ESPACIO FÍSICO-GEOMÉTRICO: ¿UNA RELACIÓN EXCLUSIVA DE LA GEOMETRÍA EUCLIDIANA?

JOAN GABRIEL ARÉVALO TORRES

UNIVERSIDAD PEDAGOGÍCA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

BOGOTÁ, D.C.

2018

ESPACIO FÍSICO-GEOMÉTRICO: ¿UNA RELACIÓN EXCLUSIVA DE LA GEOMETRÍA EUCLIDIANA?

JOAN GABRIEL ARÉVALO TORRES

2009140005

TRABAJO DE GRADO PRESENTADO COMO REQUISITO PARA OPTAR AL TÍTULO DE LICENCIADO EN MATEMÁTICAS.

ASESOR

LUIS FRANCISCO GUAYAMBUCO QUINTERO

Profesor del departamento de Matemáticas

UNIVERSIDAD PEDAGOGÍCA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

BOGOTÁ, D.C.

2018

Hay un mundo secreto ahí afuera. Un universo oculto, paralelo, de belleza y elegancia, intrincadamente conectado con el nuestro. Es el mundo de las matemáticas. Y a la mayoría de nosotros nos resulta invisible.

Edward Frenkel

(*Amor y matemáticas, 2015*).

Agradecimientos

A todo el grupo de profesores que se han esforzado en mostrarme el camino de la mágica belleza y armonía de las ideas matemáticas, en especial, a Luis Francisco Guayambuco y Edgar Guacaneme, quienes con su conocimiento y experiencia me acompañaron en el desarrollo de este trabajo.

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de Grado.
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Titulo del documento	Espacio físico-geométrico: ¿una relación exclusiva de la geometría euclidiana?
Autor(es)	Arévalo Torres, Joan Gabriel.
Director	Guayambuco Quintero, Luis Francisco.
Publicación	Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional, 2018, 100 p.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional.
Palabras Claves	GEOMETRÍAS NO EUCLIDIANAS, QUINTO POSTULADO, ESPACIO FÍSICO, ESPACIO GEOMÉTRICO.

2. Descripción
El presente trabajo se desarrolla con la intención de optar al título de Licenciado en Matemáticas, y surge a partir de distintas reflexiones y cuestionamientos relacionados con la naturaleza del espacio, que emergen a lo largo del programa curricular, en la línea de geometría, ofrecido por la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, y está dirigido principalmente a un público universitario. En él, se hace un análisis del desarrollo de la geometría euclidiana y surgimiento de las geometrías no euclidianas, así como su relación con el concepto de espacio físico, abordado desde una perspectiva histórico-epistémica, y evidenciando la influencia del contexto social y cultural, en tal surgimiento. Uno de los propósitos es inquietar al lector con respecto a la relación de la geometría con el espacio físico. Las temáticas abordadas en el presente trabajo se sitúan al rededor del problema del quinto postulado y los intentos por demostrarlo, la aparición y desarrollo de nuevas teorías geométricas y su relación con el espacio físico, e identificando los factores socioculturales que generaron estos hechos. Además, se ofrecen algunos resultados importantes de

las geometrías de Bolyai, Lobatchevski y Riemann con sus respectivas implicaciones en la física moderna y el desarrollo del concepto filosófico de espacio.

3. Fuentes

Arboleda, L. C., & Anacona, M. (1994). Las geometrías no euclidianas en Colombia. Revista Latinoamericana de Historia de Las Ciencias y La Tecnología, 11(67), 7–24.

Bonola, R. (1945). Geometrias no euclidianas, exposición histórico-crítica de su desarrollo (primera ed). Buenos Aires: Espasa Calpe Argentina S.A.

Camejo, M. (2011). Elementos de Historia de la Ciencia, conceptos fundamentales de la teoría copernicana

Campos, A. (1994). Axiomática y geometría desde Euclides hasta Hilbert y Bourbaki. Bogotá.

Collette, J. P. (2006) Historia de las matemáticas, 4th edición.

Datri, E. (1992). La Geometría de Euclides y el espacio absoluto de Newton. Páginas de Filosofía, 24–32.

Diaz, J. (2002). Tales de Mileto. Apuntes de Historia de Las Matemáticas, 1(1), 13–18.

Dou, A. (1986). Euclides. Historia de Las Matemáica, 1, 61–78.

Espinosa, D. (2007). La educación griega y sus fuentes : aproximación a las épocas clásicas y helenísticas en Atenas, 2006–2007.

Filloy, E. (1976). La geometría y el método axiomático. Revista Matemática. Matemáticas y Enseñanza (2 ,) 7-14.

Gómez, J. (2010), Cuando las rectas se vuelven curvas, las geometrías no euclidianas.

Hacyan, S. (2004), física y metafísica del espacio y el tiempo. La filosofía en el laboratorio.

Heath, T. (1921). A History of Greek Mathematics.

HIcks, R. D. (1965), Diogenes Laertius: lives of eminent Philosophers, Massachusetts/ London, The Loeb Classical Library, Cambridge, Harvard University Press.

Jaeger, W. (2001). Paideia : Los ideales de la cultura griega (15th ed.).

Levi, B. (2006). Leyendo a Euclides (3rd ed.). Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Magno, D. A., & Aman, M. (2001). La antigua biblioteca de alejandría, (65), 30–37.

Marías, J. (1994). “Historia de la filosofía”. Alianza Universidad Textos.

Melogno, P., Rodríguez, P., & Fernández, S. (2011). Elementos de Historia de la Ciencia.

Moreno, L. (2002). La construcción del espacio geométrico, 1–68.

Pascual, L. (1999). Las otras Geometrías. La Historia de Las Matemáticas y Su Aplicación a La Docencia En Enseñanza Secundaria, 45.

Preaux, C. (1984). El mundo Helenístico, Barcelona, Labor, 2v.

Puertas, M. (1991). Euclides. Elementos. Libros I-IV.

Ramirez, A., & Sierra, G. (2000). Invitación a las Geometrías no Euclidianas.

Rey, A. (1962). El apogeo de la ciencia técnica griega.

Ruesga, P. (2004). Evolución de la Geometría desde su perspectiva histórica, XI(1), 85–101.

Santana M. (2011). Elementos de la Historia de la Ciencia, Ciencia y filosofía en la Edad Media: la disputa entre la Razón y la Fe.

Vega, L. (1991). Euclides. introduccion Elementos.

4. Contenidos

El documento está dividido en 5 capítulos. En el primero, se hace la presentación e introducción del tema; en el capítulo dos, se aborda el concepto de espacio y su relación con la geometría euclidiana en la cultura helénica, resaltando aspectos filosóficos concernientes a naturaleza del espacio para los griegos; en el capítulo tres, se estudia el desarrollo de la idea de espacio ligado al problema del quinto postulado; en el capítulo cuatro, se analiza el surgimiento y desarrollo de la geometría hiperbólica y elíptica, el cambio de enfoque con respecto a la idea filosófica de espacio y su impacto en el desarrollo de la teoría de la relatividad de Einstein. Y, finalmente, en el capítulo cinco, se resaltan algunos comentarios y cuestiones en referencia al desarrollo del análisis propuesto.

5. Metodología

La metodología utilizada para el desarrollo de este trabajo corresponde a la siguiente: en primer lugar, se realizó una búsqueda de referentes teóricos y material relacionado con el objeto de estudio, se revisó el panorama actual en referencia a las geometrías no euclidianas, posturas platónica y aristotélica alrededor del concepto de espacio, trabajos geométricos previos y procedimientos demostrativos en la obra *Elementos,* historia y desarrollo del problema del quinto postulado, etcétera.

A partir de estas consultas se decide hacer un estudio del desarrollo histórico de la idea de espacio ligada a la evolución de la geometría, abordándolo desde tres épocas: antes de la aparición de *los Elementos* (o la formulación del 5 postulado), después del quinto postulado hasta antes del nacimiento de las geometrías no euclidianas y, por último, la revolución matemática del siglo XIX.

Posteriormente con base en este estudio, se decide junto con el asesor, realizar el análisis desde cuatro puntos de vista: sociocultural, epistémico, académico y científico, para finalmente concluir con la escritura de la monografía.

6. Conclusiones

El estudio del concepto de espacio en el ámbito geométrico permite concluir que:

- No existe una única geometría que se adapte a la realidad física, cada una tiene un campo de aplicación y un espacio propio en el cual validar resultados; esto implica que cada una tenga un lugar de investigación, por ejemplo, los resultados de la teoría de la relatividad general de Einstein dicen que las tres geometrías (euclidiana, hiperbólica y elíptica) son igual de válidas al momento de considerar distancias relativamente pequeñas, pero a pesar de ello, solo las geometrías no euclidianas permiten tratar problemas del espacio astronómico con mayor precisión.
- La geometría euclidiana en principio aparece con la necesidad de generalizar diferentes hechos extraídos de la realidad física, tal geometría era la única capaz de describir el espacio que nos rodea: los conceptos geométricos conocidos hasta hace pocos siglos, bastaban para tales explicaciones, lo cierto, es que los conceptos euclidianos que nos sirven para describir observaciones y experimentaciones relacionadas con nuestra cotidianidad, son de un dominio bastante limitado y en consecuencia, considerar este, como un modelo “único”, nos impide conocer, entender, abstraer y proponer nuevas teorías, tanto en el campo de la física, como en el campo de las matemáticas.

El estudio del concepto de espacio físico-geométrico, desde un punto de vista epistémico nos permite concluir que:

- El problema del quinto postulado se desarrolla a través de los siglos en un campo netamente lógico, axiomático y matemático, sin embargo, su origen se relaciona directamente con la ontología del espacio: debido a la imposibilidad de concebir un paralelismo distinto al que se corresponde con la realidad.
- Las geometrías euclidianas y no euclidianas tienen características diferentes de nacimiento: La geometría euclidiana fue aceptada como disciplina que permite explicar sucesos, observaciones y experimentos de la realidad, desarrollándose en cierta medida a partir de la necesidad de generalizar hechos físicos y geométricos que se correspondían entre sí, pero, la aparición y desarrollo de las geometrías no euclidianas, tienen su origen en problemas lógicos y de axiomática, solo posteriormente con Einstein se hacen necesarias en el desarrollo y explicación de conceptos correspondientes a la física moderna.

El estudio de la relación entre el espacio y la geometría, desde un punto de vista filosófico, permite concluir que:

- Las geometrías no euclidianas propician un conjunto de circunstancias que intervienen en el replanteamiento de la filosofía del espacio, sembrando serias dudas sobre la veracidad de las matemáticas, como lenguaje que describe las leyes de la naturaleza.

El estudio del espacio y su relación con la geometría, desde un punto de vista pedagógico permite concluir que:

- Es de resaltar la inclusión en aumento de las geometrías no euclidianas, al menos, en el currículo colombiano para la educación superior, esto implica que la geometría sea abordada como una ciencia de estudio con diferentes matices y campos, permitiendo que sus aplicaciones lleguen tan lejos como la capacidad de imaginación que tenga el ser humano. Ahora bien, no considero que el estudio de las geometrías no euclidianas deba estar sesgado a la educación superior, al contrario, la posibilidad de desarrollar trabajos de enseñanza en la educación media, permite que el individuo desarrolle de forma integral el sentido espacial, además, como consecuencia del estudio de otras geometrías es posible comprender el universo en el que vivimos y las leyes que lo gobiernan. En ese sentido, creo que es posible la enseñanza de nuevas teorías geométricas, a partir de la comparación de las distintas ideas de espacio físico, donde es posible validar resultados de cada teoría, además, desde lo axiomático es posible desarrollar resultados en otras geometrías, siguiendo procesos análogos que aparentemente eran propios de la geometría euclidiana.

Elaborado por:	Arévalo Torres, Joan Gabriel.
Revisado por:	Guayambuco Quintero, Luis Francisco.

Fecha de elaboración del Resumen:	04	11	2018

Tabla de contenido

1. INTRODUCCIÓN

Durante siglos la Geometría Euclidiana se ha constituido como pilar fundamental en una estructura trascendental en la historia de la humanidad, llamada “Matemáticas”. Dicha geometría surgió y se desarrolló inicialmente como un estudio de orden completamente empírico, en el que se destaca el papel fundamental de la aplicación a la solución de problemas del espacio físico, espacio que luego llega a describirse a partir de nociones comunes, postulados, definiciones y proposiciones geométricas, que sustentan y configuran dicha geometría.

Para la comunidad científica durante muchos siglos fueron entonces innegables los nexos directos entre la actividad geométrica teórica y la realidad concreta del espacio físico, permitiendo el desarrollo sociocultural de la humanidad sin mayores anomalías a lo largo de todos estos siglos.

Sin embargo, en este extenso lapso se generó un interés por establecer si el sistema de postulados (o modernamente el sistema de axiomas) sobre los que subyace la teoría, estaba “bien formulado”, es decir, si el sistema axiomático propuesto por Euclides en sus Elementos estaba bien fundamentado; ello llevó a personajes notables a analizar el quinto postulado, que en su versión más popular (pero no la original) formula la imposibilidad de que por un punto exterior a una recta m, pueda ser trazada más de una recta que no corte a m, postulado que según los expertos de la época, podía ser demostrado a partir de otros postulados y proposiciones geométricas (el famoso problema del V postulado).

La historia hegemónica reseña que a finales del siglo XVIIl y principios del siglo XlX, Carl Friedrich Gauss trabaja en el problema de la demostrabilidad del quinto postulado, concluyendo que es posible que surjan geometrías alternativas reformulando el quinto postulado, sin publicar resultado alguno, pero creó el término “geometría no euclidiana”, vislumbrando la posibilidad de la existencia de otras geometrías. Este problema era tan popular que prácticamente todos los matemáticos eminentes intentaron resolverlo; entre ellos podemos mencionar a Saccheri, Lambert, Legendre, quienes son considerados algunos de los precursores de las geometrías no euclidianas. En las primeras décadas del siglo XIX, de manera autónoma y sin conocer uno el trabajo del otro, Lobachevski y Bolyai demuestran la independencia del V postulado respecto de los otros cuatro formulados por Euclides, inventando la geometría hiperbólica en la cual no se verifica el V postulado, y dando lugar a la aparición de otras geometrías distintas de la tradicional geometría euclidiana. Con el nacimiento de estas nuevas geometrías emerge un problema de discusión científico y filosófico, centrado en la relación unívoca entre los conceptos de la Geometría euclidiana y su relación con el espacio físico. En efecto, si bien durante siglos se pensó que solo existía la posibilidad de una única geometría que describiera y validara las relaciones en el espacio físico y que, en consecuencia, cualquier geometría distinta debía ser necesariamente contradictoria, aparecía entonces la posibilidad de cuestionar, entre otros asuntos, si la geometría euclidiana y sus conceptos son una abstracción de lo que concebimos como realidad, si tales conceptos no proceden o emergen exclusivamente de la realidad, o si existen teorías geométricas independientes de la realidad.

Así, con la aparición de nuevas geometrías, la relación directa de la que gozaba exclusivamente la Geometría euclidiana con fenómenos y hechos reales, entra en crisis. En ese sentido hoy nos permitimos plantear preguntas como: ¿qué sucede con el espacio físico y como se define en otras teorías geométricas?, ¿qué es entonces el espacio geométrico?, ¿cómo se definen y se conciben estos conceptos de manera que las nuevas teorías no sean contradictorias?, ¿cómo es esta relación entre los espacios (geométrico y físico) en todas las geometrías de manera que sigan siendo consistentes? ¿Cómo han evolucionado las concepciones de espacio físico, y cuáles son las teorías geometrías que se necesitan para interpretarlas (modelarlas)?

1.1. Estructura del documento y desarrollo

Los interrogantes antes mencionados, serán el eje transversal en un estudio que nos permitirá analizar el desarrollo histórico de la idea de espacio ligada a la evolución de la geometría, abordándolo desde tres épocas: antes de la aparición de *los Elementos* (o la formulación del 5 postulado), después del quinto postulado hasta antes del nacimiento de las geometrías no euclidianas y, por último, la revolución matemática del siglo XIX; para una fácil ubicación cronológica, las nombraremos así:

- Cultura Helénica - antes del quinto postulado (aproximadamente siglo VI a.n.e. hasta siglo III a.n.e.)
- Edad media - Después del quinto postulado (siglo III a.n.e. hasta siglo XVI).
- Modernidad -Tercera revolución matemática (después del siglo XVI).

En cada una de estas épocas se revisarán algunos aspectos que, a juicio personal, serán relevantes para el trabajo; estos aspectos son de carácter sociocultural, epistémico, académico y científico, siendo analizados en la línea de tiempo descrita anteriormente, con el fin de tener a la mano suficiente información que nos permita visualizar en qué momentos de la historia y bajo qué condiciones de esos momentos, hay tensiones: filosóficas, científicas o metodológicas, que hacen que la geometría tenga que contemplar diferentes alternativas para ser fundamentada. En ese sentido, iniciamos en el segundo capítulo, que tiene como objetivo examinar la línea histórica de los fundamentos de la geometría hasta el siglo III a.n.e., en el que las matemáticas se convierten en una ciencia hipotético-deductiva, desde los primeros estudios geométricos hasta el momento donde Euclides enuncia el quinto postulado. Entonces, como aspecto sociocultural se muestran aquellas condiciones culturales, geográficas y políticas que impulsaron el estudio de la ciencia de aquella época. Desde el aspecto epistémico, estudiamos la naturaleza de los primeros objetos geométricos y la postura platónica o aristotélica de Euclides alrededor de la actividad matemática de la época, y desde allí mostrar aquellos elementos que permitieron las condiciones necesarias para que Euclides consolidara su obra de la forma en que lo hizo. Desde el aspecto académico se exponen los rasgos más característicos referentes a la organización de la escuela en la antigua Grecia: cómo era el acceso al conocimiento, enseñanza y aprendizaje. Desde el aspecto científico, se tuvo en cuenta la concepción de espacio físico, espacio ideal y espacio geométrico. Y, finalmente, concluimos el capítulo con una síntesis y algunas apreciaciones.

En el tercer capítulo, se estudiará el quinto postulado y sus intentos por demostrarlo siguiendo la idea del capítulo anterior, es decir, bajo la línea de los cuatro aspectos antes mencionados (sociocultural, epistémico, académico y científico), con el fin de visualizar los cambios en cada uno y sus implicaciones en la relación de la geometría con el espacio, en especial cómo evoluciona el método hipotético deductivo y su importancia en la rigurosidad a la hora de sentar los fundamentos de la geometría euclidiana. Por otro lado, se analizan las causas que originaron la transformación del pensamiento geométrico que describe la realidad física, y finalmente contrastando la información obtenida mencionamos algunas apreciaciones.

En el cuarto capítulo, se estudiará la revolución matemática, que corresponde a la transformación de la ciencia en ciencia abstracta, en el sentido de que ya no solo se corresponde con la realidad física y concreta, sino que ahora los objetos matemáticos pueden representar objetos de naturaleza arbitraria, siempre y cuando cumplan las condiciones establecidas en un conjunto de axiomas. En este caso, los ejes de análisis están dirigidos a estudiar aspectos claves como: la consideración formal del método axiomático, la aparición de las geometrías no euclidianas y otras estructuras abstractas, el papel de la realidad en el contexto de otras geometrías y las concepciones Kantianas acerca de la naturaleza de los objetos matemáticos. Para finalizar, tenemos un capítulo de comentarios (de análisis y organización de los hallazgos en los campos sociocultural, epistémico, académico y científico) que permita contrastar toda la información y posturas adoptadas a esta altura, para tratar de responder los interrogantes que se plantearon al inicio.

1.2. Objetivos

General. Analizar desde la perspectiva histórica-epistémica las concepciones de espacios físico y geométrico, para identificar elementos que permitan comprender si existe alguna relación entre ellos, en el caso particular de las geometrías euclidianas y no euclidianas.

Específicos.

- Identificar los contextos de surgimiento de la geometría euclidiana y las no euclidianas.
- Explorar la relación "espacio físico – espacio geométrico" en cada una de las teorías geométricas (euclidianas–no euclidianas) desde un enfoque histórico-epistemológico.
- Estudiar las concepciones del espacio físico en las teorías de Newton y Einstein e identificar las geometrías que se necesitan en cada una de ellas.
- reflexionar sobre el desarrollo del pensamiento espacial en torno a las geometrías no euclidianas.
- Elaborar monografía.

2. EL ESPACIO Y SU RELACIÓN CON LA GEOMETRÍA EN LA CULTURA HELÉNICA

Actualmente, en la investigación matemática, la geometría euclidiana no parece ser un gran campo de interés. Sin embargo, el potencial que se encuentra desde el punto de vista académico y formativo es realmente basto; su estrecha relación con la filosofía, la historia, la semiótica y sobretodo la actividad demostrativa y sus aplicaciones, hacen de ella un conjunto de contenidos imprescindibles para el currículo matemático de la educación básica. Por esta razón, en este primer capítulo nos enfocaremos en seguir su desarrollo y los obstáculos que se presentan en el mismo, con el fin de hallar aquellos aspectos epistemológicos e históricos relacionados con el ideal de espacio físico-geométrico y el problema de la demostración, que aporten al logro de los objetivos propuestos. Para todo esto, también necesitaremos la ayuda de la historia como herramienta principal, y a quien preguntaremos y cuestionaremos acerca de la construcción del conocimiento matemático, cambios conceptuales y su relación con el espacio. Para el logro de nuestros propósitos, no intentaremos remontarnos a las épocas más lejanas, ni a las culturas más antiguas donde aparecieron las primeras ideas de geometría y espacio físico, nos bastará empezar desde la Grecia antigua.

2.1. Condiciones socioculturales y académicas en la cultura helénica

La intelectualidad y desarrollo científico griegos no pueden ser entendidos si se observan solo las condiciones naturales de su nacimiento; es importante echar un vistazo a los factores geográficos, culturales y étnicos para poder comprender cómo el pueblo griego se sobrepone a otros pueblos de la época, y además se convierte en el rostro que representa el pensamiento filosófico y científico a lo largo de la historia occidental.

Como relata (Collette, 2006), por 2000 años en Creta y el mundo egeo se establece una civilización de bronce que iba desde las costas de Asia menor hasta Sicilia, alcanzando su apogeo entre los siglos XVI y XV a.n.e., coincidiendo con el predominio de los reyes minoicos en Cnos; la construcción de majestuosos palacios, la extensión comercial y marítima se encuentra al mismo tiempo con el inicio de la civilización micénica (antepasados lejanos de la civilización europea). De manera que la cultura Egea termina siendo producto de la cultura minoica y micénica por el contacto entre autóctonos morenos de raza mediterránea y por invasores aqueos y jónicos llegados de la región del Danubio que se situaron alrededor del XVII a.n.e. en Creta, imponiendo por todos los lugares el dialecto helénico. Después del siglo XII a.n.e., con Homero y la civilización homérica, se sustituye la leyenda por la epopeya y la historia, entonces es cuando empieza la verdadera historia de Grecia.

De esta manera, ubicamos el mundo griego entre el mar Egeo y el mar Jónico, configurado por diferentes poblaciones dispersas por las costas del mar Negro y el mar Mediterráneo. Estos pueblos ubicados en los alrededores de las culturas egipcia y Babilónica, tenían redes de comunicación marítima con antiguos centros de cultura, de los que recibieron diferentes conocimientos matemáticos y astronómicos. Así, una de las referencias matemáticas más antiguas que se conocen del pueblo helénico, fue escrita en el siglo IV a.C. por Eudemo quien fue discípulo de Aristóteles. Esta cita aparece por primera vez en los comentarios de Proclo (410-485), referente a *Elementos* de Euclides, que más adelante trataremos con detalle. En este tratado además se conoce que Tales de Mileto pudo haber sido el fundador de las matemáticas griegas, adquiriendo sus conocimientos en distintos viajes realizados a Egipto e introduciéndolos a Grecia en el siglo IV a.n.e. Además, en este fragmento se menciona a Pitágoras como el inventor de la teoría de números irracionales y quien construyó los cinco solidos regulares; también, se le cita como el primero en estudiar principios matemáticos y diferentes teoremas a partir de la Filosofía de entonces, dándole un impulso importante a la geometría como ciencia, que más tarde, desde su propia identidad y con ayuda de Euclides alcanzaría un carácter completamente formal dentro de un sistema lógico

El periodo helenístico se conoce como el periodo de expansión imperialista de la cultura griega por Asia y África situado alrededor del 323 a.n.e, (Preaux,1984) relata que cuando se produce la muerte del conquistador Alejandro Magno, y a su vez la destrucción del sistema político griego conocido como las polis, que no es más que la división de los distintos reinos del imperio que se había forjado bajo su mando. Luego de una serie de asesinatos y conspiraciones se busca asegurar un equilibrio entre las distintas facciones militares del imperio y es así como en el marco del consejo de Babilonia, se impone como regente de Egipto Ptolomeo I Soter, general de las tropas de Alejandro en sus campañas militares, tomando como sede de gobierno la ciudad de Alejandría y a su vez inaugurando una dinastía que perdurará más de 300 años, reconocido por su relevancia, aporte y promoción que desde siempre le dio a la actividad científica.

Entre algunos de sus logros políticos se destaca por anexar a Cirene y Siria y condenar a Cleómenes quien fue gobernador del desierto arábigo por muchos años designado por Alejandro, y quien después también fue Adscrito al gobierno de Egipto por el consejo. Este y otros hechos, como sus emprendimientos expansionistas y un adecuado manejo con el clero egipcio, le permitieron poco a poco consolidarse como soberano absoluto del país. Solo hasta el periodo del 311 a 301 a.n.e. la situación político militar del disuelto imperio de Alejandro, presenta algo de estabilidad ya que las continuas luchas por el sometimiento de imperio fragmentado, con ex-generales de Alejandro y ahora emperadores, hicieron que el clima siempre estuviera caracterizado por la guerra y no es sino hasta el siglo III a.n.e. cuando Ptolomeo II asume el poder, que se logra construir un estado relativamente sólido en lo militar y solvente en lo económico, pero a costa de una marcada separación entre la clase alta y baja.

En (Melogno, Rodríguez, & Fernández, 2011), se subraya que desde lo cultural los Ptolomeos no dejaron nunca de incorporar elementos típicamente griegos sin perder las tradiciones egipcias, en especial lo que se refiere a seguridad interna, recaudación, finanzas y comercio que existía desde la época de los faraones. El sostenimiento del gobierno se basaba en un fuerte control del comercio estatal, las finanzas, la producción, que por cierto impulsada por la modernización de los medios de transporte y las técnicas de cultivo, así como la construcción del puerto de Alejandría y la monopolización del comercio fluvial a través del Nilo; por otro lado, la centralización demográfica juega un papel importante en la estabilidad gubernamental, los principios de conquista promulgados por Alejandro se frenaron con el fin de evitar la fundación de nuevas ciudades, dándole al imperio una estructura única y centralizada en Alejandría que concentraba todos los ingresos del territorio imperial. Todas estas condiciones, sumadas a una política de comercio basada en la importación de materia prima y exportación de manufactura, le dieron al imperio de los Ptolomeos la suficiente capacidad económica para impulsar un proyecto de financiación estatal de la educación y la investigación científica.

Hablar de la naturaleza de la educación helénica implica indiscutiblemente aludir a la Biblioteca de Alejandría, la cual en realidad era, lo que hoy consideramos como una universidad de primer nivel. Este título obedece a la cantidad de conocimientos universales que allí se había congregado, así como al reconocimiento ganado como un centro de estudio multicultural que impregnaba a sus pertenecientes de un espíritu abierto y único que promovía el saber y la investigación en diferentes campos, aun si estos no tenían aplicación práctica o utilidad en la vida cotidiana. El carácter multicultural que caracterizaba la biblioteca obedecía a la ubicación de la ciudad, que como ya se mencionó era estratégica (por tierra y mar). Esta ciudad no solo era considerada famosa en términos de comercio de bienes, sino también, por el intercambio de conocimiento, ya que la seguridad brindada por las rutas comerciales hacía que los hombres cultos de la época planearan y emprendieran largos viajes en búsqueda del saber. De esta manera se convierte en el centro universal de aprendizaje de aquel periodo, recibiendo intelectuales de diferentes disciplinas que estaban dispuestos a intercambiar conocimiento con los académicos helenistas (Melogno et al., 2011).

Se cree que la organización y configuración de la biblioteca (historia, filología y ciencia), se deben a Demetrio Falero, quien había regido Atenas y fue exiliado en calidad de refugiado en Alejandría por Ptolomeo I, siendo a su vez consejero de este y además el primer director de la biblioteca.

El sistema organizacional de la biblioteca, impuesto por Demetrio, dividía el museo de la biblioteca en facultades departamentalizadas, regidas por un decano, cuyas reglas estaban orientadas a mantener la investigación y abierto exclusivamente a las mentes prodigiosas de la época. Contenía diez grandes salas de investigación (cada una dedicada a un tema particular), jardines botánicos, un zoológico, salas de disección, un observatorio y un gran comedor, donde con comodidad se sometían a discusión las grandes ideas de la época.

En (Magno & Aman, 2001), se hace referencia a la biblioteca de Alejandría, como el mayor centro de difusión y publicación del momento; ejecutaban una agresiva política de adquisiciones literarias, registrando cada barco que se acercaba, con el fin de decomisar temporal o permanentemente todo manuscrito que representara un aporte para biblioteca; con algunas obras se procedió distinto, por ejemplo, la obra "las tragedias griegas" fue tomada en préstamo desde Atenas a cambio de un depósito en efectivo, retenido hasta que la obra fue devuelta.

La difusión de la información y el conocimiento en Alejandría dependía exclusivamente del método de transmisión oral, ya que los libros se hallaban en papiros y solo podían circular a través del proceso de copiado hecho al dictado por un grupo de escribas, y de forma individual, estos escribas no necesariamente eran académicos. Su proceso de copiado no era fácil, puesto que muchos de los textos con los que trabajaban, tenían entre doscientos y seiscientos años de antigüedad; se asume que estaban escritos en diferentes dialectos al provenir de diferentes lugares, también distintos en forma y ortografía.

Entre los bibliotecarios más destacados de la época dorada de Alejandría están: Zenódoto de Éfeso (325-234), literario filólogo y editor comentarista de Homero; Eratóstenes de Cirene, astrónomo matemático y geógrafo (275-195), reconocido por ser el primero en calcular con gran aproximación, la circunferencia de la tierra. Entre otras figuras aparece Calímaco (310-245) destacado poeta, Aristófanes de Bizancio (257-180), discípulo de Eratóstenes a quien se le atribuye mejoras en métodos de puntuación de la lengua, y por supuesto el personaje que más nos interesa en este capítulo, Euclides.

La información que se tiene de Euclides es poca; hoy solo podemos hablar de un famoso personaje griego al que le llaman "el padre de la Geometría", cuya fama se debe, más allá de la autoría de la obra *Elementos*, a ser el protagonista en el proceso de establecer la Geometría como ciencia de estudio bajo el método hipotético deductivo, a reunir, formalizar y dotar de carácter científico diferentes disciplinas del mismo orden, y por supuesto, a establecer los precedentes en la idea de rigor para el estudio de las Matemáticas.

Diferentes historiadores, (Vega, 1991), (Heath, 1921), ubican a Euclides como un personaje que vive alrededor del 300 a.d.n.e., más joven que Platón y mayor que Arquímedes. Además, según comentarios de Proclo, vivió en la época del primer Tolomeo, probablemente ligado a la actividad intelectual que emergía entonces, más específicamente en la famosa Biblioteca de Alejandría, que era el centro cultural e intelectual más importante de aquel entonces.

Toda esta información nos permite inferir que la atmosfera académica e informativa de Alejandría no tenía un carácter hermético o de confinamiento en los muros de aquella biblioteca, sino más bien, tenía un carácter difusivo; la enseñanza y el aprendizaje no tenían un fin estático sino, por el contrario, su intención era poder llegar a diferentes lugares por medio de aquellos que viajaban en función de la investigación y el saber.

A continuación, intentaremos mostrar dos de los principios que promulgaba la escuela de Alejandría en lo que corresponde a la academia: uno de ellos se refiere a la naturaleza de la educación que se impartía en aquella época (*i.e.,* qué se enseñaba, por qué se enseñaba) y el otro, a la concepción de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (bien sea la enseñanza como instrucción o como transmisión de conceptos).

2.1.1. Educación y pedagogía

A los griegos se les reconoce como una de las culturas más influyentes en el pensamiento occidental, una cultura que a lo largo de la historia de la humanidad dejó una herencia única en términos científicos, artísticos, filosóficos y literarios, pero lo que realmente distinguió el pensamiento del pueblo griego de otros pueblos, fue el despertar de una conciencia y espíritu en pro de la educación y la cultura. El modelo de educación utilizado en el mundo griego fue la transmisión de conocimiento a través de la tradión oral y escrita, promovido por los Sofistas, quienes fueron un grupo de pensadores del siglo V a.d.n.e, destacándose entre ellos dos muy importantes: Protágoras y Gorgias. Los sofistas fueron los creadores de la retórica, el arte de la persuasión a través de la palabra; la dialéctica, el arte de refutar y discutir y la oratoria el arte de la elocuencia.

Los diferentes episodios de guerra (el Peloponeso) que vivió Atenas por más de treinta años, amenazaron los cimientos culturales y espirituales de la cultura griega, puesto que durante mucho tiempo se pensó que esta ciudad iba a ser la morada permanente de su pensamiento, de manera que la brusca caída de Atenas hizo que la visión espiritual se quebrara, ya que este estaba estrictamente relacionado con la vida en la polis. Este hecho motivó a los sofistas a buscar una nueva fuente de energía espiritual y material que les permitiera reconquistar las almas de los hombres que alguna vez se habían apartado del enfoque que siempre había caracterizado a esta cultura. Este presente hace que el impulso pedagógico se fortalezca en grandes proporciones, convirtiéndose en un tema urgente, que adquiere por la condición de sufrimiento de los hombres, una profundidad no esperada. Aparece entonces la idea de *Paideia* como la expresión auténtica de la espiritualidad y, con ella, el despertar consiente de en términos de educación y cultura para las próximas generaciones (Jaeger, 2001).

La *Paideia* es educación, entendida como el medio que permite la conexión con otros individuos, por medio de un procedimiento que permite a cada uno alcanzar el prototipo que la sociedad exigía en ese momento de la historia, enfocado a la transmisión de costumbres, normas, conocimientos, técnicas e ideas que al final, repercutiera en la coyuntura política, social, económica y cultural de la época. Sin embargo, la teoría y el método educativo no aparecen jugando un papel principal en esta época, sino más bien, en un papel secundario de la mano de la filosofía y el pensamiento político, la educación no era considerada como un fin, sino como un medio para alcanzar un estado determinado de las cosas, nace con la necesidad de un mecanismo que permita reproducir de generación en generación un sistema que funcione, para alcanzar determinados objetivos políticos, económicos o sociales para un bien común, todo esto fomentando una serie de valores e ideales que no hacen parte de la naturaleza del hombre, sino que hay que aprenderlos. De manera que la educación no es una cuestión individual, es un asunto que pertenece a la comunidad.

En la antigua Grecia la escolarización no era un requerimiento obligatorio, pero sí estaba ampliamente extendida, y en sus momentos iniciales, fue una cuestión dirigida a la elite de la sociedad. La iniciación escolar empezaba a los siete años de la mano de un *paidagogós*[1], un esclavo domestico designado específicamente para acompañar al niño durante todo el día, los niños de familias con un estado socioeconómico alto, tenían una formación de al menos diez años, y los que no, abandonaban la instrucción a los tres o cuatro con una idea de lo básico, los que tenían una mejor instrucción, tenían tres tipos de maestros a lo largo de su formación, en gramática; para lectura, escritura, aritmética y literatura, los *paidotribes*, que eran maestros de lucha, gimnasia y boxeo y los *kitharistes*, que enseñaban música. Al final de todo, a los 18 años, los hombres debían someterse a dos años de entrenamiento militar y luego regresaban a retomar la educación, esta vez como preparatorio para una vida pública. (Espinosa, 2007).

Los sofistas considerados los primeros profesionales de la enseñanza se auto llamaron críticos y maestros de la palabra, impartiendo su proyecto sistemático de educación, basado en el dominio de la palabra y haciendo uso del poder de la persuasión, siendo duramente criticados desde un punto de vista académico al usar la retórica como un medio para adular a las masas y no como una herramienta para la producción del saber. Aristóteles consideraba la sofistica como el arte que perseguía la apariencia y no la verdadera sabiduría.

Es innegable que Atenas fue la ciudad más culta y educada de su época, a diferencia de Egipto y oriente, donde la educación estaba destinada únicamente a minorías selectas, pero en Atenas se buscó favorecer la educación de todos los hombres con el fin de convertirlos en ciudadanos útiles para aquella sociedad. La ausencia de la institucionalización de la educación hizo que los sofistas idearan un sistema de educación con características especiales, que fomentaba la relación entre el maestro el estudiante y el libro.

Con estas características, el mundo griego busca recuperar su esplendor de la mano de la *paideia*, pasaron los años y el sistema educativo fue tomando fuerza y enfocándose ya no en reformar el estado sino a quienes gobernaban el estado, y a través de estos líderes, se

[1]*Paidagogo* tiene su origen en el griego antiguo que significa "*niño- llevar o conseguir*"

reformará el pueblo; el centro de estas ideas y la necesidad de intervenir en la vida pública, fue el escenario perfecto para que Platón, Sócrates y Aristóteles reflexionaran sobre el individuo y los problemas que planteaba la vida en comunidad.

Para Aristóteles, la educación debía ser pública e igualitaria y además integral, refiriéndose a la educación física, educación moral y el conocimiento; con base en esto, él construye un modelo educativo haciéndose cuatro preguntas fundamentales: *¿para qué se educa?* Se educa para la vida, pero no cualquier forma de vida sino una vida digna, se educa para la felicidad, para un modo satisfactorio y adecuado para el ser humano; *¿por qué se educa?* Para Aristóteles, la educación era necesaria, dado que nuestra dotación intelectual, moral y física era escasa; en su opinión, la educación viene a perfeccionar lo que la naturaleza dejó incompleto; *¿cómo se educa?* Para Aristóteles, según el libro de VII de la *Política,* hay tres aspectos que inciden en la educación: la naturaleza, el hábito y la razón, de manera que se parte de los aspectos naturales como el temperamento y los talentos, seguido por la educación de los hábitos para luego reformarlos por medio de la razón; *¿a quién se debe educar?* La educación estaba dirigida hacia el pueblo, a todo individuo sin excepción alguna y la responsabilidad de esto no recae sobre el educando ni sobre el padre del individuo, recae sobre el estado. (Espinosa, 2007)

Para finalizar, la idea de educación en la antigua Grecia se presenta como conjunto de características ligadas a la genética del individuo griego, una educación orientada a la formación del ciudadano integral, motivado por la realidad histórica, generada tras la derrota ateniense en la guerra del Peloponeso. Estos aspectos son los que hicieron que este pueblo realmente se destacara por encima de otras culturas.

En los años posteriores, la educación griega sufre diferentes transformaciones de orientación, con respecto al geocentrismo de la educación ateniense, la idea de transmitir conocimiento ya no solo pertenece a una ciudad, sino que se encuentra abierta a diferentes culturas; es así como el primer periodo de la biblioteca de Alejandría 306 a 150 a.d.n.e fue marcado por la intervención de Aristóteles en la articulación del sistema educativo griego y su enfoque científico-lógico, el rasgo más importante de la investigación en diferentes campos del saber.

En este periodo se destacan sabios como: Euclides, Hiparco, Herón entre otros, afianzándose en áreas como: la filología, las ediciones críticas y el pensamiento científico de occidente. Todo esto nos permite percibir algo del ambiente en el que Euclides escribe *Elementos*, rodeado no solo de un carácter particularmente intelectual, sino motivado por el deseo de formar desde el espíritu, personas autónomas con capacidad para pensar e intervenir en diferentes asuntos públicos. En ese sentido puede entenderse un poco la intención de Euclides al consolidar su obra, una obra con carácter difusivo, que tuviera trascendencia a través de las generaciones.

A continuación, citamos algunos personajes cuyos estudios geométricos contribuyeron en la construcción y consolidación de la obra en su momento.

2.1.2. Antecesores de Euclides y trabajos previos.

La geometría que precedía a Euclides tenía diferentes direcciones. Por ejemplo, las grandes civilizaciones estaban interesadas explícitamente en la geometría aplicada. A diferencia de los griegos quienes se interesaron siempre por la geometría demostrativa. Como menciona (Levi, 2006) los egipcios inventaron la geometría con el fin de dar solución a las problemáticas causadas por las crecientes del rio Nilo, que difuminaban los límites entre la propiedades, obligándolos a renovar las mediciones constantemente. Para esta y otras civilizaciones euroasiáticas, los conocimientos geométricos y matemáticos se desarrollaron con el fin de dar solución a las necesidades que demandaba una vida en sociedad. De manera que su intención al evolucionar en estas áreas, era con un fin netamente práctico. Por otro lado, los griegos no solo estaban interesados en lo práctico o en generalizar, estuvieron siempre interesados en organizar los conceptos, desde el momento en que empiezan a pensar por su cuenta. (Campos, 1994). A continuación, presentamos algunos de los exponentes de esta cultura.

Tales de Mileto (624-547) a.d.n.e. Se le considera el padre de la matemática griega, según el historiador Diógenes Laertes. Lo que se sabe de Tales, es realmente muy poco, no hay referencias contemporáneas a las cuales recurrir. Además, es de tener en cuenta que en aquella época muchos de los trabajos que eran producidos por personas desconocidas terminaban siendo atribuidos a famosos personajes. A Tales se le considera una de las figuras más influyentes en la cultura griega. Fundó una escuela en Mileto, "*la escuela Jonica*", en la que se promovían ideas filosóficas y matemáticas orientadas a cuestionar sobre el sentido último de la existencia. Él busca el fundamento, la esencia natural de las cosas, considerando la abstracción por encima de la intuición o la sensibilidad, eligiendo el agua como la sustancia fundamental que da origen a la vida (Marías, 1980). En aquella época los problemas geométricos, se abordaban de forma empírica, al no existir un sistema lógico deductivo; ellos probaban la veracidad de sus supuestos, con los resultados que producía la práctica, al no contradecir los fenómenos de la realidad (Filloy, 1976). En ese sentido, aparece una primera relación entre lo físico y lo geométrico, utilizando el espacio físico como herramienta suficiente que valida los hechos geométricos que eran netamente intuitivos. Pero a Tales se le reconoce el mérito de ser uno de los primeros en intentar cambiar el enfoque empírico por un enfoque científico; con su filosofía de abstraer de la realidad los objetos geométricos esenciales (Campos, 1994) es al primero al que se le atribuyen descubrimientos matemáticos precisos y, con ello, fama de matemático, según el Sumario de Eudemo escrito por Proclo; Tales viajó a Egipto y después introdujo estudios Geométricos en Grecia e instruyó a sus seguidores en los principios de ésta. Citando a Eudomo, Proclo afirma que Tales estableció las siguiente proposiciones: (Diaz, 2002).

- El círculo se biseca por su diámetro.
- Los ángulos de la base de un triángulo con dos lados iguales son iguales.
- Los ángulos opuestos de líneas rectas que se intersectan, son iguales.
- Si dos triángulos son tales que dos ángulos y un lado de uno son iguales a dos ángulos y un lado de otro, entonces los triángulos son congruentes.
- El ángulo inscrito en un semicírculo, es un ángulo recto.
- Si dos rectas r y r' se cortan por un sistema de paralelas, los segmentos determinados por los puntos de intersección sobre una de ellas son proporcionales a los determinados por los puntos correspondientes en la otra.

Según se conoce, algunos de estos resultados ya eran conocidos, lo cierto es, que es Tales quien los enuncia. Pero, además, según (Heath, 1921) existen indicios de que él habría usado algún tipo de razonamiento lógico como método de comprobación de estos hechos y no con la intuición, la experimentación y la comprobación repetida como se acostumbraba en aquel tiempo.

Anaximandro de Mileto (611-547) a.d.n.e. Fue discípulo de Tales y, además, su sucesor. A diferencia de su maestro, quien consideró el agua como sustancia fundamental, Anaximandro consideró el infinito como fundamento de todo, pero, además introdujo la palabra *Principio*, " El principio de todas las cosas es lo infinito" (Campos, 1994). Se puede tomar el infinito de Anaximandro como generador de todas las cosas. Aristóteles añade dos propiedades a este concepto: la eternidad y la inmutabilidad. De manera que es una de las primeras referencias griegas sobre el concepto de infinito, caracterizándolo desde lo indefinido, lo ilimitado y lo indeterminado.

Anaximandro usa la geometría para atreverse a dibujar un mapa de la tierra y además para comprender algunos fenómenos astronómicos. Argumentaba: "*los astros son movidos por círculos y las esferas en las cuales se encuentra cada astro*"; además, sugiere que la forma de la tierra es esférica. Gracias a Anaximandro podemos visualizar una nueva relación entre lo físico y geométrico; en este caso, la geometría como herramienta para comprender el comportamiento de la tierra como astro y su forma geométrica.

Pitágoras de Samos (572-497). Pitágoras nació en la primera mitad del siglo VI a.n.e. en la isla egea de Samos que por ubicación se encontraba muy cerca de Mileto, donde vivía Tales. En ocasiones se ha dicho que fue alumno suyo y que tenía alrededor de 50 años menos que él. Después de numerosos viajes por Egipto y Babilonia, regresa a su isla natal para fundar una secta con tendencias aristócratas de carácter místico y religioso. En la escuela pitagórica además de compartir bienes y ritos secretos, también se estudiaba filosofía, matemáticas y ciencias naturales. Se dice que Pitágoras transformó la filosofía concerniente a ella (haciendo referencia a la geometría) en una forma de educación libre, examinando sus principios desde lo supremo e investigando los teoremas de un modo inmaterial e intelectual; fue quien descubrió la manera de tratar los irracionales y la construcción de las figuras cósmicas" (Campos, 1994). La filosofía pitagórica se basaba en la afirmación de que el número entero era la causa de las distintas cualidades de los elementos del universo: "Todo es número", además de proclamar que la elevación del alma y su unión con Dios se conseguían con las matemáticas y que Dios había ordenado el universo con los números. Esta doctrina conduce a sus discípulos a estudiar las propiedades de los números, la aritmética, la geometría, la música y la astronomía.

Entre Pitágoras y Platón es muy poca la información o evidencia documentada que testifique la actividad matemática en este periodo; sin embargo, en los comentarios de Proclo se encuentran algunas referencias de los trabajos de entonces.

Anaxágoras de Clazómenas (500-428) a.n.e. Era más bien físico que matemático, pero su curiosidad lo llevó a estudiar numerosas cuestiones geométricas, en el campo de la astronomía, él pensaba que la luna recibía su luz del sol, y dio explicaciones suficientes acerca de eclipses lunares y solares.

Enópides de Quíos, más joven que Anaxágoras, fue un astrónomo cuyos trabajos en geometría estuvieron encaminados a la recolección de elementos para la solución de problemas astronómicos. Según Proclo, la proposición 12 del libro 1 "trazar una perpendicular a una recta, desde un punto que no esté en la recta" es atribuida a él.

Demócrito (460-370) a.n.e. Conocido sobre todo por su teoría acerca de los átomos, aunque estuvo interesado en todos los temas de estudio de su época. Todas las obras matemáticas de las que se sabe escribió, están desaparecidas y solo se conocen los títulos: Sobre la geometría, sobre las tangentes y sobre los irracionales.

Hipócrates de Quíos Se marchó hacia el 430 a.n.e., de su isla natal con destino a Atenas, consiguiendo una fama importante como matemático; por ejemplo, algunas de las razones de su fama es que se le atribuye la primera recopilación o versión de los *Elementos*; también, en un esfuerzo por establecer la cuadratura del círculo descubrió la cuadratura de ciertas clases de lúnulas (Collette, 2006).

2.2. Condiciones epistémicas en el desarrollo de la geometría euclidiana

Podría pensarse que *Elementos* no es una obra individual, seguramente existió un grupo de colaboradores y discípulos que en busca de instrucción pudieron sumarse al proyecto; hay mucha incertidumbre alrededor de esto, puesto que es difícil concebir cómo un solo hombre es capaz de producir semejante obra. Lo cierto, al menos desde la historia, como dice (Vega, 1991) en la introducción a *Elementos*, es que Euclides compila y ordena resultados previos de Eudoxo, retoma algunos de Teeteto, y otros atribuidos a discípulos de Platón, además resultados de Tales de Mileto y la escuela pitagórica. La mayoría de estos resultados orientados a la solución de problemas que hasta entonces se estudiaban individualmente, sin estar articulados a teoría alguna.

En este apartado, se pretende hacer énfasis en algunos de los aspectos que a juicio personal son relevantes en la construcción de la obra, porque solo se tiene a la misma obra como medio de información, a la hora de indagar sobre cómo Euclides logra consolidarla. Seguramente, haciendo un estudio histórico profundo alrededor del personaje, podría encontrarse un sin fin de referencias en torno a lo publicado por él, pero no es nuestro objetivo de estudio.

Como punto de partida nombramos a Hipócrates, León y Teudio de Magnesia; cada uno en sus tiempos compusieron Elementos de Geometría, siendo el de Teudio el posible punto de inicio de Euclides (Heath, 1921); es natural pensar que el título de la obra "*Elementos*" obedece o hace referencia a principios o fundamentos de algo, en nuestro caso ¿elementos de geometría?, ¿elementos de aritmética?. Aristóteles y Proclo nos brindan un acercamiento sobre la naturaleza de la palabra "elementos" en el contexto de la geometría y cómo se concibe esto en aquella época.

Aristóteles menciona en su texto Metafísica:

> Entre las proposiciones Geométricas llamamos elementos a aquellas cuyas pruebas están contenidas en las de todas o en las de mayor parte de tales proposiciones.

Este comentario nos permite identificar que para la Geometría de Aristóteles una proposición, que sirve como herramienta para probar otra proposición, es un elemento. Esto dice Proclo al respecto citando a Menecmo:

> Según Menecmo[2], el término elemento se usa en dos sentidos. Aquello que es instrumento para obtener algo, es elemento de ese algo obtenido; como la primera proposición de Euclides lo es de la segunda y la cuarta de la quinta. El término elemento se utiliza también para aquello, más simple, en que se divide un compuesto; en este caso ya no se puede decir que todo es un elemento de todo sino que ciertas cosas comparables a principios son elementos de las que aparecen como resultados de ellas; así, los postulados son elementos de los teoremas. Este es el sentido que tiene el término elemento en *Elementos* de Euclides (Campos, 1994).

Proclo no solo dice que un elemento es un instrumento, sino además, que es la parte más simple en que está dividido un compuesto y esto para Euclides es fundamental, puesto que no apartarse de la concepción de elemento le permite tener un criterio para decidir qué proposiciones, teoremas o resultados merecían ser incluidos y así mantener siempre el hilo de la obra, por supuesto, con el método axiomático deductivo desempeñando la función de vigilancia. La pregunta que nos hacemos ahora ¿es este un criterio suficiente para Euclides al momento de elegir qué es un elemento y qué no? Para podernos aproximar a esto, es importante responder el porqué o para qué de las proposiciones.

La obra está compuesta por trece libros. El libro uno empieza con una lista de 23 definiciones, las primeras correspondientes a objetos primitivos; seguida de definiciones de superficie, plano, ángulo y sus clases, círculos, triángulos, cuadriláteros y sus clases y finalmente la definición 23, “rectas paralelas son aquellas que, estando en un mismo plano, por más que se les prolongue en ambos sentidos nunca se encuentran” (Dou, 1986); continúa con cinco postulados, nueve axiomas y cuarenta y ocho proposiciones. Para efectos del estudio nos enfocamos solo en el libro primero de los Elementos.

[2] Fue discípulo de Platón y Eudoxo, entre sus trabajos se encuentran el problema de la duplicación del cubo usando la parábola y la hipérbola (Campos, 1994)

Acerca de las proposiciones. Según Posidonio, una proposición es un problema que busca reconocer si una cosa existe o no, pero, ¿cuál sería la naturaleza del objeto (cosa) en cuestión?; estos objetos, de los cuales se busca probar su existencia, ¿emergen de una realidad abstracta o concreta? Para hablar de esto, es necesario revisar algunas características de la filosofía clásica, por ejemplo, la concepción aritmética de la escuela pitagórica hace referencia a que todas las cosas son número, es decir, es necesario hallar el número que posee la esencia de cada cosa si se quiere comprender el mundo material; con esto, podemos ver que en aquel tiempo ya existía una preocupación por poseer una estructura que permitiera modelar matemáticamente las observaciones; posteriormente, aparece Platón y Aristóteles con las escuelas del idealismo y empirismo respectivamente, que permitirían caracterizar y relacionar el mundo y los objetos matemáticos[3] (Moreno, 2002). Cada proposición en la obra comienza con un enunciado que brinda información inicial acerca del objeto, seguido de la información que busca ser probada y una representación gráfica que tiene como finalidad interpretar lo antes enunciado.

Acerca de las definiciones y principios. Aristóteles detalla en uno de sus textos más importantes[4], algunas diferencias entre las definiciones, principios propios, *y* principios comunes. Para el caso de los principios propios y comunes, hace referencia a las cosas primeras con carácter de origen y por su naturaleza hay que darlas por supuestos, y todas las demás cosas demostrarlas: por ejemplo, la unidad, lo recto, y que la unidad y la magnitud existen.

> Son también propias de una ciencia las cosas que <esta> acepta como existentes y sobre las que estudia lo que se da en ellas en sí, v.g.: las unidades, en la aritmética, y en la geometría, los puntos y las líneas. En efecto, se acepta que estas cosas son y son precisamente esto.

Además, en el texto se encuentra lo siguiente:

---

[3] en el apartado *2.3,* se profundizará en el estudio del idealismo y empirismo.

[4] capítulo 1, 10 de los *Segundos Analíticos.*

> Entre los principios que nos servimos en las ciencias demostrativas unos son propios y otros son comunes. Por ejemplo, son principios propios las definiciones de línea y de la línea recta; mientras que el principio: si de cosas iguales se quitan cosas iguales los restos serán iguales, es un principio común. También, se llaman principios propios, a cuya existencia se admite sin demostración, aquellas cosas en que la ciencia encuentra las propiedades esenciales que ella estudia.

Si se tienen en cuenta estas premisas epistémicas veremos que hay cierta correspondencia o al menos consideración de parte de Euclides para la construcción de los elementos, en lo que tiene que ver con definiciones postulados y nociones comunes del texto. Veamos:

Los cinco postulados:

- Postúlese trazar una línea desde un punto cualquiera hasta un punto cualquiera.
- Prolongar continuamente una recta finita, en línea recta.
- Describir un círculo con cualquier centro y distancia.
- Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.

Si una recta, al incidir sobre dos, forma del mismo lado ángulos internos menores que dos rectos, las dos rectas prologadas al infinito se encontrarán en el lado en que estén los ángulos menores que dos rectos.

Nociones comunes:

- Cosas iguales a una misma cosa son iguales entre sí.
- Si a cosas iguales se adicionan cosas iguales, los totales son iguales.
- Si iguales se substraen de iguales, los restos son iguales.
- Si a cosas desiguales se agregan cosas iguales, los totales son desiguales.
- Las cosas dobles de una misma cosa son iguales entre sí.
- Las cosas mitades de una misma cosa son iguales ente sí.
- Cosas que coinciden entre sí, son iguales entre sí.
- El todo es mayor que la parte.
- Dos rectas no comprenden espacio.

En primer lugar, si hablamos de principios, estos deben ser propios de la ciencia en cuestión, en nuestro caso geometría; ahora, si la naturaleza de los principios comunes es que son objetos que existen porque nuestra intuición los percibe (según Aristóteles), podría decirse que tanto postulados como nociones comunes de Euclides, son todos principios comunes (en el sentido aristotélico), por ejemplo, la única forma de validar los cinco postulados es por nuestra intuición. Pero, aparece una cuestión inquietante, si los postulados de Euclides debían ser evidentes por sí mismos, y el carácter de evidencia está sujeto a las condiciones materiales de las que provenían, entonces, puede entenderse la razón por la cual Euclides hizo un gran esfuerzo por mantener el postulado de las paralelas alejado de prácticamente todo el trabajo geométrico de libro I. Decir que por un punto exterior a una recta dada pasa una única recta equivale a afirmar algo que evade el control del objeto físico correspondiente, como se sabe, el postulado no estaba formulado de esta manera que acabamos de mencionar, para escribirlo en estos términos implicaba hablar explícitamente de infinito y esto suscitaba un problema peor, el resultado finalmente fue una versión larga, complicada y con la apariencia de ser deducible de los restantes.

De las definiciones de Euclides podemos decir que hay algunas comunes (sentido Aristotélico) como por ejemplo, punto, recta o rectas paralelas, cuya existencia debe ser aceptada; pero, hay otras derivadas de estas que deben ser demostradas para validar que existen, como es el caso del cuadrado o triángulo.

Algunas definiciones:

- Punto es lo que no tiene partes.
- Línea es longitud sin anchura.
- Los extremos de la línea son puntos.
- Línea recta es una línea que yace por igual sobre los puntos de la misma.
- Superficie es lo que se tiene largo y ancho.
- Los extremos de las superficies son líneas.
- Líneas rectas paralelas son líneas rectas coplanarias que prolongadas indefinidamente en ambos sentidos no se cortan en ninguno de los dos.

Acerca de las definiciones:

Aquí, de nuevo, nos apoyamos en Aristóteles, quien en *Tópicos VI,* habla acerca de la "definición" refiriéndose a cinco aspectos que deben ser tenidos en cuenta para que una definición tenga sentido:

- Que la definición no sea verdad en lo absoluto de aquello de lo que se dice.
- Existiendo un género para la definición, esta no se haya incluida en el género.
- Existiendo un género para la definición, esta no se haya incluido en el género apropiado.
- Que la definición no sea propia.
- Queda la posibilidad de que la cosa estando definida no se haya definido bien,

Además, menciona que la forma de examinar si una definición es apropiada para el objeto que se busca definir, primero es necesario evaluar si esta, se ha hecho a partir de cosas anteriores o conocidas, de no hacerse de esta forma existe la posibilidad de más de una definición, en consecuencia, estos objetos que se definen deberían ser los mismos, pero no lo son, porque las definiciones son todas distintas. De manera que quien no defina de cosas anteriores o conocidas no ha definido correctamente.

En ese sentido, Aristóteles critica de manera enfática y de poco carácter científico otras definiciones de punto, recta y superficie, ya que define un objeto valiéndose de uno posterior, por ejemplo, el punto como extremo de una línea, una línea como extremo de una superficie y una superficie de un sólido. Pero, él menciona en **Metafísica,** que **punto** es un objeto indivisible respecto a la magnitud y además sin magnitud pero que tiene una posición. (Campos, 1994)**.**

Acerca de la definición de punto, *Elementos* hace referencia a la idea tradicional y al parecer platónica, como aquello que es indivisible en partes. (Campos, 1994)

2.3. Espacio (físico, absoluto e ideal) y su relación con la geometría en la cultura helénica.

Para poder entender la relación entre el espacio físico y geométrico es trascendental identificar las posturas platónicas y aristotélicas referentes no solo a estos dos ejes, si no también acerca de la naturaleza de la obra, es decir del aparente carácter idealista o platónico de los entes geométricos y la estructura aristotélica de *Elementos*.

2.3.1. Platón: El mundo de las formas, o mundo ideal

El punto de vista platónico referente a las matemáticas y la realidad, es inmensamente valioso. Platón nos dice que es necesario tener sumo cuidado a la hora de distinguir los objetos matemáticos ideales, de las representaciones de los mismos a las que accedemos a través de los sentidos; señala que tales representaciones existen en el mundo de los objetos físicos, con una naturaleza aparente, y en consecuencia, con un carácter efímero y cambiante. Para él, lo real no son las cosas que percibimos a través de los sentidos, sino otro mundo, que es llamado el mundo de las ideas, que sustenta al mundo de tales cosas.

Habla de los objetos ideales como verdad que existe independientemente de las opiniones humanas, una verdad que gobierna y está por encima de todas las concepciones que tenemos acerca de los objetos físicos; no es suficiente hacer uso de los sentidos para poder acceder a esta, ya que todo lo que se defina a partir de este criterio resulta ser solo una opinión que intenta describir la verdad del mundo de las ideas.

Por otro lado, considera la ciencia como un medio estable que posibilita el acceso a este mundo y además jerarquiza las realidades (existen realidades más perfectas que otras). En ese sentido al representar en el mundo físico los objetos geométricos se está apelando inmediatamente a los sentidos, de manera que las representaciones geométricas terminan siendo solo sombras o aproximaciones de la verdad acerca del objeto geométrico. De manera que los objetos matemáticos al no ser sensibles ni materializables solo pueden ser aprehendidos de manera directa por la razón, siendo estos, entes eternos y vivientes que existen en el mundo racional independientes del tiempo y el espacio.

En síntesis, Platón al referirse al espacio, considera tres géneros: el mundo de las formas o ideas (espacio ideal), que hace referencia a lo increado, indestructible, invisible y no cambiante; el mundo sensible, refiriéndose a un mundo cambiante, creado y perceptible por los sentidos y el espacio absoluto, es el eterno, indestructible, en el que habitan las cosas creadas y de las cuales, muchas no son perceptibles.

2.3.2. Aristóteles y el mundo sensible

Por parte, de Aristóteles no existe un tratado puntual en el que aborde específicamente la relación entre el conocimiento y el espacio concreto o real, pero si varios apartados en el que intenta caracterizarlo; por ejemplo, el análisis del estudio de la ciencia y la demostración que se encuentra en *Metafísica* (libro 1 capítulo 1**)** y *Tópicos*, argumenta que existen varios niveles de conocimiento; entre ellos, el conocimiento sensitivo que proviene de las sensaciones y la intuición, de manera que los animales están en capacidad de conocer por medio de esto, ya que todos nacen dotados de ella, pero, este conocimiento se desvanece en la medida que la sensación desaparece; solo aquellos con capacidad de usar la memoria y la imaginación son aptos para aprender y de esta manera están los humanos diferenciándose como seres superiores.

La memoria permite que las imágenes y los recuerdos perduren, abriendo paso a la experiencia y de la experiencia la ciencia y el arte. La experiencia hace que el individuo alcance niveles de conocimiento que otros no; en el momento en que se repiten eventos para los sentidos, nace la curiosidad de conocer la causa y el porqué de ese evento.

Otra manera de alcanzar conocimiento es a través de la abstracción y en este sentido las ciencias deductivas tienen mayor relevancia para él, como lo menciona en *Tratados de lógica,* (p188).

> La ciencia que no tiene un objeto sensible está por encima de la que lo tiene, por ejemplo, la aritmética, que es superior a la música. La ciencia que procede de un número menor de elementos es superior a la que necesita adjunciones, y en este concepto la aritmética vale más que la geometría.

La relación entre las proposiciones matemáticas y la naturaleza son posibles por medio de la abstracción ya que las matemáticas hacen referencia a una realidad en donde las proposiciones verdaderas o falsas pueden ser validadas en ella. *En Tratados de lógica,* (p155) Aristóteles establece un sistema para las ciencias deductivas a partir de tres ejes: deductividad, evidencia y realidad. El primero establece un sistema axiomático, el segundo permite validar el sistema axiomático y, por último, dentro de la ciencia existen objetos reales. En síntesis, la discusión sobre el concepto de espacio tiene dos concepciones importantes que hay que diferenciar: espacio geométrico, al que nos referimos, también, como espacio absoluto, que adopta la teoría de las formas o ideas de Platón; espacio físico, que plantea dos problemas fundamentales, su naturaleza y sus propiedades, afirmando su dependencia respecto de los cuerpos. Ahora, si bien es cierto, los elementos de Euclides delimitan una postura platónica referente a los entes geométricos, donde a estos no se les tiene acceso por medio de la experiencia sensible si no por medio del estudio de la ciencia.

Revisando los postulados de Euclides podemos encontrar algunos de los atributos acerca de la naturaleza del espacio y los fundamentos ontológicos ligados a este. Del postulado I, *Postúlese trazar una línea desde un punto cualquiera hasta un punto cualquiera,* puede apreciarse la idea de continuidad que está implícita allí, ya que para los griegos los puntos que estaban unidos por líneas eran solo marcas no visibles, y en consecuencia entidades desordenadas. En el II postulado se pide prolongar una recta a partir de un segmento y aquí puede verse que se pide sacar un objeto de su finitud y prolongarlo de forma continua y esto hace suponer una carencia de límites en el espacio cuestión que desde lo físico genera una tensión del tipo ontológico. Algo parecido pasa con el postulado III, donde se pide convertir un punto en centro de una circunferencia, pero sin restricción para el radio, podemos suponer entonces un espacio continuo e ilimitado. Cuando introduce el postulado IV posiblemente lo hace con la necesidad de hacer más intuitivas algunas definiciones que tienen que ver con ángulos y ángulo recto, pero también hay algo particular con respecto al espacio y es que las figuras geométricas y sus propiedades no cambian con la posición, es decir que no cambian en función de la distancia y permanecen invariantes frente al desplazamiento. De manera que el espacio tiene cualidades homogéneas e isotrópicas. En el postulado V nuevamente hay una tensión epistémica a raíz de concepciones ontológicas, y es que se pide llenar un vacío de una intuición sensible, ya que la prolongación de una recta hacia el infinito no puede captarse mediante ella.

2.3.3. El espacio absoluto

Para la filosofía natural o ciencia clásica, el espacio era considerado como un medio homogéneo, independiente de su contenido físico, cuya estructura respondía a un carácter autosuficiente e independiente de la materia, su estructura respondía a la naturaleza de los entes de Platón y la sistematización deductiva de Aristóteles. Pero la autosuficiencia e independencia fueron aspectos formulados aparentemente por Demócrito, según Newton quien en los Principia dice: "el espacio absoluto, en su propia naturaleza, sin consideración hacia ninguna cosa externa, permanece siempre similar e inmóvil". Para ahondar un poco más en las concepciones de espacio físico revisemos otros aspectos relacionados con la cultura helénica.

2.3.4. Teorías relacionadas con el espacio físico en la cultura helénica.

Aristóteles, y con él los filósofos antiguos, concebían el espacio físico como dos mundos, el terrestre y el celeste, cada uno dotado de características distintas. El mundo terrestre estaba dotado de las leyes de la naturaleza y aplicaban solamente allí, pero se hacía una extensión a la Luna. Tanto allí como en la tierra se pensaba que ambas esferas estaban hechas de los cuatro elementos conocidos como agua, fuego, tierra y aire, y más allá de estas esferas existían otras como los planetas donde se obedecían otras leyes inaccesibles a la experiencia humana; por ejemplo, allí no habría materia como la conocemos, sino otra sustancia llamada quinta esencia o quinto elemento, de la que estarían hechos los astros y de acuerdo con esta visión, el movimiento de los cuerpos en la tierra es de una naturaleza distinta al de los astros en los cielos.

La gravedad, por ser un fenómeno de naturaleza terrestre, debía entonces pertenecer exclusivamente al mundo sublunar. Aristóteles, en un afán por encontrar la explicación de todo, afirmó que los cuerpos masivos bajan y el fuego sube porque ese es el movimiento natural propio de ellos; lo cual, en síntesis, es equivalente a decir que los cuerpos caen y el fuego sube porque debe ser así. En referencia a los movimientos de los planetas, Aristóteles se conforma con aceptar el modelo de Eudoxo, que estaba constituido por 52 esferas, girando unas sobre otras, con lo cual se reproducía el movimiento aparente de los planetas sobre la bóveda terrestre, pero este explicaba únicamente el movimiento de los astros pero no su causa, y esto se ajustaba al movimiento de ese otro mundo, el celeste, donde las leyes naturales no eran las mismas, y además, inaccesibles para los humanos. Debido a la creencia del círculo como figura geométrica perfecta y su movimiento uniforme, bastaba con decir que justamente este era el movimiento de los planetas.

Se propone entonces el modelo geocéntrico, atribuido a Ptolomeo, que permitía describir y predecir el movimiento de los planetas con una mejor precisión. El sistema ubicaba a la Tierra en el centro del universo y al sol girando alrededor de ella; los planetas girando sobre epiciclos, círculos montados sobre otros círculos, todo esto ligado a la perfección del movimiento circular. Este modelo fue bastamente usado por astrónomos de diferentes épocas; todas estas justificaciones requerían de densos cálculos; sin embargo, Ptolomeo no podía explicar por qué se mueven los planetas sobre epiciclos; tal problema rebasaba los conocimientos que se tenían en su época. (Hacyan, 2004)

2.4. Síntesis y comentarios

Hasta ahora, hemos mencionado algunos de los aspectos que a mi juicio son relevantes al momento de darle una mirada fina al contexto en el cual aparece *Elementos*, y digo fina, porque la intención hasta ahora no ha sido analizar el cómo surge, sino más bien identificar la naturaleza epistémica e histórica que nos ha marcado el camino para estudiar el desarrollo de los fundamentos de la geometría euclidiana y su relación con el espacio, donde el papel de la epistemología aquí, es el de mostrar la evolución del conocimiento geométrico a través del origen, desarrollo y estructura del mismo, a lo largo de los siglos.

En ese sentido, *Elementos* no aparece en la historia como una obra con carácter divino, es decir, como una construcción celestial atribuida a Euclides, el padre de la geometría como algunos lo llaman, sino aparece como producto de una explosión cultural, social e intelectual propia del pueblo griego, precursor no solo en plantear, sino en resolver los problemas más esenciales que debió afrontar la inteligencia humana. Un pueblo con sentido de pertenencia y comunidad que se fue forjando en el contexto de intensas y largas guerras. La Grecia antigua, formada por un conjunto de ciudades autónomas pero que hablaban el mismo idioma, practicaban los mismos deportes y honraban los mismos dioses; se destaca Atenas sobre todas, porque es donde nace la academia de Sócrates, Platón y Aristóteles, pero sobre todo por su extraordinaria riqueza intelectual y su sentido de escuela. Por otro lado, el carácter investigativo del museo y la biblioteca de Alejandría, no se debe únicamente a la naturaleza de pensamiento griego, sino a la disposición de trabajos matemáticos de personajes anteriores a Euclides, siendo estos la base de *Elementos*. Considerado por muchos como un tratado sistemático de instrucción matemática para futuras generaciones, y por otros, como un tratado de carácter enciclopédico. Lo cierto, es que a algunos de estos personajes como: Teeteto de Atenas, Teodoro de Cirene y Teudio de Magnesia, que están vinculados con la escuela platónica, también se les atribuyen algunos *Elementos,* en los que según (Melogno et al., 2011) Aristóteles habría tenido en cuenta para sus consideraciones acerca de la geometría, de manera que sin estos antecedentes un solo hombre no hubiera constituido semejante obra.

Por otro lado, más allá de una recopilación de trabajos previos por parte de Euclides, se destaca el nacimiento de un sistema riguroso y formal para el estudio y producción de trabajos científicos matemáticos, que hasta la fecha, aún se usa con el fin de vigilar y corregir; hoy llamado, *sistema formal axiomático deductivo,* y en aquel entonces, simplemente, *sistema hipotético deductivo,* que en su versión más genérica se trata de un conjunto de proposiciones ordenadas de manera que a partir de algunas de ellas llamados postulados(aceptados como evidentes y no demostrables) se deducen otras proposiciones, siguiendo unas reglas establecidas por la lógica aristotélica.

Solo hasta cuando Euclides establece las bases para la independencia del conocimiento matemático de la metafísica y filosofía, puede consolidar el método hipotético deductivo y esto, a razón de que geómetras anteriores aun descubriendo procedimientos para construir una amplia variedad de figuras geométricas con regla y compás, y relaciones entre ellos, nunca tuvieron claridad sobre la naturaleza de conceptos primitivos como: plano, punto, rectas y superficies, haciendo que la geometría de aquella época sufriera un estancamiento. Estos conceptos fueron un poco más lúcidos cuando Euclides decide moverse entre lo sensible y lo inteligible y no limitado a una sola postura filosófica, de allí la independencia que se menciona. Estas corrientes filosóficas son ejes transversales en cuanto a nuestro objeto de estudio, la relación entre el espacio físico y geométrico, veamos: la geometría antigua se basaba en un conjunto de resultados que se sustentaban con la experimentación y la observación. Haciendo uso de la intuición se establecieron algunas reglas que permitieron establecer procedimientos que la convirtieron en una ciencia práctica, estrechamente relacionada con la medición; para resaltar un ejemplo, aludimos al modelo geocéntrico, que intentaba explicar el movimiento de los planetas, el sol y la luna, llamados en ese entonces cuerpos celestes, quienes aparentemente giraban en torno a la tierra. Según las observaciones de algunos astrónomos, entre ellos Aristóteles, el movimiento de los astros se caracterizaba por ser perfectamente circular; estas observaciones fueron producto de del uso de sistemas de medición poco precisos en las prácticas experimentales, pero dada la correspondencia con algunos hechos y problemas geométricos, no había razón para desestimar el mencionado modelo.

Con la necesidad de evitar el ensayo y error como método para validar hechos geométricos, aparece la prueba como procedimiento eficaz que permite establecer conclusiones generales, relaciones y verdades irrefutables. El método requiere una caracterización precisa e indiscutible sobre cómo son los primeros objetos geométricos (punto, recta, plano), ¿cuál es la verdadera naturaleza de los objetos geométricos primitivos? Euclides no brinda mucha información sobre esto, al contrario, surgen cuestiones ontológicas como: si el punto y la recta habitan en un plano, ¿el plano donde habita?, de qué características está dotado este lugar?, ¿este lugar se encuentra en el espacio físico? El espacio físico era un concepto empírico deducido de experiencias exteriores y anteriores y es así como los postulados de Euclides en principio aparecen para poder describir su apariencia. Con respecto al espacio geométrico, Euclides tiene en consideración varios de los principios de la filosofía platónica, el mundo ideal de Platón, le ofrece la posibilidad de ubicar los objetos geométricos en un mundo en el que no se pueden confundir con ninguna representación conocida, son objetos que existen independientes del concepto, interdependientes de las representación y el lenguaje, pre-existen aun sin ser pensados, son eternos, únicos e inmutables, a los cuales, se les tiene acceso únicamente por medio de la razón; en ese sentido, Euclides hace uso del mundo ideal para poder superar el obstáculo del carácter natural de los objetos primitivos. Por otro lado, en la misma obra es posible encontrar posturas aristotélicas referentes al mundo sensible. Platón hacía referencia a nuestro mundo como un mundo aparente, un mundo que emergía de las ideas, donde todos sus objetos son apenas sombras o aproximaciones del verdadero concepto ideal, pero para Aristóteles no podían existir dos mundos el mundo sensible y el ideal, para él, aquel mundo ideal no explicaba como a partir de las ideas aparecían todos los objetos con los que se podía tener una relación sensitiva. En consecuencia, afirmaba que la verdad de los objetos se encontraba en ellos mismos, así que era necesario acudir a los sentidos para poder entenderlos.

3. EL ESPACIO Y SU RELACIÓN CON LA GEOMETRÍA EN LA EDAD MEDIA

Después de un periodo de organización y compilación de diferentes hechos geométricos, cuyo resultado es la obra *Elementos,* queda una sensación de inconformidad en el ambiente académico, en referencia, a la no evidencia del quinto postulado, generando desacuerdos relacionados con su organización y articulación. Estos inconvenientes motivarán por un largo periodo de tiempo a la comunidad intelectual, a buscar métodos que permitan simplificar de alguna manera el conjunto de postulados, en específico, que el quinto postulado tenga carácter de teorema y no de verdad evidente. Ahora, el objetivo principal de muchos de los matemáticos de la edad media es encontrar algún camino que finalmente le de consistencia a la geometría euclidiana y, además, correspondencia con la naturaleza del espacio.

3.1. Condiciones epistémicas, la demostración

En cualquier campo del saber, si se parte de unos postulados o verdades evidentes, y haciendo uso de la lógica, nociones comunes y definiciones, entonces se desata un entramado de proposiciones que pueden ser demostradas; si en este desarrollo resultan contradicciones de algún tipo, entonces los postulados que se tomaron inicialmente no pueden ser aceptados como válidos, y en consecuencia, la teoría no sería válida. En ese sentido, hablaremos de la demostración y el tipo de proposiciones que alberga la obra, con el fin de determinar qué tan susceptible es a reformulaciones y cambios, sin dejar de ser consistente.

En la obra euclidiana, todas las proposiciones están constituidas por la hipótesis, la tesis y la demostración, y de esta última se aprecian dos tipos: la *demostración directa*, que se caracteriza por su naturaleza instructiva de orden operativo, está estrechamente relacionada con las construcciones que pueden realizarse con regla y compás, es decir, que cualquier construcción geométrica hecha con regla y compás, es susceptible de ser demostrada directamente, y la *demostración por reducción al absurdo,* que consiste en aceptar la negación de la proposición inicial como verdadera y con el uso de los objetos primitivos y los descubiertos, se busca una contradicción justificada por la lógica, que obligue aceptar la hipótesis inicialmente negada como verdadera. Como ejemplo, tomamos las proposiciones I y XXIX tomadas de *Elementos* (Puertas, 1991)

Proposición 1: Sea AB la recta definida dada. Así pues, hay que construir sobre la recta AB un triángulo equilátero. Ver Figura 1.

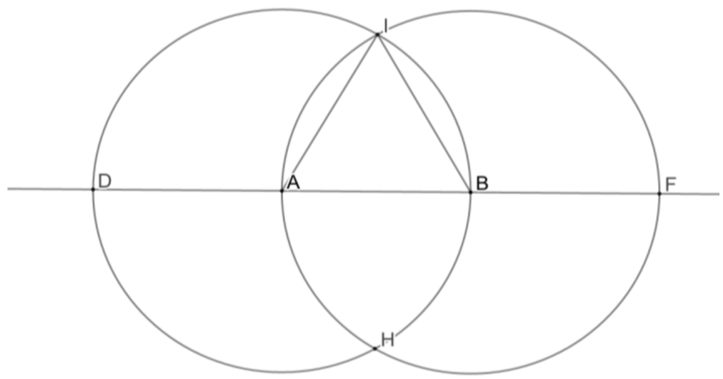

Figura 1.

Descríbase con centro en A y la distancia AB el circulo ABD, y con centro en B y la distancia BA, descríbase a su vez BAF y a partir del punto I donde los círculos se cortan entre sí trácense las rectas IA e IB hasta los puntos A y B. Y puesto que el punto A es el centro del círculo ABD, AI es igual AB, y puesto que el punto B es a su vez el centro del círculo BAF, BI es igual a BA, pero se ha demostrado que AI es igual AB. Ahora bien, las cosas iguales a una misma cosa son también iguales entre sí. Por tanto, AI es también igual BI; luego las tres AI, AB y BI son iguales entre sí.

Por consiguiente, el triángulo ABI es equilátero y ha sido construido sobre la recta finita AB que es lo que había que hacer.

Proposición 29: Una recta que incide sobre dos rectas paralelas forma ángulos alternos iguales entre sí y el externo igual al interno y opuesto y los internos del mismo lado iguales a dos rectos, figura 2.

Incida la recta EZ sobre las rectas paralelas AB, GD, digo que hace iguales los ángulos alternos AHF, HFD y el ángulo externo EHB igual al interno y opuesto HFD y los internos del mismo lado BHF, HFD iguales a dos rectos. Ver figura 2.

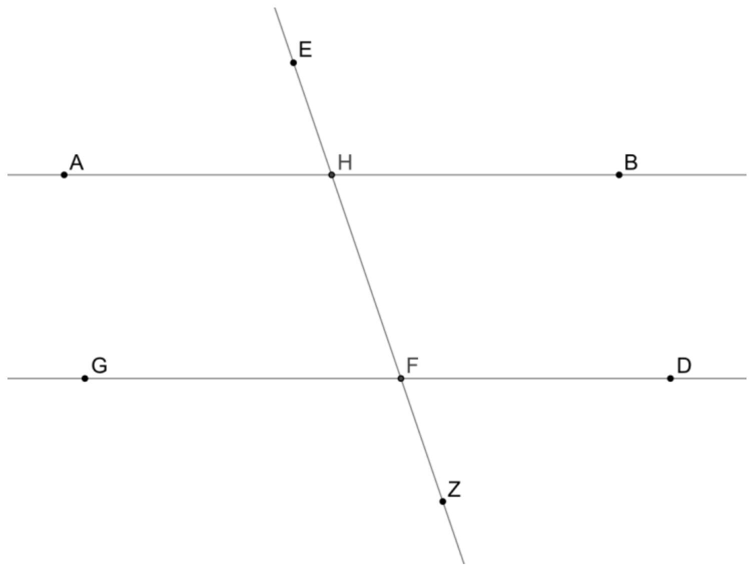

Figura 2.

Pues si AHF no es igual a HFD uno de ellos es mayor. Sea AHF el mayor; añádase a ambos el ángulo BHF, entonces los ángulos AHF, BHF son mayores que los ángulos BHF, HFD. Pero los ángulos AHF, BHF son iguales a dos rectos. Por tanto, los ángulos BHF, HFD son menores que dos rectos. Pero las rectas prolongadas indefinidamente a partir de ángulos menores que dos rectos se encuentran (pst 5); luego las rectas AB, GD prolongadas indefinidamente se encontrarán; pero no se encuentran porque se les ha puesto paralelas; por tanto, el ángulo AHF no es desigual al ángulo EHB; por tanto el ángulo EHB es también igual al ángulo HFD. Añádase a ambos BHF; entonces los ángulos EHB, BHF son iguales a los ángulos BHF, HFD. Pero los ángulos EHB, BHF son iguales a dos rectos; por tanto, los ángulos BHF, HFD son también iguales a dos rectos.

Por consiguiente, la recta que incide sobre las rectas paralelas hace los ángulos alternos internos iguales entre sí, y el ángulo externo igual al interno y opuesto, y los ángulos internos del mismo lado iguales a dos rectos Q. E. D.

Con esta proposición, es posible ver una demostración por el método de reducción al absurdo cuyo desarrollo es el siguiente: en primera instancia, se enuncia la proposición, se establece la construcción que da inicio al proceso demostrativo, luego aparecen las condiciones iniciales apoyadas por notación y representación gráfica, seguido a esto se niega la tesis que se quiere demostrar negando la igualdad AHF y HFD, para luego seguir con las consecuencias lógicas de esta negación, más adelante aparece el quinto postulado permitiendo el desarrollo y concluyendo que la desigualdad de los dos ángulos de la tesis, conduce a una contradicción (dos paralelas coinciden en un punto).

Según (Rey, 1962) es posible establecer diferencias entre las proposiciones de *Elementos,* por un lado, proposiciones propiamente dichas y, de otro, proposiciones problema; las primeras tienen que ver con relaciones ineludibles, es decir que no pueden prestarse para ambigüedades y son descubiertas en el proceso de explorar otras relaciones entre los objetos geométricos. Las proposiciones problema son relaciones variables entre los objetos y son construidas para despejar hipótesis concretas. En este orden de ideas la proposición 1 involucra la resolución de un problema, pero en el problema se solicita construir un triángulo equilátero, la cuestión es que sobre una recta no solo es posible hacerlo con triángulos equiláteros, de maneta que se tiene una proposición problema, en cambio, si se revisa el teorema de Pitágoras, *dado un triángulo rectángulo la suma de los cuadrados de los catetos equivale al cuadrado de la hipotenusa*, nos encontramos con una proposición propiamente dicha ya que no existe ninguna otra relación entre los catetos que involucre la hipotenusa en un triángulo rectángulo de manera que la relación termina siendo del tipo ineludible.

3.1.1. El quinto postulado, intentos por demostrarlo y reformulaciones

Desde siempre, los cuatro primeros postulados formulados por Euclides fueron aceptados por la comunidad científica sin objeción alguna, pero con el V postulado las cosas fueron distintas, dada la apariencia que tenía de proposición corriente, y no de postulado, se inicia una carrera a lo largo de la historia por tratar de demostrarlo, involucrando por supuesto a los matemáticos del más alto nivel. Finalmente, todos los esfuerzos, en esa dirección, resultan infructuosos, pero el saldo positivo de estos trabajos se puede reflejar, por un lado en una gran producción de proposiciones equivalentes al V postulado y, por otro lado, la intención al considerar distintas miradas y enfoques para su resolución, intenciones que sirvieron como la semilla que permitió el nacimiento de las geometrías no euclidianas, cuya aparición produjo una revolución al interior de las matemáticas. Para lograr una mejor comprensión del problema, empecemos por recordar la definición de rectas paralelas:

"*son rectas que estando en el mismo plano y siendo prolongadas indefinidamente en ambos sentidos no se encuentran una a otra en ninguno de ellos"*

Y, ahora, el V postulado en la versión original de Euclides:

"Si una recta, al incidir sobre otras dos, forma del mismo lado ángulos internos menores que dos rectos, las dos rectas, prolongadas al infinito, se encontrarán en el lado en que estén los ángulos menores que dos rectos".

Es claro que, Euclides escribe el V postulado de forma distinta a los otros cuatro; también, que esta formulación es un poco más complicada y requiere muchas veces de apoyo gráfico para poder comprenderla; seguramente, Euclides era consciente de esto, como se mencionó anteriormente y pudo haberlo enunciado de forma más sencilla, pero justamente quería evitar inconvenientes ontológicos más graves; esta versión utilizada por él, corresponde a la que permite el uso del postulado, bajo la idea de postulado, no es tan intuitiva, pero finalmente es la que menos problemas da. Otra razón para creer que Euclides tenia conciencia del problema, es que evitó a toda costa hacer uso del postulado durante las primeras 28 proposiciones, aun cuando las demostraciones de algunas de estas fueran largas y complicadas.

Campos (1994) menciona que es incorrecto referirse al postulado de las paralelas, ya que en el enunciado de Euclides, no son mencionadas explícitamente; de hecho hay que tener encuentra todas las posibilidades de cada una de las dos rectas incididas, si una se deja fija.

Debido a los inconvenientes que presenta el enunciado, Posidonio propone redefinir el paralelismo refiriéndose a éste como dos rectas coplanarias y equidistantes, dándole a la definición una característica especial, la distancia; esta definición y la euclidiana se corresponden, sin embargo, existen paralelas en el sentido Euclídeo que no lo son en el sentido Posidonio; por ejemplo, las asíntotas de la hipérbola y la conoide son paralelas, ya que por más que se prolonguen no se encuentran según la definición 23 de *Elementos,* pero no serían paralelas al incumplir la equidistancia según la definición de Posidonio. Sin embargo, Proclo queriendo concordar con las dos definiciones, se ve en la necesidad de demostrar que dos rectas que no se encuentran, son equidistantes o bien que el lugar geométrico de los puntos equidistantes de una recta, en uno de los dos semiplanos determinados por esta, es una recta. Para esta demostración lo que hace Euclides justamente es apoyarse en su postulado. Pero, Proclo observando que el teorema "*la suma de dos ángulos de un triángulo es menor que dos ángulos rectos",* era el teorema que demostraba Euclides en la proposición XVII, se convenció de lo siguiente: si una proposición cuya inversa es demostrable, entonces esta también debía ser demostrable (Ruesga, 2004). A continuación, su razonamiento.

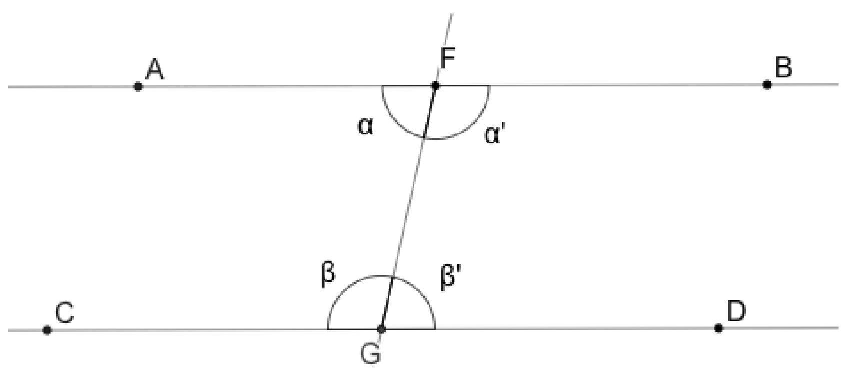

Figura 3.

Sean $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD}$ rectas paralelas y $\overleftrightarrow{FG}$ una transversal ver figura 3, entonces $\alpha + \beta$ será mayor, menor o igual que dos ángulos rectos; de manera que, si verifica el primer caso $\alpha + \beta > 2$ ángulos rectos, quiere decir que también $\alpha' + \beta' > 2$ ángulos rectos, en consecuencia $(\alpha + \beta) + (\alpha' + \beta') > 4$ ángulos rectos, lo que resulta ser absurdo, de manera que no puede pasar que $\alpha + \beta > 2$ ángulos rectos. Si se lograra demostrar, por un razonamiento similar, que el caso $\alpha + \beta < 2$ ángulos rectos, también conduce a una contradicción, solo quedaría la opción, $\alpha + \beta = 2$ ángulos rectos. Pero, este resultado solo es posible, si se toma en cuenta el V postulado.

Entonces, Proclo opta por otro camino; ahora, se apoya en la siguiente proposición: "*La distancia entre dos puntos situados sobre dos rectas que se cortan puede hacerse tan grande como se quiera, prolongando suficientemente las dos rectas".* De la cual, se desprende el siguiente lema: "*una recta que encuentra a una de dos paralelas necesariamente encuentra a la otra". A*quí, la demostración del lema:

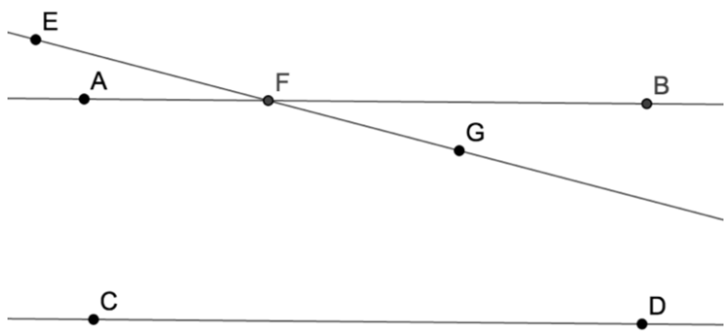

Figura 4.

Sean $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD}$ rectas paralelas, y $\overleftrightarrow{EG}$ otra recta que interseca a $\overleftrightarrow{AB}$ en F; la distancia de un punto cualquiera sobre $\overrightarrow{FG}$ a la recta $\overleftrightarrow{AB}$ crece más allá de todo limite cuando el punto se aleja indefinidamente de F; debido a que la distancia entre dos paralelas es finita, $\overleftrightarrow{EG}$ deberá intersecar necesariamente a $\overleftrightarrow{CD}$; introduciendo así la hipótesis de que la distancia entre dos paralelas se mantiene finita, hipótesis de la que se deriva el postulado. En realidad, esta hipótesis resulta ser equivalente al V postulado. Figura 4.

Posteriormente, aparece Aganis (siglo VI n.e.) con la hipótesis de existencia de dos rectas coplanarias y equidistantes, como antes había dicho Posidonio, solo que si demostraba que si la distancia mínima entre dos paralelas era la longitud de un segmento perpendicular común a estas, entonces las rectas eran paralelas (Bonola, 1945).

Los árabes fueron los sucesores de los griegos en cuanto al estudio de las matemáticas, sin muchos aportes a la demostración del postulado, salvo Nasír-Eddín (1201-1274) que aunque demuestra el postulado adaptándose al mismo criterio usado por Aganis, su idea original fue anteponer explícitamente el teorema sobre la suma de ángulos de un triángulo.

Las primeras versiones de elementos entre el siglo XI y XIII, obedecen a sucesivas redacciones de textos griegos hechas por los árabes, y en este periodo es poco lo que se conoce en términos de críticas al V postulado, y no es sino hasta finales del siglo XV cuando renace el interés por este asunto nuevamente a raíz de los comentarios de Proclo. A continuación, citamos los comentarios y aportes más relevantes: Commandino (1509-1575) añade, sin ninguna justificación, a la definición de paralelismo la equidistancia y repite la demostración hecha por Proclo. Clavio (1537-1612) hace una traducción al latín de los *Elementos*[5], allí muestra y critica la demostración de Proclo, para luego hacer un intento basándose en el teorema, *"la línea equidistante de una recta es una recta"* que trata de justificar con razonamientos análogos. P Cataldi (1626) es el primer geómetra moderno en publicar un trabajo exclusivamente dedicado a la cuestión de las paralelas[6]. Parte de la idea de rectas equidistantes y no equidistantes, pero para probar la existencia de la equidistancia recurre a la hipótesis de que las rectas no equidistantes, son convergentes en una región y en otra, divergentes.

Giordano Vitale (1633-1711) vuelve al concepto de equidistancia formulado por Posidonio, y, al igual que Proclo, busca demostrar que las paralelas en el sentido euclídeo no pueden ser asintóticas, así que busca probar que el lugar geométrico de los puntos de una recta es una recta. Esta demostración se basa en el siguiente lema: *si entre dos puntos A y C, tomados en cualquier línea curva, cuya concavidad esté hacia abajo, se traza la recta AC, y si desde los infinitos puntos del Arco AC se trazan perpendiculares a alguna recta, digo que es imposible que esas perpendiculares sean iguales entre sí.* Ver Figura 5.

[5] Euclidis elementorum libri XV (Roma, 1574).
[6] Folleto sobre líneas rectas equidistantes y no equidistantes (Bologna 1603).

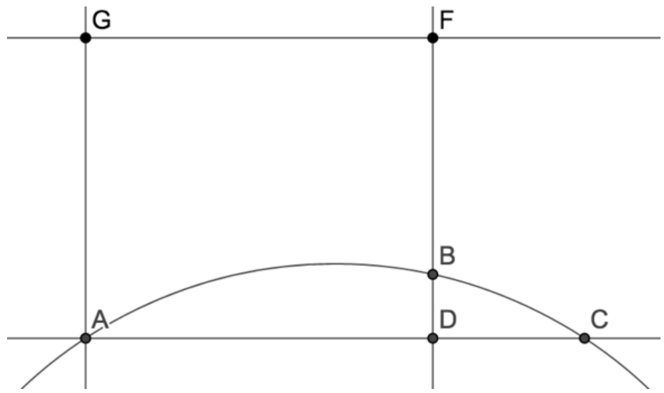

Figura 5.

La recta de la que aquí se habla no es una recta cualquiera del plano, es una recta que se construye de la siguiente manera: desde el punto $B \in arco\ AC$ constrúyase una perpendicular por B a $\overleftrightarrow{AC}$, luego por A constrúyase $\overleftrightarrow{AG} \perp \overleftrightarrow{AC}$ y finalmente tómese dos segmentos $\overline{AG} \simeq \overline{DF}$ y únanse los puntos G y F, así $\overleftrightarrow{GF}$ es la recta que Giordano considera en su demostración, recta a la cual el arco ABC no es una línea equidistante. Ahora, el autor intenta utilizar este lema para demostrar que el lugar de los puntos equidistantes de una recta es una recta, pero lo aplica a una figura geométrica que no valida las mismas relaciones que existen entre el arco ABC *y* $\overleftrightarrow{GF}$*,* de manera que las conclusiones que se deducen sobre la existencia de rectas equidistantes no son consistentes. Con respecto a las demostraciones anteriores, Giordano no ofrece algo distinto; sin embargo, tiene el mérito de haber trabajado sobre una notable figura, que con el tiempo cobró especial relevancia, y fue objeto de un mayor desarrollo. Aquí, algunas de sus características y la demostración de una proposición sobre ella:

Sea $ABCD$ un cuadrilátero, con $\angle A$ y $\angle B$ rectos y $\overline{AD} \simeq \overline{BC}$; constrúyase una perpendicular $\overline{HK}$ a $\overline{AB}$ con $H \in \overline{DC}$. Entonces Giordano demuestra dos cosas, primero que los $\angle D$ y $\angle C$ son iguales, y luego que cuando el segmento $\overline{HK}$ es igual al segmento $\overline{AD}$ los ángulos $\angle D$ y $\angle C$ son rectos y $\overline{DC}$ equidistante de $\overline{AB}$ (Bonola, 1945).

Existen muchas otras personas que trabajaron en la demostración del V postulado, puesto que, al no ser considerado un problema menor, era extraño que algún matemático no estuviera interesado: Ampere, Leibniz, Descartes, Lagrange, Legendre, Gauss, entre otros, figuran en la lista de eminentes matemáticos con insistentes e infructuosas tentativas para lograr la tan anhelada demostración. Todos estos trabajos, finalmente, contribuyeron a la reivindicación y fortalecimiento de Euclides y su obra, porque se empezó a vislumbrar la independencia del V postulado. Dentro del saldo positivo arrojado por todos estos esfuerzos, se puede resaltar algunas reformulaciones del V postulado. A continuación, citamos algunas versiones alternativas (proposiciones equivalentes) y entre ellas la del matemático escocés John Payfair de finales del siglo XVIII (Pascual, 1999):

- Proclo: *Dos rectas paralelas son equidistantes.*
- *Existe un par de rectas en que todos los puntos de una se encuentran a la misma distancia de la otra.*
- *Si en un cuadrilátero un par de lados opuestos son iguales y los ángulos adyacentes a un tercer lado son rectos, entonces los otros dos lados también son rectos.*
- Saccheri y Legendre: *La suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a dos ángulos rectos.*
- Payfair: *Por un punto exterior a una recta es posible trazar una y solo una paralela.*
- *Existen triángulos semejantes*
- *El área de un triángulo no es acotada superiormente*
- *La suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo es 180 grados*

La obsesión por demostrar el quinto postulado fue el combustible que motivo los estudios geométricos por más de dos mil años y durante este tiempo muchas “demostraciones” vieron la luz, pero al final siempre estaban fundamentadas en suposiciones.

Esposible inferir que el quinto postulado es controvertido debido a que los otros cuatro pueden verse como abstracciones que devienen de la experiencia, que pueden ser validados con regla y compás, y aunque nuestra intuición nos señala una sensación de obviedad con respecto al quinto postulado, lo cierto es que él no puede ser comprobado empíricamente debido a las limitaciones que nos ofrece el papel y el lápiz aun en el hipotético caso de poder prolongar estas líneas indefinidamente, tampoco se tendría una razón de peso para validar su condición, no tendríamos certeza de su comportamiento a no ser que encontremos un punto de corte, porque si no lo encontramos, no podemos cerciorarnos de que tal punto no existe. En ese sentido la única alternativa como recurso de prueba y validez, es la demostración. Quien realmente dio un nuevo enfoque al asunto fue Gerolamo Saccheri (1667-1733); lo que hizo fue cambiar de estrategia, negando el V postulado con el propósito de llegar a alguna contradicción, para finalmente demostrar su consistencia; el resultado fue un conjunto de teoremas extraños que consideró contradictorios, reafirmando su posición a favor el sistema euclídeo como veremos en el capítulo cuatro.

3.2. Condiciones sociales culturales y académicas en la edad media

Los aportes de los griegos, en términos académicos, no solo dejaron grandes obras sino, además, una gran tradición en términos de estudio de las ciencias en los centros educativos de aquella época, producto de una continua confluencia de hechos de todo tipo que marcaron una tradición cultural: tradición que es tan importante en la historia de la humanidad, que muchos de aquellos trabajos se han conservado hasta nuestros días y, además, siguen siendo objeto de estudio. Como ya hemos hecho una amplia descripción de los contextos histórico, social, político y económico que favorecen la aparición de esta cultura, ahora nos centraremos en su desarrollo e influencia durante la edad media.

Se suele señalar la caída del imperio romano, en 476 d. n. e., como punto de referencia para hablar de la edad media. Sus repercusiones y movimientos políticos generados marcan una línea importante para la geometría y las matemáticas en general y no solo en Europa, sino en las civilizaciones china, árabe, india y bizantina. En términos generales, se puede decir que la muerte de Teodosio en 395 impulsó la disolución de la unidad que el mediterráneo había construido durante todo el imperio romano. A partir de este momento, aparece una división de tres mundos importantes, creándose una gran diversidad de formas culturales; el oriente cristiano se afirma como el imperio Bizantino; por otro lado, el oriente musulmán se consolida en una sola fe, extendiéndose por occidente y oriente, configurándose como un gran imperio con Bagdad y Damasco como capitales en donde se cultivan las escuelas del saber; finalmente, el occidente cristiano invadido por los barbaros, se sumergirá en una serie de luchas por encontrar su propia identidad. En las grandes ciudades el comercio se minimiza, obligando a la economía y la sociedad a centrarse en una vida completamente ruralizada y agraria. Como consecuencia de la des-urbanización y producto de las invasiones se fomentan nuevas formas de relación social desde la producción agraria. Entre los siglos V y VII se desarrolla la economía del tipo feudal, establecida como producto de la inestabilidad, inseguridad e incapacidad por parte de las instituciones para proveer seguridad, de manera que las únicas formas de gobierno existentes se localizaban en zonas locales por parte de nobleza. Y así la base del feudalismo se centra en la tierra y como unidad la aldea, aunque el sistema feudal aparecerá completamente desarrollado con sus jerarquías políticas y religiosas alrededor del siglo XI. En este punto, la expresión intelectual y administrativa del feudalismo en una sociedad ruralizada e inculta; será el clero quien tendrá la única minoría educada formalmente; debido a esto, su intención es evangelizar los pueblos germanos, a través de la prestación de ciertos servicios solicitados.

Los primeros monasterios cristianos de occidente aparecen a lo largo del siglo IV y en el siglo siguiente, extendiéndose velozmente; concebidos, inicialmente, para proporcionar un retiro a aquellos que deseaban alcanzar la santidad y apartarse del mundo; pero, finalmente se convierten en centros económicos y culturales. En su concepción inicial, los monasterios adquieren tierras a través de donaciones o compras, convirtiéndolas en centros agrícolas de primer nivel; posteriormente, de estos lugares se destacan la apertura de bibliotecas para la lectura y cultivo del saber, y también salas de escritura donde los copistas reproducían libros requeridos para la comunidad monástica. El objetivo principal de los monasterios en cuanto a la educación era brindar la alfabetización necesaria en la vida religiosa, de manera que los contenidos no religiosos solo tenían lugar en la educación para propósitos sagrados y, en general, la propagación del saber tenía como fin la contribución a la religión. La ciencia y la filosofía de la época estaban restringidas por las razones mencionadas y solo unos pocos monjes tenían la posibilidad de acceder. En general, el papel que desempeñan los monasterios, en términos científicos, es importante e indispensable en términos de transmisión y difusión de conocimientos.

Al menos hasta el siglo XIII, la iglesia monopolizaba la educación y se caracterizaba por ser una escuela monástica, rural y aislada del mundo no religioso; pero, con la reurbanización y el desplazamiento de la población a las ciudades, en los siglos XI y XII, surgen de la clandestinidad de las escuelas monásticas, las escuelas urbanas de varios tipos: episcopales, que eran dirigidas por el clero; escuelas públicas, que no eran dirigidas por la iglesia y a las cuales podían acceder aquellas personas que pudieran pagarlas y, finalmente, escuelas catedráticas, que inicialmente estaban orientadas a formar religiosos en las ciudades pero, luego con el tiempo aceptarían también laicos. La importancia aquí, es que estas escuelas serían la semilla de lo que conocemos hoy como universidades; la finalidad de estas escuelas con el tiempo fue cambiando, ya las necesidades no tenían que ver únicamente con los propósitos monacales sino, también, estatales; en ese sentido, hubo una ampliación y reorganización del curriculum a fin de satisfacer las necesidades de un auditorio consecuente con el nuevo enfoque. Desde ese punto de vista, en las escuelas de aquella época, sobre todo las catedráticas, se desarrolló una especie de modelo educativo que dirigía la enseñanza en tres direcciones: la primera abarca el estudio del latín, las sagradas escrituras y el canto de servicios religiosos; el segundo, se le llamaba el *Trívium* y el *Quadrivium,* el *Trívium* integraba las artes liberales de las que se distinguían la gramática, la retórica y la lógica, el *Quadrivium* que contemplaba Aritmética, geometría, astronomía y música. El tercero, finalmente, estaba dedicado a la filosofía dividido en cuatro ramas, la teórica (matemáticas, física y teología), la práctica (ética y moral), la lógica (análisis del discurso) y la mecánica (diferentes habilidades técnicas, desde la medicina a la investigación o a la agricultura).

El inicio de este modelo de educación que, aunque dirigido en principio a las instituciones formadoras de monjes, alcanzó un gran prestigio promoviendo, por un lado, la concurrencia de estudiantes provenientes de todo Europa y, por otro, el reconocimiento por parte del Papado y diferentes reyes, hacia los títulos que otorgaban. A pesar de las líneas bien definidas, académicamente hablando, la sociedad, cultura y religión europeas, sumergieron las ciencias puras en auténticos pozos de oscuridad durante mucho tiempo. En general, el panorama europeo se mantiene de esta manera, hasta las transformaciones sociales y culturales que vienen con la aparición del renacimiento. Sin embargo, las extensiones de los reconocimientos citados antes, llevarán a la fusión de estas escuelas y las sociedades de escolares constituidas con ellas, a la construcción de las universidades en el sentido de como las conocemos hoy, asociaciones con carácter de corporación académica, formadas por maestros y estudiantes, destacándose con características como el autogobierno y control sobre lo que se enseña e independencia de las condiciones externas.

Alrededor del siglo XV, el mundo europeo empieza una transición cultural, llamada la época del renacimiento. El renacimiento representa una etapa intermedia en el mundo occidental, en el que hay un tránsito entre la sociedad feudal de la edad media, ubicada entre los siglos V y XV, hasta el principio del siglo XVIII, cuyo epicentro fue la península itálica. Esta etapa hace referencia al “volver a nacer”, a recuperar el interés por la cultura clásica de la antigua Grecia y Roma. El movimiento renacentista ya había empezado a forjarse durante los últimos siglos de la edad media, pero la resistencia del teocentrismo occidental lo pospuso. Esta resistencia se mantenía bajo estrictos controles eclesiásticos y una verdadera escasez de material clásico que limitaba constantemente la influencia de los personajes antiguos. Este renacimiento fue mucho más que una restauración de una cultura no cristiana, aunque sus bases fueron clásicas, todo esto desató novedosas implementaciones en política, filosofía, religión, y en especial el arte y la ciencia. (Santana, 2011).

3.3. El concepto de espacio en la edad media.

La actividad matemática de esta época no nos da mucha luz acerca de la concepción del espacio físico y su relación con el espacio geométrico; seguramente, todos los factores culturales sociales y académicos, de los que hablamos antes, no permitieron el desarrollo de un enfoque distinto hacia la idea de espacio, más bien, podría decirse que no existía ninguna duda hasta entonces de que el espacio físico era una especie de espejo del espacio elucídelo, y, en esa medida, los esfuerzos siempre estuvieron encaminados a demostrar que el V postulado tenía más carácter de proposición que de verdad evidente. Fue hasta el renacimiento, cuando los artistas descubren la perspectiva como herramienta para comprender el espacio de una forma más profunda.

3.3.1. La perspectiva, una nueva forma de concebir el espacio.

En el renacimiento, surge una preocupación de los artistas del dibujo y la pintura por representar escenarios y objetos de forma realista, pero las técnicas que hasta entonces existían eran bastante limitadas ya que carecían del concepto de profundidad (relacionado con el punto de fuga en perspectiva o infinito en geometría). Esta preocupación de los artistas por establecer las reglas de la perspectiva los llevó por un camino que terminó en el uso de conceptos matemáticos para poder definirlas (Ramirez & Sierra, 2000). Los artistas más beneficiados con el descubrimiento de la perspectiva fueron Alberto Durero, Leonardo Da Vinci, Maurolico y Paccioli. A continuación, veremos los principios básicos de la perspectiva que dan paso a la Geometría proyectiva y su relación con el espacio físico.

Como mencionamos, la geometría proyectiva aparece con la necesidad de dar explicaciones racionales para el arte y sus cuestionamientos; este problema lleva a Leonardo da Vinci a estudiar matemáticas; a través de sus manuscritos es posible concluir que no tenía conocimientos avanzados en aritmética y algebra, pero al contemplar sus bocetos es fácil reconocer que sí los tenía en las ciencias geométricas y, además, los reverenciaba por encima de otras ramas de las matemáticas. Su preferencia se basaba en que otras ramas no le permitían explicar el diseño de las formas naturales; la geometría, por el contrario, no solo permitía esto sino también permitía representarlas en su arte: dibujo, pintura y arquitectura. Las dos ramas por las que Leonardo se ve atraído para perfeccionar su técnica, son la perspectiva y la óptica. Hasta entonces la perspectiva era un campo descubierto alrededor del siglo XV por Filippo Brunelleschi y desarrollado por Leone Battista Alberti (Melogno et al., 2011). La idea implica una sucesión de conceptos abstractos, cuyo enfoque central es el concepto del ojo que ve todo (un punto desde el cual se puede ver todo). La idea era trabajar con un cono desde cuyo vértice se pudieran abarcar todos los objetos en determinado espacio, de esta manera se concibe el concepto de proyección, pero ¿cuáles son las propiedades comunes a dos perspectivas de una misma figura? En 1525 Alberto Durero promulgó su versión de reglas para la perspectiva.

La estrategia consiste en situar un objeto que no esté muy lejos de la vista, en un plano ideal, ubicando una serie de puntos marcados a partir de la intersección de líneas verticales y horizontales con la proyección de otro hilo que parte del objeto a representar. El problema que impedía la representación de diferentes escenarios de la realidad en una pintura, estaba relacionado con el paralelismo, la idea de paralelismo estuvo fuertemente ligada a su definición geométrica clásica como dos rectas que prolongadas al infinito nunca se cortan, de manera que al representar esto en una pintura, se respetaban algunas nociones comunes como la equidistancia entre dos segmentos y no como dos rectas que comparten un punto de fuga. Más técnicamente, se toma la figura que se desea proyectar, ésta se encuentra en un plano, entonces cada punto se proyecta sobre otro plano, con destino al punto desde donde se ve todo (punto de enfoque), al hacer un cambio de inclinación del primer plano donde está la figura a proyectar, en el segundo plano aparece la imagen proyectada. Así, un círculo dará como imagen proyectada un círculo, una elipse, o una línea recta, todo depende de la inclinación del primer plano. Ver figura 6.

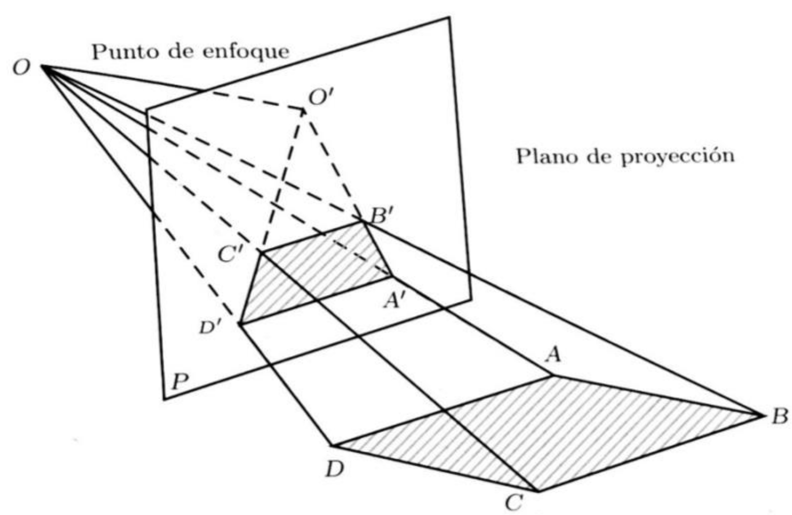

Figura 6

Básicamente, las reglas de la perspectiva son dos:

- Las rectas paralelas en la realidad, deben representarse en el papel como rectas concurrentes en un mismo punto de fuga.
- Existe la línea de horizonte, ubicada horizontalmente utilizada para ubicar todos los puntos de fuga para las rectas que pertenecen a un mismo plano.

Lo relevante de estas dos reglas se puede entender mejor si intentamos dibujar, un piso de mosaicos cuadrados. Es fácil verificar que, una vez marcados los lados de un solo mosaico, los demás quedan determinados. Ver figura 7.

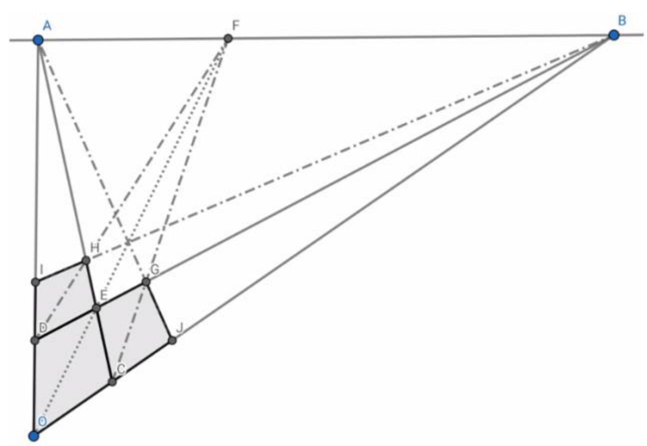

Figura 7.

Partimos de una recta $\overleftrightarrow{AB}$ (línea de horizonte), y un punto O (punto del observador) a un lado, los vértices C y D se construyen con una distancia arbitraria para que sean los vértices de nuestro primer mosaico; trazamos las diagonales $\overline{CA}$ y $\overline{DB}$, nuestro punto de fuga será F, que aparece como intersección de la recta $\overleftrightarrow{OE}$ con $\overleftrightarrow{AB}$, ahora trazamos $\overline{CF}$ y $\overline{DF}$, producto de estos segmentos aparecen los puntos de intersección G y H, que determinan las nuevas rectas $\overleftrightarrow{GA}$, $\overleftrightarrow{HA}$ que a su vez nos permiten completar el siguiente mosaico. El proceso se repite una y otra vez.

Con este dibujo podemos concluir que, si dos personas intentan hacer el mosaico, su posición dará lugar a dibujos distintos debido al tamaño y posición de los ángulos, pero en ambos debe cumplirse la concurrencia de los lados verticales, de los lados horizontales y diagonales que llegan a la línea de horizonte. Lo curioso de la perspectiva es que nos permite transformar un sistema de rectas paralelas, en rectas concurrentes.

Los elementos básicos de la perspectiva están ligados a los mismos elementos de la geometría clásica, el punto, la recta y el plano, pero la forma de concebirlos es distinta, en la perspectiva estos elementos son elementos lejanos. El punto se convierte en punto de fuga, la recta se convierte en horizonte y el plano, en un plano lejano. Esto quiere decir que, si tomamos en cuenta un plano lejano, cualquier objeto que quiera representarse toma una forma determinada, y esto depende de los otros elementos lejanos. Todo esto brinda la posibilidad de echar una mirada desde el interior, exterior o periferia, hacia lo puntual, permitiendo caracterizar los objetos geométricos desde la perspectiva de lo infinito, no como en la geometría euclidiana donde todos los objetos se caracterizan desde lo finito.

Todas estas ideas de proyección y perspectiva introducidas por Alberti, las adopta Gérard Desargues, matemático autodidacta francés, para mostrar resultados de Apolonio referente a las secciones cónicas, de manera que convierte aquellas ideas que nacen como necesidad de evolución en el arte, como método para justificar resultados:

> He observado que buena parte de las artes se basan en la geometría, entre otras el corte de piedra en arquitectura, los relojes de sol y, en particular, la perspectiva.

El primer libro de la historia de la geometría proyectiva titulado *Proyecto de tratado sobre resultados de un cono cortado por un plano.* Basado en la terminología introducida por Alberti, que al final tuvo poca difusión, siendo fuertemente criticado por sectores científicos, quienes consideraban la imposibilidad de obtener contribuciones relevantes a la geometría sin hacer uso de un lenguaje apropiado. Uno de los problemas trascendentales en validez, de geometría proyectiva, consistía en lo siguiente: si bien la intención de la perspectiva es poder representar en papel, distintos escenarios de la realidad física, haciendo uso de la línea de horizonte y punto de fuga, estos principios llevaban a inconsistencias en términos de la teoría.

Un ejemplo de esto es, si una persona se ubica entre dos carriles de tren y se hace un giro de 180 grados, que en el papel esto representaría la necesidad de dos puntos de fuga para cada par de paralelas contrastando con el hecho de que por dos puntos pasa una única recta, y más atrevido aun, que dos paralelas se intersectan en dos puntos. Desargues acepta la postura de dos puntos al infinito y, además, la generaliza a dos planos paralelos que tienen en común una línea al infinito.

3.4. Síntesis y comentarios

Hasta ahora, la reflexión sistemática sobre la naturaleza del espacio a lo largo de la historia nos ha dejado algunas ideas generales, entre ellas la forma que adoptan los objetos de la matemática para imponerse al pensamiento y de allí, la razón por la cual los filósofos clásicos buscan en la realidad ya constituida, dar cuenta de la objetividad matemática como una razón más para entender la efectividad del uso de las ciencias en diferentes campos. Después de la consolidación de los *Elementos,* el camino adoptado por las matemáticas en términos de espacio, se ve orientado a la crítica alrededor de la teoría y no a su desarrollo. La polémica formulación del V postulado promueve una lucha larga por hacer de la geometría, una ciencia estable y consecuente con los principios y concepciones ligados a la ontología de los objetos matemáticos, de manera que el enfoque en los siglos posteriores a su formulación, está dirigido a la revisión minuciosa del contenido compilado por Euclides. Como se ha relatado antes, por un lado, se intenta demostrar el quinto postulado como una proposición, y por otro, siendo blanco de los más duros ataques. Todos estos intentos operativos resultan fallidos. Es importante resaltar aquí, el maravilloso trabajo hecho por Euclides, que seguramente teniendo conciencia de las dificultades que presumía escribir el postulado de tal forma, nunca imaginó los innumerables intentos que por más de veinte siglos se hicieron por parte de los más afamados matemáticos y también de aquellos cuya curiosidad los inquietaba. En este punto, podríamos preguntarnos ¿Qué condiciones eran las necesarias para que la geometría alcanzara su máximo desarrollo? Pues bien, esas condiciones las develaremos paulatinamente, pero sí podemos adelantar que los grandes cambios en aspectos culturales y sociales del mundo occidental, repercutieron al menos en la manera como se venía haciendo ciencia, pero también, que el enfoque religioso de los cristianos medievales respecto a su formación académica y preparación en función de la vida eclesial, resulta responsable en gran parte su estancamiento por muchos siglos. La ciencia se distancia en gran medida de las corrientes platónicas y aristotélicas, sin abandonar del todo algunos aspectos filosóficos fundamentales, por ejemplo, siguen pensando que el método más eficaz para alcázar el conocimiento objetivo implica la demostración silogística, que es la deducción de conceptos a partir de primeros principios que se consideran evidentes.

Por otro lado, la intuición respecto al quinto postulado juega un papel importante en este periodo de la historia. En un principio cuando Euclides formula el mencionado postulado, parecía ser evidente a raíz de la concepción ontológica del objeto y su relación con el espacio físico, es decir, como en la realidad física era posible visualizar el paralelismo y sus propiedades ligadas a los objetos finitos, entonces la ontología del objeto paralelismo se ve influenciada por las experiencias en el espacio físico relacionadas con dicho objeto. Ahora bien, desde la filosofía del mundo ideal, donde los objetos en el espacio físico son simples sombras del verdadero objeto como idea, la intuición es ahora quien lleva la problemática del quinto postulado al plano de la lógica y la demostración. También, en este punto de la historia, aparece la necesidad de impulsar el arte y de obtener mejores representaciones pictóricas de la realidad; las nuevas técnicas hacen que la intuición tenga un nuevo papel, y de allí que las concepciones respecto a los objetos primarios de la geometría de Euclides empiecen a tomar una nueva dimensión.

La perspectiva abrió el camino a nuevos mecanismos de representación geométrica, en concreto a la idea de paralelismo; hasta entonces, las representaciones geométricas estaban concebidas sobre el plano euclídeo y allí justamente es donde la lógica encontraba las mayores tensiones teóricas, pero, la perspectiva encontró el camino hacia una mirada diferente para su representación. La intención era establecer un proceso eficaz para la construcción de un escenario sobre un lienzo que brindara la ilusión de poder estar allí, y en ese sentido aparecen algunas leyes y reglas que fundamentan la perspectiva para posteriormente dar el paso a la geometría proyectiva.

La importancia que tiene la aparición de la perspectiva tiene que ver con lo siguiente: la intención de los artistas era poder hacer uso del paralelismo en tal representación, pero ésta, al requerir de profundidad (necesaria para una representación cercana de la realidad), involucraba la construcción de secantes vistas desde el punto de vista del espacio euclídeo, de aquí lo relevante de la intuición. Un ejemplo interesante es pensar en las vías de un tren, intuitivamente las consideramos paralelas sin importar donde terminan, pero haciendo uso de la perspectiva para su representación en un plano (lienzo), las dos rectas no serían paralelas sino secantes, por intuición geométrica la idea nos invita a creer que jamás se intersecan, ahora, si giramos el cuerpo hacia el costado opuesto, y construir también la representación de lo que vemos, encontramos otro punto de fuga, es como si estuviéramos en medio de las paralelas y sin importar la vista que elijamos (frente o su opuesto), serán paralelas, pero desde la rigurosidad de la geometría y enfocándonos en la representación artística, las aparentes paralelas en realidad tienen dos puntos de corte.

La importancia de este ejercicio es pensar que, en este momento de la historia, hay un desligamiento de la ontología y concepción del objeto ideal de paralelismo; esta nueva corriente de pensamiento artístico promueve nuevas ideas geométricas, pero no para la geometría sino en función del arte; pero el atrevimiento de pensar diferente, hace que echar un vistazo a la ontología de los objetos geométricos muestre el camino que deberá tomar la lógica para poder consolidar finalmente la geometría.

4. ESPACIO Y SU RELACIÓN CON LA GEOMETRÍA EN LA EDAD MODERNA

4.1. Algunas consideraciones socioculturales y del conocimiento científico

A lo largo de la historia de la ciencia aparece un periodo de inflexión de suma importancia conocido como la revolución científica; diferentes historiadores y filósofos lo han puesto en planos con diversas visiones y criterios para su análisis, pero también hay diferentes investigaciones referidas a múltiples marcos cronológicos. Para nuestros fines, nos enfocaremos en el periodo inicial entre el siglo XVI y XVII, en el cual aparece como una nueva corriente de pensamiento, que se opone a algunas concepciones griegas, pero a otras les da continuidad; muchas de estas concepciones estaban bastante arraigadas a la filosofía de entonces a causa del autoritarismo adoptado por el movimiento escolástico medieval. Con la revolución científica aparece una nueva forma de concebir el mundo, desde lo cuantitativo, natural, físico y sobretodo abierto y extendido al mundo entero, reemplazando la imagen limitada, antigua y religiosa que los cristianos, musulmanes y escolásticos heredaron del mundo griego.

Uno de los hechos más importantes, que caracteriza este periodo, fue el desarrollo del método científico, impulsado en gran medida por una burguesía poderosa, desde lo económico, interesada en hacer evolucionar un sistema de ideas propio. En este proceso se vuelve a la lectura y estudio de textos antiguos, para extraer de ellos métodos que, con la mezcla de los nuevos, lograrían su consolidación; muchos de estos textos nunca fueron objeto de estudio en la edad media debido a la oscuridad ocasionada por el hermetismo religioso.

Algunos historiadores destacan el resurgir social y cultural que se gesta durante el renacimiento y que utiliza el conocimiento para desarrollar técnicas nuevas. Otros, sin embargo, mencionan que no existe ningún tipo de continuidad o empalme con la edad media, argumentando que los fundamentos de la revolución científica se encuentran en los neoplatónicos renacentistas; el historiador José Babini (1969) menciona que si bien los aportes del periodo renacentista, en relación con las ciencias exactas, son específicos en el desarrollo de la ciencia moderna, por otro lado, no pasa lo mismo con las conquistas de los progresos técnicos. En ese sentido, algunos historiadores sugieren que no hay interrelación entre la ciencia y la técnica de la modernidad, es decir que probablemente los procesos técnicos renacentistas no influyeron en absoluto en el desarrollo de la concepción heliocéntrica, la geometría cartesiana o la dinámica moderna.

Nicolás Copérnico aparece con la propuesta de una hipótesis que llevará el campo de la ciencia a un nivel conceptual superior a través de su obra, *sobre las revoluciones de las esferas celestes* (*De revolutionibus orbium coelestium*), que fue publicada por Andrea Osiander en 1543, luego de que él muriera. La hipótesis sugiere que es el Sol quien se encuentra en el centro del universo y no la tierra. Esta revolución supone un cambio de la concepción geocéntrica y geodésica a un modelo heliocéntrico, promovido inicialmente por Copérnico, pero continuado por Galileo, Kepler y finalmente terminado por Newton, después de la consolidación de los resultados previos.

Poco a poco, en Europa se desarrolla una nueva actitud mental decidida a discutir a los teólogos y filósofos, por su necedad a la hora de explicar, describir o discutir los fenómenos naturales, y ya no es suficiente fundar una teoría que suponga una construcción correcta de los fenómenos observables del mundo; al astrónomo de esta época no solo le interesa predecir las marcas luminosas del espacio, sino que quiere asegurarse si la tierra también se mueve.

Hacia principios del siglo XVII sigue en incremento el valor asociado a los descubrimientos de la filosofía natural a costa del detrimento del ideal Aristotélico. (Camejo, 2011) sostiene que uno de los rasgos epistémicos más característicos de la filosofía Aristotélica era que la experiencia común fuera la base del conocimiento demostrativo, ya que se requiere de premisas que sean verdades evidentes y, para asegurarse de la validez de estas verdades, era necesario recurrir a las experiencias que son comunes a los seres humanos, en situaciones normales de percepción. Algunos autores conservaron el ideal demostrativo, pero no sustentado en el silogismo, sino en el experimento o la matemática. Muchos fueron los elementos criticados por parte de filósofos naturales y matemáticos en referencia al ideal Aristotélico de conocimiento, la experiencia común como herramienta confiable de evidencia, el tipo de explicaciones, entre otros. Galileo señala que la experiencia como base del conocimiento se fundaba en experiencias aparentemente comunes a partir de una observación crédula o ingenua, de manera que recibe dos grandes críticas: la primera tiene que ver con el reconocimiento de que muchos de los fenómenos, aparentemente observables, estaban realmente fuera de un rango de observación común, no solo refiriéndose al alcance de los sentidos de la percepción aumentados y mejorados por herramientas como el telescopio o microscopio, sino también desde lo conceptual, es decir, que para explicar muchos de los fenómenos era necesario abandonar el marco del sentido común; en ese sentido, el nuevo estudio de las ciencias exigía un abandono de las intuiciones básicas de la experiencia, sobre las cuales estaba edificada la ciencia aristotélica. La segunda critica estuvo dirigida contra la forma en que el ideal aristotélico del conocimiento establece la relación entre las observaciones y la teoría, o bien cumplían solamente una función del tipo ilustrativo para la actividad demostrativa, o solo constituían un apoyo en la explicación de fenómenos concretos. Para Aristóteles había una garantía en la posibilidad de adquirir conocimiento incorregible y cierto, estaba fundada en la noción de existencia de ciertas "tendencias naturales" de la mente humana, que apuntan de forma natural a la adquisición de conocimiento, pero Galileo modificó esta concepción acerca del conocimiento de la naturaleza, representando un abandono de las ideas preconcebidas de cómo es el mundo, o sobre el tipo de principios metafísicos que deben incorporarse a los datos de observación, sustituyéndose por la búsqueda de posibles fenómenos o factores explicativos que deben establecerse como realmente existentes.

4.1.1. Teorías relacionadas con el espacio físico en la edad moderna.

Filósofos e historiadores como Alberto Coffa (1969) y Alexander Birkenmajer (1973) concuerdan en que uno de los aspectos más importantes, producto de este periodo, es la transformación de la cosmología clásica y medieval, abriendo paso a nuevas formas de astronomía. Copérnico intenta explicar los complejos movimientos de los astros que aparecían en el firmamento, contradiciendo en el proceso varios de los pilares de la física clásica, como el sistema de Ptolomeo, la astronomía y la teoría general de los movimientos considerados antes por los griegos; estos aportes sumados a los de Galileo, a quien se le debe el inicio de la observación astronómica moderna con el uso del telescopio, y a Johannes Kepler, quien enuncia tres leyes empíricas del movimiento de los planetas alrededor del Sol, serán conciliados por Isaac Newton en un nuevo sistema.

Pero no siempre pasa que los problemas que surgen de una teoría inicial se difuminan o pierden relevancia al revolucionar tal teoría; aquí los problemas fundamentales del sistema viejo cobran fuerza en el nuevo, de manera que Copérnico, así como los griegos, tampoco podía explicar por qué los planetas se mueven como lo hacen. El nuevo modelo tenía enorme merito, aunque ubicaba al Sol en la posición correcta, el modelo no era mejor que el geocentrismo para fines de medición y predicción de la posición planetaria: Copérnico hace uso nuevamente de los epiciclos y su movimiento circular, incluso tuvo que poner al Sol ligeramente desplazado del centro del universo para que sus mediciones planetarias pudieran tener concordancia. El sistema de Copérnico no fue bien recibido por los astrónomos de la época, debido a que no ofrecía mayor sencillez que el modelo de Ptolomeo; sin embargo, encontró un gran defensor de sus tesis en Galileo Galilei, quien contribuyó en algunos aspectos importantes en referencia a las orbitas planetarias, pero dejando inconclusos nuevamente aspectos concernientes al movimiento de estos. A pesar de su estudio minucioso del movimiento de los cuerpos que caen en la tierra, no se le ocurrió que la fuerza de gravedad pudiera tener alguna relación con el movimiento de los astros. Quizás, inconscientemente su pensamiento seguía ligado a las ideas aristotélicas en relación con que los fenómenos celestes son de naturaleza distinta a los terrestres.

Antes de Newton, el intento más cercano a la realidad de explicar el movimiento planetario se debió a Robert Hooke, quien publicó en 1674, doce años antes de la aparición de los principia, un libro en el que por primera vez estaba bien planteado el movimiento planetario; entre algunas de sus proposiciones se menciona, que entre todos los cuerpos celestiales sin excepción, poseen una atracción o poder gravitatorio hacia sus propios centros, con lo cual se explica que no solo atrae a otros cuerpos sino a sus propias partes también, evitando que se dispersen, como funciona con la Tierra; también, supone que cualquier cuerpo puesto en movimiento directo y simple, continuará moviéndose en línea recta, hasta que otro poder efectivo interfiera en su curva y en consecuencia en su movimiento y finalmente menciona que la potencia atractiva debida a un cuerpo actúa con más poder si el cuerpo se encuentra más cerca de su centro. De esta manera puede verse como Hooke intuye correctamente el fenómeno gravitatorio, además de adelantarse a la primera ley de Newton; el inconveniente con sus supuestos, es que sus descripciones no pasan de ser únicamente cualitativas, el camino de lo cualitativo a lo formal es bastante denso en términos matemáticos, cuantitativos y rigurosos, camino que solo newton en esa época pudo recorrer.

A Isaac newton se le atribuye el descubrimiento de la gravitación universal, es decir el hecho de que todos los cuerpos se atraen entre sí, por medio de una fuerza de gravitación. En primer lugar, se postula la existencia de una fuerza de atracción hacia el sol que se compensa exactamente con la fuerza centrífuga que actúa sobre un planeta debido a su movimiento orbital. De esta forma, resulta que la fuerza de atracción del Sol debe disminuir como el cuadrado del radio orbital. Sin embargo, con esto no se puede deducir la naturaleza de la fuerza con la cual el sol atrae a los planetas. Hacía falta darse cuenta de que se trata de la fuerza de gravedad, la misma que atrae las manzanas en su ya conocida leyenda. Newton demuestra con todo el rigor requerido, la ley de gravitación universal y también que las tres leyes de Kepler son consecuencia de ella. Esta ley estipula que la fuerza gravitatoria entre dos cuerpos masivos es directamente proporcional a sus masas, e inversamente proporcional, al cuadrado de las distancias que los separa. Para algunos filósofos, el sistema Newtoniano era simplemente una manera muy ingeniosa de describir las trayectorias de los planetas, pero no revelaba la esencia misma de la gravitación, pero el problema persistía: ¿cómo pueden dos cuerpos materiales atraerse mutuamente, a través del espacio vacío, sin la mediación de alguna otra sustancia? Y de allí la pregunta fundamental todavía sin respuesta ¿por qué se mueven los planetas?; la propuesta de Newton solo demostraba como se movían, esto constituye el problema de la acción a distancia. (Hacyan, 2004)

¿Pero cuál es el espacio en el que están sustentadas estas ideas? Pues bien, en ninguna parte de las ecuaciones que refieren a las mediciones y estimaciones de los griegos, con el modelo geocéntrico, ni con Copérnico o Kepler con el modelo heliocéntrico, se habla de cuál es la concepción de espacio en sus correspondientes modelos, pero debido a la necesidad de procedimientos geométricos para establecer las relaciones astronómicas, se puede inferir que la idea de espacio se corresponde con las concepciones griegas acerca del mismo.

4.1.2. Newton y el espacio absoluto

El desarrollo del trabajo de Newton está en correspondencia con el espacio absoluto, al igual que la concepción de otros grandes pensadores. Sus ecuaciones no implican cosa alguna que hable de tal espacio, pero si hace algunos comentarios y caracterizaciones de este; en su obra Principia, Newton reconoce dos tipos de espacio: relativo y absoluto; el espacio relativo hace referencia a las trayectorias descritas por objetos y que tienen como característica la posición de un observador inercial, para las cuales son válidas las leyes del movimiento; el espacio absoluto lo concibe, de forma intuitiva, como el lugar resultante cuando no hay objetos, el lugar donde habitan y se mueven los planetas y objetos del universo, definiéndolo de esta manera el espacio absoluto por su propia naturaleza y sin relación a nada externo, permanece siempre similar e inmutable.

Newton mantuvo por medio de un discípulo suyo, Samuel Clark, una polémica con Leibniz, quien consideraba el espacio como un conjunto de relaciones que guardan los objetos entre sí, por lo que no se puede atribuir existencia del espacio mismo, de manera que, para él, el espacio vacío, sin ningún objeto, es un concepto sin sentido. En cambio para newton, el concepto de espacio absoluto, es como el de un cuarto sin muebles ni objetos, completamente vacío, que eventualmente puede ser llenado. Finalmente, la claridad sobre el espacio relativo o absoluto viene a aparecer con Einstein y si teoría de la relatividad general.

4.2.Condiciones histórico-epistémicas en el desarrollo de las geometrías no euclidianas

Los resultados que se tienen hasta principios de siglo XVII, asociados a la teoría de las paralelas, se han centrado como hemos visto en los múltiples intentos y así mismo, fracasos por demostrar la unicidad de las paralelas; estos intentos se destacan por el uso de alguna propiedad de las mismas que no se desprende de su definición dentro del sistema euclidiano; en esta época aparece una nueva estrategia que consiste en adentrarse en la vía del absurdo.

El padre Gerolamo Saccheri escribe la obra "*Euclides ab omni naevo vindicatus: sive conatus geometricus quo stabiliuntur prima ipsa uniersae Geometriae Principia"* (Milán, 1733) dedicada en gran medida a la demostración del polémico postulado de Euclides; la idea transversal de sus investigaciones geométricas se encuentra en otra de sus obras "*Lógica demostrativa"* (Turín, 1697), específicamente, en un particular tipo de razonamiento antes usado por Euclides (libro IX prop XII), el cual establece que aunque se admita como hipótesis la falsedad de una proposición que se quiere demostrar, se llega igualmente a concluir que es verdadera. Convencido con la idea, Saccheri parte de las veintiséis primeras proposiciones del libro I de *Elementos* y supone como hipótesis la falsedad del V postulado, para después buscar entre alguna de las consecuencias de esta hipótesis, una proposición cualquiera que permita afirmar la verdad del postulado mismo.

Él considera, en primera instancia, aquellos cuadriláteros *ABCD,* donde $\overline{AB} \simeq \overline{CD}$ y los ángulos *B* y *C* son rectos. Sin el uso del postulado V es posible demostrar que los ángulos *A* y *D* son congruentes.

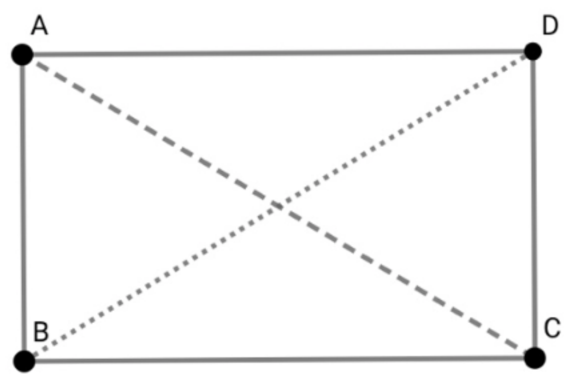

Figura 8.

Se parte de que los triángulos *ABC* y *DCB* son congruentes por la proposición IV de *Elementos* (si dos triángulos tienen dos lados respectivos iguales, y tienen los ángulos comprendidos iguales, también tendrán las bases iguales y los ángulos restantes serán iguales); en consecuencia, los ángulos *BAC* y *BDC* serán iguales, y también los ángulos CAD y BDA; entonces, los triángulos *ABD* y *DCA* también son congruentes, otra vez por la proposición IV de *Elementos*. Por lo tanto, los ángulos en los vértices *A y D* del cuadrilátero, también son congruentes. En realidad, Saccheri obtiene este resultado a partir de consideraciones de simetría del cuadrilátero.

Con el propósito de demostrar el V postulado, Saccheri introduce tres hipótesis mutuamente excluyentes para los ángulos congruentes A y D de algún cuadrilátero de este tipo, a saber:

- Los ángulos A y D son obtusos (hipótesis del ángulo obtuso)
- Los ángulos A y D son rectos (hipótesis del ángulo recto)
- Los ángulos A y D son agudos (hipótesis del ángulo Agudo)

Saccheri demuestra que la hipótesis del ángulo recto es equivalente al V postulado; de manera que, para demostrar el V postulado, solo tiene que descartar las otras dos. De manera irreprochable, logra desechar la del ángulo obtuso. Al tratar de refutar la del ángulo agudo, asumiendo que ésta es verdadera, se encuentra con una serie de resultados asombrosos, que posteriormente conformarán la geometría no euclidiana, pero que, a su manera de ver, y en su afán por reivindicar a Euclides, los considera contradictorios con la naturaleza de la recta, logrando "refutar" de esta manera la hipótesis del ángulo agudo. En lo que sigue, presentaremos algunos elementos que, por un lado, arrojarán luz para la comprensión de estos razonamientos, y por otro, nos conducirán a la solución del problema del V postulado y al nacimiento de las geometrías no euclidianas.

Una de las formulaciones del V postulado, que resulta ser muy útil en este sentido, es el axioma de Playfair:

"*por un punto exterior a una recta es posible trazar una y solo una paralela a la dicha recta*".

Este enunciado resalta dos cualidades que caracterizan el paralelismo en la geometría euclidiana, la existencia y la unicidad de la paralela, y en consecuencia dos formas de negarlo:

- No existe paralela alguna por un punto P exterior a una recta *m*. (que corresponde a la hipótesis del ángulo obtuso)
- Hay más de una recta que pasa por un punto P exterior a una recta y no corta a dicha recta (hipótesis del ángulo agudo).

Ahora, la pregunta que resulta natural responder es ¿Cómo establecer estas equivalencias, entre las hipótesis de Saccheri, por un lado, el V postulado y sus negaciones, por el otro?

Una manera, tal vez la más apropiada por su claridad y sencillez, es la divulgada por Legendre, quien dedicó cerca de 40 años de su vida a demostrar el v postulado. La figura geométrica que utiliza en sus razonamientos es el triángulo, más precisamente, la suma de las medidas de sus ángulos internos. Es bien sabido que en el libro I de Euclides se demuestra, a partir del V postulado, que esta suma es constante e igual a dos ángulos rectos (proposición 32). Para tratar de lograr su cometido (demostrar el V postulado), Legendre formula tres hipótesis, mutuamente exclusivas, sobre la existencia de triángulos con estas medidas, a saber:

- La suma de las medidas de los ángulos de un triángulo es mayor que dos rectos
- La suma de las medidas de los ángulos de un triángulo es igual a dos rectos
- La suma de las medidas de los ángulos de un triángulo es menor que dos rectos

Las siguientes proposiciones recogen, esencialmente el trabajo de Legendre:

- El V postulado es equivalente con su segunda hipótesis
- La suma de los ángulos internos de cualquier triángulo es menor que dos rectos (sin tener en cuenta el V postulado)
- Si existe un triángulo que tenga la suma de sus ángulos igual a dos ángulos rectos, entonces, todos los triángulos tienen la misma propiedad, y en consecuencia tiene lugar el V postulado.

  De acuerdo con este último resultado, para "demostrar" el V postulado, a Legendre solo le faltó exhibir un triángulo cuya suma de ángulos fuera dos ángulos rectos. A pesar de tanto esfuerzo él nunca lo logró, sencillamente, porque dos de sus hipótesis pueden ser viables, la segunda y la tercera. En realidad, utilizando los resultados obtenidos por Legendre, resulta fácil demostrar las siguientes proposiciones:
- La suma de los ángulos de un triángulo no puede ser mayor que dos rectos, y los ángulos de la base superior de un cuadrilátero de Saccheri no pueden ser obtusos

- La hipótesis del ángulo recto de Saccheri es equivalente con la hipótesis de Legendre, que la suma de los ángulos de un triángulo es igual a dos rectos
- La hipótesis de Legendre que dice que la suma de los ángulos de un triángulo es menor que dos rectos es equivalente con la hipótesis del ángulo agudo de Saccheri

Esta última equivalencia tiene lugar en la negación del V postulado, por un punto exterior a una recta pasa más de una recta que no corta a dicha recta, es decir, en la geometría no euclidiana descubierta por Gauss, Bolyai y Lobachevski, cuya aparición describiremos más adelante.

A continuación, mostraremos por un lado, el hecho de que la suma de los ángulos interiores de un triángulo sea, 180˚ y además sea equivalente al V postulado, y por otro, los resultados de Saccheri al suponer que los ángulos *A* y *D* sean obtusos o ambos agudos.

Las siguientes ideas son tomadas textualmente de (Ramirez & Sierra, 2000)

- **Equivalencia del V postulado y que en un triángulo $\beta + \alpha + \sigma = 180^\circ$.** Si se usa el V postulado en la forma de Playfair para trazar por *A* una única paralela a $\overleftrightarrow{BC}$, la unicidad y la proposición XXVII del libro I de Elementos (Si una recta al caer sobre dos rectas hace ángulos alternos internos iguales entre sí, entonces tales rectas serán paralelas entre sí), con $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{AC}$ como transversales, entonces implica que $\beta = \beta'$ y $\sigma = \sigma'$; como $\beta' + \alpha + \sigma' = 180^\circ$ también $\beta + \alpha + \sigma = 180^\circ$. Ver figura 9.

Para hablar de la equivalencia entre el V postulado y el hecho $\beta + \alpha + \sigma = 180^\circ$, es necesario referirse a la proposición XXVII que garantiza la existencia de una paralela *m* a *l* por un punto *P,* solo falta la unicidad para obtener el axioma de Playfair y en consecuencia su equivalente el V postulado. (p.125)

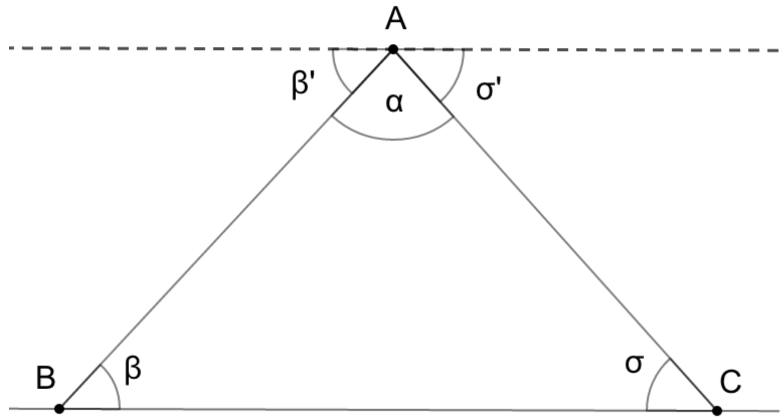

Figura 9.

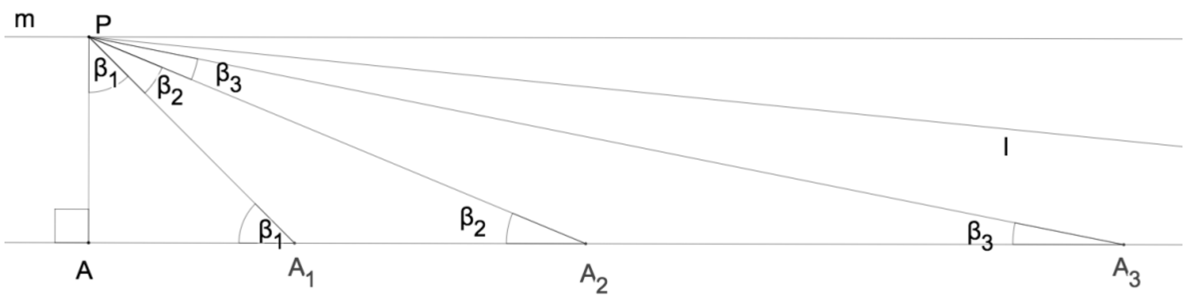

Figura 10.

- **Equivalencia entre el hecho que en un triángulo $\beta + \alpha + \sigma = 180^{\circ}$ y el V postulado.** En la figura 10, se muestra una sucesión de triángulos isósceles, ΔPA_1A, ΔPA_2A_1 $\Delta PA_3A_2 \ldots$ ΔPA_nA_{n+1} ; obteniendo A_1 de tal forma que $PA = AA_1$; A_2 tal que $PA_1 = A_1A_2$; A_3 tal que $PA_2 = A_2A_3$ etc., cuyos ángulos miden cada uno la mitad por la hipótesis. Si el proceso se repite muchas veces, cualquier recta *l* distinta de *m* queda entre PA_nA_{n+1}, para algún valor de *n* tal que $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \ldots + \beta_n$, este tan cercano como se quiera a 90˚. Esto implica que *l* queda atrapada en un triángulo y corta en algún punto a $\overleftrightarrow{AA_1}$, según otro de los postulados no explícitos y utilizado por Euclides (si una recta entra a un triángulo por uno de sus vértices, la recta sale del triángulo por el lado opuesto a dicho vértice). (p, 126)

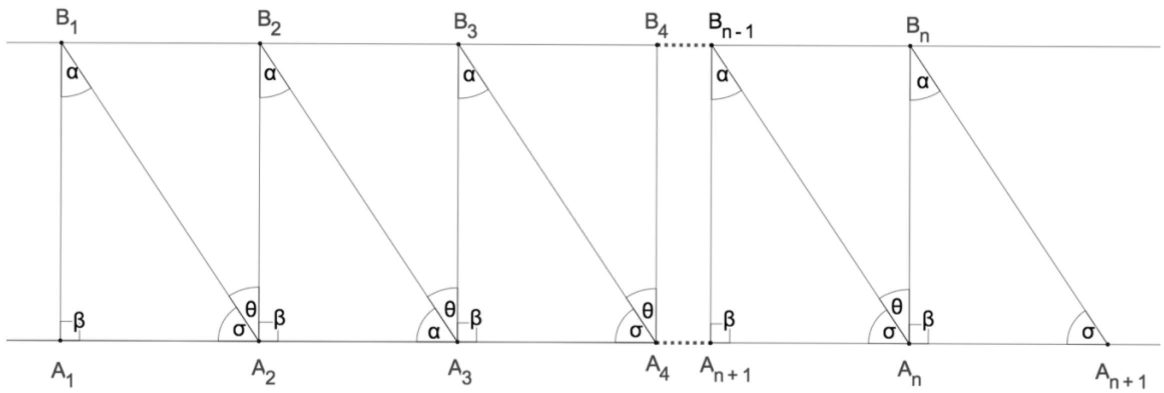

Figura 11.

Hipótesis del Angulo Obtuso. No existe paralela alguna por un punto exterior a una recta dada. En la figura 11, sobre la recta *l* se marcan los puntos $A_1, A_2, A_3 \dots A_n$, tales que todos los segmentos A_iA_{i+1} sean congruentes y construimos triángulos, de manera que $\Delta A_iA_{i+1}B_i$ también sean congruentes, entonces los triángulos $\Delta B_{i-1}A_iB_i$ resultan congruentes, porque tienen dos lados iguales e igual ángulo comprendido, ya que en todos los casos $\beta + \sigma + \theta = 180^{\circ}$ por formar un ángulo llano.

Bajo la hipótesis de que no existe paralela alguna por un punto exterior a una recta, la suma de los ángulos de un triángulo es mayor que 180° en ese sentido: $\beta + \alpha + \sigma > 180^{\circ}$, se deduce que : $\alpha > \theta$, entonces por la proposición XVIII de *Elementos* (en cualquier triángulo, el ángulo mayor subtiende al lado mayor), tenemos que el segmento A_1A_2 resulta mayor que el segmento B_1B_2 aplicando la proposición XX de *Elementos* (en cualquier triángulo, la suma de dos de sus lados exceden al tercero)

Entonces $A_1B_1 + n(B_1B_2) + A_{n+1}B_{n+1} > n(A_1A_2)$, y en consecuencia $2A_1B_1 > n(A_1A_2 - B_1B_2)$. Como *n* puede ser cualquier número natural, resulta que no es valido el postulado de Arquímedes (*para cualesquiera dos longitudes a y b existe siempre un numero natural n tal que* $a < nb$). Es este punto Saccheri creyó haber conseguido una contradicción , pues en este caso las rectas resultan tener longitud finita (Ramirez & Sierra, 2000).

hipótesis del ángulo agudo. existe más de una paralela por un punto P exterior a una recta *r.* Si consideramos todas las rectas que pasan por *P* (haz de rectas por *P*), obtenemos que existen dos rectas, *Figura 12* (en términos más exactos, rectas asintóticas a *r*) representadas por *m* y *n*, que dividen el haz en dos partes y cada parte delimitado por *m* y *n*; de manera que en una región se encuentran todas las rectas que cortan a *r* y en otra, todas las que no cortan a *r*.

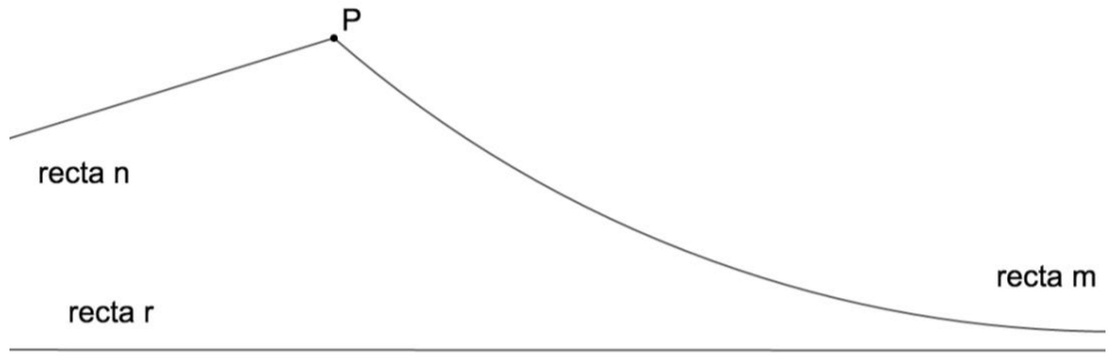

Figura 12.

La geometría resultante al considerar la hipótesis del Angulo agudo, se conoce en la actualidad como geometría hiperbólica. En la figura 12, puede observase un par de rectas torcidas, no porque así sea su representación en la realidad, sino más bien para ofrecer una visión de ellas que no se preste a confusiones con la geometría euclidiana. Básicamente, lo que sugiere la imagen es que las rectas *m* y *n* son asintóticas, pero en realidad se les llaman paralelas con un punto común al infinito. En el trabajo realizado por Saccheri se hallan los primeros resultados de una geometría alternativa a la euclídea, estos resultados fueron realmente formidables, pero faltó osadía. Ante la rareza de los resultados, él mismo comentó: la hipótesis del ángulo agudo es completamente falsa, porque es repugnante a la naturaleza de la recta. Dejando abierto nuevamente el problema de las paralelas.

Otro de los precursores de esta geometría fue Lambert (1728-1777), a través de su obra titulada "*La teoría de las paralelas",* en ella se plasmaba su duda sobre si el quinto postulado se podía deducir de los demás o si, por el contrario, era necesario para este propósito alguna hipótesis adicional. En la parte final de su obra consideró distintos cuadriláteros con tres ángulos rectos *A, B* y *D* y finalmente encontró de nuevo las tres hipótesis posibles respecto al cuarto ángulo. El cuadrilátero de Lambert es aquel que dados los ángulos *A, B, D* rectos, con *AB* y *DC* perpendiculares a *AD*, siendo el ángulo *C* distinto de 90°.

Los resultados obtenidos por Saccheri y Lambert, nunca encontraron una prueba irrefutable de la imposibilidad de demostrar el V postulado, los reiterativos intentos terminaban regresando siempre al punto de partida y en el camino solo encontraban enunciados de aspecto desagradable. Finalmente, y como en otros casos, el problema radicaba en que todos los intentos utilizaban de forma encubierta el resultado que se quería mostrar como menciona (Gómez, 2010).

4.2.1. Nuevas concepciones acerca del espacio físico

Hasta este punto lo que la historia nos presenta, es un desligamiento inconsciente de la ontología de los objetos geométricos a favor de la estructura lógica del sistema hipotético-deductivo; decimos que es un acto inconsciente porque justamente a causa de las convicciones de entonces hacia la naturaleza del espacio, se empezó un camino hacia la demostración por la vía del absurdo, con la intención clara de conseguir una contradicción que permitiera finalmente la veracidad de la geometría. Este hecho nos deja ver un nuevo punto de vista en el que ahora la lógica geométrica impone pautas a la ontología de los objetos, aunque sea justamente para estar de acuerdo con esta. Este camino apenas permite visualizar algunas cuestiones escandalosas desde lo lógico, pero fuertemente ligado a lo físico. Esto se debe a que, por más de 20 siglos la geometría euclidiana se comportó como el modelo ideal de explicación racional de la realidad, con Descartes por ejemplo la geometría de las coordenadas reforzó el poder absoluto de este modelo, y con Kant se catalogó a la geometría euclidiana como necesaria y, además, única posible. Resulta natural entender la imposibilidad para ver las implicaciones producto de la negación del quinto postulado, ya que esto era aceptar el derrumbe del sistema euclidiano como verdades que reflejaban consistentemente la realidad.

La comunidad científica europea del siglo XIX presentó siempre una actitud reservada y conservadora frente a la recepción de nuevos enfoques geométricos; era natural encontrarse con todo tipo de comentarios en rechazo ante cualquier cambio que pusiera en peligro el estatuto de la geometría euclidiana; sin embargo, personajes históricos como Gauss y Lobavhevski habían planteado ya suficientes dudas acerca de la naturaleza a priori del espacio. Para Gauss, la geometría debía practicarse con un enfoque no apriorístico y verla como una ciencia en la cual la experiencia era de suma necesidad. En una carta a un colega suyo señala lo siguiente:

> Cada vez estoy más convencido de que no se puede demostrar únicamente por medio del razonamiento la necesidad de la geometría euclidiana. Es posible que en el futuro podamos tener ideas sobre la naturaleza del espacio que hoy nos son inaccesibles. Así, la geometría no puede colocarse del lado de la aritmética cuya naturaleza es a priori, sino más bien del lado de la mecánica.

La concepción kantiana sobre lo a priori del espacio predominó sensiblemente entre los filósofos del siglo XIX, de tal manera que distintos autores afirman que Gauss no se atreve a publicar ningún resultado acerca de las geometrías no euclidianas y el espacio, por temor a la crítica. El comentario anterior permite ver un enfrentamiento entre Gauss y las concepciones Kantianas, pero, por otro lado, deja ver un acercamiento a la posición de Newton frente a la geometría, quien afirma que ésta tiene una relación estrecha con las experiencias, haciéndola parte fundamental de la mecánica universal. En una carta de Gauss a Bessel en enero de 1829, afirma:

> Debemos confesar humildemente que, si el número es exclusivamente un producto del espíritu, el espacio posee además una realidad por fuera del espíritu, realidad donde nosotros no podemos dictar a priori las leyes.

Las ideas de Gauss permitieron un camino de transformación sucesivo en la concepción kantiana del espacio, que en ese entonces era dominante. Esta concepción afirma un carácter a priori del espacio, negando cualquier relación de este con la experiencia. Frente a esta corriente personajes de la ciencia, como Lobachevski, defendieron con pocos argumentos, una acusación difícil de sostener en ese entonces, afirmando que la geometría euclidiana no es la única que explica toda la realidad; además, le confiere a la experimentación el poder de decidir cuál geometría corresponde mejor a la realidad. Él toma una posición bastante clara en contra de las concepciones a priori y postula el origen empírico de la geometría, y esto lo lleva a interpretar la verdad como una correspondencia entre geometría y realidad a través de la experimentación. Es decir que él reconoce el origen de la geometría desde la experiencia y ésta le da su valor de verdad. Hasta entonces la geometría euclidiana se consideraba como un conocimiento a priori e independiente de la realidad, pero a su vez, la única con la capacidad de explicar dicha realidad. Aceptar la idea de Lobachevski implicaba, particularmente, reconocer que la geometría euclidiana podía verse reemplazada, si los datos experimentales comprobaban que otra explicaba con mayor exactitud la realidad.

A través de la obra *"Critica de la razón pura",* Kant plantea de forma implícita la existencia y diferencia entre dos tipos de espacio: espacio geométrico y espacio representativo. Se refiere al espacio geométrico, como un concepto ideal imposible de conocer, lo llama "la cosa en sí", mientras que la representación del espacio es la imagen que nos formamos del espacio haciendo referencia a "la cosa para mí". Entonces, ofrece dos pruebas acerca de lo a priori del espacio, primero, para que algunas sensaciones se refieran a algo fuera de mí, es decir, a algo que se encuentra en un lugar del espacio distinto al mío, es necesario tener la representación del espacio; por lo tanto, la representación del espacio no puede ser adquirida por otra experiencia externa. Al contrario, esta experiencia solo es posible gracias a una previa representación de espacio. Por otro lado, Kant sostiene que el espacio es una representación a priori y necesaria para toda intuición y percepción de algún fenómeno. Es decir que el espacio es la condición fundamental que posibilita los fenómenos y no una determinación dependiente de ellos.

Posteriormente, Kant prueba que el espacio es una intuición pura y no un concepto del discurso, argumenta que solo es posible representarse un único espacio; por lo tanto, al hablar de distintos espacios, debe ser entendida esta diversidad de espacios como partes de uno solo, siendo este espacio exclusivo que todo lo abarca, una intuición a priori. En ese sentido, afirma que todos tenemos necesariamente la misma representación del espacio y que este espacio que podemos conocer y percibimos, no es más que el espacio euclidiano y es el mismo para todos.

Posteriormente, aparece Poincaré, con su visión acerca de la diferencia entre el espacio geométrico y espacio representativo. El espacio geométrico constituye el objeto de la geometría y se caracteriza por las siguientes propiedades: es continuo, infinito, tiene tres dimensiones, es homogéneo (es decir que todos sus puntos son idénticos entre sí) e isótopo (es decir que todas las rectas que pasan por un punto son idénticas entre sí); por otro lado, el espacio representativo, lo considera como el marco de nuestras representaciones y sensaciones, conformado por el espacio visual, espacio táctil y espacio motriz, siendo de esa triple forma, esencialmente distinto del espacio geométrico y nuestras representaciones solo una reproducción de nuestras sensaciones; en ese sentido, la imagen que nos formamos del espacio geométrico a través de los sentidos, no necesariamente refleja las características intrínsecas del espacio representativo con respecto al geométrico. Él propone concebir un mundo encerrado en una esfera y sometido a unas condiciones físicas que harían que cualquier habitante suyo creyera que vive en un mundo no euclidiano, cuando en realidad está inmerso en un espacio euclidiano. El espacio geométrico, en este casi euclidiano, no se impone al espacio representativo (Arboleda & Anacona, 1994).

4.2.2. La consolidación de las Geometrías no euclidianas y otras estructuras abstractas.

Los inútiles esfuerzos e investigaciones infructuosas sobre el V postulado, por más de veinte siglos, condujeron a muchos geómetras de principios del siglo XIX, a convencerse de que organizar completamente la geometría bajo las condiciones impuestas por Euclides, constituye un problema irresoluble. Sin embargo, el interés siempre se mantuvo vivo por el problema y sin dejar descansar a ninguno que se haya interesado por él; finalmente, aparecen nuevos sistemas geométricos. La primera de las geometrías no euclídeas fue la geometría hiperbólica, que resulta de sustituir el quinto postulado por una de las negaciones de Saccheri *“por un punto P exterior a una recta dada, pasa más de una recta paralela a la recta dada”.*

Geometría hiperbólica

Los implicados en el desarrollo de esta geometría son Lobachevski y Bolyai, ambos comparten la autoría como precursores en este campo, pero cabe resaltar que cada uno, desconocía el trabajo del otro, cada uno con implicaciones distintas; por ejemplo, Lobachevski escribe su obra en ruso y en consecuencia las repercusiones de este se ven reflejadas años después de su muerte, pero también terminan obteniendo el reconocimiento como los matemáticos más destacados en esta primera geometría no euclidiana.

En el trabajo de János Bolyai, Carl Frederich Gauss juega un papel importante, se sabe que él tuvo algunas tensiones filosóficas con las posturas de Kant en referencia a la admisión de nuevas teorías Geométricas, siendo probablemente Gauss el primero en intuir la realidad de una geometría distinta a la tradicional. En sus cuadernos de notas se puede leer el comentario:

> Estoy convencido de que prescindir del postulado de las paralelas no lleva a ninguna contradicción, aunque se obtengan propiedades que resulten paradójicas.

Durante más de cuarenta años, Gauss estudio el postulado de las paralelas sin mostrar a nadie sus resultados y guardando cuidadosamente la información en secreto. La documentación más importante para avalar sus resultados se obtiene de la correspondencia que mantuvo con la familia Bolyai y comentarios de sus notas personales. Gauss era gran amigo de Farkas Bolyai, padre de János y ambos mantuvieron correspondencia en temas relacionados al quinto postulado sin éxito alguno. A partir de la experiencia y trabajos recopilados con Gauss, Farkas aconseja a János de no perder una sola hora en ese problema, y, como buen hijo obediente, no trabajó una sola hora sino dos años.

En 1832, en una de sus comunicaciones con Guss, Farkas manifiesta una gran preocupación referente a la obsesión de su hijo. A la vez le pedía su consejo y opinión para convencer a János de que desertara. Gauss respondió que él mismo había llegado a resultados similares, pero que hasta el momento los había silenciado. Pero no podía elogiar a János ni impulsarle a desistir como se menciona a continuación en sus líneas:

> Si comienzo por decir que no soy capaz de admirar este trabajo, seguramente te sorprenderá por un momento. Pero no puedo decir otra cosa. Si lo admirara, sería admirarme a mí mismo. En efecto, todos los contenidos del trabajo, el camino tomado por tu hijo, los resultados a los que es conducido, coinciden casi por completo con mis meditaciones, que han ocupado mi mente parte de los últimos 30 o 35 años. A mí me dejó bastante estupefacto…

En el momento en que János se encontraba en el punto de máxima obsesión, su padre escribe las siguientes líneas:

> Te ruego que no intentes, tú también luchas contra la teoría de las líneas paralelas. Perderías el tiempo y los teoremas quedarían sin demostrar. Estas impenetrables tinieblas pueden derribar a miles de torres como Newton, nunca se aclarará en la tierra, y el desdichado género humano nunca poseerá en el mundo nada completo, ni aún en la geometría. Esto constituye una grave y eterna herida en mi alma… por amor de Dios te lo ruego, olvídalo. Témelo como a las pasiones sensuales, porque lo mismo que ellas, pueden llegar a absorber todo tu cuerpo y privarte de tu salud, de la paz del espíritu y de la felicidad de la vida…

A pesar de las recomendaciones de su padre y el tono en que las hace, János nunca llegó a atenderlas y pronto llegaría a convencerse, que el quinto postulado además de ser indemostrable era completamente independiente a los demás y que a través de su negación podía crearse un sistema diferente y geométricamente consistente (Gómez, 2010).

Dentro de los logros más importantes y además comunes entre Lobachevski y Bolyai, están: que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es menor a 180˚ y, que no todos los triángulos tienen la misma suma angular. Dicha suma está en función del área del triángulo, cuanto mayor sea el área del triángulo, menor será la suma de sus ángulos. Y en ese sentido, no existen triángulos semejantes, pero si los ángulos tienen la misma medida, entonces los triángulos son congruentes. Tampoco existen los rectángulos en el sentido euclidiano, debido a que si tres ángulos miden 90˚ el cuarto necesariamente debe ser medida menor ya que al dividir este supuesto rectángulo, en cada triángulo resultante, la suma angular debe ser menor que 180˚. Sin embargo, a pesar de sus similitudes, también se encuentran notables diferencias, en el caso de Bolyai, se dedica a distinguir las propiedades geométricas que requieren del quinto postulado, de aquellas que no. Mientras que Lobachevski, de manera más decidida niega de entrada el quito postulado y lo sustituye por el siguiente: *"por un punto exterior a una recta dada, pasa más de una paralela a dicha recta"*

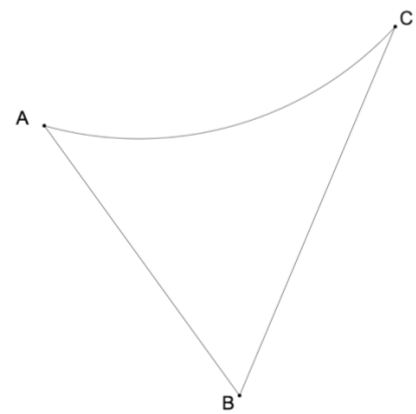

Figura 13. Aspecto de un triángulo no euclídeo en la geometría hiperbólica.

Un modelo que permite visualizar un poco mejor la geometría hiperbólica consiste en construir la superficie que permite interpretarla, tal como sucede en la geometría euclidiana, donde necesitamos un plano y nociones comunes para ubicar los objetos geométricos. Para construir una imagen mental del plano hiperbólico, imaginamos una persona transportando una maleta de viaje con ruedas, de manera que, si la persona se desplaza, la maleta lo hace con él y a la misma velocidad. La curva descrita por la persona es la de una recta y la de la maleta es una trayectoria curvada que se acerca cada vez más y más a la persona, en algunos entornos matemáticos esta curva se conoce cariñosamente como la curva del perro o formalmente como tractriz, pero la expresión matemática que la describe es un poco más técnica desde el punto de vista del lenguaje.

$$f(x) = -\sqrt{1-x^2} + \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$$

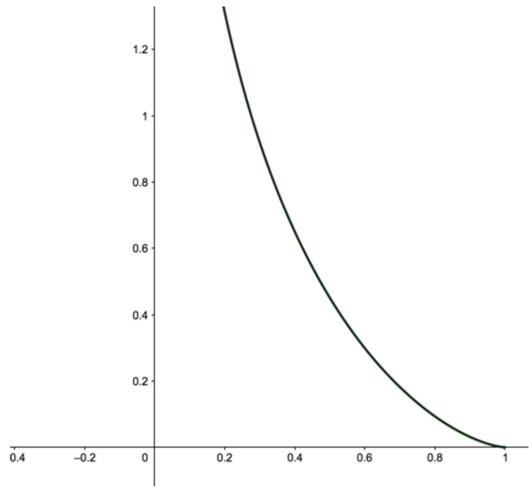

Figura 14. Curva tractriz.

En general, esta curva describe el movimiento de un objeto arrastrado por otro que se mantiene a distancia constante y se desplaza en línea recta, si rotamos esta curva alrededor del eje x obtenemos la superficie denominada pseudoesfera (ver figura 15). Esta superficie es uno de los modelos de la geometría hiperbólica, que es el resultado del estudio del comportamiento de figuras geométricas en este plano.

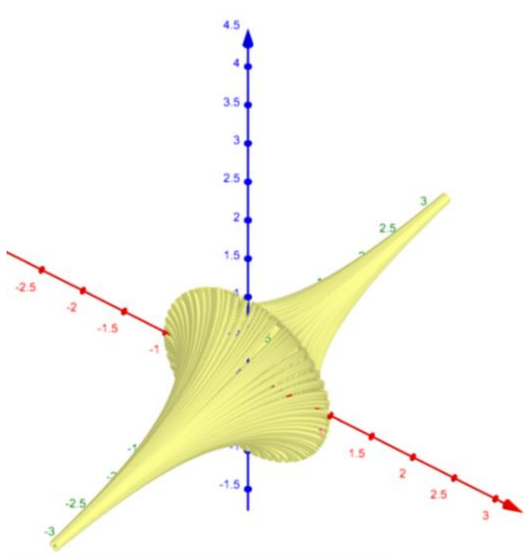

Figura 15. Superficie Pseudoesfera.

Por ejemplo, Lobachevski propone sustituir el quinto postulado por el siguiente: dadas una recta *l* y un punto *P* que no esté en *l*, un número infinito de rectas pueden ser trazados por *P,* que no cortan a *l*. En esta superficie, las rectas trazadas no son equidistantes en todos sus puntos, y la suma angular de un triángulo cualquiera siempre es menor que 180˚, siendo estos dos hechos los que más difieren de la geometría euclidiana.

Hay diferentes modelos de la geometría hiperbólica que pueden ser abstraídos de la realidad, por ejemplo, nos podíamos cuestionar si es posible dibujar una trayectoria en línea recta sobre la superficie de una trompeta, más específicamente sobre su campana. Si dos habitantes de este mundo hiperbólico siguen una trayectoria descendente en su superficie, la sensación para ellos es de estar caminando en línea recta, pero para un observador externo, digamos del mundo euclidiano sencillamente vería que se están separando. Este modelo hiperbólico fue propuesto por Einstein, para poder definir el espacio-tiempo, en donde existe la dimensión 4, las primeras tres corresponden a las usuales pero la cuarta se refiere al tiempo. Posteriormente, el matemático alemán Felix Klein (1849-1925), introduce otro modelo de geometría hiperbólica en el plano, dando un paso más allá en el espacio. En este modelo Klein introduce el circulo euclídeo, y propuso una nueva definición para los objetos primarios (punto, recta, paralelismo, etc). Al interior del círculo lo llamó plano y a punto todos aquellos que están en su interior excluyendo los del círculo mismo y denominó rectas a las cuerdas interiores del círculo, sin incluir los extremos. En ese sentido define paralelas a las cuerdas del círculo con un mismo extremo común y las secantes como las cuerdas que se cortan en el interior del círculo.

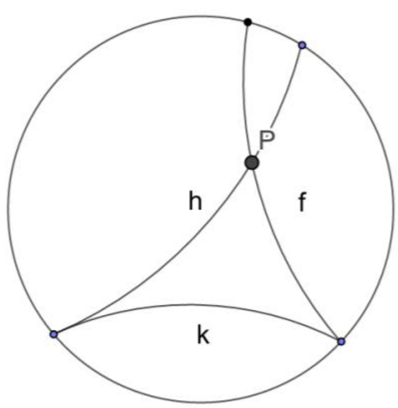

Figura 16a

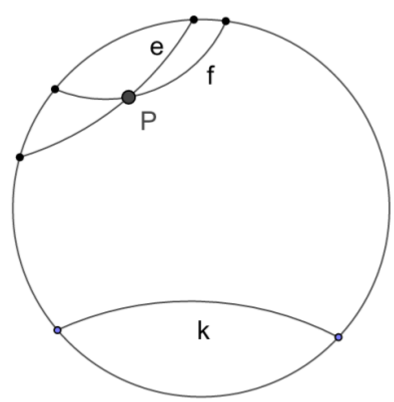

Figura 16b.

En la Figura 16a, se muestra como las rectas *h, f* son paralelas a *k* por el punto *P*, ya que no la cortan en ningún punto dentro de la circunferencia y además cada una tiene un punto común en el infinito. De manera que, por un punto exterior a una recta dada en esta clase de plano, pasan dos rectas llamadas paralelas y las rectas entre ellas, se llaman ultra paralelas. En la figura 16b, se muestra que existen infinitas rectas por un punto *P*, que no cortan a *k*, a estas rectas se les llaman divergentes. Las demostraciones de Klein concluyen que una geometría hecha con estas características equivale a la geometría hiperbólica, satisfaciendo todos los postulados de Euclides excepto el quinto (Gómez, 2010).

Geometría Elíptica

No es fácil mencionar todas las ideas y los implicados en el proceso de construcción de la geometría elíptica; en este proceso fue necesario construir, destruir plantear y replantear el rumbo para volver a empezar; dentro de esta dinámica podemos incluir los aportes de Claudio Ptolomeo, Proclo, John Wallis, por mencionar algunos de los que creyeron que el quinto postulado era completamente dependiente de los postulados anteriores. De los trabajos de Saccheri y de la hipótesis del ángulo obtuso, proviene la geometría elíptica. "*No existe paralela alguna por un punto P exterior a una recta m*".

La geometría elíptica ve la luz al poco tiempo de aparecer la geometría hiperbólica. Bernhard Riemann (1826-1866) miembro insigne de la academia de ciencias de Berlín, se cuenta de él que cuando era alumno de Gauss en la universidad de Gotinga, en cierta ocasión un profesor debía escoger un encargado del curso y para ello ideó una forma de elección, cada uno propondría tres temas de su propia elección, la facultad elegiría a uno de los tres, y él tendría que exponer por tres horas. Riemann escogió comentar sobre la obra de Lobachevski *Nuevos elementos de Geometría*, y en su exposición hizo su famosa afirmación:

> Euclides dice que por un punto exterior a una recta no es posible trazar más que una sola paralela; Lobachevski dice que se pueden trazar todas las que se quieran, y yo digo que no se puede trazar ninguna. Así como no existe la línea recta de forma indefinida, porque acaba por convertirse en curva, tampoco existe el plano recto, porque prolongado tiene que seguir la curvatura del universo. Pero como

la seguirá en todas las direcciones, el único plano curvo es el esférico. No hay más geometría que la que se traza sobre una esfera.

Esta presentación universitaria, ya contenía la esencia de la geometría de Riemann, una geometría que difiere de la de Euclides y la de Lobachevski. En esta geometría no existen las rectas paralelas y la suma angular de un triángulo es mayor a 180˚, el modelo usual para la representación de esta geometría es el plano esférico. En este modelo igual que en la geometría hiperbólica las rectas pasan a llamarse geodésicas, siendo los círculos máximos de la esfera, es decir, aquellas circunferencias que dividen la esfera en dos hemisferios completamente iguales. Las geodésicas de la esfera tienen varios inconvenientes que seguramente influyeron en que, antes de Riemann, se desechara como modelo de geometría resultante de la hipótesis del ángulo obtuso, por ejemplo, que dos círculos máximos o geodésicas se corten en dos puntos y no en uno solo, también ocurre que dos puntos de la esfera, si están muy alegados, determinan un número infinito de geodésicas como el polo norte y sur en la tierra. En el plano elíptico es posible medir longitudes de segmentos y el ángulo entre dos rectas. Los ángulos se miden de forma usual, euclidianamente, pero las distancias entre puntos se miden a lo largo de un círculo máximo que contiene a los dos puntos, y para que esta distancia esté bien definida se conviene medir el arco más corto de la recta que los contiene.

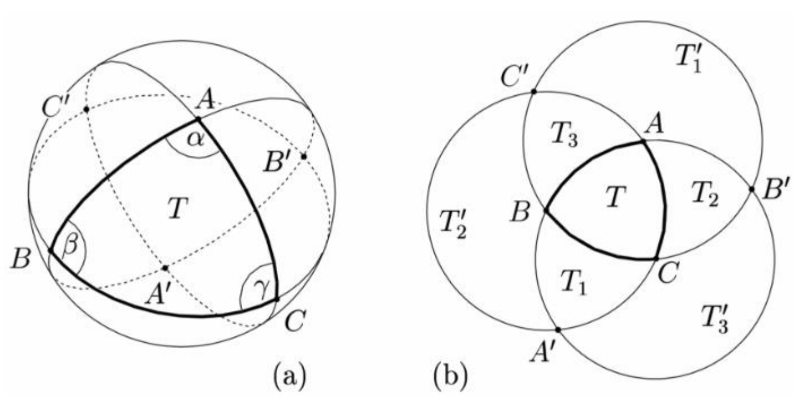

Figura 17. Un triángulo elíptico sobre la esfera (a) y desplegado (b).

En esta geometría cuanto menor es la suma angular, mayor es el área de un triángulo, y solamente son semejantes aquellos triángulos que son congruentes. Riemann no solo construyó la geometría elíptica, la genialidad de Riemann, radica en imaginar de forma general el espacio, su interés no estaba únicamente orientado a espacios de dos y tres dimensiones, sino en n-dimensiones, difíciles de visualizar, pero factibles de manipular matemáticamente, el objetivo era estudiar la geometría como espacios acotados y no acotados capaces de contener cualquier número de dimensiones, con un sistema de coordenadas y una métrica que define la menor distancia entre dos puntos infinitamente cercanos, pero relativa a un punto de localización en el espacio.

En 1868 Beltrami (1834-1900), con el uso de la geometría de Riemann, fue quien construyó la pseudoesfera y mostró que, en esta superficie, las geodésicas (rectas) cumplían los axiomas de la geometría hiperbólica, con la ayuda de la geometría interior de superficies, concepto introducido por Gauss, que se explica de la siguiente manera: "*es la parte de la geometría que se ocupa de las propiedades de las superficies y figuras sobre las mismas que dependen solamente de las longitudes de las curvas sobre la superficie*". Beltrami en su estudio demostró que existe en la pseudoesfera una métrica determinada, con la que es posible hacer la medición de las magnitudes de las líneas sobre ese plano, cuyas formas son análogas a las del plano euclidiano, pero en coordenadas Beltramianas, esto conduce directamente a la consistencia lógica entre la geometría hiperbólica y la euclidiana, pues cualquier contradicción que esta tuviese, estaría igualmente inmersa en la geometría euclidiana.

Estos resultados condujeron al estudio de la curvatura de los planos euclidiano, hiperbólico y elíptico, dando como resultado un esquema geométrico general, dependiente de una curvatura constante *k,* correspondiente a los casos: $k = 0, k < 0,$ y $k > 0$, donde una pequeña variación de *k,* hace pasar de un espacio esférico, a un espacio euclidiano o hiperbólico es decir, que se puede pasar de un plano donde por un punto exterior a una recta dada pasa una única paralela, a un plano donde por un punto exterior a una recta dada pasen infinitas rectas o ninguna. (Ruesga, 2004)

4.3. El papel de las geometrías no euclidianas en el contexto de la física

La aparición de las geometrías no euclidianas provocó un rápido brote de desarrollo en el campo geométrico, cuya intensión estaba dirigida únicamente a la actividad de medir y estudiar las formas; ahora, las fronteras de su estudio ya no tienen límites; en 1905, Albert Einstein publicó la teoría especial de la relatividad, que fue el primer paso en la revolución más importante que ha experimentado la física desde la culminación de la revolución científica de Newton. Einstein planteó una nueva forma de mirar la realidad. Uno de los hechos más impactantes de su teoría tiene que ver con la concepción espacio – tiempo como un solo ente con cuatro dimensiones y que constituye un hito en la historia de la física. En esa medida, la situación de un hecho espacio-tiempo depende de la posición del observador, es decir del origen y de la orientación del sistema de coordenadas que se utiliza para localizarlo. De esta manera, observadores diferentes ven los hechos de manera distinta, sobre todo si se mueven a diferentes velocidades.

Analizar estos conceptos en el plano geométrico resulta interesante. En la teoría de la relatividad, la distancia entre dos hechos se llama "intervalo" y se divide en dos segmentos, el espacio y el tiempo. El segmento que corresponde al espacio corresponde a la posición de los hechos en el espacio tridimensional y el del tiempo, corresponde al tiempo que separa a ambos hechos. Esta partición depende del sistema de coordenadas y de su orientación, de manera que distintos observadores pueden obtener resultados diferentes; sin embargo, el intervalo como es un ente que une los dos hechos en el espacio-tiempo de cuatro dimensiones, es absoluto, de manera que resulta ser el mismo para un observador quieto que para un observador que viaja a velocidad constante con respecto al que está quieto.

Una década más tarde de la Teoría Especial de la Relatividad, Einstein publicó la Teoría General, y volvió a maravillar la atención del mundo científico. Entre sus conceptos revolucionarios estaba la idea de que el espacio es curvo. El significado exacto de esta polémica afirmación es que los rayos de luz que viajan siempre por el camino de la mínima distancia, no siguen líneas rectas sino que se arquean, buscando la distancia más corta en el espacio curvo, estos rayos de luz se arquean en diferente grado, según el espacio en el que se encuentren y a través de un campo gravitacional muy fuerte.

El modelo que desarrolla Einstein para explicar la atracción gravitacional difiere del de Newton al afirmar que esto no es un problema de acción a distancia, sino un problema netamente geométrico; para Einstein la materia modifica las posibles trayectorias sobre las cuales se puede mover una masa de prueba, debido a la presencia en su vecindad de otras masas. El concepto Riemanniano de tensor métrico (utilizado para definir conceptos métricos como: distancia, ángulo, volumen en un espacio euclídeo) dependiente de la masa, resulta sustancialmente útil al describir la posibilidad que tiene la materia de modificar las trayectorias. Con lo cual la geometría elíptica de Riemann se convierte en la más adecuada para describir el espacio. Ahora, si en el modelo hay ausencia de masa, las propiedades del tensor métrico conllevan a que la distancia entre dos puntos corresponda nuevamente a la geometría euclidiana y con esto la teoría de Einstein la deja como un caso particular de la geometría de Riemann.

El mérito de Riemann con respecto al desarrollo de las ideas de Einstein es enorme, el atrevimiento que tuvo al crear una geometría, asombrosamente, más general, en la cual la euclídea es solo un caso particular y valido en lo infinitamente pequeño de nuestro mundo con respecto al universo. Albert Einstein hace un homenaje a estas geometrías no euclidianas en una famosa conferencia en 1921: "*doy mucha importancia a estas interpretaciones de la geometría; si no las hubiera conocido, nunca habría sido capaz de desarrollar la teoría de la relatividad"*

Posteriormente, gracias a los trabajos de Einstein, aparece la cosmología relativista, como disciplina enfocada en la evolución del universo en expansión; esta teoría describe la interacción gravitatoria a cualquier escala, como fuerza que domina la evolución del universo, esencialmente busca soluciones a cuestiones cosmológicas, como la edad del universo, expansión y velocidad del mismo etc. Las afirmaciones de esta teoría explican, básicamente, que la tierra no ocupa un lugar privilegiado en el universo, de hecho, el universo se considera homogéneo (es decir, igual a cualquier escala e invariante a traslaciones) e isótropo (igual en cualquier dirección e invariante frente a las rotaciones). Hoy en día, debido a observaciones a distintas escalas, es posible validar varios de estos hechos, que en principio eran netamente teóricos (Gómez, 2010).

5. ALGUNAS CUESTIONES Y CONSIDERACIONES FINALES

Inicialmente, hemos visto cómo diferentes hechos hicieron que por muchos siglos la geometría euclidiana fuera considerada como absoluta o única, esto desde la compatibilidad y correspondencia que ofrecía con diferentes hechos físicos. Es importante recordar que fue concebida inicialmente como ciencia empírica, basada en estudios realizados a partir de observaciones y experimentaciones, cuyas relaciones se fueron generalizando al punto de alcanzar una aparente independencia de los fenómenos físicos.

El proceso de generalizar estas relaciones lleva a filósofos griegos a definir concepciones en torno a la naturaleza de los objetos geométricos y el espacio en el cual habitan, de manera que conceptos como espacio ideal (mundo de las formas), espacio sensible y espacio absoluto, aparecen constantemente en las posturas filosóficas, con el fin de encontrar una correspondencia entre la naturaleza de los objetos y la manera en como son definidos. Algunos de estos conceptos, como punto recta, plano, fueron calificados como verdades evidentes, cuya naturaleza no provenía exactamente de la experiencia o procesos lógicos, pero sí, de relaciones directas con hechos reales, como es el caso del paralelismo, de manera que la condición de "verdad evidente" pone a la geometría en una posición indeseada, debido a que no es tan simple validar el paralelismo en un espacio geométrico ni en el espacio físico, todo lo que aparentemente se sabe del paralelismo, es dictado por la intuición haciendo que el objeto quede controlado ontológicamente. Decir que, por un punto exterior a una recta pasa una única recta paralela, equivale a una imposición de límites de naturaleza física a objetos de carácter matemático.

Por muchos siglos la actividad geométrica se enfocó en la solución del problema del V postulado, solución que se buscó siempre por la vía de la lógica. Paradójicamente, el hecho de no poder concebir una idea distinta del paralelismo, sesgada por las experiencias de los sentidos, hizo que la geometría se mantuviera siempre en la esfera del empirismo y no como ciencia estrictamente lógica, de modo que, el problema no tenía que ver con la forma en que estaba formulado o con el sistema lógico deductivo y la organización establecida con respecto a los teoremas, el problema resultaba del tipo ontológico, relacionado con la naturaleza del objeto y su independencia de las concepciones de espacio físico. Por ejemplo, el hecho de tan solo imaginar que, por un punto exterior a una recta dada, exista más de una paralela, presentaba un problema inmediato de adaptabilidad de los fundamentos geométricos, con objetos de la realidad. Lo curioso, es que es la lógica misma quien muestra nuevos caminos, la vía del absurdo es quien obliga a contemplar nuevas miradas. De acuerdo con esto, aparece un abandono inconsciente del control ontológico del paralelismo, ya que el propósito fue encontrar una estrategia diferente por medio de la demostración, pero en favor de la convicción sobre naturaleza euclidiana del espacio,

Los hechos físicos y relaciones con el espacio, como forma de validar la geometría Euclidiana dan lugar a la postura Kantiana del espacio, postura que se erigió formidablemente como obstáculo a los desarrollos geométricos, pero que una vez superados, hizo posible acceder a un nivel conceptual jamás alcanzado antes. Kant tiene un concepto ideal (en el sentido platónico) acerca del espacio, espacio como el lugar donde habitan la esencia y la verdadera forma de los objetos y en consecuencia imposible de conocer por completo, en virtud de ello nuestro conocimiento del mundo no es una representación de ese espacio, sino una interpretación producto de nuestras percepciones y organizadas por nuestro intelecto. Esto no quiere decir que la geometría euclidiana se encuentra subordinada a la naturaleza de los objetos, es decir que existan objetos naturales cuyas propiedades correspondan exactamente a los conceptos fundamentales de la geometría, debe suceder lo contrario, puesto que las leyes de los hechos físicos no pueden ser expresados sin la geometría y en ese sentido las leyes de la geometría preceden cualquier hecho experimental en el espacio sensible.

Vale la pena retomar algunas cuestiones que surgieron al comenzar este trabajo: ¿qué es entonces el espacio geométrico? Pues bien, como se menciona en el primer capítulo, los objetos y proposiciones de *Elementos*, responden a la naturaleza de la teoría de las formas de Platón, llamando espacio ideal, al lugar donde habitan estos objetos, están allí como ideas y solo es posible acceder ellas por medio de la lógica, en ese sentido la concepción del espacio geométrico no admite discusión a lo largo de la historia, vemos que por ejemplo con las nuevas formas de geometría, el espacio geométrico sigue siendo el mismo, pero ahora, solo el conjunto de todas las características del objeto en cada geometría, lo hacen el objeto en sí, y en muchos casos es imposible abarcar una sola representación del mismo en el espacio físico, como es el caso del paralelismo. Cosa distinta sucede con el triángulo; inicialmente, el triángulo euclidiano fue dotado de ciertas características, categorizado de diferentes formas y sin inconvenientes al momento de ser representado en el espacio físico, pero resultó que no es la única forma de triángulo existente; con las nuevas geometrías, se abrió un amplio camino a concepciones distintas del mismo, cuyas representaciones en el mundo físico dependen de los sentidos y además de planos especialmente particulares, sin olvidar que estas representaciones son solo aproximaciones, y estas, no son el objeto.

Es válido preguntarse entonces ¿qué sucede con el espacio físico y como se define en otras teorías geométricas? Hablar de espacio físico nos lleva a retomar las concepciones clásicas que hacían referencia a este, espacio como la ausencia de…, relacionado con la continuidad, en el sentido de las posibilidades que tenemos para ocuparlo y movernos en él. Hay que destacar que a lo largo de la historia y en distintas culturas se ha hecho énfasis en distinguir el espacio físico en el que habitamos, del espacio exterior, que como dijo Aristóteles, es un espacio desconocido e inaccesible por medio de los sentidos y gobernado por leyes distintas.

La aparición de nuevas teorías, cuya consistencia es sustentada por la lógica, y a quienes se les otorgaban iguales derechos de llamarse geometrías, conlleva una serie de cuestionamientos en el campo de la física y justamente en relación con el espacio. No hubo discusión en términos de la importancia de la geometría euclidiana en la física clásica a la hora de formular cuestiones como las leyes de Kepler, el método de paralaje para la medición de distancias cósmicas, y la descripción del comportamiento de la luz cuando se refracta, cuestiones de las que se hace uso necesario del concepto euclidiano de paralelismo, pero se hacía necesario pensar sí realmente la geometría euclidiana dotaba de fundamento a la física y no otra. A pesar de la riqueza matemática de las geometrías no euclidianas, su punto débil era la pobre relación físico-geométrica que la caracterizaba en sus inicios, situación que, al menos desde la geometría elíptica de Riemann, fue cambiando con Einstein y la teoría de la relatividad general, donde la geometría de Riemann se ajusta más al modelo de espacio físico, visto de modo general (universal) y no local. El modelo de la esfera y su semejanza con la tierra hacen que este sea un espacio físico en el cual las relaciones y propiedades de la geometría de Riemann pueden validarse.

Pasemos a otro de los interrogantes iniciales, ¿cómo se concibe el concepto de espacio de manera que las nuevas teorías no sean contradictorias? El concepto de espacio es completamente independientes de la actividad geométrica, el problema de la no contradicción está en otra dirección, la no contradicción implica la necesidad de demostrar con el mayor rigor posible todo el desarrollo de las geometrías en cuestión y al final concluir que ningún resultado conduce a una contradicción, el inconveniente con esto, es que tales geometrías se encontraban apenas en desarrollo, de manera que el camino más corto fue el propuesto por Beltrami, y sus estudios correspondientes a la curvatura de los planos de cada geometría, concluyendo como se mencionó antes, que si la geometría hiperbólica fuese contradictoria, entonces también lo sería la geometría euclidiana, en ese sentido la no contradicción implica también una relación entre los espacios geométricos de cada una de las geometrías.

Revisemos el siguiente, ¿cómo es la relación entre los espacios (geométrico y físico) en las otras geometrías? No hay mucho que discutir que no se haya dicho en términos de la relación entre los espacios geométrico y físico en el ámbito de la geometría euclidiana, pero sí es importante mencionar que en las geometrías no euclidianas, las relaciones se reducen a casos particulares: por ejemplo, luego de la aparición de algunos conceptos propios de la geometría hiperbólica surge un afán por desarrollar paralelamente modelos de superficies que permitan su interpretación, como el caso de la pseudoesfera y la silla de montar, es decir que a diferencia de la geometría euclidiana, cuyo espacio geométrico surge y se corresponde de manera natural con el espacio físico donde habitamos, la geometría hiperbólica tiene que buscarlo y en muchos casos, forzarlo a través de artimañas matemáticas, otro caso particular es el de la teoría de la relatividad general, desarrollada en el marco de la geometría elíptica y conceptos de Riemann, en ella se desarrolla una mecánica distinta a la newtoniana, una mecánica cósmica que está en función de la distancia y la superficie, es decir, dependiendo la métrica escogida para encontrar la distancia entre dos puntos, esta determina no solo el tipo de geometría sino también la forma de los objetos.

Consideremos otro, ¿Cómo han evolucionado las concepciones de espacio físico, y cuáles son las teorías geométricas que se necesitan para interpretarlas (modelarlas)? Puede decirse que la evolución en la idea de espacio físico ha estado ligada siempre a la evolución de la ciencia; inicialmente, los filósofos griegos decidieron ocuparse únicamente del espacio sublunar como ellos lo llamaban, básicamente porque era un espacio asequible a los sentidos, caracterizado por las formas euclidianas y aparentemente invariable, un espacio que articula resultados de experimentaciones en el campo de la física con generalidades geométricas, no era posible imaginarse un espacio distinto, porque entonces era necesario imaginarse una física distinta.

Hasta antes que se formulara la teoría de la relatividad se creía que el rayo de luz tenía una trayectoria rectilínea y aun hoy, la geometría euclidiana se usa como referente en el desarrollo de conceptos de la mecánica clásica. Es solo con la aparición de las nuevas geometrías que es posible modelar situaciones que implican el espacio al que no tenemos acceso, es decir que, por primera vez es posible formular ideas acerca del espacio sin tener en cuenta las experimentaciones que involucran los sentidos, por ejemplo, el estudio de la curvatura condujo a una evolución en la concepción del universo.

Resultados en torno a los estudios de Einstein señalan que el universo se encuentra en una constante expansión y la velocidad a la cual este se expande está en función de la materia que contiene y la curvatura del espacio, de manera que, si se revisan los casos para una curvatura nula, positiva o negativa, estos determinan características distintas acerca de cómo es el espacio, de modo que caracterizar el espacio físico exterior es posible solo por medio de las geometrías no euclidianas.

Para finalizar, resulta adecuado resaltar que no es un misterio para nadie la impopularidad de las geometrías no euclidianas en la actualidad (refiriéndome al su estudio dentro del currículo), esta impopularidad puede adjudicarse a cuestiones analíticas, algebraicas y semióticas que finalmente son necesarias para un desarrollo óptimo, pero que no son nada fáciles desde el punto de vista didáctico; si bien es cierto que estos asuntos requieren una formación en campos específicos y distintos cursos para estar al tanto de su actualidad, otros aspectos fundamentales como la noción de espacio geométrico y físico en otras teorías no requieren más que algunos conceptos básicos de la geometría euclidiana. De acuerdo con esto, considero que una formación integral en geometría implica estar al tanto de estos aspectos que son esenciales en cada una de las teorías. El título de este trabajo sugiere justamente eso, el espacio físico-geométrico no es exclusivo de la geometría euclidiana, la historia nos ha mostrado que el ejercicio de desprender los conceptos matemáticos de la influencia cultural, social y euclidiana acerca del espacio, abre las puertas a un nivel superior en términos científicos, tecnológicos y sobretodo de nuevas formas de hacer matemáticas.

5.1. Conclusiones

El estudio del concepto de espacio en el ámbito geométrico permite concluir que:

- No existe una única geometría que se adapte a la realidad física, cada una tiene un campo de aplicación y un espacio propio en el cual validar resultados; esto implica que cada una tenga un lugar de investigación, por ejemplo, los resultados de la teoría de la relatividad general de Einstein dicen que las tres geometrías (euclidiana, hiperbólica y elíptica) son igual de válidas al momento de considerar distancias relativamente pequeñas, pero a pesar de ello, solo las geometrías no euclidianas permiten tratar problemas del espacio astronómico con mayor precisión.
- La geometría euclidiana en principio aparece con la necesidad de generalizar diferentes hechos extraídos de la realidad física, tal geometría era la única capaz de describir el espacio que nos rodea: los conceptos geométricos conocidos hasta hace pocos siglos, bastaban para tales explicaciones, lo cierto, es que los conceptos euclidianos que nos sirven para describir observaciones y experimentaciones relacionadas con nuestra cotidianidad, son de un dominio bastante limitado y en consecuencia, considerar este, como un modelo "único", nos impide conocer, entender, abstraer y proponer nuevas teorías, tanto en el campo de la física, como en el campo de las matemáticas.

El estudio del concepto de espacio físico-geométrico, desde un punto de vista epistémico nos permite concluir que:

- El problema del quinto postulado se desarrolla a través de los siglos en un campo netamente lógico, axiomático y matemático, sin embargo, su origen se relaciona directamente con la ontología del espacio: debido a la imposibilidad de concebir un paralelismo distinto al que se corresponde con la realidad.

El estudio de la relación entre el espacio y la geometría, desde un punto de vista filosófico, permite concluir que:

- Las geometrías no euclidianas propician un conjunto de circunstancias que intervienen en el replanteamiento de la filosofía del espacio, sembrando serias dudas sobre la veracidad de las matemáticas, como lenguaje que describe las leyes de la naturaleza.
- No es posible el desarrollo de nuevas matemáticas sin someter sus ideas a discusiones filosóficas.
- La concepción platónica del espacio es la única que se mantiene consistente en todas las geometrías, describiendo una realidad no sensible, existente de forma independiente de los actos y razonamientos humanos, pero que a su vez la razón es el medio de acceso, aunque probablemente de forma incompleta.

El estudio del espacio y su relación con la geometría, desde un punto de vista pedagógico permite concluir que:

- Es de resaltar la inclusión en aumento de las geometrías no euclidianas, al menos, en el currículo colombiano para la educación superior, esto implica que la geometría sea abordada como una ciencia de estudio con diferentes matices y campos, permitiendo que sus aplicaciones lleguen tan lejos como la capacidad de imaginación que tenga el ser humano. Ahora bien, no considero que el estudio de las geometrías no euclidianas deba estar sesgado a la educación superior, al contrario, la posibilidad de desarrollar trabajos de enseñanza en la educación media, permite que el individuo desarrolle de forma integral el sentido espacial, además, como consecuencia del estudio de otras geometrías es posible comprender el universo en el que vivimos y las leyes que lo gobiernan. En ese sentido, creo que es posible la enseñanza de nuevas teorías geométricas, a partir de la comparación de las distintas ideas de espacio físico, donde es posible validar resultados de cada teoría, además, desde lo axiomático es posible desarrollar resultados en otras geometrías, siguiendo procesos análogos que aparentemente eran propios de la geometría euclidiana.

El estudio del concepto de espacio físico-geométrico, desde un punto de vista socio cultural permite concluir que:

- Siempre que se ha dado una revolución científica en torno a la idea de espacio físico-geométrico, se ha visto marcada por momentos culturales y sociales específicos, es decir que la evolución del conocimiento no se da exclusivamente por factores académicos, la participación de la comunidad en actividades científicas se ve marcada no solo por la tradición y herencia de un pueblo, sino por factores económicos, políticos y religiosos que en muchos casos han estado ligados a una conciencia conjunta por el desarrollo.

6. BIBLIOGRAFÍA

Arboleda, L. C., & Anacona, M. (1994). Las geometrías no euclidianas en Colombia. Revista Latinoamericana de Historia de Las Ciencias y La Tecnología, 11(67), 7–24.

Bonola, R. (1945). Geometrias no euclidianas, exposición histórico-crítica de su desarrollo (primera ed). Buenos Aires: Espasa Calpe Argentina S.A.

Camejo, M. (2011). Elementos de Historia de la Ciencia, conceptos fundamentales de la teoría copernicana

Campos, A. (1994). Axiomática y geometría desde Euclides hasta Hilbert y Bourbaki. Bogotá.

Collette, J. P. (2006) Historia de las matemáticas, 4th edición.

Datri, E. (1992). La Geometría de Euclides y el espacio absoluto de Newton. Páginas de Filosofía, 24–32.

Diaz, J. (2002). Tales de Mileto. Apuntes de Historia de Las Matemáticas, 1(1), 13–18.

Dou, A. (1986). Euclides. Historia de Las Matemáica, 1, 61–78.

Espinosa, D. (2007). La educación griega y sus fuentes : aproximación a las épocas clásicas y helenísticas en Atenas, 2006–2007.

Filloy, E. (1976). La geometría y el método axiomático. Revista Matemática. Matemáticas y Enseñanza (2 ,) 7-14.

Gómez, J. (2010), Cuando las rectas se vuelven curvas, las geometrías no euclidianas.

Hacyan, S. (2004), física y metafísica del espacio y el tiempo. La filosofía en el laboratorio.

Heath, T. (1921). A History of Greek Mathematics.

HIcks, R. D. (1965), Diogenes Laertius: lives of eminent Philosophers, Massachusetts/ London, The Loeb Classical Library, Cambridge, Harvard University Press.

Jaeger, W. (2001). Paideia : Los ideales de la cultura griega (15th ed.).

Levi, B. (2006). Leyendo a Euclides (3rd ed.). Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Magno, D. A., & Aman, M. (2001). La antigua biblioteca de alejandría, (65), 30–37.

Marías, J. (1994). “Historia de la filosofía”. Alianza Universidad Textos.

Melogno, P., Rodríguez, P., & Fernández, S. (2011). Elementos de Historia de la Ciencia.

Moreno, L. (2002). La construcción del espacio geométrico, 1–68.

Pascual, L. (1999). Las otras Geometrías. La Historia de Las Matemáticas y Su Aplicación a La Docencia En Enseñanza Secundaria, 45.

Preaux, C. (1984). El mundo Helenístico, Barcelona, Labor, 2v.

Puertas, M. (1991). Euclides. Elementos. Libros I-IV.

Ramirez, A., & Sierra, G. (2000). Invitación a las Geometrías no Euclidianas.

Rey, A. (1962). El apogeo de la ciencia técnica griega.

Ruesga, P. (2004). Evolución de la Geometría desde su perspectiva histórica, XI(1), 85–101.

Santana M. (2011). Elementos de la Historia de la Ciencia, Ciencia y filosofía en la Edad Media: la disputa entre la Razón y la Fe.

Vega, L. (1991). Euclides. introduccion Elementos.