$$Tr(\sigma_i \sigma_j) = 2\delta_{ij}$$

Para hacer una extensión a los generadores de $SU(3)$ que pueden ser escogidos de manera arbitraria, Murray Gell-Mann propuso utilizar la anterior fórmula que lleva su nombre como criterio para deducir las matrices 3×3 . Una posible representación de los generadores de $SU(3)$ son las siguientes matrices

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \beta_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \beta_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \beta_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\beta_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \beta_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \beta_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad \beta_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Puede probar que efectivamente tales matrices cumplen con la fórmula de Gell-Mann [8].

1.9.4. Spin $\frac{1}{2}$

Los sistemas cuánticos se representan en términos de los elementos del espacio de Hilbert H . De manera general para H de dimensión N , el spin es $s = \frac{N-1}{2}$, así el spin $\frac{1}{2}$ es la representación del momento angular en \mathbb{C}^2 , que es el espacio de Hilbert de dimensión 2. Un operador se denomina momento angular si se comporta como un vector bajo rotaciones y si además cumple la siguiente regla de conmutación

$$[J_i, J_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}J_k$$

donde \mathbf{J} tiene tres componentes (J_i, J_j, J_k) que en el operador $e^{-i\frac{\theta}{\hbar}(\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{J})}$ generan las rotaciones en el espacio en el que se encuentra (vectores, matrices, funciones). Que el operador \mathbf{J} se comporte como un vector bajo rotaciones significa que cumple las mismas ecuaciones de transformación bajo rotaciones de un vector en $SO(3)$; por ejemplo, supongamos que tenemos la función $f(x, y)$ de la que conocemos su derivada parcial respecto a x , pero resulta que podemos hallar $\partial_y f$ haciendo el siguiente razonamiento: Sea la función $f(x, y)$ cuya gráfica en \mathbb{R}^3 es una superficie, ahora hacemos una rotación de la función en torno a z de $\frac{\pi}{2}$ rad en sentido horario, esto es aplicamos $e^{i\frac{\pi}{2\hbar}L_z}$ sobre f , -recordemos que el generador de la rotaciones en el espacio de las funciones es \mathbf{L} - ahora si derivamos con respecto a x a la función rotada y nuevamente hacemos una rotación $\frac{\pi}{2}$ rad en sentido antihorario obtendremos la derivada de la función respecto a y , matemáticamente esto es

$$\partial_y f = e^{-i\frac{\pi}{2\hbar}L_z} \partial_x e^{i\frac{\pi}{2\hbar}L_z} f$$

De otra manera podemos ver que el operador ∂_y corresponde a la transformación de ∂_x

$$\partial_y = e^{-i\frac{\pi}{2\hbar}L_z} \partial_x e^{i\frac{\pi}{2\hbar}L_z}$$

Si multiplicamos ahora por $-i\hbar$ obtenemos

$$\hat{P}_y = e^{-i\frac{\pi}{2\hbar}L_z} \hat{P}_x e^{i\frac{\pi}{2\hbar}L_z}$$

pero para desarrollar más este resultado se va a deducir la fórmula de Hadamard ya que es recurrente en cuántica la expresión $e^{-\theta\mathbf{A}}\mathbf{B}e^{-\theta\mathbf{A}} = M(\theta)$, donde \mathbf{A} y \mathbf{B} son operadores

independientes de θ . Haciendo una expansión en serie de Taylor para $M(\theta)$ en torno a $\theta = 0$ tenemos

$$M(\theta) = M(0) + M'(0)\theta + \frac{1}{2!}M''(0)\theta^2 + \dots$$

calculando las derivadas $M(0) = B$, $M'(0) = -Ae^{-\theta A}Be^{\theta A} + e^{-\theta A}Be^{\theta A}A = -AM(0) + M(0)A = -AB + BA = [B, A]$, de manera sucesiva puede verificar que $M''(0) = [[B, A], A]$ y $M'''(0) = [[[B, A], A], A]$, luego la fórmula de Hadamard es

$$M(\theta) = B + [B, A]\theta + \frac{1}{2!}[[B, A], A]\theta^2 + \frac{1}{3!}[[[B, A], A], A]\theta^3 + \dots$$

Siendo $A = \frac{i}{\hbar}L_z$ y $B = \hat{P}_x$, calculando el conmutador $[B, A]$ se obtiene

$$[B, A] = [P_x, \frac{i}{\hbar}L_z] = \frac{i}{\hbar}[P_x, L_z] = \frac{i}{\hbar}[P_x, xP_y - yP_x]$$

aplicando las propiedades de los conmutadores se obtiene $\frac{i}{\hbar}[P_x, L_z] = P_y$. También puede verificar que $[[B, A], A] = [P_y, \frac{i}{\hbar}L_z] = -P_x$, haciendo esto sucesivamente resultará

$$M(\theta) = P_x + \theta P_y - \frac{1}{2!}\theta^2 P_x - \frac{1}{3!}\theta^3 P_y + \frac{1}{4!}\theta^4 P_x + \dots$$

Reduciendo

$$M(\theta) = P_x \left[1 - \frac{1}{2!}\theta^2 + \frac{1}{4!}\theta^4 + \dots \right] + P_y \left[\theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 + \dots \right]$$

$$M(\theta) = \cos \theta P_x + \sin \theta P_y$$

Aplicando la fórmula de Hadamard al operador P_i concluimos

$$e^{-i\frac{\theta}{\hbar}L_z} P_x e^{i\frac{\theta}{\hbar}L_z} = \cos \theta P_x + \sin \theta P_y$$

$$e^{-i\frac{\theta}{\hbar}L_z} P_y e^{i\frac{\theta}{\hbar}L_z} = -\sin \theta P_x + \cos \theta P_y$$

$$e^{-i\frac{\theta}{\hbar}L_z} P_z e^{i\frac{\theta}{\hbar}L_z} = P_z$$

lo que implica también para el operador ∇

$$e^{-i\frac{\theta}{\hbar}L_z} \partial_x e^{i\frac{\theta}{\hbar}L_z} = \cos \theta \partial_x + \sin \theta \partial_y$$

$$e^{-i\frac{\theta}{\hbar}L_z}\partial_y e^{i\frac{\theta}{\hbar}L_z} = -\sin\theta\partial_x + \cos\theta\partial_y$$

$$e^{-i\frac{\theta}{\hbar}L_z}\partial_z e^{i\frac{\theta}{\hbar}L_z} = \partial_z$$

es por esto que los operadores \hat{P} y ∇ son vectores ya que se transforman como vectores bajo rotaciones.

En conclusión si el operador \hat{A} es definido como $A = (x, y, z)$ para probar que éste es un vector operador debe cumplir en general que

$$RAR^{-1} = e^{-i\frac{\theta}{\hbar}L_z} x e^{i\frac{\theta}{\hbar}L_z} = x \cos\theta - y \sin\theta$$

$$e^{-i\frac{\theta}{\hbar}L_z} y e^{i\frac{\theta}{\hbar}L_z} = -x \sin\theta + y \cos\theta$$

$$e^{-i\frac{\theta}{\hbar}L_z} z e^{i\frac{\theta}{\hbar}L_z} = z$$

El spin S es un momento angular pues cumple con las reglas de conmutación y se comporta como un vector bajo rotaciones, así

$$[S_i, S_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}S_k$$

En \mathbb{C}^N habrá un vector $\mathbf{S} = (S_x, S_y, S_z)$ donde cada una de estas son matrices hermíticas $N \times N$. El spin se aplica para rotar funciones de spin. El operador de tales rotaciones es

$$e^{-i\frac{\theta}{\hbar}(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{S})}$$

En la Figura 18. se muestra la rotación de una masa alrededor de z , ubicada inicialmente en $(1,0,0)$ para tener luego $(0,-1,0)$; pero podemos rotar respecto al mismo eje al vector ligado a la partícula, cuyas componentes iniciales eran $(0,0,1)$ y luego de la transformación queda como $(-1,0,0)$. Esta última rotación es la que se denomina spin o momento angular intrínseco $SU(2)$ esta relacionado con el spin $\frac{1}{2}$ y se define como

$$SU(2) = \{U \mid U = e^{i\theta\hat{\mathbf{n}} \cdot \vec{\sigma}}\}$$

donde $S_i = \frac{\hbar}{2}\sigma_i$

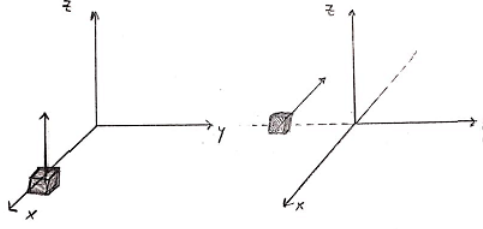


Figura 18: Rotación de spin. Tomado del curso de grupo de Lie de Javier García

1.9.5. Demostración de la regla de conmutación para el Momento Angular

Consideremos la ordenación cíclica i, j, k

$$\begin{aligned}
 [L_i, L_j] &= [r_j P_k - r_k P_j, r_k P_i - r_i P_k] \\
 &= [r_j P_k - r_k P_j, r_k P_i] - [r_j P_k - r_k P_j, r_i P_k] \\
 &= -[r_k P_i, r_j P_k - r_k P_j] + [r_k P_i, r_j P_k - r_k P_j] \\
 &= -\{[r_k P_i, r_j P_k] - [r_k P_i, r_k P_j]\} + \{[r_i P_k, r_j P_k] - [r_i P_k, r_k P_j]\} \\
 &= -\{[r_k P_i, r_j] P_k + r_j [r_k P_i, P_k]\} + \{[r_k P_i, r_k] P_j + r_k [r_k P_i, P_j]\} + \\
 &\quad \{[r_i P_k, r_j] P_k + r_j [r_i P_k, P_k]\} - \{[r_i P_k, r_k] P_j + r_k [r_i P_k, P_j]\}
 \end{aligned}$$

aplicando nuevamente la propiedad vamos a obtener conmutadores de la forma $[r_i, r_j] = 0$ y $[P_i, P_j] = 0$ por lo que haciendo la eliminación de estos de manera directa quedan

$$\begin{aligned}
 &= -\{r_k [P_i, r_j] P_k + r_j [r_k, P_k] P_i\} + \{r_k [P_i, r_k] P_j + r_k [r_k, P_j] P_i\} + \\
 &\quad \{r_i [P_k, r_j] P_k + r_j [r_i, P_k] P_k\} - \{r_i [P_k, r_k] P_j + r_k [r_i, P_j] P_k\}
 \end{aligned}$$

como $[r_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}$ entonces también se anulan todos los conmutadores cuyo $i = j$ así que obtenemos

$$[L_i, L_j] = -r_j [r_k, P_k] P_i - r_i [P_k, r_k] P_j = -r_j (i\hbar) P_i - r_i (-i\hbar) P_j$$

$$[L_i, L_j] = i\hbar(r_i P_j - r_j P_i) = i\hbar L_z$$

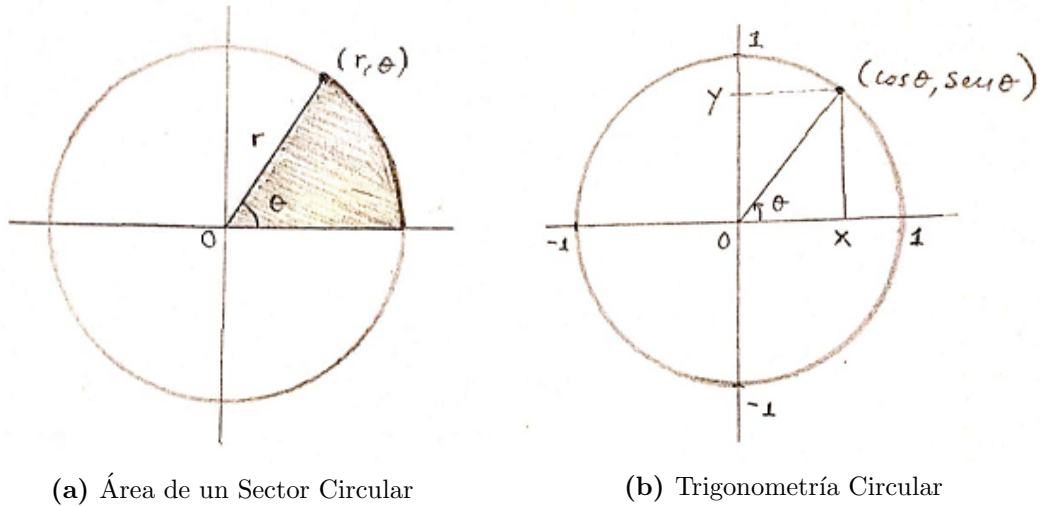


Figura 19: Círculo Unitario. Fuente propia

Veamos ahora que esto implica el resultado $[L_i, L_j] = -[L_j, L_i] = -i\hbar L_z$. Ahora si $i = j$ es evidente que $r_i P_i - r_i P_i = 0$ Reduciendo estas posibilidades en una notación queda

$$[L_i, L_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} L_k$$

1.10. Deducción de las Funciones Hiperbólicas a partir de la Hiperbólica Equilátera

Las funciones hiperbólicas se deducen de manera análoga sobre la hipérbola equilátera $x^2 - y^2 = 1$ como las funciones trigonométricas sobre el círculo unitario $x^2 + y^2 = 1$. El parámetro de las funciones trigonométricas es un ángulo (Ver Figura 19.). Recordemos ahora que un diferencial de área de un círculo es $dA = r dr d\theta$ luego el área es $A = \int_0^R \int_0^\theta r dr d\theta$; resolviendo la integral doble

$$A = \frac{1}{2} R^2 \theta$$

para el círculo unitario tenemos $A = \frac{1}{2} \theta$ luego es usual definir también el parámetro como el doble del área del sector circular. Esta interpretación va a ser análoga al caso hiperbólico.

Observe la Figura 20. El área de la región sombreada equivale al área del triángulo POX menos la integral bajo la curva de la función $y = \sqrt{x^2 - 1}$, llamemos a esta área

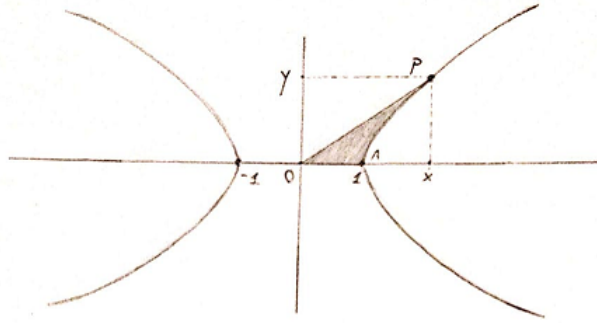


Figura 20: Hipérbola equilátera. Fuente propia

A_h que viene expresada matemáticamente como

$$A_h = \frac{1}{2}xy - \int_1^x \sqrt{x^2 - 1} dx$$

$$A_h = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 - 1} - \int_1^x \sqrt{x^2 - 1} dx$$

para simplificar resolvamos la integral indefinida haciendo un cambio de la variable de integración; sea $x = \sec \beta$, entonces $dx = \sec \beta \tan \beta d\beta$

$$\int \sqrt{x^2 - 1} dx = \int \sqrt{\sec^2 \beta - 1} (\sec \beta \tan \beta) d\beta$$

$$\int \tan^2 \beta \sec \beta d\beta = \int (\sec^3 \beta - \sec \beta) d\beta$$

resolvamos de forma separada cada una de éstas integrales, sea

$$\int \sec \beta d\beta = \int \sec \beta \frac{(\sec \beta + \tan \beta)}{(\sec \beta + \tan \beta)} d\beta = \int \frac{(\sec^2 \beta + \sec \beta \tan \beta)}{(\sec \beta + \tan \beta)} d\beta$$

y haciendo la sustitución $u = \sec \beta + \tan \beta$ vemos que tenemos una integral de la forma

$\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$, por lo tanto

$$\int \sec \beta = \ln|\sec \beta + \tan \beta| + C$$

Ahora resolviendo la otra integral por partes, $u = \sec \beta, du = \sec \beta \tan \beta d\beta$ y $dv =$

$$\sec^2 \beta d\beta, v = \tan \beta$$

$$\int \sec^3 \beta = \sec \beta \tan \beta - \int \sec \beta \tan^2 \beta d\beta$$

volviendo a aplicar algunas identidades trigonométricas

$$\int_1^x \sec^3 \beta = \sec \beta \tan \beta - \int \sec^3 \beta d\beta + \int \sec \beta d\beta$$

así que despejando

$$\int \sec^3 \beta = \frac{1}{2} [\sec \beta \tan \beta + \ln|\sec \beta + \tan \beta|] + C$$

de manera que

$$\int \sqrt{x^2 - 1} dx = \frac{1}{2} [\sec \beta \tan \beta - \ln|\sec \beta + \tan \beta|] + C$$

volviendo a la integral definida en las coordenadas originales

$$\int \sqrt{x^2 - 1} dx = \frac{1}{2} [x\sqrt{x^2 - 1} - \ln|x + \sqrt{x^2 - 1}|]_1^x$$

Por lo que el área de la región sombreada es

$$A_h = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 - 1} - \frac{1}{2} [x\sqrt{x^2 - 1} - \ln|x + \sqrt{x^2 - 1}|]$$

de aquí deducimos

$$A_h = \frac{1}{2} \ln|x + \sqrt{x^2 - 1}|$$

así que $2A_h = \ln|x + \sqrt{x^2 - 1}|$. Si queremos relacionar directamente la variable x con el área podemos expresar $e^{2A_h} = x + \sqrt{x^2 - 1}$ y para A_h negativo tendríamos $e^{-2A_h} = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}}$; sumando las exponenciales encontramos $e^{2A_h} + e^{-2A_h} = x + \sqrt{x^2 - 1} + \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}}$, multiplicando el numerador y el denominador por $x - \sqrt{x^2 - 1}$ deducimos que $e^{2A_h} + e^{-2A_h} = 2x$ por lo tanto

$$x = \frac{e^{2A_h} + e^{-2A_h}}{2}$$

es decir la abscisa queda definida como una función del área tal como se define $x = \cos \theta$ en

la trigonometría circular (teniendo en cuenta que la segunda interpretación está referida a un área). Para la ordenada tenemos $e^{2A_h} = y + \sqrt{1+y^2}$ y $e^{-2A_h} = \frac{1}{y + \sqrt{1+y^2}}$; haciendo lo mismo que para x tenemos a la ordenada como una nueva función del área de la forma

$$y = \frac{e^{2A_h} - e^{-2A_h}}{2}$$

redefinimos el parámetro y éstas nuevas funciones como

$$\cosh \omega = \frac{e^\omega + e^{-\omega}}{2} \quad ; \quad \sinh \omega = \frac{e^\omega - e^{-\omega}}{2}$$

cuyos nombres mantienen la analogía con las funciones trigonométricas circulares. El parámetro de las funciones hiperbólicas se definen entonces como el doble del área de la region AOP de la Figura 20.

Como la ecuación canónica de la hipérbola equilátera es $x^2 - y^2 = 1$ se deduce directamente la identidad $\cosh^2 \theta - \sinh^2 \theta = 1$ siendo $\tanh \theta = \frac{\sinh \theta}{\cosh \theta}$

1.11. La Ecuación de Onda no es Covariante ante las Transformaciones de Galileo

Para realizar este cálculo vamos a expresar la ecuación de onda tridimensional sólo para \mathbf{E}

$$\nabla^2 E - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0$$

Las ecuaciones de transformación galileana entre dos marcos inerciales son

$$x' = x - vt' \quad ; \quad y' = y \quad ; \quad z' = z \quad ; \quad t' = t$$

Aplicando la regla de la cadena obtenemos

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{\partial E}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial E}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial x} + \frac{\partial E}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial x} + \frac{\partial E}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial x}$$

de las mismas ecuaciones de transformación queda

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{\partial E}{\partial x'}$$

análogamente se hace lo mismo para

$$\frac{\partial E}{\partial y} = \frac{\partial E}{\partial y'} \quad ; \quad \frac{\partial E}{\partial z} = \frac{\partial E}{\partial z'}$$

Por otro lado la derivada total de E con respecto al tiempo es

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial E}{\partial x'} \frac{dx'}{dt} + \frac{\partial E}{\partial y'} \frac{dy'}{dt} + \frac{\partial E}{\partial z'} \frac{dz'}{dt} + \frac{\partial E}{\partial t'} \frac{dt'}{dt}$$

reduciéndose que

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -v \frac{\partial E}{\partial x'} + \frac{\partial E}{\partial t'}$$

volviendo a hacer las derivadas se encuentra que

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left[-v \frac{\partial E}{\partial x'} + \frac{\partial E}{\partial t'} \right]$$

Aplicando la derivada de un producto y la regla de la cadena puede comprobar que el resultado es

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 E}{\partial x'^2} - 2v \frac{\partial^2 E}{\partial t' \partial x'} + \frac{\partial^2 E}{\partial t'^2}$$

luego substituyendo

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \left[v^2 \frac{\partial^2 E}{\partial x'^2} - 2v \frac{\partial^2 E}{\partial t' \partial x'} + \frac{\partial^2 E}{\partial t'^2} \right] = 0$$

queda

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z'^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t'^2} + \frac{1}{c^2} \left[2v \frac{\partial^2 E}{\partial t' \partial x'} - v^2 \frac{\partial^2 E}{\partial x'^2} \right] = 0$$

Según éste resultado en las coordenadas de S' la ecuación de onda cambia su forma por un término que se suma, sin embargo S' y S son equivalentes y debe cumplirse el Principio de Relatividad.

1.12. Principio de Relatividad, Homogeneidad del Espacio y el Tiempo, Isotropía del Espacio

A continuación se cita textualmente del artículo de Levy-Léblond [14] las definiciones de los supuestos de la TER sin luz,

Principio de Relatividad: “I will take as a starting point the statement of the principle of relativity in a very general form: there exist an infinite continuous class of reference frames in space-time which are physically equivalent. In other words, the laws of physics take on the same form when referred to any one of these frames, and no physical effects can distinguish between them. This does not mean, of course, that physical quantities have the same value in every such reference frame: only the relations between them are invariant. The abstract principle of relativity thus a priori is open to many realizations as concrete *theories of the relativity*. A theory of relativity tell us how to relate two expressions of the same physical quantity as referred to two of these equivalent frames; such a theory may then be expressed exactly by the “transformation formulas” connecting different equivalent frames. A theory of relativity then restricts the possible forms of the physical laws which relate various physical quantities in one chosen frame; it requires the same relationship to hold in a different frame through the use of the transformation formulas. Because of well-known physical considerations, I find it convenient to call “inertial frames” and “inertial transformation” the equivalent reference frames corresponds to the validity of the principle of inertia, namely, that a physical object has no absolute state motion-or rest; for instance, a free body (with no “forces” acting on it) is characterized by an “inertial motion” which is not entirely determined, since it depends on “inertial conditions”-that is also to say, on the reference frame considered.” [14] (pp.271-272)”

Homogeneidad del Espacio y del Tiempo: “We assume first the space-time is *homogeneous*, in that it has “everywhere and everytime” the same properties. More precisely, the transformation properties of a spatiotemporal interval $(\Delta x, \Delta t)$ depend only on that interval and not on the location of its end points (in the considered reference frame). In other words, the transformed interval $(\Delta x', \Delta t')$ obtained through an inertial transformation is independent of these end points(...).” [14] (pp.272-273)

La homogeneidad del espacio no significa que el intervalo espacial de S y el de S' deban coincidir sino que Δx y $\Delta x'$ son independientes de la localización de los puntos en el

espacio. Con el tiempo cada observador en cualquier marco puede sincronizar su reloj de forma arbitraria, lo importante es el intervalo medido, por ejemplo 1s en S' no es igual a 1s en S , pero el segundo de cualquiera de estos marcos va a transcurrir uniformemente siempre y cuando se mantengan en movimiento rectilíneo uniforme.

Isotropía del Espacio: “We assume that space is nondirectional, so that both orientations of the space axis are physically equivalent. Suppose that (x, t) and (x', t') are two sets of coordinates of a given event related by an inertial transformation with parameter v . If the direction of space axis is arbitrary, $(-x, t)$ and $(-x', t')$ qualify as well for equivalent coordinates of the same event, and must also be related by an inertial transformation of the general form but depend on some parameter u , unknown for the time being (...).” [14](p.273)

1.13. Grupo de Poincaré

Las leyes de la física no dependen si los marcos están trasladados, rotados o si hay movimiento relativo; el caso general entonces debe incluir

- Movimiento relativo en todos los ejes espaciales
- Rotación de los ejes
- Traslación del origen de todas las coordenadas espaciales y temporales

El grupo que describe las transformaciones más generales de la TER es el Grupo de Poincaré. Tenemos aquí en total diez parámetros: tres traslaciones espaciales, una traslación temporal, tres ángulos de euler, tres velocidades relativas a cada eje. El grupo de Poincaré es el grupo más general de transformaciones lineales en el espacio-tiempo y tiene unos subgrupos asociados. Los boosts son un caso particular de un grupo más general [22].

La relatividad especial se geometriza en el plano de Minkowski que es un espacio plano 4-dimensional. El grupo de Poincaré incluye el movimiento más general que involucra rotaciones, traslaciones y los boost de Lorentz. Las transformaciones de Lorentz dejan invariante la métrica en el sentido de que $\Lambda^T g \Lambda = g$, donde Λ es una transformación que incluye una rotación y un boost, pero considerando las traslaciones obtenemos la

forma [22]

$$x' = \Lambda x + a$$

1.13.1. Demostración de que las Transformaciones de Lorentz forman un grupo

Se puede representar como $(\Lambda, 0)$ y cumplen las propiedades de grupo

$$(\Lambda_1, 0) \circ (\Lambda_2, 0) = (\Lambda_1 \Lambda_2, 0)$$

$$(\Lambda_1, 0) \circ ((\Lambda_2, 0) \circ (\Lambda_3, 0)) = (\Lambda_1, 0) \circ ((\Lambda_2, 0)) \circ (\Lambda_3, 0)$$

$$(\Lambda_1, 0) = (I, 0)$$

$$(\Lambda_1, 0)^{-1} = (\Lambda^{-1}, 0)$$

entonces $\Lambda : \Sigma \rightarrow \Sigma'$, o sea $x' = \Lambda x$. Éstas transformaciones son válidas siempre y cuando coincidan sus orígenes para $t = 0$. Λ tiene seis parámetros que son los tres ángulos de euler y tres posibles velocidades relativas; luego $\Lambda = \Lambda(v, \theta)$.

Una transformación es de Lorentz si deja invariante el producto interno minkowskiano. Así el grupo de Lorentz es el conjunto de todas las transformaciones que dejan invariante el intervalo espacio-temporal. Las transformaciones generales tienen la forma $\Lambda = e^{\mathbf{L}}$ donde \mathbf{L} es una matriz 4×4 , así $L = -\alpha \cdot \mathbf{G} - \sigma \cdot \mathbf{k}$, por lo tanto queda

$$\Lambda = e^{-\alpha \cdot \mathbf{G} - \sigma \cdot \mathbf{k}}$$

los parámetros α están asociados a la rotación de los ejes, los σ están asociados al movimiento de los ejes. \mathbf{G} y \mathbf{K} son los generadores de rotación y movimiento respectivamente [22].

1.13.2. Traslaciones en \mathbb{R}^4

Las traslaciones se pueden representar como $(1, a)$ donde $a \in \mathbb{R}$, las traslaciones en \mathbb{R}^4 forman un subgrupo del grupo de Poincaré llamado grupo de traslaciones donde a^μ , $\mu = 0, 1, 2, 3$ representa la traslación del origen por cada dimensión, aquí no hay

rotaciones ni movimientos relativos. Cumple la ley de composición de Poincaré

$$(1, a_1^\mu) \circ (1, a_2^\mu) = (1, a_1^\mu + a_2^\mu)$$

cumplen la asociativa

$$(1, a_1^\mu) \circ ((1, a_2^\mu) \circ (1, a_3^\mu)) = ((1, a_1^\mu) \circ (1, a_2^\mu)) \circ (1, a_3^\mu)$$

así como la existencia del elemento neutro existencia y del elemento inverso

$$(1, 0) \circ (1, a) = (1, a) \quad ; \quad (1, a^\mu)^{-1} = (1, -a^\mu)$$

bajo tales transformaciones, un cuadrivector toma la forma [22]

$$x'^\mu = 1x^\mu + a^\mu$$

Ésta transformación general se indica en notación tensorial como

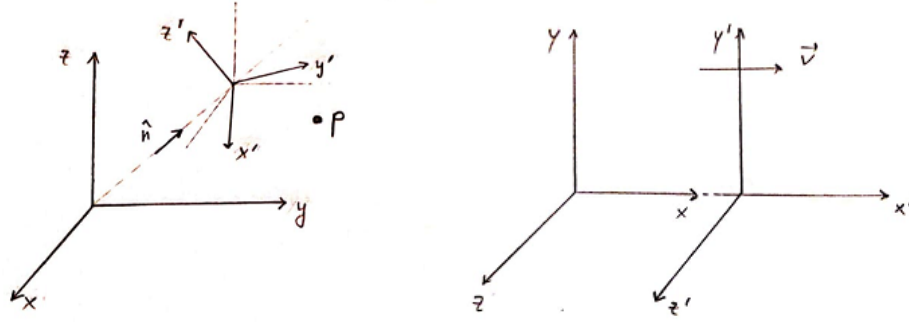
$$x'^\mu = \Lambda_\nu^\mu x^\nu + a^\nu$$

donde $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ siendo Λ_ν^μ la matriz de transformación de Lorentz general.

La representación de este grupo de transformaciones es (Λ, a) cuya ley de multiplicación $(\Lambda, a_1)(\Lambda, a_2) = (\Lambda\Lambda, a_1 + \Lambda a_2)$ con elemento neutro compuesto $(\Lambda, a) = (I, 0)$ y con elemento inverso $(\Lambda, a)^{-1} = (\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a)$. El hecho de que el grupo de Poincaré tenga un elemento neutro compuesto, implica que hay dos subgrupos que lo generan, esto puede ser expresado como $p = T \otimes L$ donde T es el grupo de traslaciones del espacio-tiempo y L es el grupo de las transformaciones de Lorentz, por esta relación es que se tiene un elemento neutro compuesto [22].

1.13.3. Desarrollo tradicional de la formalización de la Relatividad Especial

Las transformaciones de Lorentz son las correspondientes transformaciones de coordenadas entre dos sistemas coordenados que incluye rotaciones y/o movimiento de un marco de referencia respecto a otro con velocidad constante \mathbf{v} (Ver Figura 21a). Sea S' el



(a) Grupo de Lorentz. Conformado por Boost y Rotaciones (b) Movimiento relativo entre dos marcos de referencia inerciales.

Figura 21: Grupo de Lorentz. Fuente propia

marco de referencia que se mueve con velocidad constante \mathbf{v} con respecto a S a lo largo del eje x como se muestra en la Figura 21b. donde las coordenadas x y t medidas en cada marco inercial vienen relacionadas por

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} ; \quad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

para simplificar estas expresiones definimos $\beta = \frac{v}{c}$ y el factor de Lorentz γ definido como $\gamma = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}^{-1}$. En el espacio tiempo representaremos la coordenada temporal por $x^0 = ct$ y las demás coordenadas espaciales por $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$. Así las coordenadas quedan relacionadas por las siguientes ecuaciones de transformación

$$x^{0'} = \frac{x^0 - \frac{v}{c}x^1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} ; \quad x^{1'} = \frac{x^1 - \frac{v}{c}x^0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} ; \quad x^{2'} = x^2 ; \quad x^{3'} = x^3$$

Como el movimiento es sólo en dirección x^1 , llamaremos a estas transformaciones un boost o una transformación de Lorentz. En este caso tenemos un $x^1 - boost$; si el sistema se mueve en general en dirección $\hat{\mathbf{n}}$ tenemos un $x^n - boost$ [8].

Los boosts de Lorentz son solo desplazamientos respecto a un eje coordenado. Éstas transformaciones no involucran rotaciones. Una característica importante de estas transformaciones es que la coordenada temporal depende de la coordenada espacial y dado que no son independientes no es posible representarlo en un plano euclideo, luego la representación geométrica se hace en un pseudo-espacio euclídeo llamado el espacio-tiempo de Minkowski. En tal espacio se ubican los eventos mediante los cuadvectores posición.

La métrica viene dada por g y el espacio de Minkowski es de curvatura nula [22], [18].

De manera general el movimiento relativo en un n – *boost* se muestra en la Figura 22. donde la dirección $\hat{\mathbf{n}}$ en coordenadas esféricas es $\hat{\mathbf{n}} = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$. Esta transformación de un boost en general viene dada por

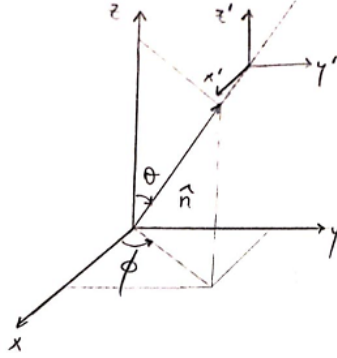


Figura 22: S' se mueve en la dirección $\hat{\mathbf{n}}$ con \mathbf{v} constante respecto a S . Fuente propia

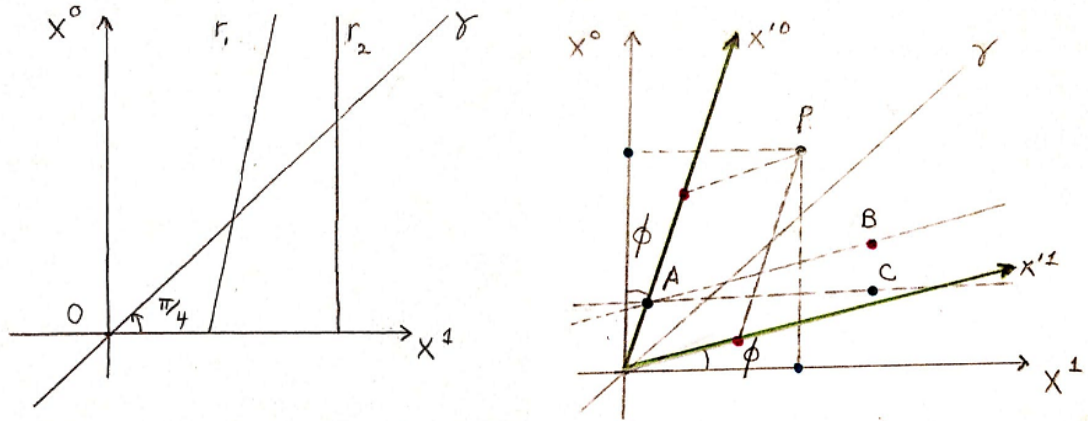
$$\Lambda = \exp[-\omega(n_1K_1 + n_2K_2 + n_3K_3)]$$

donde los n_i son las componentes del vector unitario que indica la dirección de movimiento. Las reglas de conmutación en el grupo de Lorentz son $[G_i, G_j] = \varepsilon_{ijk}G_k$ $[K^i, K^j] = -\varepsilon_{ijk}G_k$ $[G_i, K^j] = \varepsilon_{ijk}K^k$ para $i, j, k = 1, 2, 3$. Estas reglas pueden ser verificadas fácilmente calculando cada conmutador con los generadores hallados anteriormente. Note que según la segunda regla una rotación puede ser obtenida por dos boost. Los generadores $(K^1, K^2, K^3, G_1, G_2, G_3)$ forman un álgebra cerrada [8]. Matricialmente un x^1 – *boost* queda determinada como

$$\Lambda = e^{(\omega K^1)} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.13.4. Diagramas de Minkowski

Son representaciones geométricas bidimensionales del espacio-tiempo sobre los que se puede mostrar las consecuencias de la TER y los invariantes bajo las transformaciones



(a) Representación de MRU en el espacio-tiempo (b) Transformación de Lorentz entre dos marcos inerciales S y S'

Figura 23: Diagrama de Minkowski. Fuente propia

de Lorentz. En estos diagramas para tratar todas las componentes como medidas de longitud, se multiplica la variable temporal por la velocidad de la luz, quedando $x^0 = ct$. Las líneas rectas verticales están asociadas a cuerpos en reposo, y las oblicuas a movimientos con velocidad constante (Ver Figura 23a.). Sea ahora S' el marco que se mueve con velocidad constante respecto a S , esto se ve representado en el diagrama con la oblicuidad de los ejes x'^0 y x'^1 . Las rectas paralelas a los ejes x^0 y x^1 se refieren a los eventos que son simultáneos para el observador en S , por ejemplo A y C (Ver Figura 23b.) y las paralelas a los ejes x'^0 y x'^1 son los eventos simultáneos respecto a S' , por ejemplo A y B; de aquí es evidente la relatividad de la simultaneidad. (Ver también Figura 24.)

Sea M el espacio vectorial de Minkowski tal que

$$M = \{ \mathbf{x} = (x^0, x^1, x^2, x^3) \mid \mathbf{x} \text{ es un cuadrivector} \}$$

M tiene estructura de espacio vectorial dotado de las propiedades: $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in M$ y $\lambda \in \mathbb{R}$

a . $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x^0 + y^0, x^1 + y^1, x^2 + y^2, x^3 + y^3)$ o también $(x + y)^\mu = x^\mu + y^\mu$

b . $\lambda \mathbf{x} = (\lambda x^0, \lambda x^1, \lambda x^2, \lambda x^3)$ o también $(\lambda x)^\mu = \lambda x^\mu$

El producto interior entre los cuadrivectores es definido como

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x^0 y^0 - x^1 y^1 - x^2 y^2 - x^3 y^3 = \eta_{\mu\nu} x^\mu y^\nu$$

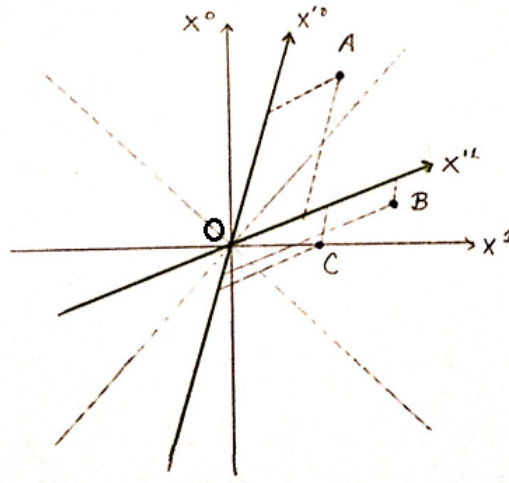


Figura 24: Relatividad de la Simultaneidad. El evento O y C son simultáneos para S pero no para S' . A ocurre después de O para ambos marcos inerciales. B ocurre después que O para S pero antes que O para S' . Tomado del curso de Relatividad de Javier García

siendo $\eta_{\mu\nu}$ el tensor métrico en el espacio de Minkowski. El producto interior de Minkowski cumple

- a . $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$ propiedad simétrica
- b . $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle$ propiedad de linealidad
- c . $\langle \lambda \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \lambda \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ propiedad de homogeneidad

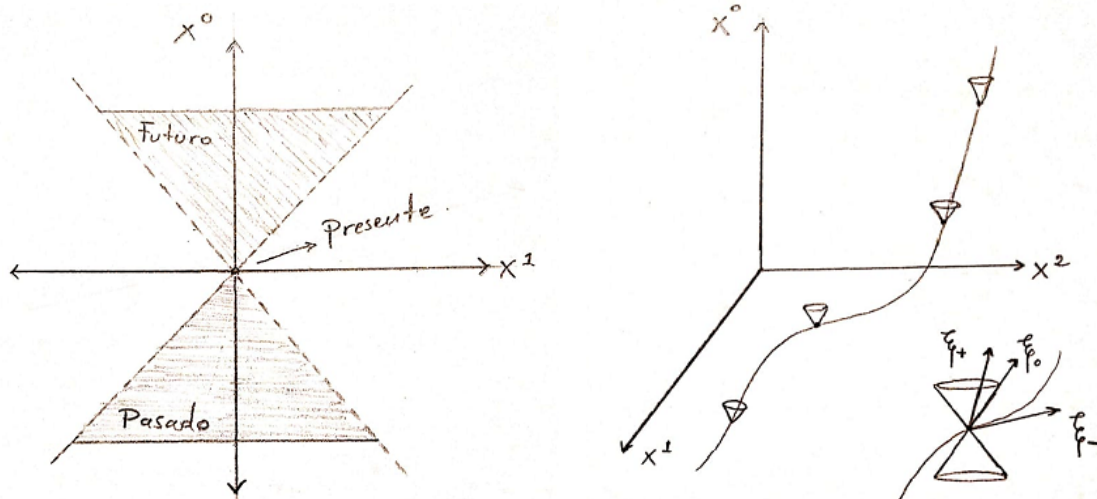
Se define la norma de un cuadrivector como

$$\|\xi\|^2 = \langle \xi, \xi \rangle = \eta_{\mu\nu} \xi^\mu \xi^\nu$$

desarrollando la notación tensorial se tiene $\|\xi\|^2 = (\xi^0)^2 - (\xi^1)^2 - (\xi^2)^2 - (\xi^3)^2$. Dependiendo de los valores de las componentes es posible obtener:

- a . Si $\|\xi\|^2 > 0$, es un cuadrivector como de tiempo, denotado (ξ_+)
- b . Si $\|\xi\|^2 = 0$, es un cuadrivector como de luz, denotado (ξ_0)
- c . Si $\|\xi\|^2 < 0$, es un cuadrivector como de espacio, denotado (ξ_-)

Así que el espacio de Minkowski está dividido en tres tipos de cuadrivectores: $\{\xi_+, \xi_0, \xi_-\}$. Esas regiones están divididas por los conos de luz (Ver Figura 25.).



(a) Cono de luz de un evento que ocurre en el origen del diagrama (b) Representación de los cuadvectores ξ_+ , ξ_0 , ξ_- y las líneas de universo

Figura 25: Conos de Luz y líneas de universo. Fuente propia

1.13.5. Identidades de la norma de los cuadvectores

$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in M$ se cumple

$$a \quad \|\mathbf{x} \pm \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 \pm 2\mathbf{x}\mathbf{y}$$

$$b \quad \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = 2(\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2)$$

$$c \quad \|(\mathbf{x} + \mathbf{y})(\mathbf{x} - \mathbf{y})\| = \|\mathbf{x}\|^2 - \|\mathbf{y}\|^2$$

1.13.6. Estructura Causal

Se define como línea del universo a aquellas líneas que representan el movimiento de un evento en el espacio-tiempo (Ver Figura 25b.). Definamos en la línea de universo un evento en cierto instante cuyo cuadvector es $\xi = (ct, x^1(t), x^2(t), x^3(t))$, derivando respecto al tiempo obtenemos el cuadvector $\dot{\xi} = (c, \dot{x}^1(t), \dot{x}^2(t), \dot{x}^3(t))$ que será tangente a la línea de universo. Como el módulo de la velocidad clásica es $\|v\|^2 = \dot{x}^1(t)^2 + \dot{x}^2(t)^2 + \dot{x}^3(t)^2$ tenemos que $\|\dot{\xi}\|^2 = c^2 - v^2$. Si ξ es como de tiempo tenemos que $c > v$, es decir que los cuadvectores están por dentro del cono de luz. Si el cuadvector es como de luz, tenemos que $c = v$ y está sobre la superficie del cono. Si es como de espacio $c < v$, lo que hace que el cudrивector este por fuera del cono. (Ver Figura 25b.).

Sean dos eventos en el espacio-tiempo cuyos cuadvectores son P_1 y P_2 , entonces

$\Delta S_{P_2-P_1}$ es el intervalo espacio temporal entre ambos. Si $||\Delta S||^2 > 0$ entonces $v < c$, por lo que los eventos están conectados causalmente, es decir que P_2 está dentro del cono de luz de P_1 . Si $||\Delta S||^2 = 0$ entonces $v = c$, por lo que también hay una relación causal, luego P_2 está sobre el cono de luz. Si $||\Delta S||^2 < 0$ entonces $v > c$, por lo que es imposible que los eventos estén conectados causalmente, por lo tanto P_2 está por fuera del cono de luz.

Un intervalo espacio-temporal infinitesimal viene dado por

$$dS^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2$$

$$dS^2 = \eta_{\mu\nu}(dx^\mu)(dx^\nu)$$

asi que

$$S = \int_q^p \sqrt{\eta_{\mu\nu}(dx^\mu)^2(dx^\nu)}$$

podemos cambiar la signatura haciendo

$$dS^2 = -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2$$

como $x^0 = ct$ si hacemos $x^0 = ict$ tenemos

$$dS^2 = (dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2$$

de esta manera el espacio de Minkowski es representable en el espacio euclidiano.

Sea $\gamma = \cosh \phi$ y $\gamma\beta = \sinh \phi$; $\beta = \tanh \phi = \frac{v}{c}$ además se tiene que $i \sinh \phi = \sin i\phi$, $\cosh \phi = \cos i\phi$, $\tanh \phi = \tan i\phi$. Retomando las transformaciones $x'^0 = \gamma x^0 - \gamma\beta x^1$ y $x'^1 = -\gamma\beta x^0 + \gamma x^1$, hacemos las respectivas sustituciones

$$x'^0 = x^0 \cos i\phi - x^1 \sin i\phi ; x'^1 = -x^0 \sin i\phi + x^1 \cos i\phi$$

1.13.7. Álgebra de Lie asociada a los generadores en el grupo de Poincaré

Cualquier movimiento en el espacio-tiempo es dada por los siguientes generadores: **K** los generadores en el espacio-tiempo, **P** los generadores de traslación y **J** los generadores

de rotación espacial. Siendo g la métrica minkowskiana y ε_{ijk} el tensor de Levi-Civita, puede demostrar fácilmente las siguientes reglas de conmutación asociadas al grupo de Poincaré

$$[P_i, P_j] = 0 \quad ; \quad [P_i, P_0] = 0 \quad ; \quad [G_i, P_n] = \varepsilon_{ink} P_k$$

$$[P_i, P_0] = 0 \quad ; \quad [K_i, P_k] = \eta_{in} P_0 \quad ; \quad [K_i, P_0] = -P_i$$

$$[G_i, G_j] = \varepsilon_{ijk} G_k \quad ; \quad [G_i, K_j] = \varepsilon_{ijk} K_k \quad ; \quad [K_i, K_j] = \varepsilon_{ijk} K_k$$

[22].

1.14. Otras Formas de Interpretación

Un breve repaso histórico sobre como se ha venido concibiendo la naturaleza de la luz sera útil para poder comprender todos los resultados hallados hasta el momento.

Desde que T. Young “demostró” la naturaleza ondulatoria de la Luz en 1801, en analogía con las ondas mecánicas, los físicos propusieron que la luz debía propagarse a través de un medio llamado el éter. Bajo esas consideraciones se llevaron a cabo varios experimentos como el de Michelson y Morley, el de Trouton y Noble, el experimento de Arago, entre otros; para detectar el movimiento de la Tierra con respecto al éter. Se pensaba que el movimiento de la Tierra produciría un “viento de éter” y en consecuencia esto generaría cambios en la velocidad de la luz que esperaban detectar por medios ópticos o electromagnéticos [19]. Este análisis se puede comprender en analogía a la física que describe el movimiento de un cuerpo inmerso en un fluido. Sin embargo, ninguno de los experimentos pudieron detectar tal variación! Fresnel introdujo el arrastre parcial del éter para explicar los resultados negativos de los experimentos, conservando la idea del éter; tuvo gran éxito en sus resultados por lo que parecía que él había resuelto el problema. No fue sino hasta que A. Einstein considerara la idea del éter como fútil y bajo unos echos puramente experimentales, como se ve en las primeras páginas de su artículo, dedujo que la invarianza de la velocidad de la luz debe ser un postulado.

¿Es trivial para el lector que la velocidad de la luz sea invariante en el vacío para cualquier marco inercial? si su respuesta es un si, debe considerar que las ondas electromagnéticas no necesitan de un medio para su propagación -desde que Einstein desechó la idea del éter- y que por lo tanto no es una onda mecánica, cuya velocidad de propaga-

ción si depende sólo del medio y no de la fuente [II], luego aún sigue siendo inadmisibles esa invariancia. Acorde a la teoría electromagnética de Maxwell, la luz es el resultado de la oscilación armónica de un campo eléctrico y magnético, en la que usted entiende el concepto “campo” como una perturbación del espacio. Aunque pretendamos que entendemos bien esto, veamos el importante resultado de Maxwell, en el que la velocidad de la luz depende de dos constantes, la permitividad eléctrica ϵ_0 y la permeabilidad magnética μ_0 del espacio vacío, matemáticamente relacionados como

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

Pero si entendemos el vacío como el mismo espacio sin nada, ¿Cómo algo que no es nada tiene cualidades físicas? ya que la teoría de Maxwell está asociando intrínsecamente unas propiedades físicas al espacio, en específico que sea susceptible a la electricidad y al magnetismo. Y más aún, si pensamos en la teoría general de la Relatividad, el espacio también es susceptible de deformarse por la presencia de masa, es decir que el espacio no es un concepto *a priori* para organizar y entender nuestro mundo, como lo suponía Kant, sino que desde este punto de vista el espacio tiene una realidad física.

Aunado a ello, podemos cuestionar bajo qué perspectiva Einstein pensaba en la propagación de la luz, ya que publicó unos meses antes de que apareciera la TER el artículo *Concerning an heuristic point of view toward the emission and transformation of light*; en el que se pierde la concepción ondulatoria clásica de la luz, pues acepta su dualidad onda-partícula y da sentido a la hipótesis de Planck $E = h\nu$ explicando el efecto fotoeléctrico.

Ahora hagamos el siguiente razonamiento, desde el enfoque clásico la luz se propaga perpendicularmente a la oscilación de E y B , luego tenemos que las ondas electromagnéticas son ondas armónicas. Con esta característica se cumple

$$\lambda = cT = \frac{c}{f}$$

tomando E como referencia, este campo oscila armónicamente (Ver Figura 26). Teniendo en cuenta que la dilatación del tiempo y la contracción de la longitud son consecuencias de la TER cuando se observan movimientos paralelos a la dirección de movimiento del

marco de referencial, es decir que movimientos perpendiculares a S y S' los efectos de la relatividad son nulos y veríamos que ambos coincidirían en sus mediciones. Quizás por ello, como lo imaginó Einstein, ir detrás de un rayo de luz no puede hacer variar su velocidad.

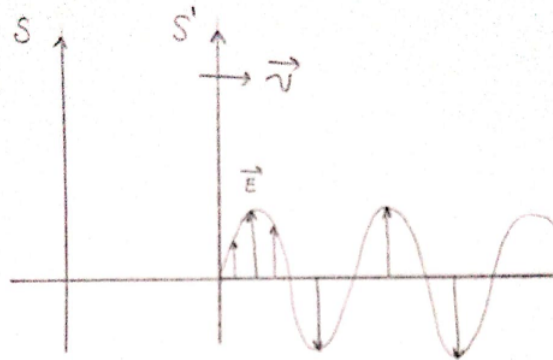


Figura 26: Oscilación Armónica del campo eléctrico. Fuente propia

Con lo dicho anteriormente, tenemos que E oscila armónicamente con período T , y dado que la frecuencia de oscilación está relacionada con la velocidad de propagación de la onda por la ecuación $c = \lambda f$. Pensemos ahora en un oscilador armónico que solo emite o absorbe ciertos paquetes de energía $E = h\nu$; se obtiene $c = \lambda \frac{E}{h}$; y si asociamos el resultado de la TER para la luz en la que su velocidad vendría dada por $c = \frac{E}{p}$, tenemos que sustituyendo llegamos a

$$p = \frac{h}{\lambda}$$

que es la hipótesis de Broglie. Es decir que de una interpretación clásica, más una relativista, más una cuántica se deduce el comportamiento dual de luz.

Estos problemas no se hacen evidentes en los textos, pero cuando reflexionamos en torno a la fenomenología de la TER aparecen muchas preguntas, contradicciones, etc. La relatividad no comenzó y terminó en 1905 sino que es necesario seguir pensando en ella porque es base de teorías físicas contemporáneas.

Bibliografía

- [1] Alonso, M. and Finn, E. J. (1970). *Campos y Ondas*, volume 2. Fondo Educativo Interamericano, 1st edition.
- [2] Anderson, J. W. (2005). *Hyperbolic Geometry*. Springer Undergraduate Mathematics Series. Springer, 2nd edition.
- [3] Blumenthal, L. M. (1965). *Geometría Axiomática*, chapter I, pages 3–23.
- [4] Cabrera, B. (1986). *Principio de Relatividad: Sus fundamentos experimentales y filosóficos y su evolución histórica*.
- [5] Cordero, J. B. B. (1995). lobachevski descubridor de la geometría hiperbólica. *Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones*, 2(1):2737.
- [6] Einstein, A. (1905). Zur Elektrodynamik bewegter Körper. (German) [On the electrodynamics of moving bodies]. *Annalen der Physik*, 322(10):891–921.
- [7] Gao, S. (2017). Relativity without light: A further suggestion. Research Center for Philosophy of Science and Technology, Shanxi University.
- [8] García, J. (2017). Grupos de lie. Serie de 17 capítulos.
- [9] Goldstein, H. (1950). *Mecánica Clásica*, chapter IV, pages 161–226.
- [10] Kennedy, R. J. (1935). The constancy of the velocity of light. *Physical Review*, 47:533–535.
- [11] Klein, F. (2006). *Lecciones sobre el desarrollo de la matemática en el siglo XIX*. Editorial Crítica: Fundación Iberdrola, traducción de José Luis Arántegui.
- [12] Lee, A. R. and Kalotas, T. M. (1975). Lorentz transformation from the first postulate. *American Journal of Physics*, 43(5):434–437.
- [13] Lee, A. R. and Kalotas, T. M. (1978). On the constancy of the velocity of light. *Foundations of Physics*, 8(7/8):603–607.
- [14] Levy-Léblond, J.-M. (1976). One more derivation of the lorentz transformation. *American Journal of Physics*, 44(3):271–277.
- [15] Medina, J. I. and Luque, C. J. (2008). La geometría de minkowski a partir del grupo de lorentz. *Memorias XVIII encuentro de geometría y VI de aritmética*, pages 513–531.
- [16] Mermin, N. D. (1984). Relativity without light. *American Journal of Physics*, 52(2):119–124.

-
- [17] Ortega, E. R. (1994). Simetrías en la teoría de la relatividad especial. trabajo de grado, Universidad pedagógica nacional. Asesor: Plamen Neichev Nechev.
- [18] Pareja, A. Y. S. (2014). Análisis introductorio para la comprensión del segundo postulado de la teoría especial de la relatividad. trabajo de grado, Universidad Pedagógica Nacional. Asesor: María Mercedes Ayala.
- [19] Ron, J. M. S. (1983). *El origen y desarrollo de la relatividad*. Alianza Editorial.
- [20] Rotman, J. J. (1995). *An Introduction to the Theory of Groups*. Graduate Texts in Mathematics 148. Springer-Verlag New York, 4 edition.
- [21] Rovelli, C. (2015). *La realidad no es lo que parece. La estructura elemental de las cosas*. TusQuest.
- [22] Sierra, Y. F. P. (2015). Introducción al estudio de la t.e.r. por medio del formalismo de la teoría de grupos. trabajo de grado, Universidad Pedagógica Nacional. Asesor: Yesid Cruz Bonilla.