EL CONOCIMIENTO PROFESIONAL DEL PROFESORADO DE MATEMÁTICAS ASOCIADO A LA NOCIÓN DE NÚMERO ENTERO

ZAIDA MABEL ANGEL CUERVO

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE POSTGRADOS
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN
BOGOTÁ D.C.
2013

EL CONOCIMIENTO PROFESIONAL DEL PROFESORADO DE MATEMÁTICAS ASOCIADO A LA NOCIÓN DE NÚMERO ENTERO

ZAIDA MABEL ANGEL CUERVO

Tesis presentada como requisito parcial
para optar el título de Magíster en Educación

Doctor
GERARDO ANDRÉS PERAFÁN ECHEVERRI

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE POSTGRADOS
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN
BOGOTÁ D.C.
2013

Nota de aceptación

____

____

____

____
Presidente del Jurado

____
Jurado

____
Jurado

Ciudad y fecha (día, mes, año)________________________________

1.Información General	
Tipo de documento	Tesis de grado de maestría de investigación.
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Titulo del documento	El conocimiento del profesorado de matemáticas asociado a la noción de número entero.
Autor(es)	Zaida Mabel Angel Cuervo
Director	Gerardo André Perafán Echeverry
Publicación	Bogotá, 2013.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional
Palabras Claves	Conocimiento profesional, saberes académicos, saberes basados en la experiencia, teorías implícitas y guiones y rutinas.

2.Descripción
El presente trabajo se llevó a cabo a partir de un estudio de caso múltiple, en el cual se reconoce el conocimiento profesional específico que ha construido el profesorado de matemáticas, asociado a la noción de número entero. Lo anterior, identificando y caracterizando los cuatro saberes que integran el proceso de producción de la categoría número entero escolar. Con la colaboración de dos profesores de matemáticas de la localidad de Usme, quienes poseen una experiencia superior a 10 años en la enseñanza de las matemáticas, se observan sus clases durante la enseñanza de la noción, se les aplica entrevistas en torno a la misma y la técnica de estimulación del recuerdo.

3.Fuentes
Primarias: observaciones de clase, entrevistas a los docentes de matemáticas, técnica de estimulación del recuerdo. Secundarias: CHEVALLARD, Yves (1991). La Transposición Didáctica. Del Saber Sabio Al Saber Enseñado. Aique: Buenos Aires. ELBAZ, Freema (1983). Teacher Thinking: A study of practical knowledge. London: Croom Helm. (pag. 14-97) PERAFÁN, G. A. (2004). La Epistemología del profesor sobre su propio conocimiento profesional. Bogotá: UPN. PERAFAN, G. A. (2013). La transposición didáctica como estatuto epistemológico fundante de los saberes académicos del profesor. En Revista Folios. Número 27. Pp. 83-93. Bogotá: UPN. PERAFAN, G. A. (2013). El conocimiento profesional docente: caracterización, aspectos metodológicos y desarrollo. Aprobado para publicación en el libro: Estado de la enseñanza de las ciencias: 2000-2011. MEN-Universidad del Valle. 2013. PORLÁN, Rafael y RIVERO Ana (1998). El Conocimiento de los Profesores. Sevilla – España. Diada. SHULMAN, Lee (1986). “Paradigmas y Programas de Investigación en el Estudio de la Enseñanza La Investigación de la Enseñanza”. Merlín Witrock. En: La investigación de la Enseñanza I. España. Paidós. MEC SHULMAN, Lee (2005). Conocimiento y Enseñanza: Fundamentos de la Nueva Reforma. En: Profesorado. Revista de currículum y formación del profesorado. Volumen

9. No. 2. Pág 1-30

4.Contenidos
La investigación está organizada en cinco capítulos, el primer capítulo denominado presentación, evidencia las razones por las cuales se formuló esta investigación, los objetivos y la justificación. En el segundo capítulo se presenta el marco referencial, el cual gira alrededor de: la historia de la línea del pensamiento y el conocimiento del profesor, que contiene sus orígenes, enfoques y el autor en el que se soporta esta investigación. En el tercer capítulo se aborda la metodología, el enfoque en el que se enmarca este estudio, la descripción de los instrumentos utilizados en la investigación y la aplicación de éstos. En el cuarto capítulo se dan a conocer los aspectos que están presentes en cada uno de los saberes que integran el conocimiento del profesor respecto a la noción de número entero. En el último capítulo se presentan las conclusiones y recomendaciones de ésta investigación, además la bibliografía y los anexos.

5.Metodología
Esta investigación se desarrolló en cuatro fases, en la primera se construyó el problema, los objetivos y el marco referencial, en la segunda fase se identificaron y seleccionaron los instrumentos de recolección de información, en la tercera se realizó el trabajo de campo que consta de las observaciones de clase y la aplicación de los instrumentos construidos, y la cuarta hace referencia al análisis e interpretación de los datos a partir de la triangulación de las diferentes técnicas aplicadas.

6.Conclusiones
Al analizar la información recopilada en cada una de las técnicas utilizadas se identifican y caracterizan los diferentes aspectos que conforma cada uno de los saberes que integran el conocimiento profesional del profesorado de matemáticas frente a la noción de número entero. De manera que se reconoce que el conocimiento del profesorado está integrado y es complejo de acuerdo a su contexto escolar y a la cultura en la que está inmerso. Se ha podido constatar en este trabajo que, como lo ha planteado Perafán (2004, 2011 y 2012), el conocimiento profesional del profesorado es un conocimiento que educa, que es construido por ellos mismos y que responde a la intencionalidad de la enseñanza, diferenciándose del de la disciplina de la que proviene.

Elaborado por:	Zaida Mabel Angel Cuervo
Revisado por:	Gerardo Andrés Perafán. Director de Tesis.

Fecha de elaboración del Resumen:	03	05	2013

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE FIGURAS

EL CONOCIMIENTO PROFESIONAL DEL PROFESORADO DE MATEMÁTICAS ASOCIADO A LA NOCIÓN DE NÚMERO ENTERO

INTRODUCCIÓN

Latinoamérica, en la actualidad asiste a una crisis generalizada de orden económico, político y social, de la cual no es ajena la sociedad colombiana, ni el magisterio colombiano, situación que es tangible con la implantación y práctica del Decreto 1278 de 2002, que cambió tangencialmente las condiciones laborales de los docentes colombianos en la medida que se estableció la evaluación sancionatoria, la pérdida de beneficios pensionales, el ascenso al escalafón, y la posibilidad de nombrar como docentes a profesionales de otras áreas (médicos, ingenieros, abogados, etc.), entre otras.

Esta última condición es de resaltarse en la medida que favorece el no reconocimiento profesional de los docentes, por el contrario lo que se ha hecho es afirmar que la posibilidad de enseñar en las escuelas está abierta a profesionales de diferentes áreas, situación que se condiciona a poseer un conocimiento relacionado con las materias que se imparten en la escuela, por ejemplo el médico podría enseñar la química y/o la biología, el ingeniero la física y/o las matemáticas, y así con otros profesionales.

Situación que obliga a una reacción histórica que permita evidenciar la necesidad de legitimar la profesión docente, de reconocerle al maestro la existencia de un conocimiento que le es propio y que es diferente al de las disciplinas, y es en este punto en donde es importante hacer uso de la investigación como una herramienta para reconocer el lugar que ocupa el profesor como un profesional de la educación en nuestra sociedad.

Entonces surge la preocupación por demostrar que el profesorado de un área determinada, -en este caso matemáticas-, posee un conocimiento que le es propio frente a una noción particular, que ha ido construyendo a lo largo de su formación profesional, de su experiencia laboral, de la influencia que tiene el contexto institucional en su quehacer y de su propia historia de vida. Desde esta perspectiva, en esta investigación se pretendió identificar el conocimiento profesional que posee el profesorado de matemáticas frente a la noción de los números enteros ($\mathbb{Z}$), que es uno de los conceptos que se aborda en la escuela en el nivel de básica secundaria, además es el segundo conjunto numérico que trabajan formalmente los estudiantes y que les debe aportar bases sólidas para la comprensión de otros conjuntos numéricos que trabajarán durante el proceso de su formación en la matemática escolar.

Es así como esta noción debe estar a cargo de un profesional en la educación, específicamente de un profesional en matemáticas: el profesor de matemáticas, quien ha construido este concepto a partir de su formación profesional, de la transposición didáctica (Chevallard, 1991) que realiza de la lectura de libros de texto y libros de carácter científico, de la reflexión de la experiencia adquirida durante su ejercicio profesional y de la intencionalidad de enseñar la noción de número entero en la escuela.

En efecto para identificar este conocimiento profesional fue necesario recurrir a la investigación realizada por Perafán (2004) quien reconoce que el conocimiento del profesor se encuentra integrado por cuatro saberes que son los saberes académicos, los saberes basados en la experiencia, las teorías implícitas y los guiones rutinas, saberes que están siempre presentes en el discurso del profesor en la enseñanza de la noción, haciendo que su conocimiento sea complejo.

La tesis de maestría que aquí se presenta se encuentra dividida en cinco capítulos que permitieron dar cuenta del objetivo general que es el de identificar el conocimiento profesional del profesorado de matemáticas asociado a la noción de número entero.

En el primer capítulo se presenta el problema, la justificación y los objetivos trazados para el desarrollo de esta tesis. En el segundo capítulo se aborda el marco referencial, en el que se presentan las diversas teorías e investigaciones sobre el pensamiento y el conocimiento del profesor, esto con el fin de conocer los antecedentes que soportan esta tesis. En el tercer capítulo se presenta la metodología que corresponde a un enfoque cualitativo e interpretativo, optando por un estudio de caso, en el que participaron dos docentes, este número de participantes es debido a que el trabajo de campo que se realizó con cada uno de ellos fue extenso en cuanto a tiempo y técnicas aplicadas, puesto que fue necesaria la observación de varias sesiones de clase, la realización de entrevistas, la aplicación de la técnica de estimulación del recuerdo y luego se transcribió la información obtenida de cada uno de estos instrumentos y análisis, para realizar luego su respectiva triangulación.

En el cuarto capítulo se muestran los análisis y resultados acerca del conocimiento del profesorado de matemáticas frente a la noción $\mathbb{Z}$, en dos partes: la primera, corresponde a la identificación de cada uno de los saberes que componen su conocimiento, y luego a la integración de estos saberes, que inicialmente se encuentran integrados en el discurso del docente, pero que para el análisis y los objetivos de este trabajo fue necesario analizarlos en su particularidad.

Por último se presentan las conclusiones del conocimiento identificado asociado a la noción de $\mathbb{Z}$, y algunas recomendaciones relacionadas con las investigaciones enmarcadas en la línea del conocimiento profesional del profesor.

1. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

1.1. PROBLEMA

Los números enteros es un concepto que se aborda en la escuela, estos son introducidos desde los estándares y lineamientos curriculares al plan de estudios que se desarrolla para grado séptimo, y son necesarios para la comprensión de contenidos escolares posteriores como la resolución de problemas algebraicos, la construcción de otros conjuntos numéricos, el cálculo, entre otros.

Este concepto es abordado en la escuela por el profesor de matemáticas, quién es un profesional y cuenta con toda la experiencia y conocimientos necesarios para abordar este concepto matemático a partir de diversas estrategias que él ha construido durante el ejercicio de su práctica profesional, su formación universitaria y a partir de ese legado histórico dejado por otros docentes de su área.

Pero en nuestra sociedad existe un desconocimiento del docente como profesional, no se le reconoce que posee un conocimiento profesional y que por tanto él es productor de éste, sólo se cree que el repite en el aula los saberes dados por una disciplina, cuando realmente el conocimiento que posee el docente es bastante complejo debido a que encierra otros saberes que al estar integrados conforman lo que se denomina el conocimiento profesional del profesor.

Este conocimiento profesional ha sido investigado por varios autores, entre estos se destaca Shulman (1986) quien sostiene que el conocimiento del profesor está compuesto, entre otros, por el conocimiento de la materia (disciplina que enseña), el conocimiento pedagógico de contenido y el conocimiento curricular. Porlán, Martín y Rivero (1997), quienes recogen las categorías con las que habitualmente se ha estudiado el conocimiento del profesor y mencionan que este se compone de cuatro saberes que son: los académicos, los basados en la experiencia, las teorías implícitas y los guiones y rutinas de acción, pero que se encuentra desintegrados en el profesor. Para estos dos autores, el conocimiento de la materia o los saberes académicos tiene como estatuto fundante la disciplina.

Estos saberes trabajados por Porlán, Martín y Rivero (1997), fueron retomados por Perafán (2004), quien resignifica sus estatutos fundantes, y demuestra que dichos saberes se encuentran integrados en el conocimiento del profesor. Para Perafán (2004, 2011 y 2012), la disciplina está lejos de ser el estatuto fundante del saber académico del profesor, porque para él el estatuto es la transposición didáctica (Chavellard, 1991), pero no entendido como modelación, sino como aquel conocimiento social, antropológico que se da desde la intencionalidad de la enseñanza que hace que un sujeto devenga como profesor. Además Perafán (2004), presenta el conocimiento del profesor como un sistema de ideas integradas.

Este conocimiento profesional del profesor que corresponde a la integración de los cuatro saberes ya mencionados, es un conocimiento complejo y dada esta característica "se sugiere investigarlo centrándolo en temas de contenido matemático específico, lo cual permite comprender mejor el amplio dominio del pensamiento" (Badillo y Azcarate, 2005: 102) y del conocimiento del profesor de matemáticas. De ahí que se indague por una noción particular, como es la de los números enteros, noción que ha construido el profesor a partir de los saberes académicos – desde la transposición didáctica-, los saberes basados en la experiencia, las teorías implícitas y los guiones y rutinas.

Por tanto, nuestra hipótesis ha sido que, también, los docentes de matemáticas han construido un conocimiento profesional, por ejemplo, asociado a la noción de los números enteros, puesto que a ellos es a quienes se les asigna la importante tarea de abordarlos en el aula, siendo este concepto el primer conjunto numérico que se trabaja en la secundaria, después del número natural y contribuye en la posterior comprensión de los demás universos numéricos, además del desarrollo de habilidades y destrezas intelectuales, facilita la comunicación dentro de los procesos que se desarrollan al interior del área.

Entonces, la investigación apuntó a resolver la siguiente pregunta, ¿cuál es el conocimiento profesional específico del profesorado de matemáticas asociado a la noción de los números enteros?

1.2. JUSTIFICACIÓN

El indagar por el conocimiento profesional específico que mantienen los docentes de matemáticas asociado a la noción de los números enteros, obedece en una primera instancia a que este concepto (abordado básicamente en grado 7°) es fundamental en las matemáticas escolares para el dominio de los sistemas numéricos que el estudiante debe aprender durante su formación en el bachillerato y, por otra parte, permite identificar cuál es el conocimiento que los docentes mantienen sobre éste.

En primer lugar, se sabe que los números enteros son el segundo sistema numérico que maneja el estudiante durante su formación escolar; la comprensión de éste como objeto matemático escolar, estados relativos, transformaciones, entre otras, en diferentes áreas del conocimiento y de las aplicaciones que le dé al mismo, permitirá la asimilación de otros conjuntos numéricos que igualmente deberían ser concebidos como categorías escolares, como los racionales (Q), Irracionales (I), Reales (R) y Complejos (C) puesto que los enteros están contenidos dentro de los tres primeros conjuntos mencionados, pero el último también hace uso de las propiedades de los signos que estos manejan. Es decir que permite en el estudiante la ampliación y el dominio del concepto que él posee de número y lo lleva a realizar cambios conceptuales en torno a las operaciones y las relaciones entre ellos, consolidando sistemas numéricos diferentes.

En segundo lugar, el identificar el conocimiento que los docentes han construido sobre este concepto escolar de número entero, permite legitimar y reconocer la profesión del docente demostrando que él posee un conocimiento profesional que es diferente histórica y epistemológicamente al que produce la disciplina, debido a que esta mediado por la intencionalidad de la enseñanza que influye en la construcción de la noción como propia, es decir el docente enseña un saber diferente al de la disciplina porque a través del acto de enseñar los números enteros el busca promover sujetos a la existencia a partir del desarrollo de habilidades, destrezas, ejercicios de pensamiento lógico-matemático en los estudiantes junto con sus creencias y concepciones que lo constituyen como sujeto social, cultural y que determinan su identidad, mientras que la disciplina no persigue esto como objetivo primordial, lo que evidencia que para el profesor ya no es la disciplina el principio fundante de la enseñanza.

Por último ésta investigación constituye un aporte frente a la Educación Matemática en el sentido que al identificar el conocimiento profesional del profesor de matemáticas en relación con una noción, tiene como consecuencia que los docentes y los profesores en formación reconozcan los saberes fundantes de su conocimiento lo que les permite según Llinares (1996) llegar a una mejor comprensión e interpretación de procesos como la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en el aula, al hacerse conscientes de que el conocimiento que ellos enseñan es un conocimiento que educa porque tiene la intencionalidad de la enseñanza alejándose así de las pretensiones de la disciplina; la elaboración de situaciones de aprendizaje, que emergen de su conocimiento y que se integran al contexto de los estudiantes; y favorece el desarrollo profesional de los profesores de matemáticas al reconocérseles que ellos son productores de su propio conocimiento y enorgulleciéndose de su profesión.

1.3. OBJETIVOS

1.3.1. Objetivo general

- Identificar y caracterizar el conocimiento profesional especifico que mantienen los docentes de matemáticas asociado a la noción de los números enteros.

1.3.2. Objetivos específicos

- Identificar los saberes académicos que el profesorado de matemáticas mantiene asociados a la noción de los números enteros.
- Identificar los saberes prácticos que el profesorado de matemáticas mantiene asociados a la noción de los números enteros.
- Identificar las teorías implícitas que el profesorado de matemáticas mantiene asociadas a la noción de los números enteros.
- Identificar los guiones y rutinas que el profesorado de matemáticas mantiene asociadas a la noción de los números enteros.
- Identificar la historia y la epistemología de los números enteros en la disciplina de las matemáticas.
- Caracterizar e identificar las múltiples relaciones que se dan entre los cuatros saberes que componen el conocimiento profesional del profesor de matemáticas, para evidenciar la integración.

2. MARCO REFERENCIAL

2.1. EL CONOCIMIENTO PROFESIONAL DEL PROFESOR

En la actualidad el conocimiento profesional docente se puede entender como un sistema de ideas integradas. Ese proceso de integración se puede leer inicialmente como una síntesis histórica, con base en los resultados de investigaciones realizadas en el programa de cogniciones o pensamientos del profesor en los ámbitos de la enseñanza interactiva y preactiva.

En este apartado se presentan algunos trabajos que dieron origen y desarrollo a la línea de investigación sobre el conocimiento profesional del profesor. Dichos trabajos abordan diferentes saberes como componentes fundamentales del conocimiento del docente, tales como: los saberes académicos, los saberes basados en la experiencia, los guiones y rutinas, las teorías implícitas, entre otros.

Además se mostrará qué muchas de esas indagaciones ven los diferentes saberes como islas separadas que habitan en el profesor. No obstante, otros, como Perafán (2004, 2012), plantean la integración originaria de las cuatro categorías fundamentales con las que se ha estudiado el conocimiento del profesor. En efecto Perafán afirma que estos saberes cohabitan al mismo tiempo en el profesor, lo cual permite comprender, en parte, su devenir.

2.1.1. Orígenes de la línea

Para la comunidad académica internacional las investigaciones acerca de los procesos de pensamiento del profesor se originan a partir de 1975 año en el que se celebró el congreso del National Institute of Education, en el que se presentaron informes acerca de la relación entre el pensamiento y la acción, en los que se afirman que lo que los docentes hacen es consecuencia de lo que piensan. Shulman (1986) estuvo a cargo de una comisión en la que coincidieron en cambiar la imagen del docente técnico, por una en la que este profesional es visto como un sujeto que piensa y toma decisiones de acuerdo a las situaciones que se presentan en el contexto, vinculando una multiplicidad de datos y diversas informaciones.

Al referirse a los orígenes de la línea de investigación sobre el pensamiento y el conocimiento del profesor, podemos afirmar que ésta, -en el marco de los programas de la investigación de la enseñanza- , se originó contra las investigaciones cuyo fundamento era la psicología conductista, aunque su primer suelo parece ser aún el programa Proceso-Producto. No obstante, se puede evidenciar cómo muy rápidamente los pensamiento del profesor comienzan a ser indagados casi exclusivamente en dos enfoques: uno cognitivo y otro alternativo.

2.1.2. El enfoque conductivo

El interés de la psicología conductista radicaba en las acciones humanas para así controlar sus reacciones, bajo el enfoque de la psicología conductista se concebía al docente como mecánico, reduccionista y determinista.

El programa de Proceso Producto apoyado en este enfoque surgió en Estados Unidos a finales de la década de los 60 y principios de los 70, tenía por objeto la relación de la enseñanza y el rendimiento, es decir que los productos de aprendizaje de los alumnos dependían de las acciones que llevaba a cabo el profesor en el aula; dicho de otra manera, consideraba que la eficacia de un maestro dependía de los resultados que obtuvieran sus estudiantes en pruebas estandarizadas, es así como la conducta del maestro en el aula se evidenciaba en el desenvolvimiento académico de sus estudiantes.

Por tanto, el docente era concebido como un técnico, el cual solo aplicaba una serie de destrezas en el desarrollo de programas al interior del aula y repetía unas técnicas consideradas como eficaces para quienes lo observaban. Este programa tuvo una fuerte incidencia en la educación, pues de él se desprendieron fuertes políticas educativas.

A principio de los 70 surge el programa de investigación Tiempo de Aprendizaje Académico (TAA) como una variación del anterior, en el sentido en que considera que lo que realiza un profesor en cierto momento afecta al estudiante en ese mismo instante y no necesariamente en los resultados que estos obtienen en los test estandarizados; es decir, que bajo este enfoque siguen buscando "un indicador de la eficacia docente", aspecto que conlleva a que el profesor siga viéndose de la misma forma que en el programa de investigación Proceso-Producto.

Sin embargo en éste período en el que reinaba la psicología conductista, Jackson (1968) realizó una investigación que se interesaba por los comentarios que realizan los profesores acerca de su trabajo y de la labor que desarrollan en el aula. Trabajo compilado en su obra *La vida en las aulas*, en la que se presenta el estudio del pensamiento del profesor durante la enseñanza interactiva, preactiva y posactiva, es decir, su vida mental, comprendiendo que la actividad desarrollada por los docentes es mucho más compleja de lo que se había afirmado.

Jackson (1968) utiliza un enfoque alternativo - a pesar de que reinaba el de la psicología conductista- para realizar una investigación mucho más cualitativa e interpretativa, apartada de los contextos cuantitativos, aunque este enfoque no tuvo fuerza precisamente, porque en la cultura académica en ese momento reinaba la psicología conductista.

2.1.3. El enfoque cognitivo

En este debate internacional se pregunta por cuál es el programa que debe seguir la línea de investigación del pensamiento del profesor, puesto que se da una revolución cognitiva en términos de la emergencia de la psicología cognitiva, en el marco de la ruptura de la psicología conductista. Ésta última planteaba que el ser humano estaba en el dominio del ambiente que restringía unas conductas y, que por tanto, la investigación bajo este enfoque permitía predecir y determinar la conducta del docente. Entonces la mente no existía, y si existía era un obstáculo para poder explicar el fenómeno mental debido a que impedía la predicción y el control. Además, no se reconoce al pensamiento ligado a la conducta, eran las leyes del ambiente las que la determinaban.

La psicología cognitiva introduce la mente como un aspecto causal de la conducta humana, luego, es imposible entender y comprender la conducta si no nos referimos a la mente. Los pensamientos del profesor son causas determinantes de la conducta del profesor. En el marco de la psicología cognitiva se vuelve fundamental la investigación sobre el pensamiento del profesor.

Entonces surgen los programas de investigación apoyados en la psicología cognitiva que dejan de lado la conducta para estudiar el pensamiento del docente, a partir de la analogía de que el cerebro funcional igual que el procesador de un computador: recibe información, la procesa y da una respuesta. Uno de estos programas es el de cognición del alumno y mediación de la enseñanza, que recibía la influencia de la psicología cognitiva y la sociología. Este programa se centra en el pensamiento y la motivación de los estudiantes, observando cómo estos responden a la enseñanza frente a estímulos que el profesor les brinda, dándose un proceso activo en el que juega la instrucción del profesor.

En este mismo enfoque aparece el programa de Investigación de la Cognición del Profesor y Toma de Decisiones, este programa ve a los profesores según Shavelson (1983) como unos

> "profesionales racionales que, al igual que otros profesionales, como por ejemplo los médicos, emiten juicios y toman decisiones en un medio incierto y complejo […] Los profesores se comportan racionalmente con respecto a los modelos simplificados de la realidad que construyen […] El comportamiento de los profesores está orientado por sus pensamientos, juicios y decisiones" (1983 cit. en Shulman 1986: 59).

Lo anterior implica que era necesario estudiar lo que pensaban los profesores antes, durante y después de la enseñanza, para así comprender las decisiones que ellos tomaban en el aula con respecto a sus alumnos.

Bajo este enfoque las investigaciones se interesaban por estudiar los procesos formales de pensamiento de los profesores durante la enseñanza. Clark y Peterson (1990) diseñaron un modelo para entender los procesos de pensamiento y las acciones de los profesores, en el que presentan tres categorías de conceptualización: la primera corresponde a los pensamientos en la planificación, que se relacionan con la enseñanza preactiva –planificación de clase- y la enseñanza posactiva -reflexión que se realiza al salir del aula-. La segunda concierne a los pensamientos y decisiones durante la enseñanza interactiva (el momento de la clase). Y la tercera se refiere a las teorías y creencias de los profesores “que representan el amplio acervo de conocimientos que poseen y afecta a su planificación y sus pensamientos y decisiones interactivos” (Clark y Peterson, 1990: 450).

Los estudios bajo este enfoque tuvieron fuertes críticas puesto que algunos investigadores consideraban que se seguía teniendo la pretensión de determinar la conducta del profesor, buscar indicadores de eficacia en su acción, generalizar su comportamiento, dejando de lado los fundamentos antropológicos que sostienen el pensamiento humano, ésta críticas dieron paso a los estudios apoyados en el enfoque alternativo.

2.1.4. El enfoque alternativo

El enfoque alternativo responde a la denominada tendencia antropológica, lo cual origina cambios significativos en las investigaciones realizadas acerca del pensamiento del profesor, sobresaliendo las intencionalidades, las creencias, y la reflexión que el profesor realiza de su quehacer, dejando de lado las generalizaciones formales en los modos de pensar y de actuar del profesor.

Dentro de los fundamentos teóricos que soportan las investigaciones realizadas bajo este enfoque se encuentran: la concepción del hombre que es considerado como un sujeto intencional, que lleva consigo una serie de elementos que causan acciones con sentido durante su trabajo en el aula (visión antropológica); la enseñanza no como una actividad causal, puesto que el aprendizaje no es un proceso lineal, se tiene en cuenta la actuación del alumno y del profesor, relación de lo objetivo y lo subjetivo; la enseñanza como un arte no como ciencia; las construcciones subjetivas construidas por los alumnos que les permiten darle significado a la clase; la investigación utiliza las concepciones y los métodos de las ciencias sociales, a partir de metodologías flexibles que parten de la observación; la recontextualización del papel del profesor, no solo se observa el conocimiento del profesor sino que se tienen en cuenta sus creencias; y la relación teoría-práctica, que se evidencia en la investigación en acción.

2.1.4.1. Shulman y el conocimiento del profesor

En 1986, Shulman, plantea que las investigaciones que se realizaban solo respondían a lo que el profesor enseñaba en el aula, dejando de lado otros aspectos que se relacionaban con los "dominios" que posee. Él afirmó que el docente posee un conocimiento integrado por tres clases de conocimiento de contenido: el conocimiento temático de la materia entendido como la compresión que tiene el docente sobre la disciplina que enseña, el conocimiento pedagógico de contenido (PCK) –de la que se ha desprendido la mayor parte de las investigaciones en ésta línea-, se refiere a la comprensión acerca de determinados temas, estrategias, si en las materias se entiende o no, además incluye la psicología del aprendizaje; y por último el conocimiento curricular, entendido como la manera de organizar el conocimiento a enseñar, es decir este se evidencia en la planeación, los textos, el programa, etc.

Shulman afirma que el conocimiento temático de la materia, "emerge a través de un proceso de análisis crítico que es guiado tanto por las estructuras sustantivas como por las sintácticas de una disciplina" (2005:14), en donde el conocimiento sustantivo tiene que ver con los paradigmas de las disciplinas que orientan al profesor en las formas de indagación de la misma. Dicho conocimiento puede ser de carácter tácito o explícito, teniendo gran influencia en las decisiones curriculares. El conocimiento sintáctico tiene que ver con los instrumentos de indagación en la disciplina, de manera que sea aceptado por la comunidad. De acuerdo con Shulman (ibíd.), el que los profesores no posean este conocimiento desnaturaliza la materia que enseñan frente a los estudiantes y limita a los profesores a aprender cosas nuevas sobre la disciplina que enseñan.

El conocimiento curricular, entendido como la manera en que se organiza el conocimiento que se va a enseñar, comprende el diseño de programas, las temáticas que se relacionan alrededor de estos, las indicaciones y contraindicaciones para el uso de materiales particulares en situaciones particulares.

Por último, el PCK (Pedagogical Content Knowledge, término originario en el idioma inglés), traducido al español como CDC (Conocimiento Didáctico del Contenido), Shulman lo denomina como "esa especial amalgama entre materia y pedagogía que constituye una esfera exclusiva de los maestros, su propia forma especial de comprensión profesional" (2005:11), esta categoría tiene un interés particular porque representa la mezcla entre unos conocimientos distintivos del profesor para la enseñanza, como la pedagogía, la didáctica, la materia a enseñar, para que así el profesor comprenda cómo se organizan los temas a enseñar, cómo llevarlos a clase de acuerdo a los intereses y las necesidades de los alumnos, cómo se representan y cómo se enseñan.

Shulman afirma que el PCK "es la categoría que, con mayor probabilidad, permite distinguir entre la comprensión del especialista en un área del saber y la comprensión del pedagogo" (2005:11), de manera que pareciera que la principal o una de las distinciones entre el especialista en la materia y el profesor es éste conocimiento que el primero no posee.

En 1987 Shulman amplía la noción de conocimiento del profesor incluyendo siete tipos de conocimiento: conocimiento del contenido, conocimiento didáctico general, conocimiento del currículo, conocimiento didáctico del contenido, conocimiento de los alumnos y de sus características, conocimiento de los contextos educativos y conocimiento de los objetivos, las finalidades y los valores educativos y de sus fundamentos filosóficos e históricos.

Por su parte, Grossman P (1990) discípula de Shulman, desarrolla una investigación con profesores de inglés en Estados Unidos en la que define cuatro áreas fundamentales en el conocimiento del profesor: el conocimiento pedagógico general, el conocimiento del contenido, el conocimiento del contexto y el conocimiento pedagógico del contenido.

El conocimiento pedagógico general, comprende todo lo relacionado con la enseñanza y sus principios básicos, el aprendizaje de los alumnos, las herramientas utilizados para llevar un concepto al aula, los tiempos entre actividades, la planeación y organización de sus clases, la evaluación, los aspectos legales relacionados con su profesión, la historia y filosofía de la educación; el conocimiento de contenido se refiere al conocimiento disciplinar, es decir al de su especialidad sea física, matemáticas, etc.; el conocimiento de contexto tiene en cuenta los intereses y el contexto de los estudiantes para la planeación y organización de las clases; y por último el conocimiento pedagógico de contenido es el que integra los tres anteriores.

2.1.4.2. El conocimiento práctico

El conocimiento práctico, es ese conocimiento que se produce a partir de la reflexión que hace el docente de su quehacer en el aula, éste es muy importante en la medida que el profesor no trabaja con máquinas sino con humanos, que al igual que él son seres complejos y que además se encuentran en un proceso de formación, características que hacen que el maestro durante su labor en el aula se enfrente a problemas diferentes que están enmarcados por un alto grado de incertidumbre. Este conocimiento ha sido investigado por varios autores, entre ellos Schön (1983), Elbaz (1983), y Clandinin y Conelly (1984).

Para Donald Schön la racionalidad práctica toma fuerza al observar la crisis profesional por la que atraviesan los profesionales al no contar con las habilidades para desenvolverse bajo situaciones de incertidumbre y complejidad, porque han sido formados bajo una racionalidad técnica instrumental que no les permitía enfrentarse a problemas diferentes para los cuales ya habían sido previamente formados. En efecto, este autor afirma que "nos hemos vuelto cada vez más conscientes de la importancia para la verdadera práctica de fenómenos –complejidad, incertidumbre, inestabilidad, carácter único y conflicto de valores- que no encaja con el modelo de la racionalidad técnica" (Schön 1983:47).

Entonces la reflexión en la acción planteada por Schön (1983) -que es la que da origen a los estudios del pensamiento y el conocimiento práctico-, se evidencia en el quehacer del maestro cuando al presentársele alguna situación problemática inesperada, él reestructura su clase y genera estrategias no planeadas que le permiten dar solución de manera exitosa a dicho problema y así continuar con su clase.

Elbaz (1983), realiza un estudio de caso en el que destaca el conocimiento práctico, sus orientaciones, niveles de organización y contenidos. De manera que para ella es importante resaltar el componente práctico dentro del conocimiento del profesor, cuyas orientaciones indican "el modo en que el conocimiento práctico es mantenido en una relación activa con el mundo de la práctica" (Elbaz, 1983:14). Esta autora distingue cinco situaciones: la orientación situacional, el conocimiento está orientado por la situación del aula y la escuela; la orientación personal se refiere al uso significativo que hace el docente de su conocimiento, se evidencia su identidad profesional; la orientación social, el conocimiento está relacionado con situaciones sociales o se pretenden transformar las mismas; la orientación experiencial, se refiere a las experiencias que ya ha vivido el docente frente al desarrollo de su práctica profesional: y la orientación teórica, es la que orienta a las anteriores y tiene que ver con la teorías y el conocimiento práctico que el docente ha construido.

En relación a las orientaciones Elbaz (1983) identificó 5 componentes de conocimiento práctico:

- Conocimiento del Yo y de su papel como docente, es un conocimiento que contiene muchas facetas, en relación a las decisiones que tome el Yo, basado en sus creencias, sentidos y concepciones.

- Conocimiento del ambiente de enseñanza, el docente expresa sus creencias sobre el medio en el cual se encuentra inmerso que influye en las actividades que él desarrolla en la escuela.

- Conocimiento de la materia que ha de enseñarse, es un espacio intelectual en la medida que ha sido formado en una disciplina, pero también es un conocimiento práctico en el sentido de que es enseñado en la escuela lo que implica que es creado en una situación práctica.

- Conocimiento curricular, se relaciona con las prácticas realizadas en torno al ambiente escolar, y los aspectos que influyen en los procesos de enseñanza – aprendizaje.

- Conocimiento de la instrucción, evidencia las relaciones que desarrolla el docente con los estudiantes y demás colegas, además de su forma de enseñar construida sobre las creencias y teorías sobre el aprendizaje que ha interiorizado.

Frente a la organización del pensamiento práctico Elbaz enuncia tres niveles que están relacionados por el pensamiento y la acción:

- Reglas prácticas, se refieren a una serie de enunciados que le permiten actuar frente a situaciones "típicas" a las que el docente ya se había visto enfrentado.

- Principios prácticos, son enunciados que le permiten reflexionar frente a ciertas situaciones que se le presentan al docente.

- Imágenes, según Ángulo son "estructuras originales orientadoras de la acción, que, comparativamente con las anteriores, son las menos explícitas y las más inclusivas. Los sentimientos, valores y necesidades y creencias se combinan en ellas" (1999:293).

Entonces para Elbaz el conocimiento práctico en el docente siempre está presente puesto que su labor se desarrolla siempre en la práctica, al tener que enfrentarse todos los días con un gran sin número de situaciones inesperadas propiciadas por sus estudiantes, el contexto, el medio y otra infinidad de variables no determinadas.

De igual manera, Clandinin y Connelly (1984: 174 cit. en Perafán 2004: 60) reconocen el conocimiento práctico como la composición de "tanto contenido experiencial como de filosofía personal, ritual, imagen y unidad narrativa", Clandinin le otorga las siguientes propiedades a las imágenes: la relación de la vida privada con la experiencia profesional; el carácter histórico temporal, es decir que tienen un origen en el pasado aunque se estén transformando continuamente en el presente; la dimensión moral, que le permite al docente reflexionar sobre su propio práctica y sus actuaciones.; y el tono emocional, que está íntimamente relacionado con sus sentimientos personales. Para Clandinin es muy importante que la reflexión del docente esté presente en sus actuaciones prácticas, puesto que ésta es una expresión continua de que sus acciones se relacionan con sus experiencias personales pasadas y las nuevas que suceden al interior del aula, es decir se evidencia el constructo histórico e intelectual que realiza el docente.

Los estudios presentados de Elbaz (1983) y de Clandinin y Connelly (1984) sobre el conocimiento práctico demuestran que el conocimiento profesional del docente está integrado por varios componentes que se relacionan con su práctica profesional, su experiencia personal y con todos los constructos teóricos que él ha elaborado.

Además, después de haber observado los problemas que había traído consigo la racionalidad técnica instrumental mostrados por Schön (1983) y de la importancia que tiene la reflexión en la acción y en la práctica, se puede inferir que la concepción de conocimiento debe haber cambiado, ya no bastaba con un conocimiento mecánico, rígido, repetitivo, autoritario, sino que era necesario un conocimiento en la práctica, en el quehacer diario, en las múltiples variables que tiene un problema en una sociedad cambiante.

No es suficiente con buscar generalizaciones para resolver las situaciones del día a día, se hace necesario un pensamiento en la práctica, un pensamiento que reflexione en la acción y que contemple cada una de las múltiples variables que se presentan en el aula, porque como lo afirman Gimeno y Pérez “las destrezas y capacidades cognitivas requeridas para intervenir racionalmente en el mundo complejo y cambiante del aula ni son unívocas ni mecánicas, ni pueden ser preestablecidas” (1998: 47).

Es así como el profesor en su quehacer se enfrenta a estudiantes de distintas generaciones con problemas diferentes, con intereses diferentes, variables que están en continua evolución, entonces para el profesor no es “funcional” un conocimiento basado en una racionalidad técnica, él construye otro tipo de conocimiento para dar respuesta a su labor, en el que se reconoce que su pensamiento y conocimiento son complejos, y “que la enseñanza no puede ser aislada de la intencionalidad del profesor y en general de la cultura que lo constituye” (Perafán 2004: 58).

Entonces toman fuerza los estudios bajo el enfoque alternativo a raíz de la carencia que presentan los realizados por el enfoque cognitivo para describir, comprender e interpretar la realidad del aula, inclinándose por la predicción y generalización. Gimeno y Pérez afirman que los enfoque alternativos “parten de concepciones bien distintas sobre los procesos de enseñanza-aprendizaje, el papel y función del profesor, la naturaleza de la investigación en ciencias sociales y la relación teoría-práctica” (1998: 48).

2.1.4.3. El conocimiento del profesor como una yuxtaposición de saberes

Bajo este enfoque alternativo, se desarrolla el trabajo de Porlán, Rivero y Martín (1997) y Porlán y Rivero (1998) quienes se plantean dos preguntas para describir el conocimiento profesional del profesor “de hecho”: ¿cómo es? - ¿cuál es su estructura?, y ¿cómo se genera? - ¿cuál es su dinámica? Frente a ¿cómo es?, Porlán, Rivero y Martín (1997) afirman que

> “el conocimiento profesional suele ser el resultado de yuxtaponer cuatro tipos diferentes de saberes de naturaleza diferente, generados en momentos y en contextos no siempre coincidentes, que se mantienen relativamente aislados unos de otros en la memoria de los sujetos y que se manifiestan en distintos tipos de situaciones profesionales o pre profesionales” (1997:158).

Estos cuatro saberes a los que hacen alusión son los saberes académicos, los saberes prácticos, las rutinas y guiones de acción y las teorías implícitas, saberes bajo los que se ha estudiado tradicionalmente el conocimiento del profesor. Éstos se pueden clasificar dentro de dos dimensiones: la epistemológica que encierra la dicotomía entre el saber racional y el saber experiencial; y la psicológica que comprende la dicotomía explícito – tácito.

Dimensión Psicológica / Dimensión Epistemológica	NIVEL EXPLÍCITO	NIVEL TÁCITO
NIVEL RACIONAL	Saber Académico	Teorías Implícitas
NIVEL EXPERIENCIAL	Creencias y Principios de actuaciones	Guiones y Rutinas de acción

Figura 1. Tomado de Porlán, Rivero y Martín (1997: 158) Dimensiones y componentes del conocimiento profesional

Los saberes académicos y prácticos se encuentran ubicados en la dimensión epistemológica y las teorías implícitas y guiones y rutinas de acción en la dimensión psicológica. De acuerdo con estos autores, dichas categorías que pertenecen al conocimiento profesional del profesor se encuentran desintegradas o yuxtapuestas en el docente, porque cada saber "funciona" en situaciones determinadas, a este conocimiento lo denominaron Conocimiento Profesional Dominante.

Porlán y Rivero (1998) explican los cuatro componentes del conocimiento del profesor así:

- Los saberes académicos, están basados en las concepciones disciplinares que tienen los docentes, se generan fundamentalmente en el proceso de formación de estos. Son explícitos y están organizados atendiendo a una lógica disciplinar.

- Los saberes basados en la experiencia, son ideas conscientes que desarrollan los docentes durante su ejercicio profesional acerca de los diversos procesos de enseñanza aprendizaje, orientan la actuación profesional y se evidencian mucho más en los momentos de la programación, la evaluación y especialmente en las situaciones que se dan en el aula con los estudiantes.

- Las rutinas y guiones, “Se refieren al conjunto de esquemas tácitos que predicen el curso de los acontecimientos en el aula y que contienen pautas de actuación concretas y estandarizadas para abordarlos” (Porlán y Rivero 1998:61). Es decir hacen referencia a saberes implícitos asociados a rutinas que son inevitables a la actividad humana y que se forma lentamente en procesos de impregnación contextual.

- Las teorías implícitas, “son teorías que pueden dar razón de las creencias y de las acciones de los profesores en función de categorías externas” (Porlán y Rivero 1998:62), este saber también es implícito y en muchos casos el docente no es consciente de éste, sólo lo reconoce cuando con ayuda de otras personas es puesto en evidencia.

Porlán, Rivero y Martín (1997), y Porlán y Rivero (1998) afirman que estos cuatro componentes del conocimiento del profesor se mantienen desintegrados, pero proponen la hipótesis de progresión para integrar los cuatro saberes en el mismo sujeto profesor, logrando así el Conocimiento Deseable del Profesor. Para dicha integración ellos suponen que el conocimiento no es estático y que se transforma a partir de los principios de sistematicidad, complejidad y el de criticidad.

Los dos primeros principios consideran que las ideas y la realidad se pueden ver como conjuntos de sistemas en evolución, porque éstas pueden ser descritas y analizadas en los profesores y estudiantes teniendo en cuenta las interacciones y cambios que se presentan entre ellos; y el de criticidad evidencia que las ideas, las conductas los procesos de interacción de las personas no son neutrales, existiendo una transición de lo simple a lo complejo, entonces los fines formativos en los profesores y estudiantes van cargados de una gama de ideologías y valores implícitos en el discurso.

2.1.4.4. El conocimiento del profesor como sistema de ideas integradas

Perafán (2004) en su tesis doctoral, retoma las cuatro categorías propuestas por estos autores y resignifica las fuentes de éstas, definiendo el conocimiento profesional del profesor como un sistema de ideas integradas. Así**,** éste autor desarrolla una nueva visión del conocimiento profesional del profesor (Perafán, 2004, 2011, 2012, 2013) proponiendo resignificar los cuatro saberes del conocimiento del profesor -junto con sus estatutos epistemológicos fundantes- formulados por Porlán, Martín y Rivero (1997 y 1998). Adicionalmente, comprende que las fuentes del conocimiento del profesor no se encuentran yuxtapuestas, sino que estos saberes se encuentran integrados en el discurso intencional –intencionalidad de enseñanza- del sujeto profesor, concibiendo el conocimiento profesional del profesor como un sistema de ideas integradas.

Para Perafán (2004, 2011, 2012) el conocimiento profesional del profesor es un conocimiento complejo porque reúne diferentes formas de saber, no es estático sino que está en continua evolución y transformación y tiene una particularidad histórica alrededor de la vida del sujeto profesor. Dicho conocimiento también tiene una epistemología que le es propia que lo diferencia de otro tipo de epistemologías que soportan otro tipo de conocimientos. Perafán (2004:65), presenta este cuadro de síntesis en su tesis doctoral en el que hace explícitos los componentes y los estatutos fundantes que integran el conocimiento del profesor.

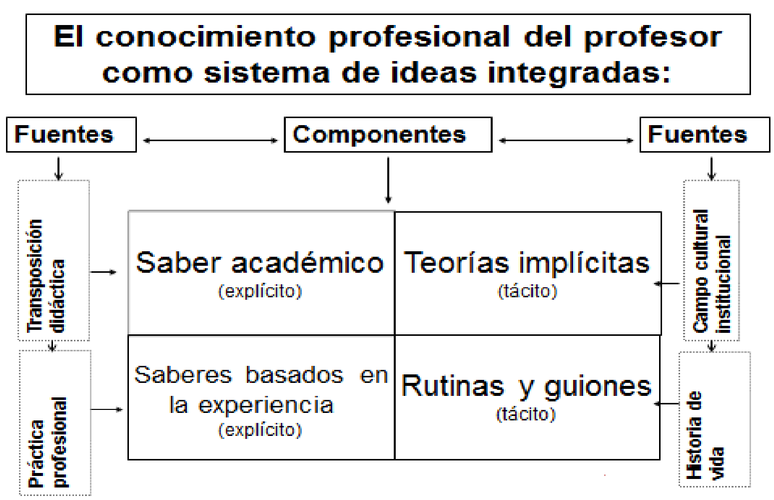


Figura 2. Tomado de Perafán (2004:65). El conocimiento profesional del profesor como sistema de ideas integradas

De acuerdo con este autor los cuatro componentes son:

- *Saber académico*, es el saber disciplinar construido por el profesor. Para Perafán (2004, 2011 y 2012) los saberes académicos del profesor no tienen como estatuto fundante la disciplina, sino la transposición didáctica, en el sentido que una lectura epistemológica de Chevallard (1991), permite atribuir a este término, como un lugar epistémico, cultural y antropológico del que emerge el conocimiento del profesor. En efecto, Chevallard, en la obra a la que estamos haciendo referencia, afirma que la antropología es el campo en donde se debe pensar la emergencia de los conocimientos, puesto que se desarrolla ahí un marco legítimo de relaciones entre sujeto, objeto y conocimiento. Por tanto, el campo de emergencia del hombre es un campo de relaciones intencionales, lo intencional significa que no existen determinaciones externas al sujeto, es él quien orienta su propia acción. Según Chevallard la transposición es un fenómeno del devenir humano, una realidad antropológica. El hombre produce sentido en tanto hombre en lo real antropológico, el hombre produce conocimiento en lo más elemental de su existencia, si por conocimiento se entiende sentido.

  Lo anterior presupone que el estatuto epistemológico de la disciplina dada desde las comunidades científicas es diferente al del saber académico del profesor, puesto que este responde a la intencionalidad de la enseñanza, como afirma Perafán "Cuando el sujeto-profesor-de- (un área cualquiera) bilogía, por ejemplo, deviene él profesor, en el proceso de construcción de una categoría específica, como la de evolución, no puede, por principio, hacerlo sin que ya él esté siendo mediado por la intencionalidad de la enseñanza" (2012: 7).

  Entonces la intencionalidad de la disciplina es diferente, en tanto pretende la producción de un tipo de conocimiento que apunta a la explicación de un objeto y no a la formación del sujeto (Perafán, 2013); es decir, no tiene como intensión la enseñanza. Así "la lógica de producción es distinta, desde la perspectiva antropológica, a la lógica del conocimiento disciplinar, la cual se produce sin la mediación histórica de la necesidad de constituir un sujeto que lo enseñe" (Perafán, 2004:66).

Desde la perspectiva de Chevallard del saber académico, Perafán (2004) plantea tres principios que favorecen la integración:

1. El conocimiento disciplinar es diferente del saber académico del profesor, pues, "los Saberes Académicos del profesor, son construcciones epistemológicas propias que tienen como estatuto fundante la Transposición Didáctica y no las disciplinas" (Perafán, 2012:11)

2. El conocimiento científico asiste a una transposición de segundo orden en el ámbito de la enseñanza es decir, la primera corresponde a aquella en la que un sujeto deviene profesor de ciencias naciendo en él y al mismo tiempo un nuevo saber: un saber para ser enseñado. La segunda se genera en el "ámbito de la enseñanza" en el que ese saber del profesor debe ser pensado como un objeto para ser enseñado en la enseñanza interactiva y que promueva la subjetividad, es ahí en donde se produce un conocimiento, que puede ser entendido como el conacimiento del conocimiento, siendo éste un conocimiento subjetivado, es decir es una producción propia del saber enseñado.

3. El saber ya no corresponde a una transmisión de conocimiento sino a el agenciamiento de un co-nacimiento, que "se produce en el marco de una intencionalidad específica: no hay producción de sentido sin una intencionalidad, sin una dirección de organización; dicha intencionalidad, en este caso, es la de la enseñanza" (Perafán 2012: 7). Es decir, el profesor construye un nuevo saber de un objeto cuando su relación con este cambia, lo piensa en términos de la enseñanza para que se produzca una nueva relación entre el objeto y el sujeto que lo aprende.

- *Saberes basados en la experiencia*, se refieren al ejercicio de la práctica profesional del docente, este saber resulta de la reflexión que el sujeto hace de la acción, la cual es el resultado de una actividad motivada por un sentido desde una perspectiva antropológica. La práctica profesional le permite al maestro reflexionar sobre sus acciones por tanto se convierte en un principio de actuación. Con Schön (1983) quedó demostrado que los profesionales formados bajo la racionalidad técnica instrumental no pueden dar respuestas a las situaciones que se salen de su formación mecánica, a los problemas que se presentan en un mundo incierto, inestable y complejo, es decir es un modelo incompleto que no da cuenta de "la competencia práctica en situaciones 'divergentes' " (Schön, 1983:55).

El profesor, en su práctica profesional, todos los días se enfrenta a situaciones y a contextos diferentes; los grupos de estudiantes, sus intereses y motivaciones cambian, por tanto él tiene que dar respuesta a cada uno de estos aspectos que están presentes en su quehacer, esto lo ha logrado a partir de la reflexión que realiza conscientemente desde la acción, lo cual sugiere que "podemos pensar en hacer algo mientras lo hacemos" (Schön 1983:60), lo que implica que a medida que el maestro actúa, está pensando en lo que está realizando, puesto que las situaciones que se le presentan en el aula requieren de la inmediatez del maestro.

Además la reflexión sobre la acción se da "aún en situaciones de incertidumbre o de un carácter único, porqué no está limitada por las dicotomías de la racionalidad técnica" (Schön 1983:72), cada vez que surja para el docente un problema nuevo en su quehacer profesional que no sea similar a los ya resueltos él reflexiona sobre la acción que realiza mientras la lleva a cabo acumulando y construyendo más principios de su saber práctico.

- *Teorías implícitas*, entendidas como estructuras de conocimiento que se encuentran, implícitas en el pensamiento del profesor, las cuales han sido interiorizadas por él en el marco de las prácticas institucionales (currículo, planes de estudio, PEI, etc.) en las que se mueve. Están comprendidas en el marco institucional, pues, la institución educativa es ante todo un tejido múltiple donde circulan diferentes teorías que comprometen campos como el de la educación, la pedagogía y la didáctica, entre otros. Este tejido constituye la identidad del sujeto profesor sin que este sea necesariamente consciente de cómo lo estructuran. La institución es ante todo un tejido simbólico, una red inteligente de sentidos, esa red inicia a interpelar al sujeto que ingresa allí y adquiere unas teorías inconscientes frente a la noción que enseña (teorías implícitas).

Entonces se debe entender que las actuaciones y el discurso del maestro están cargados por una serie de teorías inconscientes que son reprimidas por el consciente pero que salen a flote en su quehacer, como lo afirma Freud el inconsciente siempre determina el consciente, de éstas teorías el maestro no es consciente y se necesita de técnicas que permitan descubrir el contenido latente que dirige su actuación.

Estas teorías que son inconscientes para el profesor, intervienen en la enseñanza de la noción, porque su discurso se encuentra cargado del marco institucional en el cual se encuentra inmerso, como los productos culturales, el PEI, el Plan de Área, el Manual de Convivencia, entre otros, que influyen en la toma de decisiones, actuaciones y actividades que realiza en el aula el docente.

De forma que desde el inconsciente, se presenta que el profesor durante su quehacer en el aula específicamente durante la enseñanza de una noción evidencia ciertos constructos en su discurso, ciertas teorías que han circulado en el marco institucional sobre la noción que enseña, teorías de las cuales él no es consciente, pero que a partir de la observación de sus propias clases él nota que están allí presentes y que han sido fruto de ese tejido de múltiples relaciones institucionales, de las discusiones con sus compañeros de área, de teorías que circulan en el colegio alrededor de la noción, entre otras.

- *Los Guiones y Rutinas*, son estrategias cognitivas, de carácter inconsciente que orientan el comportamiento del profesor, que tienen como estatuto fundante su historia de vida. Es así como en el devenir del profesor como sujeto social, cultural y psicológico en su interacción con el mundo y el otro, se va construyendo este conocimiento.

Desde el lo tácito, se debe analizar cómo la historia de vida marca ese conocimiento profesional construido frente a una noción, es decir cómo su formación escolar, su formación universitaria, su práctica profesional y su cotidianidad construyeron esos guiones y rutinas que se manifiestan en su discurso en el aula durante la enseñanza.

Estos guiones y rutinas corresponden a vivencias, a temores, a experiencias agradables y desagradables del profesor en el proceso de construcción de la noción, son inconscientes para él, pero determinan la enseñanza de la misma. Este conocimiento que no es consciente para el maestro y que además es reprimido no aparece de manera directa en el discurso del aula, sino que él lo expresa disfrazado a través de un chiste, una equivocación oral o escrita.

Así, una vez definidos en términos generales esos cuatro saberes, es necesario reconocer adicionalmente que Perafán (2004:65) considera que la integración de los cuatros componentes del conocimiento siguen una perspectiva epistemológica propia en la que, por ejemplo el saber académico obedece a una dimensión antropológica en la medida en el que es elaborado en contextos sociales, culturales y, en últimas, humanos bien definidos , lo que va de la mano con Morin (1986) quien afirma que el conocimiento es un fenómeno multidimensional porque responde a que en el mismo sentido y lugar es físico, biológico, cerebral, mental, psicológico, cultura y social, en síntesis es bio-antropó-sociológico es decir el conocimiento no puede ser disociado de la vida humana, de la historia de vida del sujeto.

2.1.4.5 El conocimiento profesional específico del profesor

En este capítulo se ha venido presentado el recorrido histórico de los estudios e investigaciones desarrollados sobre el pensamiento y el conocimiento del profesor desde los enfoques conductista, cognitivo y alternativo. Este conocimiento ha sido estudiado desde diferentes categorías – los saberes académicos, los saberes prácticos, los guiones y rutinas y las teorías implícitas – categorías que según Porlán Rivero y Martín (1997), forman parte del “conocimiento profesional deseable” del profesor.

Este “conocimiento deseable”, entendido como un “deber ser” y no como el que posee el profesor (Porlán Rivero y Martín 1997), ha “dado inicialmente la impresión de que el profesor mantiene de manera yuxtapuesta, o sobrepone, conocimientos de diferente orden epistémico; por ejemplo: guiones, rutinas y saberes académicos, entre otros”. (Perafán, 2012: 2). No obstante, como ya se ha mencionado, Perafán presenta una perspectiva distinta mostrando la integración como característica fundamental del Conocimiento profesional docente. Pero lo que interesa mostrar en este momento es que la integración a la que se hace referencia no se da en abstracto, sino alrededor de unas categorías particulares.

Por consiguiente, se entiende que el profesor no es un técnico que reproduce el conocimiento de la disciplina, sino que por el contrario él construye el conocimiento específico de una noción particular a enseñar en la escuela, en la que integra los cuatro tipos de saber, y además promueve la formación de sujetos. La siguiente gráfica ilustra este planteamiento:

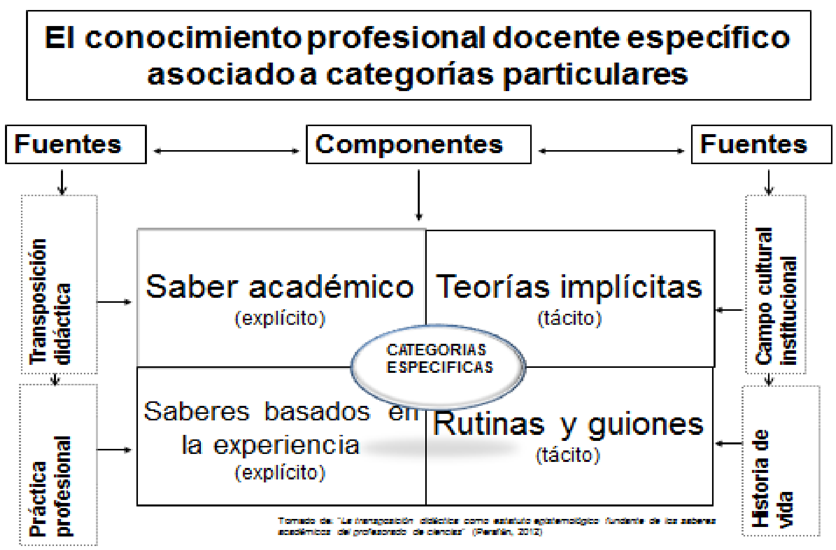


Figura 3. Tomado de Perafán (2012). El conocimiento profesional docente asociado a categorías particulares.

Como se puede observar en esta ilustración los diferentes componentes del Conocimiento Profesional del Profesorado, se articulan en torno a una categoría particular, cuando dicho conocimiento se hace específico y se aterriza en el proceso de producción de dicha categoría por parte del profesor.

Lo anterior es posible, si se valida la postura de que el profesor efectivamente produce un conocimiento que le es propio y este argumento se encuentra en la tesis de Perafán (2004) en la que evidenció algunos criterios que diferencian los procesos de producción y circulación de dicho conocimiento, identificando la categoría epistemología polifónica del profesor, que

> "desplaza los análisis que sobre el conocimiento del profesor se realizan desde la filosofía de la ciencia y los centra en las concepciones que el profesor mantiene sobre su propio conocimiento, contribuyendo así a la legitimación de éste último como saber fundamental para la escuela y la cultura" (2004: 198).

Haciendo parte de la tradición de los estudios del conocimiento del profesor bajo el enfoque alternativo, y atendiendo a que el profesor mantiene unos procesos de producción y circulación del conocimiento, es necesario indagar por ese conocimiento específico asociado a una noción que produce el profesor de una disciplina particular en el marco de la enseñanza (Perafán, 2011; Ortega y Perafán, 2012), en este caso, aquellas nociones asociadas a las matemáticas escolares y específicamente aquella asociada al número entero.

Nuevamente se hace necesario pensar en el concepto de transposición didáctica de Chevallard (1991) y en el término "conacimiento" que se refiere a que "el conocimiento es el conacimiento; el objeto nace para el sujeto, el sujeto nace con el objeto" (1991: 149), es decir el sujeto-profesor se enfrenta a un objeto con la intencionalidad de la enseñanza, entonces construye un nueva relación con el objeto haciendo que el sujeto devenga profesor. De esa manera "en la producción de una noción o categoría particular, el sujeto profesor deviene profesor en el mismo proceso en el que construye dicha noción; lo anterior, en el marco de una intensión de enseñanza de esa noción, construida por él, que abre este proceso de co-nacimiento" (Perafán 2012: 7).

En este caso el sujeto-profesor de matemáticas, deviene él profesor, en el proceso de construcción de la noción de número entero, solo bajo la intencionalidad de enseñar dicha noción. En términos de Perafán

> "el devenir del saber académico (SA) del profesor, en el marco de la transposición didáctica, es el devenir del profesor como tal: un sujeto X deviene profesor X_n en el proceso de construcción de una categoría específica cualquiera (Ce_n), entendida como saber académico, mediado por la intención de enseñanza (IE). Así, en el proceso de emergencia del espíritu profesoral (X_n), que es también el devenir de los saberes académicos (SA), se construye una categoría particular (Ce_n), la cual, a su vez, en su enseñanza, realiza opciones de realidad subjetivas diversas cuando X_n interpela a un sujeto Y, para que establezca una relación (R), con SA y devenga un espíritu estudiantil (Y_n) en función de SA." (Perafán, 2012: 7).

Por consiguiente, un sujeto X, deviene profesor de matemáticas en el proceso de construcción de la categoría número entero, mediado por la intencionalidad de construir esa noción para ser enseñada. . En esa intención de la enseñanza el sujeto X, deviene profesor de matemáticas, deviniendo así también su saber académico de la categoría número entero; ésta categoría particular de número entero que realiza opciones de realidad subjetiva cuando el profesor de matemáticas interpela a un estudiante Y, para que establezca una relación con el saber académico y devenga un espíritu estudiantil de la categoría número entero en función del saber académico.

Entonces el profesor X de una disciplina particular construye un conocimiento específico de cada una de las nociones que enseña bajo la intencionalidad de la enseñanza. Pero en la construcción de ese conocimiento específico asociado a una categoría particular no solo se integra el saber académico cuya fuente es la transposición didáctica, sino también los saberes basados en la experiencia, los guiones y rutinas y las teorías implícitas, con sus respectivos estatutos epistemológicos fundantes que son la práctica profesional, la historia de vida y la cultura profesional.

Los cuatro saberes se ponen en juego a la vez cuando el profesor está enseñando una noción específica en la escuela, en este caso la de número entero. Las reflexiones que el profesor ha realizado durante la enseñanza de ésta noción le han permitido construir su saber práctico, en la medida que desde su que hacer laboral ha tenido que enfrentarse a diversas preguntas, problemas y estrategias que se le presenten con cada nuevo curso al que enseña dicha noción.

De igual forma los guiones y rutinas construidas por él en cuanto al número entero se relacionan con la forma en la que el profesor lo aprendió en la escuela y en la universidad, las conversaciones sostenidas con otros pares sobre el tema y todos los elementos culturales y sociales que le han brindado un nuevo saber sobre el mismo.

En cuanto a las teorías implícitas, la noción de número entero por ser institucional, es decir encontrarse en los estándares curriculares del área, es de enseñanza obligatoria, en efecto alrededor de ésta se darán discusiones, metodologías, formas de enseñarla, temas mínimos a trabajar que el profesor empieza a interiorizar y construir como un saber.

En efecto, la construcción de cada uno de los saberes de esta noción no se da por aparte sino de manera integral ya que todos se aportan y se relacionan entre sí al conocimiento que el profesor construye de número entero, no es posible imaginar que el sujeto profesor un día enseñe la noción desde los guiones y rutinas, otro día desde las teorías implícitas, sino que el usa los cuatro saberes en el discurso intencional que da para enseñar dicha noción.

2.1.4.6. Síntesis

En el siguiente cuadro se sintetizan las categorías de conocimiento profesional para los autores ya mencionados:

Shullman (1986)	Conocimiento didáctico de contenido Conocimiento pedagógico

	Conocimiento curricular
Elbaz (1983)	Conocimiento práctico, que se relaciona con tres niveles del pensamiento práctico: reglas prácticas, principios prácticos e imágenes.
Clandinni y Conelly (1984)	Conocimiento práctico como la composición de "contenido experiencial como de filosofía personal, ritual, imagen y unidad narrativa"
Grossman P. (1990)	Conocimiento de contenido Conocimiento pedagógico general Conocimiento de contexto Conocimiento pedagógico de contenido
Porlán y Rivero (1998)	Ven el conocimiento profesional como aquel que el docente no integra, sino que están yuxtapuestos los cuatro saberes, para ellos el conocimiento deseable corresponde a la integración de los cuatro saberes que son: los saberes académicos, los saberes basados en la experiencia, rutinas y guiones y teorías implícitas.
Perafán (2004, 2011, 2012, 2013)	Comprende el Conocimiento Profesional Docente como Sistema de Ideas Integradas y propone una re significación de los cuatro saberes que constituyen dicha integración. En particular de la noción de saberes académicos y de su estatuto epistemológico fundante: la transposición didáctica. Introduce y desarrolla la noción de Conocimiento Profesional Específico del Profesorado, asociado a Categorías Particulares, con la cual muestra que la integración de los saberes y los estatutos epistemológicos se lleva a cabo alrededor de la producción de unas categorías específicas que construye el profesorado para la enseñanza.

3. METODOLOGÍA

Teniendo en cuenta que en esta investigación se pretendió identificar el conocimiento profesional específico del profesorado de matemáticas asociado a la noción de los números enteros, se optó por una investigación enmarcada en el paradigma cualitativo-interpretativo que según Restrepo (1996:116) "es fenomenológico, naturalista, subjetivo, lo que quiere decir que está orientado a la comprensión del proceso del fenómeno, lo estudia desde adentro y en su ambiente natural", o sea, que no tiene como objetivo la búsqueda de principios universales, sino la comprensión e interpretación de un hecho o caso particular, a partir de las atribuciones de sentido, por parte de los sujetos. En el caso de esta investigación, se trata de los sentidos que históricamente le han atribuido, un grupo de profesores experimentados de matemáticas, a la noción de número entero.

De acuerdo con lo anterior en este trabajo se concibe el conocimiento como una construcción social, en la que no es posible separar el objeto de conocimiento - el profesorado de matemáticas-, del sujeto mismo – el investigador - , puesto que son ellos quienes construyen a través de la interacción y mediados por la cultura y la historia lo que se denomina en esta investigación como conocimiento profesional específico del profesorado de matemáticas asociado a la noción de los números enteros. Entonces es así como la investigadora se convirtió en el principal instrumento de esta investigación, porque fue ella quien construyó la pregunta de investigación y le dio respuesta a la misma a partir de la interacción con los dos casos estudiados y con la comunidad académica –grupo de Invaucol-.

Para esta investigación se siguió a Stake para el estudio de caso, quien lo concibe como [el estudio de la particularidad y la complejidad de un caso singular, para llegar a comprender su actividad en circunstancias importantes (…) El caso es un sistema integrado] (Stake, 1999:16)

Los dos casos que se estudiaron corresponde a dos docentes de matemáticas (Santa y Moreno nombre con el que se denominaron) de grado 7° del Colegio Distrital Paulo Freire, porque a través de la interacción que se tuvo con ellos y de la observación de sus clases durante la enseñanza de la noción de los números enteros se identificó el conocimiento profesional que construyeron de dicha noción, a estos dos casos que se estudiaron se les denomina según Stake (1999) "estudio colectivo de casos" porque deben tener entre sí una buena coordinación.

Como en esta investigación se pretendió dar cuenta del conocimiento profesional específico del profesor de matemáticas asociado a la noción de número entero, hemos acudido a la obra de Stake en la que se plantea que cuando se investigan situaciones de esta clase de las que se tiene [una necesidad de comprensión general, (…) consideramos que podemos entender la cuestión mediante el estudio de un caso particular] (1998:16). Es decir, que se pretendió observar a un profesor de matemáticas durante el momento en el que estaba enseñando en el aula de clase la noción de números enteros aunque "quizá nos parezca oportuno elegir a varios profesores como objeto de estudio, y no sólo a uno" (Stake, 1998:17), puesto que cada uno de estos casos es un instrumento que permitió aprender sobre el conocimiento profesional del profesor para cada uno de los casos a estudiar. Para ésta investigación se estudiaron dos casos, que pertenecen a los dos profesores que se observaron y que corresponde a lo que Stake denominó el estudio colectivo de casos (Stake, 1988:17). Razón por la que hay un protocolo de observación por cada profesor o caso, que se utilizó en cada una de las sesiones observadas.

Esta investigación se desarrolló en cuatro fases, la primera correspondió a la elaboración de los marcos teóricos en los que se comprende, en buena parte, la historia de la línea de investigación del conocimiento profesional del profesor y la construcción histórica y epistemológica del concepto de número entero, en la segunda fase se seleccionaron y estructuraron los instrumentos de recolección de datos, en la tercera se aplicaron dichos instrumentos (protocolo de observación, revisión de documentos construidos por ellos, entrevistas, entre otras), y en la cuarta fase se realizó el análisis de la información en el

Analytical Scheme y luego la interpretación a partir de la triangulación de la información obtenida y por último la presentación de resultados en este trabajo.

3.1 . TÉCNICAS E INSTRUMENTOS DE RECOLECCIÓN DE DATOS

A continuación se describirán brevemente las técnicas e instrumentos que se utilizaron para recoger la información requerida para esta investigación, es importante aclarar que algunos instrumento fueron construidos colectivamente en el marco de la Maestría en Educación en el espacio académico del Seminario Proyecto de Investigación. Así, en el proceso de revisión y discusión de los aspectos relacionados con la fundamentación teórica del protocolo de observación, que se presentan a continuación, participamos los estudiantes de la línea de INVAUCOL (código 2010-2) a partir de un documento conceptual elaborado por el director del seminario: el profesor Andrés Perafán. Por nuestra participación en dicha discusión, y algunos aportes puntuales que realizamos, el profesor Perafán ha autorizado a todos los estudiantes de dicho seminario que transcribamos textualmente, como parte del capítulo de metodología, las construcciones conceptuales que constituyen dicho protocolo. Por esta razón, la mayoría de las Tesis, tanto de maestría como de doctorado que él dirige, en esta línea, con su autorización, comparten literalmente esta construcción. La diferencia, en este punto, radica básicamente en la especificidad del área del profesorado y de la categoría concreta que cada investigación asume.

Por otra parte, para el análisis de la información, hemos aplicado el Analytical Scheme elaborado por Perafán (2011), el cual, a nuestro juicio, constituye una poderosa herramienta de análisis para la información relacionada con el Conocimiento Profesional Específico del Profesorado, asociado a categorías particulares, como ha sido el caso de mi investigación. Por último, hemos aplicado una entrevista de reconocimiento cuya elaboración compartimos con la profesora Sonia Espinosa, también estudiante de la Maestría en Educación perteneciente a la línea de INVAUCOL.

3.1.1. Observación participante.

Esta técnica permitió observar hechos e interacciones significativas que ocurrieron dentro del aula asociados a la noción de números enteros, protagonizados por cada uno de los casos estudiados. El registro se realizó en un formato derivado de la estructura del protocolo de observación.

3.1.2. Protocolo de observación de clase

Teniendo en cuenta que el problema a estudiar es el conocimiento profesional específico del profesor de matemáticas asociado a la noción de los números enteros, y que una de las técnicas mencionadas para acceder a esta realidad fue la observación participante, debido a que permitió observar todos los hechos e interacciones significativas que ocurren dentro del aula, se optó, como ya ha sido mencionado anteriormente, por la utilización de un protocolo de observación, cuya particularidad obedece a haber sido pensado y construido en función de la identificación de formas de argumentación adecuadas a la categoría Conocimiento Profesional Docente como Sistema de Ideas Integradas, a la que ya hemos hecho alusión en el marco teórico (ver anexo 7.1) .

El protocolo de observación se utilizó en cada una de las clases observadas, llevando un registro a mano de forma organizada, en el que se registraba el caso que se estudiaba, la temática asociada a la noción, y los episodios asociados a cada una de las temáticas que conforman el saber del profesor, todo esto acompañado de la grabación de audio y video.

Una de las ventajas de este instrumento es que permite llevar el registro organizado cronológicamente –característica que facilita la triangulación con el audio y video de las clases- , y la posibilidad de que la investigadora de cuenta de las razones por las que determinado episodio pertenece a alguno de los saberes que integran el conocimiento específico del profesor, en el mismo instante en el que lo identificó.

Sin embargo por ser un registro escrito a mano, que se va diligenciando en el desarrollo de las clases, es difícil escribir al pie de la letra los episodios del discurso del profesor, dificultad que se supera con las grabaciones de audio y video de manera que no se pierde un solo detalle de lo ocurrido en el aula y hace que la información consignado en el protocolo sea más rigurosa.

3.1.3. Registro de clase en audio y video

Esta técnica se usó para complementar la información que se registró en el protocolo de observación, en la entrevista y en la técnica de estimulación del recuerdo, puesto que mientras la investigadora se encontraba aplicando la técnica de observación –auscultando en la enseñanza interactiva posibles episodios que dieran cuenta de los cuatro saberes que integran el conocimiento profesional del profesorado de matemáticas, asociado a la noción de números enteros-, al mismo tiempo se iba llevando un registro, en audio y vídeo, de la clase.

La grabación de audio permitió tener todo el registro de cada clase observada, de tal manera que no se perdiera ningún detalle de lo dicho por el docente frente a la noción que se está estudiando del conocimiento profesional del profesorado de matemáticas y así se pudo seguir extrayendo episodios que permitieron dar respuesta a la pregunta de investigación.

La grabación en video permitió observar todas las expresiones, gestos, señas y demás que realizó el profesor cuando estaba enseñando la noción de los números enteros, puesto que éstas también hacen parte del texto que se está leyendo de la clase. En este sentido esta operación de semiótica que se pregunta por qué una imagen, un conjunto de palabras, un gesto, un objeto, un comportamiento en el aula pueden significar, permitió enriquecer los episodios identificados en la grabación del audio y en el protocolo de observación a partir del contexto.

3.1.3.1. Transcripción de audio y vídeo

Esta transcripción se realizó, después del registro en el mp3 y en la videocámara, de cada una de las técnicas en las que fueron aplicadas a los dos casos que se estudiaron, este registro se hizo para identificar cada uno de los episodios asociados a la noción que se está estudiando para que luego permita realizar un análisis de estos frente a cada uno de los saberes que integran el conocimiento profesional específico del profesorado de matemáticas.

3.1.4. La Entrevista

Es una técnica que considera que las personas pueden ofrecer una explicación de sus actuaciones y conductas a quienes pregunten sobre ellas, [es una forma de interacción personal que permite el intercambio de ideas (…) no es una simple forma conversacional] (Ortiz, 2007:17) porque permite conocer las opiniones, saberes y creencias de cada una de las personas entrevistadas. Se considera que la entrevista en la actualidad contribuye en el desarrollo de la investigación en las ciencias sociales y humanas, incluyendo el campo de la educación.

Para esta investigación se realizaron entrevistas semiestructuradas, que consistieron en tener unas preguntas previamente elaboradas pero su orden de formulación dependió del desarrollo de la misma entrevista. En este sentido tuvo la ventaja de que las preguntas fueron abiertas de manera que permitieron que el entrevistado se expresará libremente y de que el entrevistador a partir de las respuestas formulará nuevas preguntas o profundizará de tal manera que ayudó a mejorar la comprensión del hecho o situación por la que se indagó.

Entonces la entrevista fue empleada como una técnica que apoyó la investigación en educación, por tanto necesitó de la preparación de una serie de momentos como son: la presentación de la entrevistadora (investigadora) con el entrevistado (profesor), el planteamiento de un objetivo claro para la elaboración de la entrevista, la elaboración de las preguntas que apuntan a dicho fin, el desarrollo de la entrevista que puede quedar evidenciada en una grabación en audio y/o video, para que luego el entrevistador pueda interpretar los datos construidos por el entrevistado.

Se entiende como presentación de la entrevistadora con el entrevistado al momento en que los dos se conocen y acuerdan una cita en la que puedan desarrollar el contenido de la entrevista. Para el caso de esta investigación es importante mencionar que antes del proceso de la entrevista ya se habían realizado varios encuentros previos entre las dos partes al utilizar la técnica de observación participante. Estos encuentros entre pares permitieron generar las condiciones de comunicabilidad, es decir, crear un campo de resonancia cultural entre las dos partes logrando la emergencia de unos códigos comunes, a partir del reconocimiento del contexto y de la historia de vida, así el profesor se pudo expresar tranquilamente con la investigadora.

Como lo afirma Ortiz el objetivo de la entrevista debe ser coherente tanto con el objetivo como con el problema de investigación, es decir

> que definir el objetivo es un punto central que sirve de 'guía' para no desviar ninguna de las actividades, por lo que el investigador lo tendrá presente durante todo el proceso de investigación, esto es, ninguna actividad se aparta de él (Ortiz, 2007:96).

Para esta investigación y entrevistas el objetivo fue caracterizar e identificar el conocimiento profesional específico que mantienen los docentes de matemáticas asociado a la noción de los números enteros, el cual se encuentra integrado en los saberes académicos, saberes basados en la experiencia, las teorías implícitas y los guiones y rutinas.

Durante el desarrollo de la entrevista se utilizaron los medios de audio y video para que quedaran grabadas y registradas las preguntas y respuestas expresadas durante el proceso de aplicación de la misma, esto con la finalidad de que la investigadora interpretara los datos arrojados por los entrevistados. Dada la complejidad de la comunicación y los aspectos que influyen en la codificación y descodificación de los mensajes, el video permitió hacer una lectura crítica desde la semiótica de todos los gestos, expresiones corporales, y demás que los entrevistados realizaron, puesto que a partir de estos, el investigador se dio a la tarea de construir los significados y los significantes desde las imágenes observadas y lo registrado en el audio.

Para esta investigación se realizaron dos entrevistas una de reconocimiento y otra de profundización. La de reconocimiento, -por tener el carácter que indica su nombre-, se realizó antes de que la investigadora finalizará el proceso de observaciones de clase, pero en un espacio diferente al desarrollo de las mismas. Ésta entrevista, fue diseñada con preguntas abiertas previamente elaboradas por la investigadora, cuyas respuestas obtenidas aportaron elementos de reconocimiento del profesor frente a su experiencia y su formación profesional, y además contribuyeron a esclarecer las construcciones que ha realizado frente a la noción de número entero.

La segunda entrevista se denomina de profundización porque permitió generar otras preguntas a partir de las situaciones, hechos, actitudes interesantes del profesor y de las respuestas de la primera entrevista, evidenciadas por la investigadora después de haber analizado minuciosamente la grabación en audio y los videos realizados durante el proceso de observación participante y que ayudaron a dar respuesta a la pregunta de investigación.

3.1.4.1. Descripción del formato de entrevista

A continuación se realiza una breve descripción del formato empleado en la entrevista de reconocimiento y cuyo anexo se encuentra al final de este trabajo (Ver anexo 7.4). Dicho instrumento está compuesto por 3 ejes que son las preguntas de tipo informativo, las de caracterización y las relacionadas con el conocimiento profesional del profesor asociado a la noción. Las informativas permitieron organizar cada una de las entrevistas que se realizaron a cada uno de los profesores a estudiar, no son preguntas que contribuyen a solucionar el problema a investigar.

Las preguntas de "caracterización" permitieron tener una conversación más cercana con el entrevistado puesto que se indagó por la formación profesional y la experiencia que posee el sujeto profesor, además se pudo evidenciar que los profesores estudiados ya han construido la noción que se está investigando debido a que no son profesores noveles, sino que cuentan con una amplia trayectoria laboral que les ha permitido ir elaborando la noción a partir del recorrido realizado por varias instituciones o una sola durante un largo período de tiempo (mayor a 5 años), además de la interacción con otros profesionales del área, sus estudiantes y el enriquecimiento que hacen de ésta a partir de su propia historia de vida y formación como docente.

En el último eje se presentan las preguntas que ayudaron a esclarecer el Conocimiento Profesional del Profesor en coherencia con los objetivos específicos planteados para abordar este problema de investigación, atendiendo a que tener unos objetivos claros en la elaboración y formulación de las preguntas centró la atención en el problema que se estudió. Las preguntas se encuentran formuladas de tal manera que el profesor entrevistado pueda dar cuenta de la construcción que ha hecho de la noción frente a cada uno de los saberes que integran el conocimiento profesional del profesor, así cuando la investigadora realizó la triangulación de todos los instrumentos pudo dar cuenta de la complejización de estos saberes.

3.1.5. Análisis de productos culturales

Los productos culturales reflejan los indicadores de la cultura institucional de quienes los han realizado. Ésta técnica se utilizó en la revisión del programa para grado 7º propuesto en el plan de estudios y el PEI, puesto que estos documentos están relacionados con el contexto institucional contribuyendo a evidenciar las teorías implícitas del profesor de matemáticas en relación a la noción de número entero.

3.1.6. Pensamiento en voz alta

Esta técnica surge en la investigación psicológica (Simon, 1984), sin embargo es utilizada en estudios sobre el conocimiento del profesor, en los que se busca que el maestro verbalice sus pensamientos, ideas y decisiones, especialmente para la fase pre-activa de la planificación. Como afirma Perafán [la naturaleza de esta técnica la hace apropiada para espacios en los cuales el profesor se encuentra enfrentado individualmente con su tarea (…) sin embargo deviene difícil para su aplicación en los contexto de la enseñanza interactiva] (2004: 117).

Aunque Perafán es consciente de la complejidad de utilizar esta técnica en la enseñanza interactiva, demostró que sí es posible aplicarla con éxito en la enseñanza interactiva, logrando así algún tipo de registro de los pensamientos que le ocurren al profesor mientras está enseñando, lográndose de esta manera

> [identificar en qué puede consistir la técnica de pensamiento en voz alta en la enseñanza interactiva, y cómo puede aplicarse sin que interrumpa el flujo normal de los acontecimientos en el aula (…) se convirtió de esta manera en un poderoso instrumento de identificación y de registro (orientado) de pensamientos en la enseñanza interactiva] (Perafán, 2004: 117).

De manera que esta técnica fue aplicada en dos momentos diferentes, durante la enseñanza preactiva y la enseñanza interactiva. En el primer momento se les solicitó a los profesores estudiados que grabaran en audio todos sus pensamientos durante la planificación de sus clases. En el segundo momento, se les solicito que durante una clase grabara los pensamiento que tenía frente a su actuar y las decisiones que tomaba durante la misma, esto con el objeto de registrar lo que el profesor piensa de la noción de número entero, cuando la enseña.

3.1.7. Técnica de estimulación del recuerdo.

Esta técnica es utilizada para identificar los pensamientos y las decisiones interactivas que toman los docentes, Perafán afirma que “su eficacia radica en la capacidad de estimular la recuperación de principios de acción que de otra manera permanecerían tácitos en la acción del profesor y, por lo tanto, ocultos a la investigación interpretativa” (2004: 118). Esto se logra a partir de videos y de grabaciones de audio en las que se observa que el docente hace referencia al concepto de número entero, estas son mostradas a los docentes estudiados y se les pregunta por dichas situaciones.

Para este trabajo, la investigadora después de haber transcrito las clases observadas y de haber realizado su respectivo análisis relacionando cada episodio a cada una de los saberes que integran el conocimiento del profesorado de matemáticas asociado a la noción de número entero, realizó una selección de episodios de los videos grabados de cada sesión de clase, la elección correspondía a aquellos episodios en los que se intuía la presencia de esos saberes tácitos (guiones y rutinas y teorías implícitas) del profesor. Estos episodios se editaron en otro video los cuales fueron mostrados uno por uno a el profesor y se le preguntó con qué o a qué asociaba dicha acción o palabra de cada corte del video, con esto se logró "hacer" evidentes esos saberes de los cuales el profesor no es consciente por sí solo sino que lo logra a través de otra persona que formula las preguntas "indicadas" para que estos salgan a la luz. Cabe aclarar que si bien la mayoría de episodios seleccionados hacen alusión a esos saberes tácitos también hubo algunos relacionados con los saberes explícitos (saberes académicos y saberes basados en la experiencia) con el fin de corroborar la información ya obtenida a través de otras técnicas.

Durante la aplicación de esta técnica también se hizo registro de audio y video, que luego fueron transcritas para realizar su respectivo análisis.

3.2. ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE DATOS

El análisis e interpretación de datos constituyeron dos procesos fundamentales para la solución de la pregunta de investigación planteada en este trabajo. El análisis realizado permitió identificar en los profesores estudiados, cada uno de los saberes que integran su conocimiento específico asociado a la noción de número entero, a partir de la observación y de la transcripción de cada una de las técnicas ya mencionadas, en las que se recogió sus pensamientos, discursos y acciones durante la enseñanza.

La interpretación entendida como un proceso de construcción de ideas, que emerge de los indicios que da el análisis realizado con base en la teoría que soporta la investigación. Estos indicios son, [entre otros, repetición de incidentes, uso de las mismas palabras (…), irregularidades que se observan] (Perafán, 2004: 123), y psicopatologías de la vida cotidiana (Freud, 1901).

Entonces la interpretación va más allá del análisis del discurso, -aunque está se refleje en él-, debe tener en cuenta el contexto del cual emergen todos estos indicios para así comprender las actuaciones y pensamientos del profesor.

3.2.1. El Analytical Scheme

El Analytical Scheme es un instrumento que permite organizar la información obtenida, tras la aplicación de las diferentes técnicas, en episodios que guardan relación con cada una de las fuentes del saber asociados con las categorías centrales. En esta investigación se mantuvo, en términos generales, el Analytical Scheme elaborado por Perafán (2011, 2013). De esa manera se procedió aplicar este instrumento como base para la organización, análisis e interpretación de los distintos datos-discursivos provenientes de fuentes diferentes, tales como: transcripción de audio y vídeos de clases, entrevistas, protocolo de observación y técnica de estimulación del recuerdo.

Para ello el procedimiento que se realizó fue el siguiente: 1) transcripción del discurso del profesor encontrado en cada técnica, la cual se realizó utilizando el audio sólo como fuente; 2) revisión y complementación de la transcripción con las fuentes de audio y video, esto con el objeto de darle un sentido preciso al texto ya transcrito y garantizar que este corresponde realmente al discurso y a la intencionalidad que el profesor le dio durante la enseñanza de la noción; 3) se paso la transcripción a la columna correspondiente en el formato del Analytical Scheme en el que se inició un proceso de organización más sistemático, dividiendo así el texto por episodios que es “la unidad mínima de sentido trascrita e identificable en un conjunto continuo de párrafos” (Perafán 2004, 120) y numerándolos; y 4) cada episodio se analizó en la tercera columna del instrumento utilizando los 17 tipos de argumentos propuestos por Perafán (2011) en el esquema en cuestión, teniendo cuidado de identificar exactamente el argumento al que pertenecía cada episodio y dando las razones teóricas del por qué (Ver anexo 7.2).

Estos 17 argumentos corresponden a las categorías presentes en el conocimiento profesional del profesor y el conocimiento profesional específico del profesor, permitiendo la identificación de episodios relacionados con los saberes académicos, los saberes basados en la experiencia, los guiones y rutinas y las teorías implícitas, de manera que garantiza una asociación correcta de cada uno de estos con los episodios presentes en el discurso del profesor frente a la noción específica que se está investigando, siendo así una potente herramienta para organizar, analizar e interpretar los datos relacionados con el conocimiento específico del profesor, asociado en este caso a la categoría número entero (Perafán, 2011).

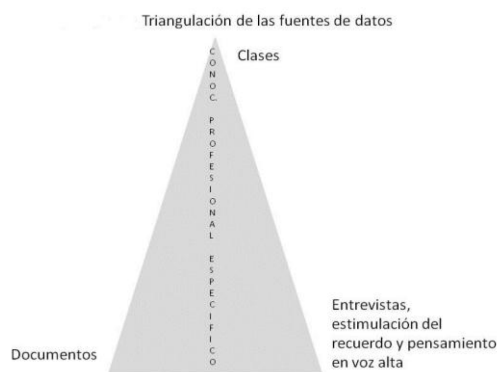
Por último, este instrumento tiene como ventaja centrar aún más la atención de la investigadora, en el problema de investigación, puesto que en los argumentos que se utilizan para el análisis están presentes los estatutos fundantes y las dimensiones (explícitos - tácitos) de los saberes que integran el conocimiento del profesor, lo que facilita y da mayor validez a la interpretación que se realizó de la información.

3.3. TRIANGULACIÓN

En esta investigación se realizó un proceso de triangulación, entendido como el cruce de todas las diversas fuentes de información encontradas y técnicas aplicadas a los dos casos estudiados, buscando la intersección entre los datos para así identificar el conocimiento profesional específico del profesorado asociado a la noción de número entero. Esta definición parte de lo que Stake (1999) comprende por triangulación en la investigación interpretativa, proceso ordenado que valida a la misma, puesto que no se queda únicamente en las intuiciones de la investigadora, sino en el cruce ordenado de las diferentes técnicas y fuentes de obtención de información.

Las diversas estrategias de triangulación utilizadas en esta investigación (análisis comparativo de fuentes, triangulación de metodología e intercambio de saberes con otros pares, formuladas por Denzin en 1989 y recogidas por Stake 1999) permiten realizar una revisión continua de la interpretación que se le da a cada uno de los casos estudiados, de tal manera que lo encontrado en éstos tenga validez para la comunidad académica, así los resultados que corresponden a la interpretación final realizada provienen de un proceso riguroso, reflexivo y comparativo de los datos obtenidos en los que se encuentran los casos estudiados.

Según Stake los investigadores interpretativos han sostenido que “la triangulación de las fuentes de datos es el esfuerzo por ver si aquello que observamos y de lo que informamos contiene el mismo significado cuando lo encontramos en otras circunstancias” (1999: 98). Circunstancias que en esta investigación se evidencian al observar al profesor no sólo en el aula de clase cuando se enfrenta a la enseñanza directa de la noción, sino también en la reflexión que él hace de su acción y del reconocimiento de sus saberes (en este caso a través del espacio de las entrevistas y de la estimulación del recuerdo), momentos que tienen características diferentes en cuanto a tiempo, espacios y personas, y que por tanto podrían hacer que éste pensara de manera diferente.



Estos métodos que acompañaron la obtención de datos de fuentes, como la estimulación del recuerdo, la entrevista y el pensamiento en voz alta, fueron organizados en episodios y revisados en el Analytical Scheme, para que como lo afirma Stake

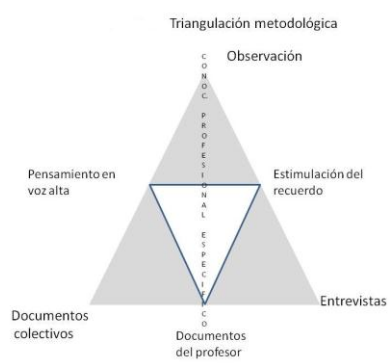
> con enfoques múltiples dentro de un único estudio es probable que clarifiquemos o anulemos algunas influencias externas. Cuando hablamos de métodos en los estudios de casos, nos referimos una vez más sobre todo a la observación, la entrevista y la revisión de documentos (Stake, 1999: 99)

La triangulación metodológica, consiste en el cruce o intersección de las categorías comunes que se encontraron a partir de la información proveniente de diversas fuentes, ésta se llevo en un cuadro que se denominó “Esquema Analítico Sintético de las Transcripciones” en el que se ubicaba los episodios que correspondían a cada una de los saberes encontrados en el Analytical Scheme, para luego identificar aquellos que siempre están presentes durante las diferentes técnicas aplicadas al profesor en momentos diferentes (Ver Anexo 7.3). En este caso el cruce de información proveniente de:

- Las observaciones de clase, en las que se observan episodios de trabajo en grupo, trabajo individual, explicaciones en el tablero, participación de los estudiantes, entre otros. Episodios que permiten identificar la noción de número entero que ha construido el profesor durante la enseñanza.

- Los documentos institucionales como el PEI, la planeación, el programa de grado séptimo y el plan de estudios.

- Las entrevistas realizadas a los profesores, donde podían dar cuenta de cada una de las categorías que integran el conocimiento del profesor.



Por último se utilizó la estrategia de triangulación de la teoría “dado que nunca dos investigadores interpretan las cosas de una forma completamente idéntica” (Stake 1999, 98), entonces la investigadora presentó sus interpretaciones de los casos estudiados, a otros pares y a su director de tesis, las cuales fueron discutidas y reevaluadas a la luz del marco teórico que soporta esta investigación en espacios como el SPI y las tutorías, esta revisión constante dio como fruto nuevas interpretaciones y validaciones de lo ya presentado, además aportó datos adicionales que permitieron comprender mejor los casos estudiados. Además se compartió las interpretaciones realizadas con los casos estudiados de manera que lo que se identifica como conocimiento profesional del profesorado frente a la noción de número entero, corresponda en un estricto sentido a los construidos por los profesores estudiados.

Entonces las interpretaciones finales obtenidas en esta investigación "son el resultado de un trabajo cuidadoso (realizado por el investigador), de tejedor de relaciones semánticas entre diferentes datos, fuentes, métodos y puntos de vista de distintos sujetos sobre un eje particular" (Perafán 2004: 127), que corresponde al conocimiento profesional específico del profesorado de matemáticas que participó en la investigación asociado a la noción de número entero.

4. ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN

En este capítulo se presenta el proceso de identificación, caracterización e interpretación de los cuatro saberes que integran el conocimiento profesional del profesorado de matemáticas asociado a la noción de número entero. Dicho proceso se llevó a cabo a partir de la triangulación realizada y del análisis de los datos provenientes de cada una de las técnicas metodológicas aplicadas a los profesores Santa y Moreno -quienes son los dos casos estudiados-.

El proceso de triangulación se realizó utilizando cada una de las estrategias mencionadas por Denzin (1984) y recogidas por Stake (1999), las cuales permitieron evidenciar las categorías que con mayor frecuencia se hacen presentes en el discurso del profesor durante la enseñanza de la noción de número entero.

En la primera parte de este capítulo se presentan los saberes desagregados que integran el conocimiento del profesorado respecto a la noción de número entero, es decir se muestran por separado las categorías encontradas frente a los saberes académicos, los saberes basados en la experiencia, las teorías implícitas y los guiones y rutinas, que como se ha dicho son los saberes que se encuentran integrados en el conocimiento del profesorado de matemáticas.

En la segunda parte, se expone la construcción del profesorado acerca de la noción de número entero de forma integrada, o sea, se retoman los saberes desagregados en el discurso del profesor y se presentan como un cuerpo integrado de conocimiento, que es el que él utiliza en la enseñanza de la noción y que ya fue desagregado.

Por otra parte, frente al criterio elegido para escoger las metáforas, analogías o imágenes que se presenta en cada una de los saberes del profesorado, se tuvo en cuenta la frecuencia con la que aparecían éstas en la triangulación de los datos construidos durante la aplicación de los instrumentos, puesto que dicha frecuencia muestra la importancia que tienen las mismas en el discurso y en el quehacer del profesor. Estas metáfora o imágenes elegidas son construcciones propias de los docentes estudiados que han interiorizado bien sea como fruto de la reflexión en la práctica, de su propia historia de vida, de ese entramado de relaciones que es la institución y/o de la intencionalidad de la enseñanza –estatutos epistemológicos de los cuatro saberes-.

4.1. DE LOS SABERES ACADÉMICOS ASOCIADOS A LA NOCIÓN NÚMERO $\mathbb{Z}$.

En el saber académico, que tiene como fundamento epistemológico la transposición didáctica en el sentido de Chevallard (1991) se hacen presentes frecuentemente dos metáforas en las clases de los profesores observados, que son la metáfora *mostrar* y la metáfora *recta numérica*.

4.1.1. Mostrar como metáfora polisémica que conduce a la construcción del sentido escolar de número entero.

La metáfora “mostrar” en el discurso del profesorado hace alusión a cuatro sentidos diferentes: el primero, responde a una comparación que realiza entre dos conjuntos numéricos que en este caso son los $\mathbb{N}$ (naturales) y los $\mathbb{Z}$ (enteros); el segundo, corresponde a una analogía entre los dos conjuntos $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$; el tercero, concretiza el conjunto numérico, dándole una existencia “real” a los $\mathbb{Z}$; y el cuarto se relaciona con lo abordado por la disciplina de las matemáticas sobre los $\mathbb{Z}$.

4.1.1.1 Mostrar como forma de apelación al sujeto para construir comparaciones necesarias que conduzcan a la noción escolar de $\mathbb{Z}$.

En el primer sentido de la metáfora mostrar, el profesorado realiza algunas comparaciones entre el conjunto de los $\mathbb{N}$ y los $\mathbb{Z}$, haciendo evidente “la incompletitud” del primer conjunto, es decir la imposibilidad de resolver ciertos algoritmos debido a la carencia de ciertos elementos y propiedades que el conjunto de los $\mathbb{Z}$ a diferencia del de los $\mathbb{N}$ si posee. Estas comparaciones surgen en la primera sesión, cuando los profesores están empezando a enseñar el tema de los números enteros, correspondiendo este tipo de imposibilidad a la necesidad de que aparezca un nuevo conjunto numérico para poder realizar las operaciones que con los números naturales no se pueden resolver. En efecto, la clase registrada del 20 de marzo de 2012 del profesor Moreno presenta en repetidas ocasiones la metáfora mostrar, el texto es el siguiente:

Episodio39
P: ¿y el resultado que es 3 también es un número natural?, ¿qué otra operación existe con números naturales?
Episodio40
E: Resta,
P: bueno les voy a **mostrar** y el problema me lo voy a inventar yo. Resta, ¿2 es un número natural?
E: si
P: ¿3 es un número natural?
E: si
P: ¿y 2 -3 cuánto da?
E: 1
Episodio41
P: 1 no da
E: cero
P: Cero tampoco da
E: 5
P: No, -1 ¿por qué dará -1?
P: ese pertenecería a los enteros, entonces les **mostré** que la resta con números naturales, tenía sus problemitas, solamente que en primaria el profesor siempre les cuadro los números para que no les saliera negativo, les dejó el más grande de primeras y el más pequeño de segundo, pero aquí ya les voy **mostrando** que el natural en la resta tiene su problemita ¿qué otra operación en esta fila (refiriéndose a una fila de estudiantes)? ¿Qué otra operación hay con …
E: multiplicación

Como se observa en los episodios presentados, la metáfora "mostrar", responde a la intencionalidad de enseñar el conjunto de los $\mathbb{Z}$, esta intencionalidad se evidencia en el tipo de problemas que el profesor le plantea a sus estudiantes, en los que él ya sabe que la solución del mismo tiene que arrojarlos a ese número entero, de no tener la intencionalidad de enseñar ésta noción en la clase presentada, habría formulado ejercicios con los que los estudiantes están familiarizados en cuanto a su solución, procedimiento y conjunto numérico. A partir de este tipo de preguntas o problemas suscitados desde la intencionalidad de la enseñanza el profesor le genera al la necesidad de "trabajar" con otra clase de números para resolver los algoritmos básicos, de ésta manera la noción de $\mathbb{Z}$ tiene significado para los estudiantes, no se convierte en un tema más agregado al currículo, sino que lo encuentren necesario dentro de la materia que están aprendiendo.

Además, en la entrevista de reconocimiento los profesores mencionan que una de las preguntas más frecuentes de sus estudiantes es "para qué sirve" el tema que están viendo, a este interrogantes los profesores tratan de dar respuesta desde la necesidad de la matemática escolar, en este caso la solución o respuesta de algunos algoritmos y problemas, aparte de el de la cotidianidad que se examinara más adelante. En efecto, en la entrevista de reconocimiento realizada al profesor Santa el 22 de marzo de 2012, se puede leer lo siguiente:

Episodio 16
I: Cuando tú estás enseñando la noción de número entero, en el aula, ¿Cuáles son las preguntas más frecuentes que te formulan los estudiantes frente a eso que tú estás enseñando? O que tengas así, esta no puede faltar, esa pregunta cuando yo estoy enseñando ese tema.
P: Profe, pero ¿Eso lo vemos?, profe, ¿Existen? Ola otra, ¿Cómo nosotros? O **¿Cuál es la utilidad?**, yo creo que es la pregunta más constante que se hace frente a todos los conceptos que se enseñan en la escuela, **¿Para qué me sirve**? Yo les digo que para resolver ejercicios como los que se trabajan en clase y los que resolverán más adelante con otras temáticas que van a ver en otros cursos, como por ejemplo para resolver ecuaciones en álgebra y en cálculos que no se pueden hacer solo con los números que ven en primaria sino que necesitan ampliar ese conjunto y el primer paso son los enteros, pero también trato de mostrarles una utilidad práctica en algo, bien sea ciencias, contabilidad, lo que sea.

Como se puede evidenciar en el texto anterior se observa que el profesor Santa brinda como explicación a sus estudiantes frente al para qué sirve la enseñanza de los $\mathbb{Z}$ en la escuela, argumentos de incompletitud del conjunto numérico que vieron en su primaria ($\mathbb{N}$**)**, afirmando que con éste no podrán resolver otro tipo de ejercicios de matemáticas más avanzadas como es el caso del cálculo, en su discurso se hace evidente la necesidad de agrandar el universo numérico debido a las imposibilidades que se presenta en la solución de algoritmos cuando no se domina éste completamente.

4.1.1.2 *Mostrar como forma de apelación al sujeto para promover estados de transferencia de características entre tópicos diferentes que conducen a la construcción de la noción escolar de* $\mathbb{Z}$

En el segundo “mostrar” que en este contexto es entendido como una metáfora pero en el sentido de una forma de enseñanza para el profesorado, en la que se hace evidente una “especie de transferencia” de propiedades y características de los números naturales a los números enteros, de tal forma que los $\mathbb{Z}$ al igual que los $\mathbb{N}$, poseen las propiedades de orden, se pueden ubicar en la recta numérica y permiten realizar las cuatro operaciones básicas (suma, resta, multiplicación y división).

Este mostrar se hace presente en la clase del 14 de marzo de 2012 del profesor Moreno, en la que él está explicando la conformación del conjunto de los números enteros. El texto es el siguiente:

Episodio28

P: entonces, listo Números enteros. La primera parte de la clase **mostramos** que los números enteros eran la unión de dos conjuntos, por acá estaba el 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 sucesivamente y ese conjunto ¿cómo se llamaba? … los … naturales.

Episodio29

P: **mostramos** que los enteros salían de deudas muchas veces, entonces los enteros también decíamos en esa clase, que **eran como los mismos números naturales pero con signo menos**, entonces aquí quedaba -1, -2, -3.   (dibuja la recta numérica con los enteros positivos y negativos)

El “mostrar” como forma de apelación al sujeto para promover estados de transferencia de características entre tópicos diferentes que conducen a la construcción de la noción escolar de $\mathbb{Z}$ también se presenta en la sesión del 15 de marzo de 2012 del profesor Santa, el texto es el siguiente:

Episodio 45

P: **los números enteros al igual que los números naturales tienen la propiedad del orden**, podemos **mostrar** que un número es mayor que otro, menor que otro o igual que otro

Episodio 46

P: inicialmente los vamos a ordenar usando la recta numérica (dibuja una recta en el tablero), listo

E: ¿la dibujamos?

P: si

En estos dos episodios se observa la transferencia de la propiedad de orden de un conjunto numérico a otro, orden que en este caso está dado por la posición que ocupe el número sobre la recta numérica.

Episodio 47

P: para organizarlos **vamos a manejar las mismas tres reglas que usamos con los números naturales**, esos que ustedes vieron desde primaria: la primera que les voy a **mostrar** es cuando un número está a la derecha de otro es mayor ese. Díganme dos números de la recta

E: -4 y 6

P: (encierra con un círculo los números mencionados por el estudiante), miren la recta ¿cual número está a la derecha?

E: el 6

En estos episodios el profesor transfiere a los números enteros, las reglas de orden de los números naturales en cuanto a la posición que ocupa el número sobre la recta numérica.

En síntesis, como puede verse en los episodios inmediatamente anteriores, este “mostrar” como forma de apelación al sujeto para promover estados de transferencia de características entre tópicos diferentes que conducen a la construcción de la noción escolar de $\mathbb{Z}$, que mantiene el profesorado de matemáticas en su discurso, tiene la intencionalidad de enseñar a los sujetos estudiantes otro conjunto numérico a partir de la relación que guarda el conjunto de los números naturales con los números enteros, explicándoles que los naturales son los mismos enteros positivos, y que los enteros negativos son los naturales pero con el signo menos a su izquierda, además, les presentan la posibilidad de organizarlos en la recta numérica y así establecer relaciones de orden de la misma manera que se establecen con los naturales, es decir el número mayor siempre se encontrará a la derecha de otro número con el que se compara.

4.1.1.3 Mostrar como formas de apelación al sujeto para favorecer la condición de situado, en la construcción de la noción escolar de $\mathbb{Z}$

El tercer “mostrar” tiene que ver con el sentido que le otorga el profesorado a los enteros para justificar su existencia desde la “realidad”, asignándoles contextos a los enteros positivos como el ganar dinero (rifa, regalo, trabajo, etc.), el ascender, el tener una temperatura por encima de cero, y a los negativos contextos como el perder dinero (gastar, fiar, botar), temperaturas bajo cero, etc. Él mismo profesor manifiesta que él no debería enseñar los números enteros de esta forma, sin embargo lo hace porque es “hacer como una transposición rápida del número natural al número entero que lo precede un signo y que eso es una deuda, ahí es lo que maneja y ya a partir de eso el resto lo desenvuelvo siempre girando en torno a deudas y ganancias” (entrevista de reconocimiento, Episodio 9, profesor Moreno, 3 de julio de 2012).

El profesor reconoce que en este modo de enseñar está el trabajo que él realiza de transposición, que es el que le permite llevarles este tema a sus estudiantes, de una forma en que ellos lo puedan comprender.

De modo que la intencionalidad de la enseñanza de este “mostrar” alude a que el sujeto estudiante vea la utilidad que presenta en su vida cotidiana el dominio matemático de este conjunto numérico, de ahí el hecho de que el profesor presente situaciones cotidianas en la enseñanza de los $\mathbb{Z}$. Además, el planteamiento de este tipo de contextos sugiere la intencionalidad de enseñar a los estudiantes los subconjuntos de los números enteros ($\mathbb{Z}^+$ y $\mathbb{Z}^-$) como elementos opuestos. Esta situación se evidenció durante las 17 sesiones de clase observadas en ambos profesores, en más del 70% de los episodios analizados. A continuación se mostrará la sesión del 28 de marzo de 2012 del profesor Moreno, el texto es el siguiente:

Episodio73
E:-7000
P: entonces la deuda se puede **mostrar** con un número negativo
Episodio74
P: Me han pagado 28000.
E: entonces + 28000
P: + 28000 que es un número positivo nos **muestra** algo como una ganancia lo contrario a una deuda, listo entonces van llenando ahí al frente las respuestas que podamos.
Episodio75
E: Profe una pregunta, El submarino se sumerge 32 metros bajo el nivel del mar ¿Es -32?
P: Correcto – 32, porque es bajo en nivel del mar y se **muestra** ese estado con un negativo.
Váyanlo contestando ahí.

Este conocimiento situado del número entero, se ubica en el contexto del dinero presente en la vida cotidiana, que también se evidencia en la sesión del 1 de marzo de 2012 del profesor Santa; el texto es el siguiente:

Episodio 43
P: ¡Ojo!, de nuevo el signo, el signo ahora nos **muestra** información adicional. ¿Cierto? Ya sabemos que cuando no tienen es una temperatura agradable o excesivamente caliente o bueno. Y cuando **muestra** un signo que generalmente, el signo que vamos a usar o vamos a tener en cuenta es el menos. En este caso nos **muestra** información de… frio, ¿cierto?
Episodio 44
P: Pero si en una empresa o en un negocio a usted le **muestran** eso (señalando un -3000 que escribe en el tablero), usted qué piensa. ¡Ojo, ojo ojo!, pierde dinero, ahora estamos hablando de dinero y eso qué quiere decir,
E: que perdió 3000
P: pierde dinero. Si usted es el dueño de la empresa y usted al final hace toda la limpieza y dice todas las compras que hicimos: tanto, todo lo que vendimos: tanto, y le resulta esto (señala el -3000) quiere decir que su negocio está perdiendo dinero. ¿Si o no?
Episodio 45
El caso contrario de ese es éste (escribe 5000 en el tablero), ¿ahí qué?
E: Una ganancia
P: Hay una ganancia.

Como se observa en los episodios presentados, es claro que estas situaciones concretas están presentando a los enteros positivos y negativos ($\mathbb{Z}^+$ y $\mathbb{Z}^-$) como elementos opuestos de un mismo conjunto, es así como el maestro asigna a los positivos las ganancias y los negativos las deudas, el calor a los positivos y el frío a los negativos, la intencionalidad en la enseñanza corresponde a que los estudiantes puedan "encontrar" a los enteros en el mundo real , haciéndolos significativos en su vida cotidiana.

4.1.1.4 Mostrar como formas de apelación al sujeto para identificar nomenclaturas viables en el proceso de construcción de la noción escolar de número $\mathbb{Z}$.

En el cuarto "mostrar" el profesor durante sus clases no pierde de vista el lenguaje simbólico en el que habitualmente se notan los números enteros, no deja de lado los símbolos. No obstante, la finalidad del uso de esta nomenclatura en el contexto de las clases es particular, pues tiene como intencionalidad en la enseñanza, que los estudiantes cuando se enfrenten a un libro de texto comprendan lo que se está explicando en éste y no se sientan frustrados al no entender los símbolos que ahí se puedan incluir, caso que le ocurrió al profesor Moreno. Este sentido del mostrar se observa en el texto de la siguiente sesión de clase:

Sesión del 22 de abril de 2012, profesor Santa

Episodio27
P: ¿cuál es el símbolo de los números enteros (escribe N ó Z)? ¿**Muestréenme**, señálenme cuál?
E: la zetaaaaaaaaa
Episodio28
P: como ya les mostré el símbolo de los números enteros es la Z y el de los naturales la N, entonces cuando vean la N hablamos de números naturales y la Z hablamos de números enteros
Episodio29
P: en los enteros los números enteros negativos salen de los números relativos, como del frío, caminar hacia atrás, tener deudas, botar plata, entonces los enteros también salen de los mismos números naturales pero se le pone adelante un signito, entonces aquí quedaba -1, -2, -3.
Episodio30
P: a esos se les llama enteros negativos y se pone la misma Z pero con un signo menos encima Z^- ¿y qué se hará con los positivos como el 1, 2, 3, 4, etc?
E: una zeta y un más
Episodio31
P: Bien, les **muestro** como los enteros están conformados los escribo y ustedes me los traducen (escribe Z { Z+, Z-, 0}), qué quiere decir esto que escribí en el tablero

Como se observa en los episodios anteriores el profesor tiene la intencionalidad de enseñar a sus estudiantes los símbolos -o, más exactamente, una manera de simbolizar; que de todas formas es arbitraria-, con los que se conoce formalmente el conjunto de los enteros y los subconjuntos que pertenecen a este, lo que permite una construcción y comprensión de la noción desde diversas situaciones que involucran lo cotidiano, la emergencia de un nuevo conjunto, las propiedades y la formalización matemática de los $\mathbb{Z}$.

4.1.2. La expresión recta numérica como metáfora constituyente en el proceso de construcción de la noción escolar de los $\mathbb{Z}$.

La segunda metáfora que se encuentra en este saber, es la recta numérica no como un objeto matemático sino como un aspecto que integra el pensar del maestro frente a la noción de número entero, el cual tiene dentro de la enseñanza la intencionalidad de presentar a los estudiantes algunos elementos de la noción de una manera "concreta". Es decir, la recta numérica en la escuela, para los números enteros, cumple una función similar a la del ábaco con los números naturales para la enseñanza del orden, la suma y la resta.

Se observa que las relaciones de orden sobre la recta son abordadas por el profesorado según la posición de los números, es decir, el que se encuentre más hacia la derecha es el mayor, entonces la recta numérica es un elemento visual, porque tradicionalmente no existe el contexto numérico de cardinal dentro de los enteros negativos, por tanto los maestros no realizan comparaciones de cantidad sino de posición.

Entonces en las relaciones de orden con los números enteros sobresale el contexto numérico de ordinal, es decir, el profesorado no organiza a los enteros comparando cuál de los números representa una cantidad mayor o menor con relación al otro –situación que si se suele presentar con los $\mathbb{N}$-, sino asignándoles una posición en la recta numérica similar a la de los números naturales, en donde el cero se vuelve el punto de referencia entre enteros positivos y negativos, y se da por regla general que entre dos números que se comparen el que se ubique sobre la recta a la derecha del otro es el mayor (>) y el que se encuentre a la izquierda del otro es el menor (<). Asignándole además un sentido a los signos mayor que > y menor que <, en cuanto a la dirección en la que apunta cada uno, que es coherente con la regla de organización dada por el profesorado.

En cuanto a la suma y la resta, le asigna “sentidos de movimiento” a los enteros, correspondiéndoles a los precedidos por el signo más un desplazamiento hacia la derecha o hacia arriba y a los negativos un desplazamiento hacia la izquierda o hacia abajo sobre la recta numérica.

A continuación se muestra el texto de dos sesiones de clase en las que los profesores hacen uso de la recta numérica.

Clase del 14 de marzo de 2012, episodios relacionados con la enseñanza del orden, profesor Moreno

Episodio 102
P: Ahora con el número 13, ahí está bien, con el número 13 y -12 que iba
No sigamos completando allá por favor (le indica al estudiante que está escribiendo). ¿Va mayor o menor?
E: menor, mayor, menor, mayor
Episodio 103
P: bueno, cómo salimos de la duda, **si nosotros trazamos una recta numérica** y en esa **recta numérica** ubicamos esos dos números, el número 13 por acá estará el 0, 1, 2, 3, 4, 5 y por acá estará el 13. ¿El -12 hacia dónde está, hacia la derecha o hacia la izquierda?
E: hacia la izquierda
Episodio 104
P: Hacia la izquierda, entonces 1, 2, 3, 4, sigo contando hasta el -12. Los que están a la derecha son los mayores y el que queda hacia la izquierda es el menor.

Clase 20 de marzo de 2012, episodios relacionados con suma de enteros, profesor Santa

Episodio 10
P: recuerda que cuando pasamos esta parte (señala el +(-) de la operación anterior) se convierte en esto (señala el menos)
Episodio 11
P: ahora, vamos a considerar que este signo (señala el menos) nos indica también **movernos hacia nuestra izquierda (dibuja en el tablero una flecha con dirección hacia la izquierda)**
Episodio 12
P: entonces me voy a mover a la izquierda 12 espacios (señalando el -12 de la operación), ¿cierto?, a la izquierda doce pasos (inicia a contar desde el 9 que encerró en la recta numérica) uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez, once y doce espacios ¿dónde quedé?
Episodio 13
E: en 2
E: -3
P: si recuerda de nuevo, un espacio a ocho, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez, once, doce espacios (señala sobre la recta como se cuentan los espacios y en marcador rojo esta nuestro resultado (encierra el -3 de la recta)
Episodio 12
P: ¿qué resultado tenemos? El mismo que acá, (señala el resultado de la operación 9 -12 = -3) ¿cierto?

Como se observa en los episodios de la clase de los profesores Moreno y Santa la recta numérica se convierte en un insumo de “material concreto”, que como elemento integrante de su saber académico tiene la intencionalidad de enseñar a sus estudiantes la comprensión de las reglas de los signos en la suma, en la resta y en el orden de enteros a partir de un “lenguaje sencillo” como ya ha sido manifestado por los profesorados estudiados.

4.2. DE LOS SABERES BASADOS EN LA EXPERIENCIA ASOCIADOS A LA NOCIÓN NÚMERO $\mathbb{Z}$

Frente a este saber que tiene como fundamento la reflexión en la acción, se destacan dos metáforas y dos analogías respectivamente que frecuentemente se presentaron durante la enseñanza de la noción de número entero, que son: los problemas caseros, los símbolos de mayor que y menor que, las tareas y la recta numérica.

4.2.1. Los problemas caseros como metáfora que apela al sujeto de la experiencia en la construcción de la noción escolar de $\mathbb{Z}$.

En cuanto a la primera metáfora: los problemas caseros, se observó que el profesorado a lo largo de las sesiones observadas usa como estrategia el trabajo con problemas o con situaciones cotidianas, o como el mismo los llama problemas “caseros”, que responde a dos aspectos dentro de la reflexión que hace de la enseñanza de la noción de número entero. El primero corresponde a la “utilidad”, es decir a que el estudiante le encuentre un sentido, “el para qué sirve” o una aplicación a esta noción en su cotidianidad; y el segundo a la reflexión que el profesorado realiza de su propio aprendizaje. Dándose cuenta que las matemáticas escolares se le deben enseñar a los estudiantes de forma significativa, en la que cobre importancia para ellos la noción que están aprendiendo, es decir, que les “sirva” en su vida cotidiana y no que se quede únicamente como un requisito para aprobar la materia.

El profesorado manifiesta durante las entrevistas (reconocimiento y profundización) que cada una de las actividades que lleva al aula para enseñar la noción de número entero, son producto de la revisión frecuente que realiza de los “resultados” de sus clases, entonces si el estudiante aprendió con juegos, específicamente con determinados juegos, los desarrolla en sus siguientes clases, lo mismo con problemas o con los ejercicios. Sin embargo, los profesores son conscientes de que no todas las técnicas construidas se pueden abordar con todos los cursos, porque la disposición y los contextos son diferentes en los grupos, por eso es necesario tener varias estrategias para una misma clase. En los siguientes textos de la entrevista de reconocimiento reconocen “los problemas” como una estrategia para la enseñanza de los números enteros. En efecto, en la entrevista de reconocimiento realizada al profesor Moreno, el 3 de julio de 2012 podemos observar lo siguiente:

Episodio 18
I: ¿Qué estrategias utiliza para enseñar la noción de número entero?
P: El juego
Episodio19
I: ¿el juego?
P: Si, el juego, me gusta que juguemos en la clase, llevarles así sea uno de los más sencillos como para que aprendan los números enteros es el dominó, ellos lo conocen y si no lo conocen muy bien sus papás lo conocen entonces el nombre se les hace conocido. Entonces con juegos baso principalmente la estrategia. **Problemas, pero problemas de tipo cotidiano, caseros muy, muy, muy caseros y examinando cual es el contexto que maneja el muchacho, de acuerdo a ese contexto se plantean problemas que les lleguen**

Por otra parte, en la entrevista de reconocimiento aplicada al profesor Santa, el 22 de marzo de 2012 podemos apreciar la siguiente alusión relacionada con la metáfora en cuestión:

Episodio 15
E: ¿Qué estrategias utilizas para enseñar la noción de número entero?
P: como se debe tener en cuenta que todos los niños son diferentes, que aprenden diferente y que tienen inteligencias diferentes, yo llevo diversas estrategias con las que pueda enseñar los enteros, pero las que más uso son la recta numérica y **el trabajo con problemas de su contexto** para que ellos vean para que les sirve el concepto.

Como se observa en las entrevistas realizadas a los profesores Moreno y Santa se evidencia que el trabajo en el aula con problemas cotidianos que aborden la noción de números enteros, ha sido una estrategia construida por ellos a partir de la reflexión de su práctica, que se adapta al contexto y a las necesidades de los estudiantes, y que favorece la enseñanza de la noción de $\mathbb{Z}$.

4.2.2. Los símbolos: mayor que y menor que, como metáfora que apela a la experiencia del sujeto en el proceso de construcción de la noción escolar de $\mathbb{Z}$.

La segunda metáfora: los símbolos mayor que y menor que, también son el resultado de la reflexión que hacen los profesores sobre la práctica en la enseñanza de la noción, mostrándoles que una de las dificultades que se presentan con mayor frecuencia en los estudiantes para establecer relaciones de orden entre dos $\mathbb{Z}$, no es la falta de comprensión de la relación de orden mayor que y menor que, sino la confusión que presentan en diferenciar los símbolos > (mayor que) y < (menor que).

En la entrevista de profundización el profesorado coincide en afirmar que ésta situación de confusión que presentan los estudiantes en el empleo de los símbolos de orden no sólo se da con los números enteros sino también con los números naturales, en la medida en que los estudiantes comprenden las relaciones de orden existentes de un número con respecto a otro sobre la recta numérica, pero no diferencian bien los signos, es decir no saben que símbolo deben usar para escribir cuál es el número mayor o el menor.

A raíz de esta dificultad encontrada por los profesores durante la reflexión que realizan de su práctica de la enseña de la noción de $\mathbb{Z}$, han utilizado como estrategia en la comprensión del significado de los símbolos la asociación del mayor que (>), con la mano derecha y del menor que (<) con la mano izquierda, puesto que al cerrar cada mano y al dejar por fuera los dedos índice y pulgar se obtiene estos símbolos, con la mano izquierda el menor que y con la mano derecha el mayor que, que a su vez se corresponde con la regla de orden trabajada sobre la recta numérica de que el número que se encuentre a la derecha de otro es el mayor y viceversa.

A continuación se presenta el texto de una sesión de clase de cada profesor en donde se evidencia la utilización de la lateralidad en relación con los símbolos de orden mayor que y menor que, para enseñar a sus estudiantes a diferenciar los símbolos matemáticos que permiten representar por escrito orden entre dos números enteros.

Clase 20 de marzo de 2012, profesor Moreno

Episodio16
P: Puede que la mayoría sepa que el 13 es mayor pero el error está en esto (señala los símbolos), ¿cierto?. Eh, el error sería, miramos a ver, **con la mano derecha, la mano derecha todos estiren su mano al frente y quedamos así como tú y yo con mi mano, ese sería el signo mayor** (lo hace con los dedos índice y pulgar de la mano derecha).
Episodio 17
P: Entonces aquí cuál de los dos es el mayor (señala el 13 y el -12)
E: El primero
Episodio18
P: entonces quedaría 13 es mayor que -12 y veamos acá, 13 efectivamente nos queda, el símbolo ahí es mayor que, menor que 12.
Episodio19
P: **Con la mano izquierda se hace el símbolo menor**.

Como se observa en los episodios del profesor Moreno, él asocia los signos mayor y menor a la mano derecha e izquierda respectivamente, puesto que con los dedos índice y pulgar se obtienen dichos símbolos y además la posición de las manos es coherente con la regla dado por el docente de que el número que esté a la derecha de otro es el mayor. Todo esto es posible porque lo que está en juego es la constitución de un tipo de subjetividad epistémica en el aula, que construya una manera específica de ser en relación con el mundo de la matemática escolar realmente existente.

Clase 12 de abril de 2012, profesor Santa

Episodio 65
P: Resulta que la escala de temperatura de centígrados tiene un punto cero
Episodio 66
P: **Hacia la derecha muestra** el calor o muestra los grados de 1, 2, 3… 37,5 , perdón 36,5 (escribe estos valores en el tablero) que ¡ojo!, esa es la temperatura más o menos normal que nosotros debemos tener ¿cierto?
Episodio 67
P: De ahí en adelante es : fiebre , y entre mas, más grave ¿listo?
E: ah, entonces más de 37 estamos enfermos con fiebre
Episodio 68
P: Hacia este lado están las temperaturas bajo cero (**señala con su mano hacia la izquierda**) ¿listo?
Episodio 69
P: Resulta **que hacia la derecha que es calor son los números mayores y hacia la izquierda que es más frío y son menores** y si es a la izquierda de cero pues es una temperatura bajo cero o sea mucho más pequeños son esos enteros
Episodio 70
P: entonces **con la mano derecha señalamos el calor o mayores números y con la izquierda más frío o menores números** (realiza los símbolos con los dedos índice y pulgar respectivamente)

Como se observa en los episodios de clase es evidente el uso de la lateralidad mano derecha e izquierda con relación a los símbolos mayor que y menor que, como estrategia para la identificación, o más exactamente, construcción de un sentido escolar de los símbolos de orden. Como se puede evidenciar, ese sentido pasa por la mediación corporal como fuente de saber que es una particularidad específica e inalienable del ámbito de los saberes escolares.

4.2.3 La tarea como analogía (o factor analógico) que interpela al sujeto de la experiencia en el proceso de producción de la noción escolar de número $\mathbb{Z}$.

La primera analogía: la tarea, se evidencia frecuentemente en las clases, puesto que el profesorado en todas las sesiones deja ejercicios de trabajo en clase pero también de tarea, actividad que permite el desarrollo de habilidades frente a la temática en el estudiante. En la entrevista de reconocimiento el profesor Moreno afirma que para “aprender matemáticas hay que realizar muchos ejercicios como los deportistas" (Entrevista de reconocimiento del 3 de julio de 2012) y que estos ejercicios se eligen dependiendo de lo observado en clase, es decir si se dificulta más un aspecto de la temática pues de eso serán la mayoría de ejercicios, considera que los estudiantes deben entrenarse en la materia como se entrena en un deporte.

En los dos casos estudiados se encontró que en todas las sesiones de clase siempre hubo actividades para desarrollar en la misma y el 60% de las sesiones se dejó tarea. Podemos evidenciar lo anteriormente dicho, en textos como el que sigue el cual ha sido tomado de la entrevista de profundización del 17 de julio de 2012, aplicada al profesor Santa

Episodio 17
I: ¿cuál es el propósito o el por qué de los ejercicios en clase y de tarea?
P: **yo aprendí haciendo muchos ejercicios, y si no se hace ejercicios no se comprende lo que se está viendo**, por eso los ejercicios en clase y los de la casa. Los de clase aclaran dudas y así sé si los muchachos entendieron y **las tareas de la casa repasan lo que se vio en clase**, entonces para aprender matemáticas hay que hacer ejercicios, es algo así como una tradición.

Como se observa en este episodio el profesor Santa hace explícito que la realización de ejercicios contribuye en la construcción de la noción de número entero, además que permite la interpelación continua al estudiante sobre la construcción que él está realizando de la misma en la medida que van surgiendo dudas en la realización de la actividad o que va obteniendo aciertos en la misma.

En la entrevista de reconocimiento del 3 de julio de 2012 del profesor Moreno, también se observa cómo desde las tareas se interpela al sujeto en la producción del número entero. Veamos el texto:

Episodio 32
P: **siempre los últimos 10 o 15 minutos de cada clase unos ejercicios poquitos para poderlos poner en común** la respuesta y ver si estamos bien y ver que el muchacho cuando da la respuesta correcta en el tablero y ver que efectivamente todo el proceso lo hizo bien sea de una u otra manera porque no todos van por el mismo lado y sacan esa respuesta el muchacho como que se siente más contento. Cuando no, entonces miro en el tablero que aspectos fallaron y **de acuerdo a los aspectos que fallaron dejo la tarea**

En este episodio se observa que el profesor Moreno siempre al finalizar sus clases pone ejercicios sobre la temática abordada frente a los números enteros, este tipo de actividad interpela continuamente al sujeto que está en proceso de construcción del número entero, al darse cuenta de las dificultades que se presentan en la solución de los mismos o de las ventajas que estos poseen.

Es claro que para ambos profesores los ejercicios aparte de ser actividades que “ejercitan” a los estudiantes en la solución de problemas o algoritmos con números enteros, son herramientas que permiten interpelar continuamente a sus estudiantes en la producción de la noción, de manera que a los profesores les permita replantear o continuar los propósitos de la planeación y realización de sus clases con bases en las respuestas de sus estudiantes.

4.2.4. La recta numérica como analogía que interpela al sujeto de la experiencia en la construcción de la noción escolar de número $\mathbb{Z}$.

En cuanto a la segunda analogía: la recta numérica, el profesorado manifiesta que ha sido una estrategia fundamental para enseñar la suma y la resta de enteros porque ese es uno de los aspectos que más dificultades causan a los estudiantes; el uso de la recta se evidencia en el 80% de sus clases, además en la entrevista mencionan la importancia que tiene este herramienta didáctica para la enseñanza de la noción, ésta construcción ha sido resultado de la reflexión que hacen de su quehacer cuando enseñan los $\mathbb{Z}$.

A propósito de las afirmaciones anteriores, podemos evidenciar en la entrevista de profundización del 17 de julio de 2012, aplicada al profesor Santa lo siguiente:

Episodio 17
E: Y como fue tu aprendizaje del número entero,
P: interesante, divertido, por lo menos uno se acuerda. Pero bueno, eso fue como en que, como en quinto.
Episodio 18
E: ¿Y qué recuerdas?
P: Eso fue bacano, fue inicio de colegio, fue cambio de ideas, de profesores, recuerdo la recta numérica, marcadísimo, y que es lo primero que uno se acuerda

Como se observa en el episodio de la entrevista, uno de los aspectos que están presentes en la construcción que el profesor Santa ha realizado de la noción de $\mathbb{Z}$ es la recta numérica, herramienta que además le trae buenos recuerdos de su aprendizaje. Lo que permite inferir que a raíz de éste aprendizaje exitoso, él la ha integrado en su prácticas para la enseñanza divertida y significativa de ésta noción. Entonces está herramienta didáctica integra la construcción de su conocimiento sobre los $\mathbb{Z}$ en la medida que a él le permitió aprender cuando era niño, pero que también le ha facilitado a sus estudiantes ese aprendizaje, específicamente el relacionado con el orden y las operaciones de suma y resta que realiza sobre ésta.

Por otra parte, en la sesión 11 de abril de 2012 del profesor Moreno, podemos evidenciar lo mismo en los siguientes episodios:

Episodio70
P: los que me dicen que está mal, me esperan **los que van a hacer la recta numérica, no la hagan tan bonita háganla ahí rápido y me sacan la respuesta,** entonces el primero nos había quedado mal, entonces miramos el segundo si nos quedó bien o mal.
Episodio71
En este ya le pusimos el uno, le cambio de color para acordarnos que era lo que le faltaba, para el segundo los que están haciéndolo allá vamos a ver si coinciden con el tablero, me desplazo inicialmente y siempre inicio ¿desde qué numero?
E: cero
Episodio72
P: en la gráfica desde el cero, digamos que acá está el cero Y me desplazo ¿Cuántas casillas?
E: 8
Episodio73
P: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8 casillas entonces llegamos allá, lo que les decía hace rato no pongan números pongan rayitas y el numero lo ponen pequeñito, ahora me dicen sume ¿cierto? Voy a seguir sumando pero ¿hacia dónde?
Episodio74
P: Me voy a seguir sumando 5 casillas hacia la izquierda entonces 1, 2, 3, 4 y 5 casillas me quedarían acá y pongo la flechita para saber de a donde a donde me estoy moviendo ¿Qué número nos quedó ahí?
E: el 3

En efecto, como se puede constatar, en los episodios anteriores, que el profesor Moreno también ha integrado en su construcción de la noción número entero, a la recta numérica como una herramienta didáctica que le permite enseñar la suma de elementos de este conjunto a partir de los desplazamientos que se haga sobre la misma, lo que le facilita en el aula la enseñanza de ésta noción. Así, la recta numérica como experiencia de aula comporta diferentes sentidos que se transfieren analógicamente a la noción de número entero escolar, en el acto mismo de la enseñanza, tales como suma, resta, desplazamiento y emoción, entre otros, que convierten a esta noción, la de número entero, en un rico dispositivo de formación.

4.3. DE LAS TEORÍAS IMPLÍCITAS ASOCIADAS A LA NOCIÓN NÚMERO $\mathbb{Z}$

Teniendo en cuenta que las teorías implícitas que se estructuran en el profesor tienen como marco las relaciones y las prácticas institucionales, fue necesario revisar algunos productos culturales del Colegio Paulo Freire, que en esta investigación son entendidos como documentos institucionales. Para este estudio se abordaron inicialmente dos documentos por contener aspectos relacionados con la noción de los números enteros; a saber: la planeación –documento actualizado cada año y realizado por los docentes del área, específicamente es realizado según la carga académica- y el plan de estudios del área de matemáticas -documento elaborado en el 2007-.

En la planeación se encontró cuatro logros, correspondientes a cuatro dimensiones: laboral, cognitiva, actitudinal y procedimental y sus respectivas competencias son:

Laboral: Soluciona problemas en los que intervienen la estructura aditiva de los números enteros.

Cognitiva: comprende las propiedades de los números enteros y las relaciona con situaciones de su entorno

Actitudinal: muestra interés y compromiso por las actividades propuestas durante las clases

Procedimental: aplica correctamente las propiedades más relevantes de las operaciones con números naturales y enteros".

(Fuente: Planeación profesor Moreno y Santa 2012).

En el plan de área se encontró que el colegio en el que laboran los profesores que participaron en el estudio de caso, por estar articulado con la educación superior cada área debe abordar como mínimo una competencia laboral general, en el caso de matemáticas corresponde a una competencia intelectual que es la solución de problemas y obedece a:

"Observar, descubrir y analizar críticamente, deficiencias en distintas situaciones para definir alternativas e implementar soluciones acertadas y oportunas" (Fuente: Plan de estudio, 2007).

Este material encontrado en los documentos institucionales del colegio permite plantear las siguientes metáforas que están presentes en las teorías implícitas del profesor en su conocimiento construido de la noción de número entero.

4.3.1. De los temas designados institucionalmente para ser enseñados, como pretextos para la construcción de metáforas relacionadas con la noción de número $\mathbb{Z}$ escolar.

Ésta metáfora hace referencia a los temas elegidos como pertinentes por los profesores y el colegio a la hora de abordar en el aula la enseñanza de los números enteros. Es así como en las técnicas aplicadas a los dos casos estudiados se evidenció que las temáticas enunciadas en las competencias cognitiva y procedimental están presentes en la construcción del profesor frente a la noción de número entero, porque aunque el profesorado no lo reconozca conscientemente, durante la enseñanza en el aula se observó la definición de enteros, sus relaciones de orden, la recta numérica y sus operaciones básicas. Ahora bien, entre los temas designados institucionalmente como temas a enseñar, los que circulan en el ambiente institucional y los que enseña el profesor hay transformaciones o diferencias significativas. Así, cuando se analiza el componente teorías implícitas de esos temas se nota una especificidad interesante de señalar.

De manera que es claro, como ya lo hemos dicho, que esas teorías implícitas sobre el número entero escolar que mantienen los profesores se pueden rastrear de alguna manera en lo que hemos llamado el tejido cultural institucional; esto se puede corroborar con la entrevista de reconocimiento en la que el profesor afirma que él enseña de esta noción lo que le indica el programa o pensum de la institución y los libros de texto actualizados, con lo cual hay un indicio del reconocimiento formal de lo institucional como encuadre o marco referencial. Ahora bien, lo que sucede es que no hay una relación de identidad o simetría entre la designación y el sentido que lo designado porta en el discurso de aula, por cuanto este último es también tácito; de donde aparece la idea de teoría implícita.

En efecto, lo anterior se puede evidenciar a partir de la triangulación de diferentes técnicas como los son el protocolo de observación, las entrevistas de reconocimiento y la estimulación del recuerdo. Comencemos por establecer aquellas teorías que están inconscientes en el profesor y que guardan una relación mucho más directa con las temáticas propuestas por la institución. A continuación se presentan las entrevistas de reconocimiento de los dos casos estudiados en las que se corrobora la relación que existe entre los temas que enseñan en el aula y los propuestos por el marco institucional. Miremos:

Entrevista de reconocimiento del 3 de julio de 2012, profesor Moreno:

Episodio 10
I : ¿Cuáles son los aspectos o temáticas más importantes a enseñar de la noción de número entero? ¿Por qué?
P: **Bueno los temas yo creo que siempre vamos pegados a un pensum por así decirlo**, lo que es la noción de número entero, lo que como son los conjuntos: empezamos naturales, enteros, racionales el orden en la recta numérica, las propiedades, las operaciones básicas con los números enteros, pues siempre van en los temas, los que cualquier libro nos menciona.

Como se observa en el episodio anterior, Moreno cómo profesor reconoce que el campo cultural institucional realmente influye, porque lo que él lleva al aula para enseñar está permeado por las directrices que el colegio y el área de matemáticas han definido como fundamentales para la enseñanza de los$\mathbb{Z}$, las cuales también provienen de los lineamientos y los estándares curriculares. Lo que no parece saber es que más allá de esa idea consciente, que acepta la determinación institucional referida a temas específicos que aparecen en los documentos, hay otras ideas y sentidos institucionales que también lo determinan y de los que no tiene plena consciencia como se verá más adelante.

En este mismo sentido, la entrevista de profundización del 17 de julio de 2012, profesor Santa evidencia dichos acuerdos en los temas a tener presentes en la enseñanza del número entero. Veamos el texto:

Episodio 20
E: en la entrevista anterior cuando te pregunté cuáles eran los aspectos o temáticas más importantes a tener en cuenta a la hora de enseñar el número entero, tú me respondiste que las que se acordaran en el área. Entonces quiero saber cuáles de esas temáticas que acuerdan, tu consideras que son las que se deben tener en cuenta en la enseñanza del número entero?
P: la recta numérica es fundamental como te comentaba yo aprendí así y fue una experiencia muy agradable, además es una didáctica que facilita la enseñanza de las operaciones de suma y resta y el orden de enteros. Obviamente se deben enseñar todas las operaciones básicas y las propiedades alejadas de la recta también, porque cuando se tienen números de cifras grandes ésta no funciona. No se puede dejar de lado mencionarles que ese es otro conjunto y su simbología.

En efecto el profesor Santa también recibe una influencia directa de la institución en su construcción de $\mathbb{Z}$, porque a la hora de enseñar tiene en cuenta los parámetros dados como importantes para la enseñanza de esta noción por el área, que a su vez estos se relacionan con las competencias cognitivas y procedimentales de su planeación. Estos dos episodios de las entrevistas permiten inferir que en la construcción de la noción de los números enteros, los profesores tienen integradas a éste las relaciones de orden que se establecen al interior de este conjunto, las operaciones de suma y resta y el uso de la recta numérica.

Pero estas temáticas no contienen las teorías que aparecen en los libros de la disciplina sino las construidas por los profesores para enseñar, esas son las que no son conscientes para ellos pero que determinan la enseñanza de la noción en el aula y que están enmarcadas también por el ámbito institucional, en este caso con el valor de la familia como eje central y fundamental de la sociedad y que influye en la educación de los estudiantes (Manual de Convivencia, 2012). Por ejemplo veamos el siguiente texto de la clase del 11 de abril de 2012 del profesor Moreno, en la que está enseñando las relaciones de los enteros con otros conjuntos numéricos como los naturales, el texto es el siguiente:

Episodio 49
P: ahora si ¿cuál es el conjunto más pequeñito de los que aparecen ahí? , los naturales que vieron en primaria y luego ¿cuales vieron?
E: los enteros
Episodio50
P: **los enteros abrazan a los naturales por así decirlo son como el hermanito mayor, después de eso hay un hermanito mayor cual es?**
E: racionales
Episodio51
P: racionales y cuáles más?
E: irracionales
Episodio52
P: **irracionales seria como un primito por ahí al lado serian los irracionales luego vienen los reales, ¿los reales cuáles son? ,**

Como se observa el profesor tiene en cuenta los logros establecidos en su planeación en cuanto a temáticas a trabajar sin embargo la forma en que las aborda, específicamente la que corresponde con las relaciones entre enteros y naturales, sufre ciertas transformaciones al enseñarlos como miembros de una gran familia. Esta situación también le ocurre al profesor Santa cuando explica los conjuntos numéricos, veamos el texto de la sesión del 10 de abril de 2012:

Episodio 51
P: entonces como ya hemos vistos sobre la recta numérica los números enteros tienen dos partes los enteros positivos y los enteros negativos
Episodio 51
P: los enteros positivos son los mismos naturales y los enteros negativos también son los naturales pero con la propiedad del signo menos que nos da información adicional como frío, abajo, perder
Episodio 51

P: acuérdense que cuando estaban pequeñitos, **los primeros que usaron fueron los numeritos naturales y ahora que están más grandecitos están conociendo a los números enteros, que están en la gran familia de los números que la acabarán de conocer por ahí en 9° o 10°**

En estos episodios se puede observar que el profesor Santa al igual que el profesor Moreno no deja de lado las temáticas definidas institucionalmente para la enseñanza de la noción, pero las aborda a partir de una relación social como la familia, no bajo una relación matemática, esto nos sigue mostrando que el conocimiento construido por el profesorado difiere al de la disciplina.

Se puede observar que los profesores estudiados han construido una teoría implícita en cuanto a los números enteros y su relación con otros números en las matemáticas escolares, mediada por el marco institucional, que se relaciona con la familia (Manual de Convivencia 2012), para argumentar ésta afirmación veamos el siguiente texto de la técnica de estimulación de recuerdo del 10 septiembre del 2012 aplicada al profesor Moreno:

Episodio 10
I: ¿con qué asocias la familia y las relaciones entre ésta?
P: Eh, lo que te decía, con quien es mi abuelo, quién es mi abuela, quienes son mis papás, qué paso con la unión entre mi papá y esa señora, entonces lo mismo con los números. **La familia es mi centro de interés para todo, para mi vida, para el trabajo, para el colegio, para todo**
Episodio 11
I: ¿ahora si, por qué asocias los números con las relaciones entre familia?
P: Lo mismo, es **un centro de interés para todo, lo mismo en la familia se ve que se dan muchas relaciones entre todos**, no todos somos hijos, no todos somos papás, no todos somos tal cosa, entonces aquí también a pesar de tener los mismos ojos, la misma cara, entonces puede ser natural, pero ya no es natural, entonces puede ser entero pero ya no es entero, entonces puede ser racional, tienen mucho parecido con tu papá, tu mamá pero las cosas cambian.

En el episodio anterior se evidencia que para el profesor Moreno los números son el centro de interés, lo más importante, algo así como que sin números serían imposibles las matemáticas o no existirían, porque son la base de la misma. De forma que los números para las matemáticas equivalen a la importancia que tiene la familia en el ámbito institucional, por tanto se permite establecer vínculos familiares entre estos objetos de las matemáticas escolares a raíz de la enseñanza de la noción de número entero, no desconociendo que este elemento tiene sus características propias, pero que también posee otras de otros conjuntos numéricos, lo que le permite realizar la analogía de que un miembro de la familia puede tener muchos roles diferentes a la vez, así como el $\mathbb{Z}$ también puede ser al mismo tiempo racional, natural, real, dentro de esa gran "familia numérica".

En resumen la teoría implícita se ve reflejada en la importancia que tiene los números, en este caso el número entero dentro de la enseñanza de las matemáticas escolares, no como un elemento aislado de las mismas sino que guarda estrecha relación con otros, por tanto debe ser significativa su enseñanza.

4.3.2. *De la metáfora de la solución de problemas como aspecto que dota de significado a los $\mathbb{Z}$ en las matemáticas escolares.*

El profesorado frecuentemente promueve en su quehacer la competencia laboral general, la solución de problemas, que como ya se ha observado en sus clases se encuentra en una "alta dosis" problemas para resolver adaptados al contexto de los estudiantes y de la experiencia humana. En la entrevista de reconocimiento el profesorado acepta que el solucionar problemas es una "empresa" que se promueve en el área por todos los docentes, con el objetivo de que los estudiantes comprendan y "vean" la utilidad de las matemáticas. Los textos de las entrevistas son los siguientes:

Entrevista de reconocimiento 3 de julio de 2012, profesor Moreno

Episodio 25
I: ¿Cómo describiría en términos generales la metodología que utiliza para la enseñanza de la noción de los Z, según los parámetros del área a la que usted pertenece?
P: ¿describirlas en qué sentido?
Episodio 26
I: De pronto es un acuerdo del área decir todos vamos a trabajar con talleres, todos vamos a trabajar por resolución de problemas, o todos le apuntamos a esto, o ¿no hay parámetros o qué pasa ahí?
P: **Hay un parámetro general que es el aprender, el solucionar, el llevar a cabo, el dar respuestas a problemas que se te presenten en la vida** ¿cierto? Eso es como una, digamos como el titulo grande que podemos estar manejando en el área de matemáticas, aprender a desenvolvernos cuando tenemos que solucionar problemas. Eso es como lo más grande, el resto creo que cada integrante del área va mirando cómo le apunta a ese fin con lo que cada uno tiene con lo que cada uno sabe

En este episodio se observa que el profesor Moreno reconoce que el área ha tomado como competencia fundamental en la enseñanza de las matemáticas escolares y en este caso particular del número entero: la solución de problemas, competencia que se origina a raíz de que el colegio está articulado con la educación superior. La noción toma fuerza para las matemáticas escolares al poder ser aplicada o utilizada para dar solución a un problema cercano a los estudiantes, es decir, los números enteros definitivamente dejan de ser en el aula de clase objetos matemáticos que aportan en la construcción de teoremas de la disciplina, para convertirse en una noción escolar importante para el estudiante en la medida que le ayuda a entender y comprender su cotidianidad y el mundo que le rodea.

Entrevista de reconocimiento 22 de marzo de 2012, profesor Santa

Episodio 33
E:Listo, ¿Consideras que en estas reuniones de área que tú tienes, en las que se comparten las experiencias, o se hablan del trabajo del área, consideras que hay algunos parámetros o algunas metodologías, que pueden ser implícitas o explicitas, acerca de cómo enseñar en el área? ¿Cómo unos parámetros generales dentro del área?
P: lo que pasa es que en el colegio las reuniones de área son pocas, y la mayor parte de ellas se utilizan para llenar formatos y planear actividades. **Aunque priorizamos en la solución de problemas, porque los estudiantes así le ven el para qué les sirve cada concepto y eso se hace más significativo para ellos entonces no se les olvida lo que se les enseña**

Como se observa en los episodios anteriores, los profesores promueven la solución de problemas con números enteros más que por que sea una competencia institucional lo hacen para que el estudiante puede relacionar la noción con su realidad, por esta razón los problemas no son descontextualizados sino que son creados de acuerdo al contexto y a la experiencia humana de los estudiantes, logrando lo que los profesores consideran como aprendizaje significativo. Ésta utilidad de la noción, que persiguen los docentes estudiados también se evidencia en el siguiente texto de la entrevista de reconocimiento del profesor Moreno del 3 de julio de 2012

Episodio 23
I: ¿Cómo a partir de la enseñanza de los Z promueve las competencias que plantea el PEI del colegio para la enseñanza de esta noción?
P: La verdad no me pongo a pensar en eso, no me pongo a pensar en las competencias de un colegio o en los estándares que se estén manejando a nivel interno, **sino que me pongo a pensar en la vida del muchacho, si eso le sirve al muchacho, no si le sirve al colegio**

Como se observar en el anterior episodio el profesor no es consciente de que a raíz del trabajo con problemas en clase para la enseñanza de la noción también promueve una competencia institucional como lo es la laboral, que le permite alcanzar esa utilidad, ese para qué le sirve la noción al estudiante. Entonces los profesores estudiados construyen enunciados para problemas de la cotidianidad del estudiante, que puedan ser resueltos con las matemáticas escolares, en este estudio específicamente con la noción de número entero, lo que promueve que este concepto sea significativo para estos últimos no sólo en la escuela sino en su vida diaria.

De manera que en este caso la teoría implícita construida por los profesores se refiere a la **utilidad** de la noción números enteros, es decir al para qué le sirve aprender esto a los estudiantes y al por qué el profesor los enseña -aparte de cumplir con unos estándares y lineamientos curriculares establecidos por el MEN-. Así la teoría se hace tácita al descubrir que los números enteros enmarcados en problemas cotidianos, son útiles en la cotidianidad, es decir contribuyen en la comprensión, representación e interpretación del contexto, de la realidad en el cual se encuentran inmersos los sujetos estudiantes, es una noción para la vida, no para la disciplina.

4.3.3. De *la metáfora de los mínimos para la enseñanza de los* $\mathbb{Z}$

Esta metáfora se refiere a que el profesorado supone que el estudiante viene con unos conceptos básicos vistos en anteriores cursos que le permitirán la comprensión de los números enteros, a partir de las comparaciones y relaciones que pueda establecer entre lo que ya conoce y lo que ahora va a construir. En este sentido en las competencias establecidas en las planeaciones de los profesores se observa que cada una de éstas se corresponde con lo que ellos realizan en clase frente a la enseñanza del número entero. Es así como en uno de los sentidos del "mostrar" de los saberes académicos, el profesor relaciona los números naturales con los números enteros haciendo aparecer sus similitudes y sus diferencias, este hecho se relaciona con la última competencia de la planeación del docente "aplica correctamente las propiedades más relevantes de las operaciones con números naturales y enteros". De la anterior situación se puede inferir que en la construcción de la noción de $\mathbb{Z}$, ellos tienen integrado desde el contexto institucional, la comparación y similitud de dos conjuntos numéricos, como elemento que facilite la enseñanza de esta noción en las matemáticas escolares.

De manera que al utilizar como herramienta la habilidad de establecer similitudes y comparaciones entre un conjunto numérico ya aprendido: los números naturales -números con los que ellos han venido trabajando durante su formación escolar de años anteriores-, y otro que están construyendo: los números enteros, los estudiantes puedan reconocer algunas propiedades heredadas de los primeros a los segundos; además establecer la necesidad de estudiar los $\mathbb{Z}$ en términos de encontrar la solución de ciertos algoritmos y problemas sin dejar de lado esos conocimientos previos que ellos traen de las operaciones básicas y de las relaciones de orden de los $\mathbb{N}$ pero incorporándole nuevas reglas. Es decir la teoría implícita de los mínimos no busca la superposición del número entero y sus propiedades sobre los números naturales, ni la exclusión de este último, sino la complementariedad de ambos y la existencia de los dos a la vez en las matemáticas escolares para la solución de problemas del contexto de los estudiantes.

En síntesis, como se pudo observar en las teorías implícitas aunque los casos estudiados, en la técnica de la entrevista solo acepten que la institución únicamente ha influido en el aspecto de la solución de problemas frente a la enseñanza del número entero, en su discurso, en su quehacer en el aula, se evidencia la relación que existe con la planeación y el plan de estudio y el Manual de Convivencia como documentos institucionales, que integran su construcción de la noción de $\mathbb{Z}$ y que a su vez se hace evidente en su actuar en el aula, es decir en su enseñaza, asi como en su discurso.

4.4. DE LOS GUIONES Y RUTINAS ASOCIADOS A LA NOCIÓN NÚMERO$\mathbb{Z}$.

Los guiones y rutinas que tienen como estatuto epistemológico fundante la historia de vida del profesor, específicamente esos “episodios” que marcaron la construcción de su noción de número entero, que no sólo provienen de su formación en la universidad, sino también de su propio aprendizaje, de sus experiencias de vida, entre otros aspectos.

A continuación se muestran tres metáforas que aluden a los guiones y rutinas construidos por el profesor frente a la noción de $\mathbb{Z}$, es importante que a pesar de estar “separadas” (se presentan así para una mejor organización y comprensión), están intímamente relacionadas dando como fruto un nuevo lenguaje para nombrar la noción.

4.4.1. El terror como metáfora que alude a los temores escolares de infancia en el proceso de construcción de la noción de número $\mathbb{Z}$ escolar.

La metáfora del terror, en este caso particular alude al miedo que se tiene a las matemáticas, tal vez porque en nuestra cultura tradicionalmente siempre se ha dicho que las matemáticas son un "coco", que son difíciles, que quien las aprende es muy inteligente. En este sentido, el profesor Moreno ha sido permeado por ésta apreciación cultural, situación que se evidenció en varias de sus clases en las que ha expresado que el aprendizaje de las matemáticas y específicamente el de los números enteros para él fue complicado, utilizando expresiones como "los números enteros no se enseñan en primaria para no mortificarlos", "ya estoy mirando a la siguiente víctima", -refiriéndose a un estudiante que va a pasar al tablero- o "explicar la suma de números enteros es difícil".

Expresiones que menciona en sus clases a modo de chiste, ocasionando risa en sus estudiantes, sin embargo en las entrevistas y en la técnica de la estimulación del recuerdo se trató de indagar por el sentido oculto o profundo de estas expresiones. A continuación se presenta un episodio que evidencia ésta metáfora del terror.

Técnica de estimulación del recuerdo, 19 de septiembre de 2012, profesor Moreno:

I: ¿Con qué asocia las expresiones "estoy mirando a la siguiente víctima", "ahora si los voy a mortificar"?
P: **cuando yo estaba en el colegio y me pasaban al tablero yo sentía mucho miedo porque no sabía qué hacer, como resolver el ejercicio porque el lenguaje del profesor era muy pesado**, entonces lo recuerdo de esa manera, pero cuando paso a los muchachos al tablero no lo hago con esa intención de que se asusten, sino de que aprendan o de mirar que de debo reforzar en las clases.

No obstante la aclaración anterior por parte del profesor, en diferentes momentos del proceso se pudo evidenciar que él realmente considera que las matemáticas son pesadas porque los maestros que tuvo durante su formación las enseñaban "al pie de la letra", o sea, como aparecen en los libros de la disciplina, ceñidos a teoremas, leyes y demostraciones, hecho que tiene como consecuencia el que él las enseñe en un lenguaje que esté "al mismo nivel" de los estudiantes.

Además la expresión víctima que utilizó en múltiples ocasiones, la asocia a que cuando él pasaba al tablero se sentía así por el mismo lenguaje y escritura en la que a él le presentaban los ejercicios. Por eso afirma en la entrevista de reconocimiento, que hoy en día también siente rabia en algunas ocasiones al leer libros científicos de la disciplina por el lenguaje tan pesado y tan abstracto que manejan de los conceptos. Como evidencia de lo anteriormente dicho, podemos presentar el siguiente episodio de la entrevista de reconocimiento aplicada el 3 de julio de 2012 al profesor Moreno, el texto es el siguiente:

I: Has sentido alguna vez, rabia, impotencia o miedo al enfrentarte a la necesidad de realizar ejercicios de Z o al tener que dictar una clase de Z?
P: ah si, si, si en algunos libros científicos, **algunos tienen un lenguaje muy denso, no me gusta el lenguaje denso y eso que tu lees de pronto todo un párrafo y no entiendes nada y lo vuelves a leer y no entendiste nada, y vuelves a leerlo y no entendiste nada y vuelves a leerlo… Eso es terrible,**

En este episodio se observa realmente la incomodidad que le genera ese lenguaje matemático, debido a como aprendió las matemáticas y particularmente la noción de $\mathbb{Z}$ durante su formación.

En el mismo camino podemos encontrar el siguiente párrafo tomado de la entrevista de profundización aplicada el 17 de julio de 2012, al mismo profesor. Veamos:

I: ¿Por qué le parecían las matemáticas un coco?
P: Por lo pesadas que son en cierta manera, **por lo que me enseñaron siempre el maestro pegado al tablero y enseñando postulados, teoremas, leyes,** que mentalmente tú decías qué es un postulado, qué es un teorema, qué es una ley y para qué me sirve, quedabas como ahí, en las nubes. Cuando un muchacho dice así rico esto, rico aquello y que lo haya entendido de la forma más sencilla me parece genial.

Al observar que en los episodios presentados de las entrevistas se refleja el malestar del profesor frente a la forma en la que él aprendió y se formó como profesor, se puede inferir que a raíz de su propia historia de vida, él realiza lo contrario en sus clases. Es decir, que el profesor no enseña la noción de números enteros con teoremas y leyes (como él la aprendió), sino que formula problemas cotidianos o “caseros” –como él los llama- porque se manejan y se crean en un contexto conocido y cercano para los estudiantes, en un lenguaje fácil de asimilar por ellos, donde básicamente tienen como referente la experiencia humana.

Esa experiencia humana, le imprime un sentido particular a la noción de número entero porque genera condiciones de ser significativa la noción dentro de las matemáticas escolares. Es decir, que definitivamente deja de ser una construcción de la disciplina dada en un lenguaje matemático, acompañado de leyes y teoremas, para ser una construcción dirigida a la escuela, con la intencionalidad de enseñar a sujetos que llevan consigo sus propias experiencias, y es así como la noción se adapta a las mismas. Por eso el maestro fórmula problemas “caseros”, le otorga contextos cotidianos a los enteros positivos y negativos, y resuelve sumas y restas confiriéndoles sentidos de desplazamientos a los números sobre la recta y de cantidad (ganancia, deuda) al momento de resolver algoritmos.

4.4.2. De la intuición como metáfora que alude a la capacidad para resolver problemas de manera “innata” en el proceso de construcción de la noción de número Z escolar.

La metáfora de la intuición, en este estudio alude a la capacidad que tiene el ser humano para resolver un problema confiando principalmente en lo que cree saber. Ésta metáfora se observó en las clases del profesor Moreno cuando un estudiante pasaba a resolver un ejercicio y se quedaba quieto, no escribía nada en el tablero o no respondía, el profesor inmediatamente acudía a las expresiones “use su intuición” o “que les dice la intuición femenina”.

En la técnica de estimulación del recuerdo se le indagó al profesor Moreno con qué asociaba eso de la intuición, y él mencionó que era una estrategia para que los estudiantes se animaran a decir algo, porque en su vida él siempre le hacía caso a su intuición y por lo general ésta nunca falla, además lo de la intuición femenina lo decía a propósito porque en su experiencia profesional se ha dado cuenta que son las mujeres más inteligentes y más interesadas por las matemáticas que los hombres, esta expresiones se muestran en el siguiente texto de la clase del 21 de marzo de 2012 del profesor Moreno:

Episodio 43
P: **bueno no lo entiendes pero con intuición femenina** ¿qué crees que daría eso? claro que la intuición como que tiene nombre porque varias personas le están soplando.

En este episodio se observa que el profesor está animando a un estudiante a que dé “cualquier” respuesta frente al problema planteado, como se lee en el texto, él no usa expresiones que hagan referencia textual a que el estudiante recuerde lo aprendido, sino que por el contrario utilice eso a lo que él llama intuición. Para aclarar la metáfora de la intuición, se acude al siguiente episodio de la técnica de estimulación del recuerdo, profesor Moreno, 10 de septiembre de 2012:

I: ¿con qué asocia las expresiones “use la intuición femenina” y “hágale caso a la intuición”?
P: jajajaja, no me había dado cuenta que repetía esa expresión muchas veces, pero eeeeeeh, **lo que pasa es que puede que uno sepa algo, que intuya algo, pero como no está seguro no lo dice ni lo escribe, entonces yo les digo a los muchachos que le hagan caso a la intuición, a eso que está escondidito por allá en la mente, que como experiencia propia yo sé que la intuición el 99% de las veces no falla.**

Como se observa en el episodio presentado, el profesor Moreno no es consciente del número de veces que utiliza la metáfora de la intuición, lo cual demuestra que los guiones y rutinas son construcciones del inconsciente pero que determinan la acción del profesor en el aula y que por tanto integran su conocimiento respecto a la noción, de manera que determinan su quehacer en el aula cuando enseña los $\mathbb{Z}$.

Por otra parte, la intuición a la que el profesor alude le imprime un sentido particular a la noción que el enseña, en cuanto a la adquisición y comprensión de la misma, puesto que se puede inferir que aunque se crea no saberla, ésta se encuentra presente en el estudiante, porque el profesor la ha construido para él y para enseñarla de forma significativa de manera que se pueda acceder a ésta en cualquier circunstancia, como la de “presión” cuando se pasa a un estudiante al tablero.

4.4.3. De la acción de nombrar como metáfora que alude a la creación de un nuevo lenguaje en el proceso de construcción de la noción de número $\mathbb{Z}$ escolar.

En este punto, se relacionaran las historias de vida –estatuto fundante de los guiones y rutinas- de los casos estudiados frente a la noción de número entero, para así poder explicar ese nuevo lenguaje para nombrar la noción de número entero.

Retomando dichas historias, se ha evidenciado que a diferencia del profesor Moreno para quien las matemáticas y el número entero constituyen experiencias “traumáticas” o difíciles, para el profesor Santa sucede todo lo contrario. El profesor Santa fue un buen estudiante y siempre se le facilitó las matemáticas, por tanto le explicaba a sus compañeros como el mismo lo indica en la entrevista de profundización; sin embargo, a raíz de colaborarle a sus compañeros él se ha hecho consciente de que no todas las personas entienden el lenguaje matemático.

Teniendo en cuenta estas dos historias de vida estudiadas, la del temor del profesor Moreno y del aventajado en las matemáticas el profesor Santa, se observa en sus clases que ambos han creado un nuevo lenguaje para nombrar la noción de número entero en la escuela. Si bien la creación de cada uno es diferente, ambas tienen la intencionalidad enseñar dicha noción en la escuela.

En el caso del profesor Moreno su lenguaje para nombrar la noción de números enteros va en términos de deudas y ganancias, asignándole a los números enteros negativos las deudas y a los enteros positivos las ganancias. A continuación se presentan los episodios del 65 al 71 de la sesión del 14 de marzo de 2012 del profesor Moreno en los que se puede observar, como ya se ha dicho, un lenguaje nuevo derivado de su propia experiencia. Veamos:

Episodio65
E: profe está bien?
P: exactamente lo que tiene en ahorro, **en ganancia** y consigna 250.000, esto es un 50 o un 30?
E: un 30 profe
P: los que separan marzo 1, aquí colocaron marzo 1 y **colocaron ahorro o sea ya tenían una ganancia 200000**, 5 y en marzo 5 consignó y ganó 50000
P: el total, entonces lo que genera el banco cuánto tiene, **cuánto gana, cuánto debe**
Episodio66
P: eeeeh, una cosa los que ya tienen los valores acá (se refiere a la tabla diligenciada) que son cuatro personas que me han preguntado me dicen ¿y ahora qué hacemos? Ahora ustedes son los dueños del banco y van a mandarle ahora un papelito a la señora Claudia para mirar cuánto tiene en su cuenta y me están diciendo que si sumo o si resto, ¿qué creen?, **ahí es en donde entran a jugar los números enteros, hay números enteros positivos que tienen que ver con las ganancias y números enteros negativos que tienen que ver con lo que deben, entonces miren a ver**
Episodio68
P: Para lo que **debe**, entonces la siguiente fecha que fue en marzo 6
E: en marzo
Episodio 71
P: **qué fue, que ella se los ganó o los debe**, ¿en Marzo 6?
E: los debe
P: los debe. Entonces va en rojo, marzo 6 qué hizo, una compra, compró unos pantalones y esos pantalones le costaron $30000 (escribe en el tablero -30.000)

Este nuevo lenguaje para nombrar la noción $\mathbb{Z}$ deja de lado las representaciones simbólicas y los formalismos de la disciplina, para darle paso a una representación mucho más sencilla en términos de lenguaje, pero más significativa en relación al contexto en el que se enseña. Se evidencia que este lenguaje fue construido por el profesor con la intencionalidad de construir un sentido que pueda ser enseñado, de formar sujetos, por tanto se adapta a sus saberes cotidianos y al conocimiento que poseen del mundo que les rodea. Nuevamente la noción de número entero se hace significativa en la matemática escolar.

Además los términos ganar y deber, que refieren a cantidad, concretizan al número entero en términos de dinero, es decir este bajo las operaciones de suma y resta es visto bajo el contexto de cardinal. Luego el profesor bajo estas operaciones lo que hace es comparar las cantidades de dinero que se están ganando o que se está debiendo, para que el resultado sea el saldo de las mismas, y si corresponde a una deuda se le precede del signo menos y si por el contrario le sobra dinero o tiene alguna ganancia se le antepone al número el signo más.

En cuanto al lenguaje creado por el profesor Santa se observa que el tener (T) y el deber (D) algo (dinero, objetos, etc.) guarda una relación respectivamente con los enteros positivo (E+) y negativos (E-) –nótese que el profesor los representa de una manera diferente a la que tradicionalmente se hace en la disciplina-, ambas notaciones explican las reglas de la suma a partir de este nuevo lenguaje. A continuación se presenta el texto de la clase del 12 de abril de 2012 del profesor Santa. Veamos:

Episodio 40
P: El otro que tenemos fue este (9-(-11)), los únicos que son un poco diferentes y que requieren algo de concentración y que muchos preguntaron son este (-15+6) y este (-10+8).
Episodio 41
P: Pero si usted recuerda, ahí en teoría son sencillos, ahí está, lo más como básico, por así decirlo, posible. Nosotros lo expresábamos como: Cuando lo que se tiene ¿cierto?, es menor a lo que se debe (T < D) ¿El resultado de que tipo debía ser? (=D) , debería ser una deuda, eso lo convertimos en: El Entero positivo es menor al entero negativo el resultado será entro negativo en la suma ($E^+ < E^- = E^-$), y esto es una suma (-10 + 8) ¿Listo?, entonces vea.

Se observa en estos episodios el uso del nuevo lenguaje para nombrar la noción de número entero construida por el profesor Santa, el cual está formulado inicialmente en términos de dos palabras conocidas y comprendidas en cuanto a significado y experiencia por los estudiantes como el “deber” y el “tener” . Bajo el deber y tener como lenguaje dado a los números enteros nace el contexto de cardinalidad para los mismos, es decir se puede hablar de cuánto o qué cantidad representa cada número. De esta forma se accede a las operaciones de suma y resta de enteros añadiendo o quitando objetos de una misma naturaleza (dinero u objetos). Entonces este lenguaje vuelve concreto al número entero, dándole paso a la segunda representación que él plantea en sus clases y que se observa específicamente en el episodio ya presentado "**El Entero positivo es menor al entero negativo el resultado será entero negativo en la suma ($E^+ < E^- = E^-$)"** (Santa, clase abril de 2012).

Para explicar el lenguaje simbólico presentado en este episodio es necesario pensar al número entero –bien sea positivo o negativo- como un cardinal, es decir que el E^+ está representando una cantidad de objetos que se tienen y el E^- una cantidad de objetos que se deben, pero al comparar los dos conjuntos de cantidades, según la regla escrita por el profesor se parte de que es mayor la cantidad de lo que se debe con relación a la que se tiene, por tanto el resultado de comparar dichas cantidades, que en este caso se representa con la operación suma, da como resultado un excedente o unos objetos que se deben de más con relación a los que se tienen. Nótese que nuevamente se vuelve sobre los términos deber y tener, esto se debe a que el número entero se entiende como un cardinal.

Al observar los lenguajes creados para nombrar la noción de número entero por los profesores Moreno y Santa, es evidente que en ambos casos en los $\mathbb{Z}$ se origina el contexto de cardinalidad, el cual no estaba presente en las relaciones de orden. Pero que para la enseñanza de la suma y la resta y la comprensión de las mismas el profesorado dota a esta noción con el sentido de cardinalidad, de cantidad, lo cual hace que estos números se vuelvan elementos concretos durante su enseñanza.

4.5. DE LA INTEGRACIÓN DE LOS CUATRO SABERES ASOCIADOS A LA NOCIÓN NÚMERO ENTERO, EN EL PROCESO DE PRODUCCIÓN DE LA NOCIÓN ESCOLAR DE NÚMERO ENTERO.

Hemos planteado que la noción de número entero construida por el profesorado de matemáticas corresponde a un proceso de integración. Vamos entonces a plantear en este momento: ¿Cuál es el conocimiento profesional específico del profesorado de matemáticas asociado a la noción de número entero? como resultado de la integración de los elementos comunes que han sido identificados en las diferentes categorías y metáforas constituyentes de las mismas.

Antes debemos afirmar que el conocimiento en cuestión aparece efectivamente como un conocimiento construido por los profesores de matemáticas, que tiene sus propias bases, en este caso estatutos epistemológicos que no pueden ser apartados del profesor como sujeto, dichos estatutos corresponden a la intencionalidad de la enseñanza, la reflexión que hace sobre su práctica, las múltiples relaciones institucionales y su historia de vida.

Estos cuatro estatutos se integran alrededor del objeto de las matemáticas escolares número entero, que es construido por el profesor para la enseñanza, para las matemáticas escolares, es un conocimiento complejo, que no es estático sino que se adapta al contexto y a la cultura en la que va a ser enseñado. Es decir, es un conocimiento que continuamente se está construyendo de acuerdo a todos los factores, biológicos, sociológicos y antropológicos en el cual debe ser enseñado.

Por tanto, el conocimiento construido sobre la noción de número entero por los profesores de matemáticas, es un conocimiento que educa, que promueve a otros a la subjetividad, no es un conocimiento científico, es un conocimiento que es significativo en el aula, que se reconstruye con cada sujeto que lo aprende, que tiene un lenguaje propio.

No por esto el profesorado deja de ser consciente que el número entero es un objeto matemático, pero que el número entero que él enseña en la escuela no lo es, no es ese mismo objeto producido por la disciplina, es uno nuevo que construyó él y que nace para la enseñanza (Chevallard, 1991).

Ese conocimiento sobre la noción de número entero, es un conocimiento integrado y dicha integración se da en la formalización de una unidad nueva que es la enseñanza interactiva, es en esa realidad compleja en la que se juega la interacción alumno, maestro y saber, en donde en la práctica se hacen presente esos cuatro saberes: los académicos, los basados en la experiencia, los guiones y rutinas y las teorías implícitas.

De manera que de acuerdo a lo planteado por Perafán (2004, 2011, 2013), el conocimiento del profesor está integrado, y no como un deber ser, sino como una realidad. Integración que se demostró en esta investigación al encontrar que los cuatro saberes del conocimiento del profesorado de matemáticas se encuentran integrados cuando enseña en la escuela la noción de número entero, ésta integración se observó a partir de la identificación de relaciones en común de cada una de las metáforas, imágenes y analogías presentadas en el análisis del conocimiento perteneciente de cada saber.

A continuación se presentan, entonces, como lo habíamos anunciado, los cuatro elementos que ha construido el profesorado de ésta investigación y que aparecen integrados en su conocimiento de la noción de número entero para las matemáticas escolares.

1. Números Naturales similitudes y diferencias con los Números Enteros. Este elemento se encontró presente en las siguientes metáforas: Mostrar como forma de apelación al sujeto para construir comparaciones necesarias que conduzcan a la noción escolar de $\mathbb{Z}$ (4.1.1.1), Mostrar como forma de apelación al sujeto para promover estados de transferencia de características entre tópicos diferentes que conducen a la construcción de la noción escolar de $\mathbb{Z}$ (4.1.1.2), y en la metáfora de los mínimos para la enseñanza de los $\mathbb{Z}$ (4.3.3).

   En el discurso del profesorado de matemáticas en el aula cuando enseñaba la noción de números enteros se hizo notorio el uso de los Números Naturales para inducir a la aparición de los enteros y establecer diferencias y similitudes entre estos. Se observa que este primer conjunto numérico influyó en la construcción de la noción de $\mathbb{Z}$ realizada por los profesores estudiados, como en la enseñanza que hicieron de los mismos en la escuela.

   El profesorado en lugar de dejar de lado una noción como la de números naturales ya abordada por los estudiantes en otros cursos, lo que hace es apoyarse en ésta para la construcción de una nueva como la de enteros, al transferirle algunas propiedades de la primera a la segunda, como lo son la representación sobre la recta numérica, el poder establecer relaciones de orden a partir del contexto de número ordinal y el efectuar algunas operaciones básicas.

La primera propiedad, la recta numérica, evidencia que los números enteros son una extensión de los números naturales, pues el primero conjunto numérico en la representación sobre la recta conserva a el segundo, pero agrega unos nuevos elementos que van del cero hacia la izquierda en el mismo orden de los que están del cero hacia la derecha pero se les agrega el signo menos. A partir de ésta ubicación el profesor establece que los números mayores a otros en este nuevo conjunto siempre se encuentran a la derecha.

En cuanto a las operaciones básicas, el profesor construye que las operaciones suma, resta, multiplicación y división que pueden ser realizada con los naturales, guardando algunas reglas como en el caso de la resta en donde el número menor siempre era el que se restaba del número mayor, también se pueden realizar con los enteros pero sin tener en cuenta este tipo de normas. De forma que en la escuela la aparición de los $\mathbb{Z}$ cobra sentido, no aparecen porque sí, porque son un requisito o porque son un capricho, aparecen como una necesidad frente a la imposibilidad de realizar algunas operaciones con el primer conjunto numérico construido.

2. La recta numérica. Este elemento se encontró presente durante la enseñanza de la noción de número entero en las siguientes metáforas y analogías: La expresión recta numérica como metáfora constituyente en el proceso de construcción de la noción escolar de los $\mathbb{Z}$ (4.1.2), la recta numérica como analogía que interpela al sujeto de la experiencia en la construcción de la noción escolar de número $\mathbb{Z}$ (4.2.4) y en la metáfora de los mínimos para la enseñanza de los $\mathbb{Z}$ (4.3.3). Para cada una de éstas la recta numérica adoptó un sentido propio que aportó en la construcción de la noción, dejando de ser un elemento geométrico, matemático (disciplina) para convertirse en una construcción didáctica para la enseñanza de la noción.

Esta construcción didáctica cuenta con un gran alcance puesto que permitió el trabajo de las relaciones de orden a partir de una representación “concreta” que se realizaba sobre la recta y las operaciones de suma y resta de enteros. En cuanto al orden sobre la recta, el profesor construye reglas para que el número entero tenga la característica de número ordinal, es decir que se pueda establecer que número es mayor o menor con respecto a otro. Entonces el profesor establece por norma que un número que se encuentre a la derecha de otro siempre será el mayor y viceversa, esto lo logra a partir de la representación de los elementos de este conjunto en la recta y de las propiedades de orden de los números naturales transferidas a los enteros. Además se apoya en su experiencia en cuanto al uso de las manos buscando coherencia con la regla ya enunciada, es decir con los dedos índice y pulgar de la mano derecha se representa el signo mayor -dirección en la que se ubican los números mayores con relación a otros- y con los dedos índice y pulgar de la mano izquierda se representa el signo menor, que también guarda relación con la regla de orden.

Las operaciones de la estructura aditiva fueron construidas por el profesor al otorgarle a los números enteros ubicados en la recta sentidos, es decir, las sumas de enteros positivos indicaban avances hacia la derecha o hacia arriba (la recta también fue representada de forma vertical) y las de enteros negativos referían movimientos hacia la izquierda o hacia abajo. Entonces la recta permitió la realización de sumas y restas a partir de la representación sobre la recta de un desplazamiento realizado tantas unidades según indique el número al igual que el sentido (positivo derecha-negativo izquierda).

3. Contextos cotidianos de los Números Enteros. Este elemento se hizo presente en las metáforas: Mostrar como formas de apelación al sujeto para favorecer la condición de situado, en la construcción de la noción escolar de $\mathbb{Z}$ (4.1.1.3), los problemas caseros como metáfora que apela al sujeto de la experiencia en la construcción de la

noción escolar de $\mathbb{Z}$ (4.2.1) y en la metáfora de la solución de problemas como aspecto que dota de significado a los $\mathbb{Z}$ en las matemáticas escolares (4.3.2.).

Es a partir de este elemento de las matemáticas escolares construido por el profesorado, que los números enteros cobran significado en la escuela y en la vida cotidiana de los estudiantes, puesto que el profesorado ha construido diferentes contextos conocidos por los estudiantes en los que este nuevo conjunto numérico les puede ser útil y comprensible. Entonces el profesor asocia palabras como el regalar, ganar, tener, subir, entre otras para dotar de sentido a los enteros positivos, y perder, botar, deber, bajar, étc., para los enteros negativos.

De tal forma que los estudiantes asocian este nuevo conjunto numérico con situaciones cotidianas y le ven utilidad a este nuevo concepto. Además el profesorado a partir de estas asociaciones palabra-número construye problemas a partir de las experiencias de vida de los estudiantes para así trabajar las operaciones de suma y resta. Entonces el para qué sirve, pregunta habitual de sus estudiantes, queda resuelta a partir de estas contextualizaciones que el profesor construye del número entero, y posibilita en el estudiante un número entero significativo.

4. El número entero como cardinal. Este elemento se hizo presente en las siguientes metáforas: De la creación de un nuevo lenguaje para nombra la noción de $\mathbb{Z}$ (4.4.3), los problemas caseros como metáfora que apela al sujeto de la experiencia en la construcción de la noción escolar de $\mathbb{Z}$ (4.2.1), y la recta numérica como analogía que interpela al sujeto de la experiencia en la construcción de la noción escolar de número $\mathbb{Z}$ (4.2.4)

El número entero como cardinal es una construcción realizada por el profesorado de este estudio que integra la noción de número entero, éste elemento no se evidenció de manera explícita en los profesores, sino que a partir de las diferentes técnicas y de la multiplicidad de relaciones que se da entre las metáforas e imágenes identificadas se evidenció. El cardinal es un contexto numérico habitual en los naturales, pero en los números enteros no, porque el pensar en cantidades negativas se puede considerar como algo "absurdo" en el sentido de que no es lógico decir que se posee algo negativo, como por ejemplo decir "tengo menos mil pesos" (-1000), pero el sentido que el profesor le ha otorgado para la enseñanza corresponde a que su estudiante ya tuvo esa cantidad y que en la representación escrita "lo debe o le hace falta". Entonces ese "tengo menos mil pesos", representa una cantidad que existió.

Entonces los problemas caseros que construye el profesor, requieren hacer uso de este contexto numérico en el número entero, puesto que se deben comparar, sumar o restar cantidades positivas y/o negativas, esto se hace evidente en la creación del nuevo lenguaje para nombrar los $\mathbb{Z}$. De manera que en la solución de problemas en donde hace uso del contexto de cardinalidad, también construye un lenguaje en términos de la cotidianidad de el estudiante, en el que a los enteros positivos los denomina como "ganancias" y a los enteros negativos como "perdidas o deber algo", este lenguaje complementa esa contextualización que le otorga a este conjunto numérico dentro de las matemáticas escolares, haciendo que para el estudiante ésta noción sea una herramienta útil para la vida.

En síntesis el conocimiento construido que mantiene el profesorado de matemáticas asociado a la noción de número entero corresponde a un elemento de las matemáticas escolares que surge a partir de la imposibilidad de resolver operaciones matemáticas con los números naturales, pero que guarda una estrecha relación con ese conjunto numérico en aspectos como la escritura y las propiedades del orden. Además hace uso de la recta numérica como una construcción didáctica que facilita la enseñanza de ésta noción.

Este elemento $\mathbb{Z}$ adopta como propias algunas características del número natural como lo son los contextos de ordinalidad –posibilidad de ordenar los elementos de un conjunto- y el de cardinalidad –poder decir cuántos elementos pertenecen a un conjunto-.

Esta construcción de contextos numéricos para el conjunto de los $\mathbb{Z}$ tiene varios objetivos en la enseñanza en el aula, la comparación, que también le permite al estudiante establecer relaciones de orden, la solución de operaciones de suma y resta a partir del mismo ejercicio de comparación entre dos cantidades y la contextualización del entero.

Esa denominada contextualización se refiere al proceso que logra el profesor en el estudiante frente a la apropiación del $\mathbb{Z}$, es decir que el número entero para el estudiante no es un elemento aislado de las matemáticas, sino que es una herramienta significativa en la representación, comprensión y solución de los problemas de su vida cotidiana. Para ésta incorporación del concepto en la vida del estudiante el profesor hace uso de los problemas, es decir plantea situaciones en el aula de clase propias del contexto en el que se encuentran inmersos los educandos y les muestra que este conjunto numérico le es útil al poder resolver dichos problemas.

5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

5.1 . CONCLUSIONES

- Las investigaciones sobre el conocimiento del profesor enmarcadas en la línea de INVAUCOL reivindican la labor del profesor como un profesional de la educación al reconocerle que construye un saber que le es propio frente a las nociones que enseña y que no le es prestado de las disciplinas.
- Una investigación de carácter interpretativo exige la preparación teórica del investigador y la disposición para encontrar en el aula aquello que está buscando, además de mucha paciencia porque la realidad escolar es bastante compleja e impredecible. Para esta investigación en particular el factor tiempo no se ajustó al cronograma de trabajo en términos del trabajo de campo, debido a que las dinámicas escolares responden a actividades como izadas de bandera, direcciones de curso, jornadas pedagógicas, etc.
- Este tipo de estudio solo es posible bajo la investigación interpretativa, porque lo que se pretende es conocer y comprender la realidad, no generalizar o dar normas estandarizadas para la enseñanza de la noción.
- Las técnicas e instrumentos empleados en esta investigación, especialmente los argumentos del protocolo de observación y del Analytical Scheme favorecieron de manera certera la identificación de los cuatro saberes que integran el conocimiento del profesorado de matemáticas frente a la noción de número entero.
- Las técnicas como la entrevista y la técnica de estimulación del recuerdo facilitaron la interpretación y construcción de datos que se presenta en ésta tesis, puesto que los casos estudiados participaron en estos procesos, haciendo más riguroso y confiables los análisis que se presentan en esta tesis.
- El acceder a los productos culturales como el PEI, la planeación, entre otros, facilitó el trabajo de la investigadora para realizar las preguntas correctas y contrastar en las clases aquellos episodios que permitieron identificar las teorías implícitas en los profesores

- Hoy en día es difícil encontrar colegios que permitan realizar estudios en los que se observe la labor del maestro en el aula, y cuando las directivas (rector, coordinador) acceden, son los profesores los que se oponen. Este tipo de respuesta se debe a que muchas de las investigaciones realizadas en Colombia se han dedicado a decir lo que les falta o deben hacen los docentes para enseñar. Razón por la cual los colegios y profesores muestran esta prevención, puesto que los que se pone en juego es su imagen y profesionalismo.
- Durante el desarrollo del trabajo de campo, la investigadora se encontraba enseñando la noción de número entero, este hecho generó en ella confusión porque cuando estaba enseñando recordaba las prácticas de los docentes que estaba observando, sin embargo esta situación la ha hecho reflexionar bastante sobre su conocimiento y quehacer profesional obligándola a preparar mejor sus clases.
- Este tipo de investigaciones en las que se identifica el conocimiento mantenido por los profesores frente a la enseñanza de una noción enriquece la labor de producción e investigación del docente, puesto que no se queda solo en la práctica del aula, sino que puede trascender y contribuir en la formación de los profesores a partir de la reflexión de su acción.
- El conocimiento profesional identificado ha sido una construcción que ha evolucionado con la experiencia de los profesores, con los nuevos retos que les presenta una sociedad y un mundo cambiante, es un conocimiento que se adapta a la historia y al tiempo.
- El conocimiento profesional del profesor frente a la noción se construye y reconstruye inconscientemente gracias a las diversas teorías explícitas e implícitas que se den entorno a ésta.
- El conocimiento profesional del profesor frente a la noción de número entero ha mostrado la transposición didáctica que él realiza dándole un nuevo sentido al entero, que responde a la intencionalidad de la enseñanza por ello crean un objeto de enseñanza, diferente al de la disciplina en intencionalidad y teorías, porque su objetivo es la enseñanza en la escuela.

- El conocimiento profesional del profesor está cargado de una alta dosis de empirismo, puesto que muchas de sus construcciones provienen de su propia experiencia personal como profesor y como estudiante.
- Las teorías implícitas construidas por el profesor están enmarcadas no sólo en los productos culturales elaborados por el área o la institucional a nivel académico, sino que también tienen una alta carga de valores convivenciales enmarcados en el Manual de Convivencia que permean su discurso en el aula cuando enseña la noción de número entero.
- Definitivamente la historia de vida del profesor influye en la construcción que él hace de la noción, retomando esos episodios que favorecieron su aprendizaje frente a ésta, pero desechando los que no, generando nuevas estrategias que los sustituyan y favorezca su enseñanza.
- Los profesores que participaron en este estudio de caso hoy en día son conscientes de que la noción de número entero que ellos enseñan en la escuela es diferente a la de la disciplina y que corresponde a una construcción propia elaborada a partir de los cuatro estatutos fundantes del conocimiento del profesor como sistema de ideas integradas.
- En el aula de clase es en donde se presenta una gran riqueza de sentidos diferentes de la noción de número entero construida por el profesor, sentidos que corresponden a una herencia histórica de la misma bajo la intencionalidad de la enseñanza.
- El conocimiento profesional que ha construido el profesor de matemáticas asociado a la noción de número entero favorece a la comprensión e interpretación de la realidad de los estudiantes, promoviendo así su subjetividad.

5.2. RECOMENDACIONES

Se deben seguir realizando investigaciones de este corte, para que se les reconozca a los profesores como unos profesionales, al igual que los médicos, los abogados, los ingenieros, entre otros. Investigaciones en las que se demuestre que el conocimiento que tiene el profesor no es prestado de las disciplinas, sino que son construcciones propias realizadas a partir de la intencionalidad de la enseñanza (una de las funciones del profesor), su experiencia, las diversas teorías que fluyen en las instituciones educativas y entre pares sobre lo que enseñan; y su propia historia de vida, aspectos inseparables del maestro y que están presentes en su vivir y en su quehacer profesional.

A partir de este reconocimiento profesional, de ésta legitimación profesional iniciará un cambio para los docentes en varios sentidos: el primero, la autoestima al "creerse" el mismo un profesional y no le dé pena decir "yo soy profesor"; el segundo, la mejoría en la formación de futuros docentes, porque ésta tarea estará a cargo de docentes que si conocen la realidad escolar y que tienen un conocimiento que responde a la intención de enseñar; y tercero, las condiciones laborales de los docentes a nivel nacional cambiarían.

Por otra parte, al identificar el conocimiento que poseen los profesores frente a las nociones que enseñan en la escuela, quien mejor que ellos para escribir los libros de didáctica pues finalmente tienen el saber y las estrategias para educar a otros integralmente.

6. BIBLIOGRAFÍA

ÁNGULO RASCO, Felix, BARQUÍN RUIZ, Javier y otros (1999). Desarrollo Profesional del Docente: Política, Investigación y Práctica. Akal, Madrid. Obtenido el 8 de marzo de 2011 desde: http://books.google.com/books

ARANA, Juan (2008). ¿Es la Naturaleza un libro en caracteres matemáticos?. Universidad de Navarra. Obtenido el 26 de mayo de 2011 desde: http://dspace.unav.es/dspace/bitstream/10171/426/5/2.%20ES%20LA%20NATURALEZA%20UN%20LIBRO%20ESCRITO%20EN%20CARACTERES%20MATEM%C3%81TICOS,%20JUAN%20ARANA.pdf

BACHELARD, Gaston (1970). La filosofía del No. Ed. Amorrortu. Argentina

BACHELARD, Gaston (1971). Epistemología. Ed. Anagrama. Barcelona

BELL, E. T. (1949). Historia de las matemáticas. Mc Graw-Hill. Fondo de Cultura Económica: México – Buenos Aires.

CHEVALLARD, Yves (1991). La Transposición Didáctica. Del Saber Sabio Al Saber Enseñado. Aique: Buenos Aires.

ELBAZ, Freema (1983). Teacher Thinking: A study of practical knowledge. London: Croom Helm. (pag. 14-97)

GOMEZ, Bernardo (2001). La justificación de la regla de los signos en libros de texto: ¿por qué menos por menos es más? En Gomez, P., y Rico L. (Eds) Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro. Granada: Editorial Universidad de Granada. pp. 289 – 309

GONZÁLES, Jose Luis, IRIARTE, Maria, y otros (1990). Números Enteros. Síntesis, España.

HARMAN, P. M. (1983). La revolución científica. Crítica (Grupo editorial Grijalbo). Barcelona. Obtenido el 26 de mayo de 2011 desde: http://www.icb.uncu.edu.ar/upload/Rev._Cientifica_3_.pdfb_.pdf

LLINARES, Salvador (Artículo). Conocimiento Profesional del Profesor de Matemáticas: Conocimiento, Creencias y Contexto en Relación a la Noción de Función. Universidad de Sevilla, España. Departamento de las Ciencias (Matemáticas), Facultad de Ciencias de la Educación.

Ortega, J. M. & Perafán, G. A. (2012). Algunas tendencias en la investigación sobre el conocimiento profesional docente: antecedentes y estado actual de la cuestión. Ponencia elaborada para el III Congreso Internacional y VIII nacional de investigación en educación, pedagogía y formación. Bogotá. Agosto 23. Artículo en presentado para publicación a la Revista TEA. UNP.

PAMELA, Grossman SHULMAN, Leey WILSON, Suzzane (2005). Conocimiento y Enseñanza: Fundamentos de la Nueva Reforma. En: Profesorado. Revista de currículum y formación del profesorado. Volumen 9. No. 2. Pág 1-25

PEÑA, Telmo (1989). Reflexiones sobre conductismo y pedagogía. En: Revista Educación y Cultura. Número 18. Pág. 21-32

PERAFÁN, G. A. (2004). La Epistemología del profesor sobre su propio conocimiento profesional. Bogotá: UPN.

PERAFÁN, G. A. (2011). El conocimiento profesional docente: nuevas perspectivas epistemológicas y metodológicas. Bogotá: UPN. Material de trabajo para El Seminario Doctoral. DIE. Manuscrito en prensa.

PERAFÁN, G. A. (2012). La transposición didáctica como estatuto epistemológico fundante de los saberes académicos del profesor. Ponencia presentada en el III Congreso Internacional y VIII nacional de investigación en educación, pedagogía y formación. Bogotá. Agosto 23.

PERAFAN, G. A. (2013) La transposición didáctica como estatuto epistemológico fundante de los saberes académicos del profesor. En Revista Folios. Bogotá: UPN.

PERAFAN, G. A. (2013). El conocimiento profesional docente: caracterización, aspectos metodológicos y desarrollo. Aprobado para publicación en el libro: Estado de la enseñanza de las ciencias: 2000-2011. MEN-Universidad del Valle. 2013.

PERAFÁN, G. A. & TINJACA, F. (2012). El conocimiento profesional específico del profesorado de química, asociado a la noción de nomenclatura química. Ponencia elaborada para el III Congreso nacional de investigación en educación en ciencias y tecnología y II Seminario internacional de enseñanza de las ciencias. Pasto.

PEREZ, Angel y GIMENO José (1998). Pensamiento y Acción en el Profesor: De los estudios sobre la planificación al pensamiento práctico. Universidad de Malaga. Instituto de Ciencias de la Educación.

PORLÁN, RIVERO y MARTÍN (1997). Conocimiento Profesional y Epistemología de los Profesores I: Teoría, Métodos e Instrumentos. Tomado en Revista: Enseñanza de las Ciencias.

PORLÁN, Rafael y RIVERO Ana (1998). El Conocimiento de los Profesores. Sevilla – España. Diada.

RESTREPO, Omar Ciro (2005). Historia y Epistemología del Número. Colombia. Omar Ciro Restrepo

SHÖN, Donald (1998). El profesional reflexivo. Cómo piensan los profesionales cuando actúan. España. Paidós

SHULMAN, Lee (1986). "Paradigmas y Programas de Investigación en el Estudio de la Enseñanza La Investigación de la Enseñanza". Merlín Witrock. En: La investigación de la Enseñanza I. España. Paidós. MEC

SHULMAN, Lee (2005). Conocimiento y Enseñanza: Fundamentos de la Nueva Reforma. En: Profesorado. Revista de currículum y formación del profesorado. Volumen 9. No. 2. Pág 1-30

STAKE, R. E. (1999). Investigación con Estudio de Casos. Morata: Madrid

VALDOMINOS, Virginia (2010). El Psiconálisis de Freud. En: Revista Fiosophia. Número 6. Quito - Ecuador

7. ANEXOS

Anexo 7.1. Protocolo de Observación.

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN
GRUPO INVESTIGACIÓN POR LAS AULAS COLOMBIANAS –INVAUCOL-
Proyecto de Investigación
Conocimiento Profesional Docente: Nuevas perspectivas epistemológicas y metodológicas.

Instrumentos de investigación
Protocolo de Observación

Autor Dr. Gerardo Andrés Perafán Echeverri.[1]

Presentación del protocolo de observación

El protocolo de observación constituye un instrumento para la recogida o, más exactamente, producción de datos adecuados al tipo de investigaciones que estamos desarrollando, cuyo particularidad consiste en apropiar las determinantes fundamentales de las categorías Conocimiento Profesional Docente como Sistema de Ideas Integradas (Perafán, 2004) y Conocimiento Profesional Docente Específico asociado a Categorías Particulares (Perafán, 2011, 2012 y 2013) para orientar la observación de las clases y proponer un tipo particular de organización de la información.

En efecto, se trata de la elaboración de un tipo o forma de argumentos que se originan de la comprensión de la estructura epistemológica de las dos categorías mencionadas que sirven como guía para:

a). Centrar la atención del observador en todos aquellos indicios que parecen conducir, inicialmente, a la estructura de las categorías en mención.

---

[1] El autor agradece y reconoce los comentarios y aportes de los estudiantes de la Maestría en Educación (código 2010), realizados a esté documento, en el marco del desarrollo del Seminario Proyecto de Investigación.

b). Promover in situ acciones inmediatas de asociación entre los datos observados y las determinantes fundamentales de las categorías objetos de estudio.
c). Favorecer el registro in situ de todos aquellos datos que la observación, así dirigida, permite intuir o saber asociados a las determinantes fundamentales de las categorías en cuestión.

El protocolo se divide en dos partes. En la primera se describen y desarrollan los componentes conceptuales más relevantes del mismo y en la segunda se describe el formato que hace viable su aplicación.

Descripción del protocolo de observación

Siguiendo la recomendación de Stake (1998) se utiliza la letra **ϴ** (theta mayúscula) para hacer referencia al caso y la letra θ (theta minúscula) para hacer referencia a los temas particulares que permiten el desarrollo del problema de investigación. En el formato asociado al protocolo, que presentamos más delante, por ejemplo, aparece como casos ϴA y ϴB que se refieren a el conocimiento profesional específico de un profesor (X) asociado a las nociones particulares que se desean estudiar; la X está representando a cada profesor o caso a estudiar, esta podrá ser reemplazada por un nombre o denominación particular durante el momento de la observación dependiendo de lo acordado con cada uno de ellos, frente a como quieren aparecer en cada protocolo y en la investigación

Dada la estructura y complejidad que connota la categoría Conocimiento Profesional Docente que hemos asumido en este tipo de investigaciones, tanto si nos referimos a la categoría en sentido general, como si nos referimos a ella en sentido específico, se hace necesario proponer algunas fórmulas que nos permitan ordenar la información al momento del registro e identificación de episodios. En este orden de ideas, para facilitar la descripción de episodios en el protocolo de observación es importante tener en cuenta la siguiente fórmula: “el conocimiento profesional docente específico del profesor (X) -de un área cualquiera-, asociado a una noción particular”, se subdivide en Y1, Y2, Y3 y Y4”, de donde Y1 son los saberes académicos, Y2 son los saberes prácticos, Y3 son la teorías implícitas y Y4 son los guiones y rutinas asociadas. Categorías todas, que por definición se encuentran integradas en la categoría Conocimiento Profesional Docente.

Ahora bien, dado que, por principio, el conocimiento profesional docente específico ha sido definido como un sistema de ideas integradas, es necesario identificar unos temas o problemas específicos (condición de un caso bien planteado según Stake) relacionados con esos cuatro tipos de saber, los cuales, a su vez, al ser caracterizados comprendidos e interpretados (tanto de manera individual como en las relaciones de conjunto) aportan en el proceso de observación, necesariamente, a la comprensión del caso.

Estos temas, los cuales se encuentran señalados -en las investigaciones de las que nos ocupamos-, en los objetivos de los proyectos son:

- Los saberes académicos construidos por el profesorado -de un área cualquiera-, asociados a una noción particular (θ1).
- Los saberes basados en la experiencia construidos por el profesorado -de un área cualquiera-, asociados a una noción particular (θ2).
- Las teorías implícitas construidas por el profesorado -de un área cualquiera-, asociados a una noción particular (θ3).
- Los guiones y rutinas construidos por el profesorado -de un área cualquiera-, asociados a una noción particular (θ4).

Así, siguiendo en la línea de Stake, dichos temas los representamos como: θ1, θ2, θ3, y θ4, en cuyo caso θ representa la manera como desde la investigación se interroga por las relaciones específicas (de emergencia, estructura, dinámica, integración e identidad, entre otras), de cada saber con la noción particular que se investiga.

Dado lo anterior, podemos establecer que un episodio cualquiera (Epn), está incluido ($\subset$) en un tema cualquiera de los cuatro planteados (θ n) si y solo si ($\leftrightarrow$) dicho tema pertenece ($\in$) a uno de los cuatro saberes identificados como integrados al Conocimiento Profesional Docente (Yn) y ese saber (Yn) pertenece ($\in$) o está integrado al Conocimiento Profesional

Docente Especifico del profesorado -de un área cualquiera-, asociado a una categoría particular (Ctp). (ΘA o ΘB).

Así, en términos generales tenemos que para el registro razonable de la información observada, dado el tipo de problemas de investigación planteados en este programa de investigación, podemos asumir el siguiente tipo de argumento:

$$ARG1: EPn \subset \theta n \leftrightarrow \theta n \in Yn \text{ y } Yn \in (\Theta A \text{ o } \Theta B)$$

De suerte que obtendremos para cada caso el siguiente despliegue de observaciones posibles y deseables:

Caso ΘA:

ARG1.1: $EPn \subset \theta 1 \leftrightarrow \theta 1 \in Y1$ y $Y1 \in \Theta A$

ARG1.2: $EPn \subset \theta 2 \leftrightarrow \theta 2 \in Y2$ y $Y2 \in \Theta A$

ARG1.3: $EPn \subset \theta 3 \leftrightarrow \theta 3 \in Y3$ y $Y3 \in \Theta A$

ARG1.4: $EPn \subset \theta 4 \leftrightarrow \theta 4 \in Y4$ y $Y4 \in \Theta A$

Caso ΘB:

ARG1.1: $EPn \subset \theta 1 \leftrightarrow \theta 1 \in Y1$ y $Y1 \in \Theta B$

ARG1.2: $EPn \subset \theta 2 \leftrightarrow \theta 2 \in Y2$ y $Y2 \in \Theta B$

ARG1.3: $EPn \subset \theta 3 \leftrightarrow \theta 3 \in Y3$ y $Y3 \in \Theta B$

ARG1.4: $EPn \subset \theta 4 \leftrightarrow \theta 4 \in Y4$ y $Y4 \in \Theta B$

En síntesis, el protocolo de observación consiste en cuatro tipos de argumentación posible que, dada la estructura de las categorías *Conocimiento Profesional Docente como Sistema de Ideas Integradas* y *Conocimiento Profesional Docente Específico asociado a Categorías Particulares*, actúan como marcos de referencia para la construcción y registro de los datos en la observación de clases. Con el protocolo, entonces, se pretende en primera instancia es favorecer el registro y la identificación de episodios, tanto como la asociación de cada uno de los episodios con los saberes mencionados a los que este hace alusión. Todo lo anterior con el fin de ir esclareciendo el caso **Θ** desde la observación.

Descripción y presentación del formato asociado al protocolo de observación.

En el formato que presentamos a continuación los datos de las tres primeras filas se pueden considerar de tipo "informativo", puesto que en ellas se indagó por el contexto del aula de clase en el cual se desarrolló cada uno de los casos a estudiar, que para el posterior análisis favorecieron el esclarecimiento del problema que se investigó, teniendo en cuenta que los datos que se registraron allí no se convirtieron en variables que se asocian al caso, básicamente cumplieron la función de organización de la información registrada.

En el espacio registro de los episodios de clase asociados a Θ (Theta mayúscula), se registran los momentos de clase que evidencian los saberes asociados a la noción a estudiar (para esta investigación la noción de los números enteros) de manera que ayuden a esclarecer el caso. Se entiende por episodio (Ep) según Perafán "la unidad mínima de sentido trascrita e identificable en un conjunto continuo de párrafos o, lo que es lo mismo, la diferenciación temática o categorial de una parte de la totalidad, cuya característica fundamental es portar un sentido completo intrínseco" (2004: 120), en términos generales se define como la unidad mínima de sentido construida dentro de un discurso lo menos extenso posible para poder darle una organización, lo que puso en juego la capacidad del investigador de subdividir y analizar qué es un episodio en la clase para extraerlo y darle un único sentido.

En el espacio Identificación de episodios asociados a θ1, θ2, θ3, θ4 se debe asociar los episodios registrados previamente, a los problemas específicos que ayudan a esclarecer el caso. Así, la identificación de un episodio en el proceso de observación presupone intuir o suponer una relación de éste con por lo menos uno de los temas específicos señalados en la investigación como esclarecedores del caso Θ.

Formato asociado al protocolo de observación

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN
GRUPO INVESTIGACIÓN POR LAS AULAS COLOMBIANAS –INVAUCOL-
Proyecto de Investigación
Conocimiento Profesional Docente: Nuevas perspectivas epistemológicas y metodológicas.

Instrumentos de investigación
Formato Protocolo de Observación

<table>
<tr><td>Investigador</td><td colspan="2">Institución
Educativa</td><td>Fecha:</td><td colspan="2">Hora de inicio:
Hora final:</td></tr>
<tr><td>Profesor(a):</td><td colspan="2">Edad
Entre 20 y 30 ___
Entre 31 y 40 ___
Más de 41 ___</td><td>Curso:
Grado:
Ciclo:</td><td colspan="2">Intensidad horaria</td></tr>
<tr><td colspan="3">Experiencia del profesor(a):
Entre 5 y 10 años ___
Entre 10 y 15 años ___
Más de 15 años ___</td><td>No. de alumnos:</td><td colspan="2">Asignatura:</td></tr>
<tr><td colspan="2">Temas asociados</td><td colspan="2">Estrategias pedagógicas (guías, trabajo en grupo, juegos, exposiciones, etc)</td><td colspan="2">Empleo de libros de texto</td></tr>
<tr><td colspan="6">ΘA = Conocimiento Profesional Docente Específico del profesor (X) asociado a la noción (n)</td></tr>
<tr><td colspan="4">Registro de episodios (Ep_1, Ep_2, …, Ep_n) de clase asociados a ΘA</td><td>Identificación de episodios asociados a θ_1, θ_2, θ_3, θ_4</td><td>Descripción Tipo:
$Ep_n \subset \theta_n \leftrightarrow$
$\theta_n \in Y_n$ y $Y_n \in \Theta A$
¿Por qué $Ep_n \in \theta_n$?</td></tr>
<tr><td>1</td><td colspan="3"></td><td></td><td></td></tr>
</table>

2			
3			
4			
5			

ANEXO 7.2. Analytical Scheme

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN
GRUPO INVESTIGACIÓN POR LAS AULAS COLOMBIANAS –INVAUCOL-
Proyecto de Investigación
Conocimiento Profesional Docente: Nuevas perspectivas epistemológicas y metodológicas.

Instrumentos de investigación
Analytical Scheme[2]

Autor Dr. Gerardo Andrés Perafán Echeverri

Presentación del Analytical Scheme

En su disertación doctoral Mumby (1973) se propone, además de determinar las consecuencias intelectuales de la enseñanza de las ciencias en el aula, construir e implementar un instrumento de análisis para detectar en los estudiantes la emergencia de habilidades racionales frente al conocimiento y su independencia respecto del juicio de los profesores. Mumby propone una compleja simbología, o serie de algoritmos, para representar y simplificar los datos provenientes de la transcripción de clases y de entrevistas, con miras a hacerlos más asequibles a los programas de computador. Una vez determinados sus componentes conceptuales y prácticos, Mumby recomienda esta “técnica” para investigaciones que se lleven a cabo sobre los profesores y su enseñanza (1973: 1). En términos generales Mumby concibe el Analytical Scheme como un cuerpo conceptual

[2] Tomado de: Perafán, G. A. (2011). El conocimiento profesional docente: nuevas perspectivas epistemológicas y metodológicas. Bogotá: UPN. Material de trabajo para El Seminario Doctoral. DIE. Manuscrito en prensa.

presentado, a partir de un trabajo de conversión, en la forma de algoritmos, que orienta el análisis y posterior interpretación de datos, o más exactamente episodios.

Por su parte, Russell (1976) en su tesis de doctorado “On the Provision Madefor Development of Views of Science and Teaching in Science Teacher Education (Sobre la planeación para el desarrollo de puntos de vista sobre la ciencia y la enseñanza en la formación del profesorado de Ciencias), desarrolla un analytical scheme que permite identificar, organizar, seleccionar y, en últimas, analizar diferentes perspectivas sobre la naturaleza de la ciencia y sobre la enseñanza de las ciencias. Al contrario de Mumby, Russell mantiene un método más circunscrito a los trabajos previos que han hecho uso de esta técnica de investigación en la enseñanza, aunque propone seguir lo que Toulmin denominó “esquema para analizar argumentos” (Toulmin, 2007: 135) como complemento al método tradicional. En efecto, el modelo presentado por Russell mantiene el esquema tradicional de registro y organización de los datos por episodios por un lado, y de identificación y análisis de los datos sobre la base de conceptualizaciones previamente determinadas; no obstante, su aporte, a nuestro juicio, consiste en haber hecho uso de la forma de los argumentos ilustrada por Toulmin, para analizar situaciones concretas del aula.

Apoyado en estos dos autores Perafán en su tesis doctoral, (2004) simplifica y adecua esta técnica para organizar diferentes tipos de datos provenientes de fuentes diversas en un mismo proceso investigativo, facilitando de esa manera el análisis de los mismos, igualmente, en el marco de las construcciones conceptuales previas, que de todas maneras pueden ser modificadas. Estas conceptualizaciones aluden a la tesis central de Perafán, para quien el profesorado ha construido un conocimiento propio que es epistemológicamente diferente del de las disciplinas en las que, se creyó, se fundaba (Perafán, 2004).

Caracterización del Analytical Scheme

En el espacio de análisis e interpretación de los episodios, las formas de los argumentos así establecidas obedece, entonces, en primera instancia, a la determinación de la categoría Conocimiento Profesional Docente Específico, como un “sistema de saberes integrados en función de una categoría particular construida por el profesorado, en el desenvolvimiento histórico de la enseñanza, para formar sujetos desde un lugar epistémico-cultural puntual, es decir, desde tal categoría. En el proceso de producción de la categoría en el aula, el profesor, si es que hablamos de un profesor, esta mediado por la intención de interpelar a los otros y a sí mismo; en dicha interpelación se descubre el devenir de los sujetos en el aula” (Perafán, 2011).

Así, el primer aspecto a identificar y caracterizar, en el proceso de análisis de la información, es la intencionalidad de la enseñanza (IE) como dispositivo estructurante y distintivo de cada uno de los saberes que se integran a la categoría en su proceso de construcción. Dicha intencionalidad se mide por la direccionalidad en la que ocurre el “discurso” del maestro. Discursividad que sale al encuentro del sujeto o de la “cosa”. Es decir, que hay que identificar si la intencionalidad implícita y explicita en la que se desenvuelve la acción intencional discursiva del maestro (AIDM) es la explicación de un supuesto orden en la naturaleza, lo que llamaremos la acción intencional discursiva del maestro dirigida a objetos (AIDM→O), o la interpelación de los otros para provocar el devenir de la subjetividad, que llamaremos acción discursiva intencional del maestro dirigida a sujetos (AIDM→S). Entendemos que pertenece, por definición, al Conocimiento Profesional Docente Específico todo saber (saber académico, guiones y rutinas, teorías implícitas o saberes basados en la práctica) del que se pueda mostrar al menos un claro indicio de su orientación, por naturaleza y principio, a la interpelación del otro para provocar el devenir de la subjetividad.

Así las cosas, para el análisis de la información debemos suponer que un Episodio cualquiera (Ep_n) está incluido ($\subset$) en un tema cualquiera de los cuatro planteados (ϑ_n) si y sólo si ($\leftrightarrow$) el saber Y_n (que pertenece a ese tema particular - ϑ_n -) aparece estructurado (pertenece, esta contenido) en una acción discursiva intencional del maestro dirigida a sujetos (AIDM→S). De donde podemos obtener la siguiente formulación general:

ARG2: $Ep_n \subset \vartheta_n \leftrightarrow Y_n \in \vartheta_n$ y $Y_n \in$ AIDM→S

De ahí obtenemos el despliegue de las siguientes formas de argumentos que han de guiar y, de alguna manera, delimitar el análisis de los textos transcritos, desde la perspectiva de la intencionalidad de enseñar:

ARG2.1: $Ep_n \subset \vartheta_1 \leftrightarrow Y_1 \in \vartheta_1$ y $Y_1 \in$ AIDM→S

ARG2.2: $Ep_n \subset \vartheta_2 \leftrightarrow Y_2 \in \vartheta_2$ y $Y_2 \in$ AIDM→S

ARG2.3: $Ep_n \subset \vartheta_3 \leftrightarrow Y_3 \in \vartheta_3$ y $Y_3 \in$ AIDM→S

ARG2.4: $Ep_n \subset \vartheta_4 \leftrightarrow Y_4 \in \vartheta_4$ y $Y_4 \in$ AIDM→S

En segunda instancia, en el espacio de análisis e interpretación de los episodios, la forma del argumento así establecida obedece a las determinaciones de cada uno de los saberes que integran el Conocimiento Profesional Docente Específico. Dichas determinaciones son epistemológicamente diversas (Cf. Perafán, 2011) lo cual hace más complejo el tema del análisis, pero no por ello deja de ser cada vez más interesante y necesario.

El primer aspecto a definir es el del estatuto epistemológico fundante (Eef) reconocido a los saberes que integran el Conocimiento Profesional Docente Específico. Así: para los saberes académicos (Y_1) la transposición didáctica (Td); para los saberes basados en la experiencia (Y_2) la práctica profesional (Pp); para las teorías implícitas (Y_3) el campo cultural institucional (Cci); y para los guiones y rutinas (Y_4) la historia de vida (Hv).

Siendo así, un episodio cualquiera (Ep_n) se reconocerá incluido ($\subset$) en un tema cualquiera de los cuatro (ϑ_n) planteados como esclarecedores del caso, si y solo si ($\leftrightarrow$) el tema (ϑ_n) pertenece ($\in$) a uno de los cuatro saberes (Y_n) y dicho saber a uno de los cuatro estatutos epistemológicos fundantes (Eef_n) descritos. Obtendremos de ésta manera la siguiente formulación del argumento:

ARG3: $Ep_n \subset \vartheta_n \leftrightarrow \vartheta_n \in Y_n$ y Y_n (es causado por) Eef_n (Td;Pp; Cci; Hv)

En ese orden de ideas obtenemos un nuevo despliegue de formas de argumentos posibles, para el análisis de la información, con miras a diferenciar en los documentos transcritos y ordenados en episodios, los saberes que mantiene el profesorado, en cada caso, asociados a sus estatutos epistemológicos fundantes.

ARG3.1: $Ep_n \subset \vartheta_1 \leftrightarrow \vartheta_1 \in Y_1$ y Y_1 (es causado por) Td

ARG3.2: $Ep_n \subset \vartheta_2 \leftrightarrow \vartheta_2 \in Y_2$ y Y_2 (es causado por) Pp

ARG3.3: $Ep_n \subset \vartheta_3 \leftrightarrow \vartheta_3 \in Y_3$ y Y_3 (es causado por) Cci

ARG3.4: $Ep_n \subset \vartheta_4 \leftrightarrow \vartheta_4 \in Y_4$ y Y_4 (es causado por) Hv

Todavía queda por definir, con miras a facilitar el proceso de análisis e interpretación, los criterios para la identificación de la relación causal entre saberes (Y_n) y estatutos epistemológicos fundantes ($EeF_{n:}$Td; Pp; Cci; Hv). Dichos criterios habrán de obedecer a los análisis epistemológicos asociados más a una epistemología sobre el conocimiento del profesor, que a una epistemología general o a una epistemología sobre una disciplina en particular.

Un tercer aspecto a definir está relacionado con el carácter implícito o explícito de los saberes que mantiene el profesorado, asociados a la categoría particular que define el Conocimiento Profesional Docente Específico en este estudio de casos. Como afirma Perafán "Un saber es explicito (Sex) si el profesor puede verbalizarlo y dar cuenta de él, de manera consciente. Un saber es implícito (Sim) si cumple una de las dos siguientes condiciones: a) El profesor no puede verbalizarlo, por cuanto se encuentra reprimido en el inconsciente; sin embargo, juega un papel determinante en la acción docente (Simr); b) El profesor no lo verbaliza, pero no por causa de una represión, sino de una postura funcional cultural que tiende a la simplificación y el control de los acontecimientos de la vida cotidiana (Sim-r), con lo cual se puede decir que es un saber implícito que se encuentra fuera de la consciencia presente, pero que puede devenir explícito en el proceso de elaboración reflexiva que identifica y complementa los huecos o vacíos en la estructura de guiones o rutinas identificables y propios de la acción de enseñanza" (Perafán, 2011); en este caso: la acción de enseñanza de una categoría o Conocimiento Profesional Docente Específico.

Cómo han señalado, desde posturas diferentes, Porlán y Rivero (1998) y Perafán (2004), entre otros, los saberes basados en la experiencia y los saberes académicos se caracterizan por su carácter explícito, la diferencia está en el estatuto que los funda, de suerte que debemos reconocer saberes conscientes o explícitos que son del orden "teórico" (Sext) y saberes conscientes o explícitos que son del orden "práctico" (Sexp).

Por otra parte, los guiones y rutinas y las teorías implícitas se identifican por su carácter implícito. Corresponde, de acuerdo con Perafán, a los guiones y rutinas la condición de ser saberes inconscientes o implícitos reprimidos (Simr) o saberes inconscientes o implícitos no reprimidos (Sim-r). Por su parte las teorías implícitas constituyen un tipo de saber inconsciente, por lo tanto no verbalizable, con un nivel de estructuración en forma de teoría (Sinet) que ha interiorizado el profesor, cuyo origen es la estructura de sentido institucional, asociada a una categoría de enseñanza

Entonces, en resumen, en relación con el carácter implícito o explícito de cada uno de los cuatro tipos de saber que se integran a la categoría Conocimiento Profesional Docente Específico, podemos asumir las siguientes representaciones formales:

Para los saberes académicos (Y_1) la formulación saberes explícitos del orden teórico = (Sext).

Para los saberes basados en la experiencia (Y_2) la formulación saberes explícitos del orden práctico = (Sexp).

Para las teorías implícitas (Y_3) la formulación saberes inconscientes estructurados como teorías = (Sinet).

Para los guiones y rutinas (Y_4) saberes implícitos reprimidos (Simr) o saberes implícitos no reprimidos (Sim-r).

Ahora bien, dicho lo anterior, es claro que para continuar con el análisis de la información se hace necesario establecer la forma de los argumentos para identificar los episodios que han de concebirse como pertenecientes al Conocimiento Profesional Docente Específico, asociado a una categoría particular, cuando estos episodios se analizan desde el punto de vista de la condición tácita o implícita de los saberes que se registran o identifican en ellos.

Un episodio (Ep_n) está incluido ($\subset$) a un tema cualquiera (ϑ_n) de los cuatro que han sido definidos como esclarecedores del caso (Θ), si y solo si ($\leftrightarrow$) dicho tema (ϑ_n) pertenece (ϵ) a uno de los cuatro saberes (Y_n) que han sido reconocidos históricamente como integrados al Conocimiento Profesional Docente y si dicho saber (Y_n) está asociado o pertenece (ϵ) a una cualquiera de las condiciones consciente o inconsciente propias de dichos saberes (C_ns). Las cuales como las hemos identificado son: Sext, Sexp, Sinet, Simr o Sim-r.

De los planteamientos inmediatamente anteriores podemos, entonces, obtener la siguiente formulación general del argumento para el análisis de la información

ARG4: $Ep_n \subset \vartheta_n \leftrightarrow \vartheta_n \epsilon Y_n$ y $Y_n \subset C_ns$

De esta manera obtenemos un nuevo despliegue en las formas de argumentación posibles, para el análisis de la información, con el propósito de diferenciar en los documentos transcritos y ordenados en episodios, los saberes que mantiene el profesorado, en cada caso, asociados a la condición propia, de cada saber, de ser consciente o inconsciente:

ARG4.1: $Ep_n \subset \vartheta_1 \leftrightarrow \vartheta_1 \epsilon Y_1$ y $Y_1 \subset$ Sext
ARG4.2: $Ep_n \subset \vartheta_2 \leftrightarrow \vartheta_2 \epsilon Y_2$ y $Y_2 \subset$ Sexp
ARG4.3: $Ep_n \subset \vartheta_3 \leftrightarrow \vartheta_3 \epsilon Y_3$ y $Y_3 \subset$ Sinet
ARG4.4: $Ep_n \subset \vartheta_4 \leftrightarrow \vartheta_4 \epsilon Y_4$ y $Y_4 \subset$ Simr
ARG4.5: $Ep_n \subset \vartheta_4 \leftrightarrow \vartheta_4 \epsilon Y_4$ y $Y_4 \subset$ Sim-r

En síntesis los cuatro tipos de argumentación que constituyen el Analytical Scheme son:

ARG1: $Ep_n \subset \vartheta_n \leftrightarrow \vartheta_n \epsilon Y_n$ *y* $Y_n \epsilon \Theta A$

ARG2: $Ep_n \subset \vartheta_n \leftrightarrow Y_n \epsilon \vartheta_n$ y $Y_n \epsilon AIDM \rightarrow S$

ARG3: $Ep_n \subset \vartheta_n \leftrightarrow \vartheta_n \epsilon Y_n$ y Y_n (es causado por) Eef_n

ARG4: $Ep_n \subset \vartheta_n \leftrightarrow \vartheta_n \epsilon Y_n$ y $Y_n \subset Sc_n$

Formato del Analytical Scheme

<table>
<tr><td colspan="3">Analytical Scheme
Procedimiento para la organización y análisis de datos en episodios. (Mumby, 1969; Russell, 1976; Perafán, 2004)</td></tr>
<tr><td colspan="3">El Conocimiento Profesional Docente Específico del profesorado de (un área cualquiera) asociado a la noción de (una categoría particular)
Profesor: ---. /Texto: Clase --- / Fecha: ---</td></tr>
<tr><td>Línea</td><td>Organización por episodios relativos a:.Observación participante</td><td>Análisis e interpretación. Tipos posible de agumentación:
ARG1: $Ep_n \subset \vartheta_n \leftrightarrow \vartheta_n \epsilon Y_n$ y $Y_n \epsilon \Theta A$
ARG2: $Ep_n \subset \vartheta_n \leftrightarrow Y_n \epsilon \vartheta_n$ y $Y_n \epsilon AIDM \rightarrow S$
ARG3: $Ep_n \subset \vartheta_n \leftrightarrow \vartheta_n \epsilon Y_n$ y Y_n (es causado por) Eef_n
ARG4: $Ep_n \subset \vartheta_n \leftrightarrow \vartheta_n \epsilon Y_n$ y Y_n C Sc_n</td></tr>
<tr><td>5</td><td>Episodio 1
P: (Realizando un esquema de la tabla periódica en el tablero.) Ya estamos en silencio, ¡a ver! Nadie nos ha dicho hablar, ni molestar.</td><td>Arg1-.1 / Arg2.1</td></tr>
</table>

10	Episodio 2 P: Bueno tenemos acá un esquema aproximado de lo que es la tabla periódica, si nosotros tenemos un esquema aproximado de lo que es la tabla periódica, ¿Cuál es la finalidad? ¿Cómo se agrupan los elementos en la tabla periódica?, a ver empezamos contigo, ¿cómo están agrupados? A ver vamos a es cuchar.	Arg2.1

Anexo 7.3. Ejemplo Esquema Analitico Sintético, de las clases profesor Santa.

CATEGORÍA: Saber Académico

Caso ӨA – Fecha	Número de Episodios
1 de marzo 2012	5, 30,31, 32, 33, 38, 39, 43, 48, 51, 52, 55, 56, 60, 61, 63, 64, 65, 66. 67, 69, 70, 72, 73, 74, 75, 76, 77
15 de marzo 2012	2, 3, 7, 8, 14, 20, 24, 26, 27, 28, 29,55, 56, 63, 71. 72, 73, 75, 76, 78, 81, 82, 83,
20 de marzo de 2012	10, 12,22, 31, 38, 40,
22 de marzo de 2012	2, 62, 66, 67, 71, 75, 85, 86, 87, 88, 94, 107, 110, 111, 112, 113, 119, 121, 125, 127, 129, 136, 137, 138, 140, 141, 146, 147, 162, 167, 170, 171, 176, 191,
10 de abril de 2012	6, 8, 10, 13, 14, 15, 22, 25, 41, 42, 43, 49, 50, 56, 57, 58, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 69, 73, 75, 78, 79, 80, 81, 83, 86, 88, 95, 96, 101, 105, 107, 109, 110, 111, 112, 113, 116, 117, 118, 119, 121, 129, 130, 131, 132, 133, 134, 135, 137, 138, 139, 140, 143, 144, 146, 147, 148, 152, 160, 166, 167, 168,
10 de abril de 2012	13, 14, 15, 17, 17, 19, 20, 21, 23, 24, 25, 26, 27, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 46, 47, 48, 51, 52
12 de abril de 2012	22, 23, 24, 27, 28 , 29, 31, 33, 35, 36, 37, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 50, 55, 56, 57, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 71, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 82, 83, 84, 85, 86, 87,88, 89, 90, 91, 92, 96, 98, 99, 100, 103, 105, 106, 107, 108, 109, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 119, 121, 122, 123, 124, 125, 126, 127, 128, 129, 131, 132, 138, 141
19 de abril de 2012	

CATEGORÍA: Saberes basados en la experiencia

Caso ϴA – Fecha	Número de Episodios
1 de marzo 2012	38,
15 de marzo 2012	13, 34, 44, 45, 76, 83,
20 de marzo de 2012	36
22 de marzo de 2012	6, 8, 9, 12, 13, 19, 23, 26, 27, 50,51, 75, 97, 138, 167,
10 de abril de 2012	8, 135,
10 de abril de 2012	29, 36, 45
12 de abril de 2012	71, 97, 98,
19 de abril de 2012	

CATEGORÍA: Teorías implícitas

Caso ϴA – Fecha	Número de Episodios
1 de marzo 2012	
15 de marzo 2012	13, 14
20 de marzo de 2012	20, 26
22 de marzo de 2012	37,75
10 de abril de 2012	77, 112
10 de abril de 2012	
12 de abril de 2012	133
19 de abril de 2012	

CATEGORÍA: Guiones y rutinas

Caso ϴA – Fecha	Número de Episodios
1 de marzo 2012	32, 34, 35, 37, 39, 42, 43, 44, 54,55, 57, 58, 59, 60, 62, 65, 66, 67, 70, 72, 75, 77
15 de marzo 2012	12, 13, 14, 15, 17, 20, 24, 26, 27, 28, 29, 38, 39, 56, 76,
20 de marzo de 2012	7
22 de marzo de 2012	20, 62, 71, 74, 75, 89, 104, 105, 106, 109, 124, 128, 130, 143, 148, 166, 176, 42
10 de abril de 2012	12, 23, 24, 25, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 56, 57, 62, 63, 64, 67, 69, 71, 73, 75, 78, 79, 80, 81, 86, 87, 88, 95, 100, 101, 102, 103, 107, 111, 113, 114, 115, 118, 120, 122, 123, 125, 126, 127, 128, 120, 130, 140, 141, 142, 146, 147, 149, 150, 151, 153, 155, 156, 157, 158, 159, 160, 161, 162, 163, 164, 165, 166, 169, 170
10 de abril de 2012	16, 22, 30, 31, 32, 45, 30,
12 de abril de 2012	22, 24, 26, 41, 45, 68, 72, 79, 80, 81, 95, 120, 130, 135, 136, 138, 139
19 de abril de 2012	

Anexo 7.4. Formato entrevista de Reconocimiento

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
MAESTRIA EN EDUCACIÓN
GRUPO INVAUCOL
PROYECTO DE GRADO:
El Conocimiento Profesional Docente Específico del profesor de matemáticas asociado a la noción de los números enteros

PROTOCOLO DE ENTREVISTA DE RECONOCIMIENTO
Caso Ɵ ___
Elaborado por Zaida Angel y Sonia Espinosa

Preguntas informativas

Investigador (entrevistador): ____
Profesor (entrevistado): ____
Institución Educativa: ____
Lugar:___________________________ Fecha: ___________________
Hora de inicio: ____________________ Hora de finalización: __________

Preguntas de caracterización

1. ¿Cuánto tiempo lleva trabajando como profesor?
2. ¿Cuánto tiempo lleva trabajando en esta institución?
3. ¿La mayor parte de su experiencia docente la ha desarrollado en instituciones públicas, privadas o de otra índole?
4. ¿En qué grados se ha desempeñado cómo docente?
5. ¿Cuál es su formación profesional?
6. ¿Cómo define usted a un profesional en educación, es decir a un profesor?
7. ¿Qué lo llevo a formarse como profesor? (descripción de su historia de vida)

PREGUNTAS DE LOS SABERES QUE INTEGRAN EL CONOCIMIENTO PROFESIONAL DEL PROFESOR

Preguntas Saber académico

8. ¿Cómo enseña la noción de número entero en la escuela? ¿Por qué?
9. ¿Cuáles son los aspectos o temáticas más importantes a enseñar de la noción de número entero? ¿Por qué?
10. ¿Considera usted que el conocimiento que posee el profesor de matemáticas es igual o diferente al de un matemático? ¿Por qué? ¿Cuál

conocimiento considera usted que es más importante en la escuela y por qué?

11. ¿cuáles son las preguntas más frecuentes que le generan sus estudiantes durante la enseñanza de la noción?
12. ¿Cuáles son las fuentes que más le han aportado a la categoría de número entero que usted enseña?
13. ¿Cree usted que su concepto de lo que es el número entero ha cambiado en su vida profesional, si es si la respuesta mencione en qué sentido ha cambiado y cuáles son las razones que han provocado ese cambio?
14. ¿Conoce alguna historia sobre la noción de Z, si la conoce nos la puede narrar?
15. ¿Qué papel le atribuye usted a los libros de texto en su construcción del concepto actual de Z?
16. ¿Qué papel le atribuye usted a los libros de matemáticas en la construcción de su concepto actual de Z?
17. ¿Considera que en la lectura que usted realiza sobre los libros de textos y sobre los libros científicos que trabajan el tema de los Z produce un tipo de conocimiento o saber sobre los Z?

Preguntas de Saberes Basados en la Experiencia

18. ¿Qué estrategias utiliza para enseñar la noción de número entero?
19. ¿Acostumbra usted a reflexionar sobre su experiencia como docente?
20. ¿Considera que en el ejercicio de reflexión que usted realiza sobre su práctica profesional produce algún tipo de saber?
21. ¿Qué papel le atribuye al ejercicio de reflexión que usted realiza sobre su práctica de enseñanza del Z, en la construcción de su concepto actual de Z?
22. ¿Considera usted que existe alguna diferencia entre la noción de Z que usted ha construido a partir de la reflexión sobre su práctica profesional, y la noción de Z más académica o conceptual que usted mantiene?
23. ¿Cuándo usted está enseñando en el aula la noción de número entero se apoya o tiene en cuenta con frecuencia algunas experiencias en la enseñanza de la misma?

Preguntas de Teorías Implícitas

24. ¿Cómo a partir de la enseñanza de los Z promueve las competencias que plantea el PEI del colegio para la enseñanza de esta noción?
25. ¿Cómo ha venido transformando la noción que usted construyó de los Z a lo largo de su permanencia en esta institución?

26. ¿Cuál es la importancia que le da la institución en la que usted trabaja a la enseñanza de la noción de número entero?
27. ¿Cómo describiría en términos generales la metodología que utiliza para la enseñanza de la noción de los Z, según los parámetros del área a la que usted pertenece?
28. ¿Considera usted que en el ámbito institucional se mueve algún tipo de teorías científicas, disciplinares, pedagógicas o didácticas, de las cuales los profesores no son necesariamente conscientes?
29. ¿Cree usted que en el ámbito institucional podrían circular algunas teorías inconscientes sobre los Z, que sin saberlo los profesores ponen en práctica a la hora de enseñar dicha noción? Si es así, ¿podría dar un ejemplo de cómo ocurre esto?
30. ¿Cree usted, que en su manera de entender los Z haya tenido algún papel alguna teoría sobre los Z que se mueva en el inconsciente colectivo de la institución donde usted trabaja?
31. Mencione algunos aspectos en los que su formación profesional le ha aportado a su práctica docente durante la enseñanza de la noción de los Z

Preguntas de Guiones y Rutinas

32. Considera usted que los profesores han construido inconscientemente algún tipo de rutinas que al mantenerlas les hacen más fácil y exitoso el papel de enseñantes?
33. Podría usted identificar algunas rutinas que ha construido en su exitosa carrera como docente? Por favor refiérase a ellas sólo en el caso de la enseñanza de la noción de los Z.
34. Recuerdas alguna experiencia de tu infancia en relación con tu proceso de aprender sobre los Z, que puedas considerar dolorosa o traumática?
35. Has sentido alguna vez, rabia, impotencia o miedo al enfrentarte a la necesidad de realizar ejercicios de Z o al tener que dictar una clase de Z? Si es así, ¿podrías describir el hecho y tratar de comprender por qué sucedió?

Anexo 7.5. Ejemplo del Analytical Scheme de entrevista de reconocimiento profesor Moreno.

Analytcal Scheme

Procedimiento para la organización y análisis de datos en episodios. (Mumby, 1969; Russell, 1976; Perafán, 2004)

El Conocimiento Profesional Docente Específico del profesorado de matemáticas asociado a la noción de número entero

Profesor: .Moreno /**Texto**: *Clase:* / **Fecha**: 03-07-12

Organización por episodios relativos a: *Entrevista 1*	Análisis e interpretación tipo: Análisis e interpretación tipo: ARG1: $Ep_n\ C\ \theta_n \leftrightarrow \theta_n \in Y_n$ *y* $Y_n \in \Theta A$ ARG2: $Ep_n\ C\ \theta_n \leftrightarrow Y_n \in \theta_n$ y $Y_n \in AIDM \rightarrow S$ ARG3: $Ep_n\ C\ \theta_n \leftrightarrow \theta_n \in Y_n$ y Y_n (es causado por) Eef_n ARG4: $Ep_n\ C\ \theta_n \leftrightarrow \theta_n \in Y_n$ y $Y_n\ C\ Sc_n$
Episodio1 *Preguntas de caracterización* *I:* ¿Cuánto tiempo lleva trabajando como profesor? P: 15 años	ARG2.2
Episodio 2 I:¿Cuánto tiempo lleva trabajando en esta institución? P:Privada, pública y algunos años con universidad	
Episodio 3 I: En el colegio en el que actualmente laboras, ¿cuánto tiempo llevas? P: 5 años, desde el 2007	
Episodio4 I: ¿En qué grados se ha desempeñado cómo docente? P: Privado en quinto de primaria hasta 11 y en públicos solamente en bachillerato}	ARG2.3
Episodio5 I: ¿Cuál es su formación profesional? P: Licenciado en matemáticas	ARG2.2
Episodio 6 I: ¿Tiene otra formación como una especialización, diplomados, entre otros? P: No	
Episodio7 I: ¿Cómo define usted a un profesional en educación, es decir a un profesor? P: Como una persona que debe estar actualizándose en cada momento, debe desempeñarse como mirando el contexto de los estudiantes no siempre mirando al libro sino que más que todo mirando a la población a la que se está dirigiendo y traduciendo lo que tú sabes a un lenguaje más sencillo para los muchachos	ARG2.4 define a un maestro desde su historia de vida ARG2.1 ese "traducir" se refiere a la transposición didáctica de la matemática para ser enseñada
Episodio 8 I: ¿Qué lo llevo a formarse como profesor? (descripción de su historia de vida) P: yo creo que la vida como tal te va formando, conduciendo y llegas a tomar algo en determinado	ARG2.4 se debe ahondar en que le agrada de la profesión

momento que no querías, pero después te das cuenta que si te agrada		
Episodio 9 *Preguntas Saber académico* *I:* ¿Cómo enseña la noción de número entero en la escuela?		ARG3.4 La enseñanza desde la experiencia humana
P: Bueno como enseño la noción en el aula de clase, eeeh, pues difícil como explicarlo pero sé que a veces lo hago, lo hago como no debería hacerlo, lo tomo como deudas y como ganancias , entonces simplemente el muchacho asemeja más un número negativo, porque el muchacho desde que empieza a ver matemáticas en su vida escolar va asociando número, número, número como con número natural, simplemente hacer como una transposición rápida del número natural al número entero que lo precede un signo y que eso es una deuda, ahí es lo que maneja y ya a partir de eso el resto lo desenvuelvo siempre girando en torno a deudas y ganancias		ARG3.1 aparece el término transposición en el sentido de que el Z se debe hacer entender como al número natural, el saber académico que ha construido el profesor se relaciona con la extensión que se hizo de los N a los Z
Episodio 10 I : ¿Cuáles son los aspectos o temáticas más importantes a enseñar de la noción de número entero? ¿Por qué?		ARG3.1 menciona las temáticas a enseñar de los Z
P:Bueno los temas yo creo que siempre vamos pegados a un pensum por así decirlo, lo que es la noción de número entero, lo que como son los conjuntos: empezamos naturales, enteros, racionales el orden en la recta numérica, las propiedades, las operaciones básicas con los números enteros, pues siempre van en los temas, los que cualquier libro nos menciona		ARG3.3 cuando habla de pegarse a un pensum se está refiriendo de alguna manera al programa establecido por el colegio.
Episodio 11 I: ¿Considera usted que el conocimiento que posee el profesor de matemáticas es igual o diferente al de un matemático? P: Es diferente		ARG3.1 el profesor es consciente de que el conocimiento del profesor tiene un sentido y una construcción diferente a la del matemático
Episodio 12 I: ¿Por qué? P: Lo que te decía ahorita un matemático se pega al pie de la letra a decirte las matemáticas hablando con un lenguaje muy pesado, el profesor lo que hace es traducir y bajar ese lenguaje a un nivel como más sencillo, donde todos los muchachos se sientan cómodos de hablar de esa materia		ARG3.1 reconoce la transposición didáctica que hace el profesor de matemáticas del conocimiento matemático en una primera línea que es para él mismo y en una segunda que es para sus estudiantes

Anexo 7.6 Perfil epistemológico de la noción de números enteros

Para realizar el perfil epistemológico de una noción particular en una disciplina particular se debe dar cuenta de los cambios históricos que se han dado en el devenir de dicha noción a partir de un rastreo que se hace al interior de la disciplina en la construcción de la noción, porque ésta no se desarrolla de forma lineal sino que presenta varias mutaciones de acuerdo a las transformaciones que sufra el espíritu científico, por tanto el perfil epistemológico se debe realizar para cada noción puesto que Bachelard afirma que "un perfil epistemológico debe ser relativo a un concepto designado, que vale solo para un espíritu particular que se examina así mismo en un estadio particular de su cultura" (1970: 37).

En este capítulo se pretende bosquejar un perfil epistemológico para el concepto científico los números enteros, noción que pertenece a la disciplina de las matemáticas, para esto se entiende con Bachelard que el perfil epistemológico es una herramienta conceptual que permite comprender las transformaciones que ha tenido la noción durante su construcción histórica "a la luz de doctrinas filosóficas que llevan del realismo al superracionalismo" (1970:34), esto implica que en un concepto se puede observar la dispersión filosófica y la complejidad epistemológica del que está cargado, puesto que en él habita una polifilosofía.

La noción no siempre es la misma, está mediada por cambios históricos que permite diferenciarla epistemológicamente, pero dichos cambios están dados por intereses sociales, políticos, culturales, para cada momento de la historia que han propiciado esas transformaciones en el devenir de la noción, por tanto los saberes no son estáticos, evolucionan y son relativos al tiempo y al espacio.

A pesar de que la noción no se desarrolla o no se construye de manera lineal, debe ser comprendida como un sistema y no como una sumatoria de partes o de avances históricos. Entonces una noción puede ser explicada desde diferentes doctrinas filosóficas como el realismo, el positivismo, el racionalismo clásico, el racionalismo completo y el racionalismo discursivo, porque ésta puede atravesar dichas doctrina, por tanto el espíritu precientífico y científico se transforma a medida que pasa por cada una de ellas.

Como ya se dijo una noción no se desarrolla de manera lineal, ese es el caso de la noción de los números enteros, ni tampoco sus doctrinas filosóficas corresponde a un orden cronológico en la construcción de la noción, es así como en el perfil que se presenta para la noción que se trabaja en esta tesis se observa que a pesar de que la noción se transforma moviéndose hacia un espíritu científico, existen momentos en los que a pesar de que los años y siglos pasen ésta se devuelve a un espíritu precientífico, a un estado pasional de quien la construye.

La noción de los números enteros ha tenido transformaciones epistemológicas, en donde el concepto se ha constituido en las doctrinas filosóficas del realismo, empirismo, racionalismo clásico, racionalismo completo y racionalismo discursivo que se irán desarrollando a continuación.

A. Realismo. Un concepto que se funda bajo esta doctrina [corresponde a una a una apreciación tosca y … glotona de la realidad… que se constituye en un objeto sustancial de deseo] (Bachelard, 1970:22). Corresponde a una simple descripción en la que todo es "real", siendo un concepto fácil de asimilar, realizándose un primer análisis desde las intuiciones y los sentidos los cuáles suelen ser muy engañosos, dando paso a ideas simples y a respuestas simples, construyendo "ciencia y filosofía sobre un conjunto de imágenes burdas e ingenuas" (Bachelard 1971:70).

Es una dialéctica inmadura que "opera sobre las cosas en lugar de operar sobre axiomas" (Bachelard 1970:23), siendo la función primordial del realismo la existencia situada que asigna a los objetos, considerando que la inteligencia humana está adaptada al conocimiento de las cosas. Un concepto ubicado en esta doctrina es un concepto – obstáculo del espíritu precientífico.

Este realismo ingenuo en el concepto de los números enteros se evidencia en la civilización griega con los pitagóricos cuando cargan al número de misticismo, atribuyéndole poderes sobre humanos y utilizándolo en la numerología, los números se consideraban como una revelación celestial afirmando que "Todo es número”, y que a todo lo que componía la naturaleza se le podía afirmar un número natural [su fe en el número como el regulador del Cosmos… pues los tres primeros sólidos se presentan en minerales comunes que llamarían la atención de cualquier geómetra… (… la galena, la sal, la gema y la fluorita cristalizan en cubos, la magnetita en octaedros)] (Bell 1949: 80).

A esta mirada mística de los números se le denomina Aritmología, se puede decir que era una de las ramas de las matemáticas que estudiaban los pitagóricos, ésta doctrina aritmética incluía los números místicos –así como los números eran el principio de la música también eran el principio de la naturaleza-, la clasificación de los números, los números perfectos, los números amigos y los números poligonales. La aritmología dotaba a los números de atributos propios.

Pero dentro de la aritmología se destacan los números místicos, puesto que ellos están cargados por poderes del Cosmo y el Universo es así como Pitágoras dijo refiriéndose al número uno “la monada es el principio de todas las cosa” ó el 4 era considerado el más grande de los números divinos por los sabios místicos anteriores a Pitágoras, era designado como el cuaternario, el cuatro representa los cuatro elementos el aire, el fuego, el agua y la tierra.

Entonces haber “visto” al número natural en la naturaleza o en los elementos de esto provoca la negación de los números enteros negativos porque no estaban presentes en ella, no se podía tener acceso a ellos a través de los sentidos, tal como lo afirma Gonzales y otros (1990) los números enteros negativos fueron rechazados por los árabes y los griegos porque estos no podían ser asociados a un objeto de la naturaleza; Galileo quien concebía que las leyes físicas de la Naturaleza se concebían en el lenguaje de las matemáticas no consideró los números cuadrados resultantes de enteros negativos, solo los de los enteros positivos; Descartes solo realizó el primer cuadrante del plano cartesiano (correspondiente a los enteros positivos) porque él “unía la meta griega de la búsqueda del plan matemático de la naturaleza con la creencia cristiana que Dios es el creador del universo” (Gonzáles y otros (1990:30); Michael Stifel matemático considaraba los números enteros negativos como “numeri absurdi”; Kronecker matemático del siglo XIX afirmó confiado “Dios hizo los enteros, todo el resto es obra del hombre” (Bell 1940:180).

El pensamiento que dio origen al concepto de los números enteros comenzó interpretando “sólidos”, cosas, fenómenos físicos, cosmológicos y místicos que correspondían a la proyección de la realidad hecha por los deseos de los sujetos que se originaban de una ensoñación ordinaria, lo cual provocó la negación de los números enteros porque no se encontraban proyectados en las cosas de la naturaleza.

B. Empirismo. Esta doctrina filosófica liga el concepto [al uso… al beneficio de la objetividad instrumental] (Bachelard 1970:24), se construyen modelos, técnicas que le permiten comprobar la realidad, de manera que se cree que esto es cierto cuando en realidad el modelo se construye de tal forma que se ajuste a la realidad y no ésta al modelo, entonces “el instrumento precede a su teoría” (Bachelard 1970:24).

“La primera influencia empírica no da siquiera el dibujo exacto de los fenómenos, ni siquiera una descripción, ordenada, jerarquizada de los fenómenos” (Bachelard 1971:41), el concepto se hace simple, lo que importa es su uso ajustado a la realidad proyectada por el sujeto de deseos, utilizando la experiencia como fuente que legitimar, dichos deseos.

Los números enteros utilizados como instrumentos se observan en las civilizaciones egipcias y babilónicas al “poner el número al servicio de la economía y el comercio” (Bell 1949: 38), la construcción de planos, el levantamiento de medidas y la aplicación a la astronomía. Con matemáticos como Fibonacci se utiliza el número entero negativo para representar pérdidas de dinero en los problemas, con Bombelli se intentan utilizar las reglas aritméticas en términos de haberes (enteros negativos) y débitos (enteros positivos).

Con el desarrollo de la Mecánica clásica el matemático Girard interpretó a los números enteros “Lo negativo en geometría indica un retroceso, mientras que lo positivo un avance” (citado por Gonzáles y otros 1990:33) y como pérdidas, haberes, deudas, interpretación usada por varios matemáticos, y el físico Newton quien desarrolló el cálculo afirmó “en geometría, si una línea trazada hacia cualquier dirección se considera afirmativa, la negativa será la que se trace en una dirección opuesta” (Cap. V de la Aritmética Universalis, citado por González y otros 1990:34); D’Alembert matemático del siglo XVIII define a los números enteros negativos como cantidades negativas “aquellas que son observadas como menores que nada” (citado por González y otros 1990:37), Cauchy matemático afirma “Lo mismo que la idea de número nace de la medida de magnitudes, la idea de cantidad (positiva o negativa) se adquiere cuando se considera cada magnitud de una especie como susceptible de un crecimiento o disminución de otra magnitud fija de la misma especie” (citado por González y otros 1990:42). Y bajo el desarrollo de la Geometría Analítica los enteros tuvieron un significado como abscisas de puntos en las rectas coordenadas.

Bajo esta doctrina el concepto de los números enteros se entiende bajo las aplicaciones realizadas a situaciones concretas de pérdidas-ganancias, haberes-débitos, aumento-disminución o geométricamente en un plano cartesiano, además se evidencia que se concibe al entero negativo como el opuesto del entero positivo.

C. Racionalismo Clásico. El espíritu sufre una mutación en el que el concepto ya no es una cosa sino una construcción de orden racional, que se da a través de las relaciones que establece con otras nociones, entonces la noción [se define (…) dentro de un cuerpo de nociones, y ya no sólo como un elemento primitivo de una experiencia inmediata y directa] (Bachelard 1970:26).

El concepto no es entendido como una simple aplicación a cosas, sino como una construcción de la mente que se construye dentro de un “cuerpo de nociones”

(Bachelard 1970:26) las cuales pueden ser matematizadas, satisfaciendo el espíritu independiente de las verificaciones de la experiencia.

Esta mutación del espíritu en el concepto de los números enteros se evidencia con la afirmación realizada por el profesor de matemáticas del siglo XVIII Morris Kline quien explica que el fracaso en comprender los enteros negativos se debía a que "Los matemáticos no supieron apreciar que esos conceptos no están basados en la experiencia inmediata, sino que eran creaciones de la mente" (González y otros 1990: 46); ya en el siglo XIX considerado el siglo de "oro de las matemáticas", algunos matemáticos inician una innovación en la disciplina pues como lo afirma Gonzáles y otros "los matemáticos comenzaron a considerar los objetos de su trabajo como construcciones intelectuales que nada tienen que ver con lo real" (1990: 47). Es así como en este siglo el matemático Herman Hankel en su obra "Teoría del Sistema de los Números Complejos" publicada en 1867 afirma que "La condición para construir una aritmética universal es, por tanto, la de una matemática puramente intelectual, separada de todo tipo de percepciones sensibles" (Gonzáles y otros 1990: 48).

Hankel y Peacock formularon en 1958 "El principio de la permanencia de la forma" el cual fue muy importante para el desarrollo de la matemática en el mismo siglo y a principios del siglo XX, este principio supone que todas las operaciones que se podían realizar en los Números Naturales (N), también eran validas en los otros conjuntos numéricos, a partir de esto los enteros negativos quedaban justificados tomando las definiciones, propiedades y operaciones de los números naturales, es decir son aceptados como una extensión de los números naturales en donde se cumplen también para ellos las leyes de la artimética. Gonzáles y otros (1990: 50) explican el principio diciendo que "todos los resultados del álgebra aritmética que se deducen por aplicación de sus reglas y que son generales en su forma aunque particulares en su valor, son igualmente resultados del álgebra simbólica, donde son generales tanto en su valor como en su forma". Así Hankel le dio una significación formal a los enteros negativos (Z^-) logrando que estos fueran reconocidos como números por los matemáticos, pero esta definición aún no era rigurosa.

Bajo esta doctrina se reconoce a los números enteros como construcciones de la mente debido a que no se busca proyectarlos en cosas de la realidad, ni buscarle un significado en ese lugar, por el contrario se opta por una formalización en un lenguaje matemático, buscándole un estatuto coherente al asignarle a este concepto las mismas propiedades, operaciones, y relaciones de orden que poseía una noción ya legitimada como la de los Números Naturales, pero además se le reconoce el cero como elemento neutro.

D. Racionalismo Completo. En esta doctrina el espíritu científico se compromete, se arriesga, ya no entiende el conocimiento como una aplicación sino que el conocimiento construye cosas que son el producto de la mente, cosas que no estaban presentes en la realidad. Entonces no existe una razón absoluta, [en resumen, la noción simple deja lugar a la noción compleja… el racionalismo se multiplica] (Barchelard 1970: 29), surgiendo en una misma noción a la misma vez una variedad de usos de otras nociones elementales que la construyen como un todo.

En el concepto de los números enteros se construyen diversas teorías que buscan otorgarle un definición lógica, coherente y explícita, es así como a finales del siglo XVIII surgen varias con la intención de dar respuesta a la pregunta ¿qué es un número entero?, desligándolo de un significado concreto sino respondiendo a ésta pregunta a partir de bases matemáticas.

En estas teorías se entiende a los números enteros bien sea como extensión del número cardinal o del número ordinal. Las teorías que se desarrollan como extensión del número cardinal son: la teoría de los pares, la teoría de las congruencias y la teoría de los operadores.

La teoría de los pares que tiene como base la idea intuitiva de que los enteros negativos tienen como extensión la operación de la resta, idea que proviene de Hankel (1867) que concebía un número negativo como el resultado de la diferencia entre dos naturales, O. Stolz (1885) y Tannery (1186) desarrollan ésta idea y finalmente Dedekind (1831 – 1916) plantea una relación de equisustractividad entre dos números naturales en la que no se refiere a la resta como operación inversa de la adición, demostrando que hay una relación de equivalencia y que ella será el conjunto de los número enteros.

La teoría de as congruencias proviene de Kronecker (1823 – 1891) y afirma que los enteros se entiende como el cálculo de las congruencias modulo x + 1, intentando justificar así el cálculo con los números enteros sin referirse a la definición de esto.
La teoría de los operadores inicia con Méray (1835-1911) quien manejo las fracciones como operadores y luego extendió este tratamiento a los números enteros, más tarde J. Peano (1858 – 1932) con algunos de sus discípulos admitieron y desarrollaron esta teoría bajo el nombre de "operadores".

En la teoría de los números enteros como extensión del ordinal se entienden que los enteros negativos poseen el mismo orden que los positivos en la recta numérica hecho que quedó registrado desde los tiempos de Newton, así el entero designa el lugar que ocupa en una serie de elementos en un orden en el que hay uno que le precede y otro que lo sucede. Más tarde Rusell (1872 – 1970) definió a los números enteros bajo la idea de orden como relación asimétrica y transitiva entre números naturales.

La noción de número entero bajo esta doctrina filosófica utiliza otras nociones para construirse como lo son la de número natural, relaciones de orden, el número cardinal; se trata de que el entero negativo deje de ser visto como una categoría aislada para pasar a hacer parte de un sistema numérico. Las teorías formuladas buscan un máximo de rigor durante su desarrollo por tanto se apartan de soportes geométricos o intuitivos.

E. Racionalismo Discursivo. Se da una evolución filosófica y epistemológica en la que el espíritu científico sueña "ensoñación anagógica, aquella que se aventura pensando y que piensa aventurándose, aquella que busca una iluminación del pensamiento por el pensamiento" (Bachelard 1970: 35), esta ensoñación es básicamente matemátizante, aspirando a relaciones mucho más complejas.

En el concepto del número entero este racionalismo sale a la luz cuando con un grupo de matemáticos bourbakistas en 1939 "la matemática se entiende como almacén de formas abstractas" (González y otros 1990: 53) y se concibe el semianillo **N** de los naturales, el anillo **Z** de los enteros, del cuerpo **Q** de los racionales, del cuerpo completo de los reales **R** y del algebra **C** de los complejos . El concepto de isomorfismo entre estructuras algebraicas permite identifica a los números naturales con los enteros positivos con lo que de nuevo es posible considerar a los enteros como una ampliación de los naturales y afirmar que $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C}$, es importante mencionar que esta inclusión se hace bajo un isomorfismo. Entonces los números enteros Z, son un anillo del cuerpo Q de los racionales, del cuerpo completo de los reales R y del algebra C de los complejos, en donde cada uno de estos sistemas numéricos son estructuras abstractas