UNA COMUNIDAD DE DISCURSO EN LA CLASE DE GEOMETRÍA, APOYADA POR LA TECNOLOGÍA DIGITAL Y LA GESTIÓN DEL PROFESOR

WILLIAM ANDRÉS CÁRDENAS
MARÍA FERNANDA CASTRO SABOGAL

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ, D.C.
2019

UNA COMUNIDAD DE DISCURSO EN LA CLASE DE GEOMETRÍA, APOYADA POR LA TECNOLOGÍA DIGITAL Y LA GESTIÓN DEL PROFESOR

Autores:
William Andrés Cárdenas
María Fernanda Castro Sabogal

TRABAJO DE GRADO PARA OPTAR POR EL TÍTULO DE MAGISTER EN DOCENCIA DE LAS MATEMÁTICAS

Directora:
Claudia Vargas Guerrero
Profesora Departamento de Matemáticas

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ, D.C.
2019

Para todos los efectos, declaramos que el presente trabajo es original y de nuestra total autoría; en aquellos casos en los cuales hemos requerido del trabajo de otros autores o investigadores, se han dado los respectivos créditos.

AGRADECIMIENTOS

A nuestra familia por acompañarnos en este proceso de aprendizaje y por su apoyo incondicional y sincero.

A la profesora Claudia Marcela Vargas por su colaboración, orientaciones y participación en esta investigación. Su trabajo y constancia nos permitió consolidar el estudio y aportó significativamente a nuestra formación.

A la profesora Leonor Camargo Uribe por su valiosa ayuda en la construcción del anteproyecto, registro de los datos y elaboración del capítulo de metodología. Su integralidad y profesionalismo son un ejemplo para seguir.

Al grupo de investigación *Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría* por su constante apoyo en la toma de los datos y transcripción de estos.

A los estudiantes del Instituto Pedagógico Nacional por su colaboración y espontaneidad. Sus intervenciones nos hicieron más conscientes de la importancia de consolidar comunidades de discurso en nuestras clases de matemáticas.

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
Educadora de educadores

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

ACTA DE VALORACIÓN DE TRABAJO DE GRADO

Escuchada la sustentación del Trabajo de Grado titulado ***Una comunidad de discurso en la clase de geometría, apoyada por la tecnología digital y la gestión del profesor***, presentado por los estudiantes:

William Andrés Cárdenas, Cód. 2018185021, CC. 1014223989
María Fernanda Castro Sabogal, Cód. 2018185004, CC. 1020746277

como requisito parcial para optar al título de **Magíster en Docencia de la Matemática** y analizado el proceso seguido por los estudiantes en la elaboración del trabajo y evaluada la calidad del escrito final, se le asigna la calificación de **Aprobada,** con cuarenta y tres (43) puntos.

Observaciones:

En constancia se firma a los 24 días del mes de febrero de 2020.

JURADOS

Director del Trabajo: Profesora: CLAUDIA VARGAS GUERRERO (UPN)

Jurados:

Profesor: ÓSCAR JAVIER MOLINA (UPN)

Profesor: ALBERTO DE JESÚS DONADO (UPN)

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de Grado
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento	UNA COMUNIDAD DE DISCURSO EN LA CLASE DE GEOMETRÍA, APOYADA POR LA TECNOLOGÍA DIGITAL Y LA GESTIÓN DEL PROFESOR
Autor(es)	Cárdenas, William Andrés y Castro Sabogal, María Fernanda.
Director	Vargas Guerrero, Claudia Marcela.
Publicación	Bogotá D. C., Universidad Pedagógica Nacional. 2019. 90 p.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional. Facultad de Ciencia y Tecnología. Departamento de Matemáticas.
Palabras Claves	DISCURSO MATEMÁTICO, GESTIÓN DEL PROFESOR, GEOMETRÍA DINÁMICA.

2. Descripción
Este trabajo de grado tiene como propósito presentar el estudio de prácticas discursivas no usuales en la clase de geometría, exhibiendo algunas acciones que realiza un profesor con el apoyo de geometría dinámica, para promover en estudiantes de grado sexto el desarrollo del discurso matemático. Para ello, se adopta la estrategia investigativa Basada en Prácticas Usuales (Lesh y Kelly, 2000). El marco de referencia de la investigación incluye una caracterización de discurso matemático propuesta por Sfard (2008), y resultados de investigaciones que han identificado acciones del profesor para promoverlo (Goos, 1996; 2000) Mortimer y Scott (2003) y Quaranta y Tarasow (2004). Asimismo, se muestra la relación entre los sistemas de geometría dinámica (SGD) y el desarrollo del discurso. El análisis de los datos recolectados pone en evidencia aspectos discursivos de los estudiantes y las acciones del profesor que permiten un avance de estos.

3. Fuentes
Las referencias consultadas en el desarrollo de la investigación reportada en este documento son: Alrø, H. y Skovsmose, O. (2012). Aprendizaje dialógico en la investigación colaborativa. En P. Valero y O. Skovsmose (Eds.), *Educación matemática crítica. Una visión sociopolítica del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas* (pp. 149-171). Bogotá: una empresa docente Barwell R. (2016) Formal and informal mathematical discourses: Bakhtin and Vygotsky, dialogue and dialectic *Educational Studies in Mathematics 92/3,* 331-345. Baxter, J. y Williams, S. (2010). Social and analytic scaffolding in middle school mathematics: managing the dilemma of telling. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *13,*7–26. Berger, M. (2011). Using mathematical discourse to understand students' activities when using GeoGebra. *Proceeding of PME 35,* 2, 37–144. Brendefur, J., y Frykholm, J. (2000). Promoting mathematical communication in the classroom: Two preservice teachers conceptions and practices. *Journal of Mathematics Teacher Education,* *3*(2), 125-153, https://doi.org/10.1023/A:1009947032694. Clarke, D., Xu, L. H. y Wan, M. E. V. (2013). Spoken mathematics as an instructional strategy. En B. Kaur, G. Anthony, M. Ohtani y D. Clarke (Eds.), *Student voice in mathematics classrooms around the world* (pp. 13-31). Rotterdam: Sense Publishers. Chazam. D y Ball, D. (1999). *Beyond exhortations not to tell: The teacher's role in discussion-intensive mathematics clases.* Drijvers, P., Ball, L., Barzel, B., Heid, K., Cao, Y., & Maschietto, M. (2016). Uses of technology in lower secondary mathematics education: A concise topical survey. Cham: Springer. Gavilán, J., Sánchez-Matamoros, G. y Escudero, I. (2014). Aprender a definir en Matemáticas: estudio desde una perspectiva sociocultural. *Enseñanza de las Ciencias 32*(2), 529-550. Goos, M. (1996). Making Sense of Mathematics: The Teacher's Role in Establishing a Classroom Community of Practice. Goos, M. (2004). Learning Mathematics in a Classroom Community of Inquiry. *Journal for Research in Mathematics Education*, *35*, 258-291. Goos, M., Galbraith, P. y Renshaw, P. (2002). Socially mediated metacognition: creating collaborative zones of proximal development in small group problem solving. *Educational Studies in Mathematics, 49*, 193–223. Instituto Pedagógico Nacional. (2018). *Proyecto Educativo Institucional*. Documento en proceso de evaluación.

Krummheuer, G. (2012). El aprendizaje matemático como participación en procesos de argumentación colectiva. En N. Planas (ed.). *Teoría, crítica y práctica de la educación matemática*. Barcelona: Graó, pp. 61-79.

Lesh, R. y ,Kelly, A. (2000). Multitiered teaching experiments. En A. Kellyy R. Lesh (Eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and ScienceEducation*. N.J: Lawrence Erlbaum Associates, Inc., capítulo 9, 197-230.

Mariotti, M. A. (2009). Artifacts and signs after a Vygotskian perspective: The role of the teacher. *ZDM*, *41*(4), 427-440.

MEN (1998). *Lineamientos Curriculares en Matemáticas*. Bogota: Ministerio de Educación Nacional.

MEN (1999). *Nuevas Tecnologías y Currículo de Matemáticas*. Bogota: Ministerio de Educación Nacional.

Mortimer, E. F. y Scott, P. H. (2003). Meaning making in secondary science classrooms. Maidenhead: Open University Press.

Nussbaum, E. M. (2008). Collaborative discourse, argumentation, and learning: Preface and literature review. *Contemporary Educational Psychology*, 33(3), 345-359.

Quaranta, M., y Tarasow, P. (2004). Validación y producción de conocimientos sobre las interpretaciones numéricas. *Relime*. 219-233.

Radford, L. y Barwell, R. (2016). Language in mathematics education research. En Á. Gutiérrez, G. C. Leder y P. Boero (Eds.), *The second handbook of research on the psychology of mathematics education: The journey continues* (pp. 275-313). Rotterdam: Sense Publishers.

Schacht, F. (2017). Between the conceptual and the signified: how language changes when using dynamic geometry software for construction tasks. *Digital Experiences in Mathematics Education, Online first*. doi: 10.1007/s40751-017-0037-9

Sfard, A. (1996). On acquisition metaphor and participation metaphor for the mathematics learning. En C. Alsina, J.M. Álvarez, B. Hodgson, C. Laborde, y A. Pérez (Eds.), *8th International Congress on Mathematical Education. Selected Lectures*. Sevilla, 14-21 de julio. Traducción realizada por Patricia Inés Perry.

Sfard, A. (2008). Thinking as communicating. Human development, the growth of discourses, and mathematizing. New York: Cambridge University Press.

Sinclair, N. y Moss, J. (2012). The more it changes, the more it becomes the same: The development of the routine of shape identification in dynamic geometry environment. *International Journal of Educational Research*, 51-52, 28-44.

Sinclair, N., Moss, J., & Jones, K. (2010). Developing geometric discourses using DGS in K-3. *Proceeding of PME 34*, 4, 185–192.

Sinclair, N., y Yurita, V. (2008). To be or to become: how dynamic geometry changes discourse. *Research in Mathematics Education*, *10*(2), 135-150.

Swars, S. L. y Meyers, B. (2014). Low and high achieving sixth grade students' access to participation during mathematics discourse. *The Elementary School Journal*, *115*(1), 97-123.

Yu, P., and J.E. Barrett. 2002. Shapes, actions, and relationships: A semiotic investigation of student discourse in a dynamic geometric environment. *Proceedings of the TwentyFourth Conference of PME-NA*, 775 - 784. Columbus, OH: Clearing House for Science, mathematics, and Environmental Education.

4. Contenidos

El documento está estructurado en seis capítulos. En el primero presentamos la justificación de la investigación, el planteamiento del problema, la pregunta de investigación, los objetivos y los antecedentes. En el segundo exponemos el marco teórico que fundamenta el estudio, en el cual hacemos una conceptualización del aprendizaje de las matemáticas y su relación con el discurso, exhibimos algunas acciones del profesor que favorecen el desarrollo del discurso y mostramos cómo los sistemas de geometría dinámica apoyan el desarrollo del discurso matemático. En el tercero hacemos referencia a los aspectos metodológicos como: la estrategia investigativa, el contexto, la construcción de los datos y la herramienta analítica. En el cuarto exhibimos el análisis de los datos teniendo en cuenta las categorías construidas. En los últimos dos capítulos, sintetizamos los resultados obtenidos y reportamos las conclusiones de la investigación.

5. Metodología

Adoptamos la estrategia investigativa “basada en prácticas usuales” (Lesh y Kelly, 2000). En el desarrollo del estudio, registramos y transcribimos cuatro sesiones de clase de geometría, realizadas con un grupo de estudiantes de grado sexto del Instituto Pedagógico Nacional (IPN) en el primer semestre del 2018. La lectura de las transcripciones nos permitió identificar tres narrativas principales sobre las cuales se desarrollaron las sesiones observadas: la definición de colinealidad, la definición de equidistancia y el procedimiento para construir un triángulo isósceles. Por ello, los datos analizados corresponden a fragmentos de las transcripciones en los cuales se registran conversaciones públicas entre estudiantes y profesores o entre estudiantes, relacionadas con estas tres narrativas y en las cuales, el uso de tecnología digital fue preponderante.

6. Conclusiones

A partir de la síntesis de resultados, es posible evidenciar que la categoría de análisis que se emplea con mayor frecuencia es *utiliza las ideas de los estudiantes para establecer discusiones entre ellos utilizando el programa para apoyar sus ideas*. Es posible observar qué en 52 ocasiones, el profesor emplea las acciones de esta categoría con la intención de generar un cambio en el discurso, lo cual representa un 36.88% comparado con las otras categorías. Dentro de esta categoría, la acción más recurrente del profesor fue *solicita a los* *estudiantes cuestionar los aportes realizados por sus compañeros* (A. 3.4), representada por un 28.8%. Aunque esta acción, en su mayoría de ocasiones, estuvo dirigida a favorecer el desarrollo de las narrativas, es la acción con mayor recurrencia en los mediadores visuales. La segunda acción más empleada en esta categoría fue *utiliza o parafrasea la respuesta de un estudiante con el propósito de generar discusiones* (A. 3.6), con un porcentaje del 23.1%. Al igual que en la acción anterior, la mayoría de las ocasiones, estuvo enfocada en la construcción de una narrativa.

Por otro lado, evidenciamos algunas acciones que el profesor no realizó, las cuales mencionamos a continuación, aludiendo a algunas razones por las cuales no se evidenciaron en el análisis y caracterización de la gestión del profesor.

- Retoma las ideas de los estudiantes en las discusiones grupales y les da un valor de verdad a las mismas: En constantes ocasiones el profesor pedía a los estudiantes que ellos mismos evaluaran una propuesta o afirmación realizada por un integrante de la clase, procurando no aceptar una propuesta como verdadera hasta que las ideas matemáticas asociadas a las narrativas institucionalizadas se desarrollaran.
- Retoma las ideas que un(os) estudiante(s) ha(n) socializado y rescata su pertinencia: Esta acción no se evidencia, debido a que cuando el profesor retoma las ideas de los estudiantes, lo hace parafraseando o resaltando la idea, puesto que en ocasiones estas ideas no fueron claras al momento de presentarlas.
- Propone nuevas variables que pretenden cuestionar una relación de dependencia: Consideramos que en los momentos en que el profesor realizaba la acción de resaltar el punto crítico de la conversación (A.3.8), en ocasiones proponía nuevas variables que pretendían cuestionar una relación de dependencia. Por ejemplo, en el fragmento 8, intervención [326], cuando el profesor pregunta: *¿qué objeto, cuando los puntos están alineados, por ejemplo, estos tres que están acá alineados (señala los punto A, C y B* Figura 11*), qué objeto geométrico yo tengo ahí?*
- Cuestiona la validez de las afirmaciones solicitando contraejemplos a los estudiantes: Esta acción ocurrió en repetidas ocasiones en la segunda clase observada (clase 10 de mayo). Sin embargo, los fragmentos en los que ocurrieron no hicieron parte de los datos investigativos seleccionados.

Aunque el profesor realizó varios esfuerzos para lograr que todos los estudiantes hablen y participen de la clase, es posible evidenciar en las transcripciones que el 70% de los estudiantes intervienen en menos de treinta oportunidades. Mientras que un 10% de ellos participaron de sesenta a noventa veces, y el 16.66% intervino en más de noventa ocasiones. A partir de estos porcentajes de participación y teniendo en cuenta que tan solo observamos cuatro clases, no es posible evidenciar cambios en el discurso de la totalidad de los estudiantes, por tanto los resultados presentados en la investigación tienen una restricción. Sin embargo, identificamos acciones repetitivas del profesor para promover cambios en el discurso de los estudiantes, apoyándose en el SGD, que buscan que el estudiante empiece a reconocer que es lo que se debe comunicar cuando el profesor le pide que solucione un problema.

Elaborado por:	Cárdenas, William Andrés; Castro Sabogal, María Fernanda.
Revisado por:	Vargas Guerrero, Claudia Marcela

Fecha de elaboración del Resumen:	13	02	2020

TABLA DE CONTENIDO

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE FIGURAS

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo de grado está enmarcado en la línea de investigación "Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría", del grupo Didáctica de la Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional (UPN). Adicionalmente, se enmarca en el énfasis Tecnología Digital y Educación Matemática propuesto por el programa de Maestría en Docencia de la Matemática, para la cohorte 2018-1. En este documento, presentamos una investigación que tiene como objetivo identificar estrategias del profesor que, apoyadas en el uso de un sistema de geometría dinámica (SGD), buscan generar cambios en el discurso matemático de los estudiantes. La inquietud inicial surge porque en las prácticas de los autores, y en algunas investigaciones (v.g. Alrø y Skovsmose, 2012; Krummheuer, 2012), se ha evidenciado que, en las clases de geometría, los estudiantes pocas veces expresan y defienden sus ideas, prevalece el modelo de comunicación bidireccional y las tecnologías digitales pocas veces son aprovechadas para impulsar la comunicación.

Para desarrollar esta investigación, tomamos como referente los planteamientos de Sfard (2008) para conceptualizar el aprendizaje de las matemáticas como un cambio en el discurso. Posteriormente, identificamos en la literatura algunos referentes relacionados con las acciones del profesor que promueven la comunicación en la clase de matemáticas (v.g. Goos, 1996, 2002, 2004; Quaranta y Tarasow, 2004; Mortimer y Scott, 2003). Adicionalmente, en esta revisión, rastreamos elementos teóricos concernientes a aspectos discursivos que se presentan debido al uso de un SGD y los signos que emergen (v.g. Mariotti, 2009; Schacht, 2017).

En la investigación, se adoptó la estrategia investigativa "basada en prácticas usuales" (Lesh y Kelly, 2000). En el desarrollo del estudio, registramos y transcribimos cuatro sesiones de clase de geometría, realizadas con un grupo de estudiantes de grado sexto del Instituto Pedagógico Nacional (IPN) en el primer semestre del 2018. La lectura de las transcripciones permitió identificar tres narrativas principales sobre las cuales se desarrollaron las sesiones observadas: la definición de colinealidad, la definición de equidistancia y el procedimiento para construir un triángulo isósceles. Por ello, los datos analizados corresponden a fragmentos de las transcripciones en los cuales se registran conversaciones públicas entre estudiantes y profesores o entre estudiantes, relacionadas con estas tres narrativas y en las cuales, el uso de tecnología digital fue preponderante. Dado que nos interesaba analizar estrategias del profesor para generar cambios en el discurso, en el análisis se buscó caracterizar el discurso de los estudiantes y las acciones del profesor tendientes a producir cambios en este. Para ello, diseñamos una herramienta analítica basados en algunos referentes teóricos centrados en la gestión del profesor para favorecer la comunicación, la construcción de significado y la evolución de signos. Estas categorías nos permitieron interpretar las acciones del profesor que permiten un avance en el discurso matemático de los estudiantes.

El documento está estructurado en seis capítulos. En el primero presentamos la justificación de la investigación, el planteamiento del problema, la pregunta de investigación, los objetivos y los antecedentes. En el segundo exponemos el marco teórico que fundamenta el estudio. En el tercero hacemos referencia a los aspectos metodológicos como: la estrategia investigativa, el contexto, la construcción de los datos y la herramienta analítica. En el cuarto exhibimos el análisis de los datos teniendo en cuenta las categorías construidas. En los últimos dos capítulos, sintetizamos los resultados obtenidos y reportamos las conclusiones de la investigación.

1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1. JUSTIFICACIÓN

Desde una perspectiva sociocultural de la educación matemática, en la cual se inscribe la presente investigación, se reconoce que aprender matemáticas es participar en prácticas matemáticas discursivas propias de esta disciplina (Goos, 2004; Clarke, Xu y Wan, 2013; Kaur, 2013; Radford y Barwell, 2016). Propiciar este tipo de prácticas, contribuye a que los estudiantes aprendan a comunicar sus puntos de vista y a escuchar las argumentaciones de sus compañeros, lo cual les permite reconocer formas de construir socialmente conocimiento (MEN, 1998). En este sentido, Alrø y Skovsmose (2002) mencionan la necesidad de estimular la comunicación en las clases de matemáticas, puesto que la calidad de la comunicación influye en la calidad del aprendizaje. Por lo anterior, las clases de matemáticas deben propender por garantizar una cooperación indagativa y nuevas maneras de comunicarse en el aula que no obedezcan a patrones de pregunta-respuesta ni aquellas donde el profesor es el protagonista de la conversación. En este proceso, el profesor juega un papel importante tanto en crear un ambiente propicio para que los estudiantes participen y comuniquen sus ideas, como en gestionar dichas ideas.

En el documento Nuevas Tecnologías y Currículo de Matemáticas (MEN, 1999) se plantea que el uso de software dinámicos para geometría propicia la interacción del estudiante con los objetos geométricos, y facilita la construcción del conocimiento. Además, asegura que el software proporciona un ambiente en el cual los estudiantes se animan a especular, crear imágenes, argumentar y justificar, permitiendo usar los errores constructivamente para dinamizar su proceso de aprendizaje. Estas ideas, además de hacernos un llamado a implementar las nuevas tecnologías en la escuela, también destacan las bondades de la tecnología digital y los beneficios que trae el uso de estas en las clases de geometría y en la constitución de comunidades de discurso.

En cuanto a la institución involucrada en la propuesta, encontramos en el PEI, apartados que justifican la necesidad de implementar este proyecto. La misión del IPN (2017), propone:

> Innovar y liderar procesos educativos de niños, jóvenes y adultos, en su diversidad propendiendo, por la formación de sujetos críticos, autónomos, ético-políticos, con sentido social, que contribuyen a la comprensión y transformación de la realidad y a la consolidación de una comunidad en paz (p.9).

Con nuestro trabajo, podemos aportar al cumplimiento de esta misión, pues este planteamiento refleja el interés de contribuir a la formación de ciudadanos críticos, los cuales sean capaces de argumentar y comunicar sus ideas, procesos que hacen parte fundamental de nuestra propuesta. Teniendo en cuenta las ideas anteriores, consideramos que la institución es un espacio que favorecen el desarrollo del trabajo. Además, en el momento de dialogar con las directivas, estas expresaron que era viable el proyecto y autorizó la participación de los estudiantes en él, permitiendo el uso una sala dotada con tablets y el registro audiovisual de las clases.

Una de las razones personales que nos motivaron a realizar este trabajo, se encuentra enmarcada en nuestras prácticas docentes, pues somos conscientes de la responsabilidad que tenemos en el aula y nuestro sentir como maestro nos empuja a contribuir con la formación de ciudadanos competentes para la sociedad. También nos motivó el gusto por las matemáticas, en particular por la geometría, los ambientes de discusión y debate y su potencialidad en los procesos comunicativos y de aprendizaje de nuestros estudiantes.

1.2. DELIMITACIÓN DEL PROBLEMA

Desde hace más de dos décadas, los profesores de matemáticas han identificado que la construcción de significado en las clases de matemáticas puede darse a través de prácticas de enseñanza en las cuales se prioricen los procesos comunicativos (Swars y Meyers, 2014). No obstante, en algunas investigaciones (v.g., Brendefur y Frykholm, 2000; Alrø y Skovsmose, 2012; Krummheuer, 2012) se ha evidenciado que, aunque actualmente es común que en las clases de geometría los estudiantes se expresen, ellos rara vez defienden sus ideas, prevalece el modelo de comunicación bidireccional y las tecnologías digitales pocas veces son aprovechadas para impulsar la comunicación. Adicionalmente, aquellos profesores que promueven que sus estudiantes se expresen y que sus intervenciones se constituyan en la base para la construcción de significado, se ven expuestos al dilema de contar. Esto es, lograr que los estudiantes lleguen a comprensiones matemáticas de manera autónoma sobre lo que deben saber o hacer o informar de más cuando se observa que los estudiantes están obstaculizados impidiendo un desarrollo autónomo por parte de ellos (Baxter y Williams, 2010). Adicional a esto, es importante destacar los retos que mencionan Chazam y Ball (1999) que tiene un profesor que intenta incentivar la comunicación en sus clases, los cuales van más allá de nombrar un conjunto de acciones que promueven la comunión. Algunos de estos retos son: crear ambientes de aprendizaje en los cuales la gestión del profesor juega un papel importante, pues el profesor debe procurar desarrollar las ideas que surjan en la clase, generar controversia e incertidumbre haciendo que los estudiantes argumenten sus posturas. El segundo reto es manejar el desacuerdo como una oportunidad de aprendizaje, en el cual los autores sugieren tener en cuenta tres consideraciones: la evaluación de las ideas matemáticas en cuestión, abordar la dirección y el impulso de la discusión, y la naturaleza de la dinámica social y emocional de la clase. El tercer reto es el valor de las matemáticas, el cual puede ser apoyado por herramientas tecnológicas, materiales, ideas matemáticas institucionalizadas entre otros. El cuarto reto es gestionar un ambiente de discusión en el cual todos los integrantes de la clase pueden intervenir y cuestionar propuestas sin necesidad de generar enfrentamientos ni miedos particulares. En dicho ambiente no existen figuras autoritarias.

Por otra parte, autores como Sinclair, Moss y Jones (2010) y Berger (2011) reconocen que la gran disponibilidad de recursos tecnológicos (SGD, tableros inteligentes, proyectores, etc.) con los que cuentan los profesores, ha llevado a que los mismos sean integrados en la clase de matemáticas. Si bien en el campo de investigación en Educación Matemática es ampliamente reconocido el aporte de los SGD en el aprendizaje de las matemáticas, la mayoría de los estudios realizados se han restringido a contextos en los cuales los estudiantes tienen una interacción directa con el programa. En este campo, no abundan investigaciones relacionadas con la forma en que los estudiantes interpretan y piensan las representaciones dinámicas que se proyectan en discusiones grupales, y que no necesariamente han sido ni construidas ni manipuladas por ellos. Esto lleva a preguntarse por dos asuntos: a) las acciones que debería realizar el profesor para ayudar a que el estudiante describa e interprete estas representaciones dinámicas y las use para dar explicaciones y argumentos en discusiones grupales; b) los cambios derivados en las formas de pensar, comunicar y razonar derivadas de las discusiones que se suscitan a partir de dichas representaciones (Sinclair y Yurita, 2008).

Los dos autores del presente trabajo de grado, somos profesores de geometría de educación básica secundaria. Ambos consideramos que, en nuestras clases, propendemos por involucrar a los estudiantes en actividades de resolución de problemas mediadas por el uso un SGD. En dichas clases, es habitual que los estudiantes tengan un momento en el que trabajan en grupos de tres o cuatro personas con una Tableta o un computador, y que posteriormente, se realice una discusión con todo el grupo respecto a los resultados obtenidos. Si bien durante el trabajo en pequeños grupos, el profesor resuelve preguntas, es durante la discusión grupal que nosotros gestionamos los resultados obtenidos por los estudiantes para que los mismos se constituya en la base de las narrativas o rutinas que se quieran institucionalizar. Durante este proceso, constantemente nos enfrentamos al dilema de contar y evidenciamos que prima una comunicación entre bidireccional. Además, observamos situaciones en las cuales las formas de interpretar y razonar de los estudiantes respecto a las representaciones construidas con un SGD, no corresponde con lo que nosotros esperamos.

Para tener una perspectiva empírica acerca de la problemática anteriormente mencionada, hicimos un ejercicio analítico de la interacción comunicativa en la clase de geometría, en las instituciones en las cuales nos desempeñamos como profesores IPN y Colegio La Enseñanza. Para esto, decidimos implementar un problema que se discutió en el curso de innovación e investigación, el cual enunciamos a continuación:

> *Dados $\angle BCD$ y $\angle ACD$ par lineal, sea $\overrightarrow{CE}$ la bisectriz del $\angle ACD$ y $\overrightarrow{CF}$ la bisectriz del $\angle BCD$. ¿En qué lugar debe estar el $\overrightarrow{CD}$ para que la medida del $\angle CBF$ sea la máxima?*

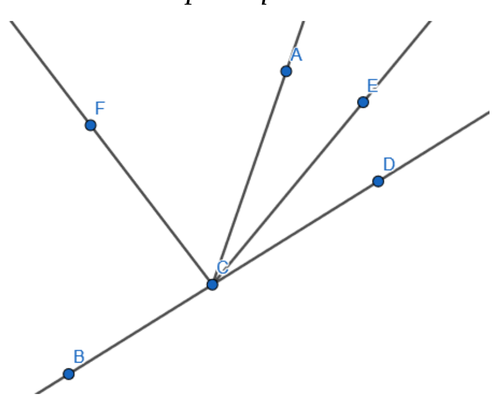


Figura 1. Construcción problema

En el IPN, la tarea se implementó el 12 de abril del 2018 con un grupo de 31 estudiantes de grado octavo. Cada estudiante realizó la construcción en GeoGebra, siguiendo las instrucciones del profesor. Seguido a esto, se les preguntó acerca del lugar en el que debía estar el $\overrightarrow{BD}$ para que la medida del $\angle FBE$ fuese la máxima. Varios estudiantes arrastraron el punto D e hicieron afirmaciones como: *el ángulo siempre es el mismo* y *el ángulo es recto*. Una estudiante mencionó que como no se podía garantizar que el ángulo fuese recto, había que medirlo. El profesor realizó algunas preguntas, dirigidas a todo el grupo, para que los estudiantes dieran argumentos. Tenía la expectativa que ellos se basaran en las características, las propiedades y las definiciones anteriormente estudiadas de objetos geométricos y que, por medio de las intervenciones de ellos, se lograra un ambiente de debate donde, con base en las afirmaciones o ideas que realizaran, hubiese un cambio epistémico sobre estas, comprobando su falsedad o veracidad. Una situación de debate se dio cuando una estudiante hizo referencia a dos ángulos, considerándolos opuestos por el vértice. A continuación, presentamos la trascripción de la interacción que tuvo lugar:

Profesor:	¿Aparte de esa congruencia de los ángulos [refiriéndose a los ángulos congruentes determinados por las bisectrices en diferentes posiciones del rayo BD] ¿qué más tenemos?
Laura:	Ángulos opuestos por el vértice.
Profesor:	¿Cuáles serían opuestos por el vértice?
Laura:	*ECB* y *FCA*.
Profesor:	¿Todos están de acuerdo con que estos ángulos son opuestos por el vértice?
Varios:	[Algunos dijeron que sí, otros dijeron que no].
Profesor:	¿A todos los convenció que estos dos ángulos son opuestos por el vértice [señaló los ángulos *ECB* y *FCA* en la pantalla]?
Ana:	No, porque de pronto no miden lo mismo.
Eliana:	No porque (...) ósea (…) tienen que ser así [realizó un gesto con sus dedos en forma de x].
Profesor:	¿Tienen que ser qué?
Laura:	Su medida congruente.
Profesor:	Sí, pero, ¿se acuerda que cuando vimos los ángulos opuestos por el vértice? (...)
Sofía:	Tienen que pasar por (...) no sé cómo decirlo (…). No es ese [señala el rayo *EC* realizando un movimiento hacia abajo con su mano como si tratara de referirse a la recta *EC*] sino (…).
Profesor:	¿Tiene que pasar cómo [señaló el rayo *EC* tratando de seguir con la idea de Sofía]?
Paula:	Tienen que intersecarse las dos rectas.
Profesor:	¡Ah! bueno debe haber intersección de dos rectas (...) [construyó las rectas *EC* y *FC*]

En el anterior fragmento se pueden apreciar algunos intentos del profesor por crear un ambiente de discusión, pero esto no fue del todo exitoso. Algunos estudiantes respondieron a las preguntas realizadas por él, proponiendo argumentos con base en su imagen conceptual de ángulos opuestos por el vértice, y no prestaron atención a los planteamientos de sus compañeros. La comunicación se dio profesor – estudiante- profesor. En la interacción participaron los mismos estudiantes que con frecuencia intervienen en las clases, lo cual impidió evidenciar si los demás estaban convencidos de las afirmaciones que ellos expusieron o si entendieron los argumentos de sus compañeros. Pocas veces los estudiantes comunicaron claramente sus ideas, no aprovecharon la representación gráfica y no retomaron los planteamientos de sus compañeros para construir argumentos. El profesor intentó involucrar a los estudiantes que estaban en silencio, pero estos se quedaron callados.

En el colegio La Enseñanza se implementó la tarea el 10 de abril de 2018, con 26 estudiantes de grado octavo. Los estudiantes estaban organizados por parejas, con la intención de que se generara una discusión entre ellos relacionada con lo que observaban. Los estudiantes abrieron el archivo de GeoGebra donde se encontraba la construcción del problema. La profesora explicó la actividad y preguntó en qué posición debía estar el $\overrightarrow{CD}$ para que el ángulo formado por las bisectrices fuera el mayor. Después de explorar la construcción y arrastrar el punto D, algunos estudiantes afirmaron que el $\overrightarrow{CD}$ debía ser perpendicular a la $\overleftrightarrow{AB}$ para que las bisectrices formaran el mayor de los ángulos, mientras que otros concluyeron que el ángulo siempre era el mismo sin importar la posición de este rayo.

La siguiente es una transcripción de un fragmento de interacción de la profesora con un grupo de estudiantes:

Profesora:	¿Qué observaron?
Rodrigo:	Que este es el mayor [muestra cuando el rayo CD es perpendicular a la recta AB].
Profesora:	¿Ahí es cuando es mayor? Si lo muevo, ¿se vuelve más pequeño? Muévelo.
Rodrigo:	Sí [mientras que mueve el rayo CD].
Profesora:	¿Ahí el ángulo es más pequeño?
Rodrigo:	Sí.
Ángelo:	Correcto.
Profesora:	¿Por qué es más pequeño?
Rodrigo:	Porque (…) al moverlo se (…).
Ángelo:	Cambia de posición.
Rodrigo:	(…) cambia de posición.
Profesora	Cuando yo cambio de posición un ángulo, entonces ¿Se hace más pequeño?
Ángelo:	Dependiendo (…).
Rodrigo:	Dependiendo.
Ángelo:	(…) hacia donde lo gire. O sea, por ejemplo, en ese caso si lo giro más a la izquierda se hace más pequeño, y si lo giro más a la derecha se hace más grande.
Profesora:	¿Qué ángulo están mirando?
Ángelo:	Este [señalando la bisectriz CF].
Profesora:	¿El de las rectas rojas?
Rodrigo:	Sí.

En la transcripción anterior se pueden evidenciar varias dificultades relacionadas con el asunto problemático: a) Aunque los estudiantes responden las preguntas realizadas por la profesora, no muestran interés en proponer algo para defenderlo, pues no se preocupan por utilizar los conceptos trabajados en clase para apoyar sus ideas. No se ve un compromiso genuino por una afirmación y su defensa; b) Los estudiantes no discuten entre ellos; en general, solo se preocupan por responder a la profesora, lo que generó un proceso de comunicación profesor – estudiante - profesor, dejando a un lado, la comunicación entre pares; c) La profesora no intentó que los estudiantes reaccionaran a las ideas dadas por algún compañero, pues ella se constituyó en la única interlocutora.

Teniendo en cuenta las dos situaciones descritas, se evidencia que los estudiantes pocas veces se expresan claramente, les cuesta comunicar sus ideas, rara vez prestan atención a las intervenciones realizadas por sus compañeros y son escasas las ocasiones en que retoman las ideas de otro para construir sobre ellas. Sumado a lo anterior, también observamos que, aunque los estudiantes se muestran interesados por las tareas propuestas con el uso de un SGD no aprovechan el programa para explicar sus ideas, ni la representación para aclarar lo que están diciendo. Adicional a esto, siguió primando el modelo de comunicación, profesor - estudiante – profesor y no se favorecieron espacios de discusión entre los estudiantes, pese al interés genuino de los docentes por generar debate. Por tanto, surge la siguiente pregunta de investigación:

> ¿Cómo promover el discurso matemático de los estudiantes en la clase de geometría en un en un ambiente mediado por la tecnología digital?

Cabe aclarar que para el planteamiento del problema tomamos como ejemplos dos episodios de clase en grado octavo. Si bien los datos investigativos de este estudio se centran en estudiantes de grado sexto, en su análisis nos centramos principalmente en la gestión del profesor, el cual es el mismo que gestionó la clase en el IPN. Adicional a esto, decidimos trabajar con grado sexto, en vista que investigadores del proyecto *voces de los estudiantes en la clase de geometría* nos ayudaron en la transcripción de algunas sesiones de clase, lo cual facilita la depuración de los datos. No tomamos como referencia a un grupo de estudiantes del colegio La Enseñanza porque queríamos caracterizar comunidad de discurso de grado sexto del IPN y el volumen de datos recolectados en este colegio era grande.

1.3. OBJETIVOS

1.3.1. Objetivo general

Identificar estrategias dirigidas a promover el desarrollo del discurso matemático con el apoyo de un SGD en la clase de geometría de grado sexto.

1.3.2. Objetivos específicos

- Construir un marco de referencia alrededor de las acciones del profesor que potencian el desarrollo de un discurso matemático.
- Diseñar una herramienta de análisis que permita observar las acciones del profesor para desarrollar discurso matemático de los estudiantes en un ambiente mediado por tecnología digital.
- Interpretar las acciones del profesor que promueven un avance en el discurso matemático de los estudiantes y los signos que surgen en la interacción comunicativa entre estudiantes, profesor y un SGD.

1.4. ANTECEDENTES BIBLIOGRÁFICOS

Revisamos algunas investigaciones que comparten nuestra misma preocupación. Esta revisión atiende a la necesidad de fundamentar aspectos teóricos, viendo éstos como resultados del análisis sistemático al considerar las acciones que realiza un profesor de matemáticas para promover el desarrollo del discurso matemático de sus estudiantes En cada reporte se señala, el propósito investigativo, información sobre el contexto experimental, metodología, los resultados principales y el aporte al desarrollo del trabajo de grado.

Berger (2011) investigó a unos estudiantes en Sudáfrica quienes potenciaron su discurso matemático cuando hicieron uso de GeoGebra. Observó que, siguiendo a Sfard (2008, citado por Berger, 2011), el discurso trascendió de las palabras y se caracterizó por lo que ella denomina como, *mediadores visuales* (símbolos, gráficas, diagramas etc.), *narrativas* (texto escrito o hablado) y *rutinas* (procesos repetitivos y patrones discursivos). Por medio de grabaciones de audio y video Berger caracterizó el discurso de los estudiantes, teniendo en cuenta una tarea donde los estudiantes tenían que graficar unas funciones racionales y determinar y argumentar si estas tenían asíntotas o no. En la investigación se destaca que el marco teórico propuesto por Sfard (2008) pone en evidencia aspectos claves del discurso matemático de los estudiantes (palabras, mediadores visuales, narrativas y rutinas). Este enfoque permite una mejor comprensión del desarrollo del discurso. Este documento aporta a nuestra propuesta en la caracterización del discurso que emplean los estudiantes y como este se puede potenciar mediante el uso de la tecnología digital. Así mismo, nos proporciona un marco teórico de referencia como el desarrollado por Sfard.

Sinclair et al. (2010), reportaron un análisis realizado con niños de 5 a 7 años cuando desarrollan un problema geométrico relacionado con el paralelismo de rectas, utilizando un programa de geometría dinámica. Este estudio arroja ideas de cómo los estudiantes de grados elementales desarrollan el proceso de argumentación, moviéndose desde una descripción empírica visual de las relaciones espaciales a una abstracta basada en un marco teórico. Una de las perspectivas teóricas de esta investigación está apoyada en Sfard (2008, citado por Sinclair et al., 2010) en lo que ella denomino como *commongition.* La investigación se enfoca en el aprendizaje de los estudiantes cuando utilizan geometría dinámica y cómo esta les permite pensar en los objetos geométricos y sus relaciones en un modo diferente a cuando se realizan en el papel. Los autores mencionan la correspondencia entre el aprendizaje y el cambio del discurso, cambiando la forma de comunicar ideas sobre los objetos geométricos y sus relaciones. Este reporte es importante para nuestro trabajo porque se menciona que el discurso de los estudiantes es potenciado por medios como la tecnología digital, así como analizar las intervenciones que realiza el profesor para promover la transición de argumentos empíricos y apoyados en representaciones gráficas a argumentos deductivos.

Goss (2004) reportó las acciones que un profesor puede implementar para crear una cultura de indagación en la clase de matemáticas y que patrones discursivos son utilizados por los estudiantes cuando trabajan colaborativamente en la solución a un problema. Esta investigación empleo la estrategia investigativa basada en prácticas usuales. Fue realizada en una institución educativa de secundaria en Queensland-Australia, con estudiantes de grado 11 y 12 y sus respectivos docentes. En el primer año de estudio, se trabajó con un grupo de 14 estudiantes de grado 12, seis hombres y ocho mujeres, cuyas edades oscilan entre 16 y 17 años. La autora, evidencio que algunas frases que utilizaba el profesor para tratar de generar el ambiente de indagación fueron: “sé más específico”, “¿estás seguro?”, “dime si me equivoco”, adicionalmente interrumpía varias veces las discusiones para construir con los estudiantes el tema que estaba tratando. También, observo que la interacción entre pares puede crear una zona de desarrollo próximo colaborativa, gracias a que los estudiantes creen que esta forma de participación dentro de los referentes teóricos provee una oportunidad de evaluar en cierta medida el entendimiento de los temas y como el marco de referencia puede validarlos. Esta investigación aporta a nuestro trabajo de grado, pues propone nueve categorías para analizar las acciones del profesor que favorecen el desarrollo del discurso.

Gavilán, Sánchez-Matamoros y Escudero (2014), realizaron una investigación cuya intención era caracterizar los cambios que se manifiestan en el discurso matemático de los estudiantes cuando tratan de definir un objeto matemático. Los participantes del estudio fueron 51 estudiantes con edades comprendidas entre los 16 y 21 años, de los cuales trece de ellos correspondían a estudiantes de bachillerato y los restantes a estudiantes para profesor de primaria. Durante el análisis realizado, los investigadores identificaron diferentes cambios en el discurso matemático de los estudiantes, a partir de la caracterización de las relaciones entre narrativas asumidas y rutinas expuestas en el discurso. Este estudio es de utilidad para nuestro trabajo de grado, pues contiene ejemplos de análisis de aspectos discursivos, los cuales son nuestro interés. Adicionalmente los autores identificaron cuatro manifestaciones de cambios en el discurso matemático, que podrían aportarnos para evidenciar aprendizaje en nuestros estudiantes.

Yu y Barret (2002) realizaron un estudio cuyo propósito era usar una perspectiva semiótica para describir el discurso de dos estudiantes de grado quinto, cuando aprenden acerca de los cuadriláteros utilizando geometría dinámica. La metodología adoptada fue una entrevista basada en tareas. Dos sesiones de 45 minutos fueron grabas y transcritas. Estas fueron orientadas por un profesor quien gestionaba la conversación. En los resultados obtenidos se destacan la construcción de figuras prototípicas de los cuadriláteros. Además, los cuadriláteros más familiares para ellos fueron los cuadrados y los rectángulos y los menos conocidos fueron los trapecios y cometas. En el reconocimiento de algunas propiedades de los cuadriláteros por parte de los estudiantes, se destacan el paralelismo de los lados, congruencia de lados y ángulos. Por ejemplo, concluyeron que ningún paralelogramo podía tener lados congruentes a diferencia de los rectángulos. Sin embargo, no estudiaron relaciones entre la suma de las medidas de ángulos no ángulos opuestos congruentes. El estudio concluye que los entornos mediados con geometría dinámica representan los objetos geométricos complejizando la construcción de su definición y el reconocimiento de características. Esta investigación aporta a nuestro trabajo en bibliografía para rastrear acerca del desarrollo del discurso y experiencias en el uso de geometría dinámica.

Sinclair y Moss (2012) realizaron una investigación relacionada con explorar el impacto de entornos de geometría dinámica sobre el pensamiento geométrico de niños de preescolar. A medida que se desarrolla el discurso geométrico, la identificación visual directa de las representaciones gráficas da paso a la identificación mediada discursivamente, es decir, a un proceso en el que se realiza un procedimiento discursivo, prescrito por una definición formal de un objeto geométrico, para determinar el nombre de este. El estudio puso a prueba la conjetura de que los entornos de geometría dinámica pueden flexibilizar la rutina de identificación, permitiendo una mayor diversidad en las formas reconocidas como merecedoras de un nombre dado. Esta investigación se realizó con niños de 4 a 5 años que trabajan con Sketchpad en una clase de 30 minutos en la cual los niños observaron, describieron y transformaron triángulos de diferentes tamaños, proporciones y orientaciones. Entre los resultados se destacan, el pensamiento de los estudiantes evolucionó en la diversidad de triángulos. Sin embargo, este cambio fue local y del nivel del objeto y no del metanivel. No hubo un cambio en el discurso geométrico y no se presentó una transición a la rutina de identificación discursiva. En un periodo tan corto, es apresurado afirmar que los estudiantes desarrollaron un discurso estable de nivel 2. Queda pendiente estudiar si esta experiencia con geometría dinámica puede conducir a un cambio en la rutina de identificación. Los investigadores resaltaron el papel del profesor, en la medida que este en repetidas ocasiones llamó la atención de los estudiantes sobre los mediadores visuales y les solicitó a los estudiantes describir con sus palabras lo que observaban. Lo cual permitió verbalizaciones de los estudiantes, pidiendo que explicaciones acerca del nombre asignado a cierta figura. Esta investigación aporta a nuestro trabajo en ejemplos de análisis de aspectos discursivos, en este caso las rutinas. Además, nos brinda bibliografía para rastrear acerca del discurso matemático y el uso de geometría dinámica para potenciar el aprendizaje.

2. MARCO DE REFERENCIA

Dado que los propósitos de nuestra investigación son identificar las diferentes estrategias del profesor dirigidas a promover el desarrollo del discurso matemático con el apoyo de tecnología digital en la clase de geometría, presentamos a continuación el marco teórico que sustenta el trabajo desarrollado. Para ello, en un primer momento hacemos referencia a lo que entendemos por aprendizaje de las matemáticas y su relación con el discurso. Seguido a esto, hacemos alusión a algunos componentes que permiten la promoción del discurso matemático. Posteriormente, exhibiremos un conjunto de referentes teóricos que permiten dar cuenta de acciones del profesor que favorecen el desarrollo del discurso. Finalmente, mostramos cómo los SGD puede apoyar el desarrollo del discurso matemático.

2.1. APRENDIZAJE COMO CAMBIO DEL DISCURSO

Adoptamos la postura de Sfard (2008) quien plantea que el aprendizaje de las matemáticas se puede interpretar como un cambio en el discurso. Es decir, este aprendizaje puede verse como el proceso de cambiar, en alguna medida, las formas discursivas propias de los individuos de tal manera que se asemejen a las formas discursivas propias de la comunidad matemática. Estas ideas se encuentran en consonancia con la propuesta por Sfard (1996), quien concibe el aprendizaje como una construcción social en la que participan los miembros de una comunidad. Por tanto, una persona que aprende acerca de un objeto matemático modifica y extiende sus habilidades discursivas de manera que llega a ser capaz de comunicar lo aprendido a los miembros de su comunidad, así como solucionar problemas que no podía resolver en el pasado.

Algunas personas podrían creer que bajo esta perspectiva de aprendizaje se excluyen las formas en las que un individuo piensa y cómo comunica este pensamiento. Sfard (2008) aclara que su teoría del aprendizaje con un enfoque comunicacional no excluye el pensar, sino que se ve como un caso especial de la actividad de comunicar. Así, la acción de pensar se puede considerar como comunicarse consigo mismo, "pues el pensamiento es un esfuerzo dialógico en el que una persona se informa, se argumenta, se hace preguntas y espera su propia respuesta" (Sfard, 2008. p 40). Este pensamiento se puede materializar en imágenes, palabras, gestos o en otros símbolos. De acuerdo con esto, desarrollar un discurso matemático es equivalente a pensar en una forma matemática.

Al asumir el aprendizaje como el desarrollo de un discurso y como una construcción social estamos en concordancia con la propuesta Goos (1996), quien plantea que los individuos pueden aprender a pensar matemáticamente si participan en una comunidad de práctica. En este escenario, el aprendizaje puede darse por medio de interacciones sociales, las cuales pretenden construir una identidad en la que el aprendizaje se convierte en una fuente de significado. Esta transformación es posible a partir de las comunidades de práctica, las cuales brindan a sus participantes contextos de aprendizaje que les permiten transformar sus ideas en conocimiento. Para pertenecer a estas comunidades es necesario desarrollar la habilidad de comunicarse empleando un lenguaje y cumpliendo con las normas establecidas por estas.

Para Sfard (2008), la comunicación se puede interpretar como algo que se refiere al uso y producción de los recursos (símbolos, información, ideas, sentimientos etc.) cuyo propósito es lograr que un interlocutor o el hablante mismo reaccione de cierta manera generando pensamiento o acción. Algunos investigadores (*v. g.* Lave (1988, citado por Sfard, 2008); Krummheuer, 2000; Barwell, 2016) han mencionado que el aprendizaje es sensible a las interacciones sociales y que por medio de la comunicación este se puede desarrollar. Por esta razón, el profesor como miembro con mayor experiencia de la comunidad debe vivenciar e impulsar este proceso.

2.2. DISCURSO MATEMÁTICO

Sfard (2008) y Morgan y Sfard (2016) menciona cuatro rasgos que caracterizan el discurso matemático: uso del vocabulario, mediadores visuales, narrativas y rutinas. A continuación, mencionamos aspectos relevantes de cada una de estos rasgos, en correspondencia con estos autores.

2.2.1. Uso del vocabulario

Los discursos matemáticos se pueden identificar por los usos específicos que les dan a las palabras, las cuales, en matemáticas pueden estar relacionadas con cantidades, formas e identidades abstractas. Mientras que algunas palabras relacionadas con matemáticas pueden aparecer en discursos no especializados, los discursos matemáticos "académicos" dictan los usos de estas palabras teniendo en cuenta una comunidad matemática de referencia. El uso que se le da a la palabra cobra relevancia debido a que una persona es responsable de lo que dice de acuerdo al significado que tenga de esta. El vocabulario permite observar cómo se va ampliando el grado de sofisticación de las palabras y los términos que usan los miembros de la comunidad.

2.2.2. Mediadores visuales

Los mediadores visuales son recursos con los cuales los participantes de una comunidad matemática pueden identificar el objeto de la conversación y coordinan su comunicación. Los discursos coloquiales usualmente están mediados por imágenes de objetos materiales, a los que se les señala con sustantivos o pronombres, los cuales pueden ser reales o imaginarios. A diferencia de estos, los discursos matemáticos involucran simbología matemática, gestos e imágenes que hacen ostensibles las ideas matemáticas involucradas en la comunicación.

2.2.3. Narrativas

Una narrativa es cualquier verbalización, hablada o escrita, en la que se presenta una descripción de objetos, de relaciones entre objetos o de procesos con o mediante objetos que se somete a aprobación o rechazo con la ayuda de procedimientos de justificación específicos del discurso. Son ejemplos de narrativas matemáticas las definiciones, los enunciados de postulados y teoremas, las conjeturas, los argumentos. En los discursos matemáticos, para ser aprobadas, las narrativas tienen que ser construidas y estructuradas atendiendo a reglas bien definidas. En efecto, la forma en que se crean y materializan los enunciados matemáticos difiere de la forma en la que se estos se realizan en otras disciplinas (Sfard, 2008).

2.2.4. Rutinas

Las rutinas son maneras de actuar repetitivas guiadas por regularidades, que caracterizan un discurso. Específicamente, se pueden observar regularidades del discurso matemático ya sea observando el uso de palabras y mediadores visuales o siguiendo el proceso de creación y justificación de narrativas sobre objetos matemáticos. Esas maneras de actuar repetitivas guiadas por regularidades se pueden reconocer en cualquier aspecto del discurso matemático como, por ejemplo, en las formas matemáticas de categorizar, en los modos matemáticos de atender a un entorno, en los modos de asimilar o diferenciar situaciones, lo cual es fundamental para la habilidad de los discursantes de aplicar el discurso cuando es apropiado. Gracias a las regularidades en la actividad humana, los interlocutores pueden interpretar lo que otros dicen y pueden decidir qué clase de respuesta se espera. En la mayoría de discursos, los interlocutores no son conscientes del hecho de que sus acciones despliegan regularidades estructurales, y de ellos no se puede decir, con certeza que "sigan las reglas" del discurso de una manera consciente e intencional. Una característica de la actividad matemática es que trata de hacer explícitas algunas de sus reglas. De hecho, intentos metadiscursivos tales como formular definiciones que posteriormente controlarán el uso de las palabras matemáticas, constituyen parte integral del discurso matemático (Sfard, 2008).

2.3. Relación entre los Sistemas de Geometría Dinámica y el discurso matemático

Schacht (2017) afirma que el lenguaje (tanto escrito como hablado) cambia cuando los estudiantes trabajan empleando herramientas digitales en la clase de matemáticas. Estas no solo ofrecen nuevas experiencias y acciones que influencian directamente el lenguaje, sino que también promueve expresiones léxicas o técnicas asociadas a la tecnología digital que se emplea. Investigadores como Sinclair y Yurita (2008) y Kaur (2015, citado por Schacht, 2017) han mostrado que no solo el carácter lingüístico cambia cuando se utiliza un SGD a mediante la adopción y el uso de elementos léxicos que ofrece el propio programa, sino también cambia el rol particular de la narrativa, ya que los estudiantes no solo se refieren a los objetos matemáticos y procesos, sino que también a aspectos de operación y manejo del programa.

Para Schacht (2017) la distinción entre el lenguaje que emplean los estudiantes para describir procesos y objetos favorece los cambios discursivos cuando se utilizan un SGD en contextos geométricos y en los procesos conceptuales subyacentes tales como argumentar. Cuando se trabaja con el programa de geometría dinámica, el estudio del lenguaje debe tener en cuenta diferentes perspectivas teóricas sobre el rol del lenguaje cuando se utilizan herramientas que brindan estos. En este sentido, Drijvers, Ball, Barzel, Heid, Cao y Maschietto (2016) mencionan el papel central de la comunicación cuando se trabaja con SGD, pues su investigación ha mostrado que no todas las interacciones se pueden traducir como aprendizaje y que es importante comprender la naturaleza de la interacción en presencia de la tecnología e investigar las prácticas que promueven el aprendizaje de los estudiantes. Holz (1996, citado por Schacht, 2017) evidencia que los estudiantes emplean palabras como "ir", "arrastrar", "moverse", "quedarse" o "hacerse más grande o más pequeño" para apoyar lo que dicen. El lenguaje que usan en su razonamiento matemático se ha visto afectado por el PGD gracias a herramientas como el de arrastre, la cual está dando dinamismo a la figura mostrando al estudiante todos los casos, transformaciones, variantes, entre otros. Estas acciones muestran que los estudiantes describen en detalle las acciones matemáticas subyacentes.

La mediación semiótica es una teoría en educación matemática propuesta por Vygotsky (1978, citado por Mariotti, 2009) la cual estudia el uso específico de artefactos utilizados por el profesor para fortalecer el proceso de aprendizaje-enseñanza. Vigotsky considera de suma importancia en el proceso de aprendizaje y enseñanza el rol de la mediación en el aprendizaje, el cual es asumido por un experto (profesor). Esta teoría se enfoca en la producción de signos, en cómo estos producen significados cuando se hace uso de un artefacto y el proceso de transformación de estos signos a través de las interacciones sociales en el aula.

En esta construcción de conocimiento, el papel que juegan los artefactos es crucial para generar una apropiación de las ideas matemáticas que el profesor desea promover. Por tanto, resulta pertinente resaltar los diferentes atributos que hacen a un artefacto destacarse por su potencial semiótico, viendo este como una herramienta que permite el desarrollo y cumplimiento de una tarea y la construcción de conocimiento. Por consiguiente, la gestión que hace el profesor en relación con el uso del artefacto permite ayudar a que los estudiantes se hagan conscientes de los significados personales y los vinculen a los significados matemáticos.

2.4. Acciones del profesor para favorecer cambios en el discurso

Para Goos (1996) la comunicación matemática, la solución colaborativa de problemas y el uso efectivo de estrategias y explicaciones se logran aumentando la variedad de roles participativos abiertos a los estudiantes. Es prioridad del profesor animar a los estudiantes a iniciar sus propias indagaciones y debatir sus ideas con sus compañeros, pues esto permite verse a sí mismos y a los demás como recursos intelectuales legítimos. Para que esto suceda, es indispensable que el profesor, quien tiene un rol crucial en el aprendizaje de sus estudiantes, implemente en su práctica las siguientes acciones (Quaranta y Tarasow, 2004; Goos, 2004):

- Realizar diseños de tareas que encaminan a los estudiantes a asumir responsabilidad de encontrar una solución, interactuar con sus compañeros y a validar sus propias producciones, mediante el establecimiento de normas matemáticas.
- Orientar y guiar a los estudiantes cuando trabajan en grupos, sin asumir el papel de evaluador.
- Invitar a los estudiantes a explicar sus ideas y a solicitar la ayuda de los compañeros antes de consultarle a él.

- Mediar en las interacciones para promover el trabajo colaborativo y favorecer la comunicación entre los compañeros.
- Ceder la responsabilidad de validación al grupo. Inquieta a los estudiantes sobre cómo hallar de soluciones e impulsa y mantiene la actitud de búsqueda de validez de dichas soluciones. Así, son los estudiantes quienes, a través de las interacciones con sus compañeros y los acuerdos matemáticos, llegan a validar sus propias producciones.
- Mantener la expectativa de los estudiantes por validar una solución, una postura o una idea, dada la curiosidad o incertidumbre de ellos ante esta.
- Usar la voz de los estudiantes, al discutir la resolución de problemas trabajados para invitar a los demás miembros de la comunidad a adoptar una postura sobre la resolución, a argumentarla y a validarla como posible resultado.
- Problematizar el punto de vista de algún estudiante para impulsar su análisis por parte de los demás miembros o de sí mismo. Eso significa que no se privilegian las respuestas correctas sobre las incorrectas
- Admitir que su postura frente a la solución a los problemas o a una postura, un argumento, una estrategia de solución, etc., sea objetada por los estudiantes, en pro de generar una interacción profesor – estudiantes, opuesta a la autoritaria que en una clase donde predomina el paradigma del ejercicio. En este sentido, aunque el profesor es el miembro con más experiencia y conocimiento en el aula es un integrante más de la comunidad.
- Impulsar el buen uso de terminología y lenguaje matemático en las puestas en común, para exponer ideas y argumentos de manera adecuada y clara.

Cuando las prácticas de enseñanza están mediadas por el uso de SGD, Mariotti (2009) propone las siguientes acciones que puede desarrollar el profesor para generar cambios en el discurso:

- Retomar la tarea: Intervenciones que permiten reconstruir el contexto de una tarea y como el artefacto está involucrado en su solución. La intención es que los estudiantes hagan explícitos los procesos utilizados.
- Focalizarse en ciertos aspectos del uso del artefacto: Intervenciones en las que pretende de una manera más o menos explícita dirigir la atención de los estudiantes hacia aspectos particulares de su experiencia con el artefacto (pasada o presente). Se observan con frecuencia gestos o cambios en el tono de voz que muestran la intencionalidad de focalizar.
- Pedir una síntesis: Pedir a los estudiantes que sinteticen en unas pocas frases lo que han hecho y discutido en el aula hasta un cierto momento. En otras palabras, hacer explícito lo que han aprendido.
- Proporcionar una síntesis: Intervenciones con el propósito de recuperar signos particulares y de fijar su uso en el discurso del aula y más específicamente fijarlos con respecto a las matemáticas. Objetivo de estas intervenciones es ratificar explícitamente la aceptación de un signo, cuyo uso y estatus están relacionados con el contexto matemático.

Estas acciones permitirán a los estudiantes aprenden a pensar matemáticamente, pues participaran en las prácticas intelectuales y sociales que caracterizan a la comunidad matemática de referencia, en la que el profesor será el miembro con mayor experiencia.

3. METODOLOGÍA

En este capítulo reportamos las acciones investigativas realizadas en el presente trabajo de grado, con el cual pretendemos identificar estrategias dirigidas a promover el desarrollo del discurso matemático, con el apoyo de tecnología digital, en la clase de geometría de grado sexto. Esta investigación se inscribe en un enfoque fenomenológico, el cual nos permite apropiarnos del contexto en el que se desarrolla una clase, para describir y caracterizar ciertas particularidades que observemos en el aula y nos brinda herramientas para interpretar las diferentes situaciones que se presenta. En este sentido, la aproximación investigativa que adoptamos es interpretativa, pues nuestra intención es analizar y comprender, sin generar juicios de valor, posibles aspectos relacionados con el desarrollo del discurso de los estudiantes apoyados de tecnología digital y ver qué tipo de estrategias debemos generar, como profesores, para que esto ocurra.

En este capítulo exponemos la estrategia investigativa adoptada. Realizamos una descripción general sobre sus principales características, los roles de los participantes y las fases que se emplean. Describimos el contexto experimental, exhibiendo el escenario y los participantes. Finalmente, damos a conocer las fases que comprenden el estudio, como lo son: preparación de la información, construcción de datos investigativos y la construcción de la herramienta analítica.

3.1. CONTEXTO EXPERIMENTAL

La institución participante de esta investigación es el Instituto Pedagógico Nacional (IPN), el cual está ubicado en la zona norte de Bogotá. La razón primordial para elegir esta institución se debe a que uno de nosotros nos encontramos laborando en ella y tenemos un amplio conocimiento de los participantes de esta investigación. A continuación, mencionamos algunas características de la institución de acuerdo con la población que atienden y la disposición de tecnología digital.

El IPN es una institución educativa de régimen especial (público- privado). Atiende a niños y jóvenes de diversos estratos socioeconómicos, con prioridad a los hijos de funcionarios de la UPN. El colegio cuenta con una infraestructura tecnológica de dos salas de informática, cada una con 20 computadores y una sala llamada “Smart School”, dotada con 30 tabletas y un televisor, a las cuales tienen acceso los profesores de matemáticas. Las tres salas cuentan con conexión a internet, sin embargo, en ocasiones presentan problemas de conectividad.

Los participantes de nuestra investigación son un grupo compuesto por: nosotros, nuestra directora de trabajo de grado e investigadores del proyecto “Voces de los estudiantes en la clase de geometría” (Leonor Camargo y Zaira López). También son participantes un grupo de treinta estudiantes de grado sexto, cuyas edades oscilan entre los 10 y 12 años y quienes no han tenido la oportunidad de utilizar geometría dinámica en las clases de matemáticas. Los estudiantes constantemente participan en las discusiones generadas en las clases y la mayoría se interesa por las intervenciones tanto de sus compañeros como las del profesor.

3.2. ESTRATEGIA INVESTIGATIVA

La estrategia investigativa que empleamos se denomina Basada en prácticas usuales (Kelly y Lesh, 2000; citado en Camargo, sf). Esta estrategia consiste en realizar un acercamiento a escenarios educativos, con la intención de caracterizar, describir o interpretar un fenómeno particular que se presenta en un contexto específico. En muchas de las situaciones el escenario es la clase de matemáticas, en donde participan conjuntamente profesor y estudiantes.

Al emplear esta perspectiva investigativa es necesario tener en cuenta como condición primordial que los estudiantes se sientan cómodos y se desenvuelvan naturalmente en la clase. Para poner en práctica esta estrategia, debemos realizar la recolección de evidencias que nos permitan describir a profundidad el fenómeno. Posteriormente, al abandonar el aula de clase, se procede a realizar el análisis de la información recolectada por medio de categorías construidas durante la recolección de las evidencias. Este análisis, será el producto de la investigación.

En esta estrategia los investigadores se integran al escenario después de haberse apropiado de un marco teórico de referencia que les permita interpretar el fenómeno. La diferencia con otras estrategias radica en el interés de caracterizar un fenómeno de manera situada y desde la perspectiva de los participantes. No se pretende estudiar el fenómeno de manera aislada sino en un ámbito donde tiene lugar las prácticas, pues estas se construyen de acuerdo a las maneras en que los individuos aprenden. Por otro lado, los participantes son los investigadores y las personas que hacen parte de la clase de matemáticas, es decir el profesor y los estudiantes. En ocasiones el profesor que orienta las clases, puede pertenecer al grupo de investigadores.

Para implementar la estrategia basada en prácticas usuales, es necesario tener en cuenta ciertas etapas que suelen emplearse. En un primer momento, se realiza una fundamentación teórica inicial, la cual va de la mano con la selección del escenario y el fenómeno a observar. Esta primera etapa, permite a los investigadores apropiarse de referentes teóricos, los cuales proporcionan criterios para la interpretación del fenómeno. Posteriormente, se realiza la inmersión en el escenario, en donde se recolectan unas evidencias y se concreta la fundamentación teórica. Finalmente, se abandona el escenario y se procede a realizar el análisis de los datos por medio de las categorías construidas. En ocasiones es posible que estas categorías tengan algunos cambios durante el proceso de análisis.

3.3. DESCRIPCIÓN DE LAS FASES DEL ESTUDIO

A continuación, presentamos una descripción de cada una de las fases de la estrategia Basada en prácticas usuales, esta vez con relación al estudio que presentamos en esta investigación.

3.3.1. Fase 1: Preparación de la observación

En esta fase concretamos los criterios a tener en cuenta para la interpretación del fenómeno que nos interesa observar, describimos con mayor profundidad el escenario y los participantes informantes, mencionamos los objetos matemáticos involucrados en las clases, así como la preparación del registro de información.

Criterios para la interpretación del fenómeno

Los criterios para la interpretación del fenómeno están en consonancia con los referentes teóricos que sustentan este trabajo. En particular, nos interesa observar las acciones que realiza el profesor que conllevan al desarrollo del discurso matemático de los estudiantes cuando hay interacciones colectivas, la promoción de la interacción comunicativa entre estudiantes y las acciones discursivas de los estudiantes, cuando utilizando el programa de geometría dinámica GeoGebra para expresar sus ideas, reacciones y puntos de vista.

Escenario y participantes específicos

El escenario a observar es la clase de geometría de un curso de grado sexto del IPN. En estas clases están involucrados: 30 estudiantes, un profesor investigador (William), una investigadora invitada (profesora Leonor Camargo) y una monitora de investigación (Zaira López)[1]. Los estudiantes del curso 604 usualmente participan de manera espontánea exponiendo sus ideas frente a los temas desarrollados en las clases. Se caracterizan por ser curiosos, críticos y responsables. Algunas veces en las clases de geometría se generan momentos en los cuales hay ruido por parte de los estudiantes, lo cual interfiere la comunicación entre los participantes de la clase; en consecuencia, son necesarios los llamados de atención del profesor. En general, existe una buena relación entre los estudiantes y el profesor. Semanalmente, los estudiantes tienen dos horas de clase de geometría (noventa minutos) en las cuales se trabajan algunas relaciones entre rectas, segmentos, rayos, ángulos entre otros. En ocasiones el profesor utiliza materiales concretos para apoyar el proceso de aprendizaje de los estudiantes.

No se ha tenido alguna experiencia con el programa de geometría dinámica GeoGebra, por lo tanto, nos es necesario explicar a los participantes, durante una de las primeras sesiones, algunas herramientas que posee el programa como: ocultar ejes y cuadriculas, elige y mueve, punto, segmento y recta. Permitiremos que los estudiantes exploren el menú de herramientas, esto con el fin de que se familiaricen con el programa y que descubran opciones que les permitan construir los objetos geométricos inmersos en las tareas propuestas.

Objeto matemático

En cuanto a los objetos matemáticos en los cuales se trabajarán en las clases que registremos están: los polígonos, la colinealidad y la equidistancia de puntos, la circunferencia y la construcción de triángulos isósceles y equiláteros. En las clases intentaremos favorecer los procesos de argumentación y comunicación.

---

[1] En el IPN, el trabajo está apoyado por las dos investigadoras mencionadas, puesto que esta institución es una de las participantes en el proyecto de investigación “Voces de los estudiantes en la clase de geometría”.

Registro de la información

Para el registro de las sesiones de clase utilizamos: dos cámaras de video con sus respectivos trípodes, un celular y dos grabadoras de audio. Una cámara está enfocada al profesor; esto con el fin de observar las diferentes acciones que realiza el profesor en las clases. La otra cámara registra a los estudiantes, lo cual nos permite observar sus interacciones, gestos y disposición, entre otros factores. El celular sirve de apoyo para registrar algunos momentos de discusión colectiva, así como discusiones entre estudiantes y estudiantes – investigador cuando en las clases se asigna tiempo para desarrollar las tareas propuestas. Las dos grabadoras de audio las ubicamos en dos mesas de trabajo, con el propósito de capturar el audio de las discusiones que seden en el aula.

Cumplida la primera fase, registramos cuatro sesiones de clase de 90 minutos cada una. Contamos con 56 videos obtenidos con las dos cámaras, 36 videos grabados con el celular y 84 registros de audios.

3.3.2. *Fase 2: Proceso de construcción de datos*

En esta segunda fase damos cuenta del proceso realizado para convertir la información registrada en datos investigativos. Para llevar a cabo la producción de datos investigativos con la información recolectada en las observaciones de clases, fue necesario organizarla en carpetas, teniendo en cuenta la siguiente información:

- Fecha de la observación.
- Instrumento de recolección empleado (Cámara, celular, audios)

Posteriormente, con la intención de optimizar las evidencias para hacerlas más concretas y útiles para el análisis, se realizaron las transcripciones de las interacciones registradas de los videos y audios recolectados, proceso que permitió depurar información. Luego, se realizaron repetidas lecturas de las transcripciones, con la intención de seleccionar aquellos fragmentos que serían útiles para nuestra investigación. En un primer momento, seleccionamos las clases en las cuales se utilizó geometría dinámica e identificamos segmentos de interacciones en los que las acciones del profesor permitían la evolución del discurso matemático de los estudiantes cuando se usaba el programa GeoGebra para comunicar una idea, apoyarla o refutarla. Finalmente, decidimos organizar dichos fragmentos, teniendo en cuenta tres asuntos centrales en las conversaciones, en los cuales era posible evidenciar una evolución del discurso. Estos asuntos fueron colinealidad, equidistancia y la construcción del triángulo isósceles. Dichas interacciones se convertirían en nuestros datos investigativos. A continuación, presentamos una tabla en la que relacionamos el fragmento, la fecha de la clase y la narrativa a la que aporta.

<table>
<tr><th>Fragmento</th><th>Fecha</th><th>Narrativa</th></tr>
<tr><td>1. Evaluar que una construcción realizada en SGD cumpla las condiciones dadas</td><td>10 de mayo</td><td rowspan="4">Definición de Colinealidad</td></tr>
<tr><td>2. Comunicar el procedimiento para construir puntos colineales</td><td rowspan="3">17 de mayo</td></tr>
<tr><td>3. Evaluar el uso de las herramientas recta y segmento para construir puntos colineales</td></tr>
<tr><td>4. Definir puntos colineales</td></tr>
</table>

5. Sintetizar lo acontecido en la clase anterior	24 de mayo	
6. Cuestionar una definición propuesta por el profesor	17 de mayo	Definición de Equidistancia
7. Usar instrumentos ajenos al programa para hacer construcciones en SGD		
8. Proponer construcción para generar puntos equidiseparados y colineales		
9. Usar la herramienta circunferencia para garantizar equidistancia		
10. Evaluar una construcción de puntos equidistantes		
11. Uso de la circunferencia para construir puntos equidistantes		
12. Diferenciar los términos equidistancia y colinealidad	24 de mayo	
13. Sintetizar los resultados de la clase anterior		
14. Definir triángulo isósceles	24 de mayo	Construcción de un Triángulo isósceles
15. Primera propuesta para construir un triángulo isósceles		
16. Segunda propuesta para construir un triángulo isósceles		

Tabla 1. Fragmentos y narrativas

3.3.3. Fase 3: Herramienta analítica

En la tercera fase, damos cuenta sobre la construcción de la herramienta analítica y el proceso de análisis llevado a cabo con esta.

Construcción de la herramienta analítica

Realizamos una revisión de algunos referentes teóricos, los cuales nos proporcionaron categorías enfocados en la gestión del profesor para favorecer: la evolución de signos del artefacto a signos matemáticos (Mariotti, 2009), la conformación de comunidades de práctica (Goos,1996, 2002) y la construcción de significado y el desarrollo del pensamiento científico (Mortimer y Scott, 2003). Estas categorías nos han permitido interpretar lo sucedido en las clases registradas para identificar que estrategias realiza el profesor para promover el desarrollo del discurso matemático y la argumentación en la clase de geometría. En la tabla 1 se pueden apreciar estas categorías con una descripción de cada una.

Mariotti (2009)	**Retomar la tarea:** Intervenciones que permiten reconstruir el contexto de una tarea y como el artefacto está involucrado en su solución. La intención es que los estudiantes hagan explícitos los procesos utilizados.
	Focalizarse en ciertos aspectos del uso del artefacto: Intervenciones en las que pretende de una manera más o menos explícita dirigir la atención de los estudiantes hacia aspectos particulares de su experiencia con el artefacto (pasada o presente). Se observan con frecuencia gestos o cambios en el tono de voz que muestran la intencionalidad de focalizar.
	Pedir una síntesis: Pedir a los estudiantes que sinteticen en unas pocas frases lo que han hecho y discutido en el aula hasta un cierto momento. En otras palabras, hacer explícito lo que han aprendido.
	Proporcionar una síntesis: Intervenciones con el propósito de recuperar signos particulares y de fijar su uso en el discurso del aula y más específicamente fijarlos con respecto a las matemáticas. Objetivo de estas intervenciones es ratificar explícitamente la aceptación de un signo, cuyo uso y estatus están relacionados con el contexto matemático.

Goos (1996)	**Modelar el pensamiento matemático:** Verbalizar y proponer estrategias de solución de una tarea. Preguntar para clarificar, justificar y elaborar posibles respuestas estrategias de los estudiantes: Busca que los estudiantes asuman la responsabilidad de validar soluciones. **Hacer explícito los referentes matemáticos, convenciones y símbolos:** Etiqueta las convenciones como tradiciones que permiten la comunicación. **Fomentar reflexiones y autoevaluaciones:** Alienta a los estudiantes a ubicar y corregir sus errores. Utilizar las ideas de los estudiantes para establecer discusiones entre ellos. Retiene el juicio sobre las sugerencias de los estudiantes mientras invita comentarios o críticas de otros estudiantes. **Estructurar el pensamiento de los estudiantes:** Hace preguntas que provocan pasos estratégicos. **Fomentar discusiones exploratorias:** Presenta escenarios en los cuales pretende generar dudas o posibles nuevas tareas o preguntas frente a la tarea inicial. **Estructurar las interacciones sociales de los estudiantes:** Pide a los estudiantes que expliquen ideas y estrategias entre ellos.
Mortimer y Scott (2003)	**Moldear ideas:** Desarrollar las ideas propuestas por los estudiantes. Introducir un nuevo termino, parafrasear la respuesta de un estudiante; establecer diferencias entre las ideas propuestas. **Selección de ideas**: Centrar la atención en la respuesta de un estudiante; pasar por alto la respuesta de un estudiante. **Señalar ideas claves:** Repetir una idea, pedir que un estudiante repita una idea; promover intercambio de ideas entre estuantes; usar un tono de voz particular. **Compartir ideas:** Hacer que las ideas estén disponibles para todos los estudiantes. Examinar el entendimiento del estudiante. Explorar los significados que emergen de los estudiantes. Pedir a los estudiantes que aclaren ideas, escriban una explicación y revisar consensos que se den acerca de ciertas ideas. **Repasar:** Retomar e ir más allá de las ideas.

Tabla 2. Categorías Marotti (2009), Goos (1996) y Mortimer y Scott (2003)

Teniendo en cuenta estas categorías, empezamos a revisar las transcripciones, en busca de intervenciones que correspondan a cada una de estas categorías. Para este proceso, empleamos una tabla compuesta por 5 columnas: nombre de la categoría propuesto por el autor, descripción de la categoría, un código asignado por nosotros, un ejemplo de la categoría proporcionado por el autor y un ejemplo de las clases registradas en la cual hacemos referencia a los números de los renglones donde consideramos que se presenta la categoría.

En el transcurso de este proceso, evidenciamos que el análisis de las intervenciones en que el profesor promovía el desarrollo del discurso, lo estábamos realizando aislado del uso de tecnología digital, sumado a esto, algunas de estas categorías guardan similitudes entre sí, motivos que nos llevaron a replantear las categorías. Decidimos fusionar las categorías propuestas por Mariotti (2009), Goos (1996) y Motimer y Scott (2003), con el objetivo de establecer relaciones con los objetos de estudio de nuestra investigación, los cuales se enmarcan en las acciones del profesor para promover comunidades de discurso apoyadas en el uso de un programa de tecnología digital (GeoGebra). En la siguiente tabla presentamos cinco categorías de las cuales cuatro surgen de los tres referentes teóricos mencionados anteriormente y una es emergente, pues no guardan relación con las categorías propuestas en estos referentes. Para cada categoría establecimos unas subcategorías las cuales llamamos acciones del profesor.

Categoría	Acciones del profesor
1. Solicita a los estudiantes compartir las estrategias de solución a un problema que involucran el uso del programa o apoyarse en el programa para apoyar lo que comunica.	1. Pide a un estudiante que reconstruya el proceso realizado para la solución de la tarea propuesta.
	2. Realiza preguntas en relación a la forma en que los resultados de una tarea son obtenidos y cómo se llega a ciertas conclusiones.
	3. Solicita al estudiante que se apoye en el programa para ampliar una idea o comunicarla de forma más clara.
	4. Solicita al estudiante que aclare una acción realizada en el programa al momento de solucionar el problema propuesto
2. Recopila información relevante con la intención de focalizar la discusión en desarrollo y precisar ideas	1. Sintetiza los resultados obtenidos de las intervenciones realizadas
	2. Recoge ideas que establecen el foco de atención para destacar ideas o afirmaciones realizadas por los estudiantes cuando utilizan el programa.
	3. Institucionaliza el saber
	4. Reacciona para aclarar o precisar
3. Utiliza las ideas de los estudiantes para establecer discusiones entre ellos utilizando el programa para apoyar sus ideas.	1. Invita a los estudiantes a comparar las ideas expresadas por dos o más estudiantes sobre un mismo asunto .
	2. Transmite las dudas de un estudiante a los demás compañeros.
	3. Retoma las ideas de los estudiantes en las discusiones grupales y les da un valor de verdad a las mismas.
	4. Solicita a los estudiantes cuestionar los aportes realizados por sus compañeros.
	5. Pide a los estudiantes interpretar la idea expuesta por otro estudiante o por el profesor.
	6. Utiliza o parafrasea la respuesta de un estudiante con el propósito de generar discusiones
	7. Retoma las ideas que un(os) estudiante(s) ha(n) socializado y rescata su pertinencia.
	8. Pregunta por posibles argumentos que validen las producciones realizadas.
4. Fomenta reflexiones y autoevaluaciones de los estudiantes frente a sus ideas o las de sus compañeros cuando se discute acerca de una estrategia de solución de la tarea utilizando el programa.	1. Interviene con propuestas que generan incertidumbre
	2. Promueve la comunicación pidiendo a los estudiantes defender sus ideas frente a otras que surjan o que las invalidan
	3. Busca que los estudiantes evalúen sus propuestas y los de sus compañeros estableciendo su valor de veracidad.
	4. Propone nuevas variables que pretenden cuestionar una relación de dependencia.
	5. Cuestiona la validez de las afirmaciones solicitando contraejemplos a los estudiantes
	6. Indaga sobre las ideas o afirmaciones de los estudiantes para favorecer que ellos mismos revisen y modifiquen sus ideas e interpreten las de los demás.
	7. Acepta una propuesta o construcción errónea con el propósito de que los estudiantes lo evalúen.
	8. Explicita o resalta el punto crítico de la conversación
5. Promueve una cultura de comunicación en el aula.	Hace que los estudiantes presten atención a las intervenciones de sus compañeros con el objetivo de que se escuchen entre ellos y puedan opinar o refutar afirmaciones realizadas por sus compañeros.

Tabla 3. Fusión de las categorías

4. ANÁLISIS

Presentamos el análisis de tres clases. En estas nos centramos en el surgimiento de los diferentes aspectos discursivos. Para evidenciar el avance en el discurso, decidimos organizarlas teniendo en cuenta el objeto matemático sobre el cual se está conversando. Por tanto, los primeros fragmentos estarán relacionados con la definición de colinealidad, posteriormente se hablará sobre la definición de equidistancia y para finalizar se analizará los fragmentos relacionados con la construcción de un triángulo isósceles.

Para resaltar las acciones del profesor que promueven un avance en el discurso matemático de los estudiantes, en cada fragmento se hacen explicita una codificación teniendo en cuenta, el número de la intervención del profesor, la categoría y la acción realizada. Por ejemplo, [207, A.1.1] hace referencia a la intervención 207 de la transcripción del profesor, la Categoría 1 y la Acción 1 de la herramienta analítica. Con la intención de facilitar la lectura de los análisis presentados, al inicio de cada uno de estos, realizamos una tabla en la cual explicitamos las acciones del profesor evidenciadas en el fragmento y los aspectos discursivos que promueve.

4.1. CONSTRUCCIÓN DE LA NARRATIVA DEFINICIÓN DE COLINEALIDAD

Fragmento1. Evaluar que una construcción realizada en SGD cumpla las condiciones dadas

En la segunda sesión de clase observada, el profesor propone a los estudiantes resolver el Problema 1, utilizando Geogebra, en grupos conformados por tres personas.

Problema 1: Dados los puntos A, B, C, D y E, trazar una ruta que parta de A y llegue a A tal que: i) pase por B, C, D y E; ii) se realicen más de tres cambios de dirección; iii) el camino entre un punto y otro debe ser el más corto; iv) los recorridos se intersecan en los puntos A, B, C, D y E.

Después de que cada grupo solucionó el problema, se discutieron las construcciones propuestas. El profesor invita a los estudiantes a compartir con sus estudiantes el proceso de solución al problema propuesto: *¿Quién nos quiere compartir la figura que hicieron?* [**207, A.1.1**]. La invitación es aceptada por Sebastián, quien hace una construcción en la Tablet que se conecta al televisor. En ella se ven cinco puntos y Sebastián los mueve para que sean no colineales[2]. Mientras realiza esta construcción, expresa: *Estoy acomodando la figura* [211].

[2] Es pertinente aclarar que a la fecha los estudiantes no han estudiado en sus clases de geometría la relación de colinealidad

Esto lleva a que el profesor indague por la estrategia que está utilizando: *¿Por qué estás acomodándola?* [**213, A.1.4**]. Sebastián responde: *Porque ahí dice en el tablero* [214].

Con el propósito de involucrar a más estudiantes, el profesor manifiesta: *O sea, que hay que acomodarlas ¿o a alguien se le ocurre que no hay que acomodarlas?* [**215, A.3.4**]. La intervención del profesor lleva a que Gustavo proponga una explicación de la acción que realiza Sebastián: *Porque si no acomodamos los puntos, las líneas no van a tener la dirección (mueve la mano horizontalmente, en ambos sentidos para representar la dirección)* [217]. Dado que Gustavo en su intervención realizó una predicción de lo que pasaría si no se realiza la propuesta de Sebastián, el profesor interviene para generar incertidumbre respecto a lo que el estudiante acaba de decir: *¡Ah! ¿Qué pasará? Espera, Sebastián, a ver, una cosita. Trata de acomodar que queden tres puntos acá. Haz este punto E acá por favor (señala una posición en la pantalla que hace que A, D y E sean aparentemente colineales como se observa en la Figura 1)* […] *Entonces, ¿qué dice Sebastián, si se puede dejar ahí? ¿Y los otros puntos pueden quedar ahí? ¿y qué va a hacer ahora?* **[218, 222, A.4.1]**.

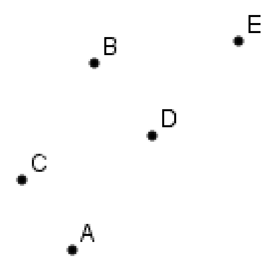


Figura 2. Representación de la solución propuesta por Sebastián

Mientras Sebastián realiza la Figura 3, expresa: *Hacer el polígono (...) pues completarlo (...) con los puntos* [223]. El profesor pregunta: *¿Y le sale polígono?* **[224 – A.4.3].** Sebastián responde afirmativamente [225].

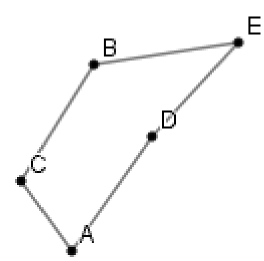


Figura 3: Polígono construido por Sebastián

El profesor valida la construcción y pide a los estudiantes evaluar si cumple todas las condiciones, esperando que ellos respondan que el cambio de dirección no se está cumpliendo [**226, A.4.7**]. Paola expresa: *Sí, pero profe. Se supone que tiene que tener más de tres cambios de dirección y ahí tiene* [236]. Gustavo agrega: *Pues es que yo no diría que es la misma (dirección) porque, digamos, aunque sea un poco difícil notarlo tiene un leve* *grado de inclinación […] por lo que terminaría ser una línea diferente. Tendría que ser completamente recta para ser es una sola (dirección)* [238, 240].

Dadas estas intervenciones, el profesor le indica a Sebastián nuevamente la posición de *E* para que los puntos se vean colineales, para enfatizar en el punto crítico de la discusión que busca generar: *Mueve el punto E. Acá (señala la posición del punto en la Figura 4). No, no, espera. Vamos a suponer que el punto E esta acá en el segmento DA […] ¿Qué pasará? […] ¿Cumple con todas las condiciones?* [**241, 243, 245, A.4.8].** Paula interviene: *Pues ahí tiene los cinco puntos que están diciendo ahí […] Eh, más de tres cambios de dirección* [249, 251]. El profesor le solicita ampliar su idea: *¿Cuántos hay? ¿Nos los puedes mencionar?* [**254, A.1.3**]. Paula dice: *Tres* [257]. El profesor cuestiona: *¿Cumple la condición?* [**258, A.3.6**], esperando que los estudiantes evidenciaran que la condición hacía referencia a más de tres cambios de dirección. Adriana interviene especificando que los cambios tienen que ser más de tres, por tanto, no se cumple con la condición [261]. El profesor concluye esta situación no se puede dar porque no cumple con la condición de cambios de dirección del problema [**262, A.2.1**].

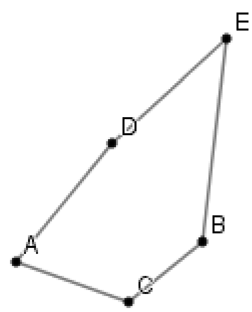


Figura 4. Modificación de la figura 2

ANÁLISIS

Acción	**Intervención**	**Vocabulario**	**Narrativa**	**Mediadores visuales**
A.1.1	207		X	
A.1. 4	213	X	X	
A.3. 4	215		X	
A.4. 1	218-222		X	X
A.4. 3	224		X	
A.4.7	226	X	X	X
A.4. 8	241- 245		X	X
A.1. 3	254		X	X
A.3.6	258		X	
A.2.1	262		X	

Tabla 4. Acciones fragmento 1

Vocabulario

La primera acción relacionada con el vocabulario se dio cuando el profesor solicitó a Sebastián aclarar una acción realizada en el programa (A.1.4). Esto debido a que, a raíz de la intervención de Sebastián [211] surge la palabra "acomodarlos", la cual está relacionada con el SGD. Teniendo en cuenta lo señalado por el estudiante [214], esta hace referencia a arrastrar los puntos hasta que cumplan la segunda condición, asociada a los cambios de dirección. En el transcurso de la conversación, se puede observar que, en posteriores intervenciones, el profesor emplea la palabra "acomodar" [213, 215, 218] para darle relevancia a lo expresado por el estudiante. Parece ser que desea que la clase tenga mayor claridad respecto al significado que Sebastián le asocia a esta palabra. Esto se ve principalmente cuando el profesor le solicita arrastrar un punto empleando la palabra "acomodar", la cual no es empleada por la comunidad matemática. La intención del profesor con esta acción es que el estudiante realice una descripción detallada de lo realizado en el SGD. Si bien pareciera que varios estudiantes comprenden a que se refiere su compañero cuando utiliza la palabra "acomodar", es necesario que describa su experiencia con el SGD para que haya un avance en la narrativa que se quiere construir: *Para construir dos segmentos que no tengan la misma dirección es necesario que estos no estén contenidos en la misma recta*. El propósito del profesor al emplear las mismas palabras expresadas por los estudiantes es transformar su vocabulario, lo cual en este fragmento no es posible evidenciarlo.

Adicionalmente, en este fragmento, se identificó el uso de dos términos (un especializado y otro no) que los estudiantes utilizaron para comunicar expresiones asociadas a la colinealidad: grados de inclinación y líneas diferentes. Respecto al término grados de inclinación, en la intervención realizada por Gustavo [238], el grado de inclinación está asociado con el ángulo determinado por tres puntos, en este caso, $\angle ADE$. Parece ser que el uso de las palabras "grado" e "inclinación" se deriva de experiencias anteriores. Así, por ejemplo, la palabra grado se ha utilizado en las clases de geometría cuando se ha trabajado con ángulos, puesto que se les ha solicitado clasificar ángulos respecto a su medida. El surgimiento de estas palabras se da porque el profesor solicitó a los estudiantes evaluar si una representación realizada en el programa cumplía la condición respecto a los cambios de dirección. El profesor acepta esta expresión en la medida en que lo expuesto por Gustavo puede ser cierto, pero cambiando una condición para centrar la atención en la colinealidad de tres puntos, el cual es el punto crítico de la conversación. En este sentido la frase "grados de inclinación" es utilizada para describir una condición que tiene la representación que hace que se generen dos segmentos diferentes. Respecto al término *línea diferente*, este surge en la explicación que realiza Gustavo [238]. El estudiante lo está utilizando para explicar que en la Figura 4 existen dos cambios de dirección. Evidenciamos que en algunos momentos de la conversación los estudiantes no emplean a cabalidad el vocabulario aceptado por la comunidad matemática como lo son "recta" o "segmento", pues al hacer referencia a estos objetos utilizan la palabra línea indiscriminadamente. Adicional a esto, el profesor acepta el uso de la palabra línea para referirse a los segmentos o a la recta porque surgen en un momento en él les solicita explicitar sus ideas usando sus propias palabras. El surgimiento de estas dos palabras se da cuando el profesor cuestiona lo expuesto por un estudiante, resalta el punto crítico de la conversación y solicita aclarar una acción realizada en el SGD. Las descripciones de los estudiantes de estos dos términos no especializados nos permiten interpretar sus nociones de las propiedades y relaciones matemáticas involucradas en el problema (v.g. colinealidad).

Narrativa: Para construir dos segmentos que no tengan la misma dirección es necesario que estos no estén contenidos en la misma recta.

Las acciones del profesor estuvieron enfocadas en propiciar que sus estudiantes produjeran narrativas relacionadas con la colinealidad. La primera acción se genera cuando pide a los estudiantes comunicar la forma como solucionaron el Problema 1 (A.1.1). Está relacionada con la colinealidad, debido a que, para poder solucionar el problema, el estudiante debía localizar en el SGD, cinco puntos tal que cada terna sea no colineal. Es precisamente a partir de la construcción que propone Sebastián y de la explicación de la misma, que se genera la segunda acción: pedir a los estudiantes que indiquen si están de acuerdo con lo expresado por Sebastián (A.3.4). Esta última solicitud del profesor da inicio a una conversación en la cual el profesor buscó que los estudiantes explicitaran la condición que le estaban atribuyendo a los puntos, en la construcción realizada.

Esto propició que los estudiantes pasaran de expresar que solucionar el problema implicaba "acomodar" los puntos para que se cumpliera la condición relativa a los cambios de dirección, a involucrar en sus expresiones las palabras *polígono, líneas diferentes* y *grado de inclinación* para describir propiedades que debía cumplir la representación dinámica que propuso Sebastián para garantizar los cambios de dirección solicitados. Para lograr esto, el profesor propuso una situación que pretendía generar incertidumbre respecto a la propuesta de Sebastián de acomodar los puntos (A.4.1); le solicita evaluar su respuesta cuando este utiliza la palabra polígono para describir la figura dinámica que construyó (A.4.3) y acepta una construcción que aparentemente no cumple las condiciones solicitadas, con el propósito de que los estudiantes la evalúen (A.4.7). Estas acciones hacen que Gustavo profiera una expresión que, usan términos no especializados y refiriéndose a la imagen proyectada, corresponde a una narrativa que sintetiza la discusión: "*Pues es que yo no diría que es la misma (dirección) porque, digamos, aunque sea un poco difícil notarlo tiene un leve grado de inclinación […] por lo que terminaría ser una línea diferente. Tendría que ser completamente recta para ser una sola (dirección)* [238, 240]. Consideramos que esta expresión está asociada a una narrativa aceptada por la comunidad matemática: *Si dos segmentos están contenidos en la misma recta, entonces no hay cambio de dirección.* Las últimas tres acciones del profesor estuvieron orientadas a que los estudiantes utilizaran esa narrativa, para explicitar que, en un ejemplo propuesto por él, no se cumplen las condiciones que pedía el problema.

Mediadores visuales

Las acciones que promueven el uso de mediadores visuales en la comunicación son: generar incertidumbre, solicitando a Sebastián que ubique un punto de tal forma que la condición de cambios de dirección no se dé (A.4.1); aceptar una construcción errónea con el propósito de que los estudiantes lo evalúen (A.4.7); resaltar el punto crítico de la conversación (A.4.8) y pedir a un estudiante que se apoye en el programa para ampliar una idea (A.1.3).

Por otro lado, las representaciones proyectadas en el televisor son mediadores visuales que apoyan la producción de los signos anteriormente mencionados. Además, son empleados para que las ideas expuestas sean asequibles y para validar el cumplimiento de una condición del problema. El uso recurrente de las imágenes proyectadas por el programa como mediadores visuales, es la causa de que la mayoría de las expresiones propuestas por los estudiantes se refieran a objetos que señalan en el tablero. Esto se debe a que las intervenciones de los estudiantes están arraigadas al programa, en vista que predominó la referencia a los mediadores visuales proyectados en el televisor y no se generaron verbalizaciones desvinculadas de este.

En fragmentos posteriores, al igual que en este, se evidencia que al usar los mediadores son recurrentes acciones como: Describir una acción mientras manipula el programa; señalar una parte de la figura proyectada; usar términos que hacen referencia a la imagen observada; emplear palabras que se refieren a las características de la figura que para todos es evidente. Debido a que esto ocurre en la mayoría de los fragmentos, no se realizará el análisis de estas acciones con el programa.

Fragmento 2. Comunicar el procedimiento para construir puntos colineales

En la primera parte de la tercera sesión de clase observada, el profesor solicitó a cuatro estudiantes ponerse de pie y ubicarse de tal forma que ellos estuvieran alineados. A raíz de esta situación, una estudiante (Paola) concluyó que alinear está relacionado con *Hacer una línea recta* [38]. Esta verbalización es apoyada por el profesor, quien indica que: *Tenía que ver con una línea recta* [39]. Luego, el profesor propone una actividad similar relacionada con equidistancia. Posteriormente, formula el siguiente problema, para ser solucionado en grupos [122]:

> *Problema 2: Construye 10 puntos en GeoGebra. Haz una configuración en la que los 10 puntos estén alineados y los puntos consecutivos estén igualmente separados.*

El profesor empieza la puesta en común después de que han transcurrido 15 minutos, el profesor empieza la puesta en común. Para ello, solicita a Sebastián reconstruir el proceso realizado para la solución de la tarea propuesta: *¿Qué tenemos que hacer para resolver esta actividad? […] Ahí ya están los 10 puntos ¿Cuéntanos con esos 10 puntos qué harías?* [**213, 217 – A.1.1**]. Sebastián responde: *Voy hacer una línea (Mueve los puntos como se observa en la Figura 4)* [218].

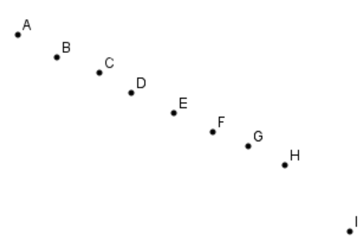


Figura 5. Ubicación de los diez puntos realizada por Sebastián

El profesor le solicita que verbalice lo que está haciendo, con la finalidad de que él explique la estrategia de solución empleada **[224, 226 – A.1.2].** Además, cuestiona la idea expresada por Sebastián, preguntando: *¿Una línea? Ahí no dice que tocaba hacer una línea, ¿o sí?* **[232, A.4.6].** Ello genera las siguientes intervenciones:

237.	Paola:	Ahí no se ve que estén perfectamente alineados. Si no tienes un segmento que …	
238.	Samuel:	(Interrumpe a Paola). Una cuadrícula.	
239.	Profesor:	¿O sea necesito otra cosa? ¿Qué necesitaría?	A.3.6
240.	Samuel, Carlos y Ricardo:	Una cuadrícula.	
	[…]		
244.	Sebastián:	Profe cogí … Rectas (Selecciona la opción segmento).	
	[…]		
247.	Profesor:	¿Cogiste rectas? ¿esa es la opción recta? ¿o esa es la opción que?	A.4.3
248.	Sebastián:	Segmento.	
249.	Profesor:	(…) ¿Qué piensan ustedes de esto que está haciendo su compañero?	A.3.4
250.	Sebastián:	(Realiza la Figura 6, construyendo $\overline{AB}, \overline{CB}, \overline{CD}$ y $\overline{DE}$)	

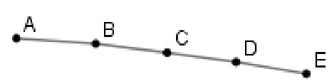


Figura 6. Construccion de segmentos consecutivos

	[…]		
255.	Profesor:	¿Funcionará o no? O alguien dice no, no funciona.	A.3.4
	[…]		
258.	Andrés:	Nos dicen que los puntos tienen que estar alineados, ahí no dice que tienen que ser segmentos ni nada de eso, entonces sí funcionaría.	
259.	Profesor:	¿Entonces sí funcionaría usar segmentos?	A.3.4
	[…]	(Adriana desvía la discusión preguntando por la equidistancia y proponiendo utilizar la cuadrícula para garantizarla)	
270.	Profesor:	Venga le activamos la cuadrícula acá (refiriéndose a la proyección de la tablet en el televisor). Díaz (apellido de Sebastián), active la cuadrícula acá.	A.2.2
	[…]		
275.	Sebastián:	(Ubica los puntos alineados utilizando la cuadrícula).	
276.	Profesor:	¿De esta manera se podría ubicar? (señala al televisor).	A.3.4
277.	Adriana:	(Asienta con la cabeza)	
278.	Profesor:	Aaah, venga y si yo no quiero tener la cuadrícula, porque qué tal que yo solo tenga una hoja blanca.	A.4.1

Acción	Intervención	Vocabulario	Narrativa	Mediadores visuales
A.1.1	213,217		X	
A.1. 2	224, 226		X	
A.4. 6	232	X	X	
A.3. 6	239		X	
A.4. 3	247	X		
A.3.4	249 255-259 276		X X X	X X X
A.2.2	270		X	
A.4.1	278		X	X

Tabla 5. Acciones fragmento 2

Vocabulario

La primera acción del profesor orientada a promover un cambio en el discurso respecto al vocabulario fue indagar sobre una verbalización proferida por Sebastián [218] en la cual indica que para resolver el problema va a construir "una línea" (A.4.6). Consideramos que es una acción referida al vocabulario, porque anteriormente, como se menciona al iniciar el Fragmento 2 se había concluido que para alinear puntos se necesita una línea recta. La segunda acción relacionada con vocabulario fue formular una pregunta que tenía como propósito que Sebastián evaluara el uso de la palabra recta para referirse a un segmento construido en el SGD (A.4.3). Si bien los términos recta y segmento son matemáticos, están asociados a las etiquetas (o nombres) de unas herramientas del programa, los cuales son recta y segmento. Aquí es importante aclarar que Paola, es quien introduce la palabra segmento en la conversación, ella utilizó esta herramienta para solucionar el problema propuesto durante el trabajo en grupos. Por su parte, Sebastián es quien introduce la palabra recta, no obstante, lo hace porque estaba nombrando la etiqueta que le asigna el programa a un conjunto de herramientas, que incluye la recta, el rayo y el segmento.

Los estudiantes utilizan indiscriminadamente los términos línea y recta como sinónimos. Esta palabra ha sido empleada en otras clases para referirse a la recta, incluso fue empleada en la sesión anterior para referirse los segmentos. Esta acción pretende que el estudiante utilice el nombre correcto de la herramienta empleada. Sin embargo, no tenemos certeza de que el estudiante sea consciente de las diferencias entre las dos herramientas que nombró.

Narrativa: Si un conjunto de puntos está alineado entonces pertenecen a una recta

Las acciones del profesor están orientadas a que los estudiantes verbalicen una narrativa correspondiente al procedimiento para construir diez puntos colineales en el SGD. Para ello, las primeras acciones del profesor es solicitarle a Sebastián que verbalice el procedimiento que él y su grupo efectuaron para solucionar el problema (A.1.1) y que explique el procedimiento que utilizó (A.1.2). Debido a esto, Paola interviene expresando que los puntos no están perfectamente alineados. Lo que propicia la tercera acción del profesor para generar una discusión sobre la necesidad de utilizar alguna herramienta del programa para garantizar que los puntos sean colineales (A.3.6). Esta acción conlleva a que Sebastián proponga utilizar segmentos, cuyos extremos sean los puntos que se quieren alinear, de tal forma que parezcan pertenecer a una sola recta. La cuarta acción, que se repitió cuatro veces, surge cuando el profesor solicita a los estudiantes evaluar si utilizar las propuestas de dos estudiantes, de utilizar las herramientas segmento y cuadrícula, permite solucionar el problema (A.3.4). En las intervenciones [256, 258] de Andrés, aunque pretende apoyar la propuesta de Sebastián, no se evidencia una postura clara sobre esta. Pareciera que él es consiente que necesita el uso de un objeto geométrico para cumplir la condición de alineación, sin embargo, interpretamos que el estudiante no ha evidenciado que los segmentos construidos por Sebastián pertenecen a rectas diferentes. La quinta acción se genera cuando el profesor acepta usar la propuesta de Adriana y le pide a Sebastián que la efectúe, para proyectarla en el televisor (A.2.2). Finalmente, la última acción es generar incertidumbre al proponerle a los estudiantes suponer que no se cuenta con la herramienta cuadrícula (A.4.1).

En la introducción al programa, el profesor había indicado que no se haría uso de la cuadrícula en el SGD. Sin embargo, debido a la insistencia de los estudiantes por emplearla, el profesor la acepta. Consideramos que la experiencia de los estudiantes al trabajar con papel cuadriculado, facilitó que Sebastián ubicara los puntos sin necesidad de ninguna instrucción. Es común que en el contexto escolar se solicite a los estudiantes guiarse por la cuadrícula para dibujar objetos geométricos. En el momento en que el profesor acepta usar la cuadricula, su intención es escuchar que tienen por decir los estudiantes sobre el uso de esta herramienta. Al no haber una verbalización por parte de los estudiantes, el profesor propone que la cuadricula se obvie, para escuchar nuevas propuestas que se hagan en el plano. Con esta acción, el profesor trata de cuestionar una narrativa que es válida en lápiz y papel, pero que no lo es en el programa.

Mediadores

Evidenciamos dos acciones dirigidas a promover el uso de mediadores visuales en la conversación. La primera es solicitarle a la clase que cuestione los aportes realizados por un estudiante (A.3.4), la cual aparece en tres ocasiones cuando solicita validar el uso y el nombre de una herramienta. La segunda, es generar incertidumbre respecto a una herramienta del programa (A.4.1).

Fragmento 3. Evaluar el uso de las herramientas recta y segmento para construir puntos colineales

Después de que los estudiantes propusieron utilizar la herramienta recta, segmento y cuadrícula, la discusión grupal giró en torno a propuestas para garantizar la equidistancia. Una de esas propuestas fue construir dos puntos A y B, y su punto medio C; dos puntos D y E, y su punto medio F; dos puntos G y H, y su punto medio I. Los puntos A, B, D, E, G y H se construyeron de tal forma que parecían colineales. El profesor pregunta: *¿qué objeto, cuando los puntos están alineados, por ejemplo, estos tres que están acá alineados (señala los puntos A, C y B) …? ¿qué objeto geométrico yo tengo ahí?* **[326, A.4.6]**, esperando que los estudiantes respondan que este es una recta. Saida responde: *Un segmento* [327]. El profesor cuestiona: *¿Siempre es un segmento?* **[328, A. 4.6].** Laura interviene diciendo: *Una recta* [329]. El profesor dice: *¿Una recta? Podría funcionar, ¿cierto? […] hagamos una* $\overleftrightarrow{AC}$.

Haz la $\overleftrightarrow{AC}$ *(dirigiéndose a Paola quien tiene la tablet conectada al TV)[…]¿Cómo hago…? ¿será qué el punto H pertenece a la recta?* (*en coro algunos estudiantes responden que no). Entonces tocaría como moverlo un (el punto) poquito ¿cierto?* (Figura 7) *¿Todos de acuerdo con qué estos puntos pertenecen a esta recta?* [330-340, A.3.6].

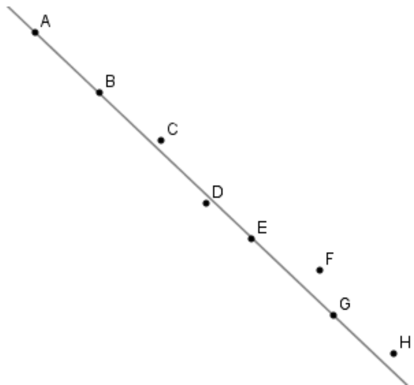


Figura 7. Construcción sugerida por el profesor

Francisco responde: *Sí* [341]. El profesor cuestiona: *¿O sea qué quiere decir que estén alineados?* **[342, A.4.6]**, esperando que los estudiantes expresen algunas ideas similares a las aceptadas por la comunidad matemática. Sebastián responde: *Que queden en la línea* [344]. Profesor: *¿que qué?* [345]. Carolina afirma: *Que quede sobre, sobre la línea* [346]. El profesor pregunta: *¿Sobre la qué?* **[347, A.4.6]**, con el objetivo que los estudiantes usen el vocabulario adecuado. Isabel manifiesta: *Sobre la misma recta* [348]. El profesor propone: *A bueno. Ahora has un segmento* [**349, A.3.1**]. Paola pregunta: *¿Un segmento? ¿cualquier segmento? (Construye* $\overleftrightarrow{JK}$ Figura 8*)* [350].

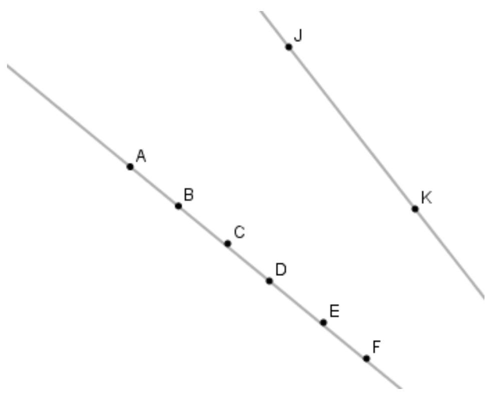


Figura 8. Construcción sugerida por el profesor

Debido a la construcción de Paola, el profesor expresa: *Eso sigue siendo recta. No, pon la función de segmento. ¡Ahí está! (señala con su dedo la opción de segmento apuntando al televisor* (Paola borra $\overleftrightarrow{JK}$ y construye $\overline{JK}$)*. Ahora yo necesito, digamos que, para este, hagan un punto … ustedes dicen que haga un segmento ¿será posible que un punto …? (Dirigiéndose a Paola) Crea otro punto por favor (Paola construye un punto M que no* *pertenece a $\overline{JK}$, como se observa en la Figura 9). ¿Será posible crear otro punto que esté alineado a estos dos, J y K, que no pertenezca acá? (señala el segmento construido por Paola). ¿Qué no pertenezca al segmento, es posible?* **[351 -356, A.4.1]**, con el propósito de generar incertidumbre en los estudiantes.

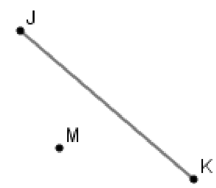


Figura 9. Construcción sugerida por el profesor

Andrés responde: *Sí.* [357]. Paola expresa: *No… (Arrastra el punto M de tal manera que este pareciera pertenecer a $\overline{JK}$ Ahí.* [358].

El profesor dice: *Ahí pertenece, ahora yo quiero que no pertenezca* [359, A.4.1]. Paola: *Listo. Ahí. (Arrastra el punto M de tal manera que este no pertenezca al $\overline{JK}$ y parezca alineado con los extremos de este segmento)* [360] .

Esperando que los estudiantes reflexionen sobre la propuesta de Paola, el profesor cuestiona: *¿Y ahí que sería? ¿Alineado o no?* **[361, A. 3.5]**. Paola afirma: *Sí, según yo alineado significa que, como si fuera en una línea infinita (mueve sus manos de izquierda a derecha juntándolas en tres ocasiones)* [364]. Eliana interviene: *En una línea imaginaria* [365]. El profesor explica: *pero miren que aquí ya no está el segmento, ¿o sea qué necesito? ¿Qué necesitaría? ¿seguiría necesitando un segmento? […]Yo dije, la discusión es la siguiente: ellos dicen, algunos compañeros dicen que puede ser un segmento, otros dicen una recta, vimos que en la recta podría funcionar y ahora unos dicen: no profe, un segmento […] Y yo le digo, ahora haga este punto A que no pertenezca al segmento. ¿Será que se puede alinear o no? ¿O tiene que pertenecer al segmento? ¿Tú qué dices?* **[366, 368, 374, 376, A.3.1]**, con el objetivo que la estudiante compare las dos propuestas y exprese su opinión. Isabel responde: *No se puede alinear* [377]. El profesor pregunta: *¿No se puede alinear?* **[378, A. 4.6].** Isabel: *Porque quedaría más ... (alza su mano moviéndola de izquierda a derecha) […] No, no se puede alinear* [379, 381]. El profesor dice: *No, ¿y qué haría para alinearlo?* **[382, A.4.6].**

ANÁLISIS

Acción	**Intervención**	**Vocabulario**	**Narrativa**	**Mediadores visuales**
A.4.6	326	X		X
	328		X	X
	342	X		
	345-347	X		
	378		X	
	382		X	
A.3.6	330 -340		X	X
	349		X	X

A.3.1	366-376	X	X	
A4.1	351 - 356 359		X X	X X
A.3.5	361		X	

Tabla 6. Acciones fragmento 3

Vocabulario

La primera acción enfocada a generar un cambio en el vocabulario fue indagar sobre las ideas de los estudiantes con el fin de que ellos revisen y modifiquen el uso de algunos términos (A. 4.6). Esta acción, en relación con el vocabulario se repite tres veces. La primera vez que se da es con el propósito de que los estudiantes expliciten el término correspondiente al objeto geométrico que les permite garantizar que un conjunto de puntos construido en el programa es colineal [326]. Esto lleva a que surjan en la conversación los términos segmento [327] y recta [329]. La segunda vez, es para que ellos expliciten el significado que le asocian a un término (alineados) que utilizaron para describir la construcción realizada [342]. Esto conllevo a que los estudiantes verbalizaran la relación entre la palabra alinear y recta, utilizando expresiones como “que queden en la línea” [344], “que queden sobre la línea” [346] y “que quede sobre la misma recta” [348]. En esta última expresión, si bien se usa el término especializado recta, se hace uso de la palabra “sobre”, la cual está asociada al SGD y pretende comunicar la relación de pertenencia.

La tercera vez que se emplea esta acción es para que Sebastián modifique el uso de la palabra línea por recta [345 - 347]. Esto lleva a que en la intervención realizada por Isabel [348] el profesor obtenga parcialmente lo que esperaba, lo cual es asociarle el significado que le están asignando a la palabra “línea” al término matemático “recta”. Si bien el profesor logra una corrección inmediata en el uso del vocabulario, posteriormente, en la intervención [364] de Paola, se evidencia que no alude a los objetos que se pueden alinear y continúa haciendo uso de una palabra no especializada como lo es “línea infinita”. La palabra “infinita” aquí se puede interpretar como una diferencia entre tipos de líneas (*v.g.* recta y segmento). Nos llama la atención la intervención de Eliana al emplear la palabra “línea imaginaria” [365], la utiliza para referirse a la recta. Consideramos que las dos estudiantes son conscientes que no es indispensable que la recta sea visible para que los puntos estén alineados, sin embargo, es necesaria para la construcción de estos puntos.

La segunda acción del profesor orientada a generar un cambio en el vocabulario es solicitar comparar dos propuestas de construcción (A.3.1). El profesor sintetizó las dos propuestas, modificando los términos utilizados por los estudiantes. Utilizó la palabra recta en lugar de línea imaginaria y el término pertenece en lugar de la preposición “sobre” [366 – 376]. Creemos que la intención de este cambio es que los estudiantes se apropien de estas palabras. Sin embargo, no aprovechó una oportunidad para generar un cambio explícito en el de uso de estos términos resaltando la necesidad de cambiar términos no especializados por matemáticos.

Narrativa: Un segmento no permite determinar si un conjunto de puntos está alineado

La primera acción del profesor relacionada con la construcción de esta narrativa es indagar sobre las ideas o afirmaciones de los estudiantes para favorecer que ellos mismos revisen y modifiquen sus ideas (A.4.6). Esta acción se utiliza tres veces, de tres maneras diferentes. En un primer momento, se emplea para evaluar el uso de una herramienta del SGD: el segmento [328]. Esto conlleva a que los estudiantes propongan una herramienta que contiene al segmento, es decir, la recta. En un segundo momento, para evaluar una afirmación respecto a la imposibilidad de utilizar una herramienta para garantizar la colinealidad de un conjunto de puntos [378]. Por último, para solicitar explícitamente modificar la construcción propuesta para evaluar si un conjunto de puntos es colineal [382]. La últimas dos veces que el profesor utiliza la acción A.4.6, los estudiantes tratan de explicar sus verbalizaciones o de proponer nuevas construcciones, pero no logra una verbalización inteligible.

La segunda acción para favorecer la construcción de la narrativa es utilizar las respuestas de los estudiantes con el propósito de generar discusiones (A.3.6). Solo surgió dos veces, y en cada una de ellas el profesor amplió la propuesta de dos estudiantes [327, 329], pidiendo efectuar una construcción que corresponde a la misma [330 – 340]. La tercera acción es invitar a los estudiantes a comparar dos construcciones (A.3.1). Concretamente, habiendo establecido que una construcción que involucra la recta, permite determinar si tres puntos son colineales, pide establecer si ocurre lo mismo si se usa un segmento. Para ello, solicita evaluar casos [366 – 376].

La cuarta acción del profesor, es realizar propuestas con el fin de generar incertidumbre respecto al uso del segmento para comprobar la colinealidad de tres puntos (A.4.1). La acción se realiza dos veces. En la primera ocasión, el profesor propone efectuar la construcción de un punto y un segmento, y pregunta si los extremos del segmento y el punto están alineados [351 – 356]. La propuesta genera incertidumbre, puesto que lleva a evaluar que hay casos en los cuales los puntos están alineados y casos en los que no. En la segunda ocasión, el profesor propone a los estudiantes construir un punto alineado con los extremos de un segmento, de tal manera que no pertenezca a este [359]. En el fragmento es evidente que la idea que tienen los estudiantes es que “tres puntos están alineados si existe un segmento que los contenga”. La propuesta que realiza el profesor, es para que ellos evidencien que la recta es el objeto que garantiza alinear varios puntos, incluso cuando estos no pertenezcan al segmento. Si bien es cierto que tres puntos están alineados si existe un segmento que los contenga, el profesor está intentando construir una definición de colinealidad acorde con la dada por la comunidad matemática. Pareciera que aún queda duda en algunos estudiantes acerca de determinar cuál herramienta del programa permite garantizar la alineación de los puntos, pese a los esfuerzos anteriormente mencionados por el profesor para que se de este cambio.

La quinta acción es pedir a los estudiantes interpretar una construcción propuesta por el mismo (A.3.5). Específicamente, solicita evaluar si en una construcción se cumple la condición solicitada [361]. Las acciones realizadas por el profesor y la interacción con el SGD permitieron que Paola manifestara que la recta es el objeto geométrico que permite garantizar la condición de alinear los puntos. Consideramos que en esta verbalización de Paola se evidencia un cambio en su discurso, pues en su intervención [237] del fragmento anterior, ella manifestó que el objeto que permite alinear los puntos es el segmento y ahora reconoce que es una línea infinita. No obstante, evidenciamos la ausencia de términos especializados.

Mediadores visuales

La primera acción del profesor que pretende generar cambios respecto al uso de mediadores visuales es indagar sobre las afirmaciones de los estudiantes para favorecer que ellos mismos modifiquen algunas ideas verbalizadas (A.4.6). Esta acción, surgió dos veces, y se usó para solicitar a los estudiantes expresar el término correspondiente a un mediador visual proyectado [326, 328]. Este corresponde a una figura en la cual tres puntos parecen colineales. La segunda acción es utilizar la respuesta de un estudiante con el propósito de generar discusiones (A.3.6). La acción, surgió dos veces, y está orienta orientada a favorecer el uso de mediadores visuales, porque el profesor construyó la propuesta de dos estudiantes y los mismos se constituyeron posteriormente en representaciones sobre las cuales posteriormente se apoyan tanto estudiantes como profesor para comunicarse entre sí [330 – 340, 349]. La última acción es intervenir con propuestas que generan incertidumbre (A.4.1). Está orientada a mediadores visuales porque, en un primer momento, el profesor construyó una figura en la cual gira gran parte de la conversación [352 - 356], y que luego, solicita modificar [359].

En este fragmento, se destaca el gesto realizado por Paola en [363] que acompaña al uso de la palabra "línea infinita", ayuda al profesor a interpretar que se refiere a una característica de la recta, a la cual se le atribuye como un conjunto infinito de puntos. También se destaca que en el fragmento el profesor utiliza en varias ocasiones las representaciones graficas del programa para gestionar conversación.

Fragmento 4. Definir puntos colineales

El profesor explica: *Bien, toda esta discusión es para definir algo de alinear y alinear a partir de ahora lo vamos a llamar como colineal ¿Qué querrá decir…? ¡A bueno! Otra pregunta: ¿Cuántos puntos yo puedo alinear? ¿Puedo alinear 2?* **[416, 418, A.2.3],** con el propósito de que los estudiantes aporten ideas para la construcción de la definición. Isabel responde: *¡Más de dos!* [419]. El profesor dice: *Más de dos ¿por qué?* **[420, A.3.6].** Isabel expresa: *Porque si hay uno no se puede alinear y si hay dos, se pueden alinear* [421]. El profesor cuestiona: *¿Pero necesito 2 o más?* **[422, A.4.6]**, indagando sobre la afirmación para favorecer que la modifique. El profesor dice: *[…] Entonces cómo podríamos definir colinealidad, para que ustedes me ayuden a escribir* **[427]**.

Paola responde: *Según yo, colineal significa que todos estén alineados (mueve sus dedos de izquierda a derecha) sin necesidad de tener la línea que está ahí, sino que estén alineados como si hubiera una línea imaginaria* [428]. Andrés interviene*: Otra línea* [436]. El profesor dice: *Si yo tengo dos puntos acá (dibuja dos puntos sin nombrarlos) ¿yo ya puedo hablar qué estos dos son colineales? ¿Cuántos puntos necesito para hablar de colinealidad?* **[439, A.4.8]**, esperando que los estudiantes evidencien que se necesitan tres o más puntos. Adriana manifiesta: *Dos* [440]. El profesor pregunta*: ¿Dos o más? Si yo tengo dos puntos ¿Cuántas rectas yo puedo trazar ahí?* **[441, A.4.6]**. Sebastián responde: *Una* [442]. El profesor explica: *quiero que determinemos cuántos puntos se necesitan para ser colineales* [446]. Andrés interviene: *Profe, mira tenemos que mover ese punto a la recta (señala un punto que no pertenece a la recta construida en la* Figura 8. Construcción sugerida por el profesor [448]. El profesor cuestiona: *¿Sí? ¿entonces solo tendríamos que moverlo? […] la idea es entonces* *hablar de más de tres puntos ¿Por qué no hablar que dos puntos son colineales? Porque siempre que yo tengo dos puntos ¿Qué pasa? Puedo trazar qué…* **[449, 451, A.3.5].** Adriana y Camilo responden: *Una recta* [452]. Vanesa dice: *Una línea* [453]. El profesor pregunta: *qué necesito para que queden en una misma recta…* [456]. Paola interrumpe al profesor: *Toca arrastrar el punto a la recta* [457]. El profesor afirma: *Me tocaría moverlo, cierto. Por eso con dos ya está solucionado, pero con tres, con cuatro ¿qué me tocaría hacer?* **[458, A.3.5]**. Paola manifiesta: *Arrástralos hasta que se alinean en una dirección (junta sus dedos índices y luego los separa dibujando en el aire una recta)* [459]. El profesor dice: *Listo. Entonces yo voy a escribir por acá (en el tablero) ¿Cuántos puntos es que necesito?* **[460, A.2.3]**. Paola y Camilo responden: *Tres* [461]. El profesor continúa: *Tres o más. ¿listo? Entonces vamos a copiar (escribe en el tablero) tres o más puntos son colineales si… bueno ayúdenme a terminarla, tres o más puntos son colineales sí que…* [462, A.2.3], con la intención que los estudiantes aporten a la definición. Adriana propone: *Están en la misma recta* [463]. El profesor dice: *A listo (continua la escritura) si pertenecen a la misma recta* [465].

ANÁLISIS

Acción	**Intervención**	**Vocabulario**	**Narrativa**	**Mediadores visuales**
A2.3	416-418 460-462	X X	X X	
A.3.6	420		X	
A.4.6	422 441		X X	
A.4.8	439		X	
A.3.5	449-451 458		X X	

Tabla 7. Acciones fragmento 4

Vocabulario

En este episodio solo evidenciamos una acción del profesor orientada a favorecer el desarrollo del vocabulario, la cual surge en el momento de institucionalizar la definición de colinealidad (A.2.3). Esta se repite dos veces. En la primera ocasión, él busca que los estudiantes asuman que los puntos alineados y los puntos colineales son sinónimos [416-418]. En la intervención [428] de Paola, aunque la estudiante no nombra los objetos que se pueden alinear, parce ser que tiene interiorizado el concepto de colinealidad, puesto que es consciente que necesita la recta para la construcción, pero que no es necesario que esta sea visible. Adicionalmente, podemos observar que, en su intervención, ella no hace uso de la palabra recta, pero si hay cambio en su vocabulario, pues anteriormente usó la expresión “línea infinita” y ahora usa “línea imaginaria”, término introducido por Eliana [365] en el fragmento anterior. No evidenciamos acciones del profesor que promuevan un cambio en los términos no especializados (*v. g.* línea infinita y línea imaginaria) a especializados (*v.g.* recta). Esto se da, quizás porque el foco de atención del profesor es establecer la mínima cantidad de puntos necesarios para garantizar la colinealidad, debido a que esta es una característica de la definición.

En la segunda ocasión, se evidencia que, al escribir la definición en el tablero, el profesor realiza cambios de términos empleados por los estudiantes que pueden estar asociados al programa, como lo son “mover” y “arrastrar” los cuales son dinámicos. Adicional a esto, modifica términos como, “están” por “pertenecen” y “línea” por “recta” [460-462]. Debido a que la intención del profesor es que la definición sea lo más parecida a la aceptada por la comunidad matemática, él ve la necesidad de modificar dichos términos dinámicos por vocabulario matemático sin hacer la salvedad de estos, no permite evidenciar un cambio en el discurso. El profesor institucionaliza una proposición condicional cuya sintaxis es similar a la propuesta por dicha comunidad.

Narrativa: Tres o más puntos son colineales si pertenecen a la misma recta.

La primera acción que utiliza el profesor para promover esta narrativa está relacionada con institucionalizar la definición de colinealidad (A.2.3), la cual evidenciamos dos veces en el fragmento. La primera vez que surge es cuando el profesor propone un nuevo tema de conversación relacionado con la cantidad mínima de puntos que se pueden alinear [416], la cual es una de las características de esta definición, con la intención que los estudiantes evidenciaran que eran más de dos puntos. La acción del profesor conlleva a que Isabel responde que se necesitan más de dos puntos [419, 421]. Al explicar su respuesta, se evidencia que ella está asociando la palabra alinear, con la existencia de la recta que los contiene, puesto que expresa que con un punto no es posible la alineación, pero si lo es con dos. La segunda vez que se puede apreciar esta acción es cuando sintetiza los resultados obtenidos y escribe en el tablero la definición de colinealidad [460-462]. Esto lo hace empleando las ideas que ya se habían conversado en la clase, la primera de ellas relacionadas con la cantidad de puntos necesarios y la segunda, la pertinencia de hacer uso de la recta.

La segunda acción es cuestionar la idea expuesta por Isabel [419], con el propósito de que ella desarrollo su verbalización (A. 3.6). La tercera acción del profesor para desarrollar esta narrativa, es indagar sobre las ideas de los estudiantes para favorecer que ellos mismos las revisen y las modifiquen (A.4.6), la cual se presenta en dos momentos. En el primero, aparece cuando cuestiona un argumento dado por Isabel [421], en el cual descarta la posibilidad garantizar un punto colineal. El segundo, surge cuando intenta que Adriana [440] modifique la propuesta de referirse a dos puntos colineales como cantidad mínima de puntos que pueden cumplir con esta condición [441]. Para ello propone a los estudiantes imaginarse la construcción correspondiente a la cantidad de rectas que contienen a dos puntos.

La tercera acción se presenta cuando el profesor realiza esfuerzos para que los estudiantes centren la conversación en los puntos mínimos que se pueden alinear (A. 4.8). La cuarta acción es solicitar interpretar lo expuesto por un estudiante (A.3.5). Esta acción se repite dos veces. En ambos casos se deriva de la propuesta que realizó Andrés de mover un punto a una recta [448]. En los dos momentos que surge, para que los estudiantes puedan interpretar la propuesta de Andrés, les solicita determinar lo que ocurrirá al efectuarla [451,458].

En general evidenciamos la intención del profesor por un cambio en la narrativa alinear, la cual empieza en el cambio de un término utilizado por los estudiantes y por las condiciones que se deben agregaren la definición. Es decir, hasta este momento los estudiantes habían construido una narrativa según la cual estar alineados significa que los puntos “queden sobre la misma recta”. El profesor para institucionalizar la definición de colinealidad se centra en modificar la narrativa que se había construido hasta el momento, introduciendo el termino especializado *colinealidad,* discutiendo con la clase la cantidad mínima de puntos que debe incluir la definición e institucionalizando una definición que corresponde a una condicional.

Mediadores visuales

No evidenciamos acciones del profesor para promover el uso de mediadores visuales para apoyar lo que ellos comunican, pese a que en momentos de la conversación se hace alusión a una construcción previa en el SGD y una representación realizada por el profesor. Por otro lado, en [459] Paola realiza un gesto que apoya lo que está diciendo. En este caso hace alusión a la palabra “dirección”, la cual podemos interpretar como que los puntos pertenecen a una misma recta dada la conversación del 10 de mayo y además por el gesto realizado, en el cual dibuja una recta en el aire con sus dedos.

Fragmento 5. Sintetizar lo acontecido en la clase anterior

Para iniciar la clase, el profesor le solicita a José comunicar lo realizado la sesión anterior, preguntando: *¿Qué fue lo que hicimos?, ¿Qué te acuerdas que hicimos?* [1, A.1.1]. Dado que las respuestas de los estudiantes e centran en las definiciones institucionalizadas, el profesor les pide verbalizar la definición sin mirar en el cuaderno. Sebastián dice: *Alineados perfectamente* [15]. Debido a la respuesta de Sebastián, el profesor pregunta: *¿Quiénes?* **[16, A.3.6]**, con la intención que el estudiante de una respuesta más completa Sebastián responde: *Los puntos en un segmento* (Mueve horizontalmente la mano de adelante hacia atrás) [17]. El profesor le da la palabra a Paola, quien expresa: *Dos o más puntos son colineales, si pertenecen a la misma recta.* [21]. El profesor le pregunta a Paola *¿qué piensas con lo que dijo Sebastián? ¿Si estaría acorde con lo que tu acabas de decir? ¿Tiene concordancia o le faltaba algo? […]Sí, es que él dijo algo (dirigiéndose a Sebastián) ¿Qué fue lo que tú dijiste para que los demás lo escuchen?* **[22, 24 A.3.1]**. Sebastián responde: *Que están alineados perfectamente. Un segmento está alineado con unos puntos* [25]. El profesor pregunta: *¿Qué piensan de eso que dijo?* **[26, A.3.4]**, intentando que los estudiantes den su punto de vista con respecto a lo comunicado por su compañero. Sebastián interviene diciendo: *¡Una recta! ¡Una recta!* [27]. En este momento intervienen algunos estudiantes, haciendo referencia a características de la equidistancia, quizás, porque tanto colinealidad como equidistancia son palabras nuevas en su vocabulario, motivo por el cual tienden a confundirlas [29,41]. El profesor retoma la clase diciendo: *Estamos hablando de colinealidad que fue uno de los ejercicios que hicimos. Entonces Paola por acá nos decía que era: Tres o más puntos son colineales si …* **[47, A.2.3]**, con el objetivo de focalizar la clase, debido a la confusión que se estaba presentando en el uso de los términos. Paola completa diciendo: *Pertenecían a la misma recta* [48]. El profesor aclara: *Pertenecían a la misma recta. No hablamos de segmentos* [49, A.24].

ANÁLISIS

Acción	**Intervención**	**Vocabulario**	**Narrativa**	**Mediadores visuales**
A.1.1	1		X	
A.3.6	16	X		

A.3.1	22-24		X	
A.3.4	26	X		
A.2.3	47		X	
A2.4	49	X		

Tabla 8. Acciones fragmento 5

Vocabulario

Evidenciamos tres acciones del profesor para promover el vocabulario, cada una se repite solamente una vez. La primera es utilizar una expresión propuesta de Sebastián para generar una conversación (A.3.6). Específicamente se busca que los estudiantes identifiquen cual es el objeto al cual se le está atribuyendo la propiedad de alinear [16]. La segunda, es solicitar a los estudiantes cuestionar los aportes realizados por sus compañeros (A.3.4). Esta acción tiene el propósito de que el estudiante se percate que la definición de colinealidad hace alusión a una recta y no a un segmento, solicitando a los demás opinar frente a lo expuesto por Sebastián [26]. La cuarta acción es precisar el término correcto que debe usarse en la definición de colinealidad (A.2.4), explicitando que la palabra adecuada es recta.

En la intervención [15] de Sebastián, observamos que él hace uso de la expresión "perfectamente alineados", la cual fue introducida por Paola en el fragmento 2 (clase 17 de mayo) [237], cuando se conversaba sobre el problema propuesto. Podemos evidenciar que Sebastián con frecuencia emplea las ideas de sus compañeros para expresar las suyas.

El cambio en el discurso que se quiere generar en este fragmento es respecto al vocabulario utilizado para verbalizar la narrativa correspondiente a la definición de colinealidad.

Narrativa: Tres o más puntos son colineales si pertenecen a la misma recta.

Tres acciones son las que realiza el profesor para desarrollar esta narrativa. La primera es solicitar un recuento de lo acontecido en la clase anterior (A.1.1). Dado que en esta sesión la actividad propuesta giro entorno a solucionar un problema con el SGD, se esperaría que el recuento de los estudiantes estuviera relacionado con este asunto. No obstante, el recuento terminó centrándose en lo que se institucionalizó [1]. La segunda acción es solicitar una comparación de dos propuestas de definición de puntos colineales (A.3.1), una de las cuales incluía el uso de una recta y la otra, de un segmento [22, 24]. La tercera acción es institucionalizar la definición de colinealidad (A.2.3), solicitando a los estudiantes completar una expresión [47].

4.2. CONSTRUCCIÓN NARRATIVA DEFINICIÓN DE EQUIDISTANCIA

Fragmento 6. Cuestionar una definición propuesta por el profesor

Aunque en este fragmento no se usó el programa de geometría dinámica, consideramos importante analizarlo puesto que es el momento en el que surgen diferentes propuestas sobre lo que se puede interpretar como equidistancia. Dichas propuestas, trataran de ser replicadas por los estudiantes, en fragmentos posteriores, al hacer uso de Geogebra.

Al iniciar la tercera sesión de clase, el profesor propone a cuatro estudiantes alinearse. Después de ello, comunica a los estudiantes que iban a utilizar una nueva palabra, equidistante, y ellos expresan que este término lo asociaba a “la misma distancia”. Posteriormente solicita a los estudiantes ubicarse equidistantes. Siguiendo la indicación de Sebastián, “de a dos cuadritos”, ellos se ubican de forma colineal, dejando dos baldosas entre cada pareja consecutiva. El profesor les pregunta*: ¿De a dos cuadritos?, bueno, miremos a ver como lo lograrían [...] ¿ahí todos estarían equidistando? [...] ¿quién de quién?* **[21,22,24, A.1.2]**. Sebastián señala con su dedo a Carolina, a él mismo, a Ricardo y a Saida respectivamente y dice: *Ella, de yo, yo de él y el de ella* [25]. Para concluir la conversación, el profesor copia la siguiente definición de equidistancia en el tablero:

> D. equidistancia: *Dos o más parejas de puntos son equidistantes si la distancia entre cada pareja es igual, es decir están igualmente separados* **[41, 51, A2.3]**.

Pablo realiza una pregunta relacionada con la definición anotada en el tablero: *Profe, ¿cómo así que la distancia de cada pareja?* [65]. El profesor explica: *Cada pareja de puntos. Acuérdense que este era Sebastián (dibuja un punto en el tablero y lo nombra D refiriéndose a la inicial del apellido); por allá estaba Saida (dibuja un punto en el tablero que nombra con la letra C); por allá estaba (...) Carolina y Ricardo [...] (Coloca otros dos puntos a los que etiqueta A y S y que aparentemente son equiseparados) Pregunto, ¿Esta es la única forma de tener equidistancia o habrá otra forma***? [66,68,70, A.3.5]**. Saida interviene: *Pueden tener diferentes direcciones (rota su antebrazo izquierdo moviendo el antebrazo de arriba a abajo)* [75]. Aunque el profesor trata de no ahondar en esta propuesta, Paola intervine: *Resulta que la definición de equidistancia no necesariamente tiene que formar una línea recta (mueve su mano horizontalmente de izquierda a derecha), sino que tiene que tener la misma distancia entre dos (parejas de) puntos y puedo hacer una figura [dibuja en el aire los vértices de un pentágono], depende que sea equidistante* [79]. El profesor le solicita realizar un ejemplo para desarrollar su idea **[80, A.3.8]**. Paola realiza en el tablero un gráfico de un triángulo equilátero y dice: *Podría haber equidistancia porque tiene la misma…* [85] Andrés añade: *Distancia* [86]. Paola menciona: *Sí, cantidad.* [87]. El profesor expresa: *Con esa idea ahorita vamos a hacer el ejercicio* [88]. Como Sebastián tenía levantada la mano, el profesor le da la palabra [90]. Sebastián pasa al tablero y realiza un gráfico (Figura 10) [91]

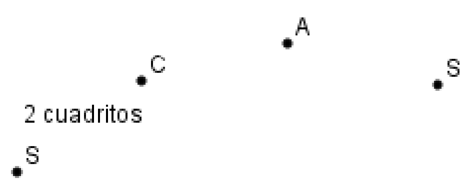


Figura 10. Dibujo en el tablero realizado por Sebastián

Andrés afirma: *Eso no tiene la misma medida* [92]. Paola dice: *Eso no es equidistante* [93]. Sebastián les añade: *Supongamos, supongamos (continúa dibujando)* [94]. El profesor menciona: *¿Qué quieres comunicarnos ahí?* **[95, A.1.2]**, con la intención que el estudiante se exprese de manera más clara. Sebastián explica. *Que por ejemplo acá está ella (señala el punto S con una mano derecha y con la izquierda a Carolina, indicando que S representa a Carolina); por acá estaba, Ricardo (señala a Ricardo y al punto C), por acá estaba Saida y* *que…* [96]. Ricardo lo interrumpe, pero el profesor le pide que primero escuche la idea de Sebastián, para lo cual le solicita a este último explicar nuevamente Sebastián dice: *Que acá estaba Juana (Señala a Juana Carolina), acá estaba yo, y acá estaba Saida (señala los puntos dibujados en el tablero con el marcador), entonces no necesariamente, (hay) una línea ahí* [99].

ANÁLISIS

Acción	**Intervención**	**Vocabulario**	**Narrativa**	**Mediadores visuales**
A.1.2	21-24 95		X	 X
A.2.3	41-51	X	X	
A.3.5			X	
A.3.8	80			X

Tabla 9. Acciones fragmento 6

Vocabulario

Identificamos una acción del profesor para promover el desarrollo del vocabulario, la cual es institucionalizar la definición de equidistancia (A.2.3). Esta se desarrolla tomando la representación inicial de los cuatro estudiantes, la explicación de Sebastián en la cual específica las parejas estudiantes que equidistan y las representaciones de Paola y Sebastián realizadas en el tablero de otras formas de equidistar diferentes a ubicar puntos en una recta.

Por otro lado, destacamos las intervenciones de Andrés y Paola cuando hacen unos de las palabras distancia y cantidad respectivamente. Interpretamos que cuando Andrés dice la palabra “distancia” hace referencia a un número, en este caso la longitud de los segmentos de un triángulo. Por su parte, cuando Paola menciona la palabra “cantidad” [87], esta se puede asociar a una unidad de medida. Suponemos que ella puede estar haciendo referencia a la cantidad de lados de los cuadrados del tablero que contienen los segmentos dibujados.

Narrativas. Existen varias formas de ubicar puntos equidistantes en el plano.

Tres acciones son realizadas por el profesor para promover el desarrollo de esta narrativa. La primera es preguntarle a Sebastián que especifique las parejas de estudiantes equidistantes (A.1.2). Esta acción promueve que Sebastián nombre consecutivamente las parejas de estudiantes que cumplen la equidistancia. La segunda es institucionalizar la definición de equidistancia (A.2.3). Es pretencioso decir que el profesor construyó la definición a partir de las intervenciones de los estudiantes. Sin embargo, varias preguntas que él realizó antes de escribir la definición, estuvieron orientadas a que ellos identificaran las características relevantes de esta relación entre puntos: la misma distancia [18], y la referencia a las parejas de puntos [25]. La tercera es solicitar a los estudiantes que piensen en diferentes formas en que pueden estar ubicados los puntos y seguir siendo equidistantes (A.3.5). Esto conlleva a que Paola exprese otro ejemplo en el cual se pueden ubicar los puntos equidistantes sin necesidad de que sean colineales [79], haciendo referencia al uso de polígonos regulares.

Rutinas

Las representaciones realizadas por los estudiantes a objetos geométricos en lápiz y papel cuadriculado (o en el tablero) por lo general, tienen como unidad de medida el lado de cada cuadrado de la cuadrícula. Lo anterior, se evidencia en la representación realizada por Sebastián (Figura 10), en la cual, pese a que los puntos no son colineales, para garantizar que sus compañeros y profesor comprendan su idea, el escribe la expresión "2 cuadritos", la cual, aunque no sea posible en vista de la ubicación de los puntos (en forma de arco), hace referencia a la separación entre cada pareja consecutiva de puntos. Esta es una rutina, que más adelante intentarán utilizar en el programa.

Mediadores visuales

Identificamos dos acciones del profesor para promover el uso de mediadores visuales en la conversación. La primera es preguntar por posibles formas de ubicar puntos equidistantes diferentes a que estos estén ubicados en una recta (A.3.8). Esto lo podemos evidenciar porque durante su verbalización ella hace una representación de los vértices de un pentágono en el aire. Posteriormente, gracias a esta acción, ella dibuja un triángulo equilátero en el tablero para explicar su idea [85]. En el momento en el que ella estaba realizando esta representación, Andrés la interrumpe, completando lo que ella quiere comunicar [86].

La segunda acción es pedirle a Sebastián que explique el mediador visual que dibuja en el tablero. Podemos observar que Sebastián en su explicación se limitó a expresar que cada punto representa a los estudiantes que realizaron el ejercicio de ejemplo, pues no ahonda en la idea de equidistancia. Es posible que esto suceda, porque ninguno de sus compañeros, ni el profesor indagó sobre la expresión "2 cuadritos", la cual el estudiante le está asociando a la distancia que deben conservar cada pareja consecutiva de puntos. En esta expresión podemos evidenciar que él está asociando una cantidad ("2") y una unidad de medida ("cuadritos") a la distancia que conserva cada pareja de puntos consecutivos.

Fragmento 7. Usar instrumentos ajenos al programa para hacer construcciones en SGD

El profesor propone desarrollar el Problema 2 [122]. Durante aproximadamente 15 minutos, los estudiantes propusieron diferentes formas de alinear los puntos, las cuales fueron analizadas en la narrativa de colinealidad. Mientras esto sucede, Adriana propone un nuevo tema en la conversación, ella menciona*: Pero no se sabe sí tienen la misma distancia* [260]. El profesor, le pregunta: *¿Y entonces qué hago para que me quede de la misma distancia?* **[263, A.1.2]**, con la intención de que desarrollara su idea. Adriana responde: *Con la cuadrícula* [264]. El profesor apoya esta idea [272, A.4.7] y le solicita a Sebastián que construya tres puntos con ayuda de la cuadrícula, los cuales parecen equidistantes [275]. El profesor señala al televisor y pregunta: *¿De esta manera se podría ubicar?* **[276, A.3.4]**. Adriana asienta con la cabeza. El profesor le expresa: *y si yo no quiero tener la cuadrícula, porque qué tal que yo solo tenga una hoja blanca* **[278, A.4.1]**, con el propósito de generar incertidumbre. Debido a que el profesor invita a los estudiantes a no hacer uso de la cuadrícula, Eliana hace la siguiente propuesta: *Voy a coger un esferito o una regla y la voy a colocar aquí adentro (coloca un esfero en la tablet) […] voy a hacer unos puntos (intenta construir los puntos teniendo al esfero como referencia) y a unirlos con segmentos* [288, 291]. El profesor invita a los estudiantes a opinar acerca de esta idea **[292, A.3.4]**. Sin embargo, algunos estudiantes manifiestan dudas, por lo cual el profesor parafrasea lo dicho por Eliana: *voy a colocar un esfero y voy a crear unos puntos con respecto a ese* (refiriéndose al esfero) **[294, A.3.6]**. Paola la cuestiona diciendo: *¿Pero ahora cómo lo harías equidistante? ¿qué tenga la misma distancia entre cada punto*? [296], mientras que otros estudiantes como Ricardo y Andrés apoyan el uso de un objeto externo al programa como regla o esfero para garantizar la igualdad de distancias [298, 299].

ANÁLISIS[3]

Acción	Intervención	Vocabulario	Narrativa	Mediadores visuales
A.3.2	263		X	
A.4.7	272		X	
A.3.4	276 292		X X	 X
A.4.1	278		X	X
A.3.6	294		X	X

Tabla 10. Acciones fragmento 7

Vocabulario

No evidenciamos acciones del profesor para promover el desarrollo del vocabulario, pues a diferencia de otras ocasiones, esta vez el profesor no enfatiza en que los estudiantes expresen ideas completas y sintaxis de las oraciones [263]. Sin embargo, analizaremos la intervención [260] de Adriana. En esta, ella no hace explicito el sujeto de la oración que profiere. Consideramos que esto se debe, a que en el televisor se encontraba proyectada la construcción propuesta por Sebastián [250] (Figura 6. Construccion de segmentos consecutivosFigura 6), lo que facilita que los demás sean conscientes de los objetos a los cuales se están refiriendo.

Narrativa. Procedimientos relacionados con formas ubicar puntos equdistantes

Identificamos cinco acciones del profesor para desarrollar esta narrativa. La primera es transmitir la duda planteada por Paola a los demás estudiantes (A.3.2), lo que conlleva a Adriana a proponer el uso de la cuadrícula. La segunda acción es solicitar a un estudiante cuestionar la construcción o propuesta de un estudiante (A.3.4), la cual ocurre dos veces. La primera sucede cuando pide a Adriana cuestionar la construcción realizada por Sebastián de los puntos equidistantes empleando la cuadrícula y la segunda, cuando solicita a los demás opinar acerca de la propuesta de Eliana de usar un objeto externo al SGD. La tercera acción es generar incertidumbre, preguntando a los estudiantes por otras formas de solucionar el problema sin hacer uso de la herramienta cuadrícula (A.4.1). La cuarta acción es parafrasear la propuesta de Eliana (A.3.6), para que esta sea más clara para los demás. La acción permite a Paola indagar acerca de cómo garantizar la equidistancia de los puntos.

[3] En este análisis, a diferencia de los presentados anteriormente, se aborda el aspecto discursivo *rutinas*, el cual hace parte de experiencias de los estudiantes con el uso del papel cuadriculado.

Mediadores visuales

Evidenciamos tres acciones del profesor para incentivar el uso de mediadores visuales en la conversación. La primera acción es solicitar a un estudiante cuestionar la construcción o propuesta de un estudiante (A.3.4), la cual ocurre cuando solicita a los estudiantes cuestionar la propuesta de Eliana de usar un objeto externo al SGD. La segunda acción es generar incertidumbre, en la cual solicita que el uso de la herramienta cuadrícula se restrinja (A.4.1), con el propósito de que los estudiantes generen otras propuestas más robustas. La tercera acción es parafrasear la propuesta de Eliana (A.3.6), puesto que para algunos no fue clara envista que usa un objeto externo al SGD. Estos objetos permiten materializar el objeto geométrico (recta o segmento) que garantiza la colinealidad de los puntos.

Adicional a estas acciones, destacamos que en esta conversación, gracias a la construcción que se encontraba proyectada en el televisor (Figura 6), se facilitó la comunicación entre los estudiantes y el profesor. Esto se debe a que en la representación se hacen explícitos los objetos y la condición sobre la cual se quería cuestionar. Consideramos que esta situación causa que los estudiantes y el profesor no evidencien la necesidad de explicitar los puntos a los cuales se les asocia la relación de equidistar, comunicando la idea incompleta.

Rutinas

En el análisis de fragmentos anteriores sobre colinealidad, mencionamos que la cuadrícula garantiza la colinealidad de los puntos. En este caso, también permite la igualdad de distancia entre parejas de puntos, la cual es restringida debido a las pocas opciones que se tienen para ubicar los puntos, puesto que los estudiantes lo hacen teniendo en cuenta los extremos de los cuadrados de la cuadrícula.

Consideramos que esta es una rutina que es consecuencia del contexto escolar, debido al trabajo con lápiz y papel en diferentes asignaturas, lo que conlleva a que ellos repliquen estas acciones en el programa sin mayor éxito, pues no es una construcción robusta.

Uno de los esfuerzos que realiza el profesor es generar un cambio en esta rutina [278], cuando propone trabajar sin ella con la intención de que los estudiantes utilicen otras herramientas del programa que permitan una construcción robusta. Sin embargo, la propuesta de Eliana [288,291] no es acorde con el propósito del profesor, pues en esta ocasión, ella emplea un objeto ajeno al programa, el cual no garantiza siempre la colinealidad ni la equidistancia de los puntos. Observamos que el profesor en [294], se enfoca en que los estudiantes opinen acerca del procedimiento realizado por Eliana y por tanto intenta parafrasear su propuesta, con la intención de que los estudiantes se den cuenta de las inconsistencias que pueden presentarse con esta idea. Es aspecto discursivo que el profesor quiere desarrollar es la narrativa relacionada con el procedimiento de solución del Problema 2.

Esta acción conlleva a que Paola en [296] acepte el uso de un objeto externo del programa para garantizar la colinealidad, sin embargo, no le es evidente como garantizar la equidistancia por medio de ese objeto. Como respuesta a esta inquietud observamos que Ricardo [298] y Andrés [299] aceptan el uso de otras herramientas que se emplean para tomar medidas o para establecer patrones de medición, por ende, las validan, aunque estas no pertenezcan al programa.

Fragmento 8. Proponer construcción para generar puntos equidiseparados y colineales

El profesor invita a otros estudiantes a proponer distintas formas de dar soluciones al Problema 3 con apoyo de las herramientas del programa [303, A.1.1]. Paola solicita la palabra, ella dice: *Habría que utilizar las herramientas y una de las herramientas dice (...) creo que es construcción (refriéndose al nombre de un menú de GeoGebra App) y tú pones un punto y … […] Aquí hay una opción que dice medio o…. el caso es que, si yo pongo un punto acá y otro, entonces me da uno con la misma distancia (construye en la tablet los puntos A y B y su punto medio C). Me parece que sería más fácil, pero de pronto aquí dice medio centro… espera* [311, 313]. En este momento, debido a que la explicación de Paola es un poco ambigua, el profesor interviene diciendo: *¿Entonces qué hiciste?* **[314. A.1.4]**. Paola responde: *Entonces podríamos poner un punto acá (construye los puntos D y E y su punto medio F), y seguir haciendo* [315] (Figura 11).

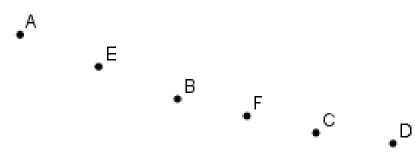


Figura 11. Construcción propuesta por Paola

Durante las intervenciones de Paola, se presentaron algunas acciones del profesor **[308, 310, 312, 314, A.1.2],** las cuales tenían la intención de que la estudiante presentara el procedimiento empleado de forma completa y que fuera accesible para los demás. Seguido a esto, Andrés susurra una objeción a la idea de su compañera [316] y el profesor lo invita a expresar su punto de vista para todos **[317, A.4.2].** Andrés dice: *Es que ahí no están […] Es que, antes de empezar, el punto A y D, la distancia no era la misma. Pero es que entonces es muy difícil hacer que …* [318, 324]. Paola lo interrumpe: *Es que en esta construcción sí sé que (si) yo hago un punto acá y hago otro inmediatamente al lado, me hace un punto intermedio con la misma distancia entre dos puntos. Entonces me parece un poco más fácil. Pero no sé* [325]. Seguido a esto, el profesor pregunta: *¿qué objeto, cuando los puntos están alineados, por ejemplo, estos tres que están acá alineados (señala los punto A, C y B* Figura 11*), qué objeto geométrico yo tengo ahí?* **[326, A.3.8]**, con el propósito de que los estudiantes relacionen que la herramienta centro o medio con el punto medio de un segmento, el cual ya había sido estudiado anteriormente. Sin embargo, la conversación se desvió a recordar las ideas expuestas anteriormente de colinealidad y no surge el efecto que el profesor esperaba y por tanto la propuesta de Paola queda inconclusa.

ANÁLISIS

Acción	Intervención	Vocabulario	Narrativa	Mediadores visuales
A.1.1	303		X	
A.1.4	314		X	
A.1.2	308-314		X	

A.4.2	317		X	X
A.3.8	326		X	X

Tabla 11. Acciones fragmento 8

Vocabulario

No evidenciamos acciones concretas del profesor para promover un desarrollo en el vocabulario. Sin embargo, destacamos algunos asuntos que se presentan en el uso de las palabras de Paola y Andrés. En las intervenciones [311, 313, 315] Paola comunica una descripción del procedimiento que ella realizó en el programa para dar solución al Problema 3. En algunas ocasiones se evidencia que las frases que está profiriendo no son en su mayoría completas. Esto se puede apreciar porque la estudiante va hablando a medida que está pensando, lo que conlleva a que el profesor intervenga en [314], con la intención de que ella se exprese mejor. Gracias a esta acción Paola parece notar que su explicación no está siendo clara y trata de corregirla. En la intervención [325] podemos observar que Paola estructurar mejor la idea que quiere comunicar, pues hay un intento por ser más descriptiva e involucra términos como *intermedio* y *misma distancia* los cuales están asociados a la interestancia y a la equidistancia respectivamente. Nos llama la atención que en este fragmento no es el profesor quien solicita a la estudiante repetir su idea para que esta sea más clara, sino que es ella quien se ve en la necesidad de expresarla mejor.

Evidenciamos que en la intervención de Andrés [324], aunque el estudiante expresa que los puntos no son equidistantes, no hace explicito las parejas de puntos con los cuales compara las distancias. Por el contrario, en las intervenciones de Paola [313, 315], ella sí hace referencia a las parejas de puntos cuyas distancias se comparan. Al parecer estas dos situaciones, no generan inconvenientes en el desarrollo de la conversación, quizás por los mediadores visuales proyectados en el televisor.

Narrativa: La herramienta medio o centro permite construir el punto medio de dos puntos

Evidenciamos cinco acciones del profesor orientadas a desarrollar esta narrativa. La primera acción, es solicitar a los estudiantes comunicar el proceso de construcción del problema 2 (A.1.1), lo que incentiva a que Paola se anime a hacerlo. La segunda, es solicitar a Paola que aclare una acción realizada en el SGD (A.1.4), con la intención de que fuera más concreta y clara en su explicación. Esto lleva a que la estudiante nuevamente explique su idea especificando los puntos medios construidos.

La tercera acción, es realizar preguntas en relación a la forma en que los resultados de la propuesta de Paola fueron son obtenidos (A.1.2). En la intervención [325] ella explica las razones por las cuales su construcción garantiza la equidistancia de dos parejas de puntos[4] (las formadas por el punto medio con cada uno de los puntos construidos inicialmente). En esta verbalización observamos algunas características de la definición de punto medio. La primera está relacionada con la interestancia, la cual es empleada por la estudiante con el

[4] La herramienta empleada por Paola, medio o centro, no es exclusiva para la construcción del punto medio de un segmento, pues permite construir el punto medio de dos puntos y centro de una cónica (circunferencia, elipse e hipérbola). Paola construyó el punto medio de dos puntos, lo cual el programa lo asocia a construir el punto medio de un segmento, sin la necesidad de trazar el segmento.

término *intermedio.* Este es usado por Paola para indicar que el punto que genera la herramienta esta entre los dos puntos construidos inicialmente. La segunda característica es la equidistancia, la cual es expresada por Paola como la misma distancia entre dos parejas de puntos.

La cuarta acción está dirigida a promover la comunicación pidiendo a Andrés expresar una objeción a la propuesta de Paola para que ella la defienda (A.4.2). Esto genera que la estudiante nuevamente haga uso del término *intermedio* para referirse a la colinealidad de los extremos y el punto que se genera con la herramienta, sin explicar cómo garantiza la colinealidad de los demás puntos construidos. Otro aspecto a tener en cuenta es que debido al nombre de la herramienta (medio o centro) es posible que Paola predijera lo que iba a suceder sin la necesidad de recordar la definición de punto medio, en vista que el nombre de esta es disiente y cuando la selecciona el programa especifica el objeto que debe elegir.

La quinta acción, es preguntar por posibles argumentos que validen la propuesta de Paola de tal manera que los estudiantes asocien la herramienta medio o centro con la definición de punto medio, para darle el uso adecuado y que sea una solución óptima al Problema 3(A.3.8). Es por esto que el profesor quiere que los estudiantes mencionen la colinealidad de los puntos y lo relacionen con la condición de la definición estudiada de punto medio [326], para este caso que "C pertenezca al", acción que queda inconclusa y no promueve un cambio específico en la narrativa.

Mediadores Visuales

Evidenciamos dos acciones dirigidas a que los estudiantes se apoyen en los mediadores visuales para comunicar sus ideas. La primera, recae en la solicitud de posibles argumentos que validen la condición de colinealidad de tres puntos de la construcción realizada por Paola (A.3.8). Esta acción queda inconclusa, pues los estudiantes no centraron su atención en la pregunta realizada por el profesor. La segunda, ocurre cuando el profesor invita a Andrés que exponga su punto de vista acerca de la propuesta de Paola (A.4.2). Esta permite que el estudiante se apoye en el mediador visual para explicar que en la Figura 11 que se proyecta en el televisor, los puntos no están equiseparados, pues la equidistancia no se cumple para varias parejas de puntos, aunque no las explicitó.

Fragmento 9. Usar la herramienta circunferencia para garantizar equidistancia

Mientras que en la clase se estaba dialogando acerca de cómo alinear los extremos de un segmento y un punto que no pertenezca a este, el profesor pregunta sobre el objeto geométrico que permite alinear los puntos [388, A.3.8], lo que conlleva a que Camilo proponga: *Y si pones circunferencia y pones una línea adentro o sea una línea perfecta (mueve sus antebrazos de izquierda a derecha) o sea una línea o un segmento* [389]. El profesor le solicita Paola, quien tiene la tablet conectada al televisor: *A ver, intenta hacer lo que él dice a ver ¿Cómo lo harías tú? Todos mirando allá (el TV) para ver si Paola sigue las instrucciones que dice Camilo, ¿listo?* [390, A.3.5]. Paola construye una circunferencia [391]. Camilo continua su propuesta: *Y ahora traza un segmento de … desde el centro de un lado a otro (Paola traza una recta que pasa por el centro de la circunferencia y un punto de esta como se observa en la* Figura 12*) […]. Ahí estaría bien, no importa, ahora alinea los puntos* [392, 394].

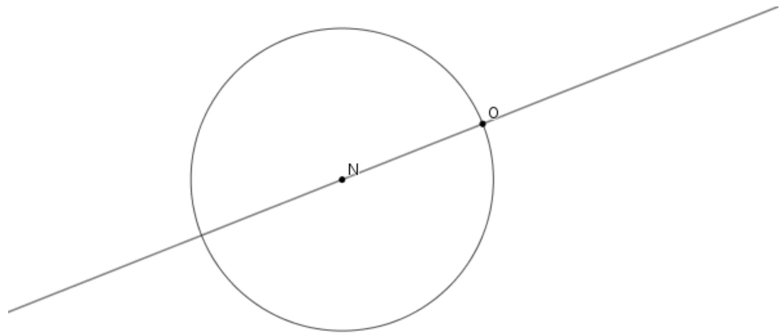


Figura 12. Construcción propuesta por Camilo

El profesor interviene: *¡Aah! Le pongo ahí unos puntos* [395]. Camilo responde: *Sí, pues los 10.* [396] Paola pregunta: *¿Y en qué ayuda el círculo?* [397]. El profesor cuestiona: *¿Bueno, pero por qué lo creaste? La idea es que nos digas por qué lo creaste. Tú creíste que necesitaríamos la circunferencia* **[404, A.3.8],** esperando que Camilo explicara su propuesta. Camilo dice: *Porque esos puntos…* [405]. Andrés lo interrumpe, diciendo: *Profe porque si ubico dos puntos a la misma distan … y como mide la misma distancia, entonces sirve* [406]. Paola menciona: *Profe, me parece que también podría servir porque es como la misma función de la herramienta que yo utilicé y como un círculo tiene la misma distancia del centro a todas las partes del círculo, puedes usar eso (señala la* Figura 12*) para la misma distancia* [407].

El profesor intenta involucrar a otros estudiantes en la conversación. Le pregunta a Samanta que opina al respecto **[408, A.3.4].** Ella dice: *Sí, yo creo que la circunferencia podía servir porque sirve como para poner otro al lado de otro que quedaría a la misma distancia del punto* [409]. El profesor dice: *O sea que esta idea me serviría para que los puntos quedaran, ¿qué?* **[410, A.4.6].** Paola comenta: *Pero no son 10 puntos, sino más porque sería extremo, mitad, extremo mitad. Es lo mismo que paso con la herramienta que yo utilicé usando circunferencia* [412]. El profesor no desarrolla esta idea porque intenta focalizar la conversación en la construcción de la definición de colinealidad.

ANÁLISIS

Acción	**Intervención**	**Vocabulario**	**Narrativa**	**Mediadores visuales**
A.3.8	388		X	
	404		X	X
A.3.5	390		X	
A.3.4	408		X	
A. 4.6	410		X	

Tabla 12. Acciones fragmento 9

Vocabulario. Uso de las palabras circunferencia y círculo

No evidenciamos acciones del profesor para promover el uso de vocabulario, en este caso es evidente la necesidad de establecer una diferencia entre circunferencia y círculo, la cual, para los estudiantes no es notoria. Camilo es quien introduce la palabra circunferencia [389] en el momento que comunica su propuesta. Consideramos que esto se debe al nombre de la herramienta. Por su parte, Paola emplea la palabra círculo al parecer como sinónimo de la palabra circunferencia en [397].

Narrativa. La construcción de un diámetro en el programa garantiza que el centro equidiste de los extremos del diámetro[5].

Evidenciamos tres acciones promueven el desarrollo de esta narrativa. La primera acción es preguntar por posibles argumentos que validen las producciones realizadas (A.3.8), la cual se presenta en dos ocasiones. La primera ocurre cuando el profesor solicita a los estudiantes especificar el objeto geométrico que permite alinear puntos. La segunda sucede cuando el profesor pide a Camilo explicar la pertinencia del uso de la circunferencia, la cual es una duda planteada por Paola. Esto genera dos posturas. la primera, es de Andrés, basada en la igualdad de las distancias que se observan en el programa [406], en donde sus argumentos están fundamentados por el mediador visual (Figura 12).

La segunda acción permite que los estudiantes escuchen e interpreten las ideas de sus compañeros (A.3.5). Esta surge cuando profesor solicita a Paola seguir el proceso de construcción expuesto por Camilo. Por ejemplo, cuando Camilo comunica: "*pones una línea adentro o sea una línea perfecta*" [389], "*Y ahora traza un segmento de … desde el centro de un lado a otro*" [392]. Esto lleva a que Paola no construya un segmento sino una recta que pasa por el centro de la circunferencia [391], pese a que la indicación dada por Camilo era la de construir un segmento. Esto debe ser consecuencia que cuando explicó su idea en [389] el estudiante empleó en dos ocasiones la palabra "línea" y además en la expresión "*traza un segmento de … desde el centro de un lado a otro*" da a entender a Paola que debe construir una recta, asociando a este objeto tres términos distintos (línea, línea perfecta y segmento). La tercerea acción, pedirle a Samanta que opine acerca de la propuesta de Paola (A.3.4). La cuarta acción es indagar sobre las afirmaciones de los estudiantes para favorecer que ellos mismos revisen y modifiquen (A.4.6). Esta surge cuando el profesor pregunta por la ubicación de los puntos siguiendo la propuesta de Camilo.

Finalmente, observamos que el profesor no le dio relevancia a la definición propuesta por Paola, quizás porque en este momento el tema de la conversación era diferente y no era pertinente hablarlo sin haber concluido el anterior. Cabe aclarar que, aunque ambas propuestas permiten encontrar dos parejas de puntos equidistantes, la de Paola determina un punto que se encuentra entre dos puntos, mientras que la de Camilo permite construir un punto al lado de otros dos.

Mediadores visuales

Identificamos una acción del profesor relacionada con los mediadores visuales. Esta ocurre cuando pide a Camilo explicar las razones por las cuales utilizo la herramienta circunferencia en su construcción. Por otro lado, el gesto realizado por Camilo en [389], mover los brazos de izquierda a derecha de forma horizontal, es un mediador visual que ya anteriormente ha sido utilizado por algunos estudiantes (Paola y Saida) para representar una recta. Utiliza este

[5] El diámetro de una circunferencia no se menciona en ninguna intervención de este fragmento, sin embargo, la construcción propuesta por Camilo [387, 389] nos permite evidenciar que construye este objeto geométrico.

mediador visual para hacer referencia lo que él denomina línea perfecta pero que en matemáticas corresponde con el objeto geométrico recta. Consideramos que este gesto aportó a la decisión de Paola de construir una recta y no un segmento como lo indicó Camilo en [392].

La Figura 12 es un mediador visual que permite a Paola en [407] referirse al procedimiento de construcción que había propuesto anteriormente y así establecer semejanzas con la propuesta de Camilo. Adicional a esto, este mediador permite que en [412] la estudiante pronostique cómo funcionará la construcción de Camilo sin necesidad de completar la construcción para los demás puntos. En la intervención de Samanta [409], el mediador visual (Figura 12) le permite expresar que la construcción propuesta por Camilo crea un punto a un lado de otros dos, para referirse al punto de intersección entre la circunferencia y la recta. Esta es una de las características que diferencia esta propuesta a otras comunicadas en clase.

Fragmento 10. Evaluar una construcción de puntos equidistantes

El profesor propone realizar el siguiente problema en grupos [465]:

Problema 3: Haz una configuración en la que nueve de los diez puntos son equidistantes de uno de ellos, que llamamos A.

Después del trabajo en grupo, el profesor solicita a Pablo socializar su construcción **[706, A. 1.1].** El estudiante conecta su tablet al televisor y se proyecta la Figura 13.

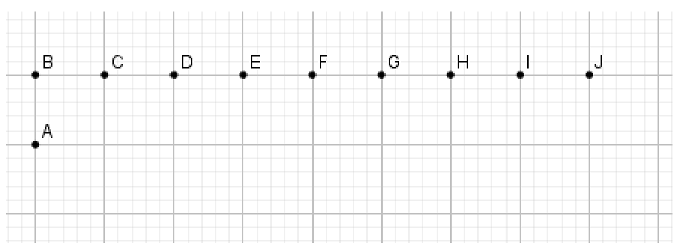


Figura 13. Construcción propuesta por Pablo

Pablo dice: *Poner la cuadrícula.* [707]. El profesor le pregunta: *¿y por qué la cuadrícula?* **[708, A.1.4]**. Pablo responde: *Pues para que quede recto* [709]. El profesor con la intención de que el estudiante proponga una construcción robusta (construir los puntos sobre una recta) basado en lo que ya se había discutido, menciona: *Pues Pablo si tú quieres ponerlo recto pues no hay necesidad de cuadrícula ¿Qué hago? […] Pablo me dice que tiene que poner la cuadrícula ¿habrá necesidad de poner la cuadrícula?* **[710, 712, A.4.6].** Mientras el profesor hace estas preguntas, Pablo oculta la cuadrícula. El profesor indaga acerca de la acción realizada por el estudiante esperando que él de una explicación **[714, 716, 718, A.1.4],** a lo cual Pablo responde: *Poner los puntos y ya (…) y poner el A en la parte de abajo y para que (revisa el enunciado del problema en el tablero) el A no es equidistante de los demás* [719].

El profesor invita a los estudiantes a opinar acerca de la propuesta realizada por Pablo **[720, 728, A.4.6]**, con el propósito de que los estudiantes la evalúen. Adriana objeta lo dicho por su compañero: *No porque B no es equidistante a A y entonces debería tener la misma distancia* [731]. Pablo le responde: *Pero tiene la misma distancia* [733]. Ella dice: *No, de A a J no es la misma que de A a B.* [734]. El profesor retoma este comentario de Adriana y le pregunta a Pablo: *¿Tú dices que tiene la misma distancia de A a J que de A a B?* **[735, A. 3.6].** El profesor le solicita que utilice la herramienta "Distancia y Longitud" para que se cerciore si las distancias son iguales **[742, A.1.3].** Pablo mide las distancias *BC* y *AB* (Figura 14) [746].

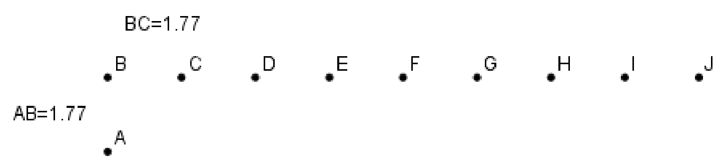


Figura 14. Construcción propuesta por Pablo

El profesor le pregunta: *¿Da lo mismo? [...] Quiero que miren o a simple vista, ¿será la misma distancia de A a B que de A a D?* **[749, 759, A. 4.3].** Varios estudiantes exclaman: *¡No!* [760]. El profesor añade: *Entonces ahí se daña* [761].

ANÁLISIS

Acción	**Intervención**	**Vocabulario**	**Narrativa**	**Mediadores visuales**
A.1.1	706		X	X
A.1.4	708 714-718		X X	
A.4.6	710-712 720-728		X X	
A.3.6	735		X	
A.1.3	742			X
A.4.3	749, 759		X	

Tabla 13. Acciones fragmento 10

Vocabulario. "Que quede recto"

Anteriormente se introdujo la definición de colinealidad, pero ha sido una palabra que no emplean los estudiantes. Es por esto que Pablo hace uso de la expresión "que quede recto" [709]. Esto nos permite evidenciar que una apropiación de un término especializado, como colinealidad, es un proceso que puede tomar tiempo y que es necesaria la gestión del profesor para que esta se interiorice. El profesor al igual que en otros momentos, en [710,712] retoma palabras de Pablo para darle peso a lo que el estudiante se está refiriendo. Sin embargo, no parece prestarle atención al uso de los términos especializados (*v.g.* recta y colinealidad), lo cual no posibilita un avance en el vocabulario. Parece ser que su interés es que los estudiantes hagan explicitas las características de la colinealidad, como que los puntos pertenezcan a una recta.

Narrativas

La primera acción realizada por el profesor para contribuir al desarrollo de la narrativa, fue solicitar a Pablo socializar la construcción realizada para solucionar el Problema 3 (A. 1.1). Específicamente esta acción requiere que el estudiante conecte su tablet al televisor y explique su construcción [706]. La segunda acción es solicitar al estudiante aclarar por qué usó una herramienta del SGD (A. 1.4). Esta acción se repitió dos veces. En la primera ocasión, para que el estudiante explicara el uso de la cuadrícula [708], y la segunda, para que verbalizara por qué ocultó la misma [714 - 718]. La tercera acción, es indagar sobre la propuesta realizada por Tomas (A. 4.6), con el propósito que los estudiantes reflexionen acerca del uso de una herramienta del programa que no garantiza una construcción robusta. Esta acción se presenta en dos ocasiones [710 – 712, 720 - 728]. Estas tres primeras acciones surgen debido a que el profesor quiere modificar la narrativa de Pablo, la cual corresponde a una construcción blanda en la que nueve puntos son equiseparados y uno no (Figura 13).

Estas acciones logran que Adriana refute la construcción de Pablo [731, 734], en un primer momento haciendo referencia a la equidistancia entre dos puntos y posteriormente explicitando dos parejas de puntos, en las cuales no se cumple la equidistancia. Es posible observar que hay un avance en el discurso de la estudiante, pues en intervenciones anteriores se hacía evidente la falta de precisión de los objetos a los que se les asocia la equidistancia. Quizás esta evolución se da porque el profesor, constantemente les solicita a sus estudiantes expresar ideas completas en las cuales sea evidente los objetos a los que se están refiriendo. La cuarta acción del profesor, es utilizar la idea expuesta por Adriana (A. 3.6), con el propósito de generar discusión frente a la construcción realizada por Pablo [735]. La última acción enfocada al desarrollo de la narrativa, es solicitar a los estudiantes que evalúen la propuesta de Pablo (A. 4.6). Específicamente en esta acción, los estudiantes deben observar la representación gráfica realizada en la tablet, para determinar un valor de veracidad con relación a lo solicitado en el problema.

Mediadores Visuales

En este fragmento evidenciamos dos acciones del profesor para favorecer el uso de mediadores visuales. La primera acción es solicitar al Pablo compartir la solución construida al Problema 3 (A. 1.1). Esta acción permite que Adriana refute la propuesta de Pablo, exponiendo dos parejas de puntos para las cuales no se están cumpliendo la definición de equidistancia. Consideramos que esto es posible debido a la representación realizada en el programa (Figura 13) que se está proyectando [731, 734]. La segunda acción es solicitar al estudiante que se apoye en el SGD para ampliar una idea (A. 1.3). Específicamente esto ocurre en el momento en que el profesor solicita a Pablo que valide su propuesta por medio de la herramienta “Distancia y longitud” [742]. Consideramos que esto lo hace con el propósito de que la idea de Adriana surja un efecto en la conversación, que permita ser evaluada por todos. Esta acción y la representación (Figura 14), favorecen que los estudiantes evidencien que la construcción de Pablo no cumple con las condiciones solicitadas.

Rutinas

En este fragmento, vemos que nuevamente los estudiantes usan la cuadrícula, la cual hemos mencionado anteriormente hace parte de una rutina del contexto escolar. En esta ocasión esta rutina no fue de utilidad para la solución del Problema 3, debido a que no es posible ubicar los 9 puntos equidistantes a *A*, empleando esta herramienta. Esto se debe, a que, por medio de esta herramienta, solo se puede garantizar 4 puntos equidistantes a uno fijo. El uso de esta no fue cuestionado por el profesor lo cual no permite evidenciar si la interpretación que tiene Pablo de equidistancia está ligada con la colinealidad de los puntos.

Fragmento 11. Uso de la circunferencia para construir puntos equidistantes

El profesor solicita a Eliana y a Laura comunicar su solución al Problema 3 **[761, A.1.1]** Eliana le pide al profesor que le permita pasar al tablero y empieza a realizar un gráfico mientras habla: *Que este era un punto A, empecé a medir con el dedito (muestra su dedo meñique) lo coloqué encima de la tablet y empecé a hacerle así (coloca su dedo cerca al punto A con la intención de comparar las distancias de A a los otros nueve puntos) y entre eso más o menos me daba la medida (refiriéndose a los radios)* [768]. Es importante aclarar que, en el trabajo en grupos, Eliana estaba con Laura. Por esta razón, en la conversación grupal, el profesor le solicita a Laura complementar lo expresado por Eliana [771]. Ella menciona: *Bueno profe, nosotras lo que hicimos fue la forma de un círculo porque no necesariamente se tiene que alinear porque tiene que tener la misma medida desde A. De A a G tiene que tener la misma medida que de A a E* [776]. El profesor le pregunta: *¿Y eso es cierto siempre?* **[777, A.4.6].** Camilo interviene: *Yo cogí y le di circunferencia y se hizo un círculo y ya* [780]. El profesor le solicita a Camilo representar su propuesta en la tablet conectada al televisor **[781, A.1.1].** Él realiza una construcción de una circunferencia y luego coloca 9 puntos en esta (Figura 15).

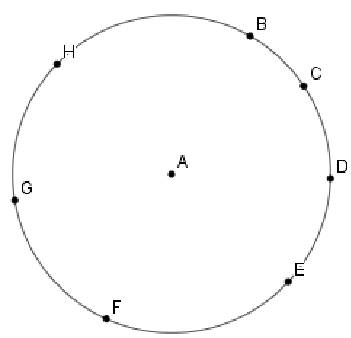


Figura 15. Dibujo realizado por Eliana

Camilo menciona: *yo lo hago así porque, primero que todo de A … o sea tiene que estar ali… como se llama esta palabra* [789]. Carlos le contesta: *Alineado* [790]. *Camilo* dice*: No o sea…* [791]. Carlos dice: *Equidistante* [792]. Camilo dice:

> *Equidistante con A y no importa que yo los tenga un poco pegados sí, porque van a estar a la misma medida de A, así que […] Entonces no importa si yo tengo, lo tengo así (arrastra los puntos de la circunferencia cambiando su ubicación), porque igual siguen estando todos los puntos a la misma medida de A.* [793, 795].

El profesor le pregunta a todo el grupo: O sea, ¿de qué nos sirve hacer la circunferencia? **[796, A.3.5].** Pedro responde: Para el radio [797]. El profesor pregunta: ¿Y el radio siempre va ser qué? **[798, A.2.4].** Paola interviene: El radio es la medi… bueno la distancia entre el extremo y el centro del círculo (dibuja en el aire una circunferencia y su centro) y siempre va a ser la misma [799]. El profesor realiza una pregunta para el grupo: ¿O sea que cuando hacemos este ejercicio qué objeto geométrico de una vez sale? **[800, A.2.3].** Tres estudiantes en coro dicen: La circunferencia [801]. El profesor concluye la clase escribiendo la definición de circunferencia en el tablero: "Una circunferencia con centro en C es el conjunto de puntos en el plano que equidistan de C" **[817, A.2.3].**

ANÁLISIS

Acción	Intervención	Vocabulario	Narrativa	Mediadores visuales
A.1.1	761 781		X X	X X
A.4.6	777		X	
A.3.5	796		X	
A.2.4	798		X	
A.2.3	800 817	 X	X X	

Tabla 14. Acciones fragmento 11

Vocabulario.

En este fragmento, solo evidenciamos una acción enfocada al vocabulario, la cual es institucionalizar la definición de circunferencia (A. 2.3). Está relacionada con este rasgo del discurso debido a que en el momento en que el profesor escribe la definición del tablero [817] modifica e incluye términos que utilizaron los estudiantes para referirse a características de la circunferencia. Los términos modificados son radio y extremo, los cuales fueron introducidos por Paola. El termino radio lo empleo para referirse a la distancia entre el centro de la circunferencia a cualquier punto de esta. La palabra extremo haciendo referencia a la circunferencia [800]. Este último término quizás surge porque Paola utiliza la circunferencia y el círculo indiscriminadamente y en este caso la palabra "extremo" caracteriza a los puntos que equidistan del centro. Al momento de institucionalizar la definición de circunferencia, el profesor emplea las expresiones puntos de la circunferencia y misma distancia, modificando los términos extremo y radio, respectivamente.

Adicionalmente, podemos evidenciar que en este fragmento Laura [776] ve la necesidad de hacer referencia a parejas de puntos que cumplen con la relación de equidistar. Esto quizás se deba a que en intervenciones anteriores cuando se omiten las parejas de puntos equidistantes las ideas no quedaron claras, por ejemplo, la intervención de Eliana [768]. Lo que causa que cuando el profesor le solicita a Laura que complemente la idea de su compañera, ella considere pertinente explicitar estas parejas. Por tanto, en la verbalización realizada por Laura, es posible evidenciar un cambio en el discurso, relacionado con la sintaxis de las expresiones.

Finalmente, observamos que en la construcción de la definición de circunferencia los estudiantes hacen referencia a este como círculo, consideramos que quizás se debe a la experiencia escolar y cotidiana. Esta palabra surge porque es una herramienta del programa y algunos estudiantes la asumen como círculo, la cual ya han trabajado anteriormente en otros grados. Observamos que el profesor no hace mención de la diferencia de estos dos términos, lo que nos conlleva a suponer que no se preocupa por que ellos evidencien esa diferencia. Quizás esto se debe a que en este momento no es el foco de discusión, dado que es la construcción de la definición de circunferencia.

Narrativa: Una circunferencia con centro en C es el conjunto de puntos en el plano que equidistan de C.

La primera acción del profesor orientada al desarrollo de la narrativa, es solicitar a los estudiantes que socialicen el procedimiento realizado (A. 1.1). Esta acción se repite dos veces. La primera ocasión, para solicitar a Eliana y Paola comunicar la solución propuestas por ellas para el Problema 3 [761], y la segunda, para solicitar a Camilo que representara su propuesta en la tablet [781]. Gracias a estas acciones del profesor Laura hace explicito el objeto geométrico que permite solucionar el Problema 3 [776], nombrando al círculo. Adicionalmente, por medio de un ejemplo ella explica que esta figura garantiza la equidistancia de parejas de puntos con respecto a A, aclarando que no hay necesidad que estos sean colineales.

La segunda acción del profesor es indagar sobre las ideas de los estudiantes (A. 4.6), específicamente invitando a los estudiantes a que opinen sobre la idea de Laura. [777]. Esta acción conlleva a que Camilo comparta su construcción (Figura 15) y explique las diferentes opciones para ubicar los puntos, de tal forma que se siga cumpliendo la equidistancia [780, 789, 793, 795]. La tercera acción del profesor es pedir a los estudiantes interpretar una idea expuesta por otro compañero (A. 3.5). Esta acción la realiza en el momento que pregunta "¿de qué nos sirve hacer la circunferencia?" [796], con la intención que los estudiantes mencionen que "del centro a cualquier punto (de la circunferencia) la distancia es la misma", dado que esta propiedad es importante para la construcción de la definición de circunferencia. La cuarta acción del profesor es reaccionar para aclarar (A. 2.4), la cual surge debido a que Pedro introduce el término radio. La última acción realizada por el profesor es institucionalizar el saber (A. 2.3). La cual se puede evidenciar en dos ocasiones. La primera de ellas, en el momento en que pregunta por el objeto matemático que se genera al solucionar el Problema 3 [800]. La segunda vez se presenta al escribir la definición de circunferencia en el tablero [817].

Mediadores

En este fragmento evidenciamos una acción del profesor que favorece el uso de mediadores visuales, la cual es solicitar al estudiante reconstruir el proceso realizado para la solución del Problema 3 (A. 1.1). Esta acción se realiza en dos ocasiones. La primera al solicitar a Eliana que comparta su solución, lo cual conlleva a que la estudiante realice un gesto en [778] de representar con su dedo meñique el radio de la circunferencia, es un mediador visual. Puesto que esto le permite comunicar su idea, ya que lo emplea como un patrón que le garantiza la equidistancia. Es importante mencionar que Eliana continúa empleando objetos ajenos al programa para cumplir con las condiciones solicitas del problema. La segunda al solicitar a Camilo que comparta su solución en la tablet.

Adicionalmente, el gesto realizado por Paola en [799] durante la explicación de su definición de radio, nos llama la atención debido a que en este no se representa los radios de una circunferencia, lo cual hace evidente que para ella el radio está relacionado con una distancia y no con un segmento.

Fragmento 12. Diferenciar los términos equidistancia y colinealidad

Al iniciar la clase, el profesor solicita a uno de los estudiantes que comunique lo realizado en la sesión anterior. A partir de esto, se establece una conversación sobre colinealidad. Dado que unos estudiantes dijeron que la recta o el segmento eran objetos geométricos que permitían garantizar la colinealidad, el profesor invita a los demás a opinar acerca de estas ideas **[28, A 3.4].** José interviene diciendo: *Que los puntos están a la misma distancia de cada uno de ellos* [29]. El profesor le pregunta: *¿Eso qué quiere decir?* **[30, A.4.6].** Camilo interviene: *Que todos los puntos están a la misma distancia de si (…)* [31]. El profesor cuestiona: *Sí, pero cuando están a la misma distancia ¿Estamos hablando de colinealidad o de la otra?* **[32, A. 2.4],** con el objetivo que los estudiantes evidenciaran que estaban hablando de dos términos diferentes. Andrés dice: *Equidistancia* [33]. Ricardo interviene: *Colinealidad* [34]. El profesor, dirigiéndose a José le dice: *Pero la que tú me dices ¿es colinealidad?* **[35, A.4.6**]. José asienta con la cabeza y responde: *Sí* [38]. El profesor pregunta: *¿Qué piensan de eso? Saida, ¿si piensas qué eso es correcto?* **[39, A.4.3].** Saida responde *No porque (…) estamos hablando de (…) equi (…)* [41]. Finalmente, el profesor focaliza la conversación recordando la definición de colinealidad. Y posteriormente indaga acerca de la definición de equidistancia.

El profesor dice: *Equidistancia ¿Qué era eso de equidistancia? ¿Quién nos quiere comentar?* **[54, A.2.3]**, esperando que los estudiantes recordaran lo institucionalizado en clase. Camilo afirma: *Que, que (…) Tiene la misma distancia* [56]. Samanta expresa: *Que había puntos (…) o sea (…) tienen que estar como a la misma distancia* [63]. El profesor le pregunta al grupo de Pablo: *¿Qué dicen ustedes?* **[64, A.3.4]**. Pablo lee del cuaderno: *Dos o más parejas de puntos son equidistantes (…)* [65]. El profesor lo interrumpe diciendo: *Pero sin mirar el cuaderno. La idea era sin mirar el cuaderno. ¡Qué nos contaran! Entonces (…), Samanta que no miró el cuaderno nos dijo algo. (Se dirige a Pablo) ¿y tú si escuchaste qué fue lo que dijo?* **[66, A.3.5],** con el fin de que el estudiante expresara su opinión. Pablo responde: *Sí […]Que tenían que tener la misma distancia* [67,69]. El profesor pregunta: *¿Y qué dicen los demás? ¿De acuerdo o no?* [70]. Varios estudiantes expresan estar de acuerdo [71].

ANÁLISIS

Acción	Intervención	Vocabulario	Narrativa	Mediadores visuales
A.3.4	28 64		X X	
A.4.6	30 35		X X	
A.2.4	32	X		

A.4.3	39		X	
A.2.3	54	X	X	
A.3.5	66		X	

Tabla 15. Acciones fragmento 12

Vocabulario

En este fragmento, evidenciamos dos acciones del profesor, relacionadas al vocabulario. La primera acción es reaccionar para aclarar (A 2.4). Esta acción es consecuencia de la intervención de Camilo [31], debido a que al parecer el estudiante estaba confundiendo la definición de colinealidad con las características de equidistancia. La segunda acción del profesor es institucionalizar el saber (A. 2.3). Específicamente solicitando a los estudiantes que verbalicen la definición de equidistancia institucionalizada la clase anterior [54]. Como consecuencia de esta acción Samanta en [63] explicita el objeto geométrico al que se le atribuye la equidistancia, pero no lo hace mencionando las parejas de puntos que cumplen la relación. Observamos que en estas intervenciones los estudiantes no especifican que la equidistancia se da entre parejas de puntos y sus ideas son incompletas. Sin embargo, no hay un llamado de atención por parte del profesor para que expresen sus ideas completas en vista que quería involucrar a los demás, pero esto no dio resultado, pues algunos estudiantes apoyaron las ideas propuestas por sus compañeros. Nuevamente se observa que institucionalizar términos matemáticos como lo son colinealidad y equidistancia no garantiza que los estudiantes los empleen de forma adecuada y establezcan diferencias entre ellos.

Narrativa. Definición de equidistancia

Las acciones realizadas por el profesor en este fragmento relacionadas con las narrativas son cinco. La primera acción es solicitar a los estudiantes cuestionar los aportes realizados por sus compañeros (A.3.4). Esta acción se repite dos veces. La primera ocasión es en el momento en que el profesor invita a los estudiantes a opinar sobre las ideas expuestas por sus compañeros [28]. La segunda vez se presenta al preguntarle al grupo de Tomas sobre el aporte de Saida [64].

La segunda acción del profesor es indagar sobre las ideas de los estudiantes para favorecer que ellos mismos modifiquen sus ideas (A. 4.6). Esta acción se evidencia en dos oportunidades y es consecuencia debido a que los términos colinealidad y equidistancia son nuevos, los estudiantes presentan algunas confusiones o ideas incompletas. La primera vez que realiza esta acción el profesor es en el momento que cuestiona la verbalización realizada por José [30], puesto que el estudiante da una definición de colinealidad que pareciera estar relacionada con equidistancia, pero en la cual no se evidencian todas las características, pues no hace mención de las parejas de puntos que deben cumplir esta relación. La segunda ocasión es al preguntarle a José si las características que estaba expresando, estaban relacionadas con el término que se estaba discutiendo [35].

La tercera acción realizada por el profesor busca que los estudiantes evalúen las propuestas de sus compañeros estableciendo su valor de veracidad (A. 4.3). Esta acción se evidencia cuando el profesor pregunta "¿Qué piensan de eso? … ¿si piensas qué eso es correcto?" [39]. La cuarta acción es institucionalizar el saber (A. 2.3). En esta ocasión, esta acción va dirigida a que los estudiantes recuerden la definición institucionalizada la clase anterior [54]. La última acción realizada por el profesor es pedir a los estudiantes interpretar la idea expuesta por otro estudiante (A. 3.5). Específicamente esta acción se evidencia cuando el profesor cuestiona sobre la interpretación de Tomas, relacionada a la verbalización de Saida [66]. Consideramos que este conjunto de intervenciones favoreció un cambio en el discurso, pues permitió que Pablo modificara sus narrativas asociadas a colinealidad y equidistancia.

Aunque en este fragmento no se evidencia uso de tecnología digital, consideramos importante analizarlo debido a las ideas expresadas por los estudiantes acerca de las definiciones institucionalizadas en la clase anterior.

Fragmento 13. Sintetizar los resultados de la clase anterior

En la siguiente tabla se muestra la interacción entre el profesor y algunos estudiantes acerca de la solución del Problema 3.

72.	Profesor:	Y (…) eh, hicimos un último ejercicio, y ¿qué vimos ahí en ese ejercicio? **(A.1.1)**
		[…]
75.	Andrés:	(Levanta la mano mientas responde). El ejercicio se trataba de que teníamos que trazar desde el punto A (dibuja con un dedo dos puntos en el aire) una serie de equidistantes puntos (…) nueve puntos más (señala al aire más puntos).
76.	Profesor:	Y ¿qué hablábamos de eso?, ¿qué nos daba o porqué hacíamos ese ejercicio? **(A.1.2)**
77.	Andrés:	Pues porque el resultado nos debe dar una circunferencia (señala dos puntos al aire). Porque (…) desde la circunferencia se tiene la misma distancia. (Con un dedo señala el centro de una circunferencia, en el aire, y con otro dedo de la otra mano este representa algunos de sus radios).
		[…]
87.	Andrés:	Que al final al resultado de la actividad teníamos que hacer una circunferencia, y pues, desde el punto A poníamos los demás (…) los nueve puntos más. Y pues, ahí se tenía la misma distancia (Señala un punto al aire con el dedo de la mano izquierda, como si fuera el centro de la circunferencia, y con la mano derecha dibuja una circunferencia alrededor de este punto).
		(Entre las intervenciones 88 y 104 los estudiantes hablan acerca del Problema 2).
		[…]
105.	Profesor:	Eh, sí. Lo que pasa es que se fueron al otro problema […] a los que les he preguntado si están de acuerdo o no ¡Ah! Porque ya había otro problema que era el que estábamos discutiendo que era: dado un punto ¿cierto? Que había nueve que equidistaban de él (traza una circunferencia con la mano) ¿Qué habíamos encontrado? **(A. 2. 2)**
		[…]
110.	Camilo:	Pues lo que yo hice fue, que cogí una circunferencia, porque había una opción que era un circulito (dibuja una circunferencia en la mesa con su dedo), hice el círculo y todos tienen que estar equidistantes a A ¿sí?, pero no equidistante entre ellos, solo entre A. Entonces yo podía poner todos pegados en el círculo y estar a la misma distancia de A.
111.	Profesor:	Pero mi pregunta es […] entonces ustedes tenían que hacer una circunferencia y mirar los puntos ¿o qué tenían que hacer? ¿Ese era el problema? **(A. 2. 2)**
		[…]
117.	Laura:	Pues el problema no era que teníamos que hacer una figura, si no hallar la manera en que A fuera como un punto que (…) Ay es que no sé cómo.
118.	Profesor:	Dale
		[…]

134. Eliana: Que el problema era que, el punto A y los demás puntos tenían que tener la misma distancia. Nosotros lo que hicimos fue que todos (…)

135. Profesor: (Pregunta con tono de no estar oyendo) Que ¿qué?

136. Eliana: Estuvieran (…) o sea nosotros lo que hicimos fue imponer a A en el centro de una circunferencia (mira a Laura y ella le susurra).

137. Profesor: Pero, ¿ese era el problema?

[…]

141. Paola: (Paola levanta la mano y habla) El problema era poner como diez puntos que tuvieran la misma distancia entre A. No entre ellos sino solamente con A, entonces lo que ellas hicieron y la solución fue poner una circunferencia, porque (…) ¿radios es se llama?

142. Profesor: ¿Sí?

143. Paola: Del centro al extremo siempre van a ser de la misma medida, de cualquier punto de afuera hasta el centro.

[…]

150. Profesor: O sea que vimos (…) vimos que esos puntos (…), cierto, voy a mirar acá. (Escribe en el tablero varios puntos que determinan una circunferencia) esos puntos que estaban por acá, que ustedes llegaban y dibujaban ¿formaban qué? ¿Qué objetos veían ustedes ahí? **(A.1.2)**

151. Varios: ¡Una circunferencia! (Unos pocos estudiantes dicen) ¡un círculo!

152. Profesor: Y la circunferencia, ¿es útil para qué? **(A.3.8)**

153. Camilo: Para que tuvieran la misma distancia de A todos los puntos. Ese era el problema.

ANÁLISIS

Acción	Intervención	Vocabulario	Narrativa	Mediadores visuales
A.1.1	72		X	
A.1.2	76 150		X X	
A.2.2	105 111		X X	
A.3.8	152		X	

Tabla 16. Acciones fragmento 13

Vocabulario

Aunque en este fragmento no evidenciamos acciones del profesor relacionadas con el cambio en el vocabulario, es posible observar que el continua con la intención de que los estudiantes recuerden el procedimiento realizado para el Problema 3 (clase 17 de mayo) y la definición de circunferencia. Esto causa que Andrés en [75, 77, 87] explicite la solución del problema expresando algunas características de la circunferencia y las razones por las cuales se utilizó este objeto geométrico.

Adicionalmente, en [141] Paola continúa presentando un obstáculo al emplear la palabra circunferencia como círculo, además continúa etiquetándola como “extremo” para referirse a su idea de radio.

En las descripciones realizadas por en los estudiantes [75, 87,110], aparecen unos términos como, “trazar”, “poníamos” y “cogí”, los cuales consideramos que están relacionados con el uso del programa debido al dinamismo de este.

Narrativa. Definición de circunferencia

En este fragmento observamos cuatro acciones del profesor relacionadas con la narrativa. La primera de ellas es pedir a los estudiantes que reconstruyan el proceso realizado para la solución de la tarea propuesta (A. 1.1). Específicamente, esta acción se presenta en el momento en que el profesor preguntar sobre el último ejercicio realizado en la clase anterior [72]. La segunda acción es realizar preguntas en relación a la forma en que los resultados de una tarea son obtenidos y como se llega a ciertas conclusiones (A. 1.2). Esta acción se repite en dos ocasiones. La primera vez se evidencia en cuando el profesor pregunta “¿qué nos daba o porqué hacíamos ese ejercicio” [76]. Lo que conlleva a que las intervenciones de los estudiantes estén orientadas a relatar el procedimiento realizado en el programa en la clase anterior. La segunda vez, en el momento que el profesor indaga por el objeto geométrico que es posible visualizar al solucionar el Problema 3 [150].

La tercera acción del profesor es recoger ideas para establecer el foco de atención (A. 2.2). Esta acción se repite dos veces. La primera ocasión es en el momento en que el profesor retoma algunas ideas de los estudiantes para recordarles que están conversando sobre la solución del Problema 3 [105]. Esta acción permite evidenciar que Camilo continúa empleando el término “círculo” como sinónimo de la circunferencia pese a que el profesor y Andrés hacen alusión a la circunferencia [110]. Adicionalmente conlleva a que el estudiante caracterice la ubicación de los puntos especificando que estos pueden estar localizados en cualquier parte de la circunferencia y continuar cumpliendo la equidistancia solicitada. Resaltamos que el estudiante es el único que expresa esta condición para los puntos, lo cual conlleva a pensar que la circunferencia está compuesta muchos puntos. La segunda vez se evidencia cuando el profesor emplea ideas de los estudiantes para indagar sobre el objetivo del problema propuesto [111]. Gracias a esto, Paola intenta construir una proposición relacionada con el radio de la circunferencia la cual se comunicó anteriormente (clase 17 de mayo, fragmento 12). En esta ocasión lo hace para justificar la construcción propuesta por Laura [141,143]. En las intervenciones del profesor observamos que su intención es que los estudiantes relacionen la construcción de la circunferencia con la relación de equidistar, lo cual se logra.

La cuarta acción del profesor es preguntar por posibles argumentos que validen las producciones realizadas (A. 3.8). Esta acción se lleva a cabo en el momento en que el profesor indaga sobre la utilidad de la circunferencia en la solución del Problema 3 [152].

Mediadores

En este fragmento no se evidenciaron acciones del profesor orientadas al uso de los mediadores visuales, sin embargo, consideramos importante analizar algunos gestos realizados por los estudiantes. Los gestos realizados por Andrés en [77, 87] son mediadores visuales que los utiliza para explicar sus ideas. El primero hace referencia a la misma distancia entre el centro y cualquier punto de la circunferencia representando algunos radios. El segundo está relacionado con representación de una circunferencia acorde con la definición institucionalizada, él está nombrando dos elementos de la definición: el centro y el conjunto de puntos que cumple la equidistancia. Además, este gesto puede estar relacionado con el uso de la herramienta debido a que esta acción es similar a la realizada en el programa. Parece ser que estos gestos son producto de la experiencia anterior con el programa, en donde pudo recordar imágenes de las construcciones realizadas.

Por otra parte, el gesto realizado por Camilo en [110] es un mediar visual porque representa una circunferencia sin el centro. Podemos evidenciar que los gestos realizados por Camilo y Andrés difieren en el sentido de que en el de Camilo hay ausencia del centro mientras que en el de Andrés no. Además, el gesto de Camilo parece obedecer experiencias anteriores al uso del programa en la cuales las figuras que denomina circunferencia o círculo no cuentan con el centro.

Rutina

Parece ser que en las intervenciones realizadas por el profesor [111, 137] su propósito es que el procedimiento realizado en el programa (construir una circunferencia para garantizar equidistancias entre el centro y cualquier punto de esta) se adopte como rutina para que en próximas ocasiones cuando se les solicite hallar puntos equidistantes, ellos utilicen la circunferencia para su solución.

4.3. Construcción de la narrativa Construcción de un Triángulo isósceles

Fragmento 14. Definir triángulo isósceles

Aunque en este fragmento no se hace uso del programa, consideramos importante analizarlo debido a que gira en torno a recordar la definición de triángulo isósceles, la cual será tenida en cuenta posteriormente para conversar sobre una construcción en el programa de este objeto matemático.

El profesor pide a los estudiantes que recuerden la definición de triángulo isósceles [164]. Andrés dice: […] *es el que tiene dos lados de la misma distancia, uno que no. ¿Más largo?* [165]. El profesor pregunta a los demás si están de acuerdo **[166, A. 3.5].** Carlos responde: *Que tiene dos lados iguales y uno mal* [173]. Juan con tono de duda dice: *¿Mal?* El profesor cuestiona a Carlos: *¿Y uno mal? ¿Eso dice? O sea, anoto acá la definición (señala el tablero), dos lados iguales y uno mal […] A ver un triángulo es isósceles si tiene (…) (Copia en el tablero) dos lados (…)* **[175,178, A. 4.6].** Carlos complementa: *Iguales* [189]. Andrés dice*: De la misma distancia* [190]. El profesor pregunta: *¿de la misma distancia? o ¿iguales? ¿a quién le creemos?* **[191, A. 3.1].** Carlos dice: *Iguales no, de la misma distancia.* [192]. Paula interrumpe a Carlos diciendo: *De la misma longitud* [194]. El profesor cuestiona: ¿Sí? ¿O era de la misma longitud? **[195, A.3.1],** con la intención de que se genere una definición con la cual se llegara a consensos. Sin embargo, esta acción no cumplió con su propósito, puesto que se desvía la conversación y el profesor institucionaliza la siguiente definición: […] *un triángulo es isósceles si tiene dos lados de la misma longitud* **[202, A. 2.3].**

ANÁLISIS

Acción	Intervención	Vocabulario	Narrativa	Mediadores visuales
A.3.5	166		X	
A.4.6	175-178		X	
A.3.1	191 195	X X	X X	
A.2.3	202		X	

Tabla 17. Acciones fragmento 14

Vocabulario

Evidenciamos una acción relacionada con el vocabulario, la cual es solicitar comparar ideas expuestas anteriormente (A.3.1), esta ocurre dos veces y permite evidenciar algunas ideas de los estudiantes con respecto al triangulo isósceles. Adicional a esto nos llama la atención algunas expresiones de los estudiantes como: "¿más largo?", "y uno mal" y misma distancia", las cuales desarrollamos a continuación.

La expresión "¿más largo?" nos da a entender que, aunque la definición Andrés [165] incluye a todos los triángulos isósceles no equiláteros, las imágenes prototípicas que prioriza son aquellas en las cuales los triángulos tienen dos lados congruentes y uno de menor longitud. Esta expresión puede estar asociada a la altura del triángulo respecto al lado no congruente.

La expresión "y uno mal" empleada por Carlos [173], la utiliza para caracterizar el tercer triangulo del triángulo. Esta expresión no hace parte de ningún termino especializado y tiene ciertas similitudes con la propuesta con Andrés, ya que está caracterizando a ciertos triángulos isósceles y no a todos. En esta misma intervención el estudiante hace alusión a "lados iguales", lo que suscita que en la conversación se centre solo en esta característica haciendo a un lado la expresión "y uno mal" debido a que no es usual emplearla como un atributo a un objeto geométrico, además se evidencia que el profesor dio mayor relevancia a "los lados iguales", quizás porque su interés era comparar esta expresión con la dada por Andrés "misma distancia".

Respecto a la expresión "misma distancia", Andrés en [165, 190], la utiliza sin ser consciente de los objetos (puntos) a los que se le puede establecer esta "asignación numérica". En este caso, le está asignando esta condición a dos segmentos. Si para definir triángulo isósceles se quisiera utilizar la palabra distancia, la forma correcta sería: un triángulo es isósceles si dos parejas de vértices tienen la misma distancia. No esperábamos que el estudiante se expresara de esta forma, puesto que en las clases no se ha procurado por hacer explícito que la distancia se asocia a parejas de puntos. Una razón por la cual Andrés utiliza esta palabra (distancia) en su definición puede ser porque en el contexto cotidiano, a este término se asocia con una medida, principalmente en situaciones en los cuales se requiere expresar la "distancia" entre dos lugares.

Narrativa. Un triángulo es isósceles si dos lados tienen la misma longitud

Identificamos cuatro acciones del profesor que permiten promover esta narrativa. La primera es pedir interpretar a definición propuesta por Andrés (A.3.5), en la cual el estudiante hace una descripción de las imágenes mentales que tiene de este triángulo. En esta definición, no se contempla el triángulo equilátero como un triángulo isósceles. La segunda acción es proponer a los estudiantes opinar sobre la definición propuesta por Andrés (A.4.6), lo cual emerge que Carlos [173] reemplace "lados de igual distancia" por "lados iguales" y "uno no" por "uno mal". Por su parte, la reacción del profesor en [175,178] si bien no permite que el estudiante exprese la idea a lo que le está atribuyendo como "mal", parece ser que lo realiza como un llamado de atención cuando parafrasea con tono de duda lo dicho por Carlos.

La tercera acción es solicitar a los estudiantes comparar las dos características mencionadas por Andrés y Carlos (A.3.1) con el propósito de que Carlos modifique su vocabulario, lo cual se logra en [192]. La cuarta acción es institucionalizar la definición de triangulo isósceles (A.2.3), la cual toma como referencia la intervención de Paula [193] en la cual hace alusión a dos lados de la misma longitud. Quizás esto se dio porque los estudiantes se desviaron del tema de conversación y por tiempo. Con esta acción, el profesor hace a un lado la definición que querían comunicar Andrés y Carlos, puesto que en las intervenciones del profesor no se caracteriza el tercer lado, quizás porque esto no se evidencia en las definiciones propuestas por la comunidad matemática. Sin embargo, el profesor no propone este tema de conversación. Cuando el profesor indagó acerca de las ideas de triángulo isósceles, los estudiantes se centraron en el uso de los términos distancias, longitud, pero la esencia de la narrativa no la cuestionaron. Es decir, seguían manteniendo la idea de que un triángulo es isósceles si tiene dos lados congruentes y un lado no congruente a estos. Es el profesor, quién finalmente modifica la narrativa sin que dicho cambio fuera objeto de conversación, quizás porque no se estaba logrando que esto se concluyera.

Fragmento 15. Primera propuesta para construir un triángulo isósceles

El profesor propone el siguiente problema:

> *Problema 4: Construir en Geogebra un triángulo que sea isósceles bajo el arrastre. Justifique por qué es isósceles.*

El profesor pide a Clara que comparta su construcción de triángulo isósceles. Ella al principio no quiere compartirla, pero el profesor la anima a hacerlo **[384, 389, A. 1.1]**. Clara empieza construyendo una circunferencia con centro en A y radio AB y otra centrada en B con radio BC, la cual construye tratando que A pertenezca a la circunferencia con centro en B (Figura 16). Es decir, manipulándolas de tal manera que las dos circunferencias aparentemente tuvieran el mismo radio [400]. El profesor le dice: ¡*Pero no! No te pongas a hacer ahí (Geogebra), porque tienes que contarnos qué hiciste* **[401, A. 1.4]**. Clara dice: *Ahí lo que hicimos fue una circunferencia que tenía a A, después hice una circunferencia y ahí pues, o sea (…)* [406].

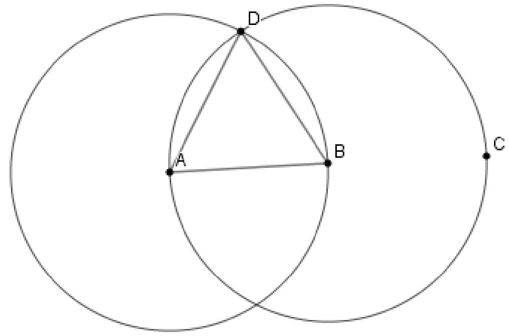


Figura 16. Construcción propuesta por Clara

El profesor le dice: *Pero, ¿cuál fue la primera circunferencia que hiciste?* **[407, A. 1.2]**. Clara borra su construcción [408]. Pablo le dice: *La del punto A*. [409]. El profesor interviene diciendo: *Me perdí ahí cuando decías con A* **[414, A 1.4]**. Pablo dice: *Es que el primer punto lo hacías en el punto medio de A (Describe una circunferencia con su dedo índice)* [415]. El profesor indaga con la intención de revisar el uso del vocabulario: *¿En el punto medio?* **[416, A 2.4]**. Pablo responde: *¡O sea en el centro! En el centro del círculo [...] es en el medio de círculo* [418,420]. Clara nuevamente retoma la construcción que realizó: *Empecé con el punto de referencia que es A y de ahí hice una circunferencia. Después hice otra circunferencia* [422]. Clara construye nuevamente las dos circunferencias como las había construido anteriormente. El profesor le pregunta a Clara: *Ah ¿pusiste dos circunferencias al azar?* **[423, A. 1.4]** Clara responde: *Sí*. [424] y Pablo complementa: *E hizo un punto en la intersección* [426]. Clara construye el punto D para representar la intersección de las dos circunferencias, pero este es un punto libre. Posteriormente añade: *Esa sería la intersección de las dos circunferencias [...] Luego uní A con B, B con D y D con A (construye segmentos AB, AD y BD)* [434, 439]. El profesor le pide a Clara que utilice la herramienta de arrastre para verificar si su construcción es robusta **[443, A 1.3]**. Pablo dice: ¡*Ahí lo va a arrastrar y la va a embarrar!* [444]. Clara arrastra los puntos A y B y el triángulo permanece isósceles y mide todos los lados del ΔABD (Figura 17).

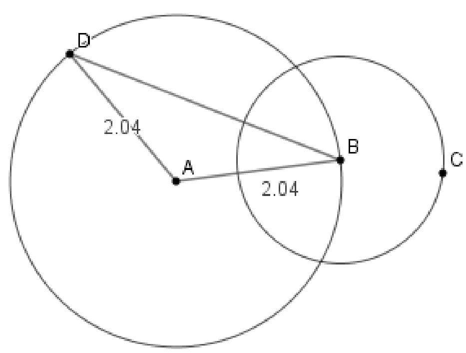


Figura 17. Construcción propuesta por Clara

Carlos dice: *¡La embarró!* [449]. El profesor pregunta: *¿cuáles son los lados de la misma longitud?* **[450, A. 1.2]**. Pablo responde: *Ahí dice 7.5 y 7.5* [451]. En la siguiente intervención, el profesor intenta que Clara justifique su construcción empleando la definición de circunferencia: *Sí vez que sí funciona, ¿todos de acuerdo con que esta funciona? […] ahora (…) viene la segunda parte. Podrías justificar por qué ese triángulo siempre es isósceles con tu construcción* **[453, 455, A. 3.8]**. Clara expresa: ¡Ay *no profe! […] No sé* [456, 462]. El profesor le dice: *¿No sabes? No sé si ustedes tienen alguna pregunta que hacer a Clara. ¿Están de acuerdo con que esa construcción nos sirve? (…)* **[463, A. 3.4]** Paola interviene diciendo*: No […] me parece que es muy innecesario el otro círculo, porque si lo necesitara sería para hacer un triángulo equilátero* [470, 472]. Pablo asegura: *Pero si ella lo quiere hacer así* [473]. El profesor le pregunta a Clara: *¿Tú qué dices con respecto a eso? ¿Tú necesitas ese círculo o no?* **[477, A. 4.2]**. Clara expresa: *digamos, o sea, para empezar sí lo necesitaba* [480].-Carlos responde: *Pues para colocar el círculo […]En el trabajito no decía que, que no se pudieran usar cualquier herramienta y pues cualquier herramienta y en este caso ella usó dos círculos.* [482,488]. Paola afirma: *Pero solamente utilizó las herramientas y en un comienzo lo hizo equilátero* [489]. Carlos le responde: *Pero, pero ahí también lo hizo isósceles* [490]. El profesor dice: *Es que la discusión que Paola quiere plantear es: ¿será necesario tener ese círculo?* **[491, A. 3.6]**. Pablo responde: *Puede que no, sí se puede hacer con un círculo, pero igualmente ella lo quería hacer con dos círculos* [492]. El profesor continúa indagando: *Bueno, pero, o sea tú la necesitas, ¿es necesario? O sea ¿no se puede hacer sin ese círculo?* **[493, A. 4.6]** Camilo afirma: *Eso se puede hacer con un solo círculo* [498]. El profesor pregunta: *¿Qué pasará si yo llegase a quitar ese (circunferencia con centro en B), a ver te pregunto a ti (Clara), si yo llegase a quitar ese círculo que tienes ahí?* **[512, A. 4.6]**. Clara: *Nada, ya quedó isósceles (Clara borra la circunferencia con centro en B* Figura 18*)* [513].

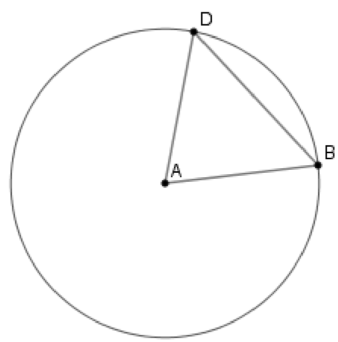


Figura 18. Construcción propuesta por Clara

ANÁLISIS

Acción	Intervención	Vocabulario	Narrativa	Mediadores visuales
1.1	384, 389		X	
1.4	401 414 423		X X X	
1.2	407 450		X	X X
2.4	416	X		
1.3	443		X	X

A.3.8	453, 455		X	
A.3.4	463		X	
4.2	477		X	X
3.6	491		X	
4.6	493 512		X X	X X

Tabla 18. Acciones fragmento 15

Vocabulario.

Se evidencia una acción del profesor dirigida al cambio en el vocabulario, la cual es reaccionar para aclarar o precisar (A. 2.4). Específicamente sucede en el momento en que el profesor interviene para corregir el uso de un término [416]. Esto se debe a que en la intervención de Pablo [415], él hace alusión a el punto medio para referirse al centro de la circunferencia. Esto se puede observar en el gesto que hace [415] y a la explicación que posteriormente realiza en [418, 420]. Es posible que el estudiante haya empleado este término por el nombre de las herramientas "centro o medio" y "circunferencia (centro, punto)"; la primera fue utilizada en una clase anterior y la última, en esta sesión. De allí una posible razón por la cual el estudiante utiliza punto medio y centro como sinónimos.

Adicionalmente, podemos observar que surge un nuevo termino el cual es unir. Este término aparece en la intervención de Clara [439] para referirse a la construcción de los $\overline{AB}$, $\overline{AD}$ y $\overline{BD}$. En actividades escolares, la palabra unir está asociada con asignar un objeto a otro objeto por medio de una línea (*v.g.* unir una palabra con su sinónimo, unir una palabra con el dibujo que le corresponde) o con construir las líneas determinadas por puntos para hallar una figura (*v.g.* unir los puntos para descubrir el animal oculto). Cuando se construye un segmento determinado por dos puntos en Geogebra, primero se selecciona uno de ellos y posteriormente, el otro. Al hacerlo, el programa genera una línea entre los dos que se corresponde con la idea de unir que se ha venido trabajando en el contexto escolar. En especial, con la idea de encontrar la figura determinada por los puntos (en este caso, el triángulo). No observamos ninguna acción del profesor relacionada con el uso de este término, quizás porque su prioridad en este momento es la verbalización del proceso de construcción del triángulo isósceles.

Narrativa. Procedimiento para construir el triángulo isósceles con dos circunferencias

En este fragmento, observamos ocho

acciones del profesor, dirigidas a favorecer la construcción de la narrativa. La primera acción es pedir a un estudiante que reconstruya el proceso realizado para la solución de la tarea propuesta (A. 1.1). Esta acción se evidencia en el momento en que el profesor solicita a Clara que comparta su construcción de triángulo isósceles [384, 389]. La segunda acción del profesor es solicitar al estudiante que aclare una acción realizada en el programa al solucionar el problema propuesto (A. 1.4). Esta acción se repite tres veces. La primera ocasión cuando el profesor solicita a Clara que verbalice lo que está realizando con el SGD [401]. La segunda cuando el profesor expresa que no es clara la idea dicha, relacionada con el procedimiento realizado [414]. La tercera ocasión, cuando el profesor cuestiona el orden de construcción de las circunferencias empleadas [423].

La tercera acción es realizar preguntas en relación a la forma en que los resultados de una tarea son obtenidos y cómo se llega a ciertas conclusiones. (A. 1.2). Esto ocurre en el momento en que el profesor pregunta "¿cuál fue la primera circunferencia que hiciste? [407]. Gracias a estas tres acciones, es posible evidenciar en las intervenciones de Clara, que ella modifica la forma de expresarse, puesto que al plantear por primera vez el procedimiento de construcción [406], el mismo es incompleto. Posteriormente, ella modifica la forma de comunicarse en [422, 434, 439], explicitando elementos de la construcción como los centros de las circunferencias, los puntos de intersección de las mismas y los segmentos del triángulo. A partir de estas verbalizaciones podemos evidenciar un cambio en el discurso de Clara, pues la acción del profesor le permite describir mejor el procedimiento. Al comunicar su propuesta, utiliza los nombres que le asigna el programa a los puntos para expresarlos.

La cuarta acción es solicitar al estudiante que se apoye en el programa para ampliar una idea o comunicarla de forma más clara. (A.1.3). Esta acción sucede cuando el profesor le solicita a Clara que use la herramienta de arrastre para verificar que la construcción sea robusta [443]. La quinta acción realizada por el profesor es preguntar por posibles argumentos que validen las producciones realizadas. (A. 3.8). Esta acción es posible evidenciarla en la intervención del profesor en la que pregunta a Clara por la justificación de su construcción [453, 455].

La sexta acción solicitar a los estudiantes cuestionar los aportes realizados por sus compañeros (A. 3.4). Esta acción ocurre en el momento en que el profesor pregunta "¿Están de acuerdo con que esa construcción nos sirve?" [463]. Esta acción conlleva a que Paola objete la construcción [470,472] justificando que la otra circunferencia no es necesaria. Además, hace alusión a que esta construcción corresponde a un triángulo equilátero, quizás porque cuando Clara realizó la construcción, la primera vez, no la sometió al arrastre. Además, es posible que Paola ya tuviera conocimiento de la construcción del triángulo equilátero o que por medio de la representación gráfica lo haya identificado.

La séptima acción promover la comunicación pidiendo a los estudiantes defender sus ideas frente a otras que surjan o que las invalidan (A. 4.2). Esta acción surge, debido a la intervención de Paola y ocurre en el momento en que el profesor pregunta a Clara "¿Tú qué dices con respecto a eso? ¿Tú necesitas ese círculo o no?" [477]. Como respuesta a esta acción Pablo y Carlos [482, 488, 490, 492] apoyan la construcción de Clara manifestando que bajo el arrastre la medida de dos lados del triángulo es la misma y que el problema no restringía el uso de las herramientas del programa.

La octava acción realizada por el profesor es utilizar la respuesta de un estudiante con el propósito de generar discusiones (A. 3.6). Es posible evidenciarla en el momento en que el profesor emplea la idea de Paola para discutir sobre la necesidad de las dos circunferencias [491]. La última acción es indagar sobre las ideas o afirmaciones de los estudiantes para favorecer que ellos mismos revisen y modifiquen sus ideas e interpreten las de los demás (A. 4.6). Esta acción se repite dos veces. La primera ocasión, en el momento en que el profesor indaga con persistencia sobre la necesidad de usar dos circunferencias y cuestiona sobre la posibilidad de hacer la construcción con una sola circunferencia [493]. La segunda vez, cuando El profesor pregunta qué pasará si se quitara la circunferencia con centro en B [512]. El propósito del profesor con estas acciones es que los estudiantes optimicen de las herramientas del programa, puesto que la segunda circunferencia es innecesaria y por lo tanto solicita borrarla. Esto lleva a que Clara acepte el uso de una sola circunferencia para construir el triángulo isósceles.

Mediadores visuales

Observamos cuatro acciones del profesor, orientadas al uso de mediadores visuales. La primera acción es realizar preguntas en relación a la forma en que los resultados de una tarea son obtenidos y cómo se llega a ciertas conclusiones. (A. 1.2). Esta acción se repite dos veces La primera ocasión, en el momento en que el profesor indaga a Clara sobre la primera circunferencia que hizo en el SGD [407]. La segunda cuando el profesor pregunta "¿cuáles son los lados de la misma longitud?" teniendo en cuenta la representación realizada en el SGD [450].

La tercera acción realizada por el profesor es solicitar al estudiante que se apoye en el programa para ampliar una idea o comunicarla de forma más clara (A. 1.3). Específicamente se evidencia cuando le solicita a Clara que use la herramienta arrastre, con la intención de verificar si la construcción es robusta [443]. La tercera acción es promover la comunicación pidiendo a los estudiantes defender sus ideas frente a otras que surjan o que las invalidan (A.4.2). Se evidencia, cuando indaga sobre el uso de dos circunferencias para la construcción del triángulo isósceles [477].

La última acción realizada por el profesor es indagar sobre las ideas o afirmaciones de los estudiantes para favorecer que ellos mismos revisen y modifiquen sus ideas e interpreten las de los demás (A. 4.6). Esta acción se repite en dos ocasiones. La primera de ellas cuando indaga sobre la necesidad de emplear dos circunferencias para la construcción realizada [493]. La segunda cuando solicita a Clara que elimine la circunferencia con centro en B [512]. Debido a que el profesor solicita justificar la construcción, las intervenciones de los estudiantes estaban orientadas a emplear lo que ven en el artefacto para validar sus propuestas. Es por eso que Pablo y Carlos no ven problemático el uso de la segunda circunferencia, puesto que, al arrastrar, la construcción se mantiene.

Adicionalmente, las representaciones en el programa son mediadores visuales porque apoyan la conversación en torno a la descripción de la construcción realizada y su respectiva justificación. Estos mediadores también permiten verificar la validez de la construcción por medio de funciones como el arrastre y borrar objetos, y la herramienta distancia o longitud. Esto facilita que los estudiantes expresen su postura sobre el tema de conversación.

Fragmento 16. Segunda propuesta para construir un triángulo isósceles

Adriana interviene comunicando la manera en que realizó su construcción:

> *Bueno entonces, hacemos una circunferencia (construye una circunferencia con centro en A y radio AB) y pues dos puntos encima, en el borde de la circunferencia (construye un punto C que pertenece a la circunferencia) y después los hicimos juntar (construye $\overline{AB}, \overline{BC}$ y $\overline{AC}$) y ahora podemos moverlos (mueve los puntos B y C) y siempre estos dos ($\overline{AB}$ y $\overline{AC}$) van a quedar con la misma medida* [525].

Pablo le pregunta Adriana: *¿Y por qué?* [526]. Adriana le responde: *Porque del radio al borde de la circunferencia siempre va a tener la misma medida* [528]. El profesor pregunta con el propósito de utilizar la definición de circunferencia: *¿Eso es cierto? [...] ¿Qué nos permite decir eso?* **[530, A. 3.8]**. Pablo afirma: *Yo no le entendí porque habló en idioma geométrico, "¿el radio de una circunferencia?"* [533]. El profesor interviene: *Adriana,*

¿Podrías repetir tú idea a ver si están de acuerdo o no? **[536 A. 3.6]**. Adriana dice: *El radio, del centro de círculo al borde, siempre va a haber la misma medida* [537]. El profesor pregunta: *Adriana dio una idea, ¿qué piensan de esa idea?* **[545, A. 3.4]**. José dice: *Que está bien*. [546]. El profesor menciona: *¿Pero por qué? ¿qué nos pide?* [...] *ella dice que del centro a cualquier punto de la circunferencia …* **[547, A. 3.5]**. Sebastián complementa: *Va a ser la misma medida* [548]. El profesor pregunta*: ¿Por qué?* **[549. A. 3.8]**. Camilo responde*: Porque, el círculo tiene la circunferencia a la misma medida del centro* [550]. El profesor expresa: *¿Eso es cierto? [...] ustedes acá en justificar qué van a escribir* **[551, 553, A. 3.8]**. Pablo afirma: *Que del centro al borde del círculo siempre hay la misma medida* [554]. El profesor pregunta: *¿Por qué?* **[555, A. 3.8]**. Pablo reafirma*: Porque siempre tiene que haber la misma distancia* [556]. Profesor dice: *Pero falta (…), pero usaste qué, una qué* **[557, A. 3.8]**. Adriana dice: *La circunferencia* [558]. El profesor menciona: *Faltaba esa palabrita para que la conectaras* **[559, A. 3.8]**.

ANÁLISIS

Acción	Intervención	Vocabulario	Narrativa	Mediadores visuales
3.8	530 549 551, 553 555 557 559		X X X X X X	
3.6	536		X	
3.4	545		X	
3.5	547	X	X	

Tabla 19. Acciones fragmento 16

Vocabulario

Evidenciamos una acción del profesor, orientada a favorecer el vocabulario, la cual es pedir a los estudiantes interpretar la idea expuesta por otro estudiante (A. 3.5). Específicamente sucede en el momento en que el profesor indaga por el objeto geométrico empleado en la construcción de Adriana [547].

Adicionalmente observamos que en la intervención [525], Adriana menciona algunas palabras que asocia a ciertos objetos y relaciones matemáticas, aunque algunos no son términos matemáticos especializados. El primer término es encima, lo emplea para comunicar que dos puntos pertenecen a la circunferencia. Es decir, encima lo utiliza para expresar la relación de pertenencia. El segundo es borde, el cual es una palabra coloquial que generalmente es empleada para referenciar el contorno de un objeto, en este caso el círculo. Luego emplea la palabra juntar, para comunicar la acción de construir segmentos. Esta palabra es usada de una manera similar al término unir, el cual fue analizado en el anterior fragmento. Posteriormente dice moverlos y siempre. Mover es una descripción de una acción que realizó con el programa y que le permite comprobar la congruencia de dos segmentos en la construcción realizada. Dado que al arrastrar los puntos que construyó en la circunferencia obtiene todos los radios de esta figura, la palabra siempre es utilizada para expresar que la congruencia se da entre cualquier par de radios. Por ultimo emplea la expresión misma medida, la cual asocia para designar la misma longitud de dos segmentos. Esta expresión es empleada de manera inapropiada en diferentes intervenciones por otros estudiantes [537, 548, 550, 554] para designar la misma medida entre puntos. La medida está relacionada con una magnitud (longitud). Los términos apropiados en este caso serían “misma distancia” porque a esta expresión se le puede atribuir a una pareja de puntos mientras que medida se le puede asignar a la longitud de un segmento.

También evidenciamos que, parece ser que para Adriana la circunferencia y el círculo son sinónimos. Esto se puede evidenciar porque hace alusión al “borde de la circunferencia”. Posteriormente vuelve a utilizar esta palabra en las intervenciones [528, 537], en las cuales menciona círculo y circunferencia indistintamente. Además, el termino radio aparece en las intervenciones [528, 537] de Adriana para referirse a la distancia entre el centro y cualquier punto de la circunferencia. En [528] ella confunde el radio con el centro de la circunferencia, pero en [537] lo modifica gracias a las intervenciones de Pablo [533] y el profesor [536] en donde se le solicita repetir su idea.

Por otra parte, Camilo en [550] reconoce la circunferencia como un elemento del círculo, no las usa como sinónimos, como lo hace Adriana. Él emplea la expresión “misma medida” para referirse a “misma distancia” entre puntos, lo cual mencionamos anteriormente puede llegar a ser problemático.

Observamos que en esta ocasión el profesor no le dio mayor relevancia al vocabulario empleado por la estudiante, quizás esto se debe a que era prioritario que Adriana expresara sus ideas de manera espontánea atribuyendo propiedades de la circunferencia a su explicación.

Narrativa. Dos radios de una circunferencia permiten construir un triángulo isósceles

En ese fragmento observamos cuatro acciones del profesor, las cuales apoyan el desarrollo en las narrativas. La primera acción es preguntar por posibles argumentos que validen las producciones realizadas (A. 3.8). Esta acción se repite seis veces. La primera ocasión es cuando el profesor indaga con el propósito que los estudiantes empleen la definición de circunferencia [530]. La segunda es en el momento en que pregunta por qué va a ser la misma medida del centro a cualquier punto de la circunferencia [549]. La tercera vez es cuando indaga sobre el valor de verdad de la afirmación realizada por Camilo [551, 553]. La cuarta ocasión se presenta al preguntar por qué hay la misma medida del centro al borde del circulo [555]. La quinta al indagar por el objeto geométrico usado para solucionar el problema [557]. La sexta al afirmar que era la circunferencia la que validaba la construcción [559]. Esta acción del profesor está enfocada a que los estudiantes expliquen el procedimiento por medio de la definición de circunferencia institucionalizada. Gracias a esto, logra que ellos empleen la propiedad asociada a los radios de una circunferencia. Sin embargo, aunque el profesor insiste en que los estudiantes mención la definición, esta acción no se concreta. Nos llama la atención que los estudiantes no emplean en sus intervenciones la longitud de los segmentos, siendo esta una característica de la definición institucionalizada por el profesor. Esto se puede dar porque los estudiantes aún no se han apropiado de este término y es más familiar emplear las expresiones “misma medida” y “misma distancia” para referirse a lo que observan en el programa. Cuando a los estudiantes se les solicitó definir triángulo isósceles ellos comunicaron sus definiciones y son estas las que más prevalecen cuando están intentando explicar.

La segunda acción realizada por el profesor es utilizar o parafrasear la respuesta de un estudiante con el propósito de generar discusiones (A. 3.6). Esta acción se evidencia en el momento en que el profesor le solicita a Adriana que repita su idea, con la intención que sus compañeros expresen si están de acuerdo o no [536]. La tercera acción es solicitar a los estudiantes cuestionar los aportes realizados por sus compañeros (A. 3.4). Esto sucede cuando el profesor pregunta a los estudiantes que piensan sobre la idea expresada por Adriana [545]. La cuarta acción realizada por el profesor es pedir a los estudiantes interpretar la idea expuesta por otro estudiante o por el profesor (A. 3.5). Específicamente sucede al preguntar a los estudiantes por la verbalización de Adriana [547]

5. RESULTADOS

5.1. ACCIONES DEL PROFESOR

A continuación, presentamos cuatro tablas correspondientes a cada una de las categorías propuestas. Para efectuar la síntesis, revisamos en el análisis la cantidad de veces que se repitió cada acción y la forma cómo esta se concreta para desarrollar por lo menos uno de los rasgos del discurso (vocabulario, narrativas y mediadores visuales). En estas tablas se explicitan los fragmentos en donde las identificamos (F1: fragmento 1, F2: Fragmento 2, etc.). Es importante aclarar que en repetidas ocasiones una misma acción del profesor aporta a más de un aspecto discursivo y algunas veces se repite más de una vez en un fragmento.

Categoría 1: Solicita a los estudiantes compartir las estrategias de solución a un problema que involucran el uso del programa o apoyarse en el programa para apoyar lo que comunica.

Acciones del profesor	Vocabulario	Narrativa	Mediadores visuales
1. Pide a un estudiante que reconstruya el proceso realizado para la solución de la tarea propuesta.		9 F1, F2, F5, F8, F10, F11, F11, F13, F15	
2. Realiza preguntas en relación a la forma en que los resultados de una tarea son obtenidos y cómo se llega a ciertas conclusiones.		6 F2, F6, F8, F13, F13, F15	3 F6, F15, F15
3. Solicita al estudiante que se apoye en el programa para ampliar una idea o comunicarla de forma más clara.		3 F1, F10, F15	2 F1, F15
4. Solicita al estudiante que aclare una acción realizada en el programa al momento de solucionar el problema propuesto	1 F1	6 F8, F10, F10, F15, F15, F15	

Tabla 20. Síntesis categoría 1

En esta categoría podemos observar que las cuatro acciones fueron empleadas por el profesor. Evidenciamos 30 intervenciones del profesor para favorecer el desarrollo de estos (Vocabulario:1; Narrativa: 24; mediadores visuales: 5). La acción 1.1 contribuye al desarrollo de las narrativas relacionadas con las definiciones de colinealidad, equidistancia y circunferencia y el procedimiento para construir un triángulo isósceles. Es a partir de la socialización de las construcciones realizadas por los estudiantes para solucionar los problemas propuestos que surgen las verbalizaciones iniciales, las cuales finalmente se tratan de utilizar en la producción de dichas narrativas. En el Problema 1 aunque no se hace mención del término "colinealidad" se propone una situación en la cual se requiere identificar el objeto matemático colinealidad. La intención de los Problemas 2 y 3 es construir las definiciones de colinealidad, equidistancia y circunferencia haciendo uso de las verbalizaciones intuitivas de los estudiantes. En el Problema 4 se busca que los estudiantes expliquen el procedimiento de construcción empleando las definiciones institucionalizadas. En esta acción, identificamos intentos del profesor por promover el desarrollo de las tres narrativas cuando solicita reconstruir el proceso que conlleva a institucionalizar una narrativa, pide reconstruir el procedimiento efectuado con el SGD y solicita a un estudiante verbalizar el procedimiento realizado con el SGD.

La acción 1.2 promueve el desarrollo de las narrativas cuando el profesor realiza preguntas para que los estudiantes caractericen una herramienta del programa, una definición, un hecho geométrico o una representación realizada con o sin el SGD. Por otro lado, también promueve el uso de mediadores visuales cuando realiza preguntas para que los estudiantes expliquen una representación realizada con o sin el SGD.

La acción 1.3 contribuye al desarrollo de narrativas cuando solicita que un estudiante use una herramienta del SGD para validar una afirmación. Adicional a esto, promueve el uso de mediadores visuales cuando resaltar los pasos del proceso de construcción.

La acción 1.4 aporta al desarrollo del vocabulario cuando el profesor emplea términos no especializados empleados por un estudiante, para indagar sobre las ideas matemáticas asociadas a este. También aporta al desarrollo de las narrativas cuando solicita explicar el uso de una herramienta en el marco de la solución a un problema y cuando pide a un estudiante verbalizar un procedimiento realizado con SGD.

Categoría 2: Recopila información relevante con la intención de focalizar la discusión en desarrollo y precisar ideas.

Acciones del profesor	Vocabulario	Narrativa	Mediadores visuales
1. Sintetiza los resultados obtenidos de las intervenciones realizadas		1 F1	
2. Recoge ideas que establecen el foco de atención para destacar ideas o afirmaciones realizadas por los estudiantes cuando utilizan el programa.		3 F2, F13, F13	
3. Institucionaliza el saber	3 F4, F4, F6	6 F4, F4, F5, F6, F12, F14	
4. Reacciona para aclarar o precisar	3 F5, F12, F15	1 F11	

Tabla 21. Síntesis categoría 2

Las cuatro acciones de esta categoría fueron utilizadas por el profesor. Evidenciamos que se presentaron 17 intervenciones del profesor, dirigidas a favorecer el desarrollo de los aspectos discursivos (Vocabulario: 6; Narrativa: 11). La acción 2.1 favorece la narrativa asociada al Problema 1 ya que el profesor hace un cierre de la conversación que se está desarrollando, resaltando las condiciones que no cumple la construcción. La acción 2. 2 promueve el desarrollo de las narrativas, puesto que el profesor retoma ideas mencionadas anteriormente por los estudiantes o por él mismo, relacionadas con una construcción, definición o propiedad, para focalizar la conversación. La acción 2.3 aporta tanto al desarrollo del vocabulario, como a las narrativas. Con respecto al vocabulario el profesor fomenta el cambio de un término coloquial por uno especializado e institucionaliza una proposición a partir de las propuestas de los estudiantes remplazando los términos coloquiales y dinámicos por los términos especializados correspondientes. En relación a la narrativa, indaga acerca de características propias de una definición, solicita completar el procedimiento, la definición, el hecho geométrico que se está institucionalizando y solicita que los estudiantes verbalicen una definición institucionalizada anteriormente. Por último, observamos que la acción 2.4 apoya el vocabulario en el momento en que el profesor corrige el uso de un término. Adicionalmente, esta acción favorece la narrativa al solicitar que se aclare la idea sobre un término empleado.

Categoría 3: Utiliza las ideas de los estudiantes para establecer discusiones entre ellos utilizando el programa para apoyar sus ideas.

Acciones del profesor	Vocabulario	Narrativa	Mediadores visuales
1. Invita a los estudiantes a comparar las ideas expresadas por dos o más estudiantes sobre un mismo asunto.	2 F3, F14	3 F3, F5, F14	
2. Transmite las dudas de un estudiante a los demás compañeros.		1 F7	
3. Retoma las ideas de los estudiantes en las discusiones grupales y les da un valor de verdad a las mismas.			
4. Solicita a los estudiantes cuestionar los aportes realizados por sus compañeros.	1 F5	9 F2, F2, F2, F7, F7, F12, F12, F15, F16,	5 F1, F2, F2, F2, F7
5. Pide a los estudiantes interpretar la idea expuesta por otro estudiante o por el profesor.		8 F3, F4, F4, F6, F11, F12, F14, F16	
6. Utiliza o parafrasea la respuesta de un estudiante con el propósito de generar discusiones	1 F5	7 F1, F2, F3, F4, F7, F15, F16	4 F3, F3, F7, F1
7. Retoma las ideas que un(os) estudiante(s) ha(n) socializado y rescata su pertinencia.			
8. Pregunta por posibles argumentos que validen las producciones realizadas.		8 F13, F15, F16, F16, F16, F16, F16, F16	3 F6, F8, F9

Tabla 22. Síntesis categoría 3

En esta categoría se emplean seis acciones. Evidenciamos 52 intervenciones del profesor para favorecer el desarrollo de los aspectos discursivos (Vocabulario:4; Narrativa: 36; mediadores visuales: 12). La acción 3.1 promueve el uso del vocabulario cuando el profesor parafrasea una propuesta de construcción, modificando los términos utilizados por términos matemáticos (v.g. “el punto está sobre la línea” por “el punto pertenece a la recta”). Por otro lado, también promueve el desarrollo de las narrativas cuando solicita comparar dos o más propuestas de construcciones, procedimientos, hechos geométricos y definiciones con el propósito que los estudiantes evidencien diferencias entre las propuestas.

La acción 3.2 solo promueve el desarrollo de la narrativa de equidistancia cuando el profesor pide a los estudiantes responder cuestionamientos planteados por algún miembro de la clase apoyándose en el SGD.

La acción 3. 4 favorece el desarrollo de los tres aspectos discursivos. En vocabulario ocurre cuando cuestiona el uso de un término especializado que no corresponde a la verbalización dada. En narrativas cuando solicita a un estudiante opinar acerca de una construcción o las ideas expuestas por un compañero. Estas nuevas verbalizaciones que emergen pueden ir acompañadas de explicaciones ligadas al programa o de algún elemento teórico aprendido.

La acción 3.5 solo fomenta el desarrollo de las narrativas cuando el profesor solicita evaluar si en una construcción cumple una propiedad y cuando solicita prever lo que ocurrirá al efectuar con el SGD, la propuesta de un miembro de la clase.

En la acción 3.6 favorece el desarrollo de los tres aspectos discursivos. En vocabulario surge cuando pide explicitar en una oración el objeto al cual se le está atribuyendo una propiedad. En narrativas, cuando propone construcciones que corresponden a lo expresado por un estudiante, cuestiona verbalizaciones por un estudiante y cuando resalta una construcción realizada o una idea expuesta por un miembro de la clase para que los demás la cuestionen. En cuanto a los mediadores visuales, cuando pide construir una figura en el SGD que corresponda a la propuesta de una estudiante.

En la acción 3.8 favorece el desarrollo de las narrativas cuando el profesor solicita apoyarse de una definición, hecho geométrico, propiedad o procedimiento para validar una idea. También favorece el uso de mediadores visuales cuando pide especificar una propiedad o característica que cumplen ciertos objetos geométricos en una construcción.

Categoría 4: Fomenta reflexiones y autoevaluaciones de los estudiantes frente a sus ideas o las de sus compañeros cuando se discute acerca de una estrategia de solución de la tarea utilizando el programa.

Acciones del profesor	Vocabulario	Narrativa	Mediadores visuales
1. Interviene con propuestas que generan incertidumbre.		3 F2, F3, F3	4 F2, F3, F3, F7
2. Promueve la comunicación pidiendo a los estudiantes defender sus ideas frente a otras que surjan o que las invalidan.		2 F8, F15	2 F8, F15
3. Busca que los estudiantes evalúen sus propuestas y las de sus compañeros estableciendo su valor de veracidad.	1 F2	2 F1, F12	
4. Propone nuevas variables que pretenden cuestionar una relación de dependencia.			

5. Cuestiona la validez de las afirmaciones solicitando contraejemplos a los estudiantes			
6. Indaga sobre las ideas o afirmaciones de los estudiantes para favorecer que ellos mismos revisen y modifiquen sus ideas e interpreten las de los demás.	5 F2, F3, F3, F3, F12	13 F1, F2, F3, F3, F3, F4, F4, F10, F10, F12, F14, F15, F15	4 F3, F3, F15, F15
7. Acepta una propuesta o construcción errónea con el propósito de que los estudiantes lo evalúen.		1 F1	1 F1
8. Explicita o resalta el punto crítico de la conversación		3 F1, F4, F7	1 F1

Tabla 23. Síntesis categoría 4

En esta categoría el profesor hace uso de seis acciones. Observamos 28 intervenciones del profesor dirigidas a favorecer el desarrollo de los aspectos discursivos (Vocabulario: 5; Narrativa: 17; Mediadores visuales 6). La acción 4.1 aporta tanto al desarrollo de narrativas como al uso de mediadores visuales. En relación a las narrativas el profesor propone una construcción que lleva a evaluar casos y solicita realizar una construcción que implica evaluar casos que los estudiantes no han teniendo en cuenta, esto favorece una mayor comprensión de la narrativa. En cuanto a los mediadores visuales, solicita construir una figura en SGD que corresponda a la propuesta de una estudiante y en ocasiones modifica un medidor visual, esto con la intención de facilitar la visualización de los casos que no se han tenido en cuenta.

La acción 4.2 contribuye al desarrollo de las narrativas, puesto que el profesor solicita a los estudiantes defender la validez de una construcción realizada en el SGD cuando surge un argumento que la invalida. Adicionalmente, apoya el uso de mediadores, debido a que se solicita identificar errores en una construcción realizada en el SGD.

La acción 4.3 promueve el vocabulario, pues el profesor solicita especificar el uso de una herramienta del SGD. De igual forma, contribuye al desarrollo de las narrativas al solicitar a un estudiante expresar una postura sobre una afirmación realizada por algún compañero.

La acción 4.6 favorece los tres aspectos discursivos. En relación al vocabulario, en aquellas situaciones en que el profesor introduce un término en la conversación, modifica el uso de un término, expresa el significado asociado a un término o cuestiona el uso de un término. Con respecto a las narrativas, al valuar el uso de una herramienta del SGD, cuestionar las propiedades que se proponen incluir en una definición, solicitar prever lo que sucederá en el programa si se lleva a cabo la propuesta de un estudiante, evaluar afirmaciones que se basan en lo que se observa del SGD o solicitar modificar una propuesta de construcción. Finalmente, en relación a los mediadores visuales al solicitar el término matemático que corresponde a un mediador visual y cuestionar un paso innecesario del proceso de construcción para que lo modifique.

La acción 4.7 contribuye al desarrollo de las narrativas, al solicita destacar aspectos erróneos de una construcción. Adicionalmente favorece el uso de mediadores visuales en el momento en que se solicita evaluar si una representación cumple una condición, propiedad característica.

La acción 4.8 promueve tanto el desarrollo de narrativas como el uso de mediadores visuales. Con respecto a las narrativas se destaca como punto crítico de la conversación las condiciones que se deben cumplir en una definición, hecho geométrico, procedimiento o construcción. Mientras que respecto a los mediadores visuales se solicita modificar una construcción para estudiar una condición o propiedad.

5.1.1. Categorías emergentes

En el anexo 4, se encuentra una tabla en la cual se hace mención a las formas en como cada acción propuesta en nuestra herramienta analítica atiende a un rasgo del discurso. Esta síntesis nos permite proponer unas acciones particulares para el trabajo con tecnología digital. Codificamos estas acciones utilizando las letras V, N y M para resaltar el aspecto discursivo al que atienten (vocabulario, narrativas y mediadores visuales respectivamente).

Categoría	**Rasgo del discurso**	**Código**	**Acción del profesor**
1. Solicita a los estudiantes compartir las estrategias de solución a un problema que involucran el uso del programa o apoyarse en el programa para apoyar lo que comunica.	Vocabulario	V.1.1	Emplea términos no especializados de un estudiante para indagar la idea matemática asociada a este.
	Narrativa	N.1.1	Invita a los estudiantes a reconstruir el proceso que conlleva a institucionalizar una narrativa.
	Narrativa	N.1.2	Pide a un estudiante verbalizar el procedimiento realizado con SGD.
	Narrativa	N.1.3	Realiza preguntas para que los estudiantes caractericen una herramienta del SGD, una definición, un hecho geométrico o una representación.
	Narrativa	N.1.4	Pregunta sobre el procedimiento utilizado por un estudiante para resolver un problema.
	Narrativa	N.1.5	Solicita que el estudiante use una herramienta del SGD para validar su afirmación.
	Narrativa	N.1.6	Pide explicar el uso de una herramienta.
	Mediadores visuales	M.1.1	Realiza preguntas para que los estudiantes expliquen una figura realizada en el SGD.
2. Recopila información relevante con la intención de focalizar la discusión en desarrollo y precisar ideas	Vocabulario	V.2.1	Fomenta el cambio de un término coloquial por uno especializado.
	Vocabulario	V.2.2	Institucionaliza una proposición a partir de las propuestas de los estudiantes remplazando los términos coloquiales y dinámicos por los términos especializados correspondientes.
	Narrativa	N.2.1	Resalta las condiciones que no cumple una construcción.
	Narrativa	N.2.2	Retoma ideas mencionadas anteriormente por los estudiantes o por el profesor para focalizar la discusión.
	Narrativa	N.2.3	Indaga acerca de características propias de una definición, hecho geométrico, propiedad o construcción.
	Narrativa	N.2.4	Solicita completar el procedimiento, la definición, el hecho geométrico que se está institucionalizando.

	Narrativa	N.2.5	Solicita que los estudiantes verbalizar una definición institucionalizada anteriormente.
	Vocabulario	V.2.3	Parafrasea dos propuestas de construcción, modificando los términos no especializados utilizando términos matemáticos.
3. Utiliza las ideas de los estudiantes para establecer discusiones entre ellos utilizando el programa para apoyar sus ideas.	Vocabulario	V.3.1	Cuestiona el uso de un término especializado que no corresponde.
	Vocabulario	V.3.2	Explicita en una oración el objeto al cual se le está atribuyendo una propiedad.
	Mediadores visuales	M.3.1	Solicita especificar una propiedad o característica que cumplen ciertos objetos geométricos en una construcción.
	Mediadores visuales	M.3.2	Pide construir una figura en SGD que corresponda a la propuesta de una estudiante.
	Mediadores visuales	M.3.3	Solicita validar la construcción propuesta por un estudiante o por el profesor.
	Narrativa	M.3.4	Invita a comparar dos o más propuesta de construcciones, procedimientos, hechos geométricos o definiciones.
	Narrativa	N.3.1	Pide a los estudiantes responder cuestionamientos planteados por algún miembro de la clase apoyándose en el SGD.
	Narrativa	N.3.2	Solicita a un estudiante opinar acerca de una construcción o ideas expuestas realizada por un compañero.
	Narrativa	N.3.3	Invita a evaluar si en una construcción cumple una propiedad.
	Narrativa	N.3.4	Solicita prever lo que ocurrirá al efectuar con el SGD, la propuesta de un miembro de la clase.
	Narrativa	N.3.5	Cuestiona a un estudiante sobre la interpretación de una verbalización propuesta por un compañero.
	Narrativa	N.3.6	Propone realizar construcciones que corresponden a una propuesta de un estudiante
	Narrativa	N.3.7	Solicita apoyarse de una definición, hecho geométrico, propiedad o procedimiento para validar una idea.
	Narrativa	N.3.8	Resalta una construcción o una idea expuesta por un miembro de la clase para que los demás la cuestionen.
4. Fomenta reflexiones y autoevaluaciones de los estudiantes frente a sus ideas o las de sus compañeros cuando se discute acerca de una estrategia de solución de la	Vocabulario	V.4.1	Exige especificar el uso de una herramienta del SGD.
	Vocabulario	V.4.2	Solicita expresar el significado asociado a un término.
	Mediadores visuales	M.4.1	Solicita modificar una construcción para estudiar una condición o propiedad.
	Mediadores visuales	M.4.2	Cuestiona un paso innecesario del proceso de construcción para que los estudiantes lo evidencien y lo modifiquen.
	Mediadores visuales	M.4.3	Solicita el término matemático que corresponde a un mediador visual.
	Mediadores visuales	M.4.4	Pide identificar errores en una construcción.
	Narrativa	N.4.1	Demanda realizar una construcción que implica evaluar casos que los estudiantes no han teniendo en cuenta.

tarea utilizando el programa.	Narrativa	N.4.2	Solicita a un estudiante defender la validez de una construcción realizada en el SGD cuando surge un argumento que la invalida.
	Narrativa	N.4.3	Exige expresar una postura sobre una afirmación realizada por un miembro de la clase.
	Narrativa	N.4.4	Evalúa el uso de una herramienta del SGD.
	Narrativa	N.4.5	Valora afirmaciones que se basan en lo que se observa del SGD
	Narrativa	N.4.6	Cuestiona las propiedades que se proponen incluir en una definición
	Narrativa	N.4.7	Invita a identificar asuntos problemáticos de una construcción.
	Narrativa	N.4.8	Destaca como punto crítico de la conversación las condiciones que se deben cumplir en una definición, hecho geométrico procedimiento o construcción.

Tabla 24 Categorías emergentes

5.2. CAMBIO EN EL DISCURSO

Evidenciamos siete cambios en el discurso de los estudiantes, los cuales presentamos en la siguiente tabla. En esta especificamos el cambio que quería promover el profesor, las acciones específicas que efectuó relacionadas con las acciones presentadas en la Tabla 24 Categorías emergentes y las evidencias de este cambio.

Cambio en el discurso que promovió el profesor	**Acción**	**Evidencias de cambio**
De términos coloquiales a términos especializados.	Emplea términos no especializados de un estudiante para indagar la idea matemática asociada a este (V.1.1). Fomenta el cambio de un término coloquial por uno especializado (V.2.1) Solicita explicitar la herramienta utilizada al solucionar un problema, con el propósito de que el estudiante identifique la no correspondencia de un término utilizado con la herramienta empleada (V.4.1) Institucionaliza una proposición a partir de las propuestas de los estudiantes remplazando los términos coloquiales y dinámicos por los términos especializados correspondientes (V.2.2).	Cuando Sebastián describía el procedimiento de construcción en el SGD, utilizaba las palabras recta y línea para referirse a segmentos, es decir asumía que estas tres palabras eran sinónimos. Se refería a línea y segmento como sinónimos (F2). En posteriores fragmentos, cuando Sebastián interviene, no vuelve a referirse a una recta como un segmento, aunque sigue utilizan recta y línea como sinónimos. Al parecer establece que el segmento y la recta son objetos diferentes. Eliana y Paola utilizaban términos como “línea imaginaria” y “línea infinita” (F3). Posteriormente los modificaron por la palabra recta, línea o línea recta (F4). En el uso de términos dinámicos como “unir”, “mover”, “sobre” entre otros, el profesor los modificó en las ocasiones que institucionalizó el saber por términos matemáticos. Los estudiantes siguieron utilizando estos términos, al parecer, porque

	Parafrasea una propuesta de los estudiantes utilizando términos especializados correspondientes a términos coloquiales empleados por ellos (V.2.3). Cuestiona el uso de un término especializado que no corresponde (V.3.1).	modificar los términos coloquiales no es suficiente para generar un uso de términos especializados (F16). Los estudiantes utilizaban la palabra borde del círculo o borde de la circunferencia para referirse a la circunferencia. El profesor parafrasea las ideas de los estudiantes utilizando adecuadamente la palabra circunferencia. En general, esto no fue suficiente para generar un cambio en el uso de las palabras círculo y circunferencia (F13).
De expresar ideas incompletas a expresar oraciones más estructuradas	Solicita a un estudiante explicar una idea para explicitar aspectos de esta que no han sido claros (N1.3). Explicita en una oración el objeto al cual se le está atribuyendo una propiedad (V.3.2) Sugiere cambios en la forma en la que se usa el término especializado *distancia* (V.2.1)	Sebastián (F2) y Adriana (F12) proferían oraciones incompletas. Más adelante las verbalizaciones de los estudiantes se convierten en explicaciones, es decir, no son ambiguas como ocurría anteriormente. Ellos ven la necesidad de modificar sus expresiones para que sean más claras para sus interlocutores (F11). Para referirse a puntos equidistantes, algunos estudiantes no hacían alusión a las parejas de puntos que cumplían esta relación (F4, F6 F8). Luego, en el fragmento 10, Adriana se refiere a las parejas equidistantes para objetar la propuesta de Pablo. Además, en el fragmento 11, durante una explicación, Laura precisa las parejas de puntos que equidistan cuando completa una idea mencionada anteriormente.
De expresar ideas incompletas, a verbalizar proposiciones de forma condicional.	Al institucionalizar una narrativa, el profesor sintetizaba las ideas de los estudiantes utilizando una proposición condicional (N.2.4)	A pesar de que todas las definiciones institucionalizadas eran proposiciones condicionales (*v.g.* intervenciones [15,178; F14]), los estudiantes no hacían uso de esta estructura cuando querían expresar la relación entre dos propiedades.
De expresar ideas incompletas a expresar ideas usando como mediador visual las figuras proyectadas.	Solicita a un estudiante apoyarse de un mediador visual para desarrollar su idea.	En los primeros fragmentos (*v.g.* F1, F2, F3) los estudiantes pocas veces utilizaban el SGD como apoyo para desarrollar sus verbalizaciones. Más adelante, acompañaban sus explicaciones haciendo uso del SGD (*v.g.* F8).
De proponer construcciones que permiten solucionar un problema a reconocer las restricciones de las mismas.	Genera incertidumbre acerca del cumplimiento de una propiedad geométrica que se supone debe cumplir la construcción realizada. Solicita el término matemático que corresponde a un mediador visual (M.4.3)	Los estudiantes pasaron de usar la cuadrícula y el esfero para garantizar colinealidad y equidistancia (F2, F8) a utilizar herramientas del SGD como: segmento, recta, y circunferencia (15,16). Paola aseguraba que el objeto geométrico que garantizaba colinealidad de los puntos es el

	Propone realizar construcciones que corresponden a una propuesta de un estudiante (N.3.7) Resalta las condiciones que no cumple una construcción (N.2.1) Solicita especificar una propiedad o característica que cumplen ciertos objetos geométricos en una construcción (M3.1)	segmento (F2). Posteriormente, reconoce las restricciones de esta herramienta para determinar si un conjunto de puntos es colineal(F3).
De proponer una construcción blanda a una robusta, modificando la rutina asociada al uso del papel cuadriculado.	Realiza preguntas para que los estudiantes expliquen una figura realizada en el SGD (M.1.1) Cuestiona una construcción blanda exaltando los inconvenientes que presenta (M.3.3) Solicita prever lo que ocurrirá al efectuar con el SGD, la propuesta de un miembro de la clase (N.3.4)	Las construcciones propuestas inicialmente por los estudiantes eran blandas (F1, F2). Más adelante (F11, F16) los estudiantes pasaron de darle un uso similar a las construcciones que realizan con lápiz y papel, empleando herramientas del programa que permiten garantizar una propiedad geométrica. Por ejemplo, para construir puntos equidistantes los estudiantes pasaron de utilizar la cuadrícula a herramientas como medio o centro y circunferencia para garantizar equidistancias.
De verbalizar o mostrar la solución a un problema en el SGD a explicar por qué la construcción realizada permite solucionar el problema.	Solicita especificar una propiedad o característica que cumplen ciertos objetos geométricos en una construcción (M.3.1) Solicita a un estudiante defender la validez de una construcción realizada en el SGD cuando surge un argumento que la invalida (N.4.2). Solicita apoyarse de una definición, hecho geométrico, propiedad o procedimiento para desarrollar una idea (N.3.8) Destaca como punto crítico de la conversación las condiciones que se deben cumplir en una definición, hecho geométrico procedimiento o construcción (N.4.9)	Las siguientes propuestas son ejemplos en los cuales los estudiantes se apoyaban del SGD y de las definiciones y propiedades institucionalizadas para explicar el funcionamiento de sus construcciones: punto medio entre dos puntos propuesta por Paola (F8), circunferencia propuesta por Camilo (11), triángulo isósceles propuesta por Clara y Adriana (16).

Tabla 25. Cambios en el discurso

6. CONCLUSIONES

En este capítulo presentamos las conclusiones del trabajo investigativo realizado, teniendo en cuenta tres asuntos. El primero de ellos, a partir de los resultados obtenidos en el análisis. El segundo teniendo en cuenta el aprendizaje como cambio en el discurso. El tercero haciendo referencia a el impacto que esta investigación en el desarrollo en nuestra práctica profesional.

6.1. ACCIONES DEL PROFESOR

A partir de la síntesis de resultados, es posible evidenciar que la categoría de análisis que se emplea con mayor frecuencia es *utiliza las ideas de los estudiantes para establecer discusiones entre ellos utilizando el programa para apoyar sus ideas*. Es posible observar qué en 52 ocasiones, el profesor emplea las acciones de esta categoría con la intención de generar un cambio en el discurso, lo cual representa un 36.88% comparado con las otras categorías. Dentro de esta categoría, la acción más recurrente del profesor fue *solicita a los estudiantes cuestionar los aportes realizados por sus compañeros* (A. 3.4), representada por un 28.8%. Aunque esta acción, en su mayoría de ocasiones, estuvo dirigida a favorecer el desarrollo de las narrativas, es la acción con mayor recurrencia en los mediadores visuales. La segunda acción más empleada en esta categoría fue *utiliza o parafrasea la respuesta de un estudiante con el propósito de generar discusiones* (A. 3.6), con un porcentaje del 23.1%. Al igual que en la acción anterior, la mayoría de las ocasiones, estuvo enfocada en la construcción de una narrativa.

Adicionalmente, observamos que la segunda categoría más empleada es *fomenta reflexiones y autoevaluaciones de los estudiantes frente a sus ideas o las de sus compañeros cuando se discute acerca de una estrategia de solución de la tarea utilizando el programa*. Esta categoría fue implementada en 42 ocasiones, lo cual representa un 29,79% en relación a las otras categorías. La acción más representativa de esta categoría es *indaga sobre las ideas o afirmaciones de los estudiantes para favorecer que ellos mismos revisen y modifiquen sus ideas e interpreten las de los demás* (A. 4.6), la cual representa un 52,38%.

Estas dos categorías y el conjunto de acciones que representan, determinan maneras en las cuales el profesor busca instaurar unas formas de actuar en la clase de geometría, mediante las cuales los estudiantes deben proponer proposiciones y procedimientos, que posteriormente se convierten en objeto de estudio mediante la evaluación y reflexión de las mismas.

Por otro lado, evidenciamos algunas acciones que el profesor no realizó, las cuales mencionamos a continuación, aludiendo a algunas razones por las cuales no se evidenciaron en el análisis y caracterización de la gestión del profesor.

- Retoma las ideas de los estudiantes en las discusiones grupales y les da un valor de verdad a las mismas: En constantes ocasiones el profesor pedía a los estudiantes que ellos mismos evaluaran una propuesta o afirmación realizada por un integrante de la clase, procurando no aceptar una propuesta como verdadera hasta que las ideas matemáticas asociadas a las narrativas institucionalizadas se desarrollaran.

- Retoma las ideas que un(os) estudiante(s) ha(n) socializado y rescata su pertinencia: Esta acción no se evidencia, debido a que cuando el profesor retoma las ideas de los estudiantes, lo hace parafraseando o resaltando la idea, puesto que en ocasiones estas ideas no fueron claras al momento de presentarlas.
- Propone nuevas variables que pretenden cuestionar una relación de dependencia: Consideramos que en los momentos en que el profesor realizaba la acción de resaltar el punto crítico de la conversación (A.3.8), en ocasiones proponía nuevas variables que pretendían cuestionar una relación de dependencia. Por ejemplo, en el fragmento 8, intervención [326], cuando el profesor pregunta: *¿qué objeto, cuando los puntos están alineados, por ejemplo, estos tres que están acá alineados (señala los punto A, C y B* Figura 11*), qué objeto geométrico yo tengo ahí?*
- Cuestiona la validez de las afirmaciones solicitando contraejemplos a los estudiantes: Esta acción ocurrió en repetidas ocasiones en la segunda clase observada (clase 10 de mayo). Sin embargo, los fragmentos en los que ocurrieron no hicieron parte de los datos investigativos seleccionados.

6.2. APRENDIZAJE COMO CAMBIO EN EL DISCURSO

El profesor realizó varios esfuerzos por lograr que todos los estudiantes hablen y participen de la clase, es posible evidenciar en las transcripciones que el 70% de los estudiantes intervienen en menos de treinta oportunidades. Mientras que un 10% de ellos participaron de sesenta a noventa veces, y el 16.66% intervino en más de noventa ocasiones. A partir de estos porcentajes de participación y teniendo en cuenta que tan solo observamos cuatro clases, no es posible evidenciar cambios en el discurso de la totalidad de los estudiantes, por tanto, los resultados presentados en la investigación tienen una restricción. Sin embargo, identificamos acciones repetitivas del profesor para promover cambios en el discurso de los estudiantes, apoyándose en el SGD, que buscan que el estudiante empiece a reconocer que es lo que se debe comunicar cuando el profesor le pide que solucione un problema.

Es por esta misma razón, que, aunque esperábamos identificar rutinas generadas por las acciones del profesor, esto no fue posible. Consideramos que cuatro sesiones de clase (90 minutos cada una) no son suficientes para identificar rutinas en los estudiantes, desarrolladas por el profesor. Para evidenciar rasgos de este aspecto discursivo, vemos pertinente realizar una investigación con un mayor número de datos. Sin embargo, evidenciamos una rutina del profesor en repetidas ocasiones, asociada a la acción de solicitar a los estudiantes opinar acerca de una idea expuesta por sus compañeros con el propósito de validarla. Esto ocasiona que los estudiantes vean la necesidad de expresarse de manera más clara y objeten algunas propuestas cuando identifican asuntos problemáticos.

Anteriormente mencionamos siete cambios en el discurso, los cuales los podemos catalogar como estrategias del profesor dirigidas a desarrollar algún aspecto discursivo. Estas son:

- De términos coloquiales a términos especializados.

- De expresar ideas incompletas a expresar oraciones más estructuradas
- De expresar ideas incompletas, a verbalizar proposiciones de forma condicional.
- De expresar ideas incompletas a expresar ideas usando como mediador visual las figuras proyectadas.
- De proponer construcciones que permiten solucionar un problema a reconocer las restricciones de las mismas.
- De proponer una construcción blanda a una robusta, modificando la rutina asociada al uso del papel cuadriculado.
- De verbalizar o mostrar la solución a un problema en el SGD a explicar por qué la construcción realizada permite solucionar el problema.

Estas estrategias promovieron aprendizaje en los estudiantes de las ideas matemáticas institucionalizadas pues, las formas discursivas de los estudiantes y gestión del profesor consolidan una comunidad de discurso en la clase de matemáticas. Por otro lado, observamos que hay aspectos que se mantienen invariantes en el discurso matemático de los estudiantes relacionado con el uso de términos, formas de validar una proposición, uso del SGD, entre otras.

Consideramos que la metodología implementada nos permitió identificar asuntos interesantes de la comunidad matemática del curso 604, en relación con el fenómeno estudiado. Así mismo, como investigadores y profesores en ejercicio, somos conscientes de las limitaciones de esta metodología en cuanto al diseño de tareas, poner a prueba hipótesis, entre otros.

6.3. APORTES A NUESTRA FORMACIÓN

El desarrollo de esta investigación nos aportó a nuestra formación profesional, puesto que nos hace conscientes de la necesidad de generar comunidades discursivas, en las cuales el rol del profesor y el uso que le da a los SGD son cruciales para fomentar el aprendizaje de los estudiantes desde un enfoque comunicacional. También debemos tener en cuenta la complejidad que implica adoptar este tipo de enfoque, puesto que la gestión del profesor se ve transformada por el conjunto de acciones objeto de nuestro estudio. Estas acciones que van dirigidas a generar un avance en el discurso, permitiendo que el estudiante evidencie la forma correcta de expresarse y lo que genera que ellos sean mucho más consientes con las verbalizaciones.

Adicionalmente, el trabajo con tecnología digital nos permitió darnos cuenta que esta es una herramienta que potencia el aprendizaje de las matemáticas. Puesto que gracias a la tecnología está cambiando el modo de ver y estudiar las matemáticas y sus usos, ya que amplía el rango de sus posibilidades. Cuando se utiliza el SGD, las formas discursivas de una comunidad se ven modificadas, lo que hace que se creen nuevas maneras de usar las palabras, validar afirmaciones, constituir apoyos en la conversación, entre otros. Esto conlleva a cambiar y generar nuevos aspectos discursivos de los estudiantes, lo cual modifica la gestión del profesor para que estas se asemejen a las propuestas por una comunidad matemática.

BIBLIOGRAFÍA

Alrø, H. y Skovsmose, O. (2012). Aprendizaje dialógico en la investigación colaborativa. En P. Valero y O. Skovsmose (Eds.), *Educación matemática crítica. Una visión sociopolítica del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas* (pp. 149-171). Bogotá: una empresa docente

Barwell R. (2016) Formal and informal mathematical discourses: Bakhtin and Vygotsky, dialogue and dialectic *Educational Studies in Mathematics 92/3*, 331-345.

Baxter, J. y Williams, S. (2010). Social and analytic scaffolding in middle school mathematics: managing the dilemma of telling. *Journal of Mathematics Teacher Education, 13,*7–26.

Berger, M. (2011). Using mathematical discourse to understand students' activities when using GeoGebra. *Proceeding of PME 35,* 2, 37–144.

Brendefur, J., y Frykholm, J. (2000). Promoting mathematical communication in the classroom: Two preservice teachers conceptions and practices. *Journal of Mathematics Teacher Education, 3*(2), 125-153, https://doi.org/10.1023/A:1009947032694.

Clarke, D., Xu, L. H. y Wan, M. E. V. (2013). Spoken mathematics as an instructional strategy. En B. Kaur, G. Anthony, M. Ohtani y D. Clarke (Eds.), *Student voice in mathematics classrooms around the world* (pp. 13-31). Rotterdam: Sense Publishers.

Chazam. D y Ball, D. (1999). *Beyond exhortations not to tell: The teacher's role in discussion-intensive mathematics clases.*

Drijvers, P., Ball, L., Barzel, B., Heid, K., Cao, Y., & Maschietto, M. (2016). Uses of technology in lower secondary mathematics education: A concise topical survey. Cham: Springer.

Gavilán, J., Sánchez-Matamoros, G. y Escudero, I. (2014). Aprender a definir en Matemáticas: estudio desde una perspectiva sociocultural. *Enseñanza de las Ciencias 32*(2), 529-550.

Goos, M. (1996). Making Sense of Mathematics: The Teacher's Role in Establishing a Classroom Community of Practice.

Goos, M. (2004). Learning Mathematics in a Classroom Community of Inquiry. *Journal for Research in Mathematics Education*, *35*, 258-291.

Goos, M., Galbraith, P. y Renshaw, P. (2002). Socially mediated metacognition: creating collaborative zones of proximal development in small group problem solving. *Educational Studies in Mathematics, 49*, 193–223.

Instituto Pedagógico Nacional. (2018). *Proyecto Educativo Institucional.* Documento en proceso de evaluación.

Krummheuer, G. (2012). El aprendizaje matemático como participación en procesos de argumentación colectiva. En N. Planas (ed.). *Teoría, crítica y práctica de la educación matemática*. Barcelona: Graó, pp. 61-79.

Lesh, R. y ,Kelly, A. (2000). Multitiered teaching experiments. En A. Kellyy R. Lesh (Eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and ScienceEducation*. N.J: Lawrence Erlbaum Associates, Inc., capítulo 9, 197-230.

Mariotti, M. A. (2009). Artifacts and signs after a Vygotskian perspective: The role of the teacher. *ZDM, 41*(4), 427-440.

MEN (1998). *Lineamientos Curriculares en Matemáticas*. Bogota: Ministerio de Educación Nacional.

MEN (1999). *Nuevas Tecnologías y Currículo de Matemáticas*. Bogota: Ministerio de Educación Nacional.

Mortimer, E. F. y Scott, P. H. (2003). Meaning making in secondary science classrooms. Maidenhead: Open University Press.

Nussbaum, E. M. (2008). Collaborative discourse, argumentation, and learning: Preface and literature review. *Contemporary Educational Psychology*, 33(3), 345-359.

Quaranta, M., y Tarasow, P. (2004). Validación y producción de conocimientos sobre las interpretaciones numéricas. *Relime*. 219-233.

Radford, L. y Barwell, R. (2016). Language in mathematics education research. En Á. Gutiérrez, G. C. Leder y P. Boero (Eds.), *The second handbook of research on the psychology of mathematics education: The journey continues* (pp. 275-313). Rotterdam: Sense Publishers.

Schacht, F. (2017). Between the conceptual and the signified: how language changes when using dynamic geometry software for construction tasks. *Digital Experiences in Mathematics Education, Online first*. doi: 10.1007/s40751-017-0037-9

Sfard, A. (1996). On acquisition metaphor and participation metaphor for the mathematics learning. En C. Alsina, J.M. Álvarez, B. Hodgson, C. Laborde, y A. Pérez (Eds.), *8th International Congress on Mathematical Education. Selected Lectures*. Sevilla, 14-21 de julio. Traducción realizada por Patricia Inés Perry.

Sfard, A. (2008). Thinking as communicating. Human development, the growth of discourses, and mathematizing. New York: Cambridge University Press.

Sinclair, N. y Moss, J. (2012). The more it changes, the more it becomes the same: The development of the routine of shape identification in dynamic geometry environment. *International Journal of Educational Research*, 51-52, 28-44.

Sinclair, N., Moss, J., & Jones, K. (2010). Developing geometric discourses using DGS in K-3. *Proceeding of PME 34*, 4, 185–192.

Sinclair, N., y Yurita, V. (2008). To be or to become: how dynamic geometry changes discourse. *Research in Mathematics Education*, *10*(2), 135-150.

Swars, S. L. y Meyers, B. (2014). Low and high achieving sixth grade students' access to participation during mathematics discourse. *The Elementary School Journal*, *115*(1), 97-123.

Yu, P., and J.E. Barrett. 2002. Shapes, actions, and relationships: A semiotic investigation of student discourse in a dynamic geometric environment. *Proceedings of the TwentyFourth Conference of PME-NA*, 775 - 784. Columbus, OH: Clearing House for Science, mathematics, and Environmental Education.

ANEXOS

ANEXO 1. TRANSCRIPCIÓN DE LA CLASE DE MAYO 10 DE 2018

A continuación, se transcribe[6] la interacción comunicativa registrada en video, en el curso 604 del IPN, de la segunda clase de geometría del segundo trimestre del año. En general, se aprecia buena disposición de los estudiantes en clase, mucha participación, esfuerzos del profesor por involucrar a la mayor parte de estudiantes en los diálogos, esfuerzos del profesor porque los estudiantes se escuchen unos a otros, espontaneidad de los niños al hablar. Aunque hay momentos de silencio en los que sólo se escuchan las personas que llevan el hilo de la conversación, en general hay ruido de voces de fondo, lo que haría creer que los niños están distraídos. Pero no es el caso pues se hacen evidentes reacciones que indican que han puesto atención al profesor o a sus compañeros.

Disposición de los estudiantes en mesas:

Mesa 1 (izquierda del profesor-adelante): Clara (cabello largo), Isabel (crespa), Juan (camiseta azul) y Pedro.

Mesa 2 (adelante): Paola, Marta, Daniela y Martina.

Mesa 3 (adelante): Andrés, Gustavo (se tiene la quijada), Alejandra y Ricardo (mano en ojo)

Mesa 4 (adelante): Pablo, Carlos, Samuel.

Mesa 5 (adelante): Viviana, Eliana y Laura.

Mesa 6 (atrás de mesa 5): Vanesa y Julieta (Carolina no vino ese día).

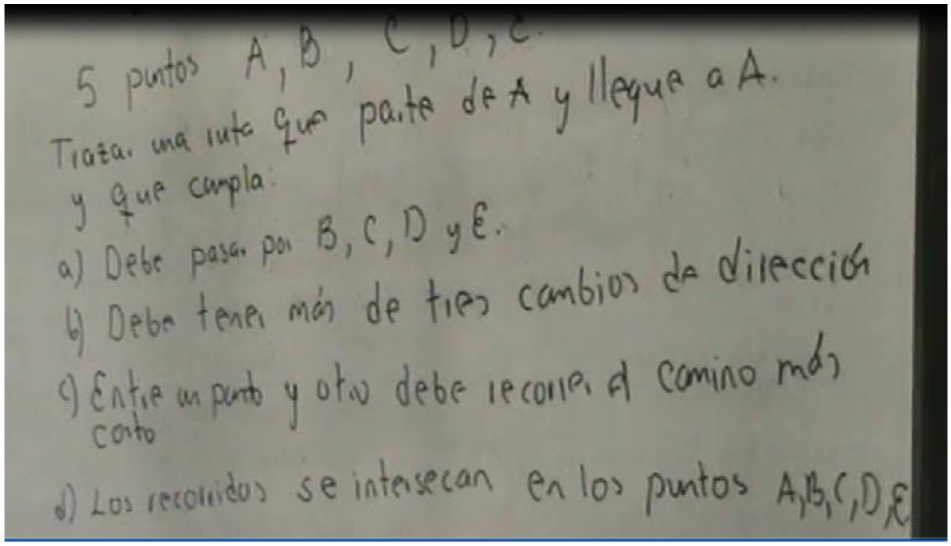
Mesa 7 (atrás de mesa 4): José, Camilo, Diego.

Mesa 8: (atrás) Sebastián y Francisco.

Mesa 9 (atrás de mesa 2): Adriana, Saida, Mariana, Samanta.

Antes de hablar con los niños, el profesor ha escrito en el tablero lo siguiente:

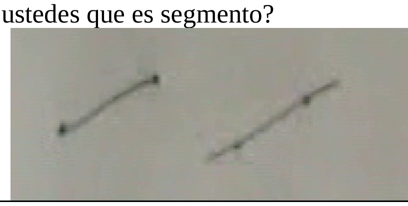
[6] Transcripción hecha inicialmente a partir de la grabación de video y complementada con la grabación de audio. La interacción duró una hora y mediaminutos.



1	Profesor:	[El profesor saluda a los estudiantes y les pide que se dispongan para la clase, luego, mira a Samuel que está recostado sobre el pupitre]. Samuel, [Menciona a Samuel, pero mira hacia varios lados del salón] ¿Nos podrías comentar qué fue lo que hicimos la clase pasada? (…) ¿Qué te acuerdas?
2	Samuel:	[Responde sin que le pregunten a él] Hicimos actividad de polígonos.
3	P:	Ok. Vimos los polígonos. [Se dirige a José]. José, ¿tú te acuerdas qué era un polígono?
4	José:	[No responde].
5	Otro:	Sí.
6	José:	Que me acuerde no pero lo tengo copiado.
		[Varios alzan la mano, incluidos Andrés y Paola]
7	P:	A ver, ¿qué era? [Señala a Paola].
		[Hay bastante desorden en el salón. Samuel y Samuel Arias se levantan del puesto y le dicen algo al oído al profesor, al tiempo que Paola habla.]
8	Paola:	[Lee los apuntes] Figura que tiene tres o más lados y sus líneas (…) y sus líneas se intersecan pero no salen del punto de donde se intersecan. No tienen rayas o líneas en su interior. No tienen nada en su interior. Su número de lados es indefinido, es decir no hay número.
		[Varios hablan al tiempo].
9	P:	Chist. Bueno, a ver (…) a ver (…) pero la idea era sin leer [la definición]. A ver,
10	Andrés:	[Tiene la mano alzada]. Es una figura porque [No se oye bien porque varios hablan al tiempo].
11	P:	A ver, a ver. Esperen. Pero, (…), chicos, están hablando mucho y no se están escuchando. (…) A ver, ¿listos? (…) (…) ¿Todos estamos ya en clase y nos estamos escuchando? (…) A ver, de lo que Paola dijo, entonces, (…) figura geométrica, ¿qué ibas a decir Andrés?
12	Andrés:	Es una figura geométrica (Habla muy pasito, no se oye).
13	P:	Nico, habla un poquito más fuerte porque allá Adriana tiene que alcanzar a escuchar (señala a Adriana que está al otro lado del salón).

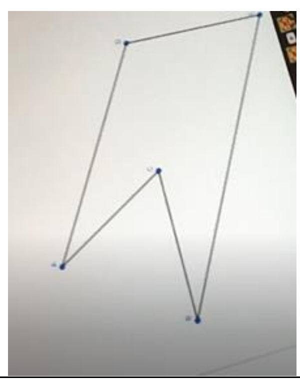
14	Andrés:	Es una figura geométrica, con tres o más lados, que no puede tener nada en su interior.
15	P:	Bueno, ahí había unas ideas
16	Carlos:	Y que cada segmento casi siempre se une con otro en sus extremos.
17	P:	Sí. Bueno, ustedes tenían unas ideas muy buenas. Y ahí alcanzamos a definir qué era polígono, ¿cierto? Y habíamos colocado un problema ¿cierto? Acá [señala al tablero] le cambié los nombres a los puntos porque hoy vamos a utilizar un programa. Que, que lo vamos a utilizar en las clases. Vamos a usarlo en las clases. Vamos a ver en qué clases lo podemos usar ¿cierto? Entonces, necesito que sea de la siguiente manera: un integrante de cada grupo va a ir a recoger unas tablets.
18		[Los niños se distribuyen las tablets. Un niño le dice que descargó GeoGebra en el celular y el profesor le dice que lo puede usar ahí]
19	P:	[Mucho ruido]. Bueno, van haciendo silencio.
		[Varios niños llaman a William para preguntarle algo sobre su Tablet: cómo se prende, dónde está el programa, etc.]
20	P:	Me van a prestar atención. (…) (…). Bueno, si por alguna razón al abrir el programa les sale una construcción oprimen “Nuevo” y les sale así, esto [Señala en el tablero digital dónde se abre un nuevo archivo]. Si hay algo dibujado ahí, le oprime acá y le sale “nuevo” y le aparece ahora sí esto [la pantalla en blanco].
		[Nuevamente varios niños le piden ayuda y él se desplaza por los puestos abriéndoles el programa y eligiendo el archivo nuevo.
21	P	Listo, bien. La idea es (…) (…). Nosotros no vamos a trabajar ni con esta cuadrícula ni con esto ¿a qué se les parece esto? (…) (…) Eso se llama ejes. Los vamos a quitar acá. Quitamos cuadrícula y ejes. Que queden las pantallas en blanco.
		[Orienta a varios niños sobre cómo hacerlo. Algunos lo llaman porque no pueden quitar los ejes y la cuadrícula].
22	P:	Ayuden a su compañero si ustedes ya pudieron.
		[Tardan unos minutos dejando en blanco las pantallas de GeoGebra.].
23	P:	Una vez tengan eso [La pantalla en blanco] presten mucha atención acá. Bueno, tenemos dos versiones de la aplicación. A algunos niños les van a aparecer las opciones acá [Señala en el tablero digital la parte izquierda de la pantalla].
24	Andrés:	[Alza la mano]. ¡Profe, profe, venga!
25	P:	Espérenme un momento. A ver. Préstenme atención. Tenemos que (…). Como hay algunas tablets que están actualizadas y otras no, tenemos que estar muy atentos a las explicaciones ¿listo? Entonces, en la que yo tengo las acciones que vamos a trabajar aparecen acá arriba en un ícono que tiene una circunferencia y un triángulo, ¿ya lo detectaron?
		[El profesor ayuda a los estudiantes hasta que todos tienen abierto GeoGebra y un archivo nuevo].
26	P:	Entonces, ¿cuál era el problema?
27	José:	¿Que tocaba dibujar las características de los polígonos?
28	P:	¿Ese era el problema?
29	Juan:	El problema era cómo diferenciar entre los polígonos y los no polígonos.
30	P:	Un momento. (muchos murmullos). A ver, chicos, escuchen por favor a sus compañeros. (…) Martina.
31	E:	Martina hable duro.

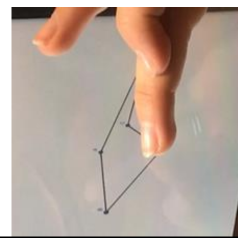
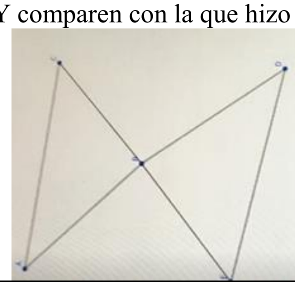
32	P:	Esperen. Esperen. El problema era el de los cinco puntos. (…) (…) bueno, me estaban contando era lo de polígono y no polígono. Pero, ¿se acuerdan de los cinco puntos?
33	Varios:	Sí.
34	P.	Listo, ¿qué era lo que había que tocaba hacer? A ver [mira para varios lados y señala a Laura]. Laura.
		[Varios alzan la mano].
35	P:	Es a Laura. Dale, tu puedes.
36	Laura:	Uno, era que teníamos que mirar para ver las distancias más cortas para ir de A a A.
37	P:	Pedro ¿De acuerdo?
38	Pedro:	No, es que no se escucha
39	P:	A Laura no le gusta hablar fuerte pero (…)
40	Andrés:	[Alza la mano]
41	P:	A ver, dinos, ¿qué escuchaste?
42	Andrés:	Era como (…) encontrar la forma más rápida como (…) para unir cinco puntos. (Con el dedo índice forma en el aire una figura cerrada).
43	P:	Ajá. Listo. Ahí lo acabo de escribir en el tablero, ¿listo? Vamos ahora (…). Varios de ustedes mostraron su dibujo. Mira [Se dirige a Vanesa] Ahora no vamos a hacer nada de eso. Mejor dicho, esto [la Tablet] tiene que estar en blanco. Yo porque veo por allá manitas si no he dado ninguna instrucción. Yo dije. Yo lo acabé de escribir en el tablero para que miremos qué es lo que toca hacer. ¿Listo? Había cinco puntos ¿cierto? En este caso yo le hice una modificación de nombre. Y entonces, vamos a aprender como acá como ubicar un punto.
44	Varios:	Ya sé.
45	P:	Ya sé que varios lograron identificar. Para los que no, por favor van a mirar acá la opción. Miren la opción. [Va ejecutando las acciones en una Tablet conectadas al televisor]. Voy darle la opción y parece un punto azul y una letra A. ¿Cierto? También los que tienen la otra versión ustedes tienen que identificar la opción ¿cierto? Entonces yo voy a oprimir esto. Entonces, lo chévere de esto es que (…) miren, es que yo lo voy a oprimir donde yo quiera. Miren. Aparece un punto ¿Con qué nombre?
46	Varios:	A
47	P:	Otro punto quiero pintar que caiga ahí. Entonces vieron que aparece B, y también quiero que aparezco por acá C, D y E. ¿Listo? Entonces les voy a decir lo chévere de trabajar con este programa y es esto que no me permite el papel. Es buscar esta opción, Todos van a buscar algo como si tuvieran un clic de (…) de (…) como del mouse en el computador. Si usted lo selecciona se llama ¿cómo?
48	Varios:	Mueve
49	P:	Mueve. Eso. Entonces vamos a coger los punticos y los vamos a mover por donde yo quiera. A todos los puntos los voy a mover. Eso es lo chévere. Muevan todos los puntos. A todos se les tienen que mover.
50	Pablo:	¡Uch!, moví la O.
		[Se oyen otras exclamaciones de asombro]
51	P:	Eso es lo chévere de este programa, ¿listo? Ya movió usted sus puntos
52	Paola:	Profe, no me salen letras.
53	P:	Sí, es que no sé qué pasó con esa Tablet. Ahora miramos. Ahora te miro. Para que nos salgan. Por ahora identifica cuáles son A, B, C, D. Bien. Ya tenemos los cinco puntos, ¿cierto?

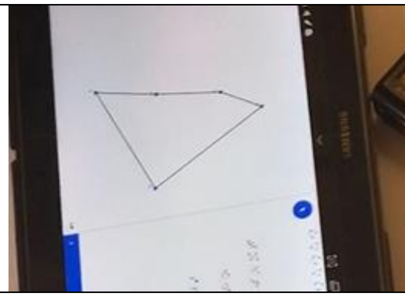
54	Varios:	Sí.
55	P.	Bien. ¿Luego qué hago? (…) ¿si voy a hacer este problema? (…) ¿qué necesito hacer?
		[Zaira le cambia la Tablet a Paola].
56	Varios:	Unirlos.
57	P:	Unirlos ¿Unirlos con qué?
58	Varios:	Con líneas.
59	Varios:	[Varios hablan al tiempo]. Con rectas
60	P:	¿Con rectas o con segmentos? ¿Qué necesito?
61	Pablo:	Con esta (señala con el dedo la opción en la Tablet). Con el segmento.
		[Mucho ruido].
62	Varios:	Unirlos.
63	Andrés:	Con segmentos.
64	Pablo:	¡Uy!¡Ya se cómo! Mira profe.
65	P:	¿Por qué con segmentos?
66	Pablo:	Listo profe. (Le muestra su Tablet).
67	Andrés:	(Hace un gesto con las manos como agarrando un punto con cada una).
68	P:	Esperen, esperen que así nadie se escucha. Esperen. Alcen la mano y yo les doy la palabra y escuchan (…) (…). Andrés, ¿querías decir algo?
69	Andrés:	Que los segmentos son las líneas más pequeñas.
70	P:	Sí, pero
71	Alejandra:	(Alza la mano)
72	P:	A ver, ¿tú vas a decir algo?
73	Laura:	Y tienen una longitud determinada.
74	P:	A ver, me están diciendo que es un segmento. Listo, yo les creo. Pero mi pregunta es si utilizamos rectas o segmento, ¿qué creen ustedes? ¿Qué me dice Francisco? ¿Tú que crees que vamos a utilizar para mirar la (…) para trazar la ruta (…) ¿qué necesitamos? ¿rectas o segmentos? Porque unos dijeron rectas y otros segmentos.
75	Francisco:	Segmentos.
76	P:	¿Todos de acuerdo con segmentos o necesito las rectas?
77	Samuel:	Rectas.
78	P:	¿O necesito las rectas? Bueno, entonces vamos a mirar dónde acá sale un segmento. En esta versión, (…) van a mirar acá, miren [muestra el tablero digital], por acá hay un poconón de opciones, ¿cierto?
79	Pablo:	La primera.
80	P:	La primera. Por acá me sale (despliega las opciones). Y aparecen por acá los símbolos de (…) de segmento. Miren. Aparece algo así (Se dirige al tablero y dibuja un segmento). Bueno, allá está. Aparece algo así ¿cierto? (…) Y aparece algo así (Dibuja una recta en el tablero). ¿Cuál creen ustedes que es segmento? 
81	Varios:	Ese. (Señalan la representación de un segmento).
82	Pablo:	El primero a tu izquierda.
83	P:	Esta. ¿Y esta para qué sería?

84	Varios:	Recta.
85	P:	Para recta. Ahorita la que nos interesa es esta. Entonces vamos a buscarla. En la versión de (...) la otra (…) en la otra versión busquen esta opción y la despliegan que allí les aparece segmento.
86	Pablo:	¡Ya lo hice profe!
87	P:	¿Ya hicieron todo? Bueno, les vamos a dar un tiempo para que ustedes, en grupo, convenzan a sus compañeros de que (…) (…). A ver. Bueno, quiero que se acuerden de una cosa. De los tres pasos que debía cumplir. Ya sabemos trazar los segmentos. (…) (…) ¡Juan! Entonces, ya sabemos que el problema tiene que cumplir esas cuatro opciones, mírenlas allá (señala al tablero). Van a discutir con sus compañeros a ver si su polígono es el que mejor quedó construido, de acuerdo a esas cuatro opciones, ¿listo? Trabajen un momento y ahora volvemos otra vez.
		(Alguien le pregunta algo pasito).
88	Pablo:	¿O sea cada uno hace uno?
89	P:	Digamos, tú hiciste este polígono y voy a decirle a mi compañero si me quedó bien porque cumple con todas las condiciones. Cada uno va a trabajar en grupo ¿listo? y yo voy a mirar su trabajo ¿Listo? [Se acerca a la mesa donde está Adriana]. Yo voy a mirar por acá. ¿Qué están haciendo? (Mira la Tablet de Adriana). Listo, tú ya lo hiciste, ¿ese es tu polígono. ¿Cumple con todas las características que están acá? (Se dirige a otra mesa y explica a los niños cómo se hace para borrar). Para borrar tienes que escoger borrar.

Conversación entre Leonor, Laura y compañeras:

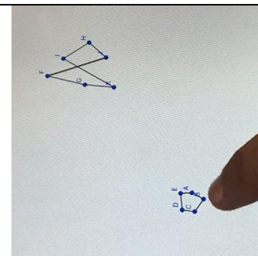
90	Leonor:	Paola , ¿me puedes hacer un favor? ¿Volteas tu Tablet para que tus compañeras vean lo que hiciste? ¿Están de acuerdo con que esa figura cumple las condiciones que dice allá en el tablero?
91	Laura:	(Muestra la Tablet) 
92	Leonor:	¿Chicas?
93	Viviana y Eliana:	Sí.
94	Leonor:	¿Por qué? ¿Qué condiciones cumple?
95	Eliana:	Cumple con las condiciones de que cada punto se une con cada letra, con cada polígono y forma una figura.

96	Laura:	Pero yo digo que hay como un error porque en esa condición dice que tiene que tener un recorrido muy corto y ahí los puntos están muy largos. Es que esa condición no la comprendía muy bien, por eso no sé si está bien.
97	Leonor:	Los puntos son lo que nos dan inicialmente. Entonces la trayectoria que hagas depende de dónde estén esos puntos.
98	Laura:	Sí.
99	Leonor:	Entonces ya ubicados y quieticos los puntos, ¿cómo haces para hacer el camino más corto?
100	Laura:	Digamos que me digan el camino más corto de A a E. Entonces personalmente yo podría hacer esto, ¿no?
101	Leonor:	Borra los segmentos, todos, todos. Lo que tenías era una opción. Ahora ¿cuál es la otra opción?
102	Laura:	(Hace una figura similar a la anterior y luego arrastra los puntos para acercarlos) 
103	Leonor:	¡Ah! Pero es que estás moviendo los puntos. Y no se vale porque los puntos son como quedaron al principio. (…) Y comparen con la que hizo Eliana, ¿estará bien? 
104	Laura:	Entonces ahí podríamos ver (…) Yo digo que cumple la mayoría de la condiciones y está bien.
105	Leonor:	¿Cómo sería el recorrido? Tú sales de A y ¿qué haces?
106	Eliana:	Salgo de A, a B (va señalando los puntos con el dedo). Y de B a D y de D a E y de E a B y de B a C y luego a A.
107	Leonor:	¿Por qué vuelves a pasar otra vez por B?
108	Laura:	Eso parece (…) ¿Cómo es que se llama? Esto (señala B) parece un vértice en común. Ya que lo pienso. Porque A y D se comunican a través de B. Y también C y E.
109	Leonor:	Estás pasando varias veces a través de B entonces ese no es el camino más corto ¿no? Porque tienes que ir a A y recorrer todos los puntos y volver a A ¿El camino más corto implica pasar varias veces por el mismo punto?
110	Eliana:	O también podía ser de B a D y de D a E y otra vez se repite B pero, E a B y de E a C y de C a A.
111	Leonor:	Borra ese e intenta otro. Pero, ¿pongámoslos los tres (las tres figuras) ¿en qué se parecen y en qué se diferencian?
112	Viviana:	(Tiene hecho un pentágono bastante irregular).

		
113	Eliana:	La diferencia es de que (…) su forma es diferente. En común todos tienen como lados iguales.
114	Laura:	Lados rectos.
115	Eliana:	Y tienen una parte de su camino muy larga.
116	Leonor:	¿Y todos cumplen que pasan por todos lo puntos?
117	Laura:	Sí.
118	Leonor:	¿Y todos cumplen que tienen que tener más de tres cambios de dirección?
119	Viviana:	Pues el mío sólo tiene dos cambios de dirección.
120	Leonor:	¿Entonces está bien? Muestra los cambios de dirección.
121	Viviana:	(Va señalando los puntos mientras habla). De A a B, de B a C, de C a D
122	Laura:	No, pero cambios de dirección. O sea, vertical, horizontal y así.
123	Leonor:	¿Cuántos cambios de dirección tienes tu?
124	Laura:	¿El mío? Uno, dos, tres, cuatro (los señala con el dedo). Y para verlos no necesitaba comenzar desde la A. Podía comenzar en la E y terminar en la A.
125	Leonor:	Yo quiero que comparen estos dos [las figuras de Laura y Viviana] con este [la de Eliana] ¿Qué es lo distinto?
126	Laura:	Es que nosotras tenemos, como digamos, algo diferente. Porque ese parecen dos figuras juntas.
127	Viviana:	Yo sé, yo sé. En este [el de Eliana] estas rectas se cruzan y en los demás no tienen eso.
128	Laura:	Un punto de unión como tal.
129	Leonor:	¿Estás dos qué figuras son? (…) ¿Cómo se llaman?
130	Laura:	Polígonos.
131	P:	¿Este es un polígono? [El de Eliana].
132	Laura:	No.
133	Leonor:	¿Tú qué dices Eliana?
134	Eliana:	Eh, más o menos.
135	Leonor:	¿Sí o no? Porque en geometría es o no es.
136	Eliana:	Digamos que no podríamos decir que bien. Porque dicen que los polígonos como tal, por decirlo así, no tienen contenido. Digamos que no tiene como un fin. Y ese tiene un punto que se crucen.
137	Leonor:	Ahora presentan su solución a ver qué dice el profesor. Porque estas dos se parecen.
138	Eliana:	El mío es diferente. ¡Es único!

Conversación de Leonor con xxx

139	Leonor:	¿Qué hiciste?
140	Niño:	Ese es un ejemplo de no polígono y acá hice uno de polígono

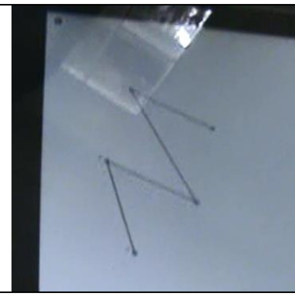
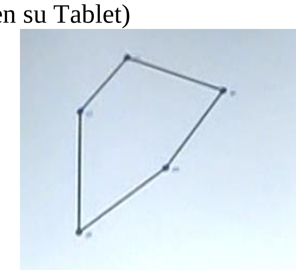
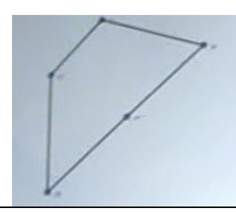
		
141	Leonor:	Y el de allá, el primero, ¿por qué dices que es un no polígono?
142	Niño:	Porque se cruzan entre sí.
143	Leonor:	¿Y qué pasa?
144	Niño:	Que cuando se cruzan entre sí (…) no se pueden intersecar.
145	Leonor:	Y ¿cuál de las dos figuras es la que resuelve el problema?
146	Niño:	Esta (señala el polígono) porque dijeron que pintáramos un polígono.

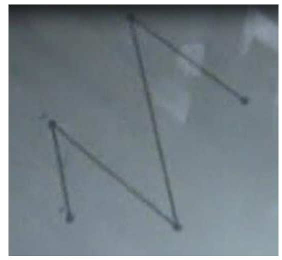
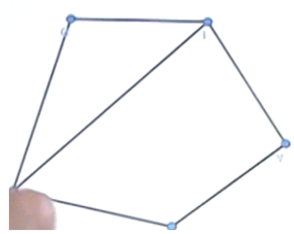
Conversación de William con grupo de Paola:

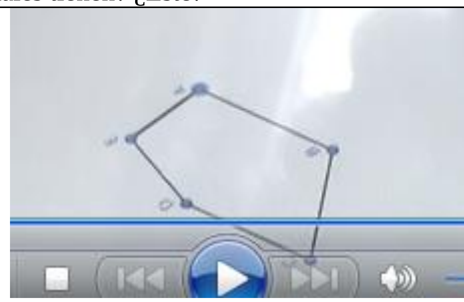
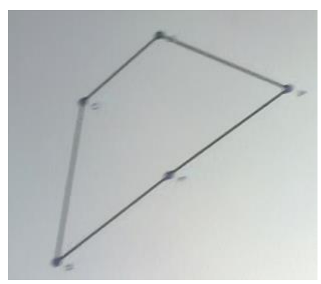
147	Paola:	(Llama al profesor). ¿Cómo así debe tener más de 3 cambios de dirección?
148	P:	¡Ah! Los cambios de dirección. Acuérdate. Que si iba así (Señala con la mano una dirección), cambiaba (señala una dirección diferente) así, no sé, rotaba o algo sí, rotaba, cambia, va de arriba ¿sí?
149	Martina	[Es compañera de Paola . Hace un gesto con las dos manos señalando cambios de dirección] 
150	Alguien:	Listo.
151	P:	Ahora tienes la tarea de convencer a tu compañero que el tuyo cumple todas las características.

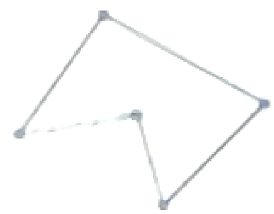
Conversación de Zaira con Paola y su grupo:

152	Samuel:	(Habla duro) Debe tener más de tres cambios.
153	Compañera de Paola:	Ahí, ya:

		
154	Zaira:	¿Ese cumple todas las características?
155	Paola:	No porque no se intersecan, es abierto.
156	Compañera de Paola:	Tiene que ser corto.
157	Paola:	Eso no lo entiendo, ¿cómo así que entre un punto y otro debe recorrer el camino más corto?
158	Zaira:	Es que mira que si (…) ¿tienes un lápiz? Mira que si tú haces esto, desde este punto (…) pero, haz la construcción que tenías ahorita.
159	Compañera de Paola:	Ay, ya.
160	Zaira:	Lo de los segmentos, que tú tenías ese segmento y ese segmento, o sea dos triángulos (Dirigiéndose a Paola) ¿Ese cumple todas las condiciones?
161	Paola:	(Tiene la siguiente figura en su Tablet)  Sí, mira. Cinco puntos, A, B, C, D y E. Y traza una ruta que parte de A y vuelve hasta A, pasa por B, por C, por D y por E. Y tiene más de tres cambios de dirección y entre un punto y otro
162	Zaira:	¿Tiene más de tres cambios de dirección?
163	Paola:	Sí. Y los recorridos siempre van por A, B, C, D, E.
164	Zaira:	Pero mira el recorrido, ¿el último lo cumple? Los recorridos se intersecan en los puntos A, B, C, D y E?
165	Paola:	Sí, acá se intersecan.
166	Zaira:	Y por ejemplo, este (…) Si mueves a E y lo pasas acá. (Arrastra E hasta dejarlo colineal con otros dos puntos) 
167	Paola:	No cumple (…) (…) A ver, espera. Un, dos tres (…) Sí cumple, alcanza a tener tres cambios de dirección.

168	Zaira:	Entonces, dile eso a sus compañeros para ver ellas que opinan.
169	William:	¿Qué hicieron?
170	Paola:	Listo profe.
171	E:	¿Cómo es tu nombre?
172	Zaira:	Zaira, con ere. Miremos ese.  ¿Ese también cumple? Miremos todas las condiciones.
173	E:	Pues antes yo tenía (…) Antes yo tenía este.  O sea, de A a B, de B a (…), no.
174	Paola:	Mafe, mira.
175	E:	Se supone que yo tenía, A, B, C, D y E. Yo tenía A, B, C (…) ya. De A a B, de B a C. de C a D y de D a E.
176	Zaira:	Ajá. Y ese cumple con todas las condiciones. Si, por ejemplo, tu trazas un segmento de C a E, ¿lo sigue cumpliendo? Traza un segmento de C a E (…).  ¿Esa figura lo cumple? ¿Ustedes qué dicen? ¿Esa figura que tiene la compañera lo cumple?
177	Paola:	No sirve porque no es polígono.
178	Zaira:	No. Pero ahí no dice que sea polígono.
179	Paola:	Entonces espera. Tiene puntos A, B, C, D y E.
180	Zaira:	Miren la diferencia, ¿no? Este, pues tiene supuestamente para que sea un polígono tiene un punto más, mientras que este, no está en el orden indicado, que nos dijeron, los puntos. Pero igual también cumple, entonces miremos a ver si este también cumple. Bueno, sigue.

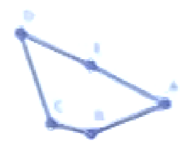
181	Paola:	Pues se supone que tiene que más de tres cambios de dirección y entre un punto y otros
182	E:	Sí pasa.
183	Zaira:	Mira que está es una opción. Y la que tú también tenías. Esa sería otra opción. O ¿ustedes qué creen? ¿Lo cumple?
184	E:	Sí, porque de A vuelve a A, tenemos tres cambios de dirección y todas las líneas son rectas.
185	Zaira:	Exacto ¿Ustedes cuáles tienen? ¿Este?
186		 Mira A, B, C, D y E y de A vuelve a A.
187	Zaira:	También. Pero ¿y las otras condiciones? (…) Pues ya vimos que también la cumplen porque si este las cumple este también la debería cumplir.
188		No porque no cumpliría.
189	Zaira:	No, pero mira que ella lo que hizo fue mirar que fuera recto, ¿que pertenezcan a una misma recta? Sí, ahí también tiene cuatro puntos de dirección. Y en este caso,  ¿qué polígono sería?
190	Paola:	Un polígono normal.
191	E:	Un cuadrilátero, creo.
192	Zaira:	Un cuadrilátero, ¿cierto? Porque tiene sólo cuatro esquinas. E pertenece a un segmento, pero no necesariamente es un pentágono.
193	Paola:	Yo siempre me confundo con eso.
194	Zaira:	(Otro grupo) ¿Ustedes que hicieron? (…) (…)

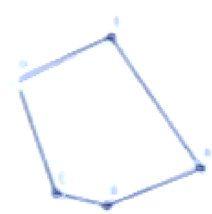
		 ¿Todos hicieron el mismo polígono?
195	E:	No. Yo hice uno diferente. Ella (…)
196	Zaira:	Parecidos.
197	Saida:	Este es el único normal.
198	Zaira:	Pues si cumple las condiciones, todos son normales. ¿Todos ellos cumplirían las condiciones?
199	Saida:	Pues, ósea, lo que hemos visto es que sí las cumple.
200	Zaira:	¿Por qué?
201	Saida:	Porque tiene líneas rectas, no hay nada en el interior y pues porque (...)
202	Zaira:	Pero no, esas no son las condiciones que dicen ahí (señala el tablero).
203	Saida:	O sea (…) Bueno, listo. Una de las condiciones que dice es que debe tener cinco puntos. Esa es una de las condiciones. Bueno listo. Esa es una de las condiciones. La otra es que (…) más de tres direcciones. Entonces esta también la cumple porque.
204	Zaira:	¿Qué dirección hay?
205	Saida:	(Desde acá, el diálogo sucede simultáneamente con las intervenciones de William a continuación). (Señala con el lápiz los lados del polígono que tiene representado en la Tablet).Tiene acá una, acá dos, acá tres y acá cuatro. Y ya, y la otra es que haya el camino más corto. (…) (…) El camino más corto es que haya la figura más pequeña (…).
206	Zaira:	El camino más corto se refiere es (…) mejor dicho, este también puede ser un camino; hacer como chun (Representa una línea curva con un lápiz, como si estuviera dibujando en el aire). De un punto a otro hacer el camino más corto es hacer como una recta. A eso es a lo que se refieren con esa condición.

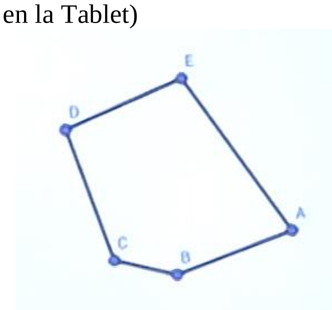
Nuevamente todo el grupo:

207	William:	Bueno, silencio. ¿Quién nos quiere compartir la figura que hicieron? (…) Listo.
208	Samuel:	Yo, yo.
209	William:	Bueno, Samuel empieza y luego Sofía. ¿Cómo vamos a hacer? Voy a mirar cómo hacer la conexión. ¿Lo tienes ahí? Vamos a tratar de hacer lo que hiciste en tu Tablet acá. Si quieres desde tu puesto o desde acá. Bueno, todos van a escuchar lo que hizo Samuel a ver ustedes qué opinan. (…) (…). Samuel, cuéntanos. Escuchar, escuchar. Bueno, cuéntanos ¿qué están haciendo?
210	Niño:	(Al observar el tablero inteligente una representación). ¿Quién está haciendo eso? ¿él?
211	Samuel:	(Hace una construcción en la Tablet que se conecta al tablero inteligente. En ella se ven cinco puntos y Samuel los mueve para que no queden colineales). Estoy acomodando la figura.
212	Gustavo:	No es figura.

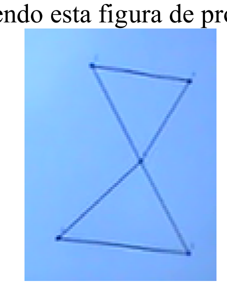
213	P:	¿Por qué estás acomodándola? (…)
214	Samuel:	Porque ahí dice en el tablero.
215	P:	O sea, que hay que acomodarlas ¿o a alguien se le ocurre que no hay que acomodarlas?
216	Pablo:	Pues obvio, sí porque esa es la figura de él.
217	Gustavo :	Porque si no acomodamos los puntos, las líneas no van a tener la dirección (representa con la mano una dirección).
218	P:	¡Ah! ¿Qué pasara (…)? Espera, Samuel, a ver, una cosita. Trata de acomodar que queden tres puntos acá. Haz este punto E acá por favor (colineal a A y D). ¿Puedes mover E por favor?
219	Samuel:	Sí, ya voy.
220	P:	Sólo mueve el punto. Un poquito más acá a ver. Mira donde está mi dedo Samuel ¿Qué pasará? Venga, ¿yo podría acomodar esta opción?
221	Varios:	Sí, si se puede.
222	P:	Entonces, ¿qué dice Samuel, si se puede dejar ahí?  ¿Y los otros puntos pueden quedar ahí? Bueno ¿y qué va a hacer ahora?
223	Samuel:	Hacer el polígono (…) pues completarlo (…) con los puntos.
224	P:	¿Y le sale polígono?
225	Samuel:	Sí. 
226	P:	Sí. Bueno, (Espera que Samuel acabe la construcción). Y ya. Esa es la construcción ¿Cumple todas las características? O alguien dice, no, no cumple todas.
227	E:	Sí cumple todas.
228	P:	¿Todas? ¿Las tres? A mi (…) ¿No les parecen que estos pareciera que están como en el mismo segmento? ¿O no?
229	Varios:	Sí.
230	Varios:	No.
231	Uno:	¿Cuáles?
232	P:	¿Ustedes qué dicen?
		(Paola y Gustavo alzan la mano).
234	Paola:	Pero profe.
235	P.	Esperen, en orden. A ver, Paola .
236	Paola:	Sí, pero profe. Se supone que tiene que tener más de tres cambios de dirección y ahí tiene.
237	P:	Ahí están. O sea, eso se puede. (Se dirige a Gustavo que tiene alzada la mano). ¿Tú qué dices?.
238	Gustavo :	Pues es que yo no diría que es la misma porque, digamos, aunque sea un poco difícil notarlo tiene un leve grado de inclinación.

239	Paola:	Aja!
240	Gustavo :	por lo que terminaría ser una línea diferente. Tendría que ser completamente recta para ser es una sola.
241	P:	Listo. Samuel, yo quiero que trates de dejarlo como si estuvieran en el mismo segmento. Trata de cuadrar este E, a ver qué pasa.  Mueve el punto E. Acá. No, no no. Espera. Vamos a suponer que el punto E está acá en el segmento DA. ¿Ustedes creen que se cumplen las condiciones del problema? ¿Qué dirían ustedes? (…) Del problema (Varios alzan la mano) ¿Qué dice Alejandra? (…) A ver, escuchemos. A ver.
242	Samuel:	(Alza la mano). Yo profe, profe, profe.
243	P:	(Toma la Tablet que se conecta al tablero y alinea D, E y A) Miren acá esta situación que tengo acá. Estoy preguntando, si creen, por ejemplo, Paula. Paula nos puede decir, por ejemplo.
244	Paula:	Yo no.
245	P:	¿Qué pasará? ¿Cumple con todas las condiciones?
246	Samuel:	No, no.
247	Paula:	Yo.
248	P:	Dejemos a Paula, por favor escuchemos y luego reaccionan ¿Bueno? Chist. A ver, cuéntanos. (Se dirige a Paula). Cuéntanos.
249	Paula:	Pues ahí tiene los cinco puntos que están diciendo ahí.
250	P:	Sí.
251	Paula:	Eh, más de tres cambios de dirección (…) no.
252	Varios:	No.
253	Samuel:	Hay dos.
254	P:	Esperen, esperen ¿Cuántos hay? ¿Nos los puedes mencionar?
255	Paula:	El de acá, el de acá, el de allá. (Representa con la mano cada cambio de dirección)
256	P:	¿Cuántos hay?
257	Paula:	Tres
258	P:	¿Cumple la condición? ¿Qué dicen acá? ¿Sí cumple la condición?
259	Samuel:	Sí, porque tiene que tener tres o más cambios de dirección.
260	P:	¿Todos de acuerdo?
261	Adriana:	No, no. Tienen que ser más (…) más de tres.
262	P:	¿Entonces acá me sirve?
263	Varios:	¡No!
264	P:	No, cierto. Ahí ya no sirve. Bien. Eh (…) Entonces, bien, pero (…) entonces (…) hay otra discusión que me parece también interesante. ¿Quién dice que la condición (c)? ¿qué debería yo hacer para garantizarla? Para garantizar que es mi camino más corto.
265	Samuel:	(Mira el tablero) Apequeñarlo.
		(Risas)

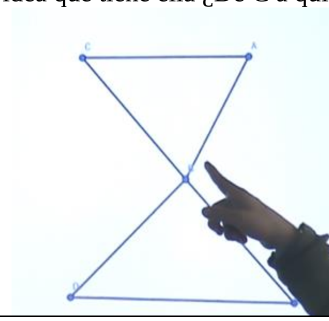
266	P:	(Observa a Pablo que se ha levantado del puesto) ¡Pablo! (…) ¿y qué es apequeñarlo?
267		(Risas).
268	P:	A ver, qué harías tú. Todos van a prestar atención. Cierren sus Tablets. Quiero que presten atención acá. Todos van a cerrar las Tablets, tápenlas y vamos a prestarle atención a lo que dice Samuel, todos van a cerrarlas. ¿Listo? (…) (…) Bien, Samuel, entonces ¿qué harías tú? (…) (…) A ver (…) ¿Ustedes que dicen? (…) ¿Qué pasó?
269	Samuel:	(Arrastra lo puntos hasta que la figura queda pequeñita)
270	Paola:	(Alza la mano y habla al tiempo). Por ejemplo, si yo tengo un punto acá (representa un punto en el aire) y otro punto acá (representan otro punto en el aire), el camino más corto que yo puedo hacer es el recto (Representa un segmento con extremos los puntos). Porque si yo no lo hago recto quedaría más largo (representa una curva). No se necesita achiquitarlo porque (…) no cambia (…)
271	Samuel:	¿Entonces así? (arrastra los puntos para agrandar la figura) ¿o más grande? (Se ríe).
272	P:	¡No! A ver. ¡Ey! Creo que (…) Ustedes tienen que prestar atención a lo que dice su compañera y vamos a mirar a ver si es cierto. Paola ¿nos podrías decir entonces cuál es tu idea aquí con la Tablet? Dices que no hay necesidad de hacerlo así de pequeñito. Miremos lo que hace Paola acá en el tablero. Todos vamos a ponerle atención. Allá. A ver.
273	Paola:	Entonces, es que se supone que para achiquitar los caminos ahí ya no se puede hacer más (muestra la figura)  a menos que corras exactamente los puntos, porque el camino corto entre un punto y otro es la línea recta. Porque si yo le hago cosas más curvas o más hacia allá, el camino va a ser mucho más largo.
274	P:	¿Qué creen ustedes? (…) Samanta. A ver, a ver, escuchemos, escuchemos. Adriana. (Se dirige a Pedro). Necesito que tú te hagas acá, que cambies de puesto.
275	Salome:	Es que no veo.
276	P:	Ahí alcanzas a ver perfectamente. Por favor. Bueno, ¿qué? Escuchemos, Pedro por favor. Listo. ¿Estás de acuerdo con lo que dijo Paola ? ¿o de pronto?
277	Samanta:	No.
278	P:	¿Por qué?
279	Samanta :	Porque no explica a uno cómo hacerlo más pequeño pues tiene que tener
280	Samuel:	No porque (Alza la mano).
281	P:	¡A ver! Espera. Tenía Adriana la palabra y luego vas tú. Pero (…) A ver. Listo, ¿qué era?
282	Adriana:	(Tenía la mano levantada). Yo no estoy de acuerdo porque si los pones rectos pues no tendría cambios de dirección.
283	Andrés:	Sí puede ser recto y tener cambios.

284	P:	Bueno, ¿y cómo sería eso?
285	Samuel:	Pero no sería un polígono (…) no sería un polígono.
286	P:	¿Por qué no sería un polígono?
287	Samuel:	Si tiene más cambios de dirección que una línea recta.
288	Carlos:	¿No sería un polígono cuando qué?
289	P:	¿Cuándo qué?
290	Samuel:	Digamos, cuando hay una línea recta y (Señala con el dedo una recta vertical).
291	P:	Pero digamos, en este caso (Señala el tablero). Paola , en este caso no más. Mirémoslo ¿Acá podríamos nosotros (…) ¿Tú idea cuál es? ¿Qué lo volvamos cómo? ¿Cómo logramos ese camino corto?
292	Paola:	De acá, (muestra la figura en la Tablet)  se supone que (…) que se puede cambiar la distancia entre dos puntos.
293	P:	Trata de hacerlo en el aparatico. Para que todos miremos acá, en el tablero. Miremos qué está haciendo Paola . (Ella acerca los puntos D y E). Estás moviendo dos puntos, ¿cierto?
294	Paola:	Yo lo que estoy diciendo es que (…) la distancia más corta, por ejemplo, en este caso la posibilidad de mover los puntos pues se da, pero, la real como idea (…) que yo tengo es que el camino más corto entre dos puntos no es una línea curva o lo que sea, porque se demora mucho más sino la línea recta, lo más recto que hay entre dos puntos.
295	P:	¿Qué piensan de esa explicación que dio Paola ?
296	Carlos:	¡Excelente!, ¡excelente!
297	Varios:	(Risas)
298	P:	A ver, a ver ¿Qué creerías tu Juli? (Mira a Julieta, ella asiente) ¿Te convenció? O sea que Paola dice “por acá no puede haber algo así, curvo. Todos de una dijeron hagámosle segmentos. (Ve que Adriana levanta la mano) ¿Señora?
299	Adriana:	No porque si fuera una línea curva no sería polígono.
300	P:	¿Y necesitamos que sea polígono?
301	Varios:	¡No!
302	Varios:	¡Sí!
303	Paola:	Ahí no dice. (Señala el tablero en donde están consignadas las reglas)
304	P:	¿Dónde dice?
305	Pablo:	No dice que sea polígono pero esas reglas nos llevan a eso.
306	P:	¿Sí? ¿Lo obligan?
307	Paola:	Profe, se supone que entre un punto y otro debe recorrer el camino más corto significa que las líneas deben ser rectas; es decir que, desde mi punto de vista, yo entiendo eso lo hace un polígono, de esa manera.
308	P:	Mm (…) Alán, ¿qué tal? (…) ¿de acuerdo con, con lo que acaban de decir tus compañeros?

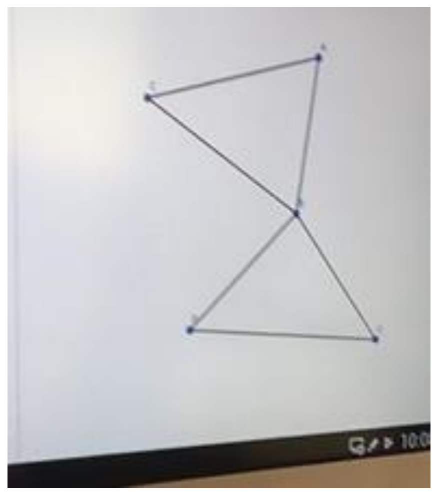
309	Juan:	No, o sea. Sí, sí, estoy de acuerdo.
310	P:	Sí, pero entonces dame un argumento de por qué estás de acuerdo.
311	Juan:	No sé.
312	P:	¿Señor? (…) (…). Miren, veo que siguen (…) dije (…) les estoy diciendo una cosa y ustedes dicen otra. Les dije, no vayan a (…) cierren las Tablets. El señor José ¿qué hace con la Tablet allá? Algunos si cumplen con y otros no. Les dije, escuchen a sus compañeros porque ahí es que necesitamos que entre todos nos escuchemos y creemos ahí el conocimiento. Porque entonces, ¿de qué sirve yo acá pararme a hablar y hablar y ustedes allá en otra cosa? A ver, ¿listo? ¡Más atento Juan! (…) Bien, entonces ustedes dicen que (…) por acá hay una discusión y me decían (…) aunque acá no mencionen que, por acá hay una discusión y decían, aunque hay un polígono, están cumpliendo las reglas que sea polígono. Será que alguien me puede dibujar, en su Tablet, ahora sí, a ver, si alguien, una figura que cumpla esas condiciones, pero que no sea polígono.
313	E:	No, no se puede.
314	P:	¿Será que no? A ver, ¿alguien quiere asumir ese reto?
315	Pablo:	Sí, si hay, es el triángulo ese.
316	P:	¿Tú ya lo tienes?
317	Pablo:	Yo lo tengo dibujado.
318	P:	Inténtenlo, inténtenlo por un momento. A ver. Si lo tienen, alzan la mano y me lo muestra.
		(Los estudiantes trabajan en sus tablets, el profesor pasa por los puestos. Unos dicen que no se pueden, otros que sí).
319	Pablo:	Pero profe, no sé cómo colorear esto.
320	P:	¿Tú ya lo tienes Cristián? (Ve que Eliana alza la mano) ¿Tu Eliana?
321	Eliana:	Tengo una pregunta.
322	Adriana:	(Se dirige a sus compañeras). Por eso, tiene que tener líneas rectas.
323	P:	A ver, escuchemos esta pregunta que tiene Eliana. De pronto nos sirve a todos. (…) ¡Adriana! (Le llama la atención porque la ve distraída).
324	Eliana:	(Se levanta del puesto y le muestra al profesor algo que tiene en su cuaderno). Es que yo entendí (…).
325	P:	Listo, hágala a ver. Y todos miramos. A ver qué pasa. Vamos a ver que Eliana ya encontró uno y vamos a ver si se cumple o no. (…) ¿Listo?
326	Eliana:	(Usa la Tablet que se conecta al televisor para hacer una figura). 
327	P:	Eliana, ¿qué estás haciendo? Cuéntanos.
328	Paola:	(Alza la mano). Profe, yo.
329	P:	Listo. Vas después de Eliana. Miren, Eliana nos va a contar que está haciendo. (…) Estás arrastrando pero no nos estás diciendo nada.
330	Eliana:	Pues es que (arrastra algunos puntos de la figura).

331	P:	Yo tengo una pregunta, ¿por qué moviste esos puntos y los dejaste así?
332	Vanesa:	Pero tienes que unirlos.
333	Eliana:	Pues, me pareció que (…) haciendo esta figura de pronto (…) podría (…). 
334	Paola:	(Alza la mano).
335	P:	Podrías decir (…). ¡Ah! No mire. Bueno, primera pregunta. ¿Este es un polígono?
336	Varios:	Sí.
337	P:	¿Todos de acuerdo?
338	Pablo:	¿Por qué no es un polígono? Es la pregunta.
339	P:	La pregunta es que estoy diciendo, ¿este es un polígono?
339	Varios:	No (Paola y Samuel levantan la mano).
340	Pablo:	¿Por qué no?
341	Andrés:	(Hace una representación de la figura con los dedos).
342	Samuel	Porque se interseca dos veces en el mismo punto.
343	Alguien.	Sí.
344	P:	¿Todos de acuerdo?
345	Samuel	(Alza la mano y habla al tiempo). Bueno, sí, pero yo tengo otro.
346	P:	Ahorita otras ideas. Primero miramos la de Eliana y ahorita sí las que ustedes tienen ¿Es polígono o no es polígono?
347	Samuel	No, no es polígono.
348	P:	¿Por qué?
349	Samuel	Porque se cruzan en el mismo punto (Cruza los brazos haciendo una X).
350	Paola	(Simultáneamente con Samuel:). Porque se intersecan dos veces en el mismo punto. (representa con las manos una intersección de dos líneas).
351	P:	¿Y no se pueden intersecar dos veces en el mismo punto?
352	Varios:	No.
353	P:	¿No?
354	Samuel	Pues sí, pero no así (Representa nuevamente una intersección con los brazos en cruz).
355	P:	¿Pero todos están de acuerdo? (Observa a varios distraídos). A ver. Otra vez me va a tocar: cierren las tablets, para que presten atención a sus compañeros.
356	Varios:	¡Ah!
357	Pablo:	Pero es que nos dijiste que dibujáramos.
358	P:	Si, pero bueno. Es que miren. Ya por fin encontré el ejemplo, ahora por fin lo van a escuchar. Entonces miren. Yo quisiera saber si este es un polígono o no (…) miren.
359	Varios:	¡No!
360	P:	¿Todos dicen que no? (…) o no se sabe.

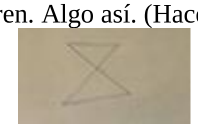
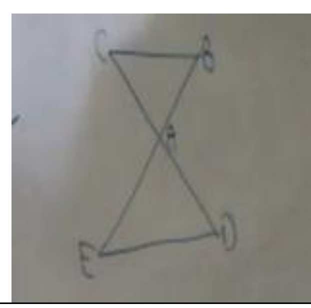
361	Varios:	No.
362	P:	¿Tú dices que no? ¿Por qué?
363	Andrés:	Porque se interseca dos veces en el mismo punto.
364	P:	Y esa razón, ¿la necesitábamos?
365	Andrés:	¡Ah no, me equivoqué!
366	P:	No sé, solo estoy preguntando. Yo no estoy diciendo que no sea. Pero, mi pregunta. ¿Este es un ejemplo de no polígono?
367	Varios:	(Algunos niños miran el tablero donde están consignadas). Sí.
368	P:	Listo. Y ahora, ¿qué hacemos? ¿Cumple todas las características que dice ahí?
369	Carlos:	¿Cómo así? ¿En dónde? ¿Ahí?
370	P:	Las que dicen ahí.
371	Varios	No.
372	P:	¿Quién dice que no?
373	Pablo:	Yo digo que no sé.
374	P:	A ver ¿quién dice que no sabe? (…) A ver, a ver, tu que vas a decir Gustavo.
375	Gustavo:	Yo no iba a decir algo.
376	P:	Ah bueno. Pero quiero que alguien me diga: no, entonces Eliana hizo un buen ejemplo. Porque miren. Aquí decimos que no es un polígono pero (…) y cumple todas las características. ¿Todos de acuerdo?
377	Varios:	Sí.
378	Paola	¿Pero por qué no es un polígono?
379	P:	Exacto, ¿quién nos dice por qué no es un polígono?
380	Varios:	(Gritos. Carlos hace una representación de una cruz con los brazos y Juan alza la mano).
381	P:	A ver, a ver, acá Vanesa nos va a decir por qué. Habla duro para que todos escuchen. ¿Por qué no será polígono?
382	Vanesa:	Porque (…) porque deberían (…) (…).
		(Algunos niños tienen la mano alzada)
383	P:	A ver escuchen. Trata de hablar un poquito más fuerte. Deberían, a ver, párate, a ver si necesitas algo (…). No sé. Sin mirar el cuaderno, claramente. A ver ¿No tienes alguna idea clara todavía?
384	Vanesa:	Ay no William.
385	Varios:	(Alzan la mano incluida Alejandra).
386	P:	Alejandra.
387	Alejandra:	Porque hay más de dos segmentos que se juntan en uno.
388	P:	¿Cuáles?
389	Alejandra:	En B.
390	Paola:	(Alza la mano). ¡Ah! ¡Profe!
391	Andrés:	(Alza la mano) El segmento (…)
392	Laura:	Se intersecan
393	P:	¿Se intersecan quiénes?
394	Andrés:	Profe, profe

395	Alejandra:	Se intersecan.
396	P:	¿Se intersecan? ¿quiénes?
397	Andrés:	De B a A y de D a B.
398	Laura:	Y de B a A también pasa por B. Se intersecan para completar la figura.
399	P:	Esperen. Es que Laura no habla muy duro, pero ella dice que se intersecan ¿quiénes? Para que le escuchemos la idea que tiene ella ¿De C a quién? ¿A B? 
400	Laura:	No. Es que cuando estamos viendo ahora. C y E se conectan pero a través de B que digamos es un vértice. y desde A igualmente. No sería un polígono porque se intersecan en B.
401	P:	¿Qué creen ustedes?
402	Gustavo:	Lo que pasa es que se forma una línea recta de E y C que por el medio tiene B.
403	P:	¿Esta? (Señala un segmento).
404	Pablo:	No.
405	Gustavo:	No, C, B y E. Esa de ahí.
406	P:	Ajá.
407	Gustavo:	Y como no tiene ningún grado de inclinación en ninguno de los dos lados se forma una línea recta, que por lo menos tenga a B.
408	P:	¿De acuerdo?
409	Paola:	Sí (Habla mientras alza la mano). A ver (…) me parece, (…) pues ahí dice (señala el tablero donde están las características de un polígono) que ahí dice. Se supone que un polígono sabemos que se interseca pero no pasa esto (con el brazo y la mano extendida representa un segmento y con el otro brazo representa otro segmento cuyo vértice interseca al otro pero no en el extremo). Entonces, si (…), entonces el polígono sería A, B, C. Ahí, después a A, se pasa la línea recta, se va para más afuera, digamos, y eso no puede pasar.
410	P:	¿Todos de acuerdo? O alguien dice: "No, eso sí puede pasar".
411	Pablo:	¡Sí! Sí se puede (Mira sus apuntes pasando las hojas hacia atrás).
412	Adriana;	No, no puede.
413	Eliana:	(Alza la mano).
414	Paola:	(Mira sus apuntes, pasando las hojas hacia atrás).
415	P:	Este es un ejemplo de no polígono. (Mira a Eliana) ¿Tú qué vas a decir?
416	Eliana:	Porque se intersecan más de una vez.
417	P:	¿Cuántas veces se intersecan? Por ejemplo, miremos acá (Señala la figura que representó Eliana). Este punto B, ¿cuánta ve (…) este se interseca con cuántos segmentos?

418	Andrés:	(Alza la mano).
419	Varios:	Con cuatro.
420	P:	A ver. (Se dirige a Eliana) ¿Qué vas a decir?
421	Eliana:	Con cuatro.
422	P:	¿A ver? (Le hace un gesto para que se acerque al tablero digital).
423	Eliana:	(Se levanta y va al tablero digital). Porque
424	P:	(oye murmullos). Habla un poquito fuerte porque allá Juan tienen que escuchar. (…) Listo.
425	Eliana:	Porque de D a E y de E a B. De B a C, a A y de A a B.
426	P:	¡Otra vez!
427	Varios:	(Risas).
428	P:	Es que todos debemos entender. A ver. Todos vamos a prestarle atención. Todos vamos a ver. ¿Cuál es tu idea para (…)? ¿Cuál es tu idea? ¿Qué nos quieres comunicar?
429	Eliana:	Que B se interseca más de una vez.
430	P:	¿Cuántas veces? (…) Pero es que B no se interseca. Los que se intersecan ¿son quienes?
431	Laura:	(Alza la mano mientras habla al tiempo). Los segmentos.
432	P:	Los segmentos son los que se intersecan. ¿Y se intersecan en qué punto? (Señala a B con el dedo).
433	Eliana:	B.
434	P:	En B, ¿cierto? Listo. ¿Cuántos segmentos se intersecan?
435	Laura:	(interrumpe la pregunta) Dos
436	P:	¿Dos no más? Tienen como punto común B (…) ¿Cuántos?
437	Varios:	Dos.
438	Varios:	Cuatro.
439	Laura:	CE y DA (pasa al tablero digital y señala los segmentos).
440	Adriana;	No, cuatro.
441	P:	¿Cuántos Adriana? ¿Nos los podrías decir por favor?
442	Adriana:	AB
443	P:	¿AB con quién?
444	Adriana:	Con BD.
445	P:	Vamos a ver las intersecciones. Adriana nos dice: se intersecan este [segmento AB] con este [segmento DB]. Listo, va una.
446	Adriana:	CB y BE.
447	P:	Listo. Ahí ya van dos. Ahora otra.
448	Niña crespa al lado de Vanesa	(Alza la mano). AB
449	P:	¿AB y?
450	Niña crespa:	DB
451	P:	Esa ya no la había dicho, ¿cierto? Bueno. Pero hay algo que falta ¿Qué faltará? Si no falta nada ese es un polígono y nos toca meterlo en las figuras que sí son polígonos.
452	Andrés:	Ese no es un polígono.
453	Paola:	No, no es un polígono.

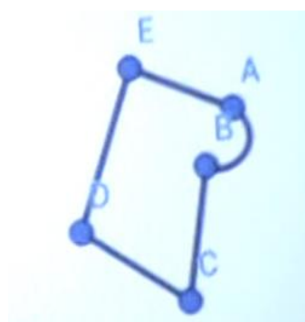
454	P:	(Simultáneamente con Paola) ¿Ustedes qué dicen?
455	Laura:	(murmura algo y representa con los dedos unos segmentos)
456	Carlos:	Porque xxx esas líneas.
457	P:	¿De cuáles líneas? (Se dirige a Laura) ¿Nos podrías decir?
458	Carlos:	AC y DC
459	P:	No entendí ahí.
460	Carlos:	AC y CD
461	P:	¿AC? (señala el segmento AC) ¿Este se interseca con?
462	Laura:	(Se levanta del puesto y señala el segmento AD).
463	Niño:	AD, D de dedo.
464	P:	O sea, ustedes dicen que estos se intersecan. Es un segmento. Esperen. (Toma la Tablet y arrastra un punto). Listo. Digamos que esté así.  Quiero que esté así. ¿Se puede? ¿Podría estar así Eliana y cumplirlo? (…) A ver, ¿qué pasará ahí?
465	Andrés:	Que se vuelven triángulos (Representa con los dedos).
466	P:	Sí, pero, ¿sí es polígono? ¿o no? (…) ¿María José? Dinos qué creerías tú.
467	Eliana:	(Alza la mano).
468	P:	Veo niños usando las Tablets. Van a suspender que estamos participando en esta discusión. Bueno, ¿qué crees? ¿Polígono o no polígono? Cuéntanos que no te hemos escuchado hoy.
469	María José:	Sí.
470	P:	Sí es polígono. Cumple con (…) ¿cuáles son las características de polígono para que cumpliera?
471	María José:	(Observa caras de asombro de sus compañeras de mesa). No es un polígono.
472	P:	Al fin qué, ¿sí o no?
473	Varios:	(risas).
474	P:	¿Y entonces qué lo daña? (…) chist, ¡José!

475	María José:	Que se intersecan.
476	P:	¿En dónde?
477	Paola:	(Le susurra algo a María José).
478	Alguien:	Es que no se alcanza a ver.
479	María José:	No profe, no veo.
		(Laura y Eliana tienen la mano alzada)
480	P:	¿No? Escuchemos a Eliana a ver qué dice.
481	Eliana:	Lo que pasa es (…) aunque uno cambie la figura, aún se sigue intersecando en B (representa con los brazos cruzados una cruz) y no va a ser un polígono.
482	P:	¿Aun así? ¿Por sólo la intersección?
483	Laura:	(muy pasito) No es un polígono porque los polígonos se caracterizan
484	P:	Más fuerte.
485	Laura:	Porque no se unen, no se intersecan en un punto. Estas figuras se intersecan en B, entonces estoy segura que no es un polígono.
486	Andrés:	¡Es que no se oye!
487	P:	Miren, le estamos dando muchas vueltas. Vayamos concretando cosas.
488	Andrés:	¡Es que no se oye!
489	P:	La primera
490	Carlos:	Ella dijo que si se cruzan en B entonces era un polígono ¿sí?
491	P:	Se acuerdan que decíamos, miren, por cada segmento ¿cuántos segmentos pueden intersecar a ese segmento?
492	Varios:	Dos.
493	P:	Dos ¿En dónde?
494	Varios:	En B.
495	P:	¿En B? ¿Pero qué es B? Miren, digamos este segmento DE (señala el segmento DE) ¿Dónde van a salir los otros dos segmentos que se intersecan ¿Cuáles son los otros dos segmentos que intersecan a DE?
496	Samuel:	DC y DE
497	P:	Ahí cumple, ¿cierto? Miremos acá (señala el segmento BD) ¿A este? ¿A este que estoy señalando con el dedo? ¿Este cuál es? ¿Este segmento que estoy señalando con el dedo cómo se llama?
498	Varios:	BD
499	P:	Sí ¿Cuáles son los segmentos que lo intersecan?
500	Alguien:	CD.
501		¿Cuáles?
502	Pablo:	CD y ED
503	P:	Y ED. Bueno, y así puedo mirar con todos ¿cierto? Está cumpliendo, pero ¿faltará algo? ¿Qué falta? (…) No sé si ustedes me podrían decir qué pasa con estos puntos C, D ¿no pasa nada? (…) (…) Este punto C, D, no se de pronto con A, E (…) No debería yo mirar (…) Aquí estaría mirando una parte de ese problema. Miremos qué pasaba con ese problema. Mírenlo allá (señala el tablero). ¿Qué pasaba con el problema? ¿Si pasa por todos los requisitos? (…) ¿Sí? Miren, pasa por D (…) Digamos que empecé por A. Tenía que pasar ¿por dónde?
504	Andrés:	Por B.

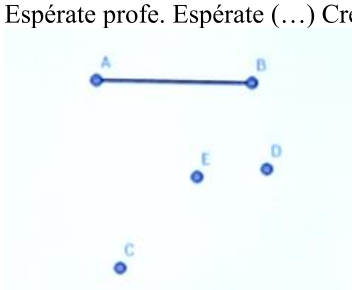
505	P:	Por B. Listo ¿Después?
506	Alguien:	Por C.
507	P:	Por C. Listo ¿Después?
508	Alguien:	Por D.
509	Delante de Andrés:	¡Ay, pero no hay (…)! (Levanta la mano).
510	P:	¿Y acá?
511	Alejandra:	No hay ningún segmento que los una.
512	P:	¿Una a quienes?
513	Paola:	(Alza la mano mientras habla). Lo que pasa profe (…) podríamos ver que no empezó en A. Empezó en A y tenía que volver a A.
514	P:	¡Ah! Gracias. Ahí teníamos el problema ¿cierto? Tenía que empezar en A. y Eliana, ¿por dónde empezó?
515	Alguien;	En D.
516	Eliana:	Yo tengo diferentes letras en la Tablet.
517	P:	¿Pero empezaste por A?
518	Eliana:	Sí.
519	P:	No sé si intentas tratar de hacerlo acá (le entrega la Tablet). Trata de hacerlo rápido a ver si cuadra. Presten atención. Lo que Eliana trata de hacer es lo siguiente. Voy dibujarlo acá mientras Eliana (toma un marcador y se pasa al tablero). Lo que Eliana trata de hacer es lo siguiente. Miren. Algo así. (Hace un dibujo). Voy a dibujarlo acá.  Eliana ¿es esta figura la que quieres hacer?
520	Eliana:	Sí.
521	Pablo:	¿Pero quién está haciendo esas líneas?
522	Varios:	Laura.
523	Pablo:	Se levanta del puesto y va a donde esta Laura con la Tablet. Eliana. Explícalo acá mientras Laura lo intenta dibujar. ¿Dónde quedaría A? ¿Dónde quedaría B? Y miramos a ver si se cumple.
524	Paola:	¡Profe! (Levanta la mano). Allá (señala lo que representa Laura en la Tablet) si se cumple porque comenzó en A y llegó a A otra vez.
525	P:	Vamos a ver rápidamente. ¿Dónde quedarían?
526	Eliana:	(Dibuja en el tablero) 

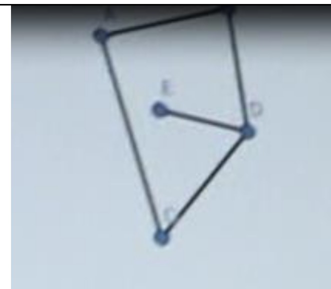
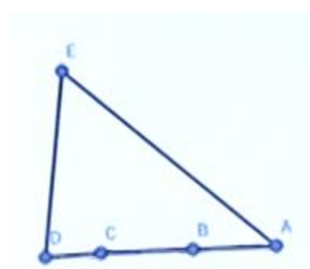
527	P:	¿Será que sí se cumple? Vamos a ver ¿Dónde quedarían?
528	Varios:	No, no.
529	Andrés:	Tiene que cambiarlos porque B está en el centro.
530	P:	¿B está en un centro?
		(Varios le dicen a Eliana qué dibujar)
531	P:	A ver. Todos vamos a ver acá (Se dirige a Pedro que está distraído) ¿Sumercé qué está haciendo? Listo, prestemos atención al tablero acá. Por un momento.
		(murmullos)
523	P:	A ver, escuchemos.
533	Eliana:	Primero empiezo en A, en el centro, después subo a B, después paso a C y paso a (…) se interseca con A (…).
534	P:	Y eso. Pregunto ¿Y eso tiene que pasar? ¿Si se puede pasar o puede pasar?
535	Paola:	No, en un polígono no porque se supone que no se sale del punto en donde se intersecan.
536	P:	Bien. Pero yo quisiera que prestáramos atención al problema. Miren. Dice: tiene que pasar por B, C, D, bueno, tienen que partir de A y llegar a A. Partiste de A, pasaste a B, a C y ahora quieres pasar a D.
537	Adriana:	Pero pasa por A.
538	P:	¿Y qué pasa? ¿Y qué pasa?
539	Pablo:	Tiene que terminar en A.
540	P:	Porque ya de una vez llega ¿cierto? ¿Entonces ahí que? ¿Sirve o no sirve el ejemplo?
541	Varios:	No.
542	P:	¿Cierto? Ahí ya se dañó. Pero gracias porque fue una discusión chévere. ¿Quién tiene uno que le salió no ejemplo y qué cumplió?
		(Varios levantan la mano. Algunos niños le muestran las Tablets al profesor. Adriana alza la mano).
543	P:	¿Adriana? ¿Lo puedes compartir allá? (Le muestra el tablero digital).
544	Paola:	¡Tú me dijiste que yo iba después de ella!
545	P:	Bueno, primero Paola , luego Adriana y luego Samuel. Listo. Rápidamente porque tenemos que avanzar. (Mientras Paola hace el dibujo). Cierren las Tablets porque, miren, se ponen a hacer otras cosas, como Juan. Bueno. Cerradas las Tablets que vamos a prestar atención allá (señala al tablero digital). Bueno, Cuéntanos qué estás haciendo.
546	Paola:	Se supone que un polígono no tiene, no puede tener ninguna línea ni nada adentro. Y ahí no dice que tiene que ser así [como un polígono]. Se puede hacer una vuelta y volver así, con una línea (le muestra la Tablet al profesor).
547	P:	A ver. Paola nos está mostrando y vamos a ver si efectivamente cumple las características ¿listo?
548	Paola:	(Hace como una casita sin medio techo)

		
549	Carlos:	¡Ah! Pero bonito.
550	P:	Cuéntanos cuál es tu idea.
551	Paola:	(borra los segmentos y solo deja 5 puntos que podrían ser vértices de un pentágono) Se supone que un polígono no tiene que tener nada adentro, entonces estoy mirando la manera de poder volver a A sin tener que (…) con una línea por dentro.
552	P:	¡Ah! bueno. Listo. Todos vayan mirando allá e imaginando qué pueden hacer. Partimos de A, B, C, D E y quiere llegar a A dando una vuelta de tal manera que no haya polígono. Esperemos a ver si ya la tienen en su cabeza.
553	Juan:	¿Qué está haciendo?
554	P:	Esperemos, esperemos.
555	Alguien:	Ya casi profe.
556	P:	¿Qué pasó?
557	Adriana:	De D pasó a A y no pasó por E primero.
558	P:	¿Todos de acuerdo? Ahí le falló algo ¿cierto?
559	Paola:	Sí profe.
560	P:	O sea que (…) miren. Ahí lo obliga.
561	Tomas:	Porque empieza en B.
562	P:	Pero el problema no es que empiece en B.
563	Pablo:	Tiene que empezar en A.
564	P:	Si parte de A tiene que terminar en A. Bien. Esa no sirvió. Bueno, a ver (…) Díaz. Vamos a ser un poco más rápido. A ver, listo. Samuel. Cuéntanos qué vas a hacer.
565	Samuel	Un no polígono.
566	P:	Listo. Que cum(…). Bueno, pero recuerda que el problema (…) siempre tiene que cumplir esto (muestra las condiciones que están escritas en el tablero). Porque alguien llegó y dijo: ustedes hacen eso y siempre les da polígono. Y alguien llegó y dijo: no.
567	Samuel:	(Hace una representación en la Tablet que se representa en el tablero digital) 
568	E:	Tiene un tumor.
569	P:	¿Cumple con todas las condiciones? (…) ¿Ustedes que dicen?
		(Algunos estudiantes levantan la mano. Saida no)
570	P:	A ver, Saida. Que no la he escuchado. (…). Saida, reacciona con respecto a esto (señala la representación que hizo Carlos) ¿Qué dirías tú?
571	Saida:	No porque tiene (hace un gesto con el dedo representando una curva).

572	P:	¿Y qué pasa con esa curvita?
573	Varios:	No se puede.
574	Saida:	No es polígono.
575	Carlos:	No, porque él está haciendo un no polígono.
576	P:	No Saida. Lo que está haciendo es un no ejemplo que cumple esas características que están allá (señala el tablero) (…) pero, él dice (…) es que muchos dijeron
		(Paola , Eliana, Vanesa alzan la mano).
577	P:	No están concentrados. Muchos dijeron: no, a mí sí me sale (…) todo el tiempo va a salir polígono. Estamos mirando a alguien que no le salga un polígono. Por ejemplo, acá Sebastián dice, acá está el ejemplo (Mira a Paola que tiene la mano alzada) ¿Tú qué le dirías? ¿Sirve o no sirve?
578	Paola:	Yo creo que no sirve porque una condición dice que entre un punto y otro debe recorrer el camino más corto y como ya dijimos, el camino más corto siempre es una línea recta.
579	Andrés:	¡Sí!
580	P:	¡Ah! ¿Sí o no?
581	José:	Lo dejaron callado.
582	Pablo:	Yo voy por Adriana.
		(Adriana tiene la mano alzada)
583	P:	Adriana, el tuyo.
584	Paula:	Yo quiero profe.
585	P:	¿Quién más quiere?
586	Paula:	¡Yo!
587	P:	Bueno, voy a cerrar con Tellez y con María José. (Se dirige a Adriana que está usando la Tablet que se conecta al tablero digital) A ver ¿qué estás haciendo? Cuéntanos.
588	Adriana:	Estoy tratando de achiquitar la curva para que sea más corta. 
589	Pablo:	¡No! Porque (…) el tamaño no importa porque igual sigue siendo una línea curva.
590	Carlos:	¿Y qué pasa?
591	Adriana:	Que puede ser más corta que una línea recta.
592	Carlos:	Ella quiere un no polígono.
593	P:	¿Ustedes que dicen? No he escuchado a muchos. Pero de pronto Clara qué diría con esta idea que tiene Adriana.
594	Tomas:	¡Sí! Que está bonito.
595	P:	A ver, escuchemos.
596	Paola:	¡Profe! (Alza la mano)
597	P:	A ver (señala a Clara) ¿Qué dirías Clara?

598	Clara:	No, pues que (…)
599	P:	¿Qué te parece la idea que tiene Adriana? ¿Sí podría contradecir esas [condiciones] que están allá?
600	Clara:	Pues (…)
		(Varios hablan al tiempo pero no se entiende lo que dicen claramente pero están discutiendo sobre el asunto).
601	P:	Escuchémonos. A ver. Por acá no me dejan escuchar si Clara habló o no. (…) ¿Qué te parece? ¿Sí podría ser por ahí o no?
602		(Varios hablan al tiempo)
603	P:	No me dejan escuchar a todos. Paola , ahorita. Espera un momento. Vamos a escuchar a tu compañera. ¿Listo? A ver, Samuel, atentos. A ver.
604	Clara:	Yo, de pronto, para mí se podría hacer una más corta que no necesariamente tiene que ser recta. Pero, pues, como
605	Alejandra:	No se escucha.
606	P:	Bueno. Eh (…) Pero, ¿qué les parece? Quiero escuchar ¿Si es buena la idea o no?
		(Andrés y Paola alzan la mano)
607	P:	Andrés y luego Paola .
608	Andrés:	Para mí tampoco es válido porque dependiendo también siguen siendo las mismas líneas.
609	P:	¿Qué opinan?
610	Paola:	Si la distancia entre dos puntos es así (representa dos puntos con los dedos índices) y siempre va a ser así (representa el segmento entre los puntos) si hago una curva (representa una curva entre los puntos) y después la alargo (representa el segmento entre los puntos), siempre va a ser más corta. Porque, por ejemplo, obviamente si yo corro los puntos (representa dos puntos más separados) para hacerla con recta obviamente va a ser más larga, pero si están los puntos en donde yo los pongo para hacerla con curva, siempre la curva va a ser más larga. El punto más corto entre dos puntos forma una línea recta.
611	P:	¿Qué dicen los otros? ¿Convencidos?
612	Varios:	¡Sí!
613	P:	¿Alguien no convencido?
614	Carlos:	¡Adriana!
		(Risas)
615	P:	Bien, entonces nadie encontró (…) con esas condiciones ¿siempre me va a dar polígono?
616	Varios:	Sí.
617	P:	¿Siempre? ¿Nadie encontró un no ejemplo? ¿no?
618	Carlos:	¿El mío era o no era?
619	P:	No sé. Muéstrenos el suyo para finalizar.
620	Isabel:	¡No! Me dijeron que yo iba a pasar. (Recibe la Tablet de manos de Adriana).
621	P:	Ah sí, esperemos. Y luego usted. (…) ¿María José tenía un ejemplo de esos?
622	María José:	No profe porque yo lo hice con líneas rectas.
623	P:	¿Ya te diste cuenta que no? Bueno, cuéntanos Isabel. Todos la vamos a escuchar. (…) Isabel, cuéntanos. (Se dirige a dos niños) me guardan eso. (A Isabel) A ver, cuéntanos.

624	Isabel:	(Representa cinco puntos A, B, C, D, E)
625	P:	¿Qué estás haciendo?
626	Isabel:	Unos puntos.
		(Risas)
627	P:	¿Pero los estás acomodando? O aleatorios.
628	Isabel:	Los voy a acomodar. 
629	P:	A ver. Cuéntanos ¿qué vas a hacer?
630	Isabel:	Espérate profe. Espérate (…) Creo que ya. 
631	P:	Isabel. No escucho nada.
632	Isabel:	Estoy haciendo un polígono que no es polígono.
		(Risas)
633	P:	¿Cómo se hace eso?
634	Isabel:	Espérate profe. Acá no sé cómo hacerlo.
635	P:	Todos tienen que estar pendiente del tablero.
636	Isabel:	Espérate. No sé cómo lo hice. No sé cómo hice este.
637	Pedro:	Yo lo hago. (Toma la Tablet y trata de reproducir un dibujo que Isabel tiene en el cuaderno).
638	Isabel:	No se cómo hice esto pasando esta línea por la mitad.
639	Paola:	Ya intenté eso y no funciono porque tiene que empezar en A y terminar en A.
640	Isabel:	Intenta mover los puntos.
641	P:	(Tiene la Tablet). Pedro, ¿qué estás haciendo?
642	Pedro:	Espera, espera:

		
643	Isabel:	(Se dirige a Pedro). Igualito.
644	Pablo:	Está mal porque no termina en A.
645	E:	Y tiene algo dentro del coso ese.
646	P:	A ver, a ver, escuchemos. Esperen. ¿Funciona o no? Partió de A, pasó a B
647	E:	Luego a C
648	E:	Termina en E
649	Paola:	Ahí no dice que tiene que terminar en orden.
650	P:	Ah bueno. No tiene que ser en orden.
651	Andrés:	Pero tiene que terminar en A.
652	P:	Entonces, partió en A, luego fue a B. De B ¿a dónde fue? ¿A D?
653	E:	A E.
654	P:	A ver. Fue de A a B, a D ¿y ahora?
655	E:	A E
656	P:	¿Y de E a dónde fue?
657	E:	Y de E a A
658	Pablo:	No porque no está C. Rechazado.
659	Isabel:	Ahí esta la C, ahí abajo.
660	P:	Bien, quiero ver la de Carlos. Con la de Carlos finalizamos. ¿Listo? ¿Sigan pensándola a ver? (…) Con la de Carlos finalizamos la clase. Listo, Carlos, rápidamente cuéntenos. Ustedes cierran las tablets porque ustedes van a escuchar a Carlos y van a reaccionar a todo lo que diga Carlos. (…) A ver, Carlos, cuéntenos.
		(Los niños están a la expectativa. Algunos comentan que va a hacer un cuadro. Dicen expresiones como Uy, uy).
661	Carlos:	(Representa sin hablar) 
662	E:	No, porque no hace tres cambios.
663	Samuel Arias	¿Qué no? Mire, esta, esta y esta. (Se para, mira al niño que habló y con el dedo hace lo que parecen tres segmentos concatenados en direcciones distintas, formando un triángulo).

664	P:	Carlos, convénzanos. Cuéntenos qué hizo. Convénzanos. Tiene que convencernos. A ver.
665	Paola:	Un triángulo es un polígono.
666	P:	A ver. ¿Por qué cumple esa?
667	Carlos:	¿Pues porque hay tres sobre la misma línea?
668	P.	¿Tres qué? (…) tú estás diciendo: miren, encontré un no ejemplo de polígono que cumple estas características.
669	Carlos:	De no polígono.
670	Pablo:	Porque pasa por B, C, D y E y termina en A (…)
		(Murmullos, varios hablan al tiempo, y alzan la mano. Pablo se impone con su voz)
671	Pablo:	Tiene tres cambios de dirección (…) entre un punto y otro hay un camino más corto.
672	P:	¿Y ya? Bueno, Francisco, ya se acabó la clase pero cuéntenos rápidamente su idea. (…). Bueno, silencio. Vamos a terminar acá pero, a ver, todos tienen que colaborar para el cierre de esa actividad.
673	E:	Y cómo se le ocurre decir que
674	Francisco:	Tiene que tener más de tres cambios de dirección
675	Pablo:	Tiene tres cambios de dirección.
676	Niño gafas.	Ahí no dice "más".
677	Varios:	Sí.
678	P:	Oigan, por favor. Si llegan a encontrar un no ejemplo de esto me dicen la próxima clase. ¿Listos?
679	Pablo:	¡No profe, ese estaba bien!

ANEXO 2. TRANSCRIPCIÓN DE LA CLASE DE MAYO 17 DE 2018

A continuación, se transcribe[7] la interacción comunicativa registrada en video, en el curso 604 del IPN, de la tercera clase de geometría del segundo trimestre del año. Los temas de discusión en esta clase se centran en las nociones de colinealidad y equidistancia.

Disposición de los estudiantes en mesas:

Mesa 1 (izquierda del profesor-adelante): Clara, Isabel, Juan y Pedro.

Mesa 2 (adelante): Paola , María José, Daniela y Martina

Mesa 3 (adelante): Andrés, Ricardo, Alejandra y Gustavo.

Mesa 4 (adelante): Pablo, Carlos, Samuel.

Mesa 5 (adelante): Viviana, Eliana y Laura.

---

[7] Transcripción hecha inicialmente a partir de la grabación de video y complementada con la grabación de audio. La interacción duró una hora y media.

Mesa 6 (atrás de mesa 5): Vanesa, Carolina y Julieta. (Julieta no asistió a esta clase)

Mesa 7 (atrás de mesa 4): José, Diego y Samuel B.

Mesa 8 (atrás de mesa 4): Francisco, Camilo y Sebastián.

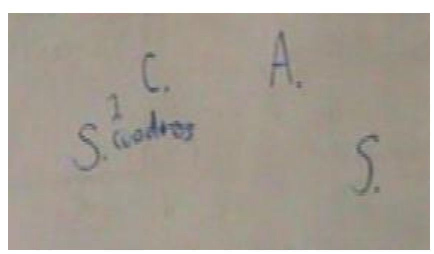
Mesa 9 (atrás de mesa 2): Adriana, Saida, Salome y Mariana.

1.	Profesor:	Bueno, chicos. La clase pasada discutíamos alrededor de un problema, ¿nos llevaba a construir qué?
2.	Varios:	(En coro) Polígonos.
3.	Profesor:	Polígonos, cierto. La clase de hoy vamos a trabajar algo que tiene que ver con eso. Pero no los vamos todavía a llamar; todavía no lo vamos a mencionar. Hoy polígonos los vamos a olvidar por un momento. Listo, entonces yo necesito que trabajemos por ahora con dos ideas chist (pidiendo silencio). La primera, necesito que cuatro niños se pongan de pie.
4.	Eliana, Carolina, Samuel, Andrés Samuel, Ricardo y Saida	(Inmediatamente Eliana, Carolina, Samuel, Andrés Samuel, Ricardo y Saida se ponen de pie.)
5.	Profesor:	(Escoge entre quienes se pusieron de pie.) Carolina, acá (seleccionando a Samuel), Saida y Ricardo. Vamos a prestar acá atención. Tenemos que todos alcanzar a ver. Si yo a ustedes cuatro les digo que estén alineados ¿cómo lo harían? A ver, miremos a ver, los que están de pie.
6.	Carolina, Sebastián., Saida y Ricardo:	(Los estudiantes que están de pie se mueven de tal forma que Carolina, Samuel y Saida quedan alineados, mientras que Ricardo queda un poco desalineado).
7.	Profesor:	(Dirigiéndose a los estudiantes que estaban sentados) ¿Ustedes que dicen?
8.	Varios:	No.
9.	Profesor:	¿Qué faltará?
10.	Alguien:	No.
11.	Pablo:	Una línea.
12.	Paola:	Que Ricardo se corra un poquito más para allá y ya (señala con la mano hacia el lugar en el que se debe ubicar y Ricardo se ubica en el lugar señalado.).
13.	Profesor:	Listo, ahí están alineados, ¿cierto?
14.	José:	Sí. Mira la línea.
15.	Profesor:	Listo, ahora si yo les digo qué necesito… Voy a utilizar una palabra rara, a ver a ustedes que se les ocurre: que ustedes tres equidisten de [el profesor quería que tres de los estudiantes equidistaran del cuarto estudiante, pero

		nunca da esta instrucción]… A ver que se les ocurre con equidistar. ¿Qué será eso de equidistar?
16.	Varios:	(En coro). Igual.
17.	Alejandra y Andrés:	(Alejandra y Andrés alzan la mano)
18.	Varios:	(En coro.) Igual distancia.
19.	Profesor:	Igual distancia, ¿Y cómo sería que Ricardo equidistara de…?
20.	Sebastián:	De a dos cuadritos (refiriéndose a baldosas).
21.	Profesor:	¿De a dos cuadritos?, bueno, miremos a ver como lo lograrían. (Los estudiantes se ubican equiseparados.)
22.	Profesor:	¿Y hay todos estaría equidistando?
23.	Sebastián:	Obvio
24.	Profesor:	¿De quién es?
25.	Sebastián:	Ella, de yo, yo de él y el de ella (señalando con su dedo a Carolina, a el mismo, a Ricardo y a Saida respectivamente).
26.	Profesor:	Si, ahora, chist (pidiendo silencio) quiero que Carolina no equidiste de (…) se me olvido tu nombre (señala a Samuel (D).
27.	Varios:	(En coro). Díaz.
28.	Profesor:	De Díaz, Samuel ¿qué haría?
29.	Paola:	Córrete (moviendo su mano señalando el lugar donde se debe ubicar Carolina).
30.	Carolina:	(Carolina se desplaza hacia su izquierda varios pasos, alejándose de Sebastián).
31.	Profesor:	y tú tampoco (señala a Saida) que se llamaba …
32.	Saida:	(Carolina se desplaza hacia su izquierda varios pasos, alejándose de Sebastián).
33.	Profesor:	¡Ah, bien! Resulta… Listo ya se pueden sentar. Gracias (los estudiantes se sientan). Resulta, chist (pidiendo silencio). Daniela, Gracias. Lo que acabamos de ver, chist, a ver. Necesitamos entonces con ese ejercicio inicial, necesitamos, chist aclarar unos términos. Yo acabé de utilizar uno que se llama alinear, ¿Cierto? Otro, ¿Qué se llamaba?
34.	Pablo:	Equidistar.
35.	Profesor:	Equidistar, ¿cierto?
36.	Sebastián:	Y otro que se llamaba equidistar ¡oh!

37.	Profesor:	Entonces habíamos dicho, que alinear., ¿cómo qué sería alinear ?
38.	Paola:	Hacer una línea recta.
39.	Profesor:	Tenía que ver con una línea recta. ¿De acuerdo? ¿Todos de acuerdo? Listo, saquen el cuaderno, y el otro de equidistar.
40.	Andrés:	Que guarda la misma distancia.
41.	Profesor:	Que guarda la misma distancia, ¿cierto? Bien. (Escribe en el tablero: Mayo 17 Algunas definiciones D. equidistancia: Dos o más parejas de puntos son equidistantes si la distancia entre …) (Interrumpe la escritura a raíz de la intervención de Paola).
42.	Paola:	Profe, pero tú nunca dijiste que debían ser puntos.
43.	Profesor:	Digamos, acá (señala la definición en el tablero). Vamos a tener presente esto para el ejercicio que vamos hacer ahorita y Paola me acaba de decir que yo no necesito puntos. ¿Puede ser que otra cosa? Paola .
44.	Paola:	Personas, objetos …
45.	Profesor:	Sí… es que chist (pidiendo silencio)… es que a mí se me olvido decirles…chist ¡A ver!¡Ya!
46.	Pablo:	Profe, porque pusiste “algunas definiciones”.
47.	Profesor:	Como título o como subtítulo. Sí, porque vamos a trabajar algunas definiciones. Se me olvido decirles que ustedes eran unos punticos. Es que para decir que (…) pers…Claro que también se podría…
48.	Alguien:	Como las constelaciones.
49.	Profesor:	Pero vamos a trabajar por ahora como por puntos. Lo vamos a definir por ahora así. Pero podría yo colocar, ¿qué? Personas ¿qué otra cosa?
50.	Adriana:	Helados.
51.	Profesor:	Helados (…) otros objetos. Bueno, ahorita vamos a discutir acerca de eso a ver si se nos da (Continua copiando la definición… si la distancia entre cada pareja es igual, es decir están igualmente separados).
52.	Camilo:	Profe ¿vamos a usar tablets?
53.	Profesor:	Sí, claro.
54.	Camilo:	¡Oooooh!
55.	Profesor:	Pero todavía no, cuando copien la definición y cuando copiemos el problema.

56.	José:	Ya falta poquito.
57.	Profesor:	Sí, ya falta poquito (…) (lee del tablero) entonces, dos o más puntos son equidistantes si la distancia entre cada pareja es igual, es decir están igualmente separados. ¿Qué pasaba cuando acá (refiriéndose al ejemplo que se realizó con los cuatro estudiantes) estaban los cuatro? ¿Hubo un momento que estaban equidistantes?
58.	Varios:	(En coro) Sí.
59.	Andrés:	Sí, de a dos cuadritos.
60.	Profesor:	Sí, cumplía con nuestra definición, ¿cierto? Y hubo un momento en que no, ¿qué pasó cuando no?
61.	Andrés:	Que Carolina y Saida…
62.	Paola:	Que Carolina se fue más para allá (señala hacia la izquierda con su mano).
63.	Andrés:	Y Saida también.
64.	Profesor:	Ahorita vamos a tratar de utilizar este tipo de definiciones en el problema que vamos a realizar con las tablets. Listo, ¿terminaron de copiar?
65.	Pablo:	Profe, ¿cómo así que la distancia de cada pareja?
66.	Profesor:	Cada pareja de puntos. Acuérdense que este era Samuel (dibuja un punto en el tablero y lo nombra D refiriéndose a la inicial del apellido); por allá estaba Saida, ¿cuál es tu segundo nombre?
67.	Varios:	(En coro) Clara.
68.	Profesor:	Por allá estaba Clara (dibuja un punto en el tablero que nombra con la letra C); por allá estaba (…) ¿Cuál era el otro?
69.	Pablo:	Carolina y Ricardo.
70.	Profesor:	(Coloca otros dos puntos a los que etiqueta A y S y que aparentemente son equiseparados.) Pregunto, Chist (pidiendo silencio) ¡hey! ¿Esta es la única forma de tener equidistancia o habrá otra forma?
71.	Paola:	(Paola alza la mano)
72.	Profesor:	Espera, tienes la palabra (refiriéndose a Saida).
73.	Saida:	En diferentes …
74.	Profesor:	Espere, esperen, tiene Saida primero la palabra y luego tú (señala primero a Saida y luego a Paola) pero Juan, ¡silencio ya!
75.	Saida:	Pueden tener diferentes direcciones (mueve su antebrazo izquierdo de arriba a abajo).
76.	Profesor:	¿En diferentes direcciones?

77.	Saida:	Tal vez.
78.	Profesor:	Bueno, ahorita lo vamos a intentar en las tablets, a ver que me muestran. (Paola y Andrés alzan la mano y Samuel se pone de pie). Esperen, esperen, en orden. Samuel, vas ahorita, después va Paola , luego vas tú y luego tú (señala a Andrés y luego a Sebastián).Pero escuchamos, chist (pidiendo silencio).A ver.
79.	Paola:	Resulta que la definición de equidistancia no necesariamente tiene que formar una línea recta (mueve su mano horizontalmente de izquierda a derecha), sino que tiene que tener la misma distancia entre dos puntos (Andrés asienta con la cabeza) y puedo hacer una figura, un polígono [dibuja en el aire los vértices de un pentágono], depende que sea equidistante.
80.	Profesor:	Ejemplo, ¿cómo sería?
81.	Samuel:	No, yo quiero.
82.	Profesor:	Miremos un ejemplo a ver que nos dice y luego tú vas (refiriéndose a Samuel)
83.	Paola:	(Paola realiza el gráfico de un triángulo equilátero en el tablero)
84.	Profesor:	¿Y ahí podría haber equidistancia?
85.	Paola:	Podría haber equidistancia porque tiene la misma…
86.	Andrés:	Distancia.
87.	Paola:	Sí, cantidad.
88.	Profesor:	Con esa idea ahorita vamos hacer el ejercicio. ¿Querías decir algo? (refiriéndose a Samuel)
89.	Sebastián:	Sí.
90.	Profesor:	Vale, prestemos atención, chist (pidiendo silencio).
91.	Sebastián:	(Pasa al tablero y realiza el siguiente gráfico.)  *Figura 19*
92.	Andrés:	Eso no tiene la misma medida.

93.	Paola:	Eso no es equidistante.
94.	Samuel D:	Supongamos, supongamos (continua dibujando).
95.	Profesor:	¿Qué quieres comunicarnos ahí? Y le vamos a prestar atención. A ver que nos quiere decir. Listo. A ver. Adriana. A ver. Qué ahí que se hace.
96.	Sebastián:	Que por ejemplo acá está ella (señala el punto S con una mano derecha y con la izquierda a Carolina, indicando que S representa a Carolina); por acá estaba, Ricardo (señala a Ricardo), por acá estaba Saida y que…
97.	Ricardo:	Profe tengo una pregunta.
98.	Profesor:	Esperen que no alcance a escuchar. ¿Ustedes allá si alcanzaron a escuchar? María José [se refiere a María José para que preste atención a la intervención de Samuel]. (Dirigiéndose a Sebastián) Puedes volver a repetir, que pena, y todos le vamos a prestar atención. Clara también. Todos.
99.	Sebastián:	Que acá estaba Juana (Señala a Carolina quien su primer nombre es Juana), acá estaba yo, y acá estaba Saida (señala los puntos dibujados en el tablero con el marcador) entonces no necesariamente, (hay) una línea ahí.
100.	Andrés:	Pero no (no se escucha).
101.	Profesor:	También se puede dar eso. Que faltaría para que se dé.
102.	Paola:	Otro punto A y la línea de abajo.
103.	Samuel:	Ya. ¿Todos felices?
104.	Francisco:	(Alza la mano.)
105.	Profesor:	Bueno con esas ideas… ¿tienes otra pregunta? ¿Quieres hacer otro? (dirigiéndose a Francisco) Bueno, el último Francisco [apellido de Francisco] y vamos al ejercicio, ¿les parece? Pero habla fuerte Francisco para que todos escuchemos. Bueno. Chist (pidiendo silencio). Cuéntanos que estás haciendo.
106.	Francisco:	¿Cómo lo explico?
107.	Sebastián:	Explicando
108.	Andrés:	Dale Pipe.
109.	Sebastián:	Hágale hermano rápido, rápido …
110.	Francisco:	(Francisco dibuja un triángulo).

		 *Figura 20*
111.	Profesor:	¿Qué acabas de hacer? Cuéntanos.
112.	Sebastián:	Iluminati (risas).
113.	Profesor:	A ver. Pero yo no escucho, ¿qué acabas de hacer?
114.	Francisco:	Un triángulo (sonríe).
115.	Profesor:	¿Sí, pero para qué lo hiciste?
116.	Paola:	Yo creo que todos tenemos la misma idea profe.
117.	Profesor:	Sí.
118.	Ricardo:	Eso no es equidistante porque (no se escucha) (se acerca al tablero).
119.	Profesor:	¿Por qué Ricardo? Habla más fuerte.
120.	Andrés:	Los equidistantes no tienen que ser polígono.
121.	Francisco:	Eso está arreglado. No me importa.
122.	Profesor:	No hemos dicho eso, hay no dice que tiene que ser polígono. Bueno todavía no hemos dicho nada de eso. Bueno, me van hacer un favor. Van a coger una Tablet, un integrante de cada grupo. (Escribe en el tablero: *Actividad: Construye 10 puntos en GeoGebra. Haz una configuración en la que los 10 puntos que están alineados y los puntos consecutivos están igualmente separados*) Bien. Voy a explicar el problema. Nada de otras aplicaciones, solo GeoGebra, ¿bueno? Solo GeoGebra y ya saben cómo abrirla, ¿cierto? Miren lo que dice, la instrucción es la siguiente: Construya 10 puntos en GeoGebra. Esos puntos automáticamente llevan unas letras, ¿cierto?
123.	Andrés:	Sí.
124.	Profesor:	Haz una configuración en la que los 10 puntos… Oigan, por acá están hablando. Están alineados y los puntos consecutivos están igualmente separados. A ver qué harían ustedes. Quiero que intenten hacer esta actividad.
125.	Andrés:	Profe tenemos que copiar esto.
126.	Profesor:	Eeeh, ahorita, háganlo primero así.

127.	Sebastián:	Profe yo no tengo GeoGebra.

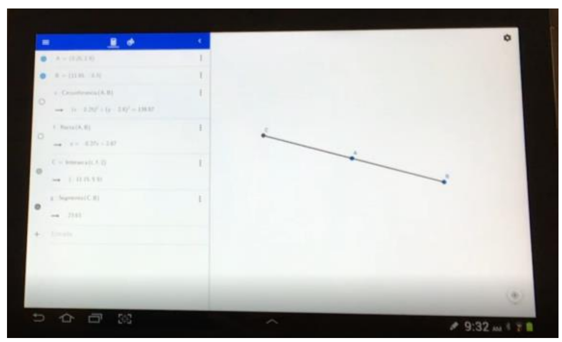
Cada grupo empieza a realizar la actividad propuesta por el profesor, en la que se solicita a los estudiantes construir en GeoGebra diez puntos, los cuales deben estar alineados y además cumplir que los puntos consecutivos estén igualmente separados. A continuación, se muestran las interacciones entre Paola (estudiante) y Zaira (monitora), y entre Laura, Eliana (estudiantes) y Leonor, mientras se realizaban el trabajo en grupos propuesto por el profesor.

Interacción entre Paola y Zaira:

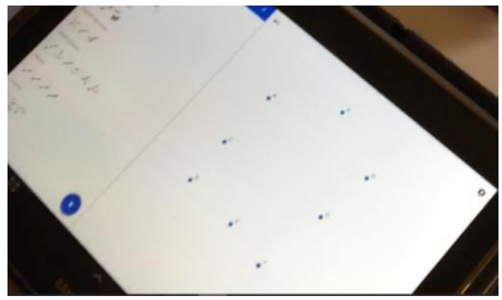
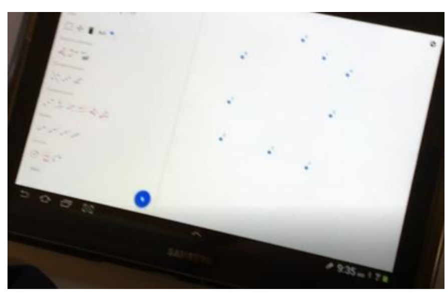
128.	Paola:	Rectas (Traza un segmento en GeoGebra deslizando su dedo sobre la tablet). ¡Ay, no! (Accidentalmente da clic en otra parte de la pantalla y se genera un nuevo segmento, del cual solo se alcanza a ver uno de sus extremos).
129.	Monitora:	Eso. ¿Qué hiciste?
130.	Paola:	Quería achicarlo.
131.	Monitora:	Para achicarlo es con esto (indicando cómo disminuir el zoom). Para poder mover los puntos.
132.	Paola:	(Aleja la imagen con la herramienta zoom) Listo. (Alarga el segmento desde ambos extremos) Eso, quería más espacio. Ahora.
133.	Monitora:	¿Ahora que le falta?
134.	Paola:	¿Cómo hacemos para queden a la misma distancia? Acá no hay ninguna función así. A ver. (Coloca nueve puntos sobre la recta, tratando de que queden a la misma distancia).
135.	Monitora:	O sea, tú utilizaste un segmento para alinearlos, ¿cierto? Y ahí, ¿construiste los puntos? Pero ahora para construir los puntos consecutivos, no.
136.	Paola:	(Borra el segmento) A ver (Coloca 10 puntos en el plano, intentando que queden alineados)
137.	Monitora:	¿Por qué quitaste el segmento?
138.	Paola:	Es más fácil que estén alineados, pero no sé cómo hacer la distancia igual.
139.	Monitora:	Pero es que mira que son las dos cosas, tú ya tienes una, pero la quitaste.
140.	Paola:	Hagamos la línea otra vez (Borra los puntos y traza de nuevo un segmento). Listo, entonces. (Construye dos puntos sobre el segmento)
141.	Monitora:	Eso. Ese punto, no, no, no. Deja ese punto C y quita ese D, quita ese punto D.
142.	Paola:	(Borra el punto D).
143.	Monitora:	Trata que la distancia de A a C, sea lo mismo que de C a otro punto X que pertenezca a ese segmento.

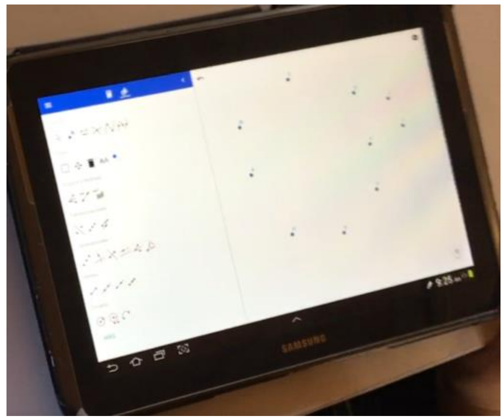
144.	Paola:	¿Pero cómo? (Construye punto D tratando de dejarlo a la misma distancia) No, un poquito más al lado. Ahí. (Dibuja los otros puntos procurando conservar las distancias) No eso se mueve mucho
145.	Monitora:	¿Qué te sirve?
146.	Paola:	Estoy mirando las herramientas.
147.	Monitora:	¿Qué opción te sirve? (señala la barra de herramientas en la pantalla de la Tablet) ¿Qué te da a ti equidistancia?
148.	Paola:	A ver, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (cuenta los puntos construidos) ¿Será que con esto? (Mira los menús de herramientas) Construcción. No, no, no. ¿Qué? (Lee el nombre de las herramientas) Construcción, transformación ¿Qué es esto?
149.	Monitora:	Sí, pero es que mira que acá te piden, espérate.

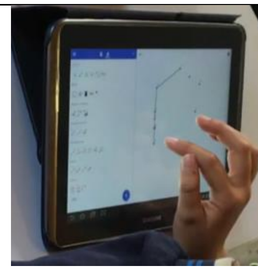
Interacción entre Laura, Eliana y Leonor

150.	Leonor:	Borra eso que tienes ahí, que eso no es (haciendo referencia a un segmento y un punto sobre él).  *Figura 21*
151.	Laura:	Fuera. (Ingresa al menú de herramientas)
152.	Leonor:	Nuevo, eso, no guardar, descartar. Quítale esas cuadrícula.
153.	Eliana:	¿Cómo es que se quitan las cuadrículas?
154.	Laura:	Sí, ¿Cómo era?
155.	Leonor:	Devuélvete, devuélvete. Ahí en las herramienticas.
156.	Laura:	Quitarle…
157.	Leonor:	Mmm. No, no sé. ¿Cómo se le quitan los cuadritos? (pregunta a alguien más) Es que ellas tienen otra versión. Aaah ya, ahí.
158.	Eliana:	¿Cuál?

159.	Leonor:	Aquí en esta cosita (señalando la opción de configuración). Bueno, me cuentan qué es lo que tienen que hacer.
160.	Laura:	Tenemos que hacer un…
161.	Eliana:	… una… ¿Cómo es que se llama? Mmm. Una configuración que tenga 10 puntos, si no estoy mal. Como una figura.
162.	Leonor:	Sí
163.	Laura:	Que sea equidi… ¿Qué? No, que sea, eeh, que sea equidistante, si no estoy mal. Creo ¿Sí?
164.	Leonor:	¿Qué es equidistante?
165.	Laura:	Que, digamos que los puntos, que estén como de tal manera que haya una, una igual distancia entre punto y punto. Que sea todo igual.
166.	Leonor:	Vale, a ver, háganle a ver. ¿Y qué se hizo su compañera que siempre se hace con ustedes? (refiriéndose a Viviana).
167.	Eliana:	Hoy no vino. Está enferma o si no, se levantó tarde.
168.	Leonor:	Aaah!
169.	Eliana:	Cuando se levanta tarde ella no viene.
170.	Laura:	La mamá no la trae.
171.	Leonor:	Aaah caramba.
172.	Laura y Eliana:	(Colocan las tablets inclinadas sobre el soporte).
173.	Leonor:	Mejor, mejor pónganla sobre la mesa para que la grabación no me quede torcida, (refiriéndose a las tablets) .
174.	Laura y Eliana:	(siguen las indicaciones de Leonor)
175.	Leonor:	Eso. Mejor así. Gracias.
176.	Laura:	(Dibuja en la tablet que ella tiene 10 puntos en GeoGebra los cuales no son colineales. Posteriormente, por medio del arrastre los empieza a mover)

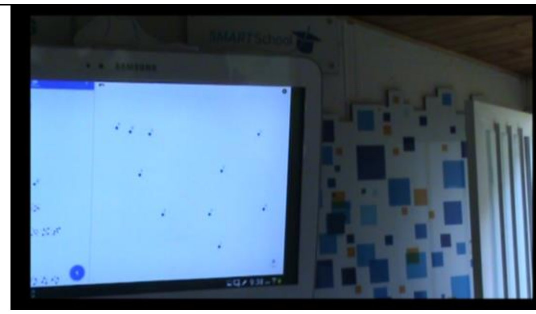
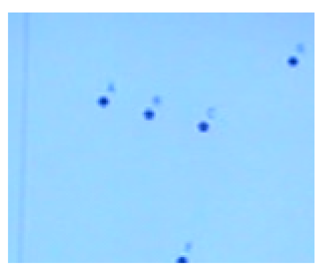
		 *Figura 22*
177.	Eliana:	(Dibuja en la tablet que a ella le corresponde 8 puntos en GeoGebra)  *Figura 23*
178.	Leonor:	¿Esos puntos cumplen la condición? Eliana (Respecto a lo que aparece en su Tablet).
179.	Eliana:	No.
180.	Leonor:	¿Por qué?
181.	Eliana:	Porque no hay 10 puntos y porque la figura está rara.
182.	Leonor:	Coloca 10 puntos.
183.	Eliana:	(Dibuja un punto más)  *Figura 24*
184.	Leonor:	¿Ahora si hay 10 puntos? ¿Y qué? ¿por qué otra razón?
185.	Eliana:	Pues, … no. Ahora sí está bien

186.	Leonor:	¿Ya? ¿Ya acabaste?, ¿ya cumplen esas condiciones que están consignadas en el tablero? Mira a ver.
187.	Eliana:	¡Profe! ¡profe William! ¿Me das un poco de permiso por fa? Gracias
188.	Profesor:	Me pueden decir, ¿qué están haciendo? ¿Qué estás haciendo? (preguntándole a Laura)
189.	Laura:	La figura (mientras que Leonor y Eliana hablan, Laura construyó la Figura 25).  *Figura 25*
190.	Profesor:	¿Si? ¿Qué nos dice que hagamos? Ya hiciste los 10 puntos ¿Cierto?
191.	Laura:	Sí, ahí están.
192.	Profesor:	Listo. ¿Y ahora?
193.	Laura:	Estoy intentando acomodarlos para que generen una figura, que tenga igual medida de todos los lados.
194.	Profesor:	¿ Y es que ahí dice que toca hacer eso?
195.	Laura:	Es que no veo bien.
196.	Profesor:	O qué… o no alcanzan… ¿o no saben de qué es, de qué es el problema? ¿Qué hay que hacer?
197.	Eliana:	Una es de que hay que hacer 10 puntos y tienen que cumplir lo que…(señala el tablero).
198.	Laura:	Debe estar alineados (interrumpiendo a Eliana)
199.	Profesor:	Ok y ¿cómo alineo eso?
200.	Laura:	Tienen que estar alineados. Eliana, tienen que estar alineados.
201.	Eliana:	Por eso. (Construye segmentos para unir los puntos que había dibujado anteriormente).

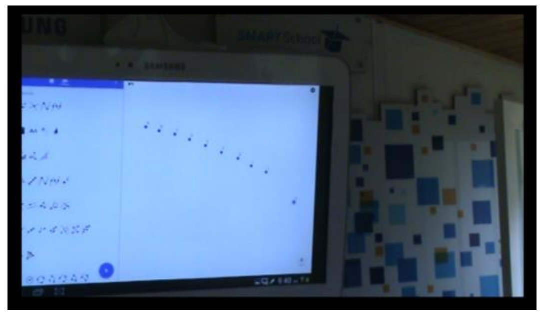
		 *Figura 26*
202.	Laura:	No, no estas alineando. Alineados en una sola línea. (Arrastra los puntos construidos por ella en la Figura 5 procurando que parezcan alineados).
203.	Eliana:	¡Aayy! (Busca la herramienta deshacer, y la empieza a oprimir, hasta que deshace los segmentos construidos).
204.	Laura:	(Arrastra los puntos intentando que todos queden equiseparados)
205.	Eliana:	(Utiliza el arrastre sobre los puntos construidos procurando que queden alineados)
206.	Profesor:	¿Ya acabaron?
207.	Eliana:	Listo, ya terminé.
208.	Profesor:	¿Ya?
209.	Laura:	Yo también.

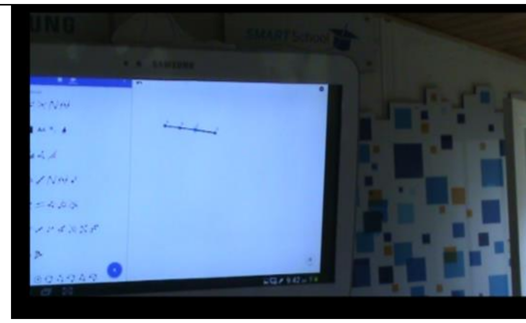
Después de que han transcurrido aproximadamente 15 minutos desde que los grupos de estudiantes empezaron a solucionar el problema, el profesor empieza la discusión de las propuestas.

210.	Profesor:	¿Quién quisiera comentarnos qué fue lo que hizo? ¿tú? (asignándole la palabra a Carlos).
211.	Carlos:	No.
212.	Sebastián:	¡Yo, yo, yo!
213.	Profesor:	A ver Samuel, muéstrenos qué hizo. Tome la Tablet. (El profesor le entrega la Tablet que se encuentra conectada por Wifi al televisor. En la Tablet están construidos 10 puntos no colineales entre sí).

		 *Figura 27* ¿Qué tenemos que hacer para hacer esta actividad? Todavía no hemos obtenido una pregunta como tal [habitualmente el profesor acompaña cada construcción realizada en el programa con una pregunta]. A ver qué toca hacer. A ver, allá. Chist (pidiendo silencio a la mesa de Juan)
214.	Sebastián:	Lo que yo hice fue …
215.	Profesor:	Hay ya están los 10 puntos.
216.	Sebastián:	Los voy a quitar (Borra dos puntos).
217.	Profesor:	No, no los quites. Hay ya están los 10 puntos. ¿Qué vas a hacer? ¿Cuéntanos con esos 10 puntos qué harías? Chist (pidiendo silencio). Yo creo Samuel que tienes que hacerte un poco más cerca, más cerca por acá (cerca de la mesa de Pablo pues la conexión con la Tablet y el televisor falla por la conexión wifi). A ver, ¿qué vamos a hacer? Cuéntanos.
218.	Sebastián:	Voy hacer la línea.
219.	Profesor:	Chist (pidiendo silencio). A ver, por acá dicen… están hablando, ya es momento de prestar atención al tablero, no sé si más bien cierran las tablets para que podamos prestar atención.
220.	Sebastián:	(Mueve los puntos mientras el profesor da la instrucción de hacer silencio y prestar atención)  *Figura 28*
221.	Alguien:	¡No, no, no!
222.	Profesor:	Sí porque ya es momento ahorita de discutirlo. Listo. Cierren un momento las tablets. Y vamos a prestar atención allá (refiriéndose a los estudiantes de las Mesas 1 y 8 donde están hablando). Pero todavía no empieces, ¡hey! Espera, espera (Pidiéndole s Sebastián que detenga el arrastre de los

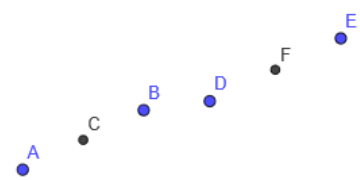
		puntos). Quieto ahí mientras todos cierran tablets ¿listo? Tablets, José ¿listo? Porque es momento de discusión. (Observa que todos no estén utilizando su Tablet para que presten atención a la intervención de Sebastián). Ahorita vuelven otra vez a hacerlo. Quiero ver tablets cerradas, Ricardo. Por acá (refiriéndose a Saida). Garzón [apellido de Gustavo], ¿ya? Listo.
223.	Sebastián:	(Interrumpe el arrastre de los puntos)  *Figura 29*
224.	Profesor:	Cuéntanos, ahora sí, qué estás haciendo.
225.	Sebastián:	(Continua arrastrando los puntos)
226.	Profesor:	Ve hablando …
227.	Carlos:	Socialice.
228.	Profesor:	Cierren tablets.
229.	Sebastián:	(Continua arrastrando los puntos)
230.	Profesor:	No, pero si no hablas.
231.	Sebastián:	Una línea.
232.	Profesor:	¿Una línea? Ahí dice que no tocaba hacer una línea. ¿o sí?
233.	Alguien:	No.
234.	Profesor:	No, ¿cierto? Alinear unos puntos. Listo. Y ahí pareciera que lo que está haciendo Samuel es alinearlos.
235.	Andrés:	No pero…
236.	Profesor:	¿Pero qué?
237.	Paola:	(Interrumpe a Andrés). Ahí no se ve que estén perfectamente alineados. Si no tienes un segmento que …

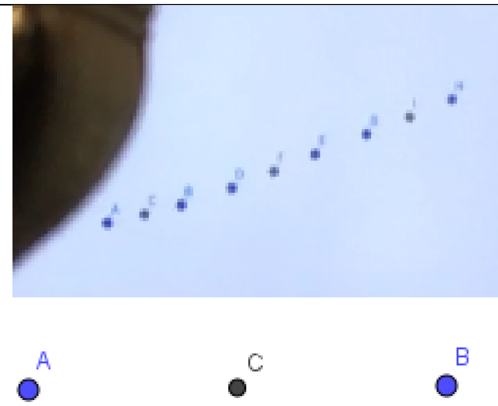
238.	Samuel A:	(Interrumpe a Paola). Una cuadrícula.
239.	Profesor:	¿O sea necesito otra cosa? ¿Qué necesitaría?
240.	Samuel A, Carlos y Ricardo:	Una cuadrícula.
241.	Profesor:	Esperen, en orden. Chist (pidiendo silencio). Paola nos dice que es muy difícil que queden alineados perfectamente, está un poquito … (señala el televisor donde se encuentra la configuración de puntos).  *Figura 30*
242.	Sebastián:	Ya sé que hacer.
243.	Profesor:	¿Ya sabes qué hacer? Porque allá ya surgieron unas ideas. (Señala la mesa de Paola). A ver, pero rápido. Escuchemos. A ver qué hizo su compañero.
244.	Sebastián:	Profe cogí …
245.	Profesor:	¿Cogiste que opción?
246.	Sebastián:	Rectas (Selecciona la opción segmento).
247.	Profesor:	¿Cogiste rectas? ¿esa es la opción recta? ¿o esa es la opción que?
248.	Samuel B:	Segmento.
249.	Profesor:	¿Después de hacer eso qué? Chist (pidiendo silencio). ¿Qué piensan ustedes de esto que está haciendo su compañero?
250.	Sebastián:	(Dibuja segmentos intentándolos alinear).

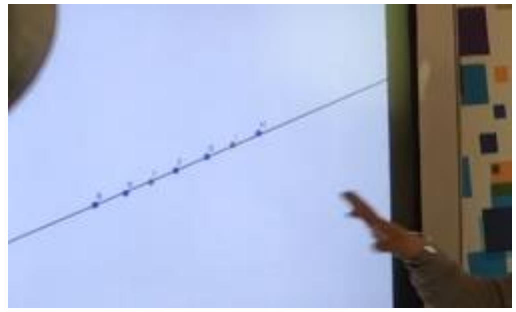
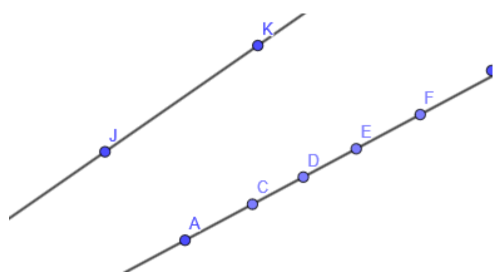
		 *Figura 31*
251.	Andrés:	(Alza la mano).
252.	Eliana:	(Alza la mano).
253.	Profesor:	A ver Andrés.
254.	Andrés:	Está unido por segmentos (junta sus dos dedos índices moviéndolos de izquierda a derecha).
255.	Profesor:	¿Funcionará o no? O alguien dice no, no funciona (alza su mano derecha pidiendo que alguien alce su mano).
256.	Andrés	(Lee el problema que está en el tablero) No, sí porque …
257.	Profesor:	A ver Andrés y luego Eliana.
258.	Andrés:	Nos dicen que los puntos tienen que estar alineados, ahí no dice que tienen que ser segmentos ni nada de eso, entonces sí funcionaria.
259.	Profesor:	¿Entonces sí funcionaría usar segmentos?
260.	Adriana:	Pero no se sabe sí tienen la misma distancia.
261.	Andrés:	¡Ah!
262.	Paola:	¡Ah sí!
263.	Profesor:	Y entonces qué hago para que me quede de la misma distancia.
264.	Francisco:	(Alza la mano) Con centímetros.
265.	Adriana:	(Alza la mano).
266.	Profesor:	Tiene la palabra Adriana y luego … chist (pidiendo silencio).
267.	Adriana:	Con la, con la cuadrícula.
268.	Profesor:	Con la cuadrícula. Tú dices necesito la cuadrícula (refiriéndose a Adriana).
269.	Adriana:	Sí.

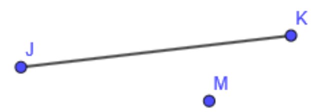
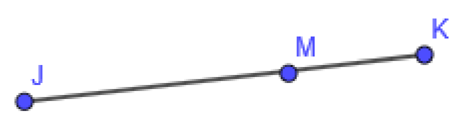
270.	Profesor:	Venga le activamos la cuadrícula acá (refiriéndose a la proyección de la Tablet en el televisor) Díaz (apellido de Sebastián) active la cuadrícula acá.
271.	Sebastián:	(Activa la cuadrícula).
272.	Profesor:	Listo, ya la activé.
273.	Adriana:	Tiene que quedar entre dos …
274.	Eliana:	(Alza la mano).
275.	Sebastián:	¡Nooo! (Ubica los puntos alineados utilizando la cuadrícula).
276.	Profesor:	¿De esta manera se podría ubicar? (señala al televisor).
277.	Adriana:	(Asienta con la cabeza)
278.	Profesor:	Aaah, venga y si yo no quiero tener la cuadrícula, porque qué tal que yo solo tenga una hoja blanca.
279.	Samuel A:	Mira profe, yo lo tengo perfecto y sin cuadrícula.
280.	Profesor:	A ver cuéntanos qué hiciste.
281.	Pablo:	Él utilizó cuadrícula (refiriéndose Samuel A, quien es su compañero de mesa).
282.	Samuel A:	Puse cuadrícula y después la quite.
283.	Profesor:	Aaah no, eso es trampa.
284.	Eliana:	(Alza la mano).
285.	Profesor:	Quien lo hizo… a ver Eliana (entrega la Tablet a Eliana). Bueno, quítale la cuadrícula porque no vamos a usar cuadrícula. Chist (pidiendo silencio), presten atención, a ver allá atrás (camina hacia las mesas de atrás).
286.	Eliana:	Es que no se si…
287.	Profesor:	(vuelve a la mesa de Eliana) A ver dilo, dilo, aquí lo importante es comunicar. A ver, allá atrás. Juan (pidiéndole silencio).
288.	Eliana:	Voy a coger un esferito o una regla y la voy a colocar aquí adentro (coloca un esfero en la Tablet).
289.	Laura:	Y ahí se puede guiar (está en la misma mesa de Laura).
290.	Profesor:	Es que aquí no se alcanza a ver lo que está haciendo Eliana, ella dice voy a colocar un esfero en la Tablet.
291.	Eliana:	(Se pone de pie para que sus compañeros alcancen a ver lo que está haciendo)

		Voy a hacer unos puntos (intenta construir los puntos teniendo al esfero como referencia.) y a unirlos con segmentos.
292.	Profesor:	Esa es la idea que tiene Eliana. ¿Ustedes que creen?
293.	Saida:	No la entendí. (se ríe).
294.	Profesor:	Eliana dice: voy a colocar un esfero y voy a crear unos puntos con respecto a ese (refiriéndose al esfero).
295.	Eliana:	(Asienta con la cabeza). Si porque están desordenados, si uno tiene algo recto… (Coloca sus manos frente a ella (palma a palma) y encima de una Tablet que sostiene el profesor. Luego, las desplaza de atrás hacia adelante y viceversa en línea recta).
296.	Paola	(Interrumpe a Eliana) Pero ahora, cómo la harías equidistantes, que tengan la misma distancia entre cada punto.
297.	Andrés:	Sí.
298.	Ricardo:	Pues usa una regla.
299.	Andrés:	(Habla al mismo tiempo que Ricardo) O el esfero iría (Representa los extremos de un esfero con los dedos de sus manos y dibuja en el aire tres veces la medida del esfero).
300.	Salome:	O pon una línea recta.
301.	Eliana:	Si no es el esfero entonces una regla.
302.	Andrés:	¡Oye, sí! Una regla
303.	Profesor:	¡Aaah! O sea que necesito eso, además. Pero resulta que yo quiero que alguien me diga: no, yo no lo pienso hacer así. La idea de Juan: ¿tenía que hacer qué?
304.	Juan:	¡No, no ,no!
305.	Profesor:	¿A ver quién tiene la Tablet? (toma la Tablet de la mesa 5) ¿salió otra cosa? (accidentalmente se proyecta la página de inicio de Google)
306.	Carlos:	¿uichhh, usted que hizo? (refiriéndose a Eliana).
307.	Eliana:	Nada (sonríe).
308.	Profesor:	Bueno, ¿qué haríamos acá entonces? ¿Paola ? ¿Cuéntanos? ¿Qué haríamos?
309.	Paola:	¿Yo? (sonríe) No sé.
310.	Profesor:	A ver. Yo tengo estos, ahora la pregunta es, chist (pidiendo silencio), que para que se cumpla … Señora (da la palabra a Paola quien alza la mano)

311.	Paola:	Pues es que no sé. Habría que utilizar las herramientas y una de las herramientas [de GeoGebra] dice…creo que es construcción y tú pones un punto y …
312.	Profesor:	(Interrumpe a Paola) Hazlo, a ver qué pasa (entrega la Tablet a Paola). Pero hazte cerca porque allá es muy lejos y no funciona. Bueno, a ver, dije tablets cerradas, acá (señala la mesa 4). Listo. A ver, prestemos atención rápidamente.
313.	Paola:	Aquí hay una opción que dice medio o…. el caso es que, si yo pongo un punto acá y otro, entonces me da uno con la misma distancia (construye en la Tablet los puntos A y B y su punto medio C). Me parece que sería más fácil, pero de pronto aquí dice medio centro… espera… (presiona otra opción del menú, para la cual le sale un aviso que dice “completar la acción utilizando internet”) no …
314.	Profesor:	¿Entonces qué hiciste?
315.	Paola:	Entonces podríamos poner un punto acá (construye los puntos D y E y su punto medio F), y seguir haciendo  *Figura 32*
316.	Andrés:	No, pero…
317.	Profesor:	¿Qué pasa? ¿Qué pasa, Andrés?
318.	Andrés:	Es que ahí no están …
319.	Paola:	No tiene la misma distancia.
320.	Andrés:	Sí.
321.	Profesor:	¿Están de acuerdo allá atrás?
322.	Sebastián:	Sí.
323.	Profesor:	Tú te haces allá en la mesa de Eliana y Paola , listo. Vamos Pedro. Listo. Entonces, ¿qué dice Andrés, quien le vio un pero a la construcción de Paola ?
324.	Andrés:	Es que, antes de empezar, el punto A y D, la distancia no era la misma. Pero es que entonces es muy difícil hacer que …
325.	Paola:	Es que en esta construcción sí sé que (si) yo hago un punto acá y hago otro inmediatamente al lado, me hace un punto intermedio con la misma distancia entre dos puntos. Entonces me parece un poco más fácil. Pero no sé.

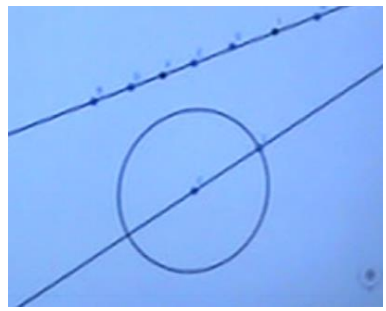
		 *Figura 33*
326.	Profesor:	¡Aahh, sí! (sonríe). Bueno. La pregunta ahora es: ¿qué objeto, cuando los puntos están alineados, por ejemplo, estos tres que están acá alineados (señala con su dedo índice al televisor) qué objeto geométrico yo tengo ahí? ¿Qué podría yo tener ahí?
327.	Saida:	Un segmento.
328.	Profesor:	¿Siempre es un segmento?
329.	Laura:	Una recta.
330.	Profesor:	¿Una recta? Podría funcionar, ¿cierto? ¿Qué pasa si yo trazo el segmento? No, mejor hagamos una recta AC. Haz la recta AC (refiriéndose a Paola quien tiene la Tablet conectada al TV).
331.	Martina:	¿(Recta) AC?
332.	Profesor:	Sí, (recta) AC. Esa es la opción segmento.
333.	Paola:	No, una recta.
334.	Profesor:	Le diste otra vez segmento. Es la segunda opción. Es esta (señala la opción recta). A ver, presten atención a lo que está haciendo. Vamos a prestar atención allá, ¿listo? Vamos a hacer la recta, porque ustedes dijeron que puede ser segmento, puede ser recta ¿cierto? Vamos a ver si puede ser recta o segmento. Vamos a intentar las dos maneras. Haz la recta, por ejemplo coge B, E (dirigiéndose a Paola quien aún no había construido la recta AC).
335.	Paola:	(Construye la recta EB).
336.	Profesor:	¿Ya esa recta está fija ahí?
337.	Paola:	Sí.
338.	Profesor:	Como yo hago…¿será qué el punto H pertenece a la recta?

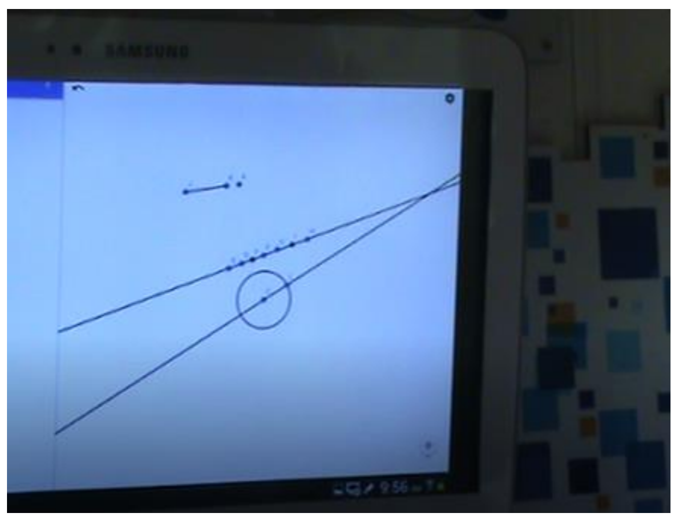
339.	Eliana, Pedro y Adriana:	No.
340.	Profesor:	Entonces tocaría entonces como moverlo un poquito ¿cierto?  *Figura 34* ¿Todos de acuerdo con qué esta , chist (pidiendo silencio), con qué estos puntos pertenecen a esta recta.?¿todos están de acuerdo?
341.	Francisco:	Sí.
342.	Profesor:	¿O sea que quiere decir que estén alineados?
343.	Varios:	(hablan).
344.	Sebastián:	Que queden en la línea.
345.	Profesor:	¿que qué? (mira a Carolina).
346.	Carolina:	Que quede sobre, sobre la línea.
347.	Profesor:	¿Sobre la qué?
348.	Isabel	Sobre la misma recta.
349.	Profesor:	A bueno. Ahora has un segmento.
350.	Paola:	¿Un segmento? ¿cualquier segmento? (Construye una recta JK).  *Figura 35*
351.	Profesor:	Eso sigue siendo recta.

352.		No, pon la función de segmento, ahí está (señala con su dedo la opción de segmento apuntando al televisor).
353.	Paola:	(Borra la recta JK y construye una un segmento JK).
354.	Profesor:	Listo. Ahora yo necesito, digamos que, para este, hagan un punto … ustedes dicen que haga un segmento ¿será posible que un punto …? (Dirigiéndose a Paola) Crea otro punto por favor.
355.	Paola:	(Construye un punto M que no pertenece al segmento).  *Figura 36*
356.	Profesor:	¿Será posible crear otro punto que esté alineado a estos dos, J y K, que no pertenezca acá? (señala el segmento construido por Paola). ¿Qué no pertenezca al segmento, es posible?
357.	Andrés:	Sí.
358.	Paola:	No… (Arrastra el punto M de tal manera que este pareciera pertenecer segmento JK) Ahí.  *Figura 37*
359.	Profesor:	Ahí pertenece, ahora yo quiero que no pertenezca.
360.	Paola:	Listo. Ahí. (Arrastra el punto M de tal manera que este no pertenezca al segmento JK y parezca alineado con los extremos de este segmento).  *Figura 38*
361.	Profesor:	¿Y ahí que sería? ¿Alineado o no?
362.	Carolina:	No.
363.	Andrés:	Sí.

364.	Paola:	Sí, según yo alineado significa que, como si fuera en una línea infinita (mueve sus manos de izquierda a derecha juntándolas en tres ocasiones).
365.	Eliana:	En un línea imaginaria.
366.	Profesor:	Aah, pero miren que aquí ya no está el segmento, ¿o sea qué necesito? ¿Qué necesitaría?¿seguiría necesitando un segmento?
367.	Paola:	No es que …
368.	Profesor:	Señorita Téllez (Apellido de Isabel) ¿qué dice usted?
369.	Isabel:	Eeeh…
370.	Profesor:	Veo algunos distraídos. Cierren tablets porque estamos en momento de escuchar a los demás compañeros.
371.	Isabel:	Bueno otra vez, ¿qué?
372.	Profesor:	Bueno, te voy a volver a decir pero presta más atención.
373.	Isabel:	Sí señor. Estaba acá en GeoGebra.
374.	Profesor:	Yo dije, la discusión es la siguiente: ellos dicen, algunos compañeros dicen que puede ser un segmento, otros dicen una recta, vimos que en la recta podría funcionar y ahora unos dicen: no profe, un segmento.
375.	Paola:	Lo que pasa es que …
376.	Profesor:	Y yo le digo, ahora haga este punto A que no pertenezca al segmento. ¿Será que se puede alinear o no? ¿O tiene que pertenecer al segmento?¿Tú qué dices?
377.	Isabel:	No se puede alinear.
378.	Profesor:	¿No se puede alinear?
379.	Isabel:	Porque quedaría más … (alza su mano moviéndola de izquierda a derecha) Es que no veo bien.
380.	Profesor:	Si quieres párate para que veas mejor.
381.	Isabel:	No, no se puede alinear.
382.	Profesor:	No, ¿y qué haría para alinearlo?
383.	Isabel:	Otro… no sé.
384.	Camilo:	Profe a mí se me ocurre que…
385.	Adriana	(Alza la mano).

386.	Profesor:	A ver, a ver, primero acá y luego acá. A ver, ¿qué se te ocurre (dirigiéndose a Camilo)?
387.	Camilo:	Si pones en circunferencia, o sea yo estoy quitando … espérate ¿esto es para que queden rectos todos?
388.	Profesor:	Pues decía alienados. ¿Qué haríamos para que queden alineados?
389.	Camilo:	Y si pones circunferencia y pones una línea adentro o sea una línea perfecta (mueve sus antebrazos de izquierda a derecha) o sea una línea o un segmento.  *Figura 39*
390.	Profesor:	A ver, intenta hacer lo que él dice a ver ¿Cómo lo harías tú? (dirigiéndose a Paola). Todos están mirando allá (el TV) para ver si Paola sigue las instrucciones que dice Camilo, ¿listo?
391.	Paola:	(Construye una circunferencia) Circunferencia.
392.	Camilo:	Y ahora traza un segmento de … desde el centro de un lado a otro (señala con su mano el TV)
393.	Profesor:	Estamos prestando atención acá. Adriana, atención.
394.	Camilo:	Ahí estaría bien, no importa, ahora línea los puntos
395.	Profesor:	¡Aah! Le pongo ahí unos puntos.
396.	Camilo:	Sí, pues los 10.
397.	Paola:	¿Y en qué ayuda el círculo?
398.	Samuel A:	¡Oohhh!
399.	Varios:	¡Uuuhh!
400.	Camilo:	No pues…
401.	Pablo:	Se va a dejar.
402.	Profesor:	Bueno, trata de defenderte.

403.	Camilo:	No, no, no…
404.	Profesor:	¿Bueno, pero por qué lo creaste? La idea es que nos digas por qué lo creaste. Tú creíste que necesitaríamos la circunferencia.
405.	Camilo:	(interrumpe al profesor) … Porque esos puntos…
406.	Andrés	Profe porque si ubico dos puntos a la misma distan … y como mide la misma distancia, entonces sirve.
407.	Paola:	Profe, me parece que también podría servir porque es como la misma función de la herramienta que yo utilicé y como un círculo tiene la misma distancia del centro a todas las partes del círculo puedes usar eso para la misma distancia (señala el gráfico del TV).  *Figura 40*
408.	Profesor:	¿Y qué piensan usted allá (señala la mesa 9) Salome? ¿De acuerdo o no?
409.	Salome:	Sí, yo creo que la circunferencia podía servir porque sirve como para poner otro al lado de otro que quedaría a la misma distancia punto.
410.	Profesor:	O sea que esta idea me serviría para que los puntos quedaran, ¿qué?
411.	Andrés:	En la misma distancia.
412.	Paola:	Pero no son 10 puntos, sino más porque sería extremo, mitad, extremo mitad. Es lo mismo que paso con la herramienta que yo utilice usando circunferencia.
413.	Carolina:	(Alza la mano).
414.	Profesor:	Aah. Me quieres decir algo Juana (primer nombre de Carolina).
415.	Carolina:	No profe.
416.	Profesor:	Bien, toda esta discusión es para definir algo de alinear y alinear a partir de ahora lo vamos a llamar como colineal ¿Qué querrá decir…? ¡A bueno! Otra pregunta: ¿Cuántos puntos yo puedo alinear?
417.	Andrés:	Muchos.

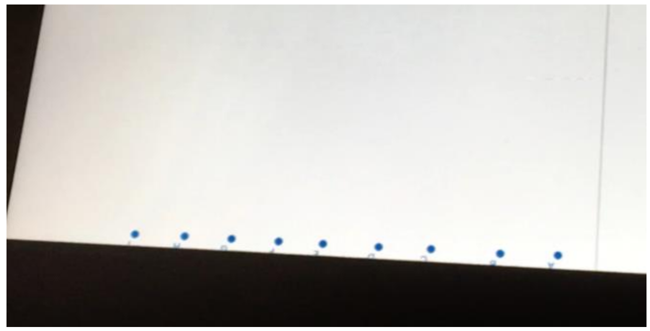
418.	Profesor:	¿Puedo alinear 2?
419.	Isabel:	¡Ah sí! ¡Más de dos!
420.	Profesor:	Más de dos ¿por qué?
421.	Isabel:	Porque si hay uno no se puede alinear y si hay dos, se pueden alinear.
422.	Profesor:	¿Pero necesito 2 o más?
423.	Mariana, Eliana:	Más.
424.	Paola:	Sí profe porque puedes usar la cuadrícula.
425.	Profesor:	No porque la idea es que…acá Paola me dice que porque no se abre la cuadrícula y no porque no ven que estamos en la hoja en blanco. Ninguna trampa.
426.	Paola:	¿Tampoco lo ejes?
427.	Profesor:	No, los ejes tampoco. Entonces cómo podríamos definir, miren esos puntos que están allá (señala el TV): son colineales ¿Qué querrá decir colineal? Para que ustedes me ayuden a escribir.  *Figura 41*
428.	Paola:	Según yo, colineal significa que todos estén alineados (mueve sus dedos de izquierda a derecha) sin necesidad de tener la línea que está ahí, sino que estén alineados como si hubiera una línea imaginaria.
429.	Profesor:	¿Qué dice Saida? ¿De acuerdo o no?
430.	Saida:	(Asienta con la cabeza).
431.	Profesor:	¿si estás de acuerdo o no ?

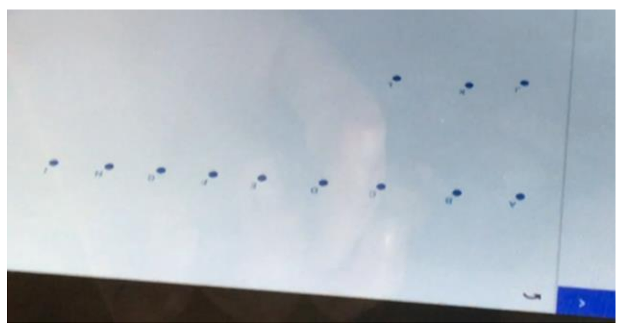
432.	Saida:	(Se queda en silencio)
433.	Profesor:	No estabas prestando atención y no siguen instrucciones. A ver Garzón cómo empezaría yo a escribir (escribe en el tablero *Def. de colinealidad*) y qué voy a escribir
434.	Gustavo:	No sé.
435.	Profesor:	Miren lo que acabos de hacer ¿Qué querrá decir colinealidad?
436.	Andrés:	Otra línea.
437.	Profesor:	Esperen que no nos están prestando atención acá. ¿José, ya? Vamos a prestar atención, ¿Qué quieren decir ustedes? (refriéndose a la mesa 3).
438.	Alejandra:	Es que son dos …
439.	Profesor:	Si yo tengo dos puntos acá (dibuja dos puntos sin nombrarlos) ¿yo ya puedo hablar qué estos dos son colineales? ¿Cuántos puntos necesito para hablar de colinealidad??
440.	Adriana:	Dos.
441.	Profesor:	¿Dos o más? Si yo tengo dos puntos ¿Cuántas rectas yo puedo trazar ahí?
442.	Sebastián:	Una.
443.	Profesor:	¿Una? Listo voy a dibujarla acá (Dibuja la recta que contiene los puntos). Por acá hay otro punto (dibuja otro punto que no pertenece a la recta anteriormente dibujada). ¿Qué hago ahí?
444.	Marta:	Tendría que estar sobre la línea para poder ...
445.	Pablo:	Profe, ¿pero no ibas a copiar la definición?
446.	Profesor:	Sí, pero primero quiero que determinemos cuántos puntos se necesitan para ser colineales.
447.	Eliana:	(Alza la mano).
448.	Andrés:	Profe, mira tenemos que mover ese punto a la recta.
449.	Profesor:	¿Sí? ¿entonces solo tendríamos que moverlo?
450.	Eliana:	Profe, ya pude alinearlos sin utilizar cuadrícula.
451.	Profesor:	Listo, ya ahorita lo veo. Listo, vamos a escribirla porque estamos un poco dispersos y la idea es entonces hablar de más de tres puntos ¿Por qué no hablar que dos puntos son colineales? Porque siempre que yo tengo dos puntos ¿Qué pasa? Puedo trazar qué…
452.	Adriana y Camilo:	Una recta.

453.	Vanesa:	Una línea.
454.	Profesor:	Una recta ¿cierto? Cuando tengo tres me toca hacer qué?
455.	Gustavo:	Un triángulo.
456.	Profesor:	Un triang… bueno, sí, pero qué necesito para que queden en una misma recta…
457.	Paola:	(interrumpe al profesor) Toca arrastrar el punto a la recta.
458.	Profesor:	Me tocaría moverlo, cierto. Por eso con dos ya está solucionado, pero con tres, con cuatro ¿qué me tocaría hacer?
459.	Paola:	Arrástralos hasta que se alinean en una dirección (junta sus dedos índices y luego los separa dibujando en el aire una recta)
460.	Profesor:	Listo. Entonces yo voy a escribir por acá (en el tablero) ¿Cuántos puntos es que necesito?
461.	Paola y Camilo:	Tres.
462.	Profesor:	Tres o más. ¿listo? Entonces vamos a copiar (escribe en el tablero) tres o más puntos son colineales si… bueno ayúdenme a terminarla, tres o más puntos son colineales sí que…
463.	Adriana:	Están en la misma recta.
464.	Pablo:	Cumplen la función.
465.	Profesor:	A listo (continúa la escritura) si pertenecen a la misma recta. Esa fue la primera parte, hablar de colinealidad. Ahora viene la segunda parte. Tiene los mismos diez puntos, en la que nueve de esos diez puntos son equidistantes de uno. Recuerden esa definición de equidistancia. Y cuál es el punto del que van a equidistar todos, se llama A.
466.	Andrés:	O sea partimos de A.
467.	Profesor:	Sí, pero ustedes hay tiene sus diez puntos, no los vayan a borrar no darle nuevo, más bien trate de arreglar como podemos hacer este problema
468.	Pablo:	¿Y ahora qué hago?
469.	Profesor:	Pues hacerlo. ¡hay tú me ibas a mostrar algo! (dirigiéndose a Paola).

Los estudiantes empiezan a solucionar el Problema 2 (hacer una conjugación en la que 9 de los 10 puntos son equidistantes de uno de ellos que llamamos A). Leonor, una de las investigadoras, acompaña al grupo de Laura y Eliana durante el desarrollo de la actividad, mientras que Zaira, monitora de la investigación, pasa por varios grupos preguntándoles cómo están solucionando el problema.

A continuación, se muestra la interacción entre Laura, Eliana y Leonor, mientras resuelven el segundo problema propuesto por el profesor.

470.	Eliana:	Así. Empecé a hacerle así con los dedos y me quedo recto. (Haciendo referencia a la actividad anterior, explica al profesor, como utilizó el forro de la Tablet sobre la pantalla de GeoGebra, como referencia, para arrastrar los puntos construidos y lograr que le quedaran alineados).  *Figura 42*
471.	Profesor:	Aaah. O sea, sigues haciendo, como que te apoyas de… de algo. Bueno, y yo ahora quisiera decir: Eliana, ya no tienes esto (señala el forro de la Tablet) ¿Cierto? Ahora, tienes que alinearlos ¿Qué harías?
472.	Eliana:	Un dedo, un dedo recto.
473.	Profesor:	Sigues, sigues…
474.	Eliana:	(Interrumpe al profesor) Y para tener, y para tener la misma medida, puedo utilizar hasta esta parte, (haciendo referencia a la falange de su dedo), y vuelvo a… donde deje el punto otra vez coloco la pulgada, y otra vez.
475.	Profesor:	Aaah, ósea, tu idea sigue siendo la misma, utilizar algo más. Aah bueno.
476.	Eliana:	Como mi dedo.
477.	Profesor:	Y ¿habrá otra cosa? A parte de… yo no quiero usar nada, sería ya, ¿de acá qué? (señalando el menú de GeoGebra).
478.	Leonor:	Utilizando lo que hay acá.
479.	Profesor:	Sí. Mira: ya, ya las cosas, ya (los) materiales, ya no están. Miremos ahora acá (señalando el menú de GeoGebra) ¿Qué podrías hacer?
480.	Eliana:	¿ Ósea que mis dedos tampoco?
481.	Profesor:	Solo hay uno, pero no se puede, no se puede poner en la pantalla ni nada. Solo hay uno. ¿Qué pasara con estas cositas que hay por ahí?
482.	Eliana:	Interesante profe, me la colocaste difícil.
483.	Leonor:	¿Que remplaza al dedito, o a la regla o a este borde que este aquí?

484.	Eliana:	Este, este (señalando la herramienta segmento).
485.	Leonor:	¿Ese? ¿Qué es ese?
486.	Eliana:	Eso una… rectas.
487.	Leonor:	Una recta, claro, no necesitas el dedito. Has una recta.
488.	Eliana:	(Selecciona la opción segmento)
489.	Leonor:	Ese es un segmento, es el de al ladito. Es el de al lado.
490.	Eliana:	(selecciona la herramienta segmento)
491.	Leonor:	No, este no, este (señalando la herramienta recta). Has una recta.
492.	Eliana:	(Selecciona la herramienta recta y el punto A, de los que ya tiene construidos. Figura 42)
493.	Leonor:	Pero aparte, aparte, aparte… aparte. [Dando a entender que no debe utilizar los puntos ya construidos]
494.	Eliana:	Ok, entonces… (selecciona la opción punto y construye 3 puntos J, K y L). Voy a colocar otros…  *Figura 43*
495.	Leonor:	Por ejemplo, ahí. No, pero no has escogido la forma recta.
496.	Eliana:	¡Ah!
497.	Leonor:	Yo quiero es… esos puntos no. Has una recta.
498.	Eliana:	(Selecciona la herramienta recta y construye la $\overleftrightarrow{MN}$)
499.	Leonor:	Listo. Este es como si fuera tu dedito (señala la $\overleftrightarrow{MN}$) ¿Y ahora qué haces con estos puntos?
500.	Eliana:	Pues los corro y empiezo aah…
501.	Leonor:	Córrelos.

502.	Eliana:	(Al intentar arrastrar el punto J, se genera una nueva recta, pues no había desactivado esta herramienta).
503.	Leonor:	¡Ah! Tienes que desactivar la recta.
504.	Eliana:	(Desactiva la herramienta recta, posterior mente oprime deshacer, e intenta arrastrar nuevamente el punto J, pero vuelve a generar una recta, oprime deshacer. Finalmente, elige la opción mover, y arrastra los puntos hasta la recta construida)
505.	Leonor:	¿Ves? No necesitabas tu dedo.
506.	Eliana:	Listo
507.	Leonor:	Así te quedan cómo
508.	Eliana:	Rectos
509.	Leonor:	¿Rectos? No. Los puntos no pueden ser rectos.
510.	Eliana:	Bueno…
511.	Leonor:	¿Cómo dijeron que iban a llamar esos puntos?
512.	Eliana:	¿Segmentos? (dudando de lo que dice).
513.	Leonor:	No, cuando los puntos están en la misma recta, ¿Cómo se llaman? Mira en el tablero.
514.	Eliana:	Eeeh. ¿Colineales?
515.	Leonor:	Colineales. Si, los puntos no son rectos porque los puntos son puntos. ¿Sí? Lo que son rectos son las rectas, o los segmentos. Bueno, ese es, ese es del punto anterior, pero ahora borra la recta. Todo eso. Paola , mira, tienen esos 10 puntos, tú también los tienes y ahora ¿qué tienen que hacer?
516.	Laura:	Hacer que nueve de los diez puntos estén ¿Cómo es? Equiqui… ¿equilineales?
517.	Leonor:	Nooo, equilineales no es, eso no existe. Equidistantes.
518.	Laura:	Eso.
519.	Leonor:	¿Qué significa equidistantes?
520.	Laura:	Que tenga una, una distancia de igual medida.
521.	Leonor:	Exacto.
522.	Laura:	Y el último punto que no sean equidistantes. Ósea que digamos…
523.	Leonor:	¿dónde dice eso? (interrumpiendo a Laura)

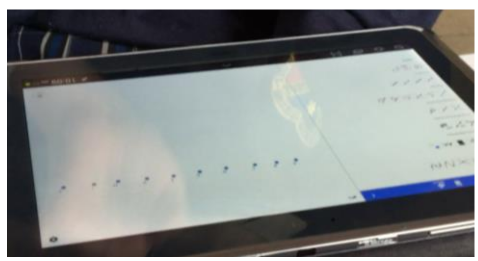
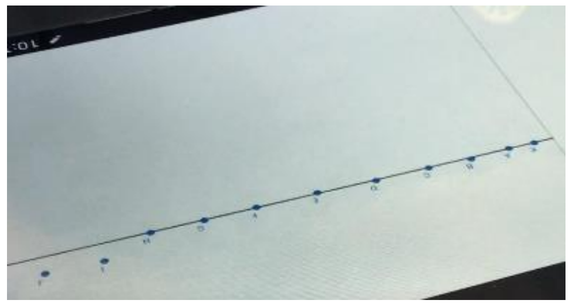
524.	Laura:	Que… (Lee del tablero) uno de los diez puntos sea equidistante de uno de ellos. ¿Cómo así?
525.	Leonor:	¿Cómo así? Esa es la buena, la pregunta. Explícale Eliana, ¿Tú que entiendes?
526.	Eliana:	¿Equidistantes?
527.	Leonor:	No, ¿Qué tienes que hacer? ¿Qué entiendes que tienes que hacer?
528.	Eliana:	Aah, ¿qué tengo que hacer? Eeh, pues algo así parecido, pero... los colineales tienen que ser como un poco más separados.
529.	Leonor:	Paola ¿Tienen que hacer puntos colineales?
530.	Laura:	No, no, no. Mira ahí dice. (Lee la indicaciones del tablero) Has una conjugación en la que 9 de los 10 puntos son equidistantes de uno de ellos que llamamos A.
531.	Leonor:	¡Ya! Colineales no. Eso ya será otro problema. Ahí, ¿cómo te quedaron Paola ? (Haciendo referencia a los puntos graficados por Paola en su Tablet)
532.	Laura:	Rectos. Tres puntos o más son colineales si pertenecen a la misma recta. (Lee de su cuaderno)
533.	Leonor:	¿Esos son qué?
534.	Laura:	Esto, es colineal. (Señalando los puntos construidos en la actividad anterior en su Tablet)  *Figura 44*
535.	Leonor:	Sí.
536.	Laura:	Ok.
537.	Leonor:	¿Y ahora?
538.	Laura:	Y ahí dicen que son equidistantes de uno de ellos. Entonces aquí, uno tiene que tener una medida que no sea igual. Si no estoy mal. Y todos los demás tienen que seguir con la misma medida entre ellos. (Empieza a arrastrar los puntos, primero separa a A y mueve los otros con el fin de que visualmente se vieran equiseparados).

		 *Figura 45*
539.	Leonor:	¿Cómo así con la misma medida?
540.	Laura:	Ósea, dicen, equidistantes es que tengan la misma medida en cada uno de ellos, ósea, digamos la distancia. Pero entonces el problema que tenemos que hacer, es que uno quede como más… que no sea equidistante, a cambio de los otros.
541.	Leonor:	¿Será eso? Vuelve a leer. Eliana, presta atención a la, a la pregunta, porque ella está resolviendo otra cosa (no se registra los que hizo Eliana). ¿Qué es lo que tienen que hacer?
542.	Laura:	(Construye una recta)
543.	Leonor:	¿Cómo tienen que estar los nueve puntos con respecto a A?
544.	Laura:	Los nueve puntos deben estar equidistantes (mientras arrastra los puntos sobre la recta construida)
545.	Leonor:	¿De quién?
546.	Laura y Eliana:	De A-
547.	Leonor:	Y eso qué significa: que los nueve puntos tienen que estar equidistantes de A.
548.	Laura:	Que tiene que empezar en A (haciendo referencia a la recta construida)
549.	Leonor:	¿Empezar en A?
550.	Laura:	¿No?
551.	Eliana:	No necesariamente.
552.	Leonor:	Piensen primero antes de hacer algo ¿Qué es lo que tienen que hacer?
553.	Laura:	Tenemos que resolver el problema
554.	Leonor:	Sí, pero ¿qué es resolver el problema?
555.	Laura:	Buscar una solución.
556.	Leonor:	Pero, una solución ¿A cuál pregunta?

557.	Laura:	Aahh la …
558.	Leonor:	En el problema les están preguntando o les están diciendo que los puntos tienen que estar alineados.
559.	Laura:	No.
560.	Leonor:	No. Entonces ¿por qué tú pintas una recta? (Refiriéndose a la construcción de Laura)  *Figura 46*
561.	Laura:	(Selecciona la herramienta eliminar y borra la recta construida)
562.	Eliana:	Dice eeh…
563.	Leonor:	Tienen diez puntos cualesquiera, ¿Sí? y ¿Qué es lo que tienen que hacer? Piensen a ver.
564.	Laura y Eliana	Tienen que ser equidistantes.
565.	Laura:	Aah ok. Creo que ya entendí.
566.	Leonor:	¿Qué entendiste?
567.	Laura:	Qué no tiene que estar realmente… no tiene que ser alineados.
568.	Eliana:	Ni rectos.
569.	Laura:	Ni rectos (repite lo que dice Eliana)
570.	Leonor:	Ni formar una recta, que es lo mismo que ser alineados. Si no, ¿qué tienen que pasar? ¿Qué?
571.	Eliana:	Tener una misma…
572.	Laura:	Que tienen que ser equidistantes (interrumpiendo a Eliana).
573.	Eliana:	Tienen que tener una distancia.
574.	Leonor:	¿Pero equidistantes a dónde?

575.	Laura:	Ósea, digamos que yo puedo armar una figura, pero esa figura lo que tiene que hacer es que cada lado tenga la misma medida.
576.	Leonor:	Pero hay un punto importante ahí.
577.	Laura:	Que… uno de ellos…
578.	Leonor:	¿Qué dice de A? ¿Qué dice de A?
579.	Laura:	Que son equidistantes de uno de ellos.
580.	Leonor:	Todos son equidistantes de uno de ellos, que se llama A. Todos los puntos son equidistantes de uno de ellos que se llama A.
581.	Laura:	Ósea que empieza en A.
582.	Eliana:	Si, empieza en A.
583.	Leonor:	Eso qué significa. Por ejemplo, ahí, ¿B y C están a la misma distancia de A (señalando la construcción de Paola , la cual corresponde a la Figura 47). No ¿Cómo haces para que queden a la misma distancia?  *Figura 47*
584.	Laura:	¡Ayyy! ¡ya entendí! ¡Ya entendí!
585.	Leonor:	¿Qué entendiste? Explícale a Eliana.
586.	Laura:	A ver, dice que todos tenemos que … dice que desde… hay uno que llamamos A, entonces si no estoy mal, todos tienen que tener la misma medida, pero partiendo de A. Digamos de A a B hay por ejemplo 2 cm, de A a D, tiene que haber 2 cm. Si digamos que yo pusiera a A, B y C, (Arrastra los puntos de tal forma que parecen colineales y B esta entre A y C) entonces yo diría de A a C hay más distancia que de A a B. (Empieza arrastrar los puntos, con la intención procurando dejarlos a la misma distancia de A)
587.	Leonor:	Eliana, ¿Estás de acuerdo? Mira cómo está haciendo Laura. (Refiriéndose al arrastre que está realizando Laura)
588.	Laura:	(Mientras arrastra los puntos, va verificando que estos queden alrededor de A)
589.	Leonor:	¿Por qué los estas poniendo así? Eliana, ¿Por qué los estará poniendo así?

590.	Eliana:	Porque es su pensamiento, de que ella piensa de que así será la distancia y que…
591.	Leonor:	¿Cuál distancia? ¿Cuál distancia? (interrumpe a Eliana)
592.	Eliana:	Entre A, B, C, D, E, F, …
593.	Leonor:	No, no, la distancia solo puede ser entre dos puntos. Dime, dime una distancia ahí.
594.	Eliana:	Entre A y …
595.	Leonor:	Por ejemplo, la distancia entre A y B. ¿La puedes mostrar? Cuál sería la distancia entre A y B
596.	Eliana:	Esta y esta (Señalando los puntos A y B en la pantalla de la Tablet)
597.	Leonor:	¿Esa misma, es la misma distancia entre A y C?
598.	Laura:	(Sigue arrastrando los puntos, formando un arreglo de 3 filas y 3 columnas de puntos, como se observa en la Figura 48)  *Figura 48*
599.	Eliana:	Eeeh, es que si Laura dejara de mover los puntos.
600.	Laura:	Espérame.
601.	Eliana:	Si, tienen la misma distancia
602.	Leonor:	¿Si? ¿Seguro?
603.	Laura:	Aayyy (tiene inconvenientes con el arrastre, porque uno lo movió más de lo que quería)
604.	Eliana:	No, Ahora no. Porque como ella ya lo movió, lo movió un poco más hacia arriba.
605.	Leonor:	Has el tuyo. Has el tuyo.
606.	Laura:	(selecciona la herramienta recta)
607.	Leonor:	¿Qué estás haciendo? ¿Qué quieres hacer? ¿Un segmento o una recta?
608.	Laura:	Una recta. Pero es que es para guiarme(traza una recta diagonal a su arreglo de puntos, como se observa en la Figura 49).

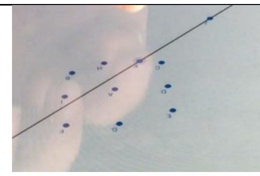
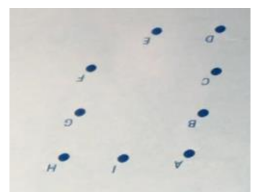
		 *Figura 49*
609.	Leonor:	¿Para qué? ¿Para guiarte a qué?
610.	Laura:	De una medida.
611.	Leonor:	Para guiarte para hacer ¿qué?
612.	Laura:	Mis medidas. Según yo.
613.	Leonor:	Laura mira lo que está haciendo Eliana (refiriéndose a la construcción realizada por Eliana en su Tablet, en la cual coloca todos los puntos en un arreglo aparentemente rectangular, que se observa en la Figura 50) ¿Estás de acuerdo o no estás de acuerdo?  *Figura 50*
614.	Laura:	Sí, estoy de acuerdo.
615.	Leonor:	¿Sí? ¿Segurísima?
616.	Laura:	A no, mentiras. Yo no, yo no estoy de acuerdo
617.	Leonor:	Explícale porque no.
618.	Laura:	Porque digamos que todo tiene que partir de A. ¿No? Entonces digamos que (de) A a I hay una distancia, pero no es igual que de A a G.
619.	Leonor:	La distancia de A a I, tiene que ser la misma que de la A a B. Tiene que ser la misma que de la A a C, tiene que ser la misma de la A a E. ¿Qué haces?
620.	Eliana:	(Arrastra los puntos nuevamente, cambiando el arreglo que tenía, de tal forma que la nueva construcción tiene apariencia circular como se observa en la Figura 51)

		 *Figura 51*
621.	Leonor:	Ayy, pero formaron figuras distintas. ¿Cuál tendrá la razón? ¿Eliana (Figura 51) o Paola (Figura 50)?… Eliana, ¿estás de acuerdo con la figura que hizo Paola ? Mira bien.
622.	Eliana:	Espera.
623.	Leonor:	Mira la tuya y mira la de tu compañera.
624.	Laura:	Sí.
625.	Leonor:	¿Sí? ¿Segurísima?
626.	Laura:	¡Aay! No, mentiras.
627.	Leonor:	¿De aquí a aquí, es lo mismo que de aquí a acá? (Comparando la distancia de A a H y la distancia de a A a B de la construcción hecha por Laura)
628.	Laura:	No, no, no.
629.	Eliana:	Yo hice algo diferente.
630.	Leonor:	¿Quién crees que tiene la razón?
631.	Laura:	(Trata de medir las distancias entre los puntos, empleando la falange de su dedo meñique)
632.	Eliana:	No lo sé, creo que entre las dos.
633.	Leonor:	Pues presenten las dos, presenten las soluciones a ver qué les dicen. [Se corta el video].
634.	Laura:	Si, ahí me quedan iguales (Tiene una nueva configuración de puntos, la cual aparentemente es circular, observar Figura 52)  *Figura 52*
635.	Eliana:	Que copiona.

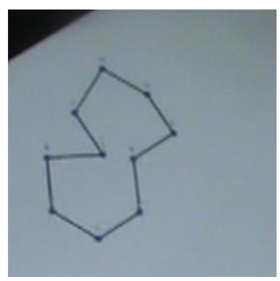
636.	Laura:	Gracias al dedo me di cuenta de algo.
637.	Leonor:	¿De qué te diste cuenta?
638.	Laura:	Digamos que yo medí de aquí a aquí (haciendo referencia a la falange del dedo meñique). Entonces yo medí…
639.	Eliana:	Que copiona.
640.	Laura:	Ayyy tú también te copiaste con el esfero. Digamos que yo medí así (Sobrepone su dedo meñique en la construcción, para verificar que las distancias son iguales) y digamos, que si yo ponía como lo tenía ahí (refiriéndose al arreglo anterior. Figura 12) las esquinas quedaban más alejadas.
641.	Leonor:	Si señora, muy bien.
El video termina. Hay otro segmento donde aparece la siguiente interacción.		
642.	Laura:	¿Octágono? No ¿hexágono? Sí, bueno, toca hacer como en forma de círculo.
643.	Leonor:	Tienes que explicar eso.
Finaliza la interacción porque el profesor pidió que suspendieran las conversaciones, con el objetivo de socializar el trabajo realizado.		

A continuación, se muestra la interacción entre Paola (estudiante) y Zaira (monitora), mientras solucionaban el Problema 2. (En la mayor parte de la grabación no está bien enfocada la Tablet, por tanto, no se puede visualizar lo que hace en la Tablet.

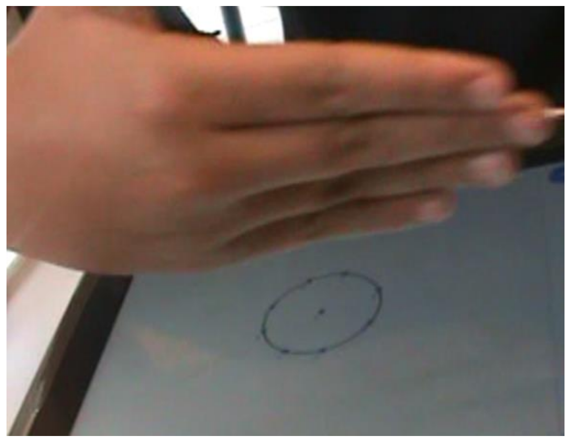
644.	Paola:	Aaah, no tengo un lápiz, necesito uno.
645.	Monitora:	¿Un lápiz? Dime cómo lo pensaste.
646.	Paola:	Estoy midiendo con esta…
647.	Monitora:	Pero, ¿eso es para la segunda actividad? Has una configuración de la que nueve de los diez puntos son equidistantes de uno de ellos, que llamamos A (Lee del tablero)
648.	Paola:	Entonces.
649.	Monitora:	Acuérdate de este para… (en el video no se evidencia que señala)
650.	Paola:	Sí, a ver espera (construye una recta y los puntos A y B sobre ella, luego mide la distancia entre los puntos)
651.	Monitora:	Mira que ahí, hay un punto que es fijo, y a partir de ese punto, encuentra varios puntos que son equidistantes. No en una línea recta, si no que de este punto fijo hay varios que tienen la misma longitud.

652.	Paola:	Aah, ¿Sí? ¿No tienen que ser en una línea recta?
653.	Monitora:	Pues, no sé. ¿Cómo lo harías?
654.	Paola:	Pues no tiene que ser una línea recta, pero es más fácil. No sé.
655.	Monitora:	Pero cómo harías para que un punto tenga la misma medida (distancia) con varios puntos a la vez y que pertenezcan a la recta. No se puede ¿Cierto? ¿o sí?

La siguiente es la interacción entre Sebastián (estudiante) y Zaira (monitora), mientras los estudiantes solucionaban el Problema 2.

656.	Monitora:	¿Cómo te llamas?
657.	Sebastián:	Samuel.
658.	Monitora:	Samuel, ¿qué hiciste?
659.	Sebastián:	Eeh, una configuración que haga…tenga… sean diez puntos…
660.	Monitora:	¿Cuál es el punto A? (interrumpe a Samuel)
661.	Sebastián:	Este, (señalando en su Tablet, uno de los vértices del polígono construido por él, Figura 53)  *Figura 53*
662.	Monitora:	¿Ese? y ¿Ese es fijo? O sea, que la distancia que hay de aquí a acá es la misma que de aquí a acá (no se pude observar a los puntos que hace referencia, porque la pantalla de la Tablet no se encuentra bien enfocada)
663.	Sebastián:	Aaah, no.
664.	Monitora:	Eso es lo que tienes que mirar, a partir de un punto fijo, hacer varias distancias que sean las mismas.
665.	Sebastián:	Aaaah.

La siguiente es la interacción entre Camilo (estudiante) y Zaira (monitora), mientras solucionan el Problema 2.

666.	Monitora:	Tú, tú ¿cómo lo estás haciendo? ¿Cómo te llamas?
667.	Camilo:	Camilo (En GeoGebra, tiene construida una circunferencia y ocho puntos sobre ella.)
668.	Monitora:	¿Camilo?
669.	Camilo:	Sí (Con la herramienta segmento quiere dibujar un diámetro de la circunferencia, pero lo suelta antes de definir el segundo extremo)
670.	Monitora:	¿tú cómo estás…?
671.	Camilo:	(Interrumpe a la monitora) Yo estoy haciendo unas rectas, a ver si con las rectas hago que todo quede alineado. (Sobre la pantalla de su Tablet, coloca sus manos… haciendo referencia a alineación) Entonces…  *Figura 54*
672.	Monitora:	¿Haces que todo queda alineado?
673.	Camilo:	Hago una…
674.	Monitora:	(interrumpe a Camilo) Pero mira que no me están pidiendo alineación, solo que estén equuidis… que equidisten.
675.	Camilo:	No, ósea líneas no. Si no que tengan la misma distancia.
676.	Monitora:	Aaah, ok, y ¿Por qué hiciste la circunferencia?
677.	Camilo:	Porque… Para que todos estén al mism… o sea para que estén a lo largo…o sea para que todos estén igual de largos al punto, a A ¿Sí?
678.	Monitora:	¿Qué tengan la misma qué?
679.	Camilo:	La misma distancia a A. Ahora voy a hacer lo segmentos.
680.	Monitora:	¿ Y para que necesitas los segmentos?

681.	Camilo:	Para que queden, ósea, que aquí halla el mismo espacio que de aquí a aquí (haciendo referencia a cualquier distancia entre dos puntos de la circunferencia).
682.	Monitora:	Mmm, ¿ y eso me lo están pidiendo?
683.	Camilo:	No, pero tienen que estar equidistantes ¿No?
684.	Monitora:	Pero mira que equidistantes de qué punto.
685.	Camilo:	Aah de A. Entonces ya está. ¡profe terminé!

La siguiente es la interacción del grupo de estudiantes conformado por Adriana, Mariana, Salome y Saida con Zaira (monitora), mientras se solucionaban el Problema 2.

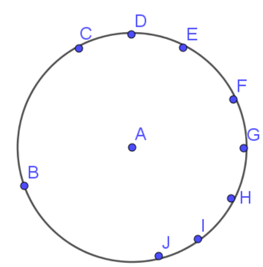
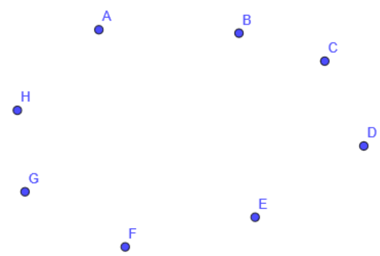
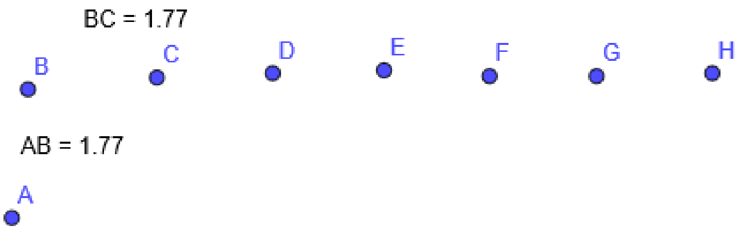
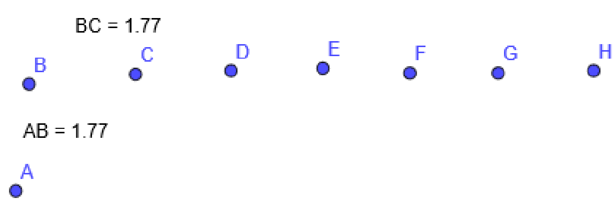
686.	Monitora:	¿Cómo hiciste, cómo hiciste estos puntos? (haciendo referencia a la construcción realizada por Adriana)  *Figura 55*
687.	Adriana:	Hice una circunferencia y pues los ordené.
688.	Monitora:	Entonces ¿Por qué, o sea por qué quedaron como hacia abajito? O sea ¿Segura? Espérame, espérame un momento. Listo, lo puedo mover y no pasa nada ¿Si? Puedo mover estos puntos (arrastra uno de los puntos fuera de la circunferencia) ¡Ah, no! Entonces, ¿cómo, cómo hiciste esos puntos, sin la circunferencia?
689.	Adriana:	Solo los cree, los…
690.	Saida:	O sea, hizo la circunferencia y ahorita hizo los puntos.
691.	Adriana:	Sí, eso hice. Porque tienen la misma distancia
692.	Monitora:	Aaah, ok, ya. Si no que por… aah ya. Y ¿Cómo haces para que cuando yo mueva los puntos, no se muevan de esa circunferencia y tenga la misma medida? Porque mira que ahí, yo puedo mover este punto, y no se cumple (señalando uno de los puntos que se encuentran sobre la circunferencia)
693.	Adriana:	No, pues yo no sé.
694.	Monitora:	Alguna, alguna hizo algo diferente ¿No? ¿qué es eso? (Preguntándole a la estudiante 3 por la construcción realizada)

		 *Figura 56*
695.	Mariana:	Es que tienen que ser equivalentes, menos el A. Entonces hice una recta y el A.
696.	Monitora	¿Segura que eso es lo que dice el enunciado? ¿Alguna no entiende algo, algo que dice el enunciado y que no…? Mira que ahí dice, diez de esos nueve puntos, o sea la que sobra es esta parte, son equidistantes de quien, del punto A. No están diciendo que los puntos son equidistantes excepto A, sino que todos los puntos son equidistan de A. ¿Y tú cómo lo hiciste (preguntándole a la Saida)?
697.	Saida:	Pues… es que lo iba a organizar porque no sé, si están equidistantes o no.  *Figura 57*
698.	Monitora:	¿tú cómo te llamas? (pregunta a Adriana)
699.	Adriana:	Adriana.
700.	Monitora:	Adriana. Y ¿tú?
701.	María José:	María José.
702.	Monitora:	María José ¿Y?
703.	Saida:	Saida .
704.	Monitora:	¿y?
705.	Salome:	Salome.

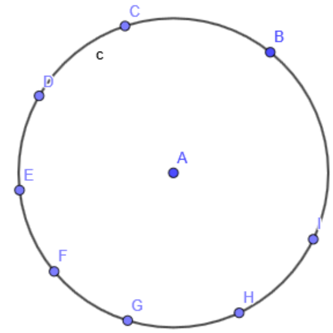
El profesor comienza la discusión de las soluciones que dieron los estudiantes al Problema 2.

706.	Profesor:	¿Quién quisiera comentarnos qué hizo? Bueno silencio. ¿A ver Pablo qué hiciste?
707.	Pablo:	Poner la cuadrícula.
708.	Profesor:	¿y por qué la cuadrícula?
709.	Pablo:	Pues para que quede recto.
710.	Profesor:	Pues Pablo si tú quieres ponerlo recto pues no hay necesidad de cuadrícula ¿Qué hago?
711.	Eliana y Laura:	(Alzan la mano) ¡Yo!
712.	Profesor:	Pablo me dice que tiene que poner la cuadrícula ¿habrá necesidad de poner la cuadrícula?
713.	Pablo:	Ya, ya la quite.
714.	Profesor:	Bueno es que no nos están escuchando. Cierren por un momento las tablets. Porque eso los desconcentra. A ver cierren tablets (pasa por todas las mesas asegurándose que todos cierren su Tablet) ¿A ver qué hiciste? ¿?que estás haciendo?
715.	Pablo:	Ya terminé.
716.	Profesor:	¿Qué terminaste?
717.	Pablo:	Pues es que estoy cumpliendo esas condiciones.
718.	Profesor:	¿Qué hiciste?
719.	Pablo:	Poner los puntos y ya … y poner el A en la parte de abajo y … para que … (lee del tablero) el A no es equidistante de los demás.  *Figura 58*
720.	Profesor:	¿Qué piensan ustedes? Miren su compañero acaba de hacer lo siguiente en el tablero y le vamos a prestar atención. Ahora que pena contigo, pero es que varios no te habían prestado atención (refiriéndose a Pablo). ¿Puedes volver a repetir lo dijiste?
721.	Pablo:	¡ay no!
722.	Profesor:	¡ay sí!

723.	Pablo:	Es que ya no me acuerdo.
724.	Profesor:	¿Pero pues por qué hiciste eso?
725.	Pablo:	Es que estoy cumpliendo con esas condiciones (señala el tablero) y me dijiste que estaba bien.
726.	Profesor:	Yo no dije nunca que estaba bien (sonríe).
727.	Varios:	(risas).
728.	Profesor:	Eso es como tú lo solucionaste. ¿Qué piensan de lo que plantea su compañero, cumple con las condiciones con lo que él dice ?
729.	Adriana:	(Alza la mano) No.
730.	Profesor:	Qué dice Adriana.
731.	Adriana:	No porque B no es equidistante a A y entonces debería tener la misma distancia.
732.	Camilo:	Y no pasa eso chico.
733.	Pablo :	Pero tiene la misma distancia.
734.	Adriana:	No, de A a J no es la misma que de A a B.
735.	Profesor:	Tú dices que no tiene la misma distancia de A a J que …
736.	Adriana:	De A a J que de A a B.
737.	Profesor:	¿si te convence eso o no?
738.	Pablo :	No.
739.	Eliana y Laura:	(Alzan la mano) ¡Yo!
740.	Profesor:	Sí, sí ya (refiriéndose a Laura y a Eliana) Mira Pablo, ¿es la misma distancia de A a B que de A a C?
741.	Saida, Eliana, Carolina y José	No.
742.	Profesor:	¿Qué dices? ¿sí? Hay una opción que se llama medida, esta (señala en el TV la herramienta Distancia o Longitud).
743.	Laura:	Profe yo ya sé.
744.	Profesor:	Listo ustedes van de segundas.
745.	Laura;	¡Sí!

746.	Pablo:	(mide la distancia entre los puntos A y B).
747.	Profesor:	Mide ahora de aquí acá (señala los puntos y C) ¿da lo mismo?
748.	Pablo:	¡Oooh bum!  *Figura 59*
749.	Profesor:	¿Da lo mismo? ¿Da uno? No espera. (se acerca y observa la Tablet de Pablo) ¿Cuáles mediste?
750.	Laura:	Profe nosotras.
751.	Profesor:	Sí, ya van ustedes.
752.	Profesor:	(manipula los puntos B y C) Es que Pablo midió de aquí acá y de aquí a acá (señala los puntos A, B y C)
753.	Pablo:	Claro.
754.	Profesor:	¿Pero cuál es la medida?
755.	Samuel A:	Es que tú corriste el B para acá.
756.	Pablo:	Sí, tú lo mediste para que me quedara mal .
757.	Profesor:	(Se ríe) pero yo quiero que ... es que se me corrió, cuádralo.
758.	Tomas:	(Arrastra los puntos B y C hasta obtener una configuración parecida a la que había propuesto anteriormente)
759.		Quiero que miren o a simple vista, ¿será la misma distancia de A B que de A a D?  Figura 60

760.	Varios:	¡Nooo!
761.	Profesor:	Entonces ahí se daña. Bueno cuéntenos ustedes (refiriéndose a Eliana y a Laura).
762.	Laura:	¿La Tablet?
763.	Profesor:	(Le da la Tablet a Laura) Listo, este grupo nos va a decir que hicieron. Y ustedes van a reaccionar. Chist (pidiendo silencio).
764.	Eliana:	¿Puedo utilizar el tablero ?
765.	Profesor:	Bueno hágale a ver. Ella quiere usar el tablero, vamos a ver. Chist (pidiendo silencio). Presten atención.
766.	Eliana:	Bueno…
767.	Profesor:	Eliana, espérate que hay algunos que están hablando mucho … listo.
768.	Eliana:	(Dibuja en el tablero) Que este era un punto A, empecé a medir con el dedito (muestra su dedo meñique) lo coloque encima de la Tablet y empecé a hacerle así (coloca su dedo cerca al punto A) y entre eso más o menos me daba la medida.
769.	Profesor:	¿Sí?
770.	Eliana:	Sí señor.
771.	Profesor:	Bueno pero cuéntanos Paola (Laura), ¿qué estás haciendo?
772.	Laura:	Espera, Eliana ven. Bueno escuchen..
773.	Leonor:	No se oye.
774.	Profesor:	Espera que no se alcanza a escuchar. Ustedes alcanzan a escuchar (pregunta las mesas de atrás)
775.	Clara:	No.
776.	Laura:	Bueno profe, nosotras lo que hicimos fue la forma de un círculo porque no necesariamente se tiene que alinear porque tiene que tener la misma medida desde A. De AG tiene que tener la misma medida que de AE o sea… (sonríe).
777.	Profesor:	¿Y eso es cierto siempre?
778.	Camilo:	¿Profe yo puedo decir algo?
779.	Profesor:	Sí, claro díganos. Pero teniendo en cuenta esta idea.
780.	Camilo:	Yo cogí y le di circunferencia y se hizo un círculo y ya.
781.	Profesor:	Hágale a ver allá (refiriéndose a que construya su idea en la Tablet).

782.	Camilo:	(Realiza la siguiente representación en la Tablet)  *Figura 61*
783.	Profesor:	Miren lo que está haciendo su compañero. ¿Por qué haces eso, cuéntanos?
784.	Camilo:	Hay ya está bien, si lo hago porque…
785.	Carlos:	No, está mal.
786.	Profesor:	¿Por qué?
787.	Carlos:	Esta mal.
788.	Profesor:	Ahorita vas a decir por qué está mal. Pero escuchamos. Chist (pidiendo silencio).
789.	Camilo:	A ver yo lo hago así porque, primero que todo de A … o sea tiene que estar ali… como se llama esta palabra…
790.	Carlos:	Alineado.
791.	Camilo:	No o sea…
792.	Carlos:	Equidistante.
793.	Camilo:	Equidistante con A y no importa que yo los tenga un poco pegados sí, porque van a estar a la misma medida de A, así que…
794.	Profesor:	Voy a preguntar acerca de lo que dice su compañero que es un aporte valiosísimo, me imagino que le están prestando atención, ¿cierto?
795.	Camilo:	Entonces no importa si yo tengo, lo tengo así (arrastra los puntos de la circunferencia), porque igual siguen estando todos los puntos a la misma medida de A.
796.	Profesor:	¿O sea de que nos sirve para hacer la circunferencia?
797.	Pedro:	Para el radio.
798.	Profesor:	¿Y el radio siempre va ser qué?

799.	Paola:	El radio es la medi… bueno la distancia entre el extremo y el centro del circulo (dibuja en el aire una circunferencia y su centro) y siempre va a ser la misma.
800.	Profesor:	¿O sea que cuando hacemos este ejercicio qué objeto geométrico de una vez sale?
801.	Andrés, Ricardo y Saida:	La circunferencia.
802.	Profesor:	¿Cual?
803.	Andrés:	La circunferencia.
804.	Profesor:	¿La circunferencia? ¿Todos de acuerdo?
805.	Sebastián:	Sí.
806.	Profesor:	¿Alguien tenía de pronto otro tipo de construcción aparte de esta?
807.	Carlos, Mariana y Adriana:	No.
808.	Profesor:	Yo vi que había otros que estaban haciendo la que estaba haciendo Pablo. Entonces vamos a terminar la clase definiendo ese objeto geométrico, que nos va a servir para… ¿oiga para qué nos va a servir la circunferencia?
809.	Adriana:	Para tomar la misma medida.
810.	Profesor:	A ver escuchamos, ¿para qué?
811.	Adriana:	Para saber que tiene la misma medida.
812.	Profesor:	¿Si? ¿todos de acuerdo?
813.	Saida:	La misma distancia.
814.	Adriana:	Sí.
815.	Profesor:	La misma distancia. La circunferencia nos va a servir ahorita muchísimo para eso. ¿Qué ibas a decir algo José?
816.	José:	No, no, no.
817.	Profesor:	Vamos a escribir la definición y con esta nos vamos para la otra clase. (copia en el tablero) *Def circunferencia: Una circunferencia con centro en C es el conjunto de puntos en el plano que equidistan de C.*

ANEXO 3. TRANSCRIPCIÓN DE LA CLASE DE MAYO 24 DE 2018

La siguiente es la transcripción realizada de la clase de geometría de mayo 24 del curso 604 del colegio Instituto Pedagógico Nacional. El aula donde se hizo la clase se conoce como SmarthSchool. Cuenta con tablets para cada estudiante, ocho mesas en los niños se pueden sentar por grupos de cuatro personas, una pantalla en la que es posible proyectar lo trabajado en una de las Tablet y un tablero. Por la disposición del salón, unos pocos estudiantes dan la espalda al tablero o a la pantalla. Casi no hay ruido externo, condición que favoreció la toma de registros.

La clase se desarrolló en tres momentos. En el primer momento se hizo un repaso de la construcción realizada la clase anterior, que consistía en determinar la figura formada por varios puntos equidistantes a un único punto, con base en una socialización. Los estudiantes indicaron que la figura era una circunferencia. En el segundo momento, el docente pidió a los estudiantes, a partir de una socialización, que dieran la definición de triángulo isósceles y la escribió en el tablero. Luego él planteó la tarea de hacer la construcción de un triángulo isósceles con el software GeoGebra y escribir los pasos de la construcción; les indicó que él pasaría por los grupos, arrastrando elementos del triángulo para verificar que este siempre fuera isósceles. Luego de dar un tiempo para que los estudiantes exploraran y cumplieran la tarea, el profesor hizo una socialización de los procedimientos. La mayoría de los estudiantes usó la circunferencia como construcción auxiliar, para establecer la equidistancia de dos vértices a otro. En el tercer momento los estudiantes debían construir un triángulo equilátero. De la misma manera que en la actividad anterior, el profesor repasa la definición de triángulo equilátero y propone construirlo con el software GeoGebra. Los estudiantes debían tener en cuenta que el triángulo siempre fuera equilátero, a pesar del arrastre. Luego el profesor dio un espacio para que los estudiantes en los grupos establecidos exploraran. Por cuestiones de tiempo, no se logró socializar la actividad.

1.	Profesor:	(El docente da inicio a la clase con un repaso de una construcción realizada la clase anterior.) Bueno. Eeeh, necesito que José nos cuente qué fue lo que hicimos la clase pasada. Listo. Tú por favor (señalando a José), cuéntanos qué fue lo que hicimos. Todos le prestamos atención ¿Listo? (Se dirige al grupo). Miramos a José si es posible. (Se dirige a José) ¿Qué fue lo que hicimos?, ¿qué te acuerdas que hicimos?
2.	José:	Nada.
3.	Varios:	(Risas).
4.	Profesor:	¿Señor?
5.	José:	Nada.
6.	Profesor:	¿Nada hicimos?
7.	José:	No, no me acuerdo de nada.
8.	Profesor:	¿De nada?, ¿ni un poquito?

9.	Camilo y Andrés:	(Levantan la mano)
10.	Diego:	Hicimos una equidistancia y una colineadad.
11.	Profesor:	(Se dirige a Diego) Espérate, espérate que no te están escuchando ¿qué? (Se dirige al grupo). Shhhh, a ver. (Se dirige a Camilo). Pero espérate que José nos quiere compartir y luego vas tú ¿Listo? (Se dirige al grupo). A ver shhhh.
12.	Diego:	Copiamos la definición de equidistancia y de ¿colineadad? ¡Colinealidad!
13.	Profesor:	¡Ah! Bueno. ¿Quién me podría recordar que es eso de colinealidad? Sin mirar el cuaderno, Así, a ver ¿qué es?
14.	Samuel y José:	(Levantan la mano)
15.	Sebastián:	Alineados perfectamente.
16.	Profesor:	¿Quiénes?
17.	Samuel:	Los puntos en un segmento. (Mueve horizontalmente la mano de adelante hacia atrás).
18.	Adriana, José y Paola	(Levantan la mano).
19.	Adriana:	(Habla al levantar la mano) Dos [posiblemente refiriéndose a los puntos extremos de un segmento].
20.	Profesor:	En orden, en orden. A ver, Paola y luego Adriana, pero todos tenemos que escuchar ¿Listo? (Se dirige a los estudiantes que están a su izquierda) ¿Por acá me colaboran?
21.	Paola:	Dos o más puntos son colineales, si pertenecen a la misma recta.
22.	Profesor:	Y, ¿qué piensas con lo que dijo Samuel? ¿Si estaría acorde con lo que tu acabas de decir? ¿Tiene concordancia o le faltaba algo?
23.	Paola:	¿De qué están alineados?
24.	Profesor:	Sí, es que él dijo algo (señala a Sebastián) ¿Cuál fue lo que tú dijiste para que los demás lo escuchen?
25.	Sebastián:	Que están alineados perfectamente. Un segmento está alineado con unos puntos.
26.	Profesor:	¿Qué piensan de eso que dijo?
27.	Sebastián:	¡Una recta! ¡Una recta!
28.	Profesor:	¿Señor?, ¿José? Shhhh. Pero habla un poquito fuerte y los demás silencio por fa.
29.	Diego:	Que los puntos están a la misma distancia de cada uno de ellos (habla en un tono bajo).
30.	Profesor:	¿Eso qué quiere decir?
31.	Camilo:	(Levanta la mano y participa sin que le hayan dado la palabra) Que todos los puntos están a la misma distancia de si (…)
32.	Profesor:	Sí, pero, eh, cuando están a la misma distancia. ¿Estamos hablando de colinealidad o de la otra?
33.	Andrés:	Equidistancia.

34.	Ricardo:	Colinealidad.
35.	Profesor:	(Se dirige a José) Pero la que tú me dices ¿es colinealidad?
36.	José:	¿Sí?
37.	Profesor:	No (…) ¿dices sí o no?
38.	José:	(Mueve la cabeza hacia arriba y hacia abajo) Sí.
39.	Profesor:	¿Qué piensan de eso? Saida, ¿si piensas qué eso es correcto?
40.	Sebastián:	Sí.
41.	Saida:	No porque (…) estamos hablando de (…) equi (…)
42.	Varios:	¡Aaah! [en un todo de desesperación].
43.	Profesor :	A ver. No, no, respeten a ver, escuchemos a la compañera. (Se dirige a la mesa de Pablo quienes no están prestando atención a las intervenciones) ¿Qué hacen ustedes?
44.	Pablo:	Jugar (guarda el celular).
45.	Profesor:	(Se dirige a Saida) ¿Señora?
46.	Saida:	(Niega con la cabeza).
47.	Profesor:	Hay algunos que no están prestando atención a sus compañeros y así no podemos. Grave, grave, ¡Pilas con eso! Estamos hablando de colinealidad que fue uno de los ejercicios que hicimos. Entonces Paola por acá nos decía que era: Tres o más puntos son colineales si …
48.	Paola:	Pertenecían a la misma recta.
49.	Profesor:	Pertenecían a la misma recta. No hablamos de segmentos ¿Cierto? y habíamos dado un ejemplo. ¡Samuel! Y en la otra de (…) ¿Listo? ¿Cuál era la otra [definición] Pablo?
50.	Tomas:	¿Cuál no? (...) ¿Qué?
51.	Profesor:	¿Cuál era la otra [definición] que estábamos haciendo la clase pasada?
52.	Carlos:	(Murmura algo a Pablo).
53.	Tomas:	¡Ah! (Saca el cuaderno).
54.	Profesor:	Equidistancia ¿Qué era eso de equidistancia? ¿Quién nos quiere comenta? Samanta, por ejemplo. (Saca la lista de notas).
55.	Samanta:	¿Yo?
56.	Camilo:	(Sin solicitar la palabra) Que, que (…) Tiene la misma distancia.
57.	Profesor:	¡Salome! (Mira a Camilo).
58.	Sebastián:	¡Ay, ya, cállese!
59.	Camilo:	Profe, profe (…)
60.	Profesor:	Vamos a esperar que [Camilo] se calme (…) ¿Por favor?
61.	Varios:	(Risas y murmullos)
62.	Profesor:	A ver, Shhh. Samanta, nos va a hablar y todos le vamos a prestar atención. (Se dirige al grupo de Juan) ¿Ustedes que hacen?
63.	Samanta:	Que habían puntos (…) o sea (…) tienen que estar como a la misma distancia.
64.	Profesor:	(Mira al grupo de Pablo) ¿Qué dicen ustedes?
65.	Pablo:	(Lee). Dos o más parejas de puntos son equidistantes (…)

66.	Profesor:	Pero sin mirar el cuaderno. La idea era sin mirar el cuaderno. ¡Que nos contaran! Entonces (…), Samanta que no miró el cuaderno nos dijo algo. (Se dirige a Tomas) ¿y tú si escuchaste qué fue lo que dijo?
67.	Pablo:	Sí (…) ¿Qué? (Tono de duda).
68.	Profesor:	¿Qué fue lo que dijo?
69.	Pablo:	Que tenían que tener la misma distancia.
70.	Profesor:	¿Y qué dicen los demás, de acuerdo o no?
71.	Varios:	Sí.
72.	Profesor:	Y (…) eh, hicimos un último ejercicio, y ¿qué vimos ahí en ese ejercicio?
73.	Andrés:	(Interviene sin solicitar la palabra) Eh, que (…)
74.	Profesor:	¿Qué era?
75.	Andrés:	(Levanta la mano mientas responde). El ejercicio se trataba de que teníamos que trazar desde el punto A (dibuja con un dedo dos puntos en el aire) una serie de equidistantes puntos (…) nueve puntos más (señala al aire más puntos).
76.	Profesor:	Y ¿qué hablábamos de eso?, ¿qué nos daba o porqué hacíamos ese ejercicio?
77.	Andrés:	Pues porque el resultado nos debe dar una circunferencia (señala dos puntos al aire). Porque (…) desde la circunferencia se tiene la misma distancia. (Con el dedo señala un punto a aire [el centro] y a partir de este dibuja en el aire algunos radios de la circunferencia)
78.	Profesor:	Eso es cierto, ¿Juan?
79.	Camilo:	(Habla sin que le den la palabra) Sí, si es cierto porque yo lo hice.
80.	Profesor:	Espera, espera. (Hace un gesto a Camilo, para que deje hablar a Juan).
81.	Juan:	(Pregunta a un compañero en un tono bajo).
82.	Profesor:	No, pero (...) ¿entonces qué hacemos? Si (…) si (…) eh (…) shhh.
83.	Pablo:	Es que estamos como dormidos profe.
84.	Profesor:	No, no, no, no. Entonces hay que despertarse porque miren (…) una cosa es (…) miren yo no (…) ¡necesito que escuchen las intervenciones de sus compañeros! Para que digan si están de acuerdo o no, porque entonces (…) Juan ¿qué pasó ahí?, me podrías volver a decir y quiero (…) sí, porque les estoy preguntando a todos, no es que usted vaya y le pregunte y yo lo tenga que anotar en acá (señala la lista de notas). ¡Pilas! Pendiente de lo que va a decir tu compañero y vas a reaccionar si estás de acuerdo o no ¿Listo? Shhh. (Se dirige a Andrés).
85.	Andrés:	Que al final es (…) (Describe una circunferencia con sus manos).
86.	Profesor:	Shhh.
87.	Andrés:	Que al final al resultado de la actividad teníamos que hacer una circunferencia, y pues, desde el punto A poníamos los demás (…) los nueve puntos más. Y pues, ahí se tenía la misma distancia (Señala un punto al aire con el dedo de la mano izquierda [como si fuera el centro de la circunferencia] y con la mano derecha dibuja una circunferencia alrededor de este punto).
88.	Sebastián:	¿Cierto Juan?
89.	Profesor:	¿Eso fue los que hicimos?
90.	Juan:	Mmmm (Se ríe).

91.	Profesor:	¿O qué fue lo que hicimos?
92.	Camilo:	¡Ah! Sí, eso hicimos.
93.	Profesor:	Shhh (Se dirige a Juan) ¿Señor? Pero por acá hacen mucho ruido. Shhh (dirige su mirada a algunos los grupos).
94.	Juan:	Sí.
95.	Carlos:	(Se dirige a Juan) ¿Y porque sí?
96.	Alán:	Porque pues así, eso (…) o sea, eso fue lo que tú nos dijiste que hiciéramos.
97.	Profesor:	¿Yo te dije que hiciéramos (…)?
98.	Juan:	Pues o sea (…) primero nos dijiste que hiciéramos una línea (…).
99.	Profesor:	Shhh, que no me dejan escuchar y, no sé, (…) (Señala un extremo del salón) niñas si ustedes alcanzan a escuchar a su compañero, entonces si por alguna razón (…), eh (…) no llegan a escuchar a su compañero, pues por favor pidan que hable un poquito más fuerte. No sé si Laura alcanzas a escuchar. Hay que escucharnos todos (…). Bueno continúa. ¿Qué era lo que estábamos haciendo entonces?
100.	Juan:	Tú nos dijiste que hiciéramos una línea con nueve punticos o sea (…) (hace una línea al aire con el dedo).
101.	Pedro:	(Interrumpe a Juan) Equidistante. Una línea equidistante con nueve punticos
102.	Paula:	O sea, tú nos dijiste que hiciéramos una línea que entre la separación de los puntos este iguales, o sea que no haya un punto más cerca del otro y sin ninguna ayuda.
103.	Profesor:	Eh, sí. Lo que pasa es que se fueron al otro problema, ese lo habíamos hecho para (…). Esperen un momento que hay unos niños que no dejan continuar. (Mira algunos estudiantes y se refiere a ellos para llamar su atención). Sebastián. Los que están dibujando, ahorita no deberían está dibujando, José. Lo mismo acá, Francisco (dirigiéndose a estos niños). Así no pueden estar pendientes a los comentarios de sus compañeros. (…) ¿Ya? Listo, pero es que acá Andrés había dicho algo que habíamos hecho y ninguno me está diciendo (…)
104.	Camilo:	(Levanta la mano).
105.	Profesor:	De los que le he preguntado si está de acuerdo o no. ¡Ah! Porque ya había otro problema que era el que estábamos discutiendo que era: dado un punto ¿cierto? Que había nueve que equidistaban de él (traza una circunferencia con la mano) ¿Qué habíamos encontrado? ¿Te acuerdas Paula?
106.	Paula:	Eh (…) sí espérame vuelvo a la está (…) vuelvo a (…) pues yo me acuerdo que tú nos dijiste, nos mandaste a hacer una figura que empiece en A y termine en A ¿no?
107.	Profesor:	¿Están de acuerdo que ese era el problema?
108.	Paula:	¡Que pase por todos los puntos!
109.	Profesor:	Están como que mezclando las clases. (Da la palabra a Camilo) Cuéntanos tú qué era.
110.	Camilo:	Pues lo que yo hice fue, que cogí una circunferencia, porque había una opción que era un circulito (traza una circunferencia en la mesa con su dedo), hice el círculo y todos tienen que estar equidistantes a A ¿sí?, pero no equidistante entre ellos, solo entre A. Entonces yo podía poner todos pegados en el círculo y estar a la misma distancia de A.

111.	Profesor:	Pero mi pregunta es (…). (Señala el grupo de Paola) acá les voy a preguntar a estas niñas, y pilas porque allá pregunto de lo que dice Laura, así que estén pendientes. (Mira a Laura) entonces, shhh, entonces ustedes tenían que hacer una circunferencia y mirar los puntos ¿o qué tenían que hacer? ¿Ese era el problema?
112.	Laura:	No.
113.	Sebastián:	No profe.
114.	Profesor:	(Se dirige a Pablo) Puedes guardar el celular y prestar atención.
115.	Laura:	Pues el problema, si es que me acuerdo.
116.	Profesor:	Puedes hablar un poquito más fuerte
117.	Laura:	Pues el problema no era que teníamos que hacer una figura, si no hallar la manera en que A fuera como un punto que (…) Ay es que no sé cómo.
118.	Profesor:	Dale
119.	Laura:	Es que no sé, no estoy como segura. Digamos, en teoría yo hice lo siguiente, yo dije que todos los puntos tenían que estar de A en la misma recta a la misma…
120.	Eliana:	(interrumpe a Laura) De la medida.
121.	Laura:	Sí, distancia. Sí o sea que (…).
122.	Profesor:	(Mira al grupo de Paula) Pero, espérame un momento que ustedes alcanzan a escuchar allá a Laura.
123.	Varios:	No.
124.	Profesor:	Laura un poquito más fuerte. Shhh, miren, no es que Laura se dirija solo a mí, todos tienen que escucharla porque recuerden que estoy haciendo preguntas. ¿Bueno? Shhh, a ver.
125.	Laura:	Es que estoy como enferma de la voz.
126.	Profesor:	Entonces Eliana, colabórale a Laura.
127.	Laura:	¡Yo profe! yo le digo pero que ella (Eliana) me colabore.
128.	Eliana y Laura	(susurran).
129.	Profesor:	A ver rápidamente.
130.	Eliana:	El problema era que A (…) ah ¿Qué? (mira a Laura dubitativamente y Laura le susurra).
131.	Profesor:	Dale.
132.	Eliana:	(Se expresa con tono duda) Tenían que partir del punto de A.
133.	Profesor:	Bueno, no escuches a Laura, sino que cuéntanos lo que hicieron porque ustedes trabajaron juntas. (Se dirige al grupo de Paula) Por acá ustedes también trabajaron juntos, ¿cierto? (Se dirige a Eliana) A ver cuéntanos, yo tengo que escuchar de acá. Todos acá tienen se escuchar. ¡Listo!
134.	Eliana:	Que el problema era de que, el punto A y los demás puntos tenían que tener la misma distancia. Nosotros lo que hicimos fue que todos. (…).
135.	Profesor:	(Pregunta con tono de no estar oyendo) Que ¿qué?
136.	Eliana:	Estuvieran (…) o sea nosotros lo que hicimos fue imponer a A en el centro de una circunferencia (mira a Laura y ella le susurra).
137.	Profesor:	Pero, ¿ese era el problema?

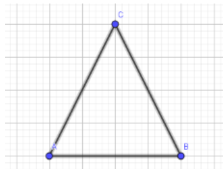
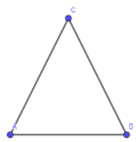
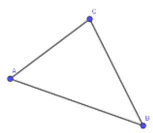
138.	Camilo y Paola	(Levantan la mano)
139.	Paola:	No.
140.	Profesor:	A ver ¿cuál? (Da la palabra a Paola)
141.	Paola:	(Paola levanta la mano y habla) El problema era poner como diez puntos que tuvieran la misma distancia entre A. No entre ellos sino solamente con A, entonces lo que ellas hicieron y la solución fue poner una circunferencia, porque (…) ¿radios es se llama?
142.	Profesor:	¿Si?
143.	Paola:	Del centro al extremo siempre van a ser de la misma medida, de cualquier punto de afuera hasta el centro.
144.	Profesor:	¿Qué dice Tomas, está de acuerdo?
145.		(Pablo asiente con la cabeza, con duda).
146.	Profesor:	No presentaste atención a tú compañera y de pronto (…), eh si Carlos sí prestó atención. (anota algo en algo en su lista de notas).
147.	Carlos:	Sí profe, es que se puede empezar desde cualquier punto..
148.	Profesor:	No sé qué quieres de (…) no sé lo que los demás piensan. ¿Sí era el problema?
149.	Varios:	Sí.
150.	Profesor:	O sea que vimos (…) vimos que esos puntos (…), cierto, voy a mirar acá. (Escribe en el tablero varios puntos que determinan una circunferencia) esos puntos que estaban por acá, que ustedes llegaban y dibujaban ¿formaban qué? ¿Qué objetos veían ustedes ahí?
151.	Varios:	¡Una circunferencia! (Unos pocos estudiantes dicen) ¡un circulo!
152.	Profesor:	Y la circunferencia, ¿es útil para qué?
153.	Camilo:	Para que tuvieran la misma distancia de A todos los puntos. Ese era el problema.
154.	Profesor:	Entonces esa y por ahí anotamos al finalizar la definición que ustedes tienen ahí.
155.	Camilo :	¡Lo dije ahorita profe!
156.	Profesor:	Pero es que la idea era que lleguemos a una discusión entre todos, no que aceptáramos.
157.		(cierra el tema y da inicio a la primera actividad del día).
158.		Hoy vamos a hacer un problema y es que (…), de esos polígonos que ustedes alcanzaron a (…) se acuerdan que la clase pasada yo a ustedes les había dicho como que, eh, que íbamos a hacer un paréntesis para estudiar esa forma de (…), de estudiar esos puntos equidistantes que nos iba a servir para algo. El primer polinomio que habíamos estudiado cuál era. ¿Cuál era el polinomio que tenía (…)?
159.	Paola:	Profe ¿qué es un polinomio?
160.	Profesor:	Eh que pena, ¡el polígono!
161.	Varios:	Risas.
162.	Profesor:	Me equivoque, gracias. El polígono que tiene menos lados ¿Cuál es?
163.	Andrés:	El triángulo.

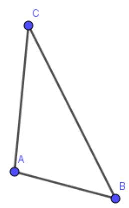
164.	Profesor:	El triángulo ¿cierto? Entonces hoy vamos a hacer con la Tablet en GeoGebra la construcción de dos triángulos, en particular uno de ellos quiero que (…) Eh, shhh, Samuel. Quiero que recordemos de qué se trataba el siguiente (…) A ver si yo digo triángulo isósceles ¿ustedes que se acuerdan?
165.	Andrés:	Que es el que tiene dos lados de la misma distancia, uno que no ¿más largo?
166.	Profesor:	(Se dirige al grupo) ¿Qué dicen ustedes, están de acuerdo? (Señala a Vanesa) ¿Qué dice allá Vanesa?
167.	Varios:	Murmullos
168.	Profesor:	(Se dirige al grupo) Shhh, miren es que no se escucha. (Mira a Vanesa) ¿Si estás de acuerdo con él, si es la definición?
169.	Vanesa:	(Responde con gesto de duda) Sí señor.
170.	Profesor:	¿Cuál es la definición?
171.	Vanesa:	No, no sé.
172.	Profesor:	Ah, no están prestando atención a sus compañeros.
173.	Carlos :	(Interviene sin solicitar la palabra) Que tiene dos lados iguales y uno mal.
174.	Juan:	¿Mal?
175.	Profesor:	¿Y uno mal? ¿Eso dice? O sea, anoto acá la definición (señala el tablero), dos lados iguales y uno mal. A ver necesito copiar una definición y Saida me la va a decir, a ver díganme, voy a copiar allá (en el tablero), a ver. Triángulo (…).
176.	Carlos:	Isóscelas.
177.	Andrés:	¡Isósceles!
178.	Carlos:	¡Eso!
179.	Andrés:	¿Eso hay que copiarlo en el cuaderno?
180.	Profesor:	Sí señor. Listo, a ver Saida. Shhh.
181.	Saida:	Hay no profe.
182.	Profesor:	Sí una idea. Shhhh. Voy a escribir acá, (Escribe en el tablero “un triángulo es isósceles si (…)).
183.	Juan:	Hay no profe fue lo que yo dije.
184.	Camilo:	Profe pero para que volvemos a copiar lo mismo.
185.	Varios:	Si profe.
186.	Profesor:	si (…) ¿qué pasa, me pueden decir?
187.	Camilo:	Pues que es aburrido volver a copiar lo mismo.
188.	Profesor:	Bueno yo voy a mirar aquí a ver que me da y ustedes me dicen si están de acuerdo o no ¿listo? (Se dirige al grupo de Laura) Allá estas nenas Shhh. A ver un triángulo es isósceles si tiene (…) shhhh José. (Copia en el tablero) Dos lados (…)
189.	Carlos:	(Interrumpe al profesor) Iguales.
190.	Andrés:	De la misma distancia.
191.	Profesor:	(Señala el grupo de José) Por acá me dicen, de la misma distancia. (Se refiere el grupo de Vanesa) Por acá me dicen, iguales.

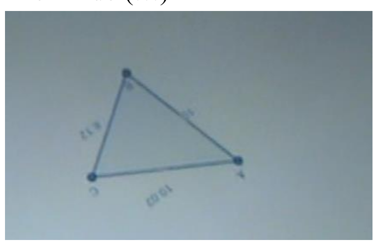
192.	Carlos:	Iguales no, de la misma distancia.
193.	Paula:	(Interrumpe a Carlos) De la misma longitud.
194.	Profesor:	¿Sí? ¿O era de la misma longitud?
195.	Carlos:	Sí, de los mismo centímetros cúbicos cuadrados.
196.	Profesor:	¿Cubitos? ¿Y por qué cubitos? ¿Cuadrados?
197.	Pablo:	¿Qué es cúbicos?
198.	Profesor:	(Se dirige a Carlos) No sé, ustedes me están diciendo.
199.	Varios:	Murmullos
200.	Profesor:	(Termina de copiar la definición) Bien con esa definición. Shhhh, eh, acá. Con esa definición vamos a hacer el siguiente problema. Entonces ahorita va un integrante de cada grupo, shhhh. Si quieren vayan de una vez para que saquen las Tablet.
201.		(Se da un momento para sacar las Tablet)
202.	Profesor:	Eh, shhh, aquí (en el tablero) tenemos un triángulo especial. Acá lo discutimos, muchos de ustedes nos dieron esta definición. Tratamos de llegar como un consenso, entonces dice, un triángulo es isósceles si tiene dos lados de la misma longitud. Entonces ustedes ahora lo que van a hacer en GeoGebra es construir un triángulo que sea isósceles y pilas porque cuando (…) acuérdense de una herramienta muy importante en GeoGebra, ¿cuál es esa que parece como un clic?
203.	Sebastián:	¡Elige y mueve!
204.	Profesor:	Elige y mueve. Cuando yo llegue y usted me muestre su construcción, primero chárlela con su compañero a ver qué van a construir. Cuando yo llegue a arrastrarla, mejor dicho esos tienen que ser siempre isósceles ¿listo?, entonces a trabajar.
205.	Varios:	Murmullos
206.	Profesor:	A bueno además de que usted haga la construcción, nos va a escribir en su cuaderno el procedimiento de la construcción y porqué ese triángulo es isósceles siempre, así.
207.	Andrés:	¿Y por qué (…) qué?
208.	Profesor:	(Se dirige a Andrés) Mira acá, voy a volver a leer el problema que hay algunos distraídos, a ver ¡Shhh!
209.	Pedro:	Profe, ¿tengo que descargar la aplicación?
210.	Samuel A:	Profe, ¿cómo escribir el perímetro?
211.	Profesor:	No, ¿cuál perímetro?
212.	Pablo:	¡Procedimiento!
213.	Profesor:	Procedimiento. Mira, construir un triángulo isósceles en GeoGebra, escribir el procedimiento de la construcción en tu cuaderno y justificar por qué es isósceles ¿Bien? Hoy vamos a hacer ejercicio comunicativo, vamos a escribir. Bueno, Bien ¿listo? (Se dirige a Carlos) Señor, ¿preguntas? Dime.

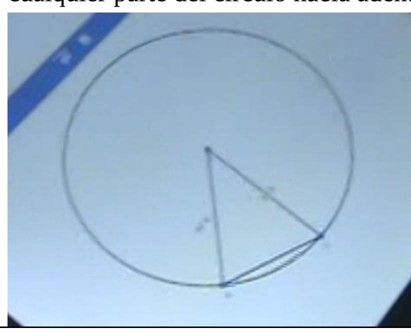
(A continuación, los estudiantes trabajan en grupo según las indicaciones del profesor)

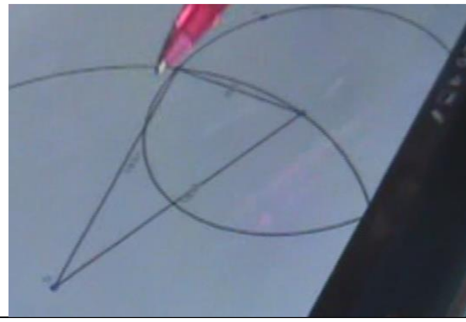
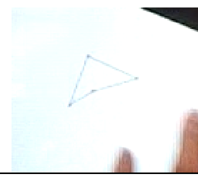
214.	Zaira:	¿Ya? Ushh ¿ya acabaron? ¿Tan rápido? ¿Cómo lo hicieron?
215.	Sebastián:	(Sebastián muestra la siguiente imagen)

		
216.	Zaira:	Con cuadrícula. Ya saben que no se puede ¿cierto?
217.	Sebastián:	A bueno entonces no.
218.	Zaira:	Yo (…) había una construcción.
219.	Sebastián:	(Quita la cuadrícula y muestra nuevamente el mismo triángulo) 
220.	Zaira:	Si tú lo mueves, ¿sigue siendo isósceles?
221.	Sebastián:	Sí.
222.	Zaira:	(Se dirige a José) Mueve un punto.
223.	Sebastián:	(José mueven vértice del triángulo y se observa la siguiente imagen)  Sí.
224.	Zaira:	¿Ahí es isósceles? ¿Será que dos de los lados son iguales?
225.	Sebastián:	Sí.
226.	Zaira:	¿Por qué?
227.	Sebastián:	Porque parece igual.
228.	Zaira:	¿Sabes cómo hacer la longitud? La medida de esos dos lados. (Señala el icono que GeoGebra que corresponde a “Distancia o longitud”). Con esta herramienta, centímetro.
229.	Sebastián:	(Toca el ícono) ¿Esta?
230.	Zaira:	Centímetro, centímetro, abajo.
231.	Sebastián:	¿Ahí?
232.	Zaira:	(Señala dos vértices del triángulo) Dale ahí en los dos puntos. Uno y dos.
233.	Sebastián	(toca el punto A y el punto B para hallar la medida de ese segmento).
234.	Zaira	Ahora de B y A y ahora de A y C.
235.	Sebastián:	(Sebastián toma la medida de todos los segmentos). Ouch.
236.	Zaira:	¿Dos de esos son iguales?
237.	José:	No.
238.	Zaira:	No ¿cierto?
239.	Camilo:	(Mostrando su construcción) Ya.
240.	Zaira:	¿Cómo lo hiciste? ¿Con cuadrícula? (Se observa un triángulo similar a la de Sebastián, sin construcciones auxiliares).

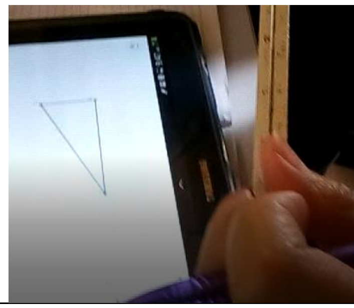
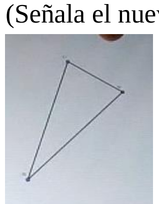
241.	Camilo:	Con el dedo.
242.	Zaira:	Muévelo, mueve un punto.
243.	Camilo:	(Toca un vértice del triángulo pero como está seleccionada la herramienta segmento, aparece un segmento con extremo en el punto seleccionado, luego lo borra) Espérate que se me fue algo.
244.	Zaira:	¿Ahí siguen siendo iguales?
245.	Camilo:	(Mueve un vértice del triángulo) Espérate, espérate que se me fue un punto.  (Responde la pregunta de Zaira) Creo que sí.
246.	Zaira:	¿Seguro?
247.	Camilo:	Si porque mira este (señala el segmento CB) es igual a este (señala el segmento CA).
248.	Zaira:	A ver, dale centímetro y los dos puntos (Camilo toma la medida del segmento CA) ese, el otro.
249.	Camilo:	(Toma la medida del segmento CB) ¿Con este?
250.	Zaira:	No sé, a ver prueba el otro. (Andrés toma la medida del segmento AB) ¿Son iguales?
251.	Camilo:	Sí.
252.	Zaira:	¿Cuál con cuál?
253.	Camilo:	Todos con todos. ¡Terminé! (Habla en tono fuerte) Profe terminé.
254.	Zaira:	¿Seguro?
255.	Camilo:	Sí.
256.	Zaira:	(Señala las medidas de los segmentos AC y AB)Este vale 44,7 y este 44,6.
257.	Camilo:	Ah espérate que lo hice mal. Espera, espera, ya te explico por qué. (Borra las medidas de los segmentos) Yo pongo (…) No espera, mira, mira.
258.	Zaira:	Si yo te vi.
259.		(Toma la medida del segmento AB) Yo mido de aquí a aquí y (selecciona los puntos B y A) luego de aquí a aquí y (selecciona los puntos A y B) luego de aquí a aquí y ya todos, tengo tres iguales.
260.	Francisco:	No, no pueden ser iguales.
261.	Zaira:	O sea, ¿ese es igual con ese mismo?
262.	Camilo:	Exacto. Entonces tres veces por el mismo y ya tengo como los tres lados. Entonces ya terminé.
263.	Zaira:	Pues no sé.
264.	Camilo:	Profe ¿ya?
265.	Sebastián:	(Con tono de desespero) No se puede.

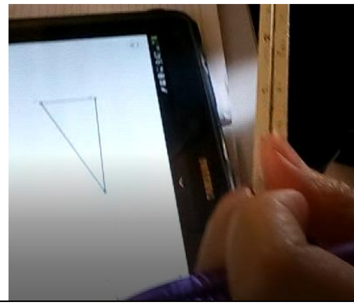
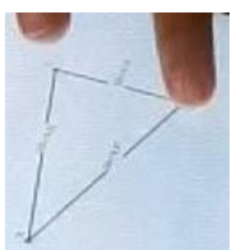
266.	Zaira:	¿No se puede?, Tú habías hecho una construcción ahorita.
267.	Sebastián:	Pues sí pero (…) pero (…)
268.	Zaira:	¿Qué, qué han visto antes que te sirviera? ¿Qué vieron antes?
269.	José:	La cuadrícula.
270.	Zaira:	La cuadrícula nunca la vieron. Bueno ahí que estás haciendo, ¿arrastrándola?
271.	Francisco:	(Se dirige a Zaira) Profe es que con el elige y mueve no se puede.
272.	Zaira:	No cierto, es que con el elige y mueve es para saber si la construcción hecha está bien o no. ¿Sí? Entonces no lo hagan con el elige y mueve sino con construcciones o con vainas que ustedes ya sepan.
		GRUPO 2 Conformado por Paola , María José, Mafe y Daniela
273.	Zaira:	¿Qué estás haciendo?
274.	Paola:	(mientras habla mueve la figura que ella había realizado en la Tablet) Estoy intentando (…) 
275.	Zaira:	O sea, ¿de qué forma?
276.	Paola:	Estoy midiendo con esta cosita de acá (señala con un esfero un lado de un triángulo construido en la Tablet)y la función de mirar y poner (…)
277.	Zaira:	(Interrumpe a Paola) ¿Cuál cosita?
278.	Paola:	(Señala el botón de medida que aparece en el software) Esta, la de ángulos y medidas. Entonces puedo medir cuánto va (…) cuál es la distancia. Entonces estoy intentando que estos dos (señala dos lados del triángulo) queden iguales. ¡Pero es muy difícil!
279.	Zaira:	¿Cierto? Y como es tan difícil por qué no lo tratas de hacer de otra forma.
280.	Paola:	Casi, casi, casi, (…) ah. Diez, diez, solamente diez (…) 99,9 (…) mmm alarguemos esto (arrastra a los puntos del triángulo) un poquito.
281.	Zaira:	(Dirigiéndose a Luisa) ¿Y tú qué hiciste? ¿Así también?
282.	Mafe:	Mmmm no, yo lo hice normal.
283.	Zaira:	¿Normal?
284.	Mafe:	Normal, pero sé que es isósceles porque tiene dos lados que son iguales (señala dos lados del triángulo), este y este. 

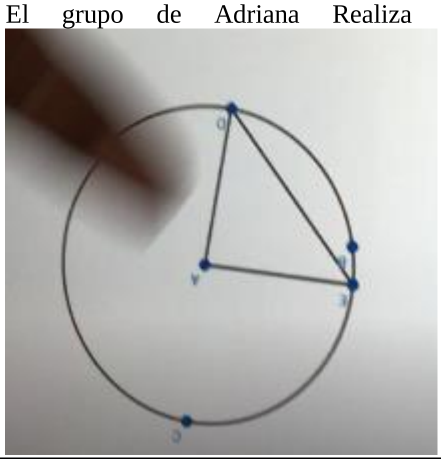
		(el segmento interno al triángulo no hace parte de su construcción, se creó cuando estaba señalando los lado del triángulo)
285.	Zaira:	¿Y cómo sabes que son iguales?
286.	Mafe:	(Con tono de certeza) Pues porque se ven iguales.
287.	Zaira:	(Pregunta al grupo) ¿Alguno ha hecho algo diferente?
288.	Daniela:	No pues yo también he hecho un triángulo.
289.	Zaira:	(Pregunta a María José) ¿Y tú?
290.	María José:	Es que no sé (…) Pues yo sé que es un triángulo isósceles (…) porque dos lados tienen la misma medida, pero este (señalando un lado) tiene que ser más largo.
291.	Zaira:	Sí.
292.	María José:	Creo, entonces, es un triángulo isósceles.
293.	Zaira:	¿Tú cómo te llamas?
294.	María José:	María José
295.		(Paola logra la construcción y hace un gesto de emoción por haber realizado el triángulo isósceles a partir de la circunferencia).
296.	Zaira:	¿Cómo lo hiciste?
297.	Paola:	(Con tono expresivo y alegre) ¡Quiero agradecer a todas las personas que me ayudaron! ¡Está bien! (Responde a Zaira) Cogí un círculo, como se supone que del centro al extremo del círculo siempre está a la misma distancia, cogí un circulo e hice un triángulo con base al círculo, como el radio siempre va a ser igual desde cualquier parte del círculo hacia adentro, entonces ¡quedaron iguales! 
298.	Zaira:	Aaah, ¡ok listo!
299.	Paola:	(Se celebra así misma) ¡Bravo!
300.		**GRUPO 3 Clara**
301.	Zaira:	(Pide a Clara que explique su construcción) Solamente léelo y ya.
302.	Clara:	Pues cogí un punto de referencia y saque dos radios con dos circunferencias (…)
303.	Zaira:	(interrumpiendo a Sofía) ¿Dos circunferencias?
304.	Clara:	Y de ahí comencé a sacar los tres puntos para formar el triángulo isósceles.

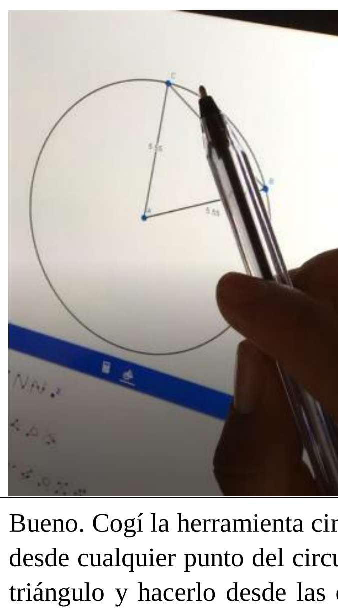
		
305.	Zaira:	Ajá y qué escribiste.
306.	Clara:	O sea, escribí casi lo mismo.
307.	Zaira:	¿Y para la justificación o argumentación de lo que hiciste? Solo hiciste la construcción ¿sí?
308.	Clara:	Y ahorita estoy haciendo (…) o sea sí, estoy escribiendo, pues como lo hice.
309.		**GRUPO 4 Conformado por Carolina, Julieta y Vanesa**
310.	Laura:	[pregunta a Julieta por el trabajo realizado]Cuéntame, ¿cómo estas tratando de hacer ese triángulo?  
311.	Julieta:	Pues ahorita me acabo de dar cuenta de que me quedó mal.
312.	Laura:	¿Sí? ¿Y por qué crees que te quedó mal?
313.	Julieta:	Porque es que no tenía los lado de la misma longitud.
314.	Laura:	Ah veo.
315.		(Se dio un tiempo para que las estudiantes exploraran un poco más)
316.	Laura:	Listo mis niñas, ¿ya construyeron ahí el triángulo?
317.	Vanesa:	Sí.
318.	Laura:	¿Y cuál sería ese triángulo?, ven yo lo voy a grabar y acá.  Ay que chévere, y ¿cuáles crees que son los lados que tienen la misma longitud?
319.	Julieta:	(Señala los lados más lardos del triángulo) Este y este.
320.	Laura:	¿Y cómo lo construyeron?
321.	Julieta:	Pues tuvimos que poner la cuadrícula para poder saber si nos había quedado bien o no.
322.	Laura:	¡Ah! con la medida.
323.	Vanesa:	Sí y luego unimos los puntos.

324.	Laura:	Ah ok, pues igual ahorita le preguntamos al profesor, a ver el profesor qué opina ¿vale? A ver si está bien.
325.	Vanesa:	(Con tono de duda) Pues sí.
326.		(Antes de llamar al profesor las estudiantes exploran un poco más usando la regla como instrumento de medida) 
327.	Carolina:	¡Ya terminé!
328.	Laura:	(Se dirige a Vanesa) ¿Ya terminaste el tuyo? Sí, y ahora sí ese (la construcción) si es isósceles ¿seguro? 
329.	Carolina:	Sí.
330.	Laura:	¿Y cómo lo hiciste?
331.	Carolina:	Pues (…) acá como en la letricas (señalando al botón Punto en GeoGebra), empecé a poner acá los puntos.  Y con las rectas (señala el botón segmento al botón Segmento) con esta que van a los dos punticos, que es un segmento, pues los empecé a juntar. 
332.	Laura:	(Señalando al triángulo de la derecha) Y ese ya es isósceles.

333.	Carolina:	Sí.
334.	Laura:	¿Sí? ¿Segura?
335.	Carolina:	Sí.
336.	Laura:	Ah bueno. (Mira a Julieta y a Vanesa) Y ustedes acá, cuéntenme. ¿Ahora sí?
337.	Vanesa:	Sí ya terminamos.
338.	Laura:	¿Sí? ¿Ya ese (la construcción) fijo es isósceles? 
339.	Vanesa:	Sí.
340.	Laura:	Ah bueno listo. Ahorita llamamos al profesor para mirar a ver.
341.	Vanesa:	Ok.
		(El profesor revisa las construcciones de los triángulos isósceles de cada una de las estudiantes, a partir de la función arrastre que tiene el software GeoGebra)
342.	Profesor:	¡Ninguno ahora! Recuerden que yo dije, este (señala un vértice del triángulo) cuando yo lo mueva, siempre me va a permanecer (…)
		(Vanesa y Julieta revisan nuevamente la construcción y arrastran los vértices del triángulo para observar que sus medidas cambiaron)
343.	Vanesa:	(Habla con tono de frustración) Creo que esto es imposible.
		(Dada la respuesta del profesor las estudiantes continúan la exploración. Carolina, en su Tablet, realiza más triángulos sin tener en cuenta la medida, ni la construcción auxiliar. Julieta y Vanesa siguen revisando las medidas del triángulo con la regla)
344.	Julieta:	(Indica que ya tiene la construcción) ¡Listo!
345.	Laura:	(Señala el nuevo triángulo) ¿Y ese sí? 
346.	Julieta:	Sí
347.	Laura:	¿Y el otro por qué no?

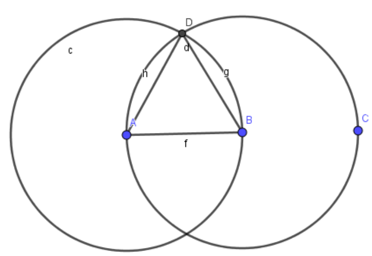
		
348.	Julieta:	Pues tenía como (…) No es que no fuera sino que es que así es más fácil de medir y el otro si no.
349.	Laura:	¡Ah! este es más fácil de medir.
350.	Julieta:	Sí, con la reglita.
351.		Luego de que las estudiantes observaron que sus compañeros usaron la herramienta del software para medir. Julieta y Vanesa cambiaron la regla por dicha por la herramienta y empezaron a mover los vértices del triángulo hasta que las medidas de dos de los lados fuesen iguales. Carolina aún no ha tenido en cuenta las medidas para validar si un triángulo es isósceles.
352.	Vanesa:	(Con tono de desespero) ¡No! No, no, no (…)
353.	Julieta:	Con paciencia y tranquilidad.
354.	Laura:	Saben cuál es el punto niñas. Que si el profe llega y les mueve el punto ya va a dejar de ser isósceles y el truco es que tienen que ser siempre isósceles así se mueva cualquier punto.
355.	Carolina:	O sea (…)
356.	Laura:	O sea, ustedes están aquí tratando de cuadrar para que siempre tengan la misma medida, es decir que tengan los mismos numeritos, pero cuando llamen al profe, el profe los va a mover.
357.	Julieta:	Sí pero ya no va con esto (señalando los números que representan la medida de un lado del triángulo) y va a tener la misma medida. 
358.	Laura:	¿Sí? Y ya exploraron si por ejemplo mueven el punto B, ¿no se cambiará la medida?
359.	Vanesa y Julieta:	Sí, sí se cambia.
360.	Laura:	Y, ¿de qué manera podemos construir algo para que esos punticos, esa medida siempre se mantenga?
361.	Carolina:	¡Ah!, tengo una idea.

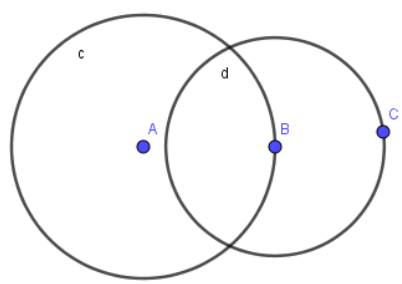
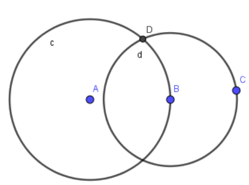
362.	Laura:	¿ Sí, cuál idea?
363.	Carolina:	Voy a tomar esta que se llama polígono. Primero voy a poner estos tres puntos. A ver (…). No funcionó
364.	Laura:	Mmm a ver cómo hacemos.
365.	Profesor:	(Se dirige al curso) Bueno ya están escribiendo porque ahorita queremos escucharlos, lo que ustedes escriben. Ahorita yo no (…) yo quiero es que ustedes lo lean.
366.	Vanesa:	¡No, me da rabia y yo no (…), cómo hacer!
367.	Laura:	Y de lo que ya vieron, ¿están seguras?
368.	Julieta:	Segurísimas.
369.	Laura:	Nada, nada les nombra de pronto dos lados iguales, de igual longitud.
370.	Carolina:	(Mira su cuaderno) Mmmm, hay que investigar.
371.	Julieta:	Solo lo que acabamos de copiar.
372.	Laura:	¿Sí? ¿Solo lo que acabaron de copiar?
373.	Vanesa:	Sí.
374.	Laura:	Un triángulo isósceles (…) Mmmm
375.	Vanesa:	¡Hay no! Me da rabia, volvámoslo a hacer. (Mueve los vértices)
376.		Carolina revisa el cuaderno y lee la definición de circunferencia. Al ver que sus compañeras continúan con la misma exploración. Después deja el cuaderno de lado y retoma la herramienta Polígono para construir el triángulo y luego pone la cuadrícula del software.
377.	Vanesa:	(Se dirige a Carolina) ¡No!
378.	Carolina:	¿Qué pasó?
379.	Vanesa:	(Con tono autoritario) Que tiene que tener en cuenta la misma longitud sino pues así no se cambia.
380.	Laura:	(Señala el cuaderno) Y tú aquí, ¿por qué miraste esta definición?
381.	Carolina:	A pues, porque algunas cosas (…) digamos, o sea, me ayudaron un poquito y ya más o menos, pero tengo la cuadrícula y ya lo podemos ver.
382.		**Grupo de Adriana**
		El grupo de Adriana Realiza esta construcción en una Tablet 

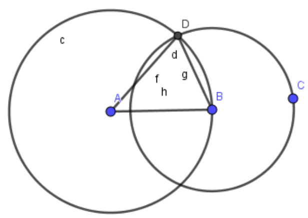
	Adriana:	En una circunferencia (…) y unimos con rectas el borde con el radio porque siempre van a (…)
	Saida:	Siempre va a ser la longitud.
	Adriana:	Siempre va ser la longitud del borda hacia el radio.
	Leonor:	Cuando yo estaba aquí hace un ratico ustedes tenían los tres puntos sobre la circunferencia y no se estaban interesando en el centro
	Adriana:	Ujum.
	Leonor:	¿A quién se le ocurrió usar el centro?
	Adriana:	A mí.
	Leonor:	¿A ti? ¿Por qué pensaste en esto?
	Adriana:	Pues porque ya habíamos (…)
	Saida:	El radio de la circunferencia siempre da la misma longitud.
	Adriana:	Arrastra cualquiera de los vértices
	Adriana:	(arrastra un vértice del triángulo)
	Leonor:	¿y siempre queda un triángulo isósceles?
	Adriana:	Sí.
	Leonor:	¿y puedes decir por qué siempre es triángulo isósceles?
	Adriana:	Porque dos lados son iguales.
	Leonor:	¿y por qué sabes que los lados son iguales?
	Adriana:	Porque del radio al borde (señala el centro de la circunferencia) siempre tienen la misma longitud.
	Leonor:	¡Muy bien Adriana, te felicito!
		Grupo de Paola
		Paola socializa los resultados de su exploración a Leonor. 
	Paola:	Bueno. Cogí la herramienta circulo y como el radio es siempre la misma distancia desde cualquier punto del circulo hacia adentro entonces lo que hice fue coger un triángulo y hacerlo desde las dos esquinas que yo quisiera hacia el centro y así quedaba de la misma (…) (selecciona con un esfero en el aire el centro y algunos puntos de la circunferencia)

	Leonor:	¿Y porque se te ocurrió hacer una circunferencia?
	Paola:	Por lo que hicimos la clase pasada porque el radio (…) el radio se supone que tiene la misma distancia hacia cualquier lado entonces … (dibuja en el aire algunos radios de la circunferencia)
	Leonor:	Y antes de hacer esta ¡habías ensayado otras cosas (..) otra construcción?
	Paola:	Sí.
	Leonor:	¡y qué te había pasado?
	Paola:	¡ja! Pues es que yo siempre cogía esta herramienta para medir los lados (señala la herramienta distancia y longitud) como lo hice acá pero(..) intentaba cuadrarlo para que quedaran del mismo (…) pero era muy complicado entonces intente otra cosa.
	Leonor:	¿y tus compañeras entendieron?
	Daniela y María José:	Sí.
		Grupo de Eliana y Laura
	Leonor:	O sea hicieron uno que parece isósceles pero se deforma cuando lo mueven ¿sí?
	Eliana:	A veces.
	Leonor:	Entonces tiene que pensar utilizar una herramienta de lo que han aprendido de geometría para ver si pueden construir ese triángulo. ¿Qué han aprendido de geometría?
	Laura:	Perímetro.
	Leonor:	Lo que han estudiado en estas clases que yo he venido no es el perímetro.
	Laura:	No mentiras, me confundí. Polígonos.
	Leonor:	Miren a ver que han estudiado en esta clase ¡que se les ocurre que pueden hacer?
	Laura:	(Continua arrastrando los puntos de su construcción)
	Leonor:	Así ya sabes que no te funciona Paola . Tienes que pensar en otra idea.
	Eliana:	Yo tengo una idea.
	Eliana:	Borra su construcción y dibuja varios puntos al azar.
	Viviana D:	(construye un triángulo y arrastra los vértices)
	Leonor:	¿te parece que siempre es isósceles?
	Viviana:	Pues para mí sí, pero (…)
	Leonor:	¿Y cómo harías para averiguar si siempre es isósceles?
	Viviana:	Pues en este momento lo estoy moviendo como el profesor lo hizo pero (…)
	Leonor:	Pero por ejemplo si mueves así (Mueve un vértice del triángulo) ¿ahí ves que hayan dos lados iguales?
	Viviana:	Mmm … no.
	Leonor:	No. ¿Qué puedes hacer?
		El profesor observa el trabajo realizado por Eliana y arrastra un vértice del triángulo.
	Eliana:	Es que me lo mueves y me lo dañas.
	Profesor:	Es que mi herramienta de validar que siempre sea isósceles es esta (señala elige y mueve)

	Laura:	O sea, profe que (…) el punto es que hagamos un triángulo isósceles que cuando yo lo mueva siempre sea un triángulo isósceles.
	Profesor:	¡Aja!. ¿Y qué ideas tiene para hacerlo, de pronto lo que hemos visto sirva alguna herramienta que este acá (señala el menú de herramientas)?
	Laura:	¡Las estoy viendo pero no!
	Eliana:	No, nada.
	Profesor:	Y Viviana por ejemplo qué no vino la clase pasada? ¿se adelantó?
	Viviana:	No señor.
	Eliana:	Ya lo intenté, pero no me sale.
	Profesor:	Jum. ¿Qué intentaste?
	Eliana:	Intenté con este (selecciona la opción medida de ángulo)
	Profesor:	¿Y por qué?
	Eliana:	Porque pensé que este me podía ayudar a que el triángulo eh (..) al moverlo sea el mismo (...)
	Profesor:	¿Y qué esa función? ¿qué nos permite esa función?
	Eliana:	¿Cuál?
	Profesor:	La que … selecciónala otra vez por favor Eliana.
	Eliana:	(selecciona la función ángulo)
	Profesor:	Acá abajito te sale el nombre, para que tu mires ¿Qué dice?
	Eliana:	Ángulo.
	Profesor:	¿Servirá el ángulo para algo?
	Eliana:	No.
	Profesor:	¿Por qué?
	Laura:	Porque estamos viendo triángulo isósceles y no ángulos
	Profesor:	¿si? ¿no sirve para nada ahí?
	Eliana:	Depende (…) hay ciertas cosas que sí que son ángulos pero (…) aun así no nos sirve.
	Profesor:	Bueno, ya vamos a socializar, escríbanme porque no se puede.
	Laura:	Porque no encontramos la función.
	Profesor:	Bueno escríbanlo.
		SOCIALIZACIÓN
383.	Profesor:	Eh, primero (…) shhh, a ver vamos a escuchar a los estudiantes que fueron (…), pero quiero escuchar a algunos que no han hablado casi en la clase. Quiero escuchar a Clara.
384.	Clara:	Ay no Profe.
385.	Profesor:	Clara, ven para acá y nos cuentas que hiciste. Ven hasta acá que es que no te tengo que llevar la Tablet (que se proyecta en la pantalla) hasta allá. Eh, Clara (…) Todos le vamos a prestar atención, tanto a Clara, porque voy a hacer preguntas. ¡Pilas!, ¿listo? A ver Clara, ¿qué fue lo que hicieron ustedes? Shhh
386.	Carlos:	¡No todos!
387.	Profesor:	Bueno, ¿Qué hiciste tú, Clara?

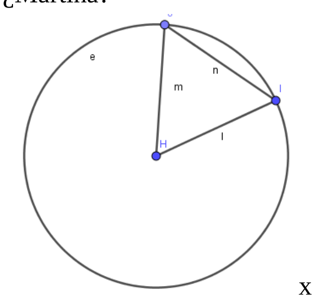
		Listo, haber, shhh
388.		Clara empieza a hacer la construcción en la Tablet que se proyecta.
389.	Profesor:	No has hablado, cada vez que hagas algo pasas a decirnos que hiciste. ¡Dale! Samuel shhh, tienes que prestar atención. Todos tienen que prestar atención.
390.	Pablo:	Hice un punto de A. Un círculo.
391.	Profesor:	(Se dirige a Pablo) Shhh, déjala a ella.
392.	Carlos:	Tengo una pregunta profe.
393.	Pablo:	Pero ella no dice.
394.	Profesor:	Déjala a ella. (Se dirige al grupo) No, denme un momento, shhh. Ahorita no van a escribir nada, escuchemos que hizo su compañera. (Se dirige a Clara) ¡Pero no!, estas ahí escribiendo, estas ahí dibujando algo y nos tienes que contar por qué lo estás haciendo.
395.	Clara:	(Con tono de desagrado) Ay no profe.
396.		Murmullos
397.	Profesor:	Shhh, shhh, a ver. Listo cuéntanos ahí qué hiciste. Shhh, a ver. Clara, cuéntanos.
398.	Pablo:	Toma un círculo.
399.	Profesor:	¡Ay ya! por favor la dejas. Por favor.
400.	Clara:	(continua haciendo la construcción sin explicar verbalmente lo que estaba haciendo)
401.	Profesor:	¡Pero no! No te pongas a hacer ahí, porque tienes que contarme qué hiciste. Cuéntanos qué hiciste. Shhh.
402.		Clara continúa la construcción sin hablar.
403.	Juan:	Ella (Clara) es de pocas palabras.
404.	Clara:	Sí, gracias. Bueno ahí lo que hicimos fue (…)
405.	Profesor:	(Interrumpe a Clara) Shhh, espérate más alto porque todos tienen que escuchar, ¿listo?
406.	Clara:	Ahí lo que hicimos fue una circunferencia que tenía a A, después hice una circunferencia y ahí pues, o sea (…)  [Se debe tener en cuenta que la circunferencia con centro en B, no es de radio AB, sino radio BC, de tal manera que la construcción puede arrastrarse y el triángulo no siempre es isósceles]
407.	Profesor:	Pero, ¿cuál fue la primera circunferencia que hiciste¡
408.		Clara borra la construcción.
409.	Pablo:	La del punto A.

410.	Profesor:	(Se dirige a Clara) Es que quiero primero es (…) es que me gusta es que tú vayas hablando y vayas construyendo. ¿No?
411.		Murmullos
412.	Profesor:	Cuéntanos, porque tú me dices (…) yo ahí me perdí (…). (Se dirige a todos) y yo no sé si les pasó a ustedes también.
413.	Pablo:	(Se dirige al profesor) Es que tú no pusiste atención.
414.	Profesor:	Me dijo (…) shhh, es que miren, ella dijo(…) shhhh. Me perdí ahí cuando decías con A.
415.	Pablo:	Es que el primer punto lo hacías en el punto medio de A (Describe una circunferencia con sus dedos).
416.	Profesor:	¿En el punto medio?
417.		Risas.
418.	Pablo:	¡O sea en el centro! En el centro del círculo.
419.	Profesor:	(Se dirige a Clara) A ver, pero explícanos. Shhhh, a ver.
420.	Tomas:	(Habla en voz baja a un compañero y luego habla en grupo). Es en el medio de círculo.
421.	Profesor:	(Se dirige a Clara) Listo dale.
422.	Clara:	Empecé con el punto de referencia que es A y de ahí hice una circunferencia. Después hice otra circunferencia. (Realiza la siguiente construcción y la proyecta en la pantalla) 
423.	Profesor:	Ah ¿pusiste dos circunferencias al azar?
424.	Clara:	Sí.
425.	Profesor:	(Pregunta a Clara al notar su demora en responder) ¿Media hora? ¿Qué hiciste? A ver cuéntanos.
426.	Pablo:	Y hizo (…) E hizo un punto en la intersección. (Clara coloca el punto D como intersección de dos circunferencias) 
427.	Profesor:	¿Hey qué pasó ahí?
428.	Pablo:	¡Yo! (…) hizo un punto en la intersección (…)

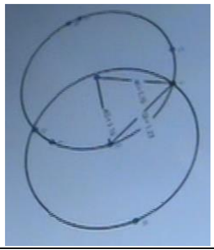
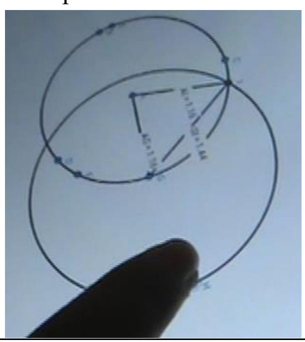
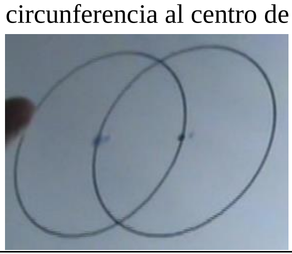
429.	Profesor:	(Interrumpe a Pablo) Pero Pablo. Necesito primero que dejes a ella hablar, ahorita tú hablas.
430.	Pablo:	Ay profe pero es que cuando yo quiero hablar y hay si ya no me dejas.
431.	Profesor:	Sí, sí, pero es que primero (…) ahora es Clara la que nos quiere comunicar qué hizo. Entonces ustedes le van a prestar mucha atención a Clara. ¿Clara ese punto de dónde salió? [Se refiere al punto D, intersección entre ambas circunferencias]
432.	Clara:	(Habla en voz muy baja) No, pues yo lo que hice (…)
433.	Profesor:	¿Señora?
434.	Clara:	Esa sería la intersección de las dos circunferencias.
435.	Profesor:	Y ahora, pero haber yo necesito que todos se convenzan de que esa es la construcción.
436.	Paola:	A mí me parece que eso está incorrecto porque (…)
437.	Clara:	(completa la construcción graficando los lados del triángulo).
438.	Profesor:	Espere, espere, espere porque ella no ha terminado. (Se dirige a Clara) ¿Y ahora qué hizo ahí?
439.	Clara	Pues uní A con B, B con D y D con A 
440.	Pablo:	¡Y queda el triángulo!
441.	Profesor:	¿Y ya?
442.	Clara:	Sí.
443.	Profesor:	¿Sabes? A ver y lo que les hacía a todos. Arrastrar.
444.	Pablo:	Hay lo va a arrastrar y la va embarrar.
445.	Profesor:	Vamos a ver.
446.	Clara:	(Arrastra la construcción y en efecto el triángulo permanece isósceles)
447.	Varios:	¡Uy!
448.	Profesor:	Cuáles son ahí (…) vamos a mirar.
449.	Carlos:	La embarró.
450.	Profesor:	¿La embarró?(…) No. (Pregunta a Clara) Cuáles son, cuéntanos ahí, ¿cuáles son los lados de la misma longitud?
451.	Tomas:	Ahí dice 7.5 y 7.5
452.	Clara:	(Arrastra la construcción y la medida de los lados AB y AD permanecen iguales)
453.	Profesor:	Sí vez que sí funciona, ¿todos de acuerdo con que esta funciona?
454.		Murmullos. [Todos parecen aceptar bajo esta exploración que la construcción sí funciona]
455.	Profesor:	He bien, shhh, bien, chicos, shhh. A ver. Y ahora (…) viene la segunda parte. Podrías justificar por qué ese triángulo siempre es isósceles con su construcción.

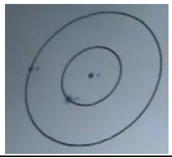
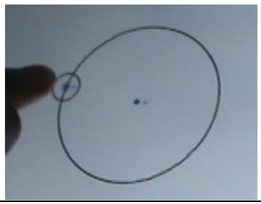
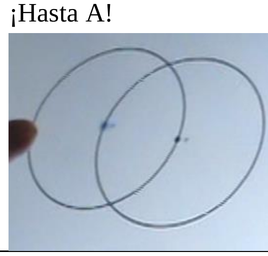
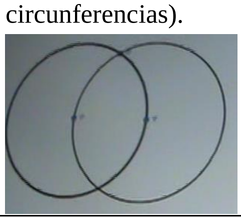
456.	Clara:	Hay no profe.
457.		(Paola levanta la mano).
458.	Profesor:	Dejémosla a ella y ustedes ahorita dicen.
459.	Pablo:	¿Por qué no?
460.	Profesor:	(Se dirige a Paola) Dejemos primero a Clara que se defienda y luego tú reaccionas. (Se dirige a Clara) Listo, a ver ¿por qué podría ser? ¿Tienes alguna idea por qué salió así?
461.	Pablo:	Las cosas de destino.
462.	Clara:	No sé.
463.	Profesor:	¿No sabes? Yo tengo. No sé si ustedes tienen alguna pregunta que hacer a Clara. Están de acuerdo con que esa construcción nos sirve para (…)
464.	Paola:	No.
465.	Profesor:	(Dirigiéndose a Paola) Espérate que estamos primero discutiendo con lo de Clara.
466.	Paola:	Sí, sí, sí, pero es de lo mismo.
467.	Profesor:	¿Están de acuerdo con que esa construcción sirve? Paola , dice que no.
468.	Paola	No.
469.	Pablo:	(Se dirige a Paola) ¿Por qué no si siempre queda la misma medida?
470.	Paola	No.
471.	Profesor:	A ver vamos a escucháramos. A ver, que Clara se va a defender o ustedes la van a apoyar, o apoyan a la postura que tenga Paola .
472.	Paola:	Me parece que es muy innecesario el otro círculo, porque si lo necesitara sería para hacer un triángulo equilátero.
473.	Pablo:	Pero si ella lo quiere hacer así.
474.	Carlos:	Sí.
475.		Murmullos
476.	Carlos:	(Levanta la mano enérgicamente para participar) ¡Venga! ¡Venga!
477.	Profesor:	Ey, por favor, shhh. Ey a ver respetemos, mire ante todo vamos a respetar la postura de la compañera, shhh, Ey ¿ya? Gracias. Bueno acá hay una posición. (Se dirige a Clara) ¿Tú qué dices con respecto a eso? ¿Tú necesitas ese triángulo o no?
478.	Paola:	¿Ese (triángulo)?
479.	Profesor:	Eh qué pena ese círculo.
480.	Clara:	Pues digamos que yo pienso por lado y lado. Pero digamos o sea, para empezar sí lo necesitaba.
481.	Profesor:	¿Y ahí para qué te sirve ese otro circulo?
482.	Carlos:	Pues para colocar el círculo.
483.	Clara:	Sí.
484.	Carlos:	¡Yo, yo, yo!.
485.	Profesor:	(Se dirige a Carlos) A ver tú vas a defender a cuál postura.
486.	Pablo y Carlos:	A la de Clara.
487.	Profesor:	A la de Clara. ¿Por qué?

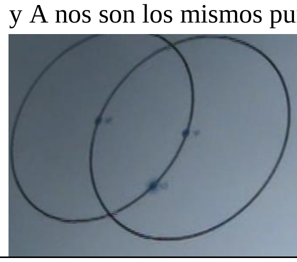
488.	Carlos:	A ver. En el trabajito no decía que, que no se pudieran usar cualquier herramienta y pues cualquier herramienta y en este caso ella usó dos círculos.
489.	Paola:	Pero solamente utilizó las herramientas y en un comienzo lo hizo equilátero.
490.	Carlos:	Pero, pero ahí también lo hizo isósceles.
491.	Profesor	Es que la discusión que Paola quiere decir es, shhhh, ¿será necesario tener ese círculo?
492.	Pablo:	Puede que no, sí se puede hacer con un círculo, pero igualmente ella lo quería hacer con dos círculos.
493.	Profesor:	Eh, shhh. Bueno, pero, o sea tú la necesitas, ¿es necesario? O sea ¿no se puede hacer sin ese círculo?
494.	Carlos:	Pues es que profe mira, lo que pasa es que ahí debe quedar un, un triángulo isósceles, no dice que no se pueden tener dos círculos que formen el triángulo isósceles.
495.	Pablo:	Pues si se puede pero ella lo quería hacer así.
496.	Profesor:	A ver voy a escuchar al otro o a algunos que no han hablado.
497.	María José.	(levanta la mano)
498.	Camilo:	Eso se puede hacer con un solo círculo.
499.	Profesor:	A ver, ey, shhh, esperen ya ahorita vamos a hablar de eso. Esperen. Quiero escuchar a María José y nos cuente qué opina. Ey allá, shhh, pilas porque también les puedo preguntar a ustedes, shhh.¿ María José, qué opinas? ¿cuál posición apoyas?, la de Clara o la de Paola . Es necesario (…) Shhh venga por favor, es innecesario ese, ese círculo que está allá?
500.	Pablo:	Sí, digo no (…)
501.	Profesor:	Shhh, déjala. (Se dirige a María José) ¿Tú qué crees?
502.	María José:	Sí, porque se puede hacer de diferentes formas.
503.	Profesor:	(Saida levanta la mano) A ver Saida.
504.	Saida:	Para mí, pues es que tú no diste reglas.
505.	Profesor:	¿O sea que para esa construcción es necesario eso (la circunferencia)? (Adriana levanta la mano) A ver, ¿qué dice Adriana?
506.	Adriana:	Pues no es necesario eso, pero (…)
507.	Pablo:	(Interrumpe a Adriana) Si ves no es necesario.
508.	Adriana:	Pero o sea (…) sí puedo hacer (…)
509.	Pablo:	(Interrumpe a Adriana) Por eso mismo pero ella lo quiso hacer así con dos (circunferencias).
510.	Sebastián:	(Interviene interrumpiendo a Adriana y a Pablo) No es necesario [las dos circunferencias] porque yo lo puedo hacer con uno solo.
511.		Murmullos.
512.	Profesor:	Shhh, esperen, escúchense por favor. (Mira un grupo desatento) Allá niñas, shhhh, Eh ¿Qué pasará si yo llegase a quitar ese (…), a ver te pregunto a ti (Clara), si yo llegase a quitar ese círculo que tienes ahí está ahí?

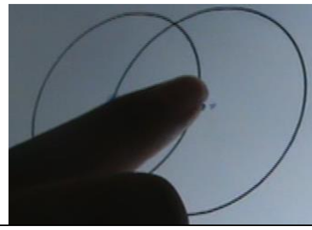
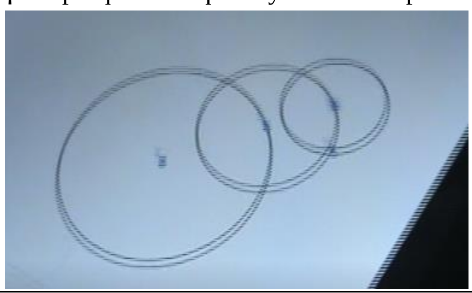
513.	Clara:	Nada, ya quedó isósceles.
514.	Profesor:	Entonces, ¿lo necesitamos o no?
515.	Pablo:	Por eso digo, no lo necesita pero ella lo quería hacer con dos círculos.
516.		Murmullos
517.	Profesor:	(El profesor muestra la siguiente construcción en el tablero) Bien, shhh esta era la construcción que tenía Paola , que tenía Adriana también. ¿Quién más de los tres? ¿Martina? 
518.	Varios:	¡Yo! ¡Yo! (Adriana Y Pablo levantan la mano)
519.	Profesor:	¿Cuál? Pablo o Adriana.
520.	Pablo:	No, no que yo también lo tenía como Clara.
521.	Profesor:	(Se dirige a Adriana) Cuéntanos de qué se trata esta construcción.
522.	Adriana:	¿La vuelvo a hacer?
523.	Profesor:	Bueno hágala.
524.	Pablo:	No ahí está bien (la construcción del profesor en el tablero).
525.	Adriana:	(Borra la construcción y la repite mientras indica cada uno de los pasos) Bueno entonces, hacemos una circunferencia y pues dos puntos encima, en el borde de la circunferencia (hace una circunferencia con el dedo en el aire, luego dibuja los puntos en la Tablet) y después los hicimos juntar [los segmentos] y ahora podemos (…) (Hace gestos tratando de encontrar las palabras para expresarse), podemos moverlos y siempre estos dos [los lados congruentes del triángulo isósceles] van a quedar con la misma medida.(Adriana mueve la circunferencia para observar que siempre se cumple esta propiedad)
526.	Pablo:	(Dirigiéndose a Adriana) ¿Y por qué?
527.	Andrés:	Porque sí (…)
528.	Adriana:	Porque del radio al borde de la circunferencia siempre va a tener la misma medida.
529.	Andrés:	Sí.
530.	Profesor:	¿Eso es cierto?
531.	Sebastián:	¡Muy bien Adriana yo también hice eso! ¡Eso! ¡Eso!
532.	Profesor:	¿Qué nos permite decir eso? Shhh, a ver eso que acaba de decir tu compañera (…).
533.	Pablo:	Yo no le entendí porque habló en idioma geométrico, "El radio de una circunferencia (…)".
534.	Profesor:	¿No?
535.		(Risas)

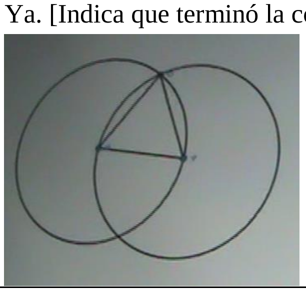
536.	Profesor:	A ver (…) podrías (…) A ver es que hay unos niños que no prestaron atención. Adriana, ¿Podrías repetir tú idea a ver si están de acuerdo o no? A ver, shhh, dinos por favor.
537.	Adriana:	El radio del centro de círculo al borde, siempre va a haber la misma medida.
538.	Profesor:	Y eso, ¿quién lo dice?
539.	Pablo:	Yo, la lógica.
540.	Profesor:	No, pero eso que acabó de decir a qué alude, ¿a qué (...)?
541.	Carlos:	Pues el círculo lo cogen y así ¡pa! (Hace un gesto con el brazo de arriba abajo, como si dividiera en dos), va a medir igual. Cuando lo parte por la mitad va a hacer eso, entonces si tú lo divides entre dos lados.
542.	Sebastián:	¡Yo quiero hacer la mía!
543.	Profesor:	¿Qué dice José? (José no responde) José no estás prestando atención. Ninguno de los dos (Refiriéndose a José y al compañero. El docente toma el cuaderno con la lista de notas) Estamos discutiendo sobre una idea, mmm, estamos mirando esta parte (señala el tablero), justifique que es isósceles.
544.	Sebastián:	Sí profe yo hice lo mismo, pero no quiero pasar.
545.	Profesor:	Pero, Adriana dio una idea, ¿qué piensas de esa idea?
546.	José:	Que está bien.
547.	Profesor:	Pero por qué, qué nos pide (…), qué dice (…), que ella dice que del centro a cualquier punto de la circunferencia (…).
548.	Sebastián:	(interrumpe al profesor)Va a ser la misma medida.
549.	Profesor:	¿Por qué?
550.	Camilo:	Porque, el circulo tiene la circunferencia a la misma medida del centro.
551.	Profesor:	¿Eso es cierto?
552.	José:	Sí (…) (inaudible)
553.	Profesor:	Ah, o sea que ustedes acá en justificar qué va a escribir-
554.	Pablo:	Que del centro al borde del círculo siempre hay la misma medida.
555.	Profesor:	¿Por qué? O sea sí (…) (Adriana levanta la mano).
556.	Pablo:	Porque siempre tiene que haber la misma distancia.
557.	Profesor:	(Se dirige a Pablo) Pero falta (…), pero usaste qué, una qué.
558.	Adriana:	La circunferencia.
559.	Profesor:	Faltaba esa palabrita para que la conectaras. Bien, última tarea, es esta. Vamos a construir un equilátero, con los mismos pasos. Ya no es isósceles sino equilátero. Vamos a ver. A bueno y, ¿qué quiere decir equilátero?
560.	Andrés:	(levanta la mano mientras dice) Que tiene todos sus lados iguales.
561.	Profesor:	Muy bien.
562.		**Grupo de Adriana**
563.		(Adriana tiene en su Tablet la siguiente imagen)

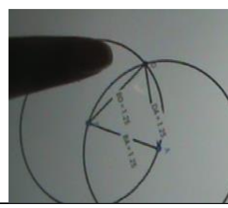
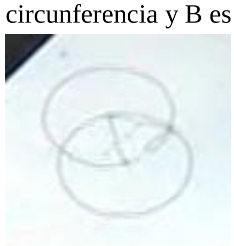
		
564.	Zaira:	¿Tú cómo es qué te llamas?
565.	Adriana:	Adriana.
566.	Zaira:	Adriana, sí Adriana. ¿Cómo hiciste la construcción?
567.	Adriana:	Pues puse dos circunferencias y las (…) (Adriana arrastra la construcción) 
568.	Zaira:	Pero mira que ahí sigue siendo (…)
569.	Adriana:	Sí, es verdad.
570.	Zaira:	¿Cómo tiene que ser la otra circunferencia para que sean iguales?
571.	Adriana:	Eh, pues (…)
572.	Zaira:	Mira que ahí tienes la idea, pero al arrastrar, hum se va ¿cierto? Entonces trata (…), has otra construcción pero con esa idea, que te puede servir.
573.	Adriana:	Entonces toca borrar (…) voy a volverla a hacer porque esta es la de la otra.
574.	Zaira:	¡Ah! eso de pronto es eso. Borra.
575.		Adriana inicia una nueva construcción, pero no fija el punto de la segunda circunferencia al centro de la primera. 
576.	Zaira:	¿Ahí qué estas tratando de hacer?
577.	Adriana:	Que sea del mismo lado. (Señala ambas circunferencias)
578.	Zaira:	Y entonces porque no la haces con esa misma [el radio]. Por qué mira que al arrastrarlo se va a mover.
579.	Adriana:	Ah sí. (Adriana trata de realizar la segunda circunferencia con la siguiente construcción)

		
580.	Zaira:	¿Del punto A? ¿O sea el centro cuál sería?
581.	Adriana:	¿A?
582.		(Adriana quita la segunda circunferencia con centro en A, luego con centro en B (punto de la circunferencia con centro en A) realiza una nueva circunferencia) 
583.	Zaira:	¿Hasta qué punto?
584.	Adriana:	Hasta A.
585.	Zaira:	¿Y por qué no la haces hasta A?
586.	Adriana:	¡Hasta A! 
587.		(Dado que la segunda circunferencia no se fija al centro de A. Adriana intenta nuevamente Hasta que ubica correctamente el segundo punto) 
588.	Zaira:	¿Y ahora?
589.	Adriana:	Ahora voy a poner uno acá (Coloca el punto C como intersección entre ambas circunferencias). 
590.	Zaira:	Aja.

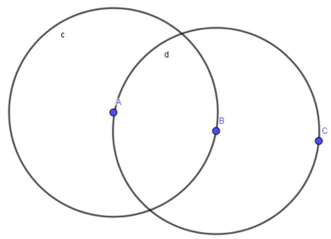
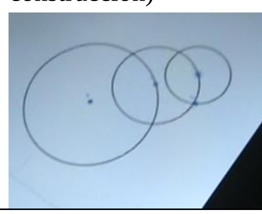
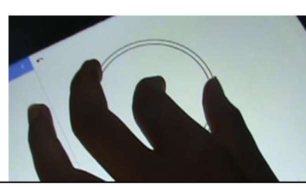
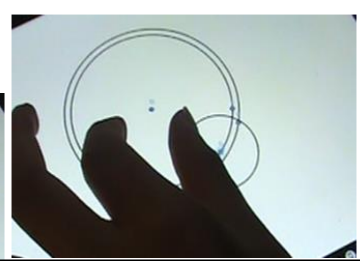
591.	Adriana:	Y Ahora los uno (Construye los segmentos AB, AC y BC).
592.	Zaira:	¿Y sí con congruentes, ¡iguales!, perdón?
593.	Adriana:	¡Ya!
594.	Zaira:	¿Y cómo lo ves?
595.	Adriana:	Con este (señala el botón distancia y longitud del software GeoGebra y comienza a tomar las medidas). (Responde a Zaira) Sí ¡Profe!
596.	Zaira:	¿Y cómo justificarías? Te acuerdas que este [la construcción del triángulo isósceles] lo justificaron por lo de las circunferencias, eh, tiene radios ya ahora este cómo.
597.	Adriana:	Bueno, de B a A que es (…) (Señala B, el centro de una circunferencia y A que pertenece a la circunferencia). Entonces pues del radio al borde (…).
598.	Zaira:	(interrumpe a Adriana) ¿Del radio al borde?
599.	Adriana:	Del radio al borde de la circunferencia siempre hay y pues también este es el centro (señala el punto A).
600.	Zaira:	Aja.
601.	Adriana:	Y pues este también pertenece a los dos, que también está a la misma distancia (señala el punto D, intersección de ambas circunferencias)
602.	Zaira:	¿Pero cómo sabes que este y este son congruentes? (señala los segmentos AD y BD) ¿este??
603.	Adriana:	¿Cuál? ¿DA?
604.	Zaira:	DA y DB.
605.	Adriana:	Porque mira D esta justo en el centro, donde se intersecan los (…) las circunferencias (hace circunferencias con su mano), entonces D hace parte de la circunferencia DA y también de DB, entonces ese (punto D), también está a la misma distancia. Del radio al borde.
606.		**Grupo 2: Daniela, Mafe**
607.	Mafe:	Pues yo pienso que sería (…) dos círculos eh (…) que tengan de la misma longitud de radio, después tú los unes eh (…) y tienen que dar igual de cada lado.
608.	Zaira:	¡Aja! ¿y cómo lo harías? La construcción.
609.	Mafe	Pues (inaudible) tiene que hacerlo. (Mafe habla mientras, Daniela construye la circunferencia con centro en A y radio AB y luego otra con centro en B y radio BD). Otro (Daniela indica a Mafe que mueva el punto D hasta que se observe que A está contenido en la circunferencia con centro en B y radio BD). [Nótese que D y A nos son los mismos puntos] 
610.	Daniela	¡A! (Indica que la circunferencia ya contiene al punto A)

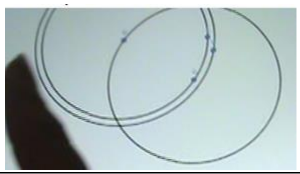
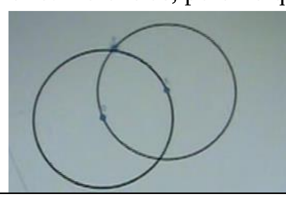
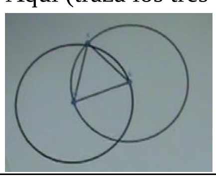
611.	Mafe:	(Milena borra la circunferencia con centro en B y radio BD y construye una nueva con centro en B y radio AB) 
612.	Zaira:	¿Para que tenga el mismo radio donde debe terminar?
613.	Mafe:	Ahí. (no se logra ver bien la pantalla de la Tablet)
614.	Zaira:	¡Aja!
615.	Mafe:	¡No!
616.	Zaira:	¡No! porque mira que si yo muevo el punto ¿qué va a pasar con este? 
617.	Mafe:	Pues (…)
618.	Zaira:	Mira que una circunferencia se puede hacer con dos puntos (selecciona dos puntos y la opción circunferencia) no así porque es más difícil.
619.	Mafe:	¡Ah! Entonces hago esto (borra todas las construcciones anteriores y empieza construyendo una circunferencia)
620.	Zaira:	¡Aja! Y para la otra circunferencia
621.		Emn no se otra vez así? (Construye otra circunferencia con el mismo centro de la anterior) 
622.	Daniela:	¡No! borra. (Mafe borra la construcción anterior)
623.	Zaira	Una circunferencia con dos puntos ¿ahora cuál sería la otra circunferencia con los otros dos puntos?
624.	Mafe:	(construye una circunferencia con centro en A y radio AB y otra con centro en B y radio AB)
625.	Zaira:	¡Aja! Y ahora?

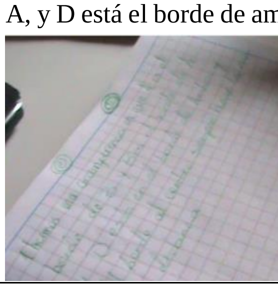
626.	Milena: (inv.)	Ahora uno (…) (Coloca el dedo sobre el punto B como si fuese a trazar el segmento AB) No (cambia de opinión). Voy a pongo un punto acá (Coloca el punto sobre la primera circunferencia que parecía pertenecer a la de intersección entre las dos circunferencias) aquí (construye los segmentos AB,BC y CA) y ¡ya!
627.	Zaira:	ok. Mueve el punto F
628.	Mafe:	(Mueve el punto F)
629.	Zaira:	Mueve el Punto F. ¡Aja! muévelo hacia abajo (Mafe mueve el punto F) ¡ahí, ahí ahí! ¡Todos tiene la misma longitud?
630.	Mafe:	No.
631.	Zaira:	¡No! ¿entonces donde debe ir el punto F?
632.	Mafe:	Donde se intersecan.
633.	Zaira:	¡Aja! Entonces borra ese punto.
634.	Mafe:	(Mafe Borra el Punto F)
635.	Zaira:	Y mira que esta herramienta es de intersección (señala la herramienta en la Tablet) entonces elige esta y pon el puntico.
636.	Mafe:	(Elige la herramienta e intenta construir el puto pero no aparece) ¡agh!
637.	Zaira:	Dale las dos circunferencias. Elige una circunferencia y luego la otra circunferencia
638.	Mafe:	(sigue la instrucción dada por Zaira) ¡ahh!
639.	Zaira:	¡Y ya!
640.	Mafe:	Y ahora le uno.
641.	Mafe:	Listo y ahora ¿por qué es un triángulo equilátero?
642.	Mafe:	Porque los dos círculos (…) el radio es de la misma distancia por lo tanto cuando tú haces el triángulo queda de la misma distancia y un triángulo equilátero es que todos sus lados son iguales.
643.	Zaira:	¿Y sí son congruentes? Iguales, perdón [Se refiere a los segmentos AD, AB y BD]
644.	Milena: (inv.)	Ya. [Indica que terminó la construcción] 
645.	Zaira:	¿Cómo lo ves?
646.	Milena: (inv.)	Con este. (Mostrando el botón de distancia y longitud del software)
647.	Zaira:	Ah, ok.
648.	Milena (inv.):	Sí (Responde luego de tomar las medidas y comprobar que es isósceles)
649.	Zaira:	Sí.
650.	Milena (inv.):	Profe.

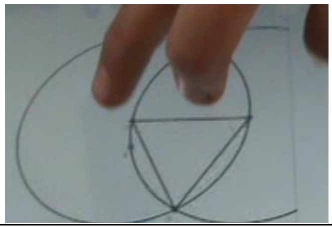
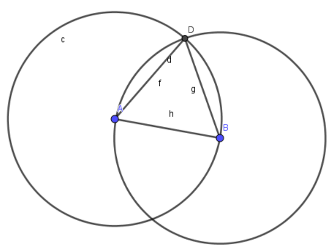
651.	Zaira:	¿Y cómo sabes que es cierto? ¿Cómo lo justificarías? Te acuerdas que este lo justificaron, pues por lo de la circunfe(…) eh, porque tiene radios, y ahora este cómo
652.	Milena: (inv.)	Bueno, de B a A, entonces pues, del radio al borde (…)
653.	Zaira:	(Interrumpe a Milena) ¿Del radio al borde?
654.	Milena: (inv.)	Del radio (señalando el centro en B de una circunferencia) al borde, siempre hay (la misma distancia) y también pues este es el centro de la circunferencia (señalando el centro en A) ¿sí? Y pues este (señala el punto D) es parte del radio también de los dos, entonces también está a la misma distancia.
655.	Zaira:	Pero cómo sabes que este y este son congruentes. Este y este. (Señalando los segmento AD y BD)
656.	Milena: (inv.)	¿Cuál DA?
657.	Zaira:	DA y DB.
658.	Milena (inv.):	Porque mira está en, justo en el centro donde se intersecan los (…), las circunferencias. 
659.	Zaira:	Aja.
660.	Milena: (inv.)	Entonces D hace parte de la circunferencia de A y también de la de B, entonces también es la misma distancia del radio al borde. ¡Profe!
661.		**Grupo 3: Lina (inv.), Samanta**
662.		Luego de haber realizado la construcción, Lina señala el segmento BA, donde B y A son los centros de dos circunferencias.
663.	Lina (inv.):	De B a A es la mitad (…), el radio entonces pues, A también es (…), el borde. Entonces pues tienen la misma distancia y también A es el centro de esta circunferencia y B es el borde. Y D es parte del borde de las dos circunferencias. 
664.	Profesor:	Cómo así, ¿D es el borde? No entiendo.
665.	Lina (inv.):	O sea es parte (…), o sea el punto está en el borde de esta circunferencia y también de esta. (Señala ambas circunferencias). Entonces (…)
666.	Profesor:	Ah y qué te garantiza que todos sean iguales.

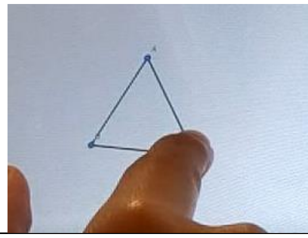
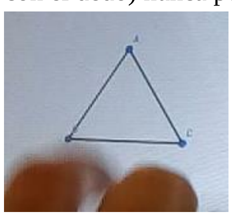
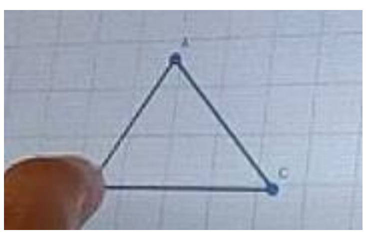
667.	Lina (inv.):	Porque A es el centro de este (señala una de las circunferencias) y B es el centro de este (señala la otra circunferencia).
668.	Profesor:	Aja.
669.	Lina (inv.):	B también es el borde se esté (señala la circunferencia con centro en A) y A también es el borde de este (señala la circunferencia con centro en B) y este del borde de los dos (señala el punto D, intersección de ambas circunferencias), porque está en la parte que se intersecan A y B, los dos círculos.
670.	Profesor:	¿Qué dices tú Salo, de acuerdo?
671.	Samanta:	Sí.
672.	Profesor:	Arrastra un punto porfa, a ver si siempre se (…) (Lina arrastra uno de los puntos). Mmmm, sí ahí pareciera y alguna (…).Todos hicieron esa (Pregunta a los demás miembros del grupo).
673.	Samanta:	No
674.	Profesor:	(Pregunta a Lina) ¿Y ya intentaste escribirlo?
675.	Lina:	No.
676.	Profesor:	¿No?, ok escríbalo y ahorita me cuentan. ¿Habrá otra forma de hacerlo o esa será la única?
677.	Lina:	No sé.
678.	Profesor:	Entonces ahora después de que escriban esa miren a ver sí hay otra.
679.		**Grupo Lucas (inv.)**
680.		Zaira se acerca Lucas y pregunta sobre cómo realizó la construcción
681.	Zaira:	¿Cómo lo pensaste, lo del punto A? Tú ahorita lo pusiste que fueran (…).
682.	Lucas (inv.):	Pues yo pienso que sería dos círculos que tengan de la misma longitud de radio, entonces cuando tú los unes, el triángulo queda igual de cada lado.
683.	Zaira:	Aja y entonces cómo lo harías, la construcción.
684.	Lucas (inv.):	Un punto, listo (el estudiante construye la circunferencia con centro en A y radio AB, luego traza varios puntos sobre la circunferencia y en su interior y después los borra.)  (El estudiante traza nuevamente una circunferencia con centro en A y radio AB)
685.	Zaira:	Ahora una circunferencia, para que tenga el mismo radio, tú me dijiste que tenga. (El estudiante traza otra circunferencia con centro en B y radio AC] (…). Aja. Y ahora, ¿dónde debe terminar?
686.	Lucas (inv.):	Ahí, acá.

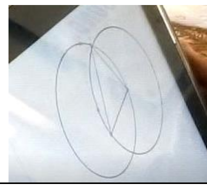
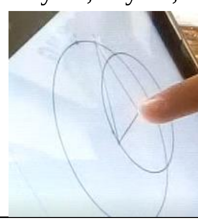
		 [Se observa que el punto C no concuerda con el centro de la circunferencia con centro en A]
687.	Zaira:	No porque mira que, si yo muevo el punto, ¿qué va pasar con él? Pues se va a mover. Se mueve la circunferencia (mueve en punto C de la circunferencia con centro en B), ¿Cierto? Entonces para que este quieta, ¿Qué debe, en dónde debe terminar esa circunferencia? ¿Empezar en B y terminar en dónde?
688.	Lucas (inv.):	¿En A? (El estudiante borra la construcción y la inicia nuevamente, y traza varias circunferencias). Mmm, no puedo. (El estudiante borra nuevamente la construcción) 
689.	Zaira:	Mira que una circunferencia también se puede dar por dos puntos, o sea tu das acá (construyendo una circunferencia con dicha opción del software).No así, porque así es más difícil.
690.	Lucas (inv.):	Ah. (El estudiante continúa tratando de trazar la circunferencia). Listo ahí lo ves. (Realiza una circunferencia con centro en A y radio AD y se la muestra a Zaira). 
691.	Zaira:	¿Y para la otra circunferencia?
692.	Lucas (inv.):	(El estudiante intenta trazar nuevamente una segunda circunferencia con centro en A y radio AC)  

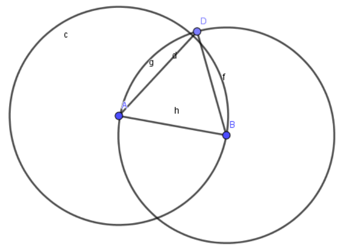
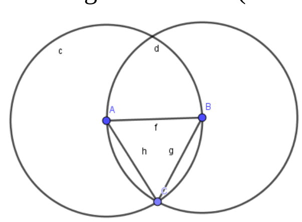
693.	Zaira:	¡No, otra vez así!
694.	Lucas (inv.):	(Ríe con timidez y luego construye otra circunferencia con centro D y radio AD) 
695.	Zaira:	Bórralo (Zaira borra toda la construcción y pide a Lucas que construya de nuevo). Una circunferencia con dos puntos. (Lucas construye una circunferencia con centro en A y radio AB). ¿Y ahora cuál sería la otra circunferencia con los otros dos puntos? (Lucas toca el punto A y un punto B en la circunferencia, construyendo una circunferencia con centro en B y radio AB] Aja, ¿y ahora?
696.	Lucas (inv.):	Pongo un punto acá. (Trata de poner el punto F como intersección entre ambas circunferencias, pero no queda bien ubicado) 
697.	Zaira:	¿Ahí?
698.	Lucas (inv.):	Aquí (traza los tres segmentos que corresponden a los lados del triángulo). Ya. 
699.	Zaira:	Mueve el punto F.
700.	Lucas (inv.):	Con este (el punto F) ¿cierto?
701.	Zaira:	Muévelo, mueve el punto F. (El estudiante mueve el punto F). Aja, muévelo más, muévelo hacia abajo. Ahí todos… ahí, ahí, no, no, no, ahí (Zaira indica que ubique el punto F en una posición particular). ¿Todos tienen la misma longitud? 
702.	Lucas (inv.):	No
703.	Zaira:	No, entonces dónde debe ir el punto F.
704.	Lucas (inv.):	Eh, donde se intersecan.
705.	Zaira:	Aja, entonces borra ese punto. (Andrés borra el punto F y solo queda el segmento AB)

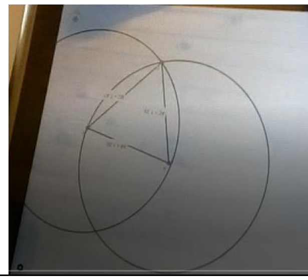
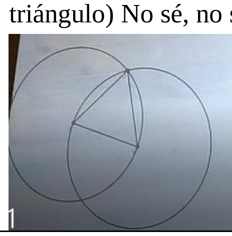
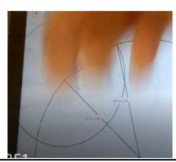
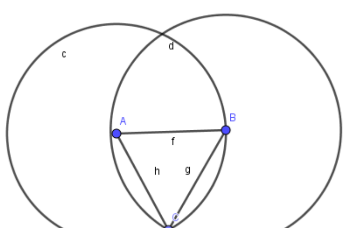
		Y mira que esta herramienta es de intersección, entonces elige esta y pon el puntico. (Lucas trata de ubicar dicho punto, pero no aparece sobre la construcción y hace un gesto de frustración). Dale las dos circunferencia, sí una circunferencia, elige una circunferencia.
706.	Lucas (inv.):	Esta. (Elige la circunferencia con centro en A)
707.	Zaira:	¿Y la otra circunferencia? (Lucas elige la circunferencia con centro en B, de tal manera que se construye el punto H y el punto M) [intersecciones entre ambas circunferencias]. Ajá.
708.	Lucas (inv.):	Y ahora lo uno (El estudiante traza los segmentos AH y HB)  ¿Y ahora?
709.	Zaira:	Listo, ahora, ¿por qué es un triángulo equilátero?
710.	Lucas (inv.):	Porque los dos círculos, el radio de los dos círculos es de la misma distancia, por lo tanto cuando tú haces el triángulo, el triángulo queda de la misma distancia y un triángulo equilátero es que todos sus lados son iguales.
711.	Zaira:	Ajá. Listo, vale, gracias.
712.		**Grupo Daniela (inv.), Sari (inv.)**
713.		Zaira se acerca a un grupo que había terminado la actividad y pregunta por su justificación
714.	Zaira:	Escribiste esto, ¿cierto?
715.	Adriana:	Sí. Mira, hicimos una circunferencia en que A es el borde de B y B es el borde de A, y D está el borde de ambas y del borde al centro siempre hay la misma distancia. 
716.	Zaira:	Listo y esa es la justificación no más.
717.	Daniela:	Sí.
718.	Zaira:	Entonces, ¿tú vas a escribir lo mismo? (Dirigiéndose a Sharik)
719.		**Grupo Camilo, Arturo (inv.)**
720.		Se observa que Camilo, tiene la construcción de un triángulo equilátero.

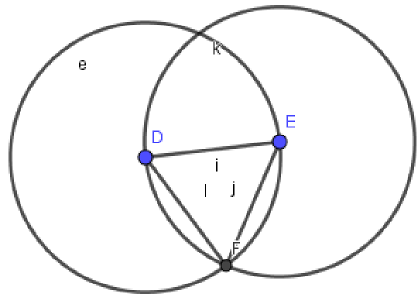
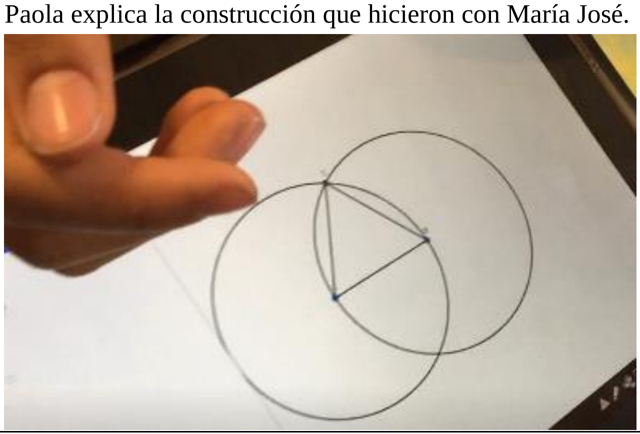
		
721.	Camilo:	Todos los lados son iguales. Mire. (Camilo arrastra uno de los puntos de triángulo y en efecto permanece equilátero).
722.	Zaira:	Ajá.
723.	Camilo:	Y sigue estando igual.
724.	Zaira:	¿Y por qué pasaría esto?
725.	Camilo:	Porque la circunferencia hace que (…) que qué, que mmm, la circunferencia hace que tenga lo mismo o sea que uno lo mueva mucho, o sea que uno lo mueva (…) la circunferencia hace que (…).
726.	Zaira:	¿Cómo es tu nombre?
727.	Camilo:	Camilo. La circunferencia hace que (…)
728.	Zaira:	Pero tú cómo verificas que estos dos, este con este sean congruentes (Refiriéndose a los segmentos AD y CD. D intersección entre ambas circunferencias)  Porque que mira que tú no hiciste esta circunferencia. (señalando el punto D y el punto B)
729.	Camilo:	¿Cómo así?
730.	Zaira:	¿Cómo sabes que el segmento y este punto y este punto con A(señala los puntos del triángulo), son congruentes?
731.	Camilo:	¿Son congruentes, se me olvidó?
732.	Zaira:	¡Iguales!
733.	Camilo:	(toma las medidas de cada uno de los lados de triángulo con la herramienta, distancia y longitud)
734.	Francisco:	Ah porque cuando medimos (…)
735.	Camilo:	(Interrumpe a Francisco) No, no, no mira ya acá tiene la respuesta, ahí está porque cuando los medimos da lo mismo.
736.	Zaira:	¿Y no será que no se puede mirar, o justificar o argumentar con lo visto anteriormente?
737.	Camilo:	No, no se puede imposible, solo construcción (cierra la Tablet y no deja observar más la construcción.
738.	Zaira:	Jeje, pero y sí (…)

739.	Francisco:	Yo le pregunté al profesor qué si se podía explicar con la mediatriz y dijo que no (Camilo mueve la cabeza en señal de negación)
740.	Zaira:	¿Y cómo sabes que se puede por mediatriz?
741.	Francisco:	Porque la mediatriz ¿uno ve el ángulo?
742.	Zaira:	Uy, uy, uy cuidado.
743.		**GRUPO 4 Conformado por Ana (inv.), Carolina, Julieta (inv.)…**
744.		Ana empieza explicando en que consiste la construcción que está realizando. Da inicio con el triángulo ABC 
745.	Ana: (inv.)	Entonces digamos mira, si por ejemplo yo voy a poner el B y el C alineados (arrastra los vértices del triángulo hasta que visualmente los segmentos AB y AC parezcan congruentes). Sin embargo, el A, digamos este de acá abajo (señala un punto debajo del triángulo con el dedo) nunca podrá tener la medida de estos dos (señala los puntos B y C)  Entonces por ejemplo acá voy a ver en la cuadrícula, ¿ves no quedan del mismo lado? 
746.		Ana sigue la exploración y usa otro método, construye el triángulo equilátero a partir de las medidas y luego ajusta la circunferencia para uno de sus vértices fuera el centro y los otros dos pertenecieran a dicha circunferencia. 
747.	Laura:	Vale cuéntame y ahí, ¿qué estás tratando de intentar?

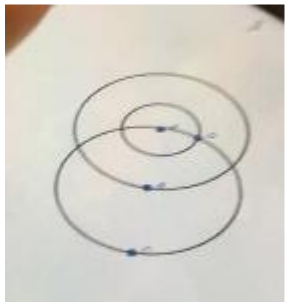
748.	Ana:	Bueno pues como ahorita Clara (estudiante que presentó la construcción del triángulo isósceles), pues con los dos segmentos lo trató de hacer así, también lo voy a tratar de hacer así.
749.		Carolina y Julieta ríen.
750.	Laura:	¿Qué pasó, cuéntenme?
751.	Julieta:	Casi no podemos.
752.	Carolina:	No es que casi se nos desarma. (Se observa la siguiente construcción). 
753.	Laura:	Casi se les desarma y por qué se les desarmó, yo quiero ver.
754.	Julieta:	Una parte de acá y pum se estiró, señalando uno de los vértices del triángulo
755.	Carolina:	Hay no, hay no, muy feo eso. Es qué no sabemos cómo organizarlo. 
756.	Julieta:	Es que si movemos eso (El centro de una de las circunferencias), se vuelve pequeño (una de las circunferencias).
757.	Carolina:	Toca con otra, otra forma (mueve la construcción).
758.	Julieta:	¿Qué haces? Dirigiéndose a Carolina.
759.	Carolina:	No sé (Borra la construcción y se sale de la vista gráfica de GeoGebra).
760.	Julieta:	Mmm (con tono de desagrado) ¿Qué haces, ¿qué hiciste? Ah ya (Regresan nuevamente a la vista gráfica de GeoGebra).
761.	Ana:	A ver, no funciona. (Hace la siguiente construcción)  Bueno creo que no funciona. Ah, a ver uno de acá, ¡¿qué me puede servir?! (Revisa las opciones de GeoGebra, elige la opción, arco de circunferencia del software)Ah.
762.		Julieta realiza una construcción con dos circunferencias, una con centro en A y radio AB, la segunda con centro en B y radio BD, D un punto sobre la circunferencia con centro en A.

		
763.	Carolina:	Y si movíamos algo la otra cosa se descuadraba, entonces pues tuvimos que (…).
764.	Profesor:	O sea que la circunferencia me sirve para qué. O sea para qué utilizar circunferencias.
765.	Julieta:	Para que de la misma medida.
766.	Profesor:	Y bueno, por qué hacer este así que se corten, por qué hacerlas y no así cómo hacían las otras del triángulo isósceles, la que hizo Clara, ¿se acuerdan? (El profesor señala ambas circunferencias).
767.	Julieta:	Pues no porque ahí siempre que uno hace un círculo le saca una línea y esa línea se supone que está midiendo lo mismo.
768.	Profesor:	Trata se seguir lo que me estás diciendo en la Tablet de Carolina.
769.	Carolina:	Yo no (…) yo no he, (Se dirige a Julieta) dime.
770.	Profesor:	¿A ver cómo era? (Carolina hace una circunferencia con centro en A y radio AB).
771.	Carolina:	¿El otro círculo de dónde lo sacaba?
772.		Julieta construye la otra circunferencia con centro en B, pero el radio es BC, con C un punto que pertenece a la circunferencia con centro en A. 
773.	Profesor:	Ah puede ser cualquiera. ¿Sí o sea que puede ser que este (la circunferencia) sea más chiquito que el otro? O tienen que tener algo, (Se dirige a Ana) ¿tú qué dices?
774.	Ana:	No.
775.	Julieta:	El círculo tiene que tener el mismo tamaño que el otro, para poder tener el triángulo (…) A ver espérate a ver (…)
776.	Profesor:	A ver hágale ahí usted (Julieta traza los segmentos AB, AC Y CB) 

777.	Carolina:	Lo hiciste al revés pero bueno.
778.	Julieta:	No.
779.	Carolina:	¡Bórralo! ¡Bórralo!
780.	Profesor:	¿Será?
781.		Julieta hace nuevamente la construcción. 
782.	Julieta:	No sé, es que no sé.
783.	Profesor:	¿Cómo hago para que se quede quieto? ¿Ah? Inténtalo ahora que se quede quieto, es que para que se quede quieto (…), para que pertenezca ahí le toca mirar a uno mirar que quede ahí fijo. Dale atrás (Pidiendo borrar los últimos pasos de la construcción).
784.		(El docente se retira a otro grupo y permite que las estudiantes continúen la exploración).
785.	Laura:	Ahí lo volviste a hacer, ¿cierto?
786.	Julieta:	Sí ya, ahí lo volví a hacer. Lo voy a medir. Ahí (Toma las medidas de los lados de triángulo y comprueba que el triángulo no es equilátero moviendo los vértices del triángulo) No sé, no sé ahí que paso.  
787.		(Luego de explorar, Julieta realiza correctamente la construcción de triángulo equilátero, mientras que Carolina y Ana continúan con la construcción del triángulo anterior cada una en una Tablet distinta)  (Construcción de Carolina)

<table>
<tr><td></td><td></td><td>
</td></tr>
<tr><td>788.</td><td>Ana:</td><td>Entonces esta es la mía (Muestra la construcción).</td></tr>
<tr><td>789.</td><td>Carolina:</td><td>Uy que chiquita.</td></tr>
<tr><td>790.</td><td>Julieta:</td><td>No sé, la verdad es que no sé cómo hacer.</td></tr>
<tr><td>791.</td><td>Laura:</td><td>(Pregunta a Carolina)¿No sabes que hiciste?</td></tr>
<tr><td>792.</td><td>Carolina:</td><td>Pues solo hice ahí el triángulo, ahí en las dos circunferencias.</td></tr>
<tr><td>793.</td><td>Julieta:</td><td>Y yo hice lo mismo.</td></tr>
<tr><td>794.</td><td>Laura:</td><td>Pero ese (la construcción de Carolina) sí funciona. Y, ¿qué tiene ese de diferente a este?</td></tr>
<tr><td>795.</td><td>Julieta:</td><td>Pues que los círculos más pequeños.</td></tr>
<tr><td>796.</td><td>Laura:</td><td>Mmmm, no sé exploren y miremos a ver. (señala la construcción de Carolina) Mira ese también tiene los círculos más pequeños.</td></tr>
<tr><td>797.</td><td>Carolina:</td><td>Es que, ¡uy! Algo le hizo esto que tiene aquí un coso gris y ese hace que no se mueva. (Refiriéndose al punto F como la intersección entre ambas circunferencias, en comparación con el punto C que no es intersección).</td></tr>
<tr><td>798.</td><td>Laura:</td><td>¿Tiene un coso gris?</td></tr>
<tr><td>799.</td><td>Carolina:</td><td>Sí y ese hace que no se mueva</td></tr>
<tr><td>800.</td><td></td><td>Grupo de</td></tr>
<tr><td>801.</td><td></td><td>Paola explica la construcción que hicieron con María José.
</td></tr>
<tr><td>802.</td><td>Paola:</td><td>Hicimos dos circunferencias y las dos tiene algo en común, el punto de afuera y el punto del centro (señala los centros de las circunferencias), entonces como el radio de las dos son iguales entonces si tu pones un triángulo en el medio (..) entonces va a tener la misma medida.</td></tr>
</table>

803.	Leonor:	Ustedes dicen que este triángulo es equilátero ¿cierto? justifiquen qué los tres lados son iguales.
804.	Paola:	(toma una regla la cual intenta sobreponer en la Tablet)
805.	Leonor:	¡Paola espérate, espérate! ¿dime por qué son iguales? ¿Por qué el lado AB es igual al lado AC?
806.	Paola:	Umm por lo que acabo de explicar.
807.	Leonor:	No, me explicaste que todos son iguales y yo solamente quiero saber por qué AB es igual a AC?
808.	Paola:	Porque las dos circunferencias, el radio de las circunferencia siempre va a ser de la misma distancia (..) las dos circunferencias tienen el mismo radio y estamos haciendo una línea en cada radio de las dos circunferencias y así queda igual (…)
809.	Leonor:	¿si, entendiste? (le pregunta a María José)
810.	María José:	Ujum.
811.	Leonor:	¿Me lo puedes explicar tú?
812.	María José:	Que los dos círculos tienen la misma medida entonces por esto permite que el triángulo sea equilátero perdón isósceles.
813.	Leonor:	¿Qué es lo que termina siendo iguales en las circunferencias? ¿Qué son iguales?
814.	María José:	El radio.
815.	Leonor:	El radio. ¡Aja muy bien!
816.		Grupo de Nicolas.
817.	Andrés:	Primero hice dos circunferencias, si. Entonces esta (dibuja una circunferencia)
	Leonor:	¿Cualquier dos, o especiales?
818.	Andrés:	Sí, con esta opción la de circunferencia con el centro.
819.	Leonor:	Bueno.
820.	Andrés:	Y de B hago una circunferencia hasta A, ¿si?
821.	Leonor:	Aja.
822.	Andrés:	Después cojo la opción de rectas (selecciona la herramienta "segmento") de segmento diré y pues hago un segmento de A a B y se crea un nuevo punto que es D y de D a A. Eso fue todo lo que hice.
823.	Leonor:	¿Tu estas segurísimo que es un triángulo equilátero?
824.	Andrés:	Si.
825.	Leonor:	¿Por qué?
826.	Andrés:	Eh pues porque siempre va a tener la misma medida porque está en el centro (arrastra un vértice del triángulo). ¡Uyy! (se asombra porque el triángulo no es equilátero)
827.	Leonor:	Es que cuando hiciste la segunda circunferencia no te quedo bien. Vuelve a empezar y te digo por qué no te quedo bien.
828.	Andrés:	(Borra la construcción realizada)
829.	Leonor:	Has la primera.
830.	Andrés:	Bueno.

831.	Leonor:	Es que mira cuando hagas la segunda, tu oprimes B y luego tienes que tocar a A
832.	Andrés:	(intenta seguir las instrucciones)
833.	Leonor:	Porque si no tocas a A con el dedo, porque si no tocas a A te queda (…) ahí. Tu estas tocando a C no a A. Vuelve a empezar 
834.	Andrés:	Ah. (construye nuevamente una circunferencia)
835.	Leonor:	Ahí cuando construyes esa, con tu dedo señala a A. Vete con el dedo hasta a A.
836.	Andrés:	(intenta seguir las instrucciones)
837.	Leonor:	¡No! Arrastrando. Vuelve a empezar. No debe quedar marcado C sino de B te mueves hasta a A.
838.	Andrés:	xxx
839.	Leonor:	Toca a Ah ¡eso ya! Ahora si te queda bien.
840.	Andrés:	(construye un punto de intersección de las circunferencias y construye el triángulo cuyos vértices son ese punto y los cetros de las circunferencias)
841.	Leonor:	¿Explícame por qué es un triángulo equilátero?
842.	Andrés:	Es equilátero pues porque primero tiene todos sus lados iguales y (…)
843.	Leonor:	¿Por qué sabemos que tiene todos sus lados iguales?
844.	Andrés:	Porque al medirlo (…) (mide los lados del triángulo)
845.	Leonor:	¿Se necesitará medirlo? Bueno mídelo. Así lo compruebas.
846.	Andrés:	Si.
847.	Leonor:	Arrastra a B.
848.	Andrés:	(Arrastra el punto B)
849.	Leonor:	No importa que el triángulo se agrande o se achique pero tiene todos sus lados (…)
850.	Andrés:	Siempre tiene sus lados de la misma distancia.
851.	Leonor:	¿Necesitabas medirlo para garantizar eso?
852.	Andrés:	No.
853.	Leonor:	¿Cómo sabias sin medirlo? ¿Cómo justificar que es equilátero sin medirlo?
854.	Andrés:	No ahí si no …
855.	Leonor:	Mira el lado Ab siempre será igual al lado AC
856.	Andrés:	Si.
857.	Leonor:	¿Por qué?
858.	Andrés:	Porque si es un triángulo equilátero, siempre tiene que tener la misma distancia.
859.	Leonor:	Ah, pero tu estas comprobando que es equilátero ¿sí? Pero por la construcción que hiciste ¿Quiénes son AB y AC? ¿Quiénes son? Además de los lados del triángulo.

860.	Andrés:	Son (…) eh …
861.	Leonor:	En la construcción que tu tiene quienes son esos lados
862.	Andrés:	mmm
863.	Leonor:	Oculta esta circunferencia (Señala la circunferencia con centro en B)
864.	Andrés:	¿Como?
865.	Leonor:	Ocultar (…) creo que aquí (señala la herramienta ocultar) ¿Cómo se ocultan los objetos?
866.	Andrés:	No sé.
867.		Andrés pide ayuda al profesor qué le explica el procedimiento para ocultar, seguido a esto oculta una circunferencia.
868.	Leonor:	Dime quienes son el lado AB y el lado AC
869.	Andrés:	Siempre van del centro a los (..) lados del circulo y pues siempre va a tener la misma distancia.
870.	Leonor:	¿Quiénes tiene la misma distancia?
871.	Andrés:	De AC y de AB.
872.	Leonor:	Exactamente ¿por qué?
873.	Andrés:	Porque (…)
874.	Gustavo:	Porque del centro de la circunferencia a cualquier lado de la circunferencia siempre va a tener la misma distancia.
875.	Leonor:	Entonces ya saben que este lado es igual a este (señala los lados AB y AC)
876.	Andrés:	Sí.
877.	Leonor:	Ahora pon la otra circunferencia.
878.	Andrés:	(desoculta la otra circunferencia)
879.	Leonor:	Y porque este es igual a este (señala los lados AB y BC)
880.	Andrés:	¿Cuál, BC?
881.	Leonor:	¿BC por qué es igual a AB?
882.	Andrés:	Porque B es el centro del otro circulo (…)
883.	Gustavo:	Y de B a C siempre va a tener la misma distancia
884.	Leonor:	Sí, ya dijimos que AB era igual a AC
885.	Andrés:	Si.
886.	Leonor:	Ya dijimos que BC era igual a AB entonces ¿Qué puedo concluir?
887.	Andrés:	Que cuando una figura se hace desde el centro de un circulo hasta afuera siempre va a tener la misma distancia.
888.	Leonor:	Si (..) sí, pero necesito decir que los tres son iguales y tu hasta ahora has dicho que de aquí es igual y que de aquí es igual (señala los lados del triángulo) ¿entonces?
889.	Andrés:	¿De CA y BC?
890.	Leonor:	¿por qué? ¿Por qué será CA igual a BC?
891.	Andrés:	Pues porque si los dos están en el centro siempre van a tener la misma distancia.
892.	Leonor:	¿Cuál distancia es igual?
893.	Andrés:	Esta (señala BC)
894.	Leonor:	¿Por qué?

895.	Andrés:	Porque como A y B son centros entonces van a tener la misma distancia al borde.
896.	Leonor:	¿Pero según cuál circunferencia?
897.	Andrés:	¡Ah! A la intersección de las dos (…)
898.	Leonor:	No tenemos una circunferencia que empiece en C (señala el punto C) (…) pero si tú dices: tú eres igual a él, él es igual a este como son estos dos?
899.	Andrés:	Iguales.
900.	Leonor:	Eso es lo que estás haciendo ahí mira, este es igual a este (señala los lados CA y AB) ¿cierto? Porque son radios de esta circunferencia. Este es igual a este (señala los lados CB y AB) ¿por qué?
901.	Andrés:	Porque son radios de esa circunferencia.
902.	Leonor:	Y ahora como decimos (..) antes dijimos AC, Ab perdón es igual a AC ¿cierto? Porque son radios de esta circunferencia (señala la circunferencia con centro en A) BC es igual a BA porque son radios de la circunferencia (señala los lados CB y AB) ¿entonces que puedo decir con respecto a BC y CA?
903.	Andrés:	Si, mmm
904.	Leonor:	¿Por qué los tres resultan iguales?
905.	Andrés:	Pues lo que yo pienso es que como los dos son radios siempre van la misma distancia al borde y como este es el borde entonces debe tener la misma distancia al radio.
906.	Leonor:	Si, exactamente.
		Dado que se acabó el tiempo de la clase no hubo socialización.
		Grupo de Alejandra
	Alejandra:	Con esta opción que dice polígono (selecciona la herramienta polígono regular)
	Leonor:	¡ay! ¿Y por qué será que la herramienta polígono regular de lo mismo? Arrastra
	Alejandra:	(arrastra un vértice) sigue siendo lo mismo
	Leonor:	Por qué será que (…) eso es otra manera.
	Alejandra:	Sí.
	Leonor:	¿Y por qué sabes que te queda todos siempre igual? ¿tú sabes que significa polígono regular?
	Alejandra:	No.
	Leonor:	Lo que pasa es que tu estas usando la herramienta polígono regular pero si no sabes que es un polígono regular no entiendes que hiciste.
	Alejandra:	Una clase de polígonos.
	Leonor:	Una clase de polígonos pero cual será esa clase de polígonos?.
	Alejandra:	Pero funciona.
		Grupo de Samuel A.
	Samuel:	Hice una circunferencia de A a B, luego hice otra de B a C pero el C lo muevo hasta el A para (…)
	Leonor:	¿Para qué?
	Samuel:	Para que no quede el C así libre, después pongo un punto acá (construye un punto de intersección entre las dos circunferencias) en la intersección de A y B [refiriéndose a las circunferencias] y después hago las rectas (…)

	Leonor:	Segmentos.
	Samuel:	Segmentos y le pongo para medirlos (construye los segmentos cuyos extremos son los puntos anteriormente mencionados y los mide) y todo queda igual.
	Leonor:	Arrastra.
	Samuel:	(arrastra un vértice del triángulo)
	Leonor:	¿Y tú tenías que medirlos para saber que eran iguales?
	Samuel:	No, también se puede ver nada más con la circunferencia.
	Leonor:	¿Por qué? ¿Por qué solamente mirando la circunferencia sabes que los lados van a quedar iguales?
	Samuel:	Porque si tu mueves un punto mueves la circunferencia entera y cuando mueves la circunferencia o sea (…) las dos circunferencias se mueven entonces las dos quedan iguales para dar la unión entre esos dos (señala los centros de la circunferencia)
	Leonor:	¿Esa unión de los puntos qué es de la circunferencia? ¿esto que es de la circunferencia? (señala el radio AB) ¿?que dice acá?
	Samuel:	De A.
	Leonor:	De A hasta B ¿Qué es de la circunferencia?
	Samuel:	El radio ¿creo?
	Leonor:	Sí. Que, ¿qué es de A a C?.
	Samuel:	Es como (…) no, no sé.
	Leonor:	Oculta esta circunferencia, ocúltala. Ocultar es con esta herramienta (señala la opción “ocultar”)
	Samuel:	(oculta la circunferencia con centro en B)
	Leonor:	Tu puedes decirme porque AB es igual a BC.
	Samuel:	Porque el A es el radio de la circunferencia (…)
	Leonor:	Es el centro.
	Samuel:	Bueno es el centro y B y C están pegados a la circunferencia (…)
	Leonor:	Entonces no tenías que medirlos porque tú sabes una propiedad de esos radios que ¿qué dice?
	Samuel:	mmm.
	Leonor:	Sin medirlo tú sabes que es lo mismo de aquí a aquí que de aquí a acá ¿cierto? (Señala dos lados del triángulo)
	Samuel:	Sí.
		FIN DE LA CLASE

ANEXO 4. SÍNTESIS POR CATEGORÍAS

Categoría	**Acciones del profesor**	**Vocabulario**	Mediadores	**Narrativa**
1. Solicita a los estudiantes compartir las estrategias de solución a un problema que involucran el uso del programa o apoyarse en el programa para apoyar lo que comunica.	1. Pide a un estudiante que reconstruya el proceso realizado para la solución de la tarea propuesta.			Pedir reconstruir el proceso que conllevó a institucionalizar una narrativa F5 Pedir reconstruir el procedimiento efectuado con SGD F10, F11, F11, F8, F1, F15 Solicita a un estudiante verbalizar el procedimiento realizado con SGD F13, F2
	2. Realiza preguntas en relación a la forma en que los resultados de una tarea son obtenidos y cómo se llega a ciertas conclusiones.		Realiza preguntas para que los estudiantes expliquen una representación con o sin el SGD F6, F15, F15	Realiza preguntas para que los estudiantes caractericen una herramienta del programa, una definición, un hecho geométrico o una representación con o sin el SGD F6, F8, F2, F13, F13 Realiza preguntas para que el estudiante precise el procedimiento realizado F15
	3. Solicita al estudiante que se apoye en el programa para ampliar una idea o comunicarla de forma más clara.		Solicita destacar el proceso de construcción F1, F15	Solicita que el estudiante use una herramienta del SGD para validar su afirmación F10, F1, F15
	4. Solicita al estudiante que aclare una acción realizada en el programa al momento de solucionar el	Emplea términos no especializados de un estudiante para indagar su idea matemática de este. F1		Solicitar explicar el uso de una herramienta SGD F10, F10, F8, F15 Solicita al estudiante que verbalice el procedimiento

Categoría	Acciones del profesor	Vocabulario	Mediadores	Narrativa
	problema propuesto			realizado con SGD F15, F15
2. Recopila información relevante con la intención de focalizar la discusión en desarrollo y precisar ideas	1. Sintetiza los resultados obtenidos de las intervenciones realizadas			Resalta las condiciones que no cumple una construcción F1
	2. Recoge ideas que establecen el foco de atención para destacar ideas o afirmaciones realizadas por los estudiantes cuando utilizan el programa.			Retoma ideas mencionadas anteriormente por los estudiantes o el profesor para focalizar la discusión F13, F13, F2
	3. Institucionaliza el saber	Fomenta el cambio de un término coloquial por uno especializado F4 Institucionaliza una proposición a partir de las propuestas de los estudiantes remplazando los términos coloquiales y dinámicos por los términos especializados correspondientes F4 F6		Indaga acerca de características propias de una definición. F4 F4 f14 Solicita completar el procedimiento, la definición, el hecho geométrico que se está institucionalizando F5, F6 Solicita que los estudiantes verbalicen una definición institucionalizada anteriormente F12
	4. Reacciona para aclarar o precisar	Corregir el uso de un término F5, F12, F15		Solicita que se aclare la idea sobre un término empleado F11
3. Utiliza las ideas de los estudiantes para establecer discusiones entre ellos utilizando el programa para apoyar sus ideas.	1. Invita a los estudiantes a comparar las ideas expresadas por dos o más estudiantes sobre un mismo asunto.	Parafrasear dos propuestas de construcción, modificando los términos utilizado. F3, F14		Solicitar comparar dos o más propuesta de construcciones, procedimientos, hechos geométricos, definiciones F3, F5, F14

Categoría	Acciones del profesor	Vocabulario	Mediadores	Narrativa
	2. Transmite las dudas o propuestas de un estudiante a los demás compañeros.			Pide a los estudiantes responder cuestionamientos planteados por algún miembro de la clase apoyándose del SGD. F7
	3. Retoma las ideas de los estudiantes en las discusiones grupales y les da un valor de verdad a las mismas.			
	4. Solicita a los estudiantes cuestionar los aportes realizados por sus compañeros.	Cuestionar el uso de un término especializado que no corresponde F5	Solicita validar la construcción propuesta por un estudiante o por él F7, F1, F2, F2, F2	Solicita a un estudiante opinar acerca de una construcción realizada por un compañero. F7, F7, F2, F2, F2, F15 Solicita a los estudiantes opinar sobre las ideas expuestas por un compañero F12, F12, F16
	5. Pide a los estudiantes interpretar la idea expuesta por otro estudiante o por el profesor.			Solicitar evaluar si en una construcción propuesta cumple una propiedad F3, F6, F14 Solicita prever lo que ocurrirá al efectuar con el SGD, la propuesta de un miembro de la clase F4, F4 , F11 Cuestiona a un estudiante sobre la interpretación a una verbalización de algún compañero F12, F16

Categoría	**Acciones del profesor**	**Vocabulario**	Mediadores	**Narrativa**
	6. Utiliza o parafrasea la respuesta de un estudiante con el propósito de generar discusiones	Explicitar en una oración el objeto al cual se le está atribuyendo una propiedad F5	Construir una figura en SGD que corresponda a la propuesta de una estudiante. F3, F,3 F7 F1	Propone construcciones que corresponden a lo expresado por un estudiante F3. Cuestiona lo expuesto por un estudiante F4, F1, F2, F15 resalta la construcción realizada o una idea expuesta por un miembro de la clase para que los demás la cuestionen F7, F16
	7. Retoma las ideas que un(os) estudiante(s) ha(n) socializado y rescata su pertinencia.			
	8. Pregunta por posibles argumentos que validen las producciones realizadas.		Solicita especificar una propiedad o característica que cumplen ciertos objetos geométricos en una construcción. F6, F8, F9	Solicita apoyarse de una definición, hecho geométrico, propiedad o procedimiento para validar una idea F8, F13, F15, F16, F16, F16, F16, F16, F16
4. Fomenta reflexiones y autoevaluaciones de los estudiantes frente a sus ideas o las de sus compañeros cuando se discute acerca de una estrategia de solución de la tarea utilizando el programa.	1. Interviene con propuestas que generan incertidumbre		Solicitar modificar un medidor visual F3, F7, F2 Construir una figura en SGD que corresponda a la propuesta de una estudiante. F3	Propone una construcción que lleva a evaluar casos F3 Pide realizar una construcción que implica evaluar casos que los estudiantes no han teniendo en cuenta F3, F2
	2. Promueve la comunicación pidiendo a los estudiantes		Solicita identificar errores en una construcción	Solicita a un estudiante defender la validez de una

Categoría	Acciones del profesor	Vocabulario	Mediadores	Narrativa
	defender sus ideas frente a otras que surjan o que las invalidan		realizada en el SGD. F8, F15	construcción realizada en el SGD cuando surge un argumento que la invalida F8, F15
	3. Busca que los estudiantes evalúen sus propuestas y los de sus compañeros estableciendo su valor de veracidad.	Solicita especificar el uso de una herramienta del SGD F2		Solicita a un estudiante expresar una postura sobre una afirmación realizada por un miembro de la clase. F12, F1
	4. Propone nuevas variables que pretenden cuestionar una relación de dependencia.			
	5. Cuestiona la validez de las afirmaciones solicitando contraejemplos a los estudiantes			
	6. Indaga sobre las ideas o afirmaciones de los estudiantes para favorecer que ellos mismos revisen y modifiquen sus ideas e interpreten las de los demás.	Introducir un término en la conversación. F3 Modificar el uso de un término. F3 Expresar significado asociado a un término. F3, F2 Cuestiona el uso de un término F12	Solicitar el término matemático que corresponde a un mediador visual F3, F3 Cuestiona un paso innecesario del proceso de construcción para que evidencie que lo modifique F15, F15	Evaluar el uso de una herramienta del SGD F3, F10, F10 Evaluar afirmaciones que se basan en lo que se observa del SGD F3 F11, F2, F14, F15 Cuestiona las propiedades que se proponen incluir en una definición F4 Solicitar prever lo que sucederá en el programa si se lleva a cabo la propuesta de un estudiante F4, F15

Categoría	**Acciones del profesor**	**Vocabulario**	Mediadores	**Narrativa**
				Solicitar modificar una propuesta de construcción F3 Cuestiona sobre las afirmaciones de los estudiantes, con la intención que ellos modifiquen sus ideas F12
	7. Acepta una propuesta o construcción errónea con el propósito de que los estudiantes lo evalúen.		Solicita evaluar si una representación cumple una condición, propiedad característica F1	Solicita destacar aspectos erróneos de una construcción. F1
	8. Explicita o resalta el punto crítico de la conversación		Solicita modificar una construcción para estudiar una condición o propiedad F1	Destaca como punto crítico de la conversación las condiciones que se deben cumplir en una definición, hecho geométrico procedimiento, construcción F4, F7, F1