INTRODUCCIÓN A LA NOCIÓN DE VARIACIÓN EN ESTUDIANTES DE GRADO SEXTO

JULIÁN RICARDO GÓMEZ NIÑO
DIEGO ALEJANDRO TORRES DÍAZ

INTRODUCCIÓN A LA NOCIÓN DE VARIACIÓN EN ESTUDIANTES DE GRADO SEXTO

GÓMEZ NIÑO JULIÁN RICARDO
CÓDIGO: 2011182018
TORRES DÍAZ DIEGO ALEJANDRO
CÓDIGO: 2011182028

DIRIGIDO POR:

RODOLFO VERGEL CAUSADO

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
ESPECIALIZACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
BOGOTÁ D.C
NOVIEMBRE, 2011

AGRADECIMIENTOS

Nuestros más sinceros agradecimientos a:

- *Dios, por darnos la vida, la salud y la sabiduría para contribuir en la formación de excelentes ciudadanos.*
- *Nuestra familia, por su comprensión, apoyo y motivación para asumir nuevos retos.*
- *Doctor Francisco Murillo, rector del Colegio Champagnat, por permitir desarrollar allí investigación.*
- *La profesora Alicia Guzmán y al profesor Rodolfo Vergel por su paciencia y dedicación en las orientaciones durante el desarrollo de este trabajo.*
- *Los estudiantes de sexto grado y los profesores de sistemas, por estar siempre dispuestos a ayudar y compartir sus experiencias.*

Para todos los efectos, declaro que el presente trabajo es original y de mi total autoría; en aquellos casos en los cuales he requerido del trabajo de otros autores o investigadores, he dado los respectivos créditos

Resumen Analítico en Educación

TIPO DE DOCUMENTO:
Trabajo de Grado.

ACCESO AL DOCUMENTO:
Universidad Pedagógica Nacional

TÍTULO DEL DOCUMENTO:
Introducción a la Noción de Variación en Estudiantes de Grado Sexto

AUTOR(ES):
Gómez Niño Julián Ricardo
Torres Díaz Diego Alejandro

PUBLICACIÓN:
Bogotá, D.C., 2011, 47 páginas

UNIDAD PATROCINANTE:
Universidad Pedagógica Nacional

PALABRAS CLAVES:
Variación, Representaciones del Pensamiento Variacional, Graficación Covariacional y El Juego como Estrategia Didáctica.

DESCRIPCIÓN:
El trabajo de grado evidencia una actividad llamada “EL JUEGO DEL ESTIMADOR”, que hace enfrentar a los estudiantes del grado sexto, ante fenómenos que permiten desarrollar la noción de variación. El juego es utilizado como elemento motivador para su implementación al interior del aula y la estimación como una estrategia de acercamiento y reflexión continua de los resultados.

FUENTES:

- Cantoral, R. y Reséndiz, E. (2003). *El papel de la variación en las explicaciones de los profesores: un estudio en situación escolar*. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 6(2), 133-154.

- Castaño, J. (1985). *Descubro la Matemática*. Bogotá: Comunidad de Hermanos Maristas de la Enseñanza.
- Dolores, C. & Salgado G. (2009). *Elementos para la Graficacion Covariacional.* Revista Número, Didactica de la matemáticas. Volumen 72, Diciembre de 2009. (pp. 63 - 74)
- Garcia G., Serrano C. & Salamanca J. (2000). *"Estudio del pensamiento variacional en la educación básica primaria".* Memorias del XVII coloquio distrital de matemáticas y estadística. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.
- Gómez, J. & Grisales A. (2011). *Mi Maleta Matemática*. Bogotá: Comunidad de Hermanos Maristas de la Enseñanza.
- MEN. (2004). *Pensamiento variacional y tecnologías computacionales*. Bogotá: Ministerio de Educaión Nacional, (MEN).
- Vasco, C. (2002). El pensamiento variacional, la modelación y las nuevas tecnologías. En Ministerio de Educación Nacional (Ed.), *Congreso Internacional Tecnologías Computacionales en el Currículo de Matemáticas*: *memorias,* (pp. 109-118). Bogotá, Colombia: MEN.
- Vergnaud, G. (1991). *El niño las matemáticas y la realidad. Problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria.*México: Trillas.
- Font V. (2002). *"Funciones y derivadas".* Memorias XXI Coloquio distrital de matemáticas y estadística. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional

CONTENIDOS:
El trabajo de grado consta de cuatro capítulos; en el primero, se reseña la contextualización problemática que nos motivó a realizar este trabajo; en el segundo, se desarrolla el marco teórico que sirvió como referente y soporte de la actividad propuesta; en el tercero, se describe la metodología y las fases que se empleó para dicha realización, Y finalmente en el cuarto capitulo, se realiza un análisis descriptivo de las estrategias que utilizaron los estudiantes.

METODOLOGÍA:
El trabajo se enmarca dentro de una metodología cualitativa de naturaleza descriptiva y exploratoria, puesto que pretende no solo observar y reconocer las actividades que tiene una mayor incidencia en el desarrollo de la noción de variación, sino además, describir algunas estrategias que utilizan los estudiantes del grado sexto para resolver situaciones problema de tipo variacional.

CONCLUSIONES:
- La actividad llamada "El juego del estimador" permitió: explorar diversas estrategias de solución, crear un contexto con planteamientos de nuevos problemas, utilizar el método natural de ensayo-error y ayudar a estructurar un pensamiento reflexivo respecto a la variación.

- Los diferentes tipos de representación utilizados en la actividad lograron crear un ambiente rico y variado de significados, en el que se podía intuir la covariación entre cada una de las cantidades y los efectos que causaban dichos comportamientos.
- El método que se utilizó para graficar con segmentos los cambios observados, permitió madurar la idea del "cuánto" y el "cómo" cambia la variable independiente y a su vez que efectos tiene dependiente.
- La actividad con geogebra permitió mejorar la fluidez representacional en cuanto las cantidades eran más exactas, por lo tanto pudo validar la representación grafica obtenida anteriormente del cilindro.

Fecha de elaboración del resumen: 01/12/2011

.

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo fue elaborado como requisito para obtener el titulo de Especialización en Educación Matemáticas, otorgado por la Universidad Pedagógica Nacional. La idea de emprender este escrito surgió del trabajo desarrollado en el marco del seminario Didáctica del Calculo y partió desde una necesidad detectada en nuestras aulas de clases del grado sexto ya que los autores teníamos a cargo este grado. A partir de la experiencia obtenida en la práctica como maestros dentro de nuestras instituciones evidenciábamos que para este grado son pocas las actividades diseñadas donde los estudiantes tienen la oportunidad de sensibilizarse ante los fenómenos de variación e ir desarrollando algunas nociones. Por lo tanto, se diseñó e implementó una actividad llamada “El juego del Estimador” para desarrollar la noción de variación en estudiantes de grado sexto.

Se utilizó el juego como elemento motivador para su implementación al interior del aula y la estimación como estrategia de acercamiento y reflexión continua de los resultados.

El trabajo desarrollado lo presentamos en cuatro capítulos; en el primero, se reseña la contextualización problemática que nos motivó a realizar este trabajo; en el segundo, se desarrolla el marco teórico que sirvió como referente y soporte de la actividad propuesta; En el tercero, se describe la metodología y las fases que se empleó para dicha realización, Y finalmente en el cuarto capitulo, se realiza un análisis descriptivo de las estrategias que utilizaron los estudiantes.

1 CONTEXTUALIZACIÓN PROBLEMATICA

Desde nuestra experiencia como docentes hemos evidenciado que la mayoría de los estudiantes desean encontrar en el colegio ambientes que le permitan recrearse y al mismo tiempo aprender, una anécdota realizada por Gómez y Grisales (2011 p. 3) cuenta lo siguiente: "…La profesora Patricia se encuentra a un niño de cinco años en el patio del colegio y le pregunta: ¿Sebastián para dónde vas a toda carrera?, y él responde: para el parque, ella nuevamente le pregunta: ¿Por qué no estás en clase?, y finalmente él le responde: ¡ ...ha… !, estoy aburrido en este colegio, aquí ponen muchas tareas y yo vine fue a jugar…". Por lo tanto, esto nos hace reflexionar como docentes sobre qué actividades pueden ser significativas para el estudiante.

Por otro lado, en Colombia, y en general en varios países del mundo, cuando se habla del mejoramiento de la calidad en educación y de las tendencias o retos actuales de los futuros profesionales, se habla de las tecnologías de información y comunicación (TIC). En nuestro país, el Ministerio de Educación Nacional (MEN) desde el año 2000, comprometido con estos desafíos, viene proponiendo incorporar nuevas tecnologías en el currículo de matemáticas. En el año 2004 publicó en varias cartillas el proyecto llamado *"Incorporación de nuevas Tecnologías al Currículo de la Educación Básica Secundaria y Media de Colombia",* proyecto en el cual participaron varias instituciones educativas y docentes. En la cartilla sobre Pensamiento Variacional y Tecnologías Computacionales (2004, p. 31) se insiste en impulsar el estudio del pensamiento variacional desde muy temprano edad, dado que las deficiencias encontradas respecto al aprendizaje de este pensamiento son alarmantes.

Dolores C. y Salgado G. (2009, p.64) presenta que una de las dificultades se debe a que la mayor parte de los métodos que utiliza la educación media se enfoca en la ubicación de la grafica y omite o deja en un segundo plano el comportamiento de la misma. Wainer (1992) y Hitt (1988) citados en Dolores (2009. P. 64) reportan que los estudiantes presentan dificultades para articular diferentes representaciones, para comunicar una grafica y para extraer información de una grafica.

Un aspecto que no hay que olvidar es el manejo que le están dando los estudiantes de la sociedad colombiana a las herramientas computacionales, en aras de obtener mayor información en menor tiempo, manteniendo relaciones virtuales con sus amigos, sin importar el lugar en el que se encuentren. Este elemento es determinante en el aspecto motivacional de los estudiantes, pues sienten que en estas herramientas se puede hallar más información. Sin embargo, se ha convertido en un elemento que ha hecho que su capacidad de análisis disminuya, pues han comenzado a depender de las tecnologías para operaciones y cuestiones muy simples que se podrían hacer sin mayor esfuerzo de forma mental, para dejar encargadas a las máquinas de todo eso y más. Este aspecto no debe desmotivar la propuesta, sino que debe encaminarse a un análisis al interior del aula para permitir enfocar estas herramientas.

Estas exigencias tanto del MEN como la de los estudiantes nos invita como docentes a reflexionar y actualizar nuestras actividades en las aulas. Sin embargo, a pesar de estas muy buenas intenciones se evidencian dos dificultades en nuestro contexto cultural y educativo:

1) Muchos docentes siguen arraigados en la forma en que aprendieron su disciplina y consideran que su quehacer está correcto y no deben modificarlo, pues les ha dado resultados. Esto hace que sean renuentes a implementar nuevas propuestas pedagógicas en el aula y siguen cerrando sus ojos a nuevas oportunidades de mejorar aún más sus prácticas.
2) Por otro lado, existen docentes que están abiertos a modificar sus prácticas, procurando estar a la vanguardia en tecnología y recursos didácticos para que sus estudiantes comprendan aún más, pero se ven limitados por factores económicos que limitan la existencia de material educativo adecuado para este fin ó simplemente no cuentan con las oportunidades de capacitarse en este ámbito.

1.1 PREGUNTA ORIENTADORA

¿Qué actividades posibilitan el desarrollo de la noción de variación en alumnos de grado sexto?

1.2 OBJETIVO GENERAL

Diseñar e implementar una actividad encaminada a desarrollar la noción de variación en estudiantes de grado sexto.

1.3 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Identificar algunos aportes didácticos relacionados con la noción de variación que puedan orientar el diseño de la actividad. (Juego, Tecnologías)
- Incorporar en dichas actividades algunas representaciones relacionadas con el pensamiento variacional y el software geogebra.
- Describir algunas estrategias utilizadas por los estudiantes cuando se enfrentan a situaciones de variación.

2 MARCO TEÓRICO

En este capitulo se describen las referencias teóricas tomadas de algunas investigaciones con el fin de orientar y fundamentar nuestro trabajo. El capitulo se encuentra organizado en cinco grandes aspectos, el primero relacionado con la variación, el segundo con el uso de las representaciones en el pensamiento variacional, el tercero en los métodos de graficación covariacional, y los dos últimos que se refieren a los aspectos didácticos de la enseñanza de la matemática en general.

2.1 LA VARIACIÓN Y EL PENSAMIENTO VARIACIONAL

Desde los primeros siglos de la historia el pensamiento variacional ha venido evolucionando a partir de la observación de fenómenos naturales, de cambios climáticos, avances en la caza y la pesca, y como solución a cualquier tipo de situación susceptible de ser cambiada. El MEN (2004, pp.1-6) señala que la evolución histórica de los sistemas de la variación inician alrededor de las tablas de valores babilónicas, de las gráficas de variación situadas en la edad media y de las fórmulas algebraicas de origen renacentista. Actualmente, a dicho concepto se le ha asignado un papel relevante para el modelaje de una gran cantidad de fenómenos dentro de diversas disciplinas, reconociéndolo como clave para la construcción del conocimiento científico.

De acuerdo con Vasco (2002, p.111) el pensamiento variacional es entendido como aquel *"que intenta producir mentalmente sistemas que relacionen sus variables internas de tal manera que covaríen en forma semejante a los patrones de covariación de cantidades de la misma o distintas magnitudes en los subprocesos recortados de la realidad"*. De la misma manera aclara, que no son definiciones, fórmulas y leyes estáticas.

Desde este punto de vista, el pensamiento variacional debe permitir la descripción de fenómenos e identificar las posibles causas de dichos cambios

Sin embargo, Bruno y Martinón (1997, citado en Garcia, Serrano y Salamanca), señalan que en la elaboración de situaciones de variación, uno de los aspectos también centrales es el de establecer expresiones semánticas equivalentes de cambio con expresiones semánticas de variación. Por ejemplo:

EXPRESIONES DE CAMBIO	EXPRESIONES DE VARIACIÓN
Ganar Regalar Perder	Aumentar Aumentar Disminuir

El desarrollo del pensamiento variacional no se da de manera independiente, sino en estrecha relación con los otros tipos de pensamiento matemático (numérico, espacial, métrico y aleatorio), e incluso con otros disciplinas (sociales, naturales, etc).

Además desde una visión pedagógica, Cantoral y Reséndiz, (2003, pp. 137-138) han evidenciado que la mayor atención de los estudiantes se logra cuando los conceptos geométricos y aritméticos se presentan de manera dinámica y variacional, que cuando se presenta de manera estática.

2.2 REPRESENTACIÓN DE SITUACIONES DE VARIACIÓN Y CAMBIO

Desde el punto de vista de Hitt (1998 citado en Font, 2002 p.15) un objetivo central de la enseñanza de la matemática es conseguir que los estudiantes sean capaces de pasar desde una representación a otra sin caer en contradicciones. La comprensión de un objeto matemático se entiende básicamente en términos de integración de representaciones mentales. Este mismo objetivo es asumido por muchos autores, que en sus investigaciones tanto de enseñanza como de aprendizaje han referenciado a Duval (2002)

Janvier (1988 citado en Font, 2002) en sus trabajos considera que las representaciones se pueden clasificar en cuatro tipos: gráfica, tabular, analítica y de expresión verbal. La representación gráfica hace potenciar la visualización y la geometría; la tabular pone de manifiesto los aspectos numéricos y cuantitativos; la analítica conecta los símbolos y el álgebra, y la verbal relaciona la capacidad lingüística.

Acosta, Castiblanco y Urquina (2004) contemplan en el documento del Ministerio de educación Nacional de Colombia, varias formas de representar situaciones de variación y las clasifican en dos tipos: las cualitativas y las cuantitativas. Las representaciones de tipo cualitativo pueden ser en forma escrita, pictórica y concreta (con modelos físicos o de simulación). Y las representaciones de tipo cuantitativo pueden ser en forma geométrica, tabular, gráfica y algebraica.

Una situación de cambio puede presentar magnitudes que cambian y otras que no. Es importante identificar estas magnitudes y la relación que existen entre ellas dentro de la situación. Por ejemplo, en una situación que consiste en llenar una vasija cilíndrica con copas de agua, podemos decir que las magnitudes que aumentan son: la altura del nivel del agua, el volumen del agua vertida en la vasija, el número de copas y el tiempo que de alguna manera está implícito cuando se llena la vasija en ciertos instantes; que la magnitud que disminuye es la capacidad del balde, y que las magnitudes que permanecen constantes son: el volumen total de la vasija y la capacidad de cada copa. La identificación de dichas magnitudes y su descripción verbal y/o escrita de cómo se comportan dentro de la situación se denomina un acercamiento cualitativo al fenómeno.

Sin embargo, este acercamiento no necesario debe ser verbalizado por los estudiantes para que el docente evidencie que se está acercando a la noción de variación. Los estudiantes también pueden realizar representaciones que muestren un entendimiento de dichas nociones. A continuación se presentan algunas representaciones que pueden ser descritas tanto en términos del docente como del estudiante.

Representación verbal:
Se realiza cuando se utilizan las palabras de manera oral o escrita para enunciar una situación o deducir observaciones. Estas pueden utilizarse por el docente para enunciar una situación, o por el estudiante como descripción de lo observado.
Es decir, un problema puede estar enunciado utilizando una representación verbal escrita como la siguiente:

> "*Juan vierte una copa de agua en una vasija cilíndrica, la altura que alcanza el nivel es de 1.5 centímetros. ¿Cuál es la altura que alcanza si verte 5 copas?* "

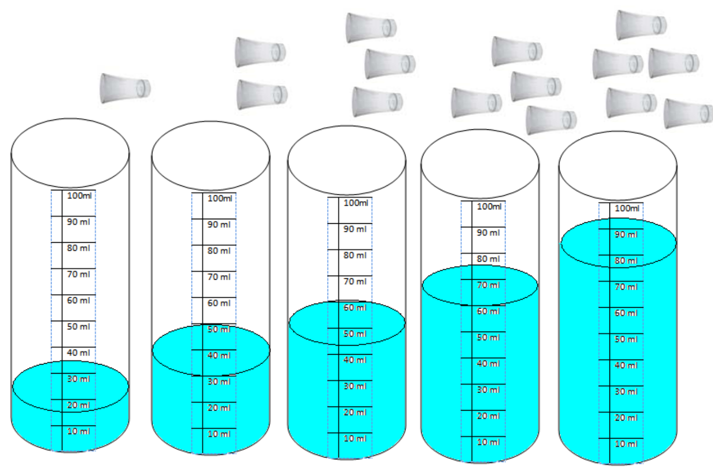
Y puede utilizarse por los estudiantes como deducciones de lo que está sucediendo. En este tipo representación se encentran las palabras de su lenguaje cotidiano, la argumentación, la interpretación y la comunicación de las observaciones que se hacen de las distintas situaciones de variación. Se espera que el estudiante al redactar con sus propias palabras la situación de cambio use expresiones como:

*"A medida que **aumenta** la cantidad de copas la altura **aumenta**"*

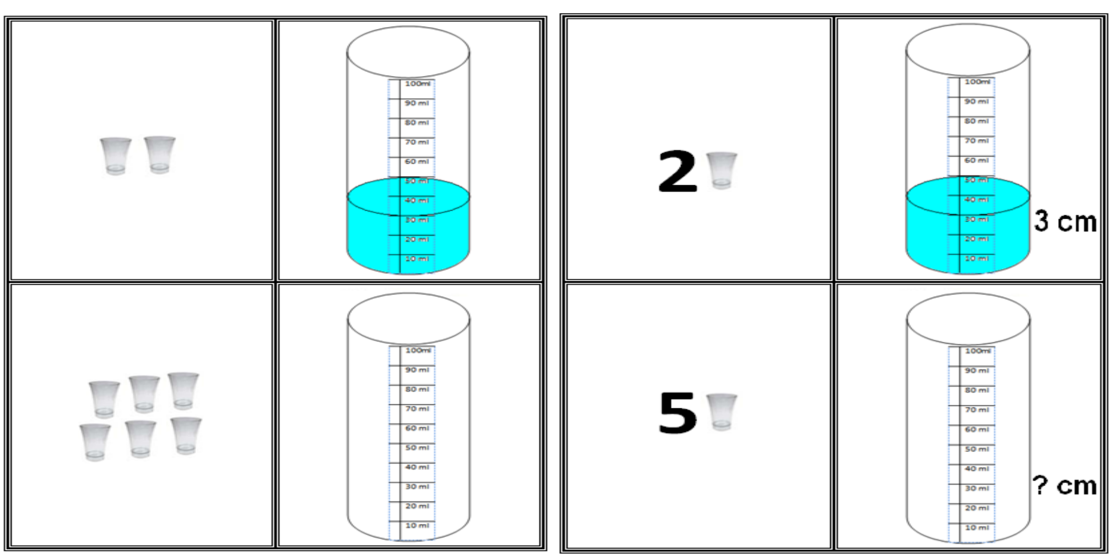
*“A medida que se vierte cada copa la altura **incrementa** a razón de 1.5 centímetros por copa”*

Representación pictórica:

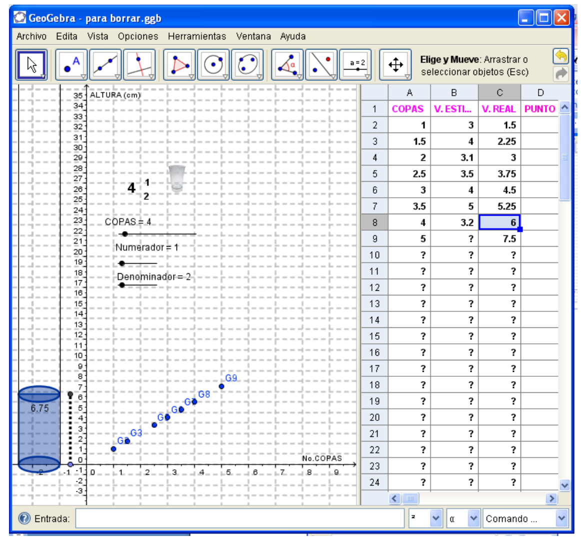
Consiste en dibujos que muestran de manera concreta la situación en los diferentes niveles. Estos dibujos no necesariamente lo utilizan los estudiantes, sino que pueden estar involucrados en una situación por el docente. Los dibujos pueden de alguna manera mostrar la relación que hay entre las variables. Por ejemplo, en el siguiente dibujo se evidencia el nivel del agua en relación al número de copas, el cual puede ser un dibujo del estudiante.



El docente puede enunciar un problema utilizando esta representación de la siguiente manera:



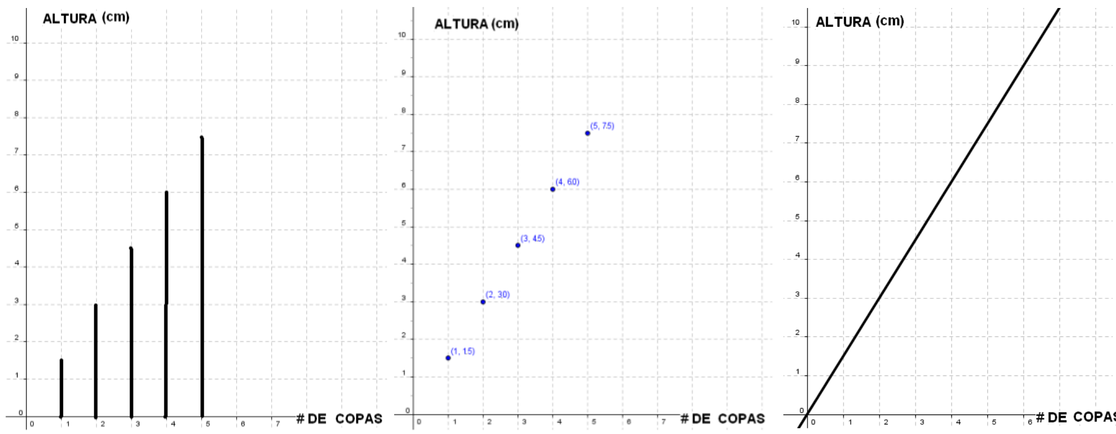
Representación de modelos físicos o de simulación:
Son aquellas situaciones que permiten ser recreadas con material concreto o mediante maquetas con movimiento que pueden ser desarrolladas con software para que el estudiante conjeture respecto a la situación.



Representación tabular:
Surge de la capacidad de producir y analizar los datos numéricos en aquellos momentos observados en la experiencia. En este tipo de representación se pretende encontrar patrones de regularidad que condensan el comportamiento de las variables involucradas. Por ejemplo:

Cantidad de copas de agua vertidas.	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Altura que alcanza el agua en centímetros	0	1.5	3.0	4.5		**?**			

Representación gráfica:
Se presenta mediante un plano cartesiano que consigna las mediciones de las magnitudes involucradas. Su lectura permite realizar interpretaciones cualitativas y cuantitativas del fenómeno de tal forma que pueden ligar otros tipos de representaciones, como el tabular, el geométrico y el algebraico.



La representación algebraica:
Se manifiesta cuando se presentan expresiones algebraicas o fórmulas que dan muestra del comportamiento de los datos en la situación, aunque inicialmente este tipo de representación está encaminada a encontrar patrones de regularidad. Para la clasificación y estudio de los fenómenos de variación y cambio se requiere profundizar en los aspectos algebraicos de las expresiones que representan dichos fenómenos. En este tipo de representaciones se requiere de un pequeño estudio del algebra, será de vital importancia escribir la forma como se comporta una variable con respecto a la otra. Por ejemplo, a continuación con la misma situación:

> *“Juan vierte una copa de agua en un recipiente, la altura que alcanza el nivel es de 1.5 centímetros ¿Cuál es expresión que permite encontrar la altura que alcanza si verte x copas?”*

La representación algebraica seria: **“y=1.5x”**

2.3 MÉTODO DE GRAFICACIÓN COVARIACIONAL

La graficación tradicional ha considerado por muchos años como secundario lo variacional y privilegiar el trazado de la grafica a partir dela ubicación de un conjunto discretos de puntos y esto a hecho que los estudiantes sigan con dificultades en la interpretación de gráficas. Dolores y Salgado (2009, p. 65) mencionan que normalmente los estudiantes de bachillerato cuando interpretan graficas, atienden lo que pasa con la variable independiente y desatienden lo que pasa con la variable dependiente, y que los efectos de la variable independiente nunca son extraídos de las graficas.

En cambio el método de graficación covariacional expuesto por Dolores (2009, pp 63-64) conste en ir construyendo la gráfica e ir analizando el comportamiento variacional, esto requiere involucrar la coordinación de las dos cantidades y al mismo tiempo observar la forma en que cambian una con respecto a la otra.

De la misma manera plantea que las graficas curvas se deben construir a partir de una poligonal, primero con unos lados grades, luego con unos más pequeños, para que finalmente se muestre la curva con infinitos lados.

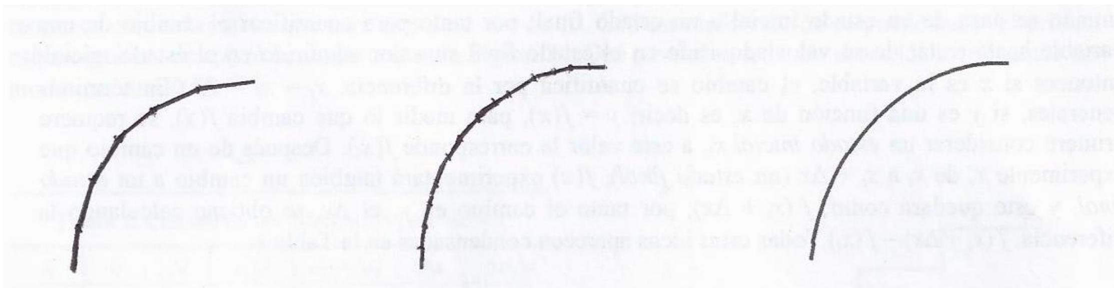
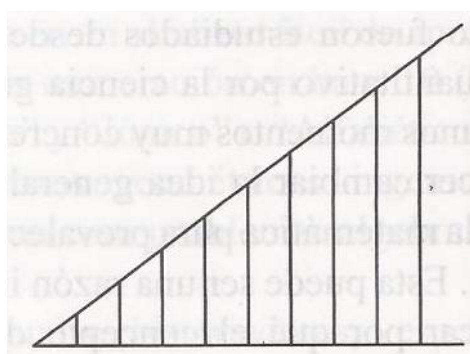


Figura 1. Poligonal con "lados grandes"

Figura 2. Poligonal con "lados pequeños"

Figura 3. Curva con "lados infinitamente pequeños"

Continuado con esta idea de realizar un grafica que permita la coordinación de las dos magnitudes, rescatamos de la historia a Oresme (citado en MEN, 2004, p. 4), ya que fue el primero en realizar segmentos rectilíneos para representar lo que variaba.



2.4 EL JUEGO COMO ESTRATEGIA DIDÁCTICA

Castaño (1985)[1] considera el juego como una estrategia didáctica en la enseñanza de la matemática, fruto de las experiencias realizadas en el marco del proyecto "Descubro la Matemática" implementado en los colegios maristas desde 1985. El enfoque didáctico que asume dicho proyecto está fundamentado en dos postulados básicos del constructivismo, el primero en "reconocer al niño como un asignador de significado", esto quiere decir, que se admite que el niño organiza la información que recibe, de determinada manera según el pensamiento que posee. Y el segundo en "admitir que el pensamiento logra niveles superiores de organización no por la asociación de mayor número y mejor calidad de habilidades específicas, sino por la mayor estructuración de los sistemas conceptuales que los constituyen".

SITUACIÓN SIGNIFICATIVA

Para Castaño (1985) una situación significativa es *"Una situación real o imaginada, que crea un contexto en el cual el maestro y los alumnos, dan significado y sentido a la acción".* Significado en tanto que les es interpretable desde las posibilidades de su pensamiento; y sentido, en tanto que le fijan un fin y la orientan para conseguirlo.

Por lo tanto, todas las actividades están basadas en la situación significativa llamada "El JUEGO DEL ESTIMADOR". Gómez y Grisales (2001. p.3) mencionan que si hay algo importante en la vida de un niño o niña es el juego; mientras los adultos nos ocupamos de otras cosas, ellos ocupan sus mentes en pensar qué van a jugar, con quién lo van hacer y dónde lo van hacer. Cuando juegan se olvidan a veces hasta de comer y tienen razón, jugando aparte de divertirse comparten con el otro, ponen a prueba sus capacidades físicas y motoras, potencian una serie de habilidades mentales, afianzan su seguridad en la toma de decisiones y la pasan muy bien. El juego pone a funcionar muchos órganos del cuerpo, puede verse como una liberación y restauración de energías. Si asumimos que la formación del niño y niña debe ser integral, es decir, que abarque al menos las dimensiones (Cognitiva, social, ecológica, comunicativa, etc.), el juego es una alternativa estratégica metodológica en el aula de clase para que esto sea posible significativamente En este sentido, las actividades que proponemos a continuación han sido diseñadas teniendo en cuenta los elementos anteriores, en particular, consideramos que las dimensiones cognitiva, social, ecológica, comunicativa, tienen lugar cuando los estudiantes se enfrentan a este tipo de actividades.

EL APRENDIZAJE COLABORATIVO

El trabajo en el aula bajo una ambiente de aprendizaje colaborativo conlleva un cambio de actitud de los estudiantes y del profesor, donde cada uno es responsable tanto de su aprendizaje, como del aprendizaje de los demás, de tal forma que todos estén comprometidos en la busca de entornos de trabajo, en los que se privilegie el desarrollo de habilidades individuales y grupales, a partir de la discusión y de los acuerdos a los que se llegue entre los integrantes del grupo, al momento de explorar nuevos conceptos.

De esta forma el aprendizaje colaborativo es una estrategia que motiva a las personas que intervienen en el acto educativo, para que adquieran, conozcan, compartan y amplíen la información que tienen sobre un tópico o tema a desarrollar; esto se logra con la socialización de la misma y a través de la discusión en espacios reales o virtuales.

2.5 LAS HERRAMIENTAS COMPUTACIONALES EN ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

Las herramientas computacionales hacen referencia al conjunto integrado por: computadores, calculadoras científicas, la red de Internet, las plataformas virtuales (Moodle), portales didácticos (www.Thatquiz.org/es) y los programas dinámicos y asistentes matemáticos (Derive, Cabry II Plus, Cabry 3 D, Geogebra, Winplot, etc) diseñados con intencionalidad pedagógica.

El NEN (2004) señala que hoy en día, las nuevas tecnologías han cambiado profundamente el mundo de las matemáticas y de las ciencias, ya que no solo han afectado las preocupaciones propias del campo y la perspectiva como éste se ve, sino también el modo en que las ciencias y las matemáticas se hacen, se usan y se construyen.

Las herramientas computacionales en este trabajo, se vuelven importantes porque median semióticamente (uso de signos), es decir, el recurso a signos e instrumentos (geogebra) altera nuestro funcionamiento cognitivo. Signos y artefactos no son simplemente elementos periféricos de la actividad, por lo que consideramos que el artefacto cultural (herramienta computacional) mediatiza la actividad humana. Y aparte de cumplir su función pragmática misma, estos artefactos se vuelven importantes en tanto afectan y alteran el comportamiento matemático o actuaciones matemáticas de los estudiantes cuando se enfrentan a tareas o actividades que involucran el uso de herramientas computacionales.

Los asistentes matemáticos son programas para computador diseñados con intencionalidad pedagógica; dicha intencionalidad se asume en el sentido en que permiten el trabajo con: el cálculo numérico y simbólico, la dinamización de la geometría, la gestión de datos, el análisis gráfico de funciones, etc. Entre los más usados están: Geogebra, Descartes, Derive 6.1, Cabry II Plus, Cabry 3D, TI-Nspire.

Para que las experiencias relativas al uso de la tecnología y de asistentes matemáticos en el aula de clase tengan un verdadero y positivo impacto en el aprendizaje, se debe tener en cuenta que el éxito depende no solo de la tecnología sino del uso pedagógico que se le dé. Se requiere de un entorno, en el colegio, en el cual las condiciones físicas, humanas, financieras y políticas internas favorezcan el desempeño del docente y del alumno en ambientes virtuales…. Nuestros estudiantes hoy en día son innatos virtuales, los adultos son emigrantes virtuales. Las prácticas educativas tradicionales no son ya garantía suficiente, para que los estudiantes adquieran las habilidades necesarias para desenvolverse en la sociedad de la información con medianas posibilidades de éxito. El mundo moderno requiere que los futuros trabajadores (dependientes o no), sean capaces de aplicar estrategias para resolver problemas y utilizar herramientas apropiadas para aprender permanentemente y trabajar integradamente en equipo. La comunicación eficiente y la información adecuada juegan roles importantes en la adquisición de estas habilidades.

Por las anteriores razones, en las aulas de clase se debe usar pedagógicamente los asistentes matemáticos con intencionalidad pedagógica. La intencionalidad está dada por ser programas que permiten realizar construcciones dinámicas, reforzar la comprensión de determinados temas, permitir la simulación.

3 METODOLOGÍA

En este capítulo, en primer lugar, se pretende sustentar el tipo de metodología que se abordó, en segundo lugar, dar a conocer las fases el trabajo de indagación y finalmente exponer todo lo referente al diseño de la actividad, como: propósitos, recursos, instrucciones, guía del docente y guía del estudiante.

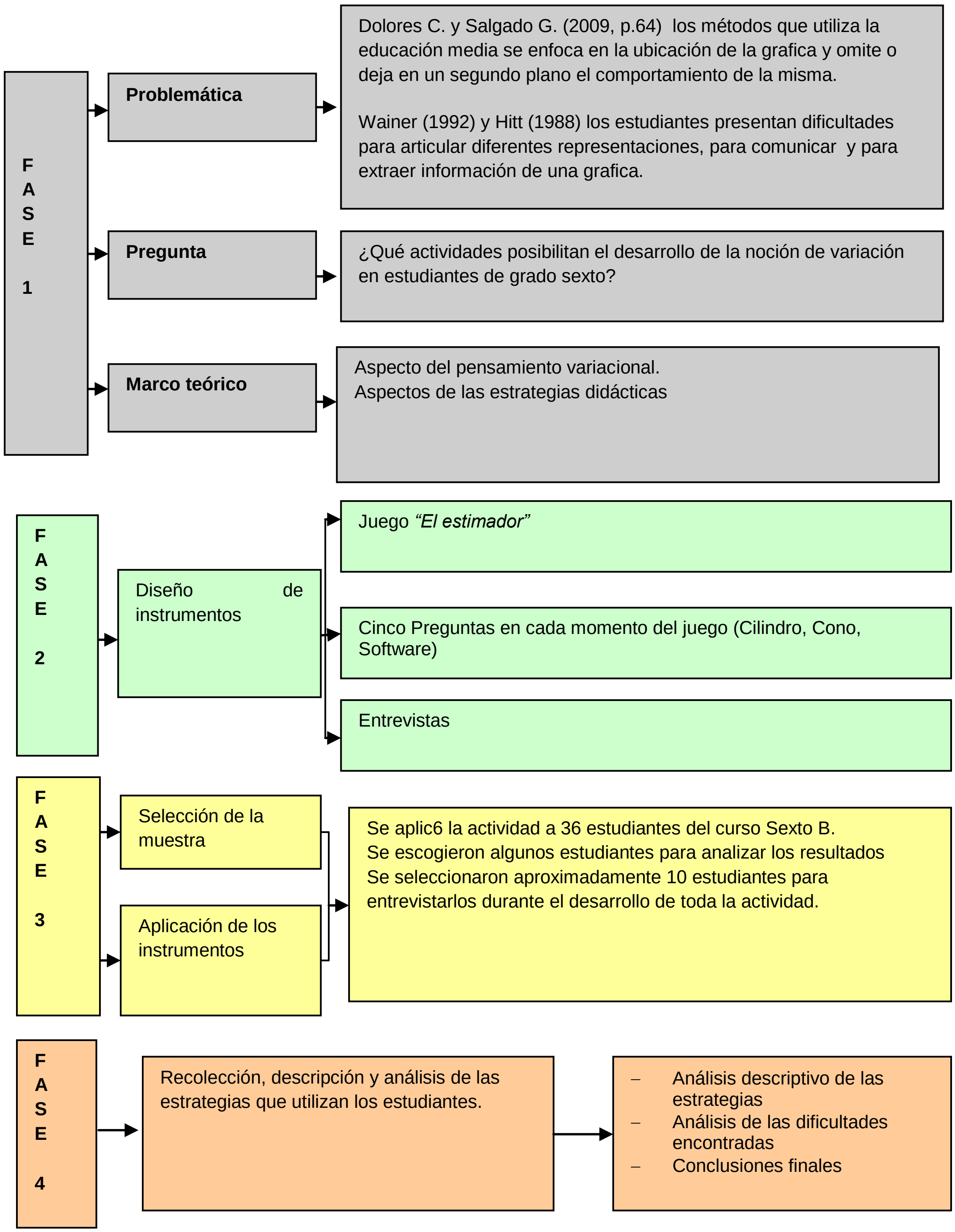
El presente proyecto se enmarca dentro de una indagación de tipo cualitativa de naturaleza descriptiva y exploratoria, puesto que pretende no solo observar y reconocer las actividades que tiene una mayor incidencia en el desarrollo de la noción de variación, sino además, describir algunas estrategias que utilizan los estudiantes del grado sexto para resolver situaciones problema de tipo variacional.

Una de las razones para seleccionar este tipo de investigación es que permite describir las acciones tal como suceden e identificar generalidades de procedimientos que realizan los niños cuando se enfrentan a resolver problemas. Otra razón, es que admite al investigador tener un rol en el aula para sistematizar, comprender e integrar lo estudiado y finalmente con estos medios que se utilizan recoger información y generar material que puede ser utilizado en varias ocasiones. Al mismo tiempo, esta metodología propicia el diseño, la intervención, el análisis y entrevistas que se aplican en clase.

Análogamente el proyecto en relación a la investigación cualitatica, establece tres tipos de intereses: descriptivo, heurístico e inductivo. Es *descriptivo*, porque se pretende describir algunas estrategias utilizadas; es *heurístico,* en la medida en que los resultados iluminan al investigador en la comprensión y lo lleva en lo posible a descubrir nuevos significados y a ampliar su experiencia; e *inductivo*, puesto que a partir de los resultados se puede llegar a generalizaciones o al descubrimiento de nuevas técnicas de aprendizaje.

3.1 FASES DEL ESTUDIO

El proceso que se llevó a cabo en la investigación fue el siguiente:



3.2 POBLACIÓN Y MUESTRA

La población objetivo de la indagación son los estudiantes del grado sexto del colegio Champagnat de Bogotá, cuyos estratos socioeconómicos son de 4 y 5, y sus edades están comprendidas entre los 11 y 13 años.

Dentro del colegio hay 3 grupos de sexto; Sexto A con 40 estudiantes, sexto B con 36 y Sexto C con 38, para un total de 114 estudiantes. La muestra que se tomó para la aplicación y el análisis de las actividades de este trabajo está conformada por 36 estudiantes pertenecientes al curso Sexto B.

3.3 DISEÑO DE LA ACTIVIDAD

La actividad que se diseñó llamada “EL JUEGO DEL ESTIMADOR” estuvo enmarcada fundamentalmente en crear una situación significativa. En término s de Castaño (1985), una situación significativa es entendida como *“Una situación real o imaginada, que crea un contexto en el cual el maestro y los alumnos, dan significado y sentido a la acción”.* De este modo, el juego que se creó como actividad no solo tenía una intencionalidad pedagógica enfocada a desarrollar significados de variación, sino además recreaba y desarrollaba habilidades en los estudiantes.

Tanto el juego como las tres etapas que este presentaba, fueron validadas, reformuladas y puestas en reflexión constante con anticipación en un grado Sexto, para luego ser aplicadas en el Grupo del cual se realizo el análisis del proyecto.

El juego que se creó está fundamentado en tres elementos básicos:

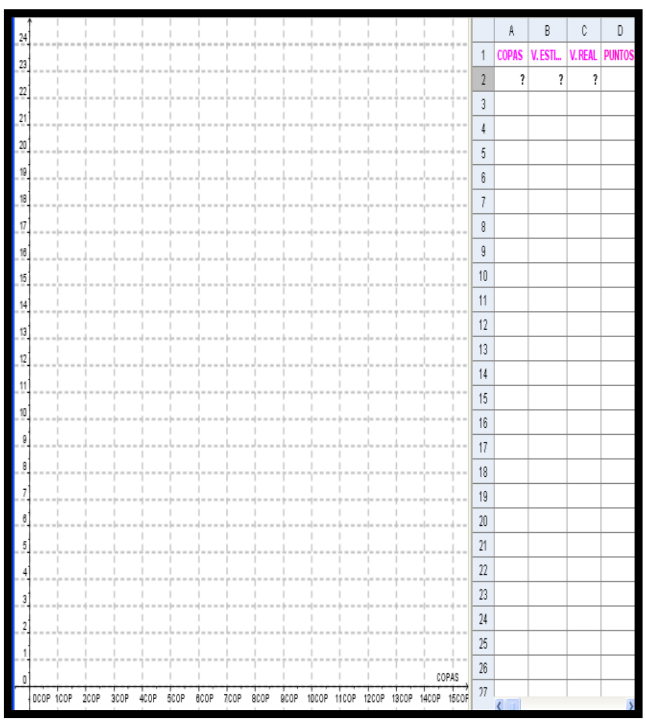
El primero, en el planteamiento didáctico que propone Castaño (1985) y Gómez y Grisales (2011, pp. 3-5) enfocado en reconocer el juego como una estrategia didáctica para la enseñanza de la matemática.
El segundo, en los Estándares Básicos de Competencias que presenta el MEN para el grado Sexto sobre pensamiento variacional (2006, p. 85).
Y el tercero en método de graficación covariacional que expone Dolores y Salgado (2009, p. 63).

Propósitos del juego:

- Involucrar a los estudiantes en una situación significativa que permita desarrollar la noción de variación.
- Incorporar situaciones de variación relacionando diferentes representaciones. (Estándares Curriculares de Matemáticas,2006)
- Reconocer el conjunto de valores de cada una de las cantidades variables ligadas entre sí en situaciones concretas de cambio. (Estándares Curriculares de Matemáticas,2006)
- Identificar las características de las diversas graficas cartesianas (de puntos, continuas, formadas por segmentos, etc) (Estándares Curriculares de Matemáticas, 2006)

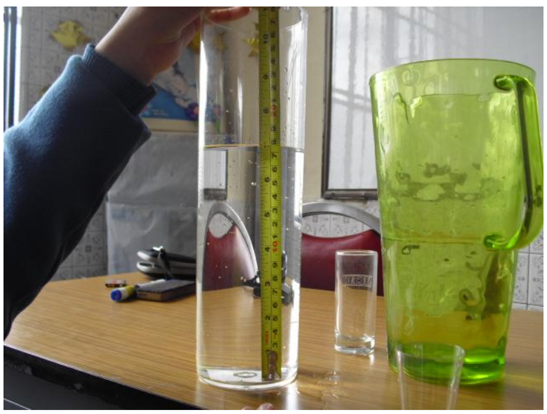
Recursos:

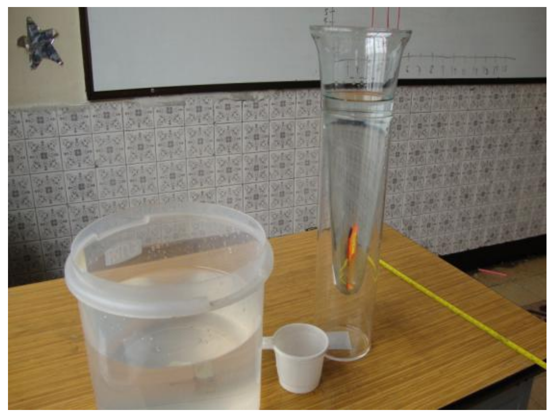
a) Una regla o un metro de construcción.
b) Dos recipientes, (cilíndrico y Cónico).
c) Tres copas pequeña:
   Tipo A (1 onza)
   Tipo B (3.5 onzas)
   Tipo C (7 onzas)
d) Un recipiente con agua.
e) Formato de registro.



Instrucciones del juego:

Este juego se realizó con 4 estudiantes, cada uno tenían que estimar la altura del nivel del agua que se alcanzaba en un recipiente (cono o cilindro) dado un cierto número de copas vertidas en él ó la cantidad de copas que se requerían para alcanzar una altura determinada en dicho recipiente. Luego de esta estimación se procedía a hacer el llenado real del cilindro y la verificación de la información con una cinta métrica para luego establecer la diferencia entre el valor estimado y el valor real. El que tuviera el menor error era el que obtenía un punto por el ejercicio. Ganaba el juego aquel estudiante que en el grupo acomunalara más puntos.





El juego se desarrolló en tres etapas: primero se jugó con la vasija cilíndrica, luego con la vasija cónica y finalmente se jugó con un applet hecho en geogebra que simulaba el juego.

Cada etapa se desarrollaba en tres horas de clase aproximadamente y presentaba los siguientes momentos:

- El primero, que consistía en jugar el profesor contra sus estudiantes, con el fin de motivarlos y darle a conocer las reglas del juego. (El tiempo que se destinó fueron de 45 minutos)
- El segundo, que consistía en conformar grupos de trabajo de cuarto estudiantes, con el fin de competir entre ellos y generar estrategias que permitieran hacer estimaciones más precisas del producto del debate al interior del grupo. (El tiempo que se destinó fue de 45 min)
- Un tercer momento, consistía en desarrollar individualmente unas preguntas sobre el trabajo realizado. (El tiempo destinado era de 25 min)
- Y un último momento, consistía en una socialización en clase sobre las estrategias que todos los estudiantes estaban empleando para poder

realizar una estimación más acertada. (El tiempo destinado era de 20 minutos)

Guía del profesor de la Etapa Uno:

En esta etapa las cantidades de covariación estaban dadas por el número de copas vertidas y la longitud de la altura del nivel del agua cuando se vertían copas en la vasija cilíndrica. Nuestro propósito era iniciar con el desarrollo del razonamiento covariacional entendido este por Carlson (2002, citado en Dolores 2009. Pp. 63-74), como las actividades cognitivas involucradas en la coordinación de dos cantidades variables, identificando como cambia una con respecto a la otra.

Para tal fin, definimos 5 preguntas con intensiones específicas que los estudiantes debían realizar al finalizar el juego:

Preguntas	**Intenciones**
En una vasija cilíndrica, se vierte agua con 6 copas de tipo A (1 onza) ¿Cuál es la altura que alcanza el nivel del agua? RTA: ______	Observar si estimaba la altura que alcanzaría el agua al verter cierto número de copas en el recipiente cilíndrico y comprobar si podía resolver problemas de multiplicación-razón[2],
En una vasija cilíndrica, se vierte agua con varias copas de tipo A (1 onza) hasta que la altura llega a 20 cm ¿Cuántas copas aproximadamente se necesitaron?	Observar si estimaba la cantidad de copas requeridas para obtener una determinada altura en el cilindro y evidenciar si resolvía problemas de agrupamiento-razón[3].
En una vasija cilíndrica, se vierte agua con $7\frac{3}{4}$ copas de tipo A (1 onza). ¿Qué altura alcanza el nivel del agua? RTA:____	Observar si estimaba la altura que alcanzaría el agua al verter cierto número de copas que no fuesen enteras, e identificar si podía resolver problemas compuestos que requieran de más de dos operaciones,
¿Es posible determinar cuántos **cm** aumenta el nivel del agua cuando se vierte cada copa	Observar si puede hallar la razón de cambio.

[2] Los problemas de multiplicación-razón consisten en hallar el valor de *f(x) y* hacen parte del isomorfismo de medidas que propone Vergnaud (1991)

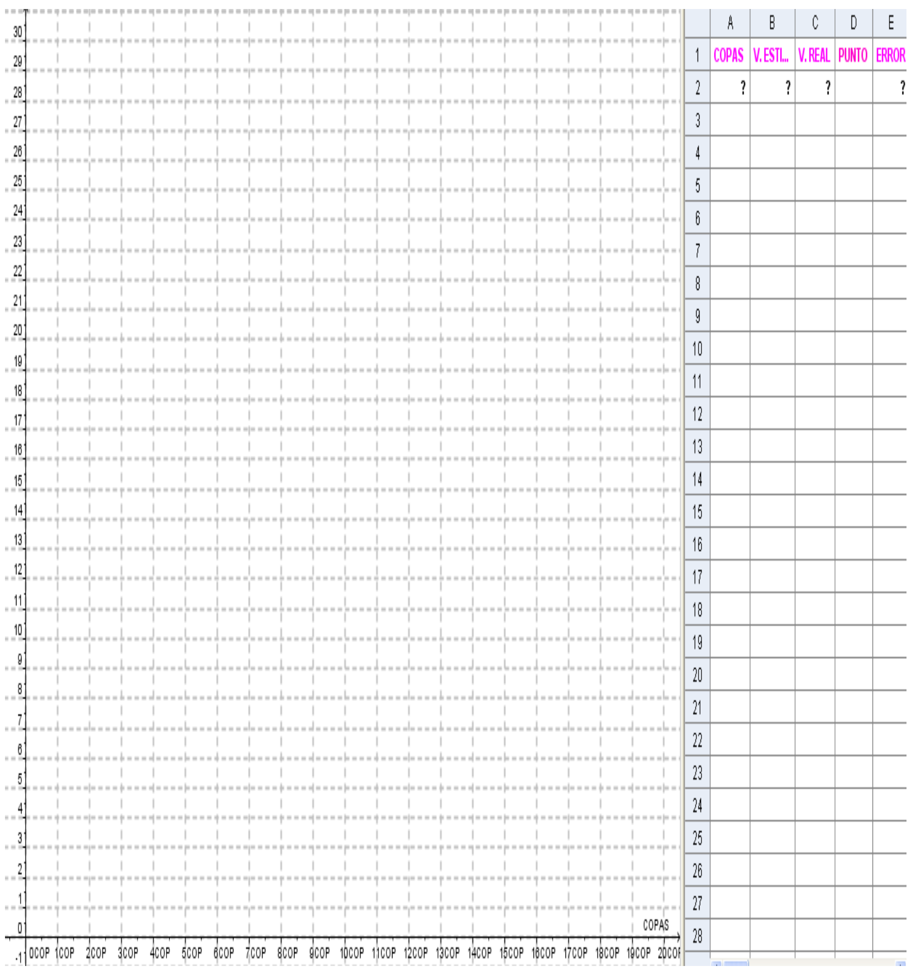
[3] Los problemas de agrupamiento-razón consisten en hallar el valor de *x* conociendo f(x) y el valor de f(1).

de tipo A?¿Por qué?	
Tenga en cuenta los segmentos en la grafica del juego “El Estimador”; una los puntos extremos de cada segmento y marca con una **X** la grafica que pude representar mejor la situación:	Observar si puede establecer y estimar un tipo de grafica que dé cuenta de la covariación de las cantidades

Guía del estudiante de la Etapa Uno:

NOMBRE: ___________________________________ CURSO: _________ FECHA: ______________

	COMUNIDAD DE HERMANOS MARISTAS DE LA ENSEÑANZA **PROVINCIA NORANDINA - COLOMBIA**	
	COLEGIO CHAMPAGNAT - BOGOTÁ	
	ÁREA DE MATEMÁTICAS – JUEGO “EL ESTIMADOR”	



1. Responda las siguientes preguntas:

   a) En una vasija cilíndrica, se vierte agua con 6 copas de tipo A (1 onza) ¿Cuál es la altura que alcanza el nivel del agua? RTA: ______

Explicación:	Operación:
______________________________ ______________________________ ______________________________ ______________________________ ______________________________	

   b) En una vasija cilíndrica, se vierte agua con varias copas de tipo A (1 onza) hasta que la altura llega a 20 cm ¿Cuántas copas aproximadamente se necesitaron? RTA:______

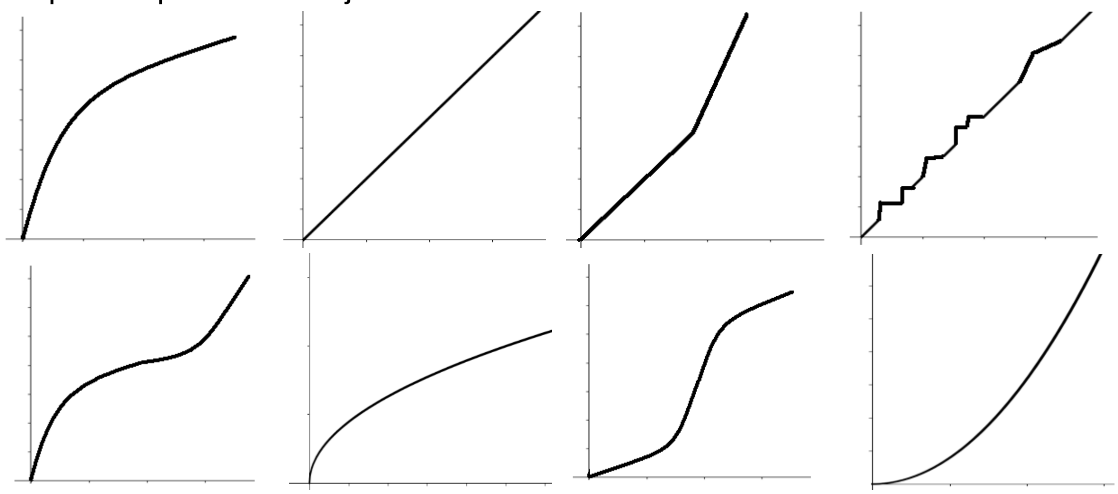
Explicación:	Operación:
______________________________ ______________________________ ______________________________ ______________________________ _____________________________	

   c) En una vasija cilíndrica, se vierte agua con $7\frac{3}{4}$ copas de tipo A (1 onza). ¿Qué altura alcanza el nivel del agua? RTA:____

Explicación:	Operación:
______________________________ ______________________________ ______________________________ ______________________________ ______________________________	

2. Es posible determinar cuántos **cm** aumenta el nivel del agua cuando se vierte cada copa de tipo A?¿Por qué?
   ____
   ____

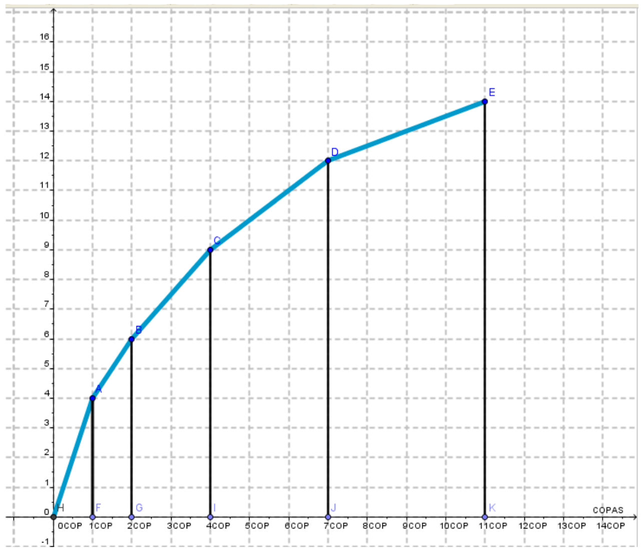
3. Tenga en cuenta los segmentos en la grafica del juego “El Estimador”; una los puntos extremos de cada segmento y marca con una **X** la grafica que pude representar mejor la situación:



Guía del profesor de la Etapa Dos:

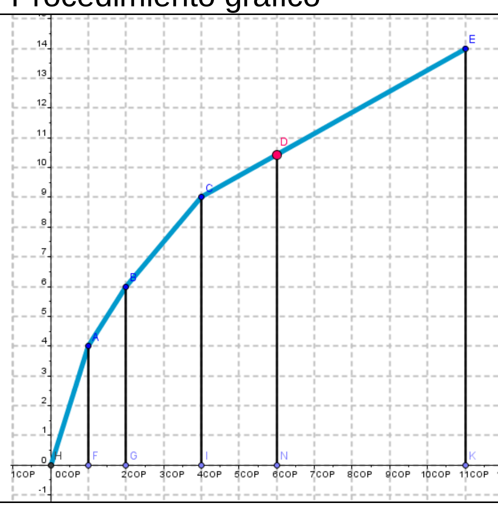
En esta etapa las cantidades de covariación son las mismas, el número de copas vertidas versus la longitud de la altura del nivel del agua, lo que se cambia es la vasija cilíndrica por la cónica. De esta manera, nuestro propósito es poner en evidencia una situación de variación no lineal que permita una correlación entre las cantidades y los fenómeno que hacen que el aumento no sea siempre mismo; se busca que los estudiantes reflexionen sobre los efectos que causan dicha variación e identifiquen que el aumento en cada instante disminuye por la anchura que el recipiente va tomando a mayor altura.

En esta etapa pretendemos llegar a la noción de curva a partir de la propuesta de Dolores (2009), la cual permite construir una curva a partir de poligonales. Como por ejemplo:



Es probable que el estudiante inicialmente piense que siempre el aumento es el mismo ya que la copa es la misma, y que no incide la forma que tenga el recipiente. Esto lo hace aún más interesante, en la mayoría de ocasiones nos detenemos solo a observar cómo cambia la variable independiente cuando asignamos valores a la variable dependiente, y poco reflexionamos que esta variable dependiente también puede estar dependiendo de otro tipo de situaciones o fenómenos.

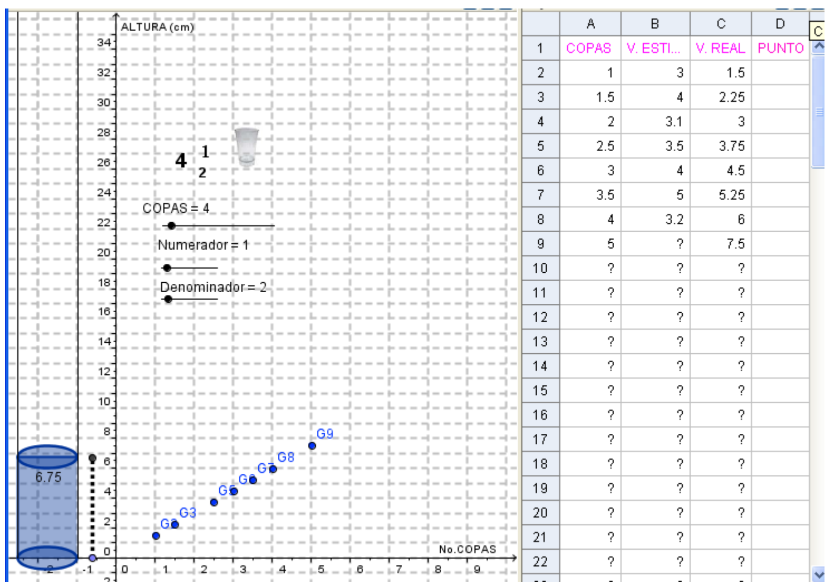
Como las preguntas son las mismas que en la etapa uno, solo que con el cono; un procedimiento erróneo que podría presentase en la pregunta uno sería:

Pregunta	Procedimiento gráfico	Descripción
En una vasija cilíndrica, se vierte agua con 6 copas de tipo A (1 onza) ¿Cuál es la altura que alcanza el nivel del agua? RTA: _______		Observa la gráfica y decide que debe estar sobre la recta que une los extremos de los dos segmentos anteriores. En este caso, los segmentos realizados que representan las alturas de 4 copas y 11 copas.

Guía del profesor de la Etapa Tres:

Si bien esta etapa está fundamentada alrededor del llenado de un cilindro circular recto con un determinado número de copas de distintos tipos, se tiene en cuenta el aspecto computacional por medio del uso de dos aplicaciones:

- Geogebra: Asistente matemático de acceso gratuito que permite realizar applets sobre aspectos geométricos y matemáticos de forma intuitiva y dinámica. Con esta herramienta se creó el applet modelando el juego con el recipiente cilíndrico.



	A	B	C	D
1	COPAS	V. ESTI...	V. REAL	PUNTO
2	1	3	1.5	
3	1.5	4	2.25	
4	2	3.1	3	
5	2.5	3.5	3.75	
6	3	4	4.5	
7	3.5	5	5.25	
8	4	3.2	6	
9	5	?	7.5	
10	?	?	?	
11	?	?	?	
12	?	?	?	
13	?	?	?	
14	?	?	?	
15	?	?	?	
16	?	?	?	
17	?	?	?	
18	?	?	?	
19	?	?	?	
20	?	?	?	
21	?	?	?	
22	?	?	?	

- Thatquiz: Herramienta de acceso gratuito para docentes que quieren diseñar y compartir evaluaciones y actividades para sus estudiantes. La plataforma incluye varias opciones de edición y revisión de las preguntas, suministrándole al docente las notas de cada una de las actividades, así como los desaciertos que tuvieron durante la realización de sus labores. El vínculo para esta herramienta es www.thatquiz.org. En esta herramienta se subieron las preguntas.

La dinámica de este juego era la misma, los estudiantes inicialmente jugaron “El Estimador” en la sala de sistemas con los aplicativos realizados en geogebra y luego, respondían unas preguntas en el thatquiz.

4 RESULTADOS

En este capítulo se realizará inicialmente un análisis descriptivo de las estrategias observadas en los estudiantes del grado Sexto B cuando se enfrentaban al juego “El Estimador”, y luego se identificarán algunas dificultades presentadas en la resolución de las preguntas de cada una de las etapas.

4.1 ANÁLISIS DESCRIPTIVO

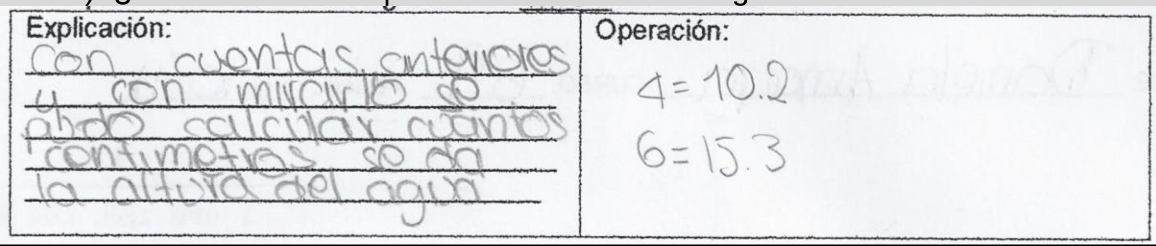
El análisis descriptivo dará a conocer las estrategias encontradas de los estudiantes en cada una de las preguntas, y pondrá en avenencia algunos esquemas formales que para Vergnaud (1996, citado en Moreira 2002 p. 13) son llamados **teoremas en acto,** el cual los define como: **“***proposiciones consideradas como verdaderas sobre lo real*”. Es decir, son relaciones matemáticas tomadas en cuenta por los estudiantes cuando escogen una operación o una secuencia de operaciones para resolver un problema; dichas relaciones usualmente no son expresadas verbalmente por los estudiantes ni son teoremas explícitos. Por lo tanto, para estudiar el comportamiento matemático de los estudiantes trataremos de expresar los teoremas en términos matemáticos.

ETAPA UNO

Objetivo: Establecer la correlación existente entre la altura alcanzada por el nivel del agua en un cilindro circular recto y la cantidad de copas vertidas en él con distintas capacidades (1 onza, 3,5 onzas y 7 onzas).

- **Estrategia de combinación multiplicativa y aditiva (suma) con escalares:**

Pregunta 1 – a: En una vasija cilíndrica se vierte agua con 6 copas de tipo B (3,5 onzas). ¿Cuál es la altura que alcanza el nivel del agua?



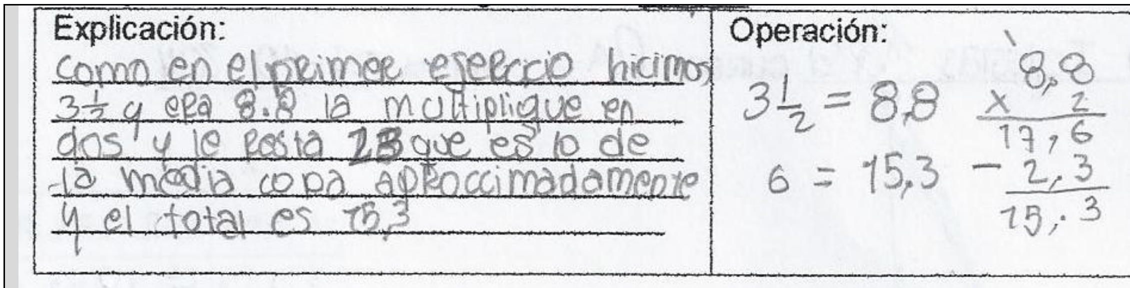
Explicación:	Operación:
Con cuentas anteriores y con mircirlo se pudo calcular cuantos centimetros se da la altura del agua	4=10.2 6=15.3

PROCEDIMIENTO	ESQUEMA FORMAL DEL PROCEDIMIENTO
En esta estrategia el estudiante utilizaba datos "anteriores", tomados de la tabla o la grafica durante el juego, donde 4 copas equivalen a 10.2 cm. De esto concluye, mediante una división por dos, que 2 copas equivalen a 5.1 cm y, por consiguiente, para obtener 6 copas sumó 10.2 cm con 5.1 cm que equivalen a 15.3 cm.	f(4) = 10.2 -> Dato conocido. Este se obtuvo midiendo con el metro en una situación real. f(4) = f(2 + 2) = f(2) + f(2) = 2f(2) -> Linealidad de la función. El estudiante asume esta propiedad como cierta, sin saber su definición formal. f(2) = f(4)/2 = 10.2/2 = 5.1 -> Aritmética f(6) = f(4 + 2) = f(4) + f(2) = 10.2 + 5.1 = 15.3 -> De nuevo acude a la misma propiedad de linealidad de la función.

	# Copas	Altura (cm)	
÷2	*4*	*f(4)=10.2*	÷2
	2	*f(2) = 5.1*	
	4+2=6	*f(4+2)=f(6)=15.3*	

- **Estrategia de combinación multiplicativa y aditiva (resta) con escalares:**

Pregunta 1 – a: En una vasija cilíndrica se vierte agua con 6 copas de tipo B (3,5 onzas). ¿Cuál es la altura que alcanza el nivel del agua?



Explicación:
como en el primer ejercicio hicimos 3½ y era 8.8 la multiplique en dos y le resta 2.3 que es lo de la media copa aproccimadamente y el total es 15.3

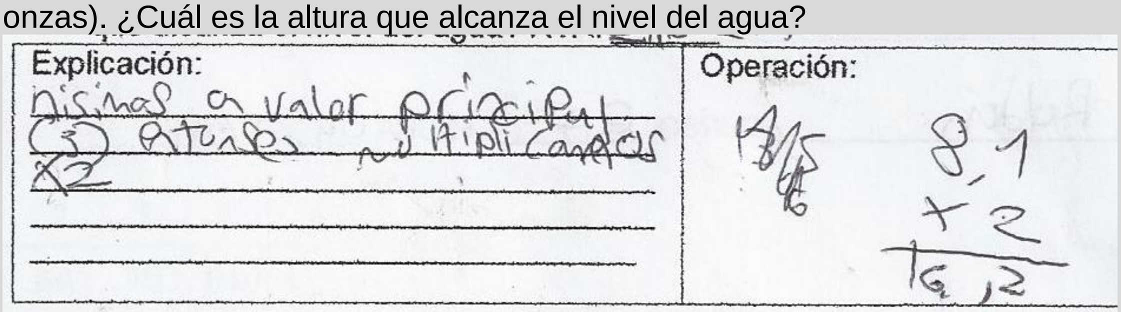
Operación:
3½ = 8,8
6 = 15,3
8,8 × 2 = 17,6
17,6 − 2,3 = 15,3

PROCEDIMIENTO	ESQUEMA FORMAL DEL PROCEDIMIENTO
En esta estrategia el estudiante utilizó el dato conocido de 3 y 1/2 de copas que equivale a 8.8 cm. Dividió esta cantidad entre 3.5, para obtener la altura por cada copa, dando como resultado 2.3 cm por copa. Luego duplicó el resultado de 3 copas y media y le restó lo que la altura correspondiente a una copa.	f(3.5) = 8.8 -> Dato conocido. Se obtiene a partir de la medición real con un metro y el cilindro. f(1)= f(3.5)/3.5 = 8.8/3.5 ≈ 2.3 f(7) = f(3.5 + 3.5) = f(3.5) + f(3.5) = 2f(3.5) = 17.6 -> Linealidad de la función. El estudiante asume esta propiedad como cierta, aunque no se haya trabajado en clase. f(6) = f(7 – 1) = f(7) - f(1) = 17.6 – 2.3 ≈ 15.3 -> Aritmética

# Copas	Altura (cm)
3.5	*f(3.5)=8.8*
÷3.5 *1*	*f(1) ≈2.3* ÷3.5
2(3.5)-1=7	*2f(3.5)-f(1) =f(6) ≈15.3*

- **Estrategia multiplicativa con duplicación:**

Pregunta 1 – a: En una vasija cilíndrica se vierte agua con 6 copas de tipo B (3,5 onzas). ¿Cuál es la altura que alcanza el nivel del agua?



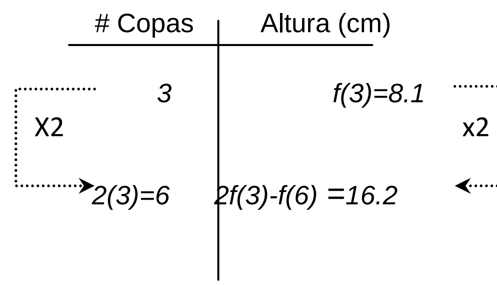
Explicación:
divisimos a valor principal (3) entonces multiplicamos x2

Operación:
17,5 / 6
8,1 + 2 = 16,2

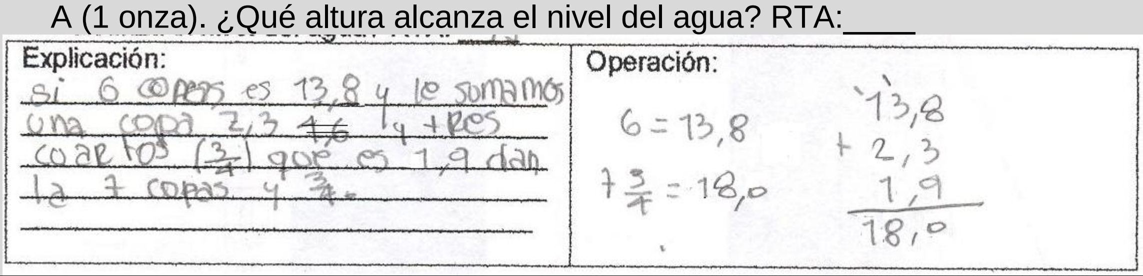
PROCEDIMIENTO	ESQUEMA FORMAL DEL

<table>
<tr><th></th><th>PROCEDIMIENTO</th></tr>
<tr><td>En esta estrategia el estudiante utilizó el dato conocido de que tres copas equivalen a 8,1 y, sin necesidad de establecer el valor que le corresponde a la unidad, duplica este valor para llegar a la altura alcanzada por seis copas.</td><td>f(3) = 8,1 -> Dato conocido. Este dato fue obtenido al medir concretamente con el metro y el cilindro.

f(6)= 2f(3) = 2 (8,1) = 16,2 -> El estudiante reconoce la linealidad de la función sin haber sido socializada formalmente en clase.


</td></tr>
</table>

- **Estrategia aditiva con agregación de datos anteriores:**

<table>
<tr><td colspan="2">d) Pregunta 2 – c: En una vasija cilíndrica, se vierte agua con $7\frac{3}{4}$ copas de tipo A (1 onza). ¿Qué altura alcanza el nivel del agua? RTA:____

Explicación:
si 6 copas es 13,8 y le sumamos una copa 2,3 ~~1,6~~ y tres coartos (3/4) que es 1,9 dan la 7 copas y 3/4.
Operación:
6 = 13,8
7 3/4 = 18,0
13,8 + 2,3 + 1,9 = 18,0</td></tr>
<tr><td>PROCEDIMIENTO</td><td>ESQUEMA FORMAL DEL PROCEDIMIENTO</td></tr>
</table>

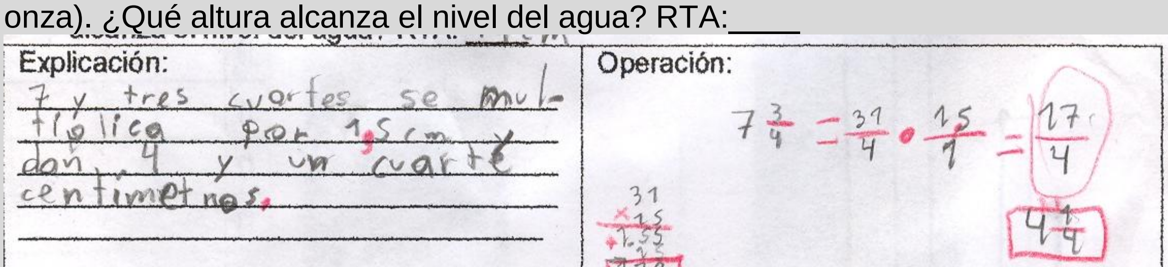
<table>
<tr>
<td>En esta estrategia el estudiante utilizó la suma de varios datos anteriormente recogidos durante el juego como: el valor de 6 copas, el de una copa y el de ¾ de copa.</td>
<td>f(6) = 13,8 -> Dato conocido.
f(1) = 2,3 -> Dato conocido.
f(3/4) ≈ 1,9 -> Dato conocido.
Entonces asume que:
$f(6) + f(1) + f(3/4) = f(6+1+3/4)=f(7\frac{3}{4}) \approx 18$

# Copas	Altura (cm)
6	*f(6) = 13.8*
1	*f(1)=2.3*
3/4	*f(3/4)*≈1,9
6+1+3/2= $7\frac{3}{4}$	$f(6+1+3/4)=f(7\frac{3}{4})\approx 18$

</td>
</tr>
</table>

Con respecto a la pregunta dos presentaron las siguientes estrategias:

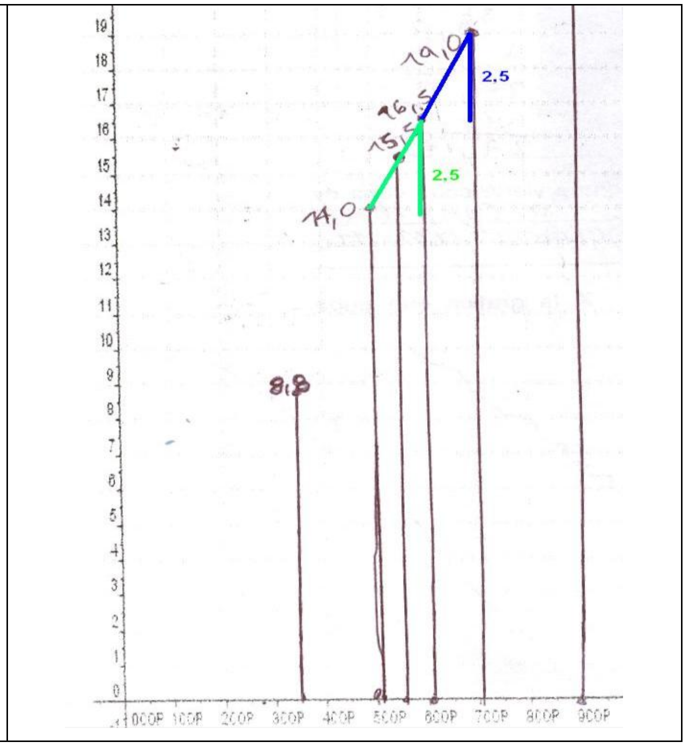
- **Estrategia multiplicativa con operador funcional:**

<table>
<tr>
<td colspan="2">Pregunta 2 – c: En una vasija cilíndrica, se vierte agua con $7\frac{3}{4}$ copas de tipo A (1 onza). ¿Qué altura alcanza el nivel del agua? RTA:____

Explicación:
7 y tres cuartes se multiplica por 1,5 cm y dan 4 y un cuarte centimetros.
Operación:
$7\frac{3}{4} = \frac{31}{4} \cdot \frac{1,5}{1} = \frac{17}{4}$
$\boxed{4\frac{1}{4}}$</td>
</tr>
<tr>
<td>PROCEDIMIENTO</td>
<td>ESQUEMA FORMAL DEL PROCEDIMIENTO</td>
</tr>
</table>

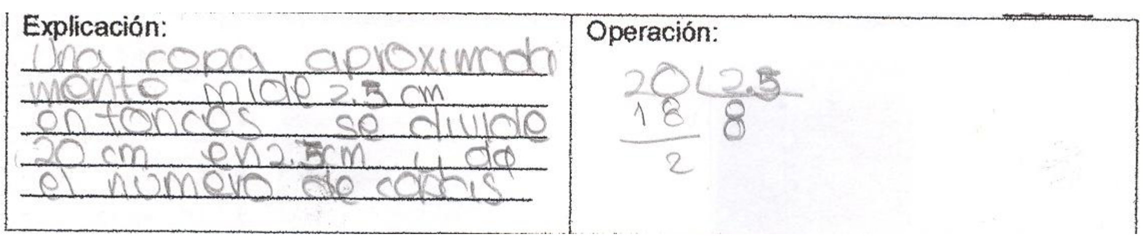
En esta estrategia los estudiantes buscan el operador funcional con el fin de encontrar rápidamente el valor para cualquier número de copas.	# Copas | Altura (cm) $1 \xrightarrow{\times \frac{1.5\ cm}{1\ copas}} f(1) = 13.8$ $7\frac{3}{4} \xrightarrow{f=0.8\ x} f(7\frac{3}{4}) = 4\frac{1}{4}$ $\boxed{7\frac{3}{4} copas \times \frac{1.5cm}{1copa} = \frac{7\frac{3}{4}\times 1.5cm}{1} = 4\frac{1}{4}cm}$

- **Estrategia gráfica covariacional:**

Pregunta 2 – c: En una vasija cilíndrica, se vierte agua con $7\frac{3}{4}$ copas de tipo A (1 onza). ¿Qué altura alcanza el nivel del agua? RTA:____	
PROCEDIMIENTO	**ESQUEMA FORMAL DEL PROCEDIMIENTO**

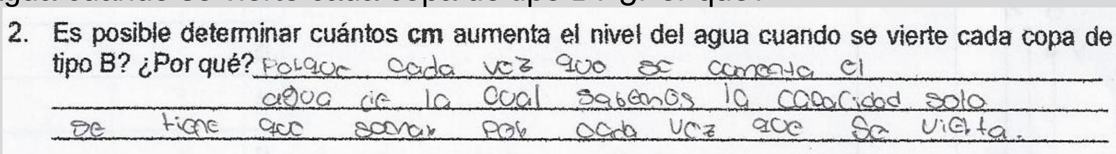
Esta estrategia se evidenció durante el juego, algunos estudiantes para realizar sus estimaciones observaban la grafica y decían que cada vez que se invertía una copa, se aumentaba la altura en 2,5 cm. Esto significa que los estudiantes evidenciaban que los cambios que experimentaban eran constantes. Como lo afirma Dolores (2009, p. 72) la graficación covariacional es integradora ya que permite a medida que va construyendo la gráfica ir analizando el comportamiento variacional.	

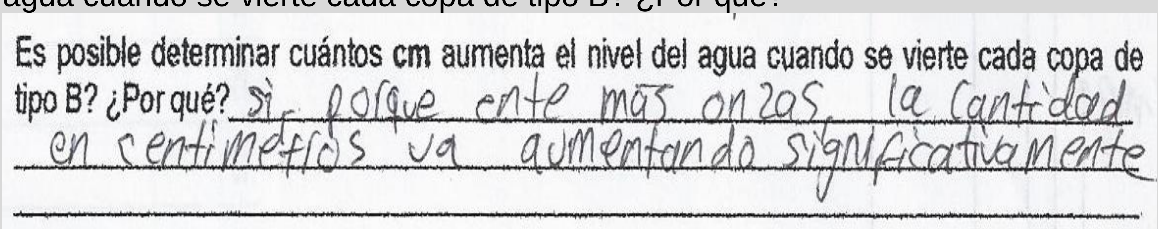
La pregunta 1-b fue una de las preguntas con mayor dificultad para los estudiantes, algunos utilizaban las estrategias anteriores y solo tres estudiantes de 36 trataron de utilizar una estrategia de tipo funcional, pero por dificultades en manejo de las operaciones con decimales fracasaron en el intento.

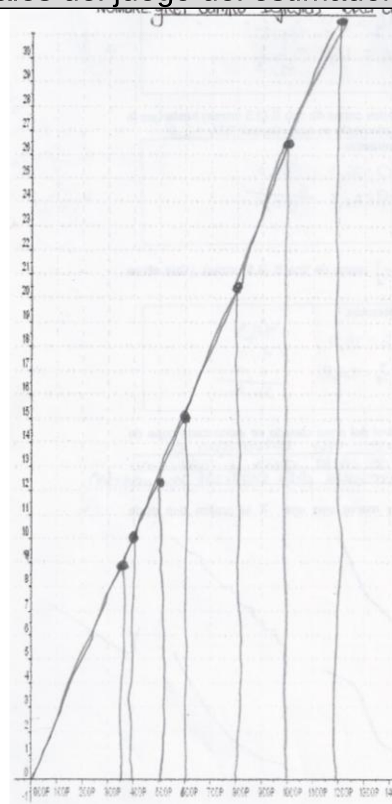
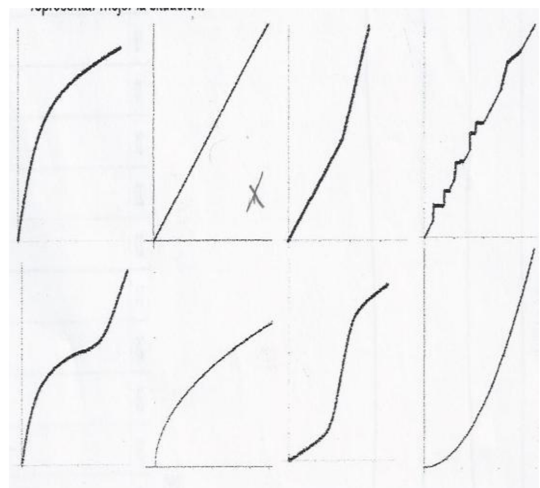


Explicación:	Operación:
Una copa aproximadamente mide 2.5 cm entonces se divido 20 cm en 2.5cm y da el numero de copas	20 ⌊2.5 18 8 2

A continuación solo se evidenciará algunas respuestas que los estudiantes presentaron en las preguntas 2 y 3.

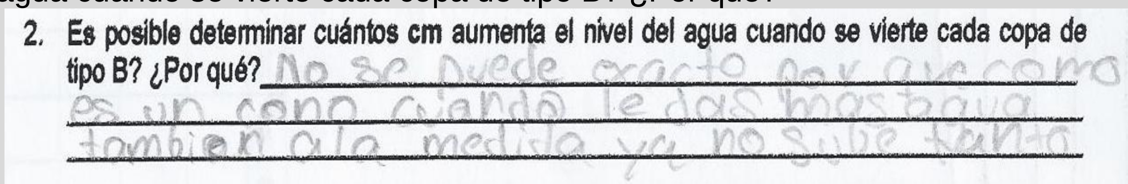
Pregunta 2: ¿Es posible determinar cuántos centímetros aumenta el nivel del agua cuando se vierte cada copa de tipo B? ¿Por qué?  2. Es posible determinar cuántos cm aumenta el nivel del agua cuando se vierte cada copa de tipo B? ¿Por qué? Porque cada vez que se aumenta el agua de la cual sabemos la capacidad solo se tiene que sumar por cada vez que se vierta.	
ARGUMENTO DEL ESTUDIANTE 1	**ASPECTO RELACIONADO AL PENSAMIENTO VARIACIONAL**
Se establece un valor por cada copa y luego, dependiendo del número de copas que se viertan, se sumará esta misma cantidad hasta obtener el valor pedido.	Según el trabajo hecho por Bruno y Martiñón (1997), el estudiante evidencia un avance en el pensamiento variacional en cuanto utiliza en su argumento la palabra “aumenta”.

Pregunta 2: ¿Es posible determinar cuántos centímetros aumenta el nivel del agua cuando se vierte cada copa de tipo B? ¿Por qué?  Es posible determinar cuántos cm aumenta el nivel del agua cuando se vierte cada copa de tipo B? ¿Por qué? Sì porque ente más onzas la cantidad en centimetros va aumentando significativamente	
ARGUMENTO DEL ESTUDIANTE 1	**ASPECTO RELACIONADO AL PENSAMIENTO VARIACIONAL**
Se establece una relación de crecimiento entre el número de copas vertidas y la altura alcanzada en el cilindro.	Según el trabajo hecho por Bruno y Martiñón (1997), el estudiante evidencia un avance en el pensamiento variacional por cuanto utiliza en su argumento la palabra “aumentando”.

<table>
<tr><td colspan="2">Pregunta 3: Una los puntos extremos de cada segmento y marque con una X la gráfica que puede representar mejor la situación.</td></tr>
<tr><td>Representación en segmentos verticales del juego del estimador</td><td>Gráfica que consideró era la que más se ajustaba a la situación.</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Se puede ver que las escalas utilizadas en el eje del número de copas conservan las distancias entre copa y copa. La precisión del Esto permitió que el gráfico fuera más preciso y se aproximara aún más a la situación real que se está planteando.</td><td>Los datos obtenidos en la columna de la izquierda permitieron que se estableciera el gráfico correcto de la función lineal, como se estaba pidiendo en el ejercicio.</td></tr>
</table>

ETAPA 2

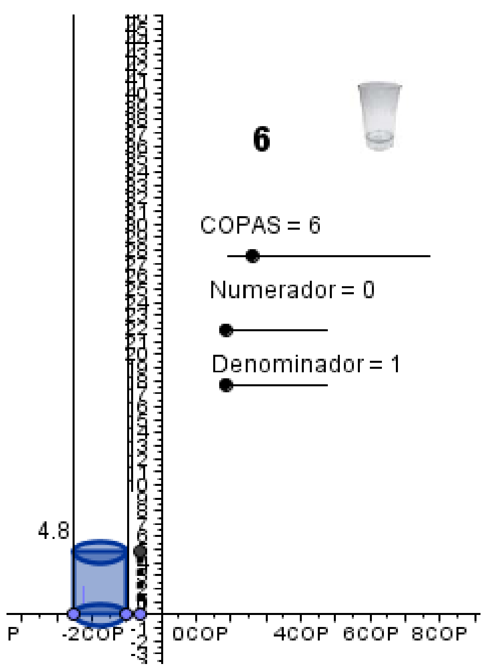
Objetivo: Establecer la correlación existente entre la altura alcanzada por el nivel del agua en un cono y la cantidad de copas vertidas en él con distintas capacidades (1 onza, 3,5 onzas y 7 onzas).

<table>
<tr><td colspan="2">Pregunta 2: ¿Es posible determinar cuántos centímetros aumenta el nivel del agua cuando se vierte cada copa de tipo B? ¿Por qué?

2. Es posible determinar cuántos cm aumenta el nivel del agua cuando se vierte cada copa de tipo B? ¿Por qué? No se puede exacto por que como es un cono cuando le das mas agua tambien ala medida ya no sube tanto</td></tr>
<tr><td>ARGUMENTO DEL ESTUDIANTE</td><td>ASPECTO RELACIONADO AL PENSAMIENTO VARIACIONAL</td></tr>
<tr><td>“No se puede exacto por que como es un cono, cuando le das más agua, también a la medida ya no sube tanto”.</td><td>Se puede ver que el estudiante es consciente de que la forma irregular del cono influye en el crecimiento de la altura del recipiente, pues ya no es constante como en el caso del cilindro.</td></tr>
</table>

ETAPA 3

Se mostrarán a continuación las imágenes correspondientes a los aplicativos desarrollados en geogebra y finalmente se ilustrará la grafica de calificaciones que arrojó la plataforma Thatquiz.

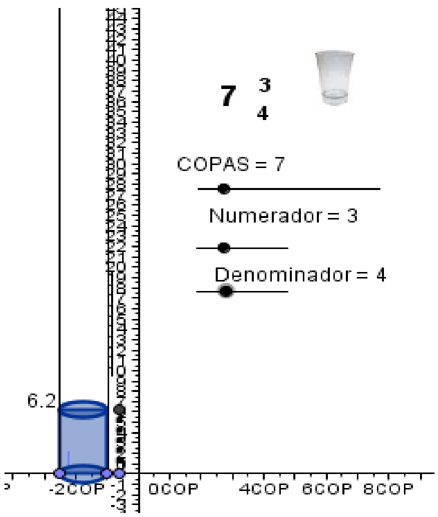
1) ¿Cuál es la altura que se alcanza si se vierten 6 copas de tipo A? Respuesta: ______ cm.



Para hallar el valor de 6 copas, algunos lo realizaron mediante los deslizadores y otros con una operación, ya que en el transcurso del juego ya tenían exactamente el aumento de la altura que se generaba al vertir cada copa (0.8 cm por copa).

El aplicativo desarrollado en geogebra le permitió al estudiante continuar fortaleciendo la habilidad de estimación, visualizar en una sola ventana varios tipos de representación (tabular, grafica, pictórica), lograr con más precisión la grafica los resultados del nivel del agua y verificar dichos resultados.

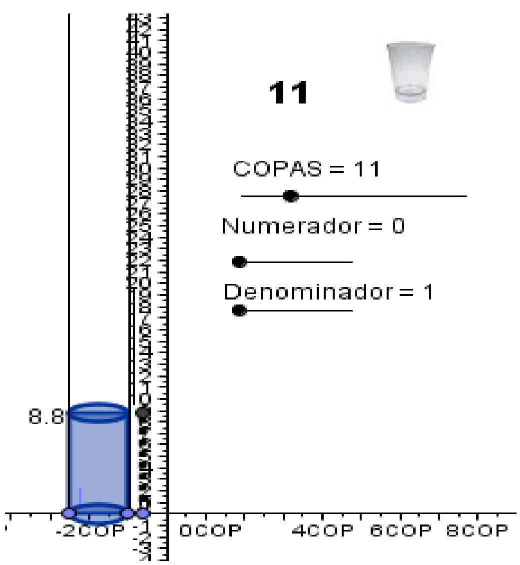
2) ¿Cuál es la altura que se alcanza si se vierten $7\frac{3}{4}$ copas de tipo A? Respuesta: _____ cm.



Para hallar el valor de $7\frac{3}{4}$ copas, la estrategia era igual a la aterior, algunos lo realizaron mediante los deslizadores y otros con una operación.

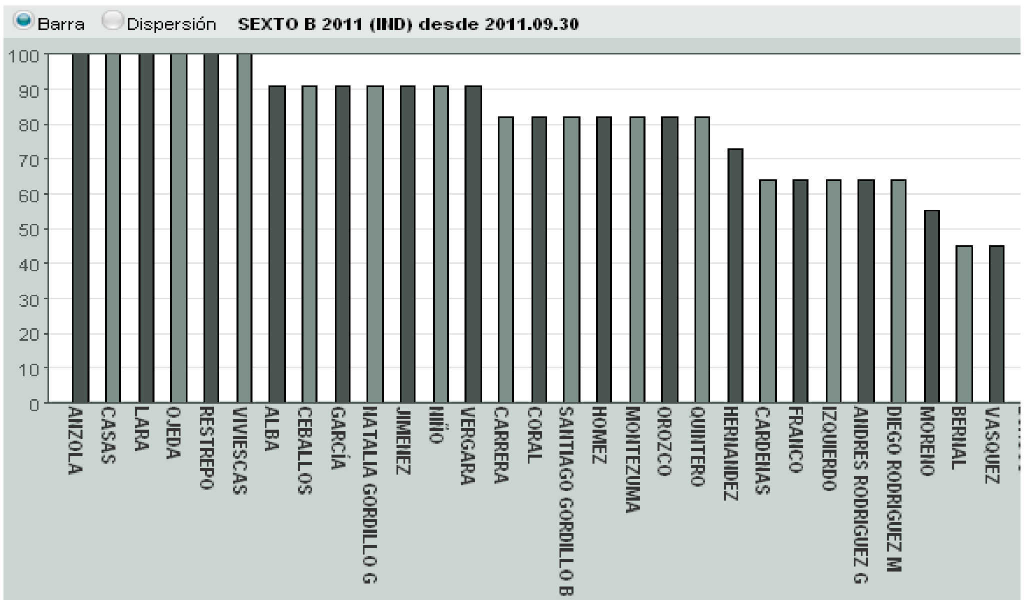
Esto permitió una vez más integrar los procesos conceptuales con los procedimentales.

3) ¿Cuántas copas se deben vertir para que la altura alcanzada sea de 8.8 cm? Respuesta: _____ copas.



Con esta operación inversa, el estudiante logró verificar que la operación que realizaba para responder este tipo de situaciones era efectiva o no. Aunque este tipo de preguntas presenta un grado de dificultad mayor esta herramienta le permite progresar hacia niveles superiores de pensamiento.

Resultados obtenidos en thatquiz



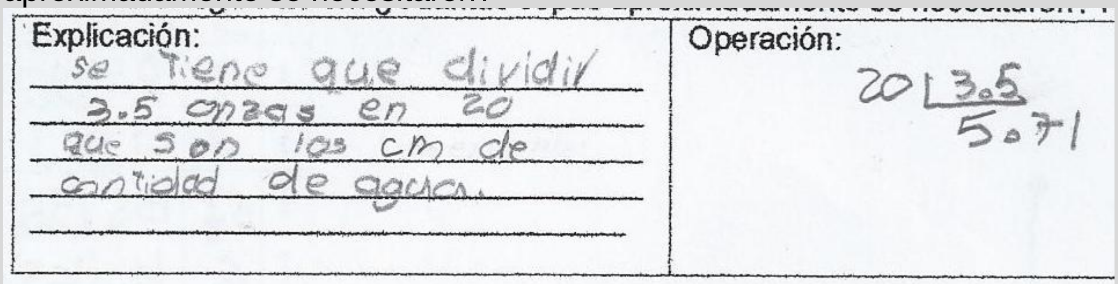
El thatquiz le permite al docente realizar un análisis cualitativo inmediato del proceso en el que se encuentra cada estudiante y del curso en general, ya que apenas termina cada estudiante de realizar la prueba le arroja la calificación, y al mismo tiempo arroja aquellos resultados no acertados con sus respectivas respuestas para poder interpretarlas.

De la misma manera la herramienta le muestra al estudiante al finalizar la prueba su calificación y las respuestas no acertadas con la correcta. Permitiéndole hacer una reflexión y una validación del procedimiento utilizado.

Se evidenció durante la aplicación y en los comentarios de los estudiantes que ellos prefieren una prueba con que física.

4.2 DIFICULTADES ENCONTRADAS

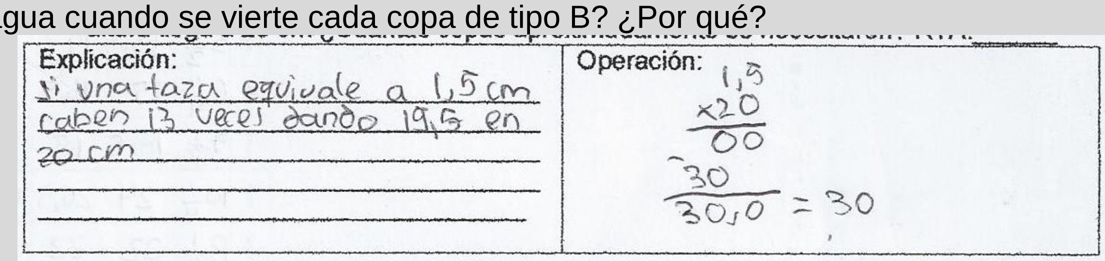
Pregunta 1 – b: En una vasija cilíndrica se vierte agua con varias copas de tipo B (3,5 onzas) hasta que la altura llega a 20 cm. ¿Cuántas copas aproximadamente se necesitaron?



Explicación:	Operación:
se Tiene que dividir 3.5 onzas en 20 que son los cm de cantidad de agua.	20 | 3.5 5.71

PROCEDIMIENTO DEL ESTUDIANTE 1	ERROR CONCEPTUAL DEL PROCEDIMIENTO
Se dividió la altura total que ya tenía el cilindro (20 cm) por la capacidad de la copa en cuestión (3,5 onzas)	Se evidencia un error conceptual del estudiante, pues establece una relación entre diferentes unidades, a saber, altura (cm) y volumen (onzas).

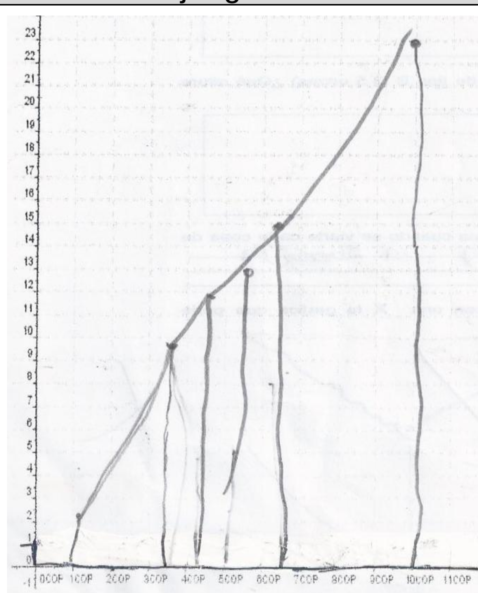
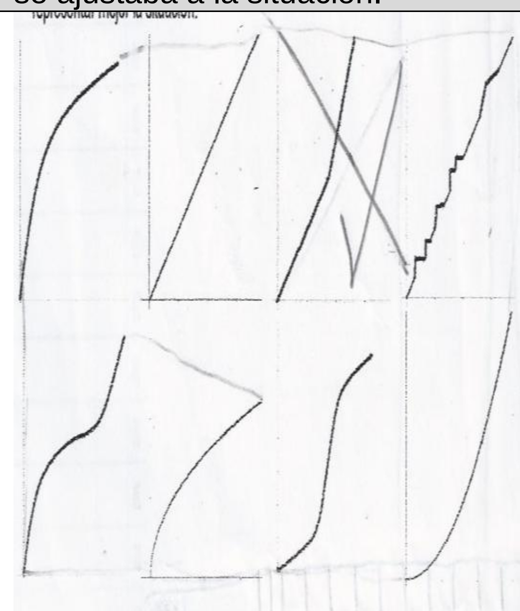
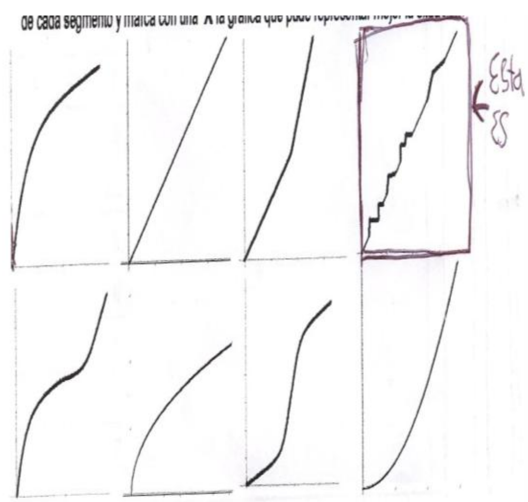
Pregunta 2: ¿Es posible determinar cuántos centímetros aumenta el nivel del agua cuando se vierte cada copa de tipo B? ¿Por qué?

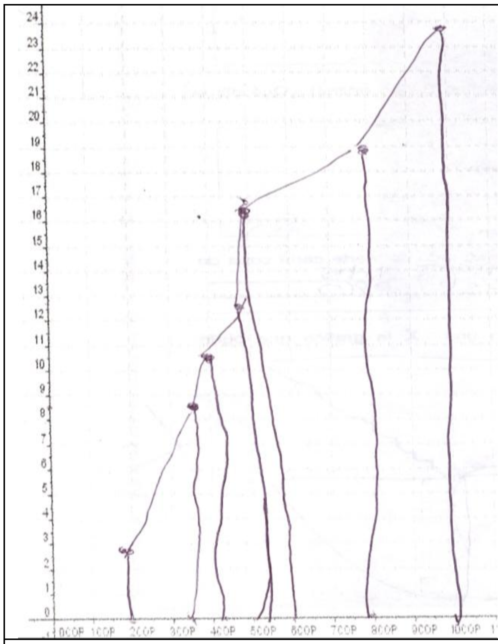


Explicación:	Operación:
si una taza equivale a 1,5 cm caben 13 veces dando 19,5 en 20 cm	1,5 ×20 00 30 30,0 = 30

PROCEDIMIENTO DEL ESTUDIANTE 2	ERROR CONCEPTUAL DEL PROCEDIMIENTO
Estableció la altura que correspondía a una sola copa de 3,5 onzas, obteniendo 1,5 cm. Este resultado lo multiplicó por los 20 cm de altura que tenía el cilindro.	Si bien el cálculo de la altura correspondiente a una sola copa fue correcto, se evidencia un error en el razonamiento multiplicativo, pues este caso era correcto hacer una división de la altura total del cilindro entre la altura que correspondía a cada copa.

Este error lo cometían algunos estudiantes en las otras etapas de la actividad.	Es importante destacar que para los estudiantes es más sencillo el razonamiento de tipo multiplicativo que de división.

Pregunta 3: Una los puntos extremos de cada segmento y marque con una X la gráfica que puede representar mejor la situación.	
Representación en segmentos verticales del juego del estimador	Gráfica que consideró era la que más se ajustaba a la situación.
	 

	
Se puede ver que las escalas utilizadas en el eje del número de copas no conservan las distancias entre copa y copa. Se evidencia la imprecisión de las alturas al momento de graficar o al momento de realizar la experiencia con las copas. En la experiencia se observava que algunos no llenaban completamente la copa en todos los eventos y esto afecto significativamente el tipo de gráfico presentado.	Aunque el gráfico seleccionado tiene relación con la gráfica de la columna de la izquierda, el error hace que esta selección sea incorrecta, pues no muestra que sea lineal la función.

CONCLUSIONES

Teniendo en cuenta que el propósito del trabajo era diseñar e implementar una actividad que permitiera lograr el desarrollo de la noción de variación en estudiantes de grado sexto, se obtienen las siguientes conclusiones:

- Desde un planteamiento didáctico, la actividad llamada “El juego del estimador” permitió: explorar diversas estrategias de solución, crear un contexto con planteamientos de nuevos problemas, utilizar el método natural de ensayo-error y ayudar a estructurar un pensamiento reflexivo respecto a la variación.
- Los diferentes tipos de representación utilizados en la actividad lograron crear un ambiente rico y variado de significados, en el que se podía intuir la covariación entre cada una de las cantidades y los efectos que causaban dichos comportamientos.
- El método que se utilizó para graficar con segmentos los cambios observados, permitió madurar la idea del “cuánto” y el “cómo” cambia la variable independiente y a su vez que efectos tiene dependiente.
- La actividad con geogebra permitió mejorar la fluidez representacional en cuanto las cantidades eran más exactas, por lo tanto pudo validar la representación grafica obtenida anteriormente del cilindro.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Cantoral, R. y Reséndiz, E. (2003). *El papel de la variación en las explicaciones de los profesores: un estudio en situación escolar*. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 6(2), 133-154.

Castaño, J. (1985). *Descubro la Matemática*. Bogotá: Comunidad de Hermanos Maristas de la Enseñanza.

Dolores, C. & Salgado G. (2009). *Elementos para la Graficacion Covariacional.* Revista Número, Didactica de la matemáticas. Volumen 72, Diciembre de 2009. (pp. 63 - 74)

Garcia G., Serrano C. & Salamanca J. (2000). *"Estudio del pensamiento variacional en la educación básica primaria".* Memorias del XVII coloquio distrital de matemáticas y estadística. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Gómez, J. & Grisales A. (2011). *Mi Maleta Matemática*. Bogotá: Comunidad de Hermanos Maristas de la Enseñanza.

MEN. (2004). *Pensamiento variacional y tecnologías computacionales*. Bogotá: Ministerio de Educaión Nacional, (MEN).

MEN. (2006). Estándares Básicos de Competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas. . Bogotá: Ministerio de Educaión Nacional, (MEN).

Moreira, M. (2002). *La teoria de los campos conpcetuales de Vergnaud, la enseñanza de la ciencias y la investigación en el área*. Recuperado el 2 de junio de 2011, en revista de investigaciones en esenanza de las ciencias, volumen 7 (1): http://www.if.ufrgs.br/ienci/artigos/Artigo_ID80 /v7_n1_a2002.pdf

Vasco, C. (2002). El pensamiento variacional, la modelación y las nuevas tecnologías. En Ministerio de Educación Nacional (Ed.), *Congreso Internacional Tecnologías Computacionales en el Currículo de Matemáticas*: *memorias,* (pp. 109-118). Bogotá, Colombia: MEN.

Vergnaud, G. (1991). *El niño las matemáticas y la realidad. Problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria.*México: Trillas.

Font V. (2002). *"Funciones y derivadas".* Memorias XXI Coloquio distrital de matemáticas y estadística. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional

Vigotsky, L (2007). "Pensamiento y habla" (A. Ariel González, Trad.). Buenos Aires: ediciones Colihue. (original publicado en 1934).