TAREAS TECNO-PEDAGÓGICAS: UN MODELO PARA PROMOVER LA CONJETURACION EN LA EDUCACION SUPERIOR

LUIS CARLOS ROMERO CASTRO

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA

BOGOTÁ D.C.
2018

TAREAS TECNO-PEDAGÓGICAS: UN MODELO PARA PROMOVER LA CONJETURACION EN LA EDUCACION SUPERIOR

LUIS CARLOS ROMERO CASTRO
2016185027

Tesis para optar por el título de
Magister en Docencia de la Matemática

Asesora
Leonor Camargo Uribe

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA
BOGOTÁ D.C.
2018

“*Para todos los efectos, declaro que el presente trabajo es original y de mi total autoría: en aquellos casos en los cuales he requerido del trabajo de otros autores o investigadores, he dado los respectivos créditos*”.

(Acuerdo 031 del 2007. Artículo 42. Parágrafo 2.)

Agradecimientos

A la Universidad Pedagógica Nacional, por haberme dado la posibilidad de formarme en el campo de la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas.

A la profesora Leonor Camargo Uribe, por sus aportes, su colaboración y su paciencia, sin los cuales este trabajo no hubiera sido posible.

A mi familia, por su apoyo incondicional en los momentos difíciles.

RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN – RAE	
1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de grado en maestría de profundización.
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central.
Título del documento	Tareas Tecno-Pedagógicas: Un modelo para promover la conjeturación en la educación superior.
Autor (es)	Romero Castro, Luis Carlos.
Director	Camargo Uribe, Leonor.
Publicación	Bogotá, Universidad Pedagógica Nacional, 2018, 134 p.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional.
Palabras Claves	TEORÍA DE LA VARIACIÓN; CONJETURACIÓN; AMBIENTES DE GEOMETRÍA DINÁMICA; TESELACIÓN.

2. Descripción

El objetivo de este trabajo es determinar la utilidad del modelo de Diseño de Tareas Tecno Pedagógicas (TTP) propuesto por Leung (2011) para fomentar la conjeturación en una clase de geometría de una carrera de arquitectura. Este modelo está estructurado con base a ciertos estados específicos de internalización con el fin de adquirir el conocimiento matemático que son denominados *modos epistémicos*. Los principales referentes teóricos considerados para este trabajo fueron la Teoría de la Variación (Marton & Booth, 1997; Marton, Runesson & Tsui, 2004) y las fases del proceso de conjeturación propuestas por Cañadas, Deulofeu, Figueiras, Reid & Yevdokimov (2008). La estrategia investigativa desarrollada se enmarca en lo que se define como un "Experimento de Enseñanza". Este consiste en el diseño, implementación y evaluación de una secuencia de enseñanza, organizada con el fin de poner en juego una hipótesis acerca de un aprendizaje específico (Camargo, s.f.). La recolección de la información se realizó sobre el proceso de resolución de una secuencia de actividades que se propuso a un grupo de estudiantes de Geometría de una carrera de arquitectura de una universidad privada de Bogotá.

3. Fuentes

A continuación, se presentan las principales referencias que se utilizaron en este trabajo.

Ainley, J., & Pratt, D. (2005). The significance of task design in mathematics education: Examples from proportional reasoning. In H. L. Chick & J. L. Vincent (Eds.), Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 1, pp. 103–108). Melbourne: PME

Ainley, J., Pratt, D., & Hansen, A. (2006). Connecting engagement and focus in pedagogic task design. British Educational Research Journal, 32(1), 23-38.

Álvarez, I., Ángel, J. L., Vargas, E., & Soler, M. N. (2014). Actividades matemáticas: conjeturar y argumentar. Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 85, 75-90.

Baccaglini-Frank, A. (2010). Conjecturing in dynamic geometry: A model for conjecture-generation through maintaining dragging. Doctoral dissertation, University of New Hampshire, Durham, NH

Baccaglini-Frank, A., & Mariotti, M. A. (2010). Generating conjectures in dynamic geometry: The maintaining dragging model. International Journal of Computers for Mathematical Learning, 15(3), 225-253.

Bell, A. W. (1979). Research on teaching methods in secondary mathematics. In D. Tall (Ed.), Proceedings of the Third Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (pp. 4–12). Warwick: PME.

Camargo, L. (s.f.) Estrategias Cualitativas de Investigación en Educación Matemática. Libro en evaluación. Fondo Editorial Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá.

Camargo, L., Perry, P., & Samper, C. (2005). La demostración en la clase de geometría: ¿puede tener un papel protagónico? Educación Matemática, 17(3), 53-76.

Camargo, L., Pérez, C., Plazas, T., Perry, P., Samper, C. & Molina, Ó. (2013). Enseñanza de la geometría mediada por artefactos: teoría de la mediación semiótica. En P. Perry (Ed.), Memorias del 21º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones (pp. 85-96). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Cañadas, M., Deulofeu, J., Figueiras, L., Reid, D. & Yevdokimov, O. (2008). Perspectivas teóricas en el proceso de elaboración de conjeturas e implicaciones para la práctica: Tipos y Pasos. Revista Enseñanza de las Ciencias, 6 (3), 431-441.

Fahlgren, M., & Brunström, M. (2014). A model for task design with focus on exploration, explanation, and generalization in a dynamic geometry environment. Technology, knowledge and learning, 19(3), 287-315.

Fundación Universidad de America. (2011). Proyecto Educativo Institucional. Recuperado de http://www.uamerica.edu.co/la-universidad/documentos-institucionales/proyecto-educativo-institucional/

Janvier, C. (1979). The use of situations for the development of mathematical concepts. In D. Tall (Ed.), Proceedings of the Third Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (pp. 135–143). Warwick: PME.

Kieran, C., Doorman, M., & Ohtani, M. (2015). Frameworks and principles for task design. In Task design in mathematics education (pp. 19-81). Springer, Cham.

Kieran, C., & Saldanha, L. (2008). Designing tasks for the co-development of conceptual and technical knowledge in CAS activity: An example from factoring. Research on technology and the teaching and learning of mathematics, 2, 393-414.

Leung, A. (2003). Dynamic Geometry and The Theory of Variation. International Group for the Psychology of Mathematics Education, 3, 197-204.

Leung, A. (2008). Dragging in a Dynamic Geometry Environment Through the Lens of Variation. International Journal of Computers for Mathematical Learning 13, 135–157

Leung, A. (2011). An epistemic model of task design in dynamic geometry environment. ZDM: the international journal on mathematics education, 43(3), 325-336.

Leung, A., & Bolite-Frant, J. (2015). Designing mathematics tasks: The role of tools. In Task design in mathematics education (pp. 191-225). Springer, Cham.

Lo, M. L. (2012). Variation theory and the improvement of teaching and learning. Gothenburg Studies in Educational Science, 323. Acta Universitatis Gothoburgensis. Göteborg, Sweden: Acta Universitatis Gothoburgensis..

Mariotti M.A. (2006). Proof and Proving in Mathematics Education. En Á. Gutiérrez, P. Boero (Eds.), Handbook of research on the psychology of mathematics education (pp. 173-204). Rotterdam, Los Países Bajos, Sense Publishers.

Mariotti, M.A. & Bartolini Bussi M.G. (1998). From drawing to construction: teachers mediation within the Cabri environment, Proc. of the 22nd PME Conference, Stellenbosch, South Africa, I-180-95.

Marton, F., & Booth, S. (1997). Learning and awareness. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, INC, Publishers.

Marton, F., Runesson, U., & Tsui, A. B. M. (2004). The space of learning. In F. Marton & A. B. M. Tsui (Eds.), Classroom discourse and the space of learning (pp. 3–40). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, INC Publishers.

MEN (s.f.). Propuesta de Lineamientos para la Formación por Competencias en Educación Superior. Recuperado de http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles261332_archivo_pdf_lineamientos.pdf.

Perry, P., Samper, C., Molina, O., Camargo, L., & Echeverry, A. (2013). Actividad instrumentada y mediación semiótica: dos teorías para describir la conjeturación como organizador curricular. Aportes investigativos para el diseño curricular en geometría y estadística, 13-92.

Perry, P., Samper, C., Camargo, L., y Molina, Ó. (2013). Innovación en un aula de geometría de nivel universitario. En C. Samper y Ó. Molina (Eds.), Geometría plana: un espacio de aprendizaje (pp. 14-24). Bogotá, Colombia: Fondo Editorial Universidad Pedagógica Nacional.

Rabardel, P. (1995). Les hommes et les technologies - Approche cognitive des instruments contemporains. Paris: Armand Colin.

Vygotsky, L. S. (1981). The genesis of higher mental functions. In J. V. Wertsch (Ed.), The concept of activity in Soviet Psychology, Armonk, NY. Sharpe.

4. Contenidos

El presente trabajo se enmarca en la línea Argumentación y Prueba en Geometría de la Maestría en Docencia de la Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional. El interés de esta línea ha estado enfocado en el aprendizaje de la geometría y en particular en la actividad demostrativa. En este trabajo se indaga acerca de la utilidad del modelo de Diseño de Tareas Tecno Pedagógicas propuesto por Leung (2011) para fomentar la conjeturación en una clase de geometría de una carrera de arquitectura, que es uno de los procesos que comprende la actividad demostrativa. El trabajo se dividió en seis capítulos.

El capítulo 1 comprende la descripción de la problemática que se pretende abordar, a partir de la cual se formula la pregunta de investigación y se plantean los objetivos del trabajo. Se presentan las evidencias que justifican la indagación y la literatura revisada acerca del estado actual de la investigación en el diseño de tareas.

En el capítulo 2 se presentan los dos referentes teóricos que fundamentan este estudio, que son la Teoría de la Variación y una conceptualización del proceso de conjeturación desde una óptica específica. En este capítulo se presenta el Modelo de Diseño de Tareas TecnoPedagógicas (MTTP), el cual es el modelo cuya utilidad pretendo determinar en este trabajo.

El capítulo 3 presenta la metodología utilizada en este trabajo, describiendo las fases que comprende y la manera como estas fases se desarrollaron durante la investigación.

En el capítulo 4 se describe el análisis del trabajo realizado por estudiantes al resolver una tarea diseñada bajo los postulados del MTTP. Para ellos, se presentan extractos de transcripciones de las sesiones en las que los estudiantes trabajaron en las tareas diseñadas.

En el capítulo 5 se discuten los aspectos destacados la actividad desarrollada por los estudiantes al resolver las tareas, teniendo en cuenta los análisis realizados en el capítulo 4. Finalmente, en el capítulo 6, se presentan las conclusiones de la investigación teniendo en cuenta la pregunta de investigación planteada, y a la influencia que tuvo este trabajo en mi formación como profesor de matemáticas y como investigador en el campo de la Educación.

5. Metodología

La estrategia investigativa desarrollada se enmarca en lo que se define como un "Experimento de Enseñanza". Este consiste en el diseño, implementación y evaluación de una secuencia de enseñanza, organizada con el fin de poner en juego una hipótesis acerca de un aprendizaje específico (Camargo, s.f.). Esta estrategia consta de cinco fases que comprenden la fundamentación teórica de la investigación, el planteamiento de una hipótesis investigativa, el diseño de la secuencia de enseñanza, su implementación y el análisis retrospectivo.

Teniendo en cuenta lo anterior, se diseñó una secuencia de enseñanza enmarcada en el Modelo de Tareas TecnoPedagógicas de Leung (2011) que consistía en dos tareas centradas en la teselación de polígonos regulares. Estas tareas fueron implementadas en dos sesiones de clase de un curso de geometría de una carrera de Arquitectura. Las tareas incluían actividades en las cuales los estudiantes debían explorar una construcción en el software de geometría dinámica GeoGebra. Para la resolución de las tareas, los estudiantes fueron divididos en grupos de tres personas.

Para la fase de análisis retrospectivo se recopiló el material correspondiente a la producción escrita de los grupos de trabajo, las grabaciones de audio de las conversaciones sostenidas con los integrantes de cada grupo y las grabaciones de video de las capturas de pantalla del trabajo realizado por cada grupo con el software GeoGebra. De este material se seleccionó el correspondiente a dos de los grupos de trabajo y con base en ese material se construyeron los datos investigativos, que son transcripciones de fragmentos de lo sucedido en cada uno de los grupos de trabajo cuando resolvían las tareas propuestas. La herramienta analítica que se usó para el análisis de los datos tiene en cuenta tanto los modos epistémicos del MTTP como las fases del modelo de conjeturación planteadas por Cañadas et al (2008).

6. Conclusiones
El análisis realizado a la actividad desarrollada por los estudiantes en la resolución de la secuencia de actividades diseñada permite afirmar que la secuencia generó un ambiente propicio para que los estudiantes formularan conjeturas que permitieran caracterizar los polígonos regulares que teselan el plano. Se observó que en la generación de este ambiente influyó fuertemente la experimentación de los patrones de variación (Marton & Booth, 1997) y el uso de software de geometría dinámica. En cuanto al aprendizaje del contenido matemático de la teselación con polígonos regulares, se evidenció que el hecho de que las tareas estuvieran centradas en desarrollar procesos de conjeturación permitió que los estudiantes tuvieran la oportunidad de realizar sus propios descubrimientos y de construir su propio conocimiento. En ese sentido, las tareas diseñadas tomando como referencia el MTTP son una alternativa para promover actividades argumentativas que permitan en los estudiantes un aprendizaje más significativo de los conceptos de la geometría, y en general, de las diversas ramas de las matemáticas.

Elaborado por:	Romero Castro, Luis Carlos
Revisado por:	Camargo Uribe, Leonor

Fecha de elaboración del resumen:	27	11	2018

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL

Educadora de educadores

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

ACTA DE VALORACIÓN DE TRABAJO DE GRADO

Escuchada la sustentación de la Tesis de Grado titulada ***Tareas tecno-pedagógicas: un modelo para promover la conjeturación en la Educación Superior***, presentada por el estudiante:

Luis Carlos Romero Castro, Cód. 2016185027, CC. 80.175.804

como requisito parcial para optar al título de **Magíster en Docencia de la Matemática**, analizado el proceso seguido por el estudiante en la elaboración del trabajo y evaluada la calidad del escrito final, se le asigna la calificación de **Aprobada,** con 47 puntos.

Observaciones:

En constancia se firma a los 14 días del mes de febrero de 2019.

JURADOS

Director del Trabajo: Profesora: Leonor Camargo

LEONOR CAMARGO URIBE (UPN)

Jurados:

Profesor:

ALBERTO DONADO NUÑEZ (UPN)

Profesor:

IVONNE TWIGGY SANDOVAL (UPN México)

CONTENIDO

INDICE DE TABLAS

INDICE DE ILUSTRACIONES

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo se enmarca en la línea Argumentación y Prueba en Geometría de la Maestría en Docencia de la Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional. El interés de esta línea ha estado enfocado en el aprendizaje de la geometría y en particular en la actividad demostrativa. En este trabajo se indaga acerca de la utilidad del modelo de Diseño de Tareas Tecno Pedagógicas propuesto por Leung (2011) para fomentar la conjeturación en una clase de geometría de una carrera de arquitectura, que es uno de los procesos que comprende la actividad demostrativa. El trabajo se dividió en seis capítulos.

El capítulo 1 comprende la descripción de la problemática que pretendo abordar, a partir de la cual formulo la pregunta de investigación y planteo los objetivos del trabajo. También presento evidencias que justifican la indagación y la literatura revisada acerca del estado actual de la investigación en el diseño de tareas.

En el capítulo 2 presento los dos referentes teóricos que fundamentan este estudio: la Teoría de la Variación y una conceptualización del proceso de conjeturación desde una óptica específica. También presento el Modelo de Diseño de Tareas TecnoPedagógicas (MTTP), el cual es el modelo cuya utilidad pretendo determinar en este trabajo.

En el capítulo 3 describo la metodología utilizada, describiendo las fases que comprende y la manera como estas fases se desarrollaron durante la investigación.

En el capítulo 4 sintetizo el análisis del trabajo realizado por estudiantes al resolver dos tareas diseñadas bajo los postulados del MTTP. Para ello, presento extractos de transcripciones o narraciones de las sesiones en las que los estudiantes trabajaron en las tareas diseñadas y los interpreto a la luz de la teoría.

En el capítulo 5 discuto los aspectos destacados la actividad desarrollada por los estudiantes al resolver las tareas, teniendo en cuenta los análisis realizados en el capítulo 4. Finalmente en el capítulo 6, hago las conclusiones de la investigación teniendo en cuenta la pregunta de investigación planteada, y a la influencia que tuvo este trabajo en mi formación como profesor de matemáticas y como investigador en el campo de la Educación.

1. DELIMITACIÓN DEL PROBLEMA

En este capítulo presento la problemática que se abordó en este trabajo, junto con las evidencias de este. A continuación, presento los objetivos del trabajo, su justificación y la revisión de la literatura realizada.

1.1 SITUACIÓN PROBLEMÁTICA QUE SE ATIENDE

Un fenómeno común, observado en mi experiencia como docente universitario de matemáticas, en carreras de ingeniería y arquitectura en una universidad privada de Bogotá, es el escaso desarrollo de procesos de conjeturación que tienen los estudiantes en la clase de matemáticas, y las pocas oportunidades que ellos tienen para conjeturar en dichas clases. Con mucha frecuencia memorizan definiciones, mecanizan procedimientos, hacen operaciones, pero en muy pocas ocasiones tienen la oportunidad de explorar en la clase de matemáticas con el fin de descubrir nuevas propiedades de los objetos matemáticos con los que trabajan; de formular sus propias afirmaciones acerca de estos objetos e indagar acerca de la veracidad o plausibilidad de ellas. Este hecho influye en un bajo desempeño académico cuando se trata de resolver problemas que exijan que ellos hagan sus propias aseveraciones acerca de fenómenos propios de su profesión relacionados con conceptos matemáticos, aseveraciones que no hayan sido establecidas por el profesor en la clase; es decir, que, a partir de la exploración del fenómeno, sean capaces de formular conjeturas acerca del comportamiento del fenómeno y justificar su validez.

Esta problemática ha sido evidenciada también por mis colegas en sus respectivos cursos y a la hora de tratar de aportar a la solución de este hecho, en reuniones informales que hemos sostenido con los profesores del Departamento de Matemáticas de mi universidad, hemos concluido que, por tener muy poca o ninguna formación pedagógica (ya que casi todos somos profesionales de disciplinas distintas a la educación), carecemos, en general, de una fundamentación que le de soporte a las decisiones que tomamos en nuestras prácticas de enseñanza, en particular en el diseño de tareas, y que nos brinde herramientas para apoyar a nuestros estudiantes en el desarrollo de procesos de conjeturación. Nuestra práctica docente está basada exclusivamente en la experiencia que hemos adquirido al ejercer la profesión, de forma empírica, sin bases teóricas sobre cómo enseñar matemáticas.

Lo anterior me llevó a tomar la decisión de formarme a nivel de posgrado en Educación Matemática. Por ello ingresé a la Maestría en Docencia de la Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional. En esta maestría, me vinculé a la línea de investigación de Argumentación y Prueba en Geometría, ya que mi interés estaba centrado en ganar herramientas que me permitieran fomentar capacidades en mis estudiantes que les permitieran descubrir propiedades de los fenómenos matemáticos no predeterminadas por el profesor, y que les permitieran poder argumentar su validez de manera razonada .Debido a que el foco de interés de dicha línea de investigación está centrado en el aprendizaje y la enseñanza de la geometría, mi interés viró hacia la clase de Geometría de la Facultad de Arquitectura de la universidad en la que trabajo. Con el propósito de indagar acerca de las tareas que los profesores de Geometría proponían a sus estudiantes en dicha asignatura, pues no la impartía yo, me di a la labor de revisar la evaluación que se aplicó en el primer corte del segundo semestre de 2016.

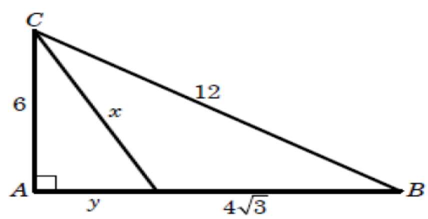
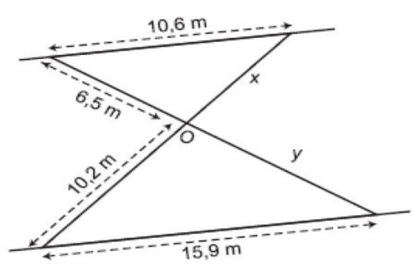
La razón para analizar la evaluación fue porque pretendí acceder a las tareas propuestas por el profesor a sus estudiantes, sin observar directamente las clases para no incomodar a mi colega ni que él se sintiera evaluado. Además, consideré la evaluación como un reflejo las tareas desarrolladas en el aula de clase. Esta suposición fue confirmada por el profesor que propuso la evaluación cuando, al ser cuestionado, afirmó que “en las evaluaciones propongo ejercicios muy similares a las tareas que realizan los estudiantes en clase; tal vez lo único que cambia son los datos”.

La evaluación consistía en tres preguntas descritas en la Tabla 1.1. En la primera pregunta de la evaluación identifico el interés del profesor por verificar que los estudiantes hayan memorizado las definiciones y teoremas básicos del curso. Este tipo de preguntas no requiere la formulación de conjeturas por parte de los estudiantes. Lo que se solicita es que el estudiante escriba el objeto geométrico que corresponde a la descripción dada en la pregunta, o que complete el enunciado de una afirmación. Por ejemplo, para responder la pregunta “Dos triángulos son semejantes si___________” lo único que se requiere es que los estudiantes recuerden cuáles son las propiedades que caracterizan la relación de semejanza de triángulos y las escriban, lo cual no requiere que hagan ningún tipo de exploración para hacer alguna afirmación que deban justificar.

La solución de las otras dos preguntas tiene en común la necesidad de aplicar algún teorema métrico de la geometría (el Teorema de Pitágoras, y Criterios de semejanza de triángulos respectivamente). En ambos casos, el objetivo es encontrar el valor de ciertas incógnitas a partir de la información que proporciona la representación. Los estudiantes tienen que proponer ecuaciones y hacer algún tipo de manipulación algebraica para encontrar los valores solicitados. Deben reconocer el teorema en juego, explicar por qué lo pueden usar y luego ejecutar los procedimientos algebraicos. Esto indica el interés, por parte del profesor, de que los estudiantes exhiban algunas capacidades argumentativas en la resolución para explicar la pertinencia de usar tal o cual teorema. Es decir, si por ejemplo van a utilizar el teorema de Pitágoras en el punto 2, deben justificar la utilización de este teorema argumentando que el triángulo es rectángulo, porque lo indica la representación. Sin embargo, la argumentación subyacente a la evaluación propuesta por el profesor se centra en la información contenida en la representación y aquello que los estudiantes saben del teorema. Desde mi punto de vista no es una argumentación en el sentido estricto, porque no implica la exploración sobre la representación para encontrar un patrón o una regularidad, ni en hacer un proceso de generalización. Esto significa que no se promueve la conjeturación en los estudiantes. El proceso argumentativo se queda, por decirlo de alguna manera, en la explicación de las razones para usar un procedimiento y no en la posibilidad de que los estudiantes sean capaces de formular conjeturas acerca de relaciones geométricas presentes en las construcciones que se les presentan.

Al cuestionar al profesor el interés por el que los estudiantes desarrollaren este tipo de trabajo, él enfatizó en que lo importante era que los estudiantes “entendieran” para que servían los teoremas y conceptos y supieran cómo aplicarlos en ejercicios. El profesor no manifestó de manera específica que consideraba importante el desarrollo de procesos de conjeturación en las tareas que propone.

Tabla 1.1 Evaluación propuesta a los estudiantes

Pregunta 1	Se presentan afirmaciones incompletas sobre conceptos geométricos y teoremas- Los estudiantes deben completar la afirmación. Ejemplo: Dos triángulos son semejantes si___________
Pregunta 2	Se presenta la siguiente construcción:  Se solicita a los estudiantes que encuentren el valor de las incógnitas, justificando los procedimientos.
Pregunta 3	Se presenta la siguiente construcción:  Se les solicita a los estudiantes que encuentren el valor de las incógnitas, justificando los procedimientos.

El análisis de la evaluación me llevó a hipotetizar que el escaso desarrollo de procesos de conjeturación de los estudiantes está directamente relacionado con la clase de tareas que proponemos. Esta hipótesis concuerda con el planteamiento de Mariotti (2006), quien afirma que las tareas que fomentan verdaderos procesos argumentativos en los estudiantes son aquellas que requieren la producción de conjeturas, lo cual no sucedía con la evaluación que analicé, como mencioné anteriormente.

Afirmar que una tarea como la que exhibí anteriormente no contribuye al desarrollo de procesos de conjeturación por parte de los estudiantes es polémico, pero ha sido evidenciada por varios investigadores. Camargo, Perry y Samper (2005) por ejemplo, describen la actividad de los estudiantes asociada a una tarea, del libro *Geometría Moderna* de Moise y Downs, que consiste en hallar la medida del ángulo formado por las bisectrices de dos ángulos que son par lineal. Una de las conclusiones de esta investigación es que este tipo de tareas no induce a los estudiantes a una actividad de exploración geométrica sino solamente a acciones de manipulación algebraica.

Un acercamiento inicial a la bibliografía me mostró que uno de los problemas que presentan las tareas que comúnmente les presentamos a los estudiantes es que están diseñadas en ambientes donde la única herramienta con la que cuentan es el papel y el lápiz. En ese tipo de ambientes, según Baccaglini (2010) "las propiedades geométricas son estáticas y "al mismo nivel" con respecto a la percepción del estudiante; […] más aun, ningún elemento de la figura es privilegiado con respecto a los otros, y el razonamiento en un único dibujo específico que representa una clase de figuras requiere una alta armonización entre el componente figurativo y el componente conceptual". (p. 28)

En busca de herramientas para el diseño de tareas que favoreciera la conjeturación, encontré la propuesta de Modelo de Diseño de Tareas Tecno-Pedagógicas de Leung (2011), la cual es poco conocida, hasta ahora empieza a aplicarse, y parece brindar herramientas para atender mi inquietud. Según el autor, su propuesta para el diseño de tareas basadas en entornos de geometría dinámica permite a los estudiantes potencializar su habilidad de explorar y generalizar propiedades. El acercamiento inicial al modelo me llevó a centrar el esfuerzo investigativo, y a plantear la siguiente pregunta

> ¿Cuál es el potencial del Modelo de Diseño de Tareas Tecno-Pedagógicas propuesto por Leung (2011) para diseñar tareas que fomenten la conjeturación en el curso de Geometría de un programa de arquitectura?

El interés investigativo por el diseño de tareas que propicien la conjeturación tiene vigencia internacional. En ese sentido puedo destacar los trabajos de Leung (2011) y Baccaglini & Mariotti (2010) sobre la influencia de los Entornos de Geometría Dinámica para generar procesos de conjeturación de estudiantes de la clase de geometría. A nivel local, el trabajo del grupo de investigación Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría (AEG) de la Universidad Pedagógica Nacional se ha centrado en el estudio de los procesos de conjeturación y demostración en la clase de geometría, utilizando la Teoría de la Mediación Semiótica y la Teoría de la Génesis Instrumental como marcos de referencia. (Perry et al, 2013).

1.2 OBJETIVOS

En esta sección presento los objetivos generales y específicos que se propusieron para este trabajo, teniendo en cuenta la pregunta de investigación formulada en la sección anterior.

Objetivo general

Determinar la utilidad del modelo de Diseño de Tareas Tecno Pedagógicas propuesto por Leung (2011) para fomentar la conjeturación en una clase de geometría de una carrera de arquitectura.

Objetivos específicos

- Describir y ejemplificar el modelo de tareas tecno-pedagógicas expuesta por Leung (2011).
- Diseñar tareas usando el modelo propuesto por Leung (2011) y realizar un análisis a priori a la luz de las fases de conjeturación propuestas por Cañadas et al. (2008).
- Aplicar las tareas diseñadas con un grupo de estudiantes de una clase de geometría de un programa de arquitectura y evaluar la conjeturación exhibida por los estudiantes, a la luz del modelo de Cañadas et al. (2008).

- Establecer el efecto del diseño de las tareas en la conjeturación realizada por los estudiantes.

1.3 JUSTIFICACIÓN DEL ESTUDIO

La justificación de mi trabajo de grado toma elementos de las directivas curriculares, del PEI de la universidad en la que trabajo y de investigaciones que hablan de la importancia de la conjeturación en la enseñanza de las matemáticas.

En los últimos años se ha reconocido la importancia de establecer lineamientos curriculares en la educación superior en Colombia, ya que estos no existen actualmente, a diferencia de lo que sucede con la educación básica y media. En ese sentido, el Ministerio de Educación Nacional reconoce la importancia desarrollar ciertas competencias que deben adquirir los futuros profesionales, que vayan en consonancia con los avances tecnológicos y del conocimiento. Entre dichas competencias el MEN identifica "el aprendizaje para toda la vida, la comprensión de contextos y situaciones que exige la toma de decisiones argumentada, las posibilidades de análisis y de crítica ante diversos enunciados…" (MEN, s.f.). Lo cual pone de relieve la necesidad de fomentar capacidades argumentativas en los estudiantes universitarios. Estos planteamientos justifican la necesidad de desarrollar actividades en el aula de clase universitaria que fomenten la conjeturación, en tanto ella se reconoce como un aspecto fundamental en la adquisición de capacidades argumentativas.

A nivel institucional, en el Proyecto Educativo Institucional de la universidad en la que trabajo se enuncia, al caracterizar su enfoque pedagógico, la importancia de promover procesos de argumentación en los estudiantes de las carreras que se ofrecen en la Universidad. En ese sentido, se destaca que la enseñanza debe enfocarse a que "los estudiantes logren o continúen el desarrollo del pensamiento a través de los procesos de reflexión, argumentación y creación para dar respuesta a los múltiples problemas teóricos que plantea la realidad individual, social, cultural y empresarial…" (FUA, 2011, p. 13). La argumentación es, por tanto, reconocida por la universidad como un proceso fundamental en el desarrollo de habilidades que permita a sus futuros egresados responder a los problemas que enfrenten en su vida profesional.

El proceso de conjeturación, entendido este como la formulación de conjeturas, se convierte en una actividad central a proponer en una práctica de enseñanza que tenga como finalidad el desarrollo de capacidades argumentativas en los estudiantes. Más aun, la formulación de conjeturas es una fase fundamental en la construcción del conocimiento matemático por parte de los estudiantes. (Mariotti, 2006).

En ese sentido, el diseño de tareas que fomenten la conjeturación se reconoce como una necesidad en la construcción de actividades en el aula de clase. La importancia del diseño de tareas que fomenten la conjeturación es reconocida por Leung (2011) cuando afirma que "Una tarea exploratoria matemática significativa debe ser una que involucre actividades de conjeturación y explicación". Desde este punto de vista, cualquier aporte en el diseño de este tipo de tareas es en sí un aporte hacia el aprendizaje más significativo de las matemáticas.

Teniendo en cuenta lo anterior, se puede observar que la construcción de ambientes de aprendizaje que potencialicen la conjeturación de los estudiantes universitarios es un asunto de importancia en el marco de la enseñanza de la matemática. El diseño de tareas que lo propicien se constituye en un aporte a la construcción de dichos ambientes de aprendizaje.

El desarrollo de mi proyecto cuenta con el apoyo de la institución en la que laboro, ya que, al encontrarse esta en un proceso de acreditación institucional, considera de vital importancia el desarrollo de proyectos de investigación que constituyan aportes al mejoramiento de las prácticas de sus docentes. En ese sentido se ha impulsado la creación de notas de clase por parte de los docentes, para los espacios académicos de la institución, por lo cual este proyecto puede constituirse en un insumo.

El presente proyecto requiere el uso de software de geometría dinámica, con el fin de explorar su potencial en la resolución de tareas que involucren procesos de conjeturación. Con respecto a ello, la institución cuenta con una sala de cómputo de acceso libre, dotada de computadores con el software GeoGebra.

1.4 REVISIÓN DE LA LITERATURA

Teniendo en cuenta que el propósito de este trabajo es indagar por el potencial que tiene el Modelo de Diseño de Tareas Tecnopedagógicas (MTT) propuesto por Leung (2011) para favorecer el aprendizaje de los estudiantes en la clase de geometría, considero importante reseñar algunas investigaciones que se han desarrollado sobre el diseño de tareas y señalar qué información nos brindan. Esto para ubicar el modelo en el campo y disponer de herramientas metodológicas.

Kieran, Doorman y Ohtani (2015) ubican el germen de la investigación acerca del diseño de tareas en educación matemática en sendos trabajos presentados por Janvier (1979) y Bell (1979) en la tercera conferencia del Grupo Internacional de Psicología de la Educación fenomenológica de Freudenthal, la cual promueve el uso de situaciones a gran escala temporal en la cuales se enfatiza en el punto de vista de los niños más que en el de las estructuras matemáticas. En ese sentido, según Janvier, debe enfatizarse en ambientes apropiados de aprendizaje y en situaciones que fomenten el descubrimiento por parte de los estudiantes. En el trabajo de Bell, el investigador hace algunas consideraciones acerca de diversos métodos particulares de enseñanza para la planeación de tareas, con las cuales tratar temas específicos del currículo.

En los dos trabajos anteriormente mencionados, el término "diseño de tareas" no se establece explícitamente, sino que Kieran, Doorman y Ohtani (2015) lo consideran implícito al sugerirse modelos de enseñanza para el desarrollo del aprendizaje de las matemáticas. El término es utilizado de manera explícita por primera vez en un foro de investigación coordinado por Ainley y Pratt (2005) en la 29 conferencia del PME (PME-29) titulado "The significance of task design in mathematics education: Examples from proportional reasoning". En ese foro, los participantes se organizaron en grupos, cada uno de los cuales diseñó una tarea cuyo tema era el razonamiento proporcional. Luego de analizar las propuestas se concluyó que había diversidad de enfoques influyendo en el diseño de las tareas. Por ejemplo, en relación con el rol del profesor en la actividad de resolución de la tarea, mientras que algunos consideraron que el rol era central para guiar la discusión hacia los conceptos matemáticos, para otros el desarrollo de la actividad estaba más centrado en el trabajo independiente de los estudiantes.

Otra conclusión importante del trabajo desarrollado durante el foro del PME-29 fue que, a pesar de la diversidad de enfoques, todos los participantes, de alguna manera, tuvieron en cuenta dos aspectos: el propósito y la utilidad de la tarea. Estos constructos, que son definidos y explicados en el marco teórico de este trabajo, surgen en el ejercicio investigativo del enfoque Educación Matemática Realista formulado por Freudenthal y representan características que fortalecen el compromiso de los estudiantes con la resolución de la tarea propuesta. Ainley, Pratt y Hansen (2006) los describen como características de las tareas que permiten superar la *paradoja de la planeación*, que establece la tensión existente entre planear tareas con objetivos de aprendizaje muy enfocados, pero poco interesantes para los estudiantes, o diseñarlas a partir de actividades que sean muy atractivas para los estudiantes, pero con objetivos de aprendizaje difusos.

A partir de 2005, se han realizado diversas investigaciones con el fin de establecer referentes teóricos que apoyen el diseño de tareas en la clase de matemáticas. En varios de estos estudios, la investigación se ha centrado en determinar la influencia de las herramientas con las que se cuenta para resolver dichas tareas (Kieran & Saldanha 2008; Leung 2011; Leung & Bolite-Frank, 2015). Kieran & Saldanha (2008), por ejemplo, establecen ciertos principios que según ellos deben guiar el proceso de diseño de actividades para desarrollar conocimiento conceptual y técnico en el aprendizaje de la factorización, a través del uso de Sistemas Computacionales Algebraicos (CAS). Para el caso de la factorización de polinomios de la forma $x^n - 1$, los autores describen una secuencia de actividades diseñada con base en tres principios: uno, la necesidad de que los estudiantes relacionen casos particulares de factorización de este tipo de polinomios ($x^2 - 1$, $x^3 - 1$) con la generalización que se puede establecer para el caso $x^n - 1$; y dos, con la importancia de que ellos relacionen los resultados obtenidos al trabajar con lápiz y papel con los resultados obtenidos al trabajar con CAS.

Una reflexión acerca del papel de las herramientas con las que se cuenta para resolver tareas, en el diseño de estas, se puede encontrar en el artículo de Leung y Bolite-Frank (2015). Los autores mencionan las consideraciones epistemológicas, matemáticas, representacionales, pedagógicas y discursivas que se deben tener cuando se diseñan tareas. Para ello, se fundamentan en referentes teóricos como la teoría Antropológica de lo Didáctico propuesta por Chevallard, la génesis instrumental sugerida por Rabardel, la teoría de la mediación semiótica enunciada por Mariotti y algunos principios de la teoría Comugnitiva[1] elaborada por Sfard.

Otros trabajos más recientes sobre el diseño de tareas se encuentran enfocados en el desarrollo de modelos para el uso de entornos de geometría dinámica (Leung 2011; Fahlgren & Brunstrom, 2014). El modelo propuesto por Leung (2011), denominado Modelo de Tareas TecnoPedagógicas, está estructurado con base en modos epistémicos con el propósito de favorecer el discernimiento de ciertas características de los objetos geométricos. Este modelo es el que pretendemos estudiar en este trabajo, porque los ejemplos de tareas diseñadas bajo este modelo que hemos encontrado en la literatura se han enfocado en promover los procesos de conjeturación en los estudiantes de la clase de Geometría, lo cual es el objetivo de este trabajo. Las características de este modelo se explican en detalle en el marco teórico.

El modelo propuesto por Fahlgren & Brunstrom (2014), cuyo foco es promover en los estudiantes de la clase de geometría actividades de exploración, explicación y generalización en entornos de geometría dinámica, considera cinco actividades que deben realizar los estudiantes en la resolución de una tarea: hacer una construcción con un programa de geometría dinámica y a partir de ella formular un conjetura, usar el entorno de geometría dinámica para soportar o refutar la conjetura, explicar con sus propias palabras porqué la conjetura es cierta, construir una prueba de la conjetura, y finalmente hacer nuevas investigaciones relacionadas con la conjetura considerada en los pasos anteriores. A pesar de la cercanía de este modelo al proceso de conjeturación que estamos interesados en promover, no lo seleccionamos porque una de las teorías en las cuales se fundamenta el Modelo de Tareas TecnoPedagógicas de Leung, la Teoría de la Variación, ofrece un marco más detallado acerca del proceso de discernimiento de invariantes por parte de los estudiantes, lo cual nos

[1] El termino **comugnición** (commognition en inglés) fue utilizado por Sfard (2008) con el fin de integrar los conceptos de *comunicación* y *cognición*.

brinda información suficiente para ponerlo a funcionar y analizar el proceso de conjeturación desarrollado por los estudiantes al resolver una tarea.

2. MARCO TEÓRICO

El marco teórico de mi trabajo tiene dos referentes que le sirven de soporte: el Modelo de Tareas TecnoPedagógicas (MTTP), propuesto por Leung (2011), y una conceptualización del proceso de conjeturación. El primero es el modelo cuya utilidad quiero evaluar como objetivo principal de mi estudio, y el segundo es el proceso que se trata de promover en los estudiantes, desde una óptica específica, y que sirve de herramienta analítica para evaluar el modelo. En la primera sección de este capítulo hago una síntesis del Modelo MTTP. Para ello, en primer lugar, expongo los referentes teóricos en los cuales se fundamenta, describiendo brevemente la conceptualización de aprendizaje que incluye elementos de la perspectiva socio cultural de Vygotsky (1981) y de la Teoría de la Variación de Marton, Runesson y Tsui (2004). Posteriormente procedo a describir y ejemplificar los componentes del modelo, relacionándolos con los planteamientos descritos acerca del aprendizaje. En la segunda sección, teniendo en cuenta que el propósito de este trabajo es determinar la pertinencia del modelo para promover el proceso de conjeturación de estudiantes de geometría, hago una caracterización de este proceso, tomando como referencia los planteamientos de Cañadas (2008).

2.1 MODELO DE DISEÑO DE TAREAS TECNO-PEDAGÓGICAS

En esta sección describo el Modelo de Tareas TecnoPedagógicas (MTTP) propuesto por Leung (2011). Para ello, menciono los presupuestos teóricos sobre el aprendizaje en los que se fundamenta el modelo, los conceptos que intervienen en él y las fases que lo estructuran.

2.1.1 Presupuestos sobre el aprendizaje en los que se sustenta el modelo.

A continuación, presento dos referentes teóricos que fundamentan la perspectiva acerca del aprendizaje que está inmersa en el Modelo MTTP. Estos referentes son: la aproximación sociocultural de Vygotsky (1981) y la Teoría de la Variación de Marton, Runesson y Tsui (2004). Asociados a la aproximación sociocultural, describimos dos conceptos que están relacionados con la construcción del Modelo MTTP: la génesis instrumental y la mediación semiótica. Al referirnos a la Teoría de la Variación, hacemos especial énfasis en la descripción de la noción de discernimiento como promotor del aprendizaje y en la relación entre esta noción y el Modelo de Tareas TecnoPedagógicas.

Teoría sociocultural de Vygotsky

Para la construcción del Modelo MTTP Leung (2011) retoma algunos planteamientos de la teoría sociocultural de Vygotsky (1981) y de dos aproximaciones conceptuales enmarcadas en esta. Expongo, a continuación, algunos de estos planteamientos que fundamentan mi estudio.

En su enfoque acerca de la génesis y el desarrollo de la actividad mental humana, Vygotsky (1981) postula dos tipos de funciones mentales: las *elementales,* que corresponden a las funciones naturales que son determinadas genéticamente, y las *superiores,* que corresponden a las funciones que se desarrollan a partir de la interacción social con los demás individuos. En este planteamiento Vygotsky reconoce la importancia de la cultura en el desarrollo del individuo y por lo tanto en su aprendizaje. En ese sentido Vygotsky plantea que hay una distancia entre el nivel de desarrollo del individuo para resolver problemas de manera independiente y el nivel de desarrollo que se logra resolviendo un problema con la colaboración de un guía o de pares más capacitados.

Vygotsky reconoce que el desarrollo de las funciones mentales superiores opera en dos planos: el plano *social* (o externo) y el plano *sicológico* (o interno). En el primero de ellos, el sujeto actúa sobre el ambiente en el cual se encuentra inmerso, guiado por personas más capacitadas, con el fin de transformarlo y observar lo que sucede. La transformación del ambiente produce un cambio en la estructura de pensamiento del sujeto la cual conlleva también una reconstrucción, en el plano interno, de la transformación que ha observado. Un ejemplo de este proceso de desarrollo se observa en el campo de la enseñanza de la geometría, cuando los estudiantes, con orientación de un experto, trabajan en ambientes de geometría dinámica. La manipulación, por parte de ellos, de construcciones geométricas embebidas en el ambiente produce sucesivas transformaciones en las representaciones de las construcciones hechas, que a su vez produce en los estudiantes un cambio en su manera de relacionarse con los objetos geométricos.

El proceso de reconstrucción de las estructuras del pensamiento, fruto de la transformación del ambiente, es denominado por Vygotsky (1981) como *internalización*. Según el autor, además de demandar un guía, este proceso requiere del uso de objetos que lo *medien.* Estos mediadores operan tanto en el plano social como en el plano psicológico. Vygotsky reconoce fundamentalmente dos tipos de mediadores: los *instrumentos,* que operan en el ambiente, y los *signos,* que operan en la estructura cognitiva del sujeto. En el proceso de internalización, las personas hacen uso de los instrumentos para modificar el ambiente y, a partir de la observación de las consecuencias de esa modificación, construyen internamente signos que les permiten representar para sí ese proceso de transformación y comunicarlo.

El estudio de los procesos de mediación antes mencionados, en el campo de la Educación Matemática, ha llevado a desarrollar entre otras dos aproximaciones conceptuales que se encuentran enmarcadas en la perspectiva vygotskiana: la *génesis instrumental* y la *mediación semiótica*. Ambas aproximaciones tienen gran influencia en el Modelo MTT, propuesto por Leung (2011). A continuación, enunciamos brevemente algunas ideas fundamentales de estas aproximaciones.

El constructo *génesis instrumental* fue desarrollado por Rabardel (1995) a partir de plantear que una herramienta o artefacto que está presente en el ambiente no es de por si un instrumento que sirva como mediador en el proceso de aprendizaje, sino que es necesario que el sujeto establezca sobre el artefacto ciertas maneras de utilizarlo para transformar el medio y resolver una necesidad, un problema o una tarea. Rabardel describe el proceso por medio del cual una herramienta se convierte efectivamente en un instrumento que sirve como mediador. Este proceso se divide en dos fases: instrumentalización e instrumentación. En la fase de instrumentalización, el aprendiz reconoce progresivamente las características de la herramienta, y a partir de ellas, establece potencialidades y restricciones de su funcionamiento. En la segunda fase, de instrumentación, se desarrollan *esquemas de utilización* que son descritos por Rabardel como las maneras en que los sujetos determinan el uso de la herramienta para la resolución de tareas. Un ejemplo de estos procesos es sugerido por Camargo, Pérez, Plazas, Perry, Samper & Molina (2013) al referirse al proceso que experimenta un estudiante de música quien aprende a tocar una melodía en el piano. El piano, por sí solo, no es un instrumento sino una herramienta; para convertirse en un instrumento es necesario que el músico reconozca cuál es la función de las teclas negras y blancas, qué papel tienen los pedales, cuál es la estructura de organización del teclado y cómo se opera. Esta primera fase corresponde a la fase de instrumentalización, que describe Rabardel. Posteriormente, viene la fase de instrumentación, en la cual el aprendiz combina las distintas teclas para generar una melodía, desarrollando sus propios esquemas de utilización del piano.

El constructo *mediación semiótica*, desarrollado por Mariotti & Bartolini Bussi (2008) para el campo de la Educación Matemática hace referencia al papel de los signos para el aprendizaje, generados en el proceso de internalización. Con base en la idea de Vygotsky, Mariotti y Bartolini Bussi señalan que tales signos generan un significado interno y personal (o interpretación) de los objetos o fenómenos observados por el sujeto al actuar sobre el medio. En la medida en que el medio ofrezca la posibilidad de generar nuevos signos, es posible que los significados de los estudiantes evolucionen para acercarse a los significados institucionales de los objetos o fenómenos. En el ámbito educativo esta teoría reconoce que existe una relación entre los instrumentos utilizados por los estudiantes, que según Vygotsky influyen en el conocimiento que se genera, la clase de signos que generan y los significados que le dan a lo que observan al trabajar con ellos. En particular, el significado producido en ambientes de geometría dinámica acerca de un objeto geométrico es distinto al producido cuando este objeto es estudiado en un ambiente que cuenta como únicas herramientas el lápiz y el papel. En este último caso el significado de los objetos es más alejado del objeto matemático, debido a que el ambiente no le impone el uso de características propias de la naturaleza de los objetos. En los ambientes de geometría dinámica, por el contrario, las representaciones están diseñadas de tal forma que atienden a las características matemáticas del objeto; adicionalmente, en estos ambientes, estas representaciones tienen un carácter dinámico, es decir, se pueden variar aspectos del objeto de tal manera que se pueden observar cómo se transforman algunos atributos, conservando los invariantes esenciales.

Teoría de la Variación

La Teoría de la Variación, adaptada por Leung (2008) para la Educación Matemática fue sugerida por Marton, Runesson y Tsui (2004), quienes a su vez la desarrollaron a partir de planteamientos de la fenomenografía. Este dominio del conocimiento tiene como objeto de estudio las distintas formas en que los sujetos experimentan los objetos o fenómenos. Suponemos que Leung usa esta teoría para profundizar en el proceso de internalización descrito por Vygotsky, teniendo en cuenta que la forma en que un objeto o fenómeno es percibido o experimentado por un sujeto determina la manera en que es internalizado.

La Teoría de la Variación (Marton, Runesson y Tsui, 2004) parte de un principio según el cual, cuando las personas pensamos acerca de un objeto o un fenómeno, no nos podemos enfocar en todos los aspectos de este a la vez. En ese sentido, Marton y Both (1997) afirman que en nuestra mente ciertos aspectos están más presentes, es decir, son centro inmediato de nuestra atención, mientras que otros se encuentran menos presentes. Esta organización mental implica que el significado que tenemos de un objeto o fenómeno depende de cuáles son los aspectos en los que nuestra mente se enfoca (Ling Lo, 2015). Dicho de otra forma, la manera como un sujeto experimenta un objeto o un fenómeno depende de cuáles son los aspectos que son discernidos por el sujeto, es decir, son diferenciados entre varios aspectos (Leung, 2003). Una consecuencia inmediata de lo expuesto anteriormente, para el ámbito educativo, es que cada estudiante tiene un significado personal acerca de los objetos o fenómenos. Debido a ello, Marton y Both (1997) plantean que la labor principal del profesor es desarrollar poderosas formas de percibir los objetos y fenómenos para que el significado que tienen los estudiantes acerca de estos objetos sea más aproximado al institucional, a medida que los disciernen. Leung señala que una forma de potencializar esas formas de ver, en el caso del aprendizaje de la geometría, es a través del uso de ambientes de geometría dinámica en cuanto estos ambientes los objetos geométricos son representados a partir de las propiedades que los caracterizan (Leung, 2003).

A partir de los planteamientos de la Teoría de la Variación Leung (2003) postula que el aprendizaje de objetos y relaciones matemáticas está relacionado con la capacidad que tienen los estudiantes de discernir propiedades de estos. Marton y Both (1997) consideran que una condición necesaria para el discernimiento de propiedades de cualquier objeto por parte de un individuo es que este tenga la posibilidad de experimentar la variación de uno o varios aspectos del objeto. A partir de esta variación, los estudiantes son capaces de *discernir* cuáles son las cualidades del objeto que permanecen invariantes y, por lo tanto, de identificar sus propiedades. Desde ese punto de vista, una propiedad puede ser vista por el aprendiz como un invariante.

El proceso de discernimiento de invariantes es favorecido si se reconoce que las propiedades adoptan, para el caso del objeto del cual son un invariante, uno de los posibles valores que pueden tener los atributos en otros objetos. Por ejemplo, discernir que una propiedad del cuadrado es tener cuatro lados de la misma longitud solo se puede conseguir si el aprendiz reconoce que hay cuadriláteros que sólo tienen dos lados de la misma longitud, o que hay cuadriláteros en los que ninguno de sus lados mide lo mismo que otro.

Un concepto que es relevante en la Teoría de la Variación es el de *dimensión de variación.* Con este concepto se alude a un rasgo característico de los atributos: son susceptibles de adoptar diversos valores. Camargo y Sandoval (2017) proponen el siguiente ejemplo: si consideramos el objeto *triángulo*, y el atributo *relación entre las longitudes de los lados*, entonces tal relación correspondería a una dimensión de variación. Los posibles valores (o cualidades) que tomaría podrían ser: todos miden lo mismo, solo dos miden lo mismo, todos son de distinta medida. Un hecho que hay que resaltar sobre la dimensión de variación es que no es una característica intrínseca del objeto, sino que es identificada por quien lo observa. Esto quiere decir que para que los estudiantes puedan considerar que un aspecto es una dimensión de variación, es necesario que ellos identifiquen que este aspecto puede tomar varios valores de los cuales el que están observando, en un instante específico, es un valor particular. Por ejemplo, si son capaces de determinar que el aspecto “relación entre las longitudes de los lados” de un triángulo puede tomar distintos valores, dependiendo del triángulo que se considere, esta relación se constituye para ellos en una dimensión de variación.

Con el fin de determinar cuándo una experiencia es efectivamente una experiencia variacional, Marton y Tsui (2004) describen cuatro patrones que son condiciones para el discernimiento. A continuación, describimos y ejemplificamos estos *patrones de variación*, con el fin de caracterizar experiencias que involucren fenómenos de variación:

Contraste: Una experiencia variacional debe permitir a los estudiantes reconocer que no todos los objetos tienen la propiedad que se pretende que ellos disciernan. En ese sentido, es necesario que experimenten la existencia de objetos que tengan la propiedad y otros que no la tengan. Por ejemplo, una experiencia variacional que tenga como objetivo el discernimiento de los triángulos isósceles, en un ambiente de geometría dinámica, debe permitir que los estudiantes sean capaces de experimentar la representación de triángulos con dos lados congruentes y de otros que no tienen dos lados congruentes, a partir del arrastre de los vértices de un triángulo cualquiera o por medio de construcciones geométricas.

Separación: En una experiencia variacional se debe lograr que los estudiantes identifiquen que mientras algunos aspectos del objeto permanecen invariantes al mismo y lo caracterizan, hay otros aspectos que son susceptibles a variar. En otras palabras, que estos últimos corresponden a una dimensión de variación del objeto. Esto permite que los estudiantes se enfoquen en los invariantes, y, por lo tanto, los disciernan. Por ejemplo, en un triángulo hay muchos aspectos que son propensos a variar, tales como las medidas de los lados, las medidas de los ángulos, etc. Si nuestro interés está centrado en la congruencia de dos lados los estudiantes deben poder en enfocarse en este aspecto con respecto a la variación de los demás. Un ejemplo de experiencia variacional es hacer una construcción de un triángulo en geometría dinámica tal que al arrastrar elementos de la construcción varíen diversos atributos del triángulo (tamaño de los lados y ángulos) mientras se mantienen dos lados congruentes.

Generalización: Una experiencia variacional debe permitir a los estudiantes identificar una cualidad invariante del objeto o fenómeno, en diferentes instancias del mismo, en donde varían otras cualidades. En la experiencia de separar una o más propiedades de un objeto eventualmente emerge una propiedad que no varía, constituyéndose en un invariante que caracteriza el objeto. Por ejemplo, con el fin de que los estudiantes identifiquen la invarianza de la congruencia de dos ángulos en los triángulos isósceles deben experimentar que, en cualquier triángulo isósceles, así varíen las magnitudes de los lados o las medidas de los ángulos, siempre van a haber dos ángulos congruentes.

Fusión: En una experiencia variacional en la que se dos o más cualidades invariantes del objeto en cuestión están relacionadas, es necesario que los estudiantes experimenten las dos cualidades simultáneamente. Por ejemplo, si queremos que los estudiantes evidencien que en un triángulo isósceles los ángulos opuestos a los lados congruentes son también congruentes, es necesario que los estudiantes experimenten con varios triángulos isósceles y disciernan que las dos características suceden simultáneamente.

Como menciono al principio de esta sección, la finalidad de experimentar la variación, en sus distintos patrones, es favorecer en los estudiantes el proceso de discernimiento de los aspectos críticos de objetos o fenómenos que se estén estudiando.

Articulación de teorías en la construcción del Modelo MTTP

El Modelo MTTP propuesto por Leung (2011), cuyos aspectos básicos exponemos en la siguiente sección, se apoya en el uso de herramientas tecnológicas para favorecer el proceso de discernimiento en la clase de matemáticas. En ese sentido, las tareas diseñadas bajo este modelo tienen en cuenta los planteamientos hechos por Vygotsky, que mencionamos previamente, acerca de la importancia de la interacción del aprendiz con un ambiente apropiado para favorecer el proceso de aprendizaje, así como los procesos de mediación semiótica que surgen en el proceso de internalización, al utilizar las herramientas presentes en dicho ambiente. Pero también, al ser el discernimiento de invariantes el objetivo de las tareas en el Modelo MTTP, en ellas se deben prever los patrones de variación descritos en la sección anterior, de tal forma que a partir de estos patrones los estudiantes adquieran nuevas formas de ver los objetos o relaciones matemáticas que son objeto de aprendizaje por parte de ellos.

Teniendo en cuenta que las tareas del modelo MTTP se desarrollan en un ambiente específico, el cual es el de las Tecnologías de la Información y la Comunicación, todas comienzan con un proceso de génesis instrumental para permitir que los estudiantes aprendan a utilizar las herramientas inmersas en el ambiente, identifiquen cuáles son sus potencialidades y restricciones y desarrollen esquemas de utilización de dichas herramientas. A partir de este proceso, las herramientas del ambiente se convierten en instrumentos para generar nuevas formas de ver y de percibir los objetos y por lo tanto posibilitar discernir más aspectos de los que se pueden discernir sin el uso de estas.

Como menciono en la sección anterior, el proceso de discernimiento acerca de las características críticas de un objeto solo puede ser favorecido si los estudiantes experimentan la variación de uno o varios aspectos de este. En ese sentido, la instrumentación debe permitir la experimentación de las dimensiones de variación del objeto que se pretende que los estudiantes aprendan. Naturalmente, esto requiere que el ambiente en el cual está inmersa la tarea propuesta permita recrear los diversos patrones de variación sobre el objeto deseado. El instrumento privilegiado por Leung para organizar ambientes destinados al aprendizaje de la geometría, área en la cual está centrado nuestro proyecto, es un programa de geometría dinámica. Según Leung, la mediación de este instrumento ha mostrado ser especialmente poderosa en la generación de experiencias que involucren fenómenos variacionales (Leung, 2008). Al permitir recrear y reproducir patrones de variación de objetos geométricos, los programas de geometría dinámica permiten que los estudiantes adquieran conciencia del dinamismo de estos objetos, y, por lo tanto, transforme su manera de pensar acerca de sus aspectos y características.

El proceso descrito anteriormente se relaciona con la generación de signos por parte de los estudiantes. Los signos, en este tipo de ambientes, tiene el rol de mediación planteado por la Teoría de la Mediación Semiótica. A partir de estos los estudiantes construyen significado acerca de los objetos o fenómenos que son representados por dichos signos. Por ejemplo, cuando un estudiante observa que en un triángulo isósceles construido en un ambiente de geometría dinámica las medidas de sus ángulos o de sus lados varía al arrastrar algún vértice del triángulo, en su estructura de pensamiento se genera un signo que representa el triángulo ya no como un objeto estático, sino como un objeto geométrico cuyos aspectos son susceptibles de variar. En ese sentido, los signos generados en el proceso de internalización en ambientes de geometría dinámica se convierten en signos para el discernimiento.

2.1.2 Conceptos básicos que intervienen en el modelo MTTP

En esta sección presento la definición de los conceptos relevantes que se utilizaran en la descripción del Modelo de Tareas TecnoPedagógicas. En particular, me enfoco en la conceptualización de los términos *tarea*, *tarea tecnopedagógica* y *modo epistémico*.

Conceptualización de Tarea y de sus características, según Leung (2011)

Puesto que en el trabajo de grado pretendo evaluar la utilidad del Modelo MTTP de Leung (2011), adopto la definición que este autor hace de *tarea* cuando afirma que esta consiste en "actividades con el propósito de aprender" (Leung, 2011). Teniendo en cuenta la conceptualización acerca del aprendizaje que hace Leung, la cual fue discutida en la sección anterior, afirmo que una tarea debe estar diseñada con el objetivo de potenciar la capacidad de discernimiento acerca de los objetos que han de ser aprendidos por los estudiantes. Con el fin de desarrollar en ellos la capacidad de discernir, es necesario que la tarea permita trasformar las formas como ven y hacen matemáticas. Es decir, que la tarea sea capaz de generar poderosas formas de ver los objetos matemáticos.

A partir de esta idea, Leung retoma el planteamiento de Ainley (2006; citado en Leung, 2011) y plantea seis aspectos que deben tenerse en cuenta en el diseño de tareas cuyo propósito sea transformar la manera como los estudiantes perciben los objetos de aprendizaje: **realismo, guía, contextualización, herramientas, propósito y utilidad.**

Al hablar de **realismo** Leung (2011) hace referencia a que el contenido de la tarea debe estar relacionado con experiencias previas de los estudiantes; en este sentido, retoma un postulado de la Educación Matemática Realista de Freudenthal (1968, citado en Leung, 2011) según el cual la tarea debe estar enfocada en que los estudiantes reconstruyan experiencias previas con el uso de nuevas herramientas, que les permitan construir formas de ver matemáticamente dichas experiencias. En ese sentido, la tarea debe guiar a los estudiantes desde una manera informal de entender los objetos matemáticos hacia un conocimiento matemático más formalizado. Esta **guía** debe estar estructurada en un proceso gradual que les permita conectar los significados que tienen con otros en un nivel más abstracto.

Teniendo en cuenta lo mencionado, el **contexto** de la tarea juega un rol importante en el proceso que guía a los estudiantes desde significados personales informales a otros más formales. Al adoptar como fundamentación teórica del Modelo MTTP la perspectiva sociocultural de Vygotsky, Leung se alinea con el postulado proveniente del paradigma de la cognición situada que plantea que el conocimiento forma parte y es producto de la actividad, el contexto y la cultura.

Al enfocarse en la actividad, Leung (2011) reconoce que la resolución de las tareas está influenciada por el ambiente en que estas se desarrollan. En ese sentido, las **herramientas** disponibles en dicho ambiente fomentan la formación y expresión de ideas matemáticas subyacentes a la tarea y moldean estas ideas según las interacciones que se dan en el ambiente. Es fundamental una cuidadosa selección de las herramientas que se van a usar, para que se conviertan en instrumentos, al ser pertinentes para lograr el conocimiento matemático específico que se desea enseñar a través de las tareas. Este aspecto conecta con el constructo génesis instrumental y señala la importancia del establecimiento, por parte de los estudiantes, de esquemas de utilización de las herramientas presentes en el ambiente para la resolución de la tarea.

Los últimos dos aspectos que Leung (2011) considera importantes para el diseño de las tareas son el **propósito** y la **utilidad**. Hacen referencia a características de las tareas que permiten los estudiantes adquirir un alto nivel de compromiso con la resolución de las mismas. Al hablar de propósito, Leung hace referencia a que la tarea debe tener un resultado significativo para los estudiantes, en el sentido que este resultado les debe permitir resolver un problema que están genuinamente interesados en resolver. Con respecto a la utilidad, Leung enfatiza que la tarea debe permitirles comprender en qué sentido las ideas matemáticas aprendidas pueden ser útiles.

Tarea tecno-pedagógica

Las *tareas tecnopedagógicas* son descritas por Leung (2011) como aquellas que tienen como finalidad facultar a los estudiantes con recursos para "explorar, reconstruir y explicar conceptos matemáticos en ambientes pedagógicos tecnológicamente ricos" (p. 327) , es decir, “ambientes de enseñanza y aprendizaje mejorados por el uso de Tecnologías de Información y Comunicación” (p. 326). Un ejemplo de este tipo de ambientes son los programas de geometría dinámica.

Modo epistémico

Leung (2011) considera que si las tareas tecnopedagógicas cumplen los aspectos descritos en la sección anterior llevan a los estudiantes a ciertos estados específicos de internalización con el fin de adquirir el conocimiento matemático que se encuentra contenido en las tareas. Leung denomina a esos estados *modos epistémicos*.

2.1.3. Descripción del modelo

En esta sección, describo el Modelo MTTP. Para ello, conceptualizo y ejemplifico los modos epistémicos que estructuran el modelo, tomando como ejemplo una tarea descrita por Leung (2011).

Leung (2011) describe tres modos epistémicos, que denomina: *Modo de establecimiento de prácticas, Modo de discernimiento crítico* y *Modo de discurso situado*. La finalidad de estos es permitir a los estudiantes la experiencia de observar y explorar dimensiones, patrones de variación e invariantes en las construcciones geométricas involucradas en una tarea, con el fin de discernir los aspectos críticos de estas, que permiten resolverla. En estos modos se toman en consideración: (i) procesos de génesis instrumental sobre las herramientas, que permiten que los estudiantes experimenten los patrones de variación y (ii) la construcción de un discurso que permite evidenciar la internalización por parte de los estudiantes de los fenómenos que se presentan sobre los objetos geométricos involucrados. A continuación, haremos una descripción de cada uno de los modos epistémicos.

Modo de establecimiento de prácticas. (PM)[2]

Según Leung (2011), la tarea propuesta debe, en primera instancia, incentivar un proceso de *exploración* de las herramientas que hacen parte del ambiente en el que se va a trabajar, con

[2] La sigla PM proviene de la denominación en inglés *Practice Mode.*

el fin de que los estudiantes puedan determinar cómo usarlas para resolver la tarea. Para ello, la primera parte de la tarea debe consistir en subtareas en las cuales se solicite a los estudiantes que:

- *Construyan objetos matemáticos o manipulen objetos prediseñados usando* las herramientas del ambiente tecnológicamente rico.
- *Interactúen con las herramientas del ambiente* tecnológicamente rico con el fin de desarrollar rutinas, modalidades de comportamientos y modos de diálogo situado que sean relevantes en la resolución de la tarea.

La interacción con las herramientas impulsa el proceso de génesis instrumental del ambiente en el cual se va a trabajar. En ese sentido puedo afirmar que el modo de establecimiento de prácticas tiene como una de sus finalidades transformar el ambiente tecnológicamente rico en un instrumento cuyo propósito sea mediar el proceso de resolución de la tarea.

El modo epistémico *PM* se convierte en el estado que prepara a los estudiantes para el proceso de discernimiento, que les permite identificar los invariantes presentes en la construcción. Este proceso de discernimiento se identifica también con el modo epistémico que se describirá a continuación.

Como un ejemplo del modo epistémico *PM*, considero una tarea que es propuesta por Leung (2008), cuyo objetivo es determinar las condiciones para que en un cuadrilátero la suma de las medidas de los ángulos internos opuestos sea igual a 180 grados. La primera parte de esta tarea consiste en que los estudiantes construyan un cuadrilátero arbitrario *ABDC*, haciendo uso de las herramientas de un programa de geometría dinámica, y que hagan mediciones de los ángulos internos del cuadrilátero. Dichas actividades tienen como finalidad que los estudiantes usen las herramientas y descubran sus potencialidades para resolver la tarea; es decir, corresponde al proceso de instrumentalización descrito por Rabardel (1995). A continuación, la tarea pide que, usando la función traza o rastro, arrastren un vértice específico del cuadrilátero (por ejemplo, el punto C) de tal manera que se preserve que la suma de las medidas de los ángulos internos opuestos sea igual a 180 grados. Esta parte, que corresponde a la fase de instrumentación (Rabardel, 1995), tiene como finalidad que los estudiantes adquieran rutinas de utilización del software para lograr el objetivo de la tarea.

Modo de discernimiento crítico. (CDM)[3]

Uno de los objetivos de las tareas diseñadas usando el Modelo MTTP es permitir construir significados matemáticos a partir de la mediación de las herramientas del ambiente en el cual están trabajando. Dicho proceso, según la *Teoría de la variación*, requiere que los estudiantes adquieran la capacidad *de observar y reconstruir patrones de variación e invariantes.* En ese sentido, la tarea debe permitir a los estudiantes realizar actividades que requieran “representar los patrones descubiertos a través de la construcción u otro medio situado, y si es posible visualizar el proceso de la correspondiente formación de patrones” (Leung, 2011, p. 328).

En el caso de la tarea que utilizamos como ejemplo para describir el modo epistémico *CDM* en el enunciado se pide a los estudiantes investigar la trayectoria que sigue el vértice C para que la suma de ángulos opuestos sea 180°. Esta experiencia propicia que los estudiantes disciernan cuál es el lugar geométrico del punto en el cual se cumple el requisito exigido. El discernimiento se logra a partir de la experimentación de los distintos patrones de variación que surgen en la manipulación de los objetos que hacen parte de la construcción. Por ejemplo, la observación del contraste entre las posiciones del punto C donde se cumple y donde no se cumple la propiedad, o la separación que se hace de la posición de C, en la que se cumple la relación, con respecto a las diversas posiciones de los demás vértices del cuadrilátero.

Modo de establecimiento de discurso situado (SDM)[4]

Con el fin de que la tarea sea *significativa* en el sentido descrito anteriormente, es necesario, al decir de Leung (2011), que “involucre actividades de conjeturación y explicación” (p. 328). Teniendo en cuenta que la tarea está inmersa en un ambiente específico, dichas conjeturas y explicaciones deben estar situadas en dicho ambiente, por lo cual la tarea debe

---

[3] La sigla CDM proviene de la denominación en inglés *Critical Discernment Mode*
[4] La sigla SDM proviene de la denominación en inglés *Situated Dialogue Mode*

desarrollar razonamientos inductivos que lleven a los estudiantes a formular una conjetura y discursos para explicarla o justificarla.

En la tarea de exploración de cuadriláteros para los cuales las medidas de los ángulos opuestos suman 180°, en este modo epistémico *SDM* los estudiantes formulan una conjetura acerca del recorrido del punto para que el cuadrilátero cumpla con la propiedad deseada, y explican por qué esa conjetura es cierta. Los estudiantes pueden referirse a, por ejemplo, que los puntos parecen estar en una circunferencia cuando se cumple la propiedad, y a partir de esto explicar este fenómeno a partir de hechos de la geometría euclidiana.

Este último modo epistémico hace referencia explícita al proceso que principalmente estamos interesados en favorecer en la investigación, que es el proceso de conjeturación. En la siguiente sección exponemos una descripción de este proceso, tomando como referencia a Cañadas (2008).

2.2. CONJETURACIÓN

En el presente estudio usamos el Modelo MTTP, propuesto por Leung (2011), para diseñar tareas que fomenten el proceso de conjeturación por parte de los estudiantes. En ese sentido, se hace necesario establecer un referente teórico acerca de este proceso, especialmente identificando los elementos que lo caracterizan.

Una conjetura es una afirmación que quien la formula supone verdadera, pero que todavía no ha sido validada en el marco de un sistema de conocimientos. En ese sentido, una conjetura deja de serlo, cuando se logra establecer su validez, o cuando se rechaza. Harel y Sowder (1998; citado en Mariotti, 2006) resaltan que una afirmación puede considerarse una conjetura sólo si la persona que la formula está convencida de su certeza. Por lo tanto, lo que hace de un enunciado una conjetura es la certeza que tiene sobre ella la persona que la enuncia; es decir, lo que para alguno puede ser una conjetura, para otro puede no serla o incluso ser un teorema si ya ha realizado su validación.

El proceso de formulación de una conjetura, que definimos como conjeturación, se fundamenta en la identificación de ciertos invariantes del objeto del cual esta predica. En ese sentido, es importante resaltar que no cualquier afirmación que se haga sobre un objeto puede ser considerada una conjetura, sino solo aquellas en las cuales los estudiantes han experimentado proceso previo de discernimiento de aspectos críticos del objeto. Por lo tanto, en el proceso de conjeturación es necesaria la identificación de patrones de variación como los descritos por la teoría de la Variación de Marton y Tsui (2004); es a partir del contraste, la separación, la generalización y la fusión que los estudiantes aceptan la certeza del hecho y lo afirman que, teniendo en cuenta lo expresado en el párrafo anterior, es lo que se convierte en una conjetura.

Según la definición de conjetura, su formulación tiene que estar precedida de una indagación acerca del objeto sobre el cual se quiere establecer. En Cañadas et al. (2008) se establece una clasificación de las conjeturas a partir de los tipos de indagación que hacen los estudiantes para formularlas. Uno de ellos, que promovemos en nuestro estudio, es denominado por Cañadas y sus colaboradores como *Inducción empírica a partir de un número de casos dinámicos.* Corresponde a las conjeturas que toman como base "un número finito de acontecimientos continuos, que son solo un subconjunto del número infinito de acontecimientos posibles" (Cañadas et al, 2008, p.434). Esta clasificación es usada por Cañadas para caracterizar las conjeturas que surgen al trabajar en un ambiente de geometría dinámica.

En su trabajo, Cañadas et al. (2008) no solo describen los tipos de indagación en el proceso de conjeturación que han observado en su investigación, sino que también establecen un conjunto de pasos que estructura el proceso de formulación de cada tipo de conjetura. En el caso de las conjeturas que corresponden a una indagación del tipo *Inducción empírica a partir de un número de casos dinámicos*, identifican seis pasos que van desde la observación de un fenómeno hasta la formulación de una conjetura, cuando se trabaja con ambientes de geometría dinámica. Describo a continuación solo los cinco primeros pasos ya que el sexto, que los autores denominan *Justificación de la Generalización, se* hace referencia al proceso de justificar la conjetura, principalmente con base en procesos demostrativos, que no hacen parte de los intereses de este trabajo.

Paso 1. Manipulación de una situación dinámicamente por medio de la continuidad de casos

Un aspecto importante de este tipo de indagación es que, a diferencia de otros descritos por Cañadas et al. (2008), es necesario que los estudiantes actúen sobre el ambiente para generar las distintas instancias que permitan su formulación. En el contexto de las conjeturas que emergen en ambientes de geometría dinámica, estas instancias surgen a partir del uso de ciertas herramientas (en nuestro caso, arrastre y deslizadores) que permiten que algunas de las propiedades de los objetos geométricos varíen de manera continua. Asimilo este primer paso al proceso de génesis instrumental (Rabardel, 1995) que se encuentra inmerso en el Modo *PM* del modelo MTTP, ya que a partir de la manipulación descrita anteriormente es que los estudiantes instrumentalizan las herramientas que necesitan para formular la conjetura.

Paso 2. Observación de una propiedad invariante de la situación

En la manipulación descrita en el paso anterior, emergen ciertos invariantes de los objetos que deben ser discernidos por los estudiantes. El discernimiento de estos invariantes o aspectos críticos son la base para la identificación de una regla general que da lugar a la formulación de una conjetura. De acuerdo con los postulados de la Teoría de la Variación, este discernimiento es generado a partir de experimentar los patrones de variación caracterizados por Marton, Runesson y Tsui (2004). El contraste, la generalización, la separación y la fusión son fundamentales en el proceso de conjeturación en ambientes de geometría dinámica. En el modelo MTTP, este paso corresponde al Modo *CDM*, en el cual los estudiantes construyen significado matemático acerca de lo que observan en el ambiente. Es en esta fase entonces cuando empiezan a adquirir la certeza acerca de la conjetura que posteriormente formularán.

Paso 3. Formulación de la conjetura

Una vez han identificado los invariantes que caracterizan al objeto estudiado, los estudiantes tienen que comunicar en algún lenguaje (verbal, gráfico o simbólico) su hallazgo. Esto con el fin de que, a partir de esa comunicación, establezcan cual es la información útil que les permite llegar a la declaración de una afirmación acerca de todas las posibles instancias del objeto o fenómeno en cuestión. Esta declaración está situada en el ambiente en el que se desarrolla el trabajo de los estudiantes, con lo cual este paso corresponde al Modo *SDM* del modelo MTT.

Paso 4. Verificación de la conjetura

La afirmación o conjetura que ha sido enunciada debe ser verificada. Esta debe hacerse a partir de la observación de la propiedad o patrón en casos distintos a los que han sido estudiados inicialmente. En ese sentido, esta fase puede considerarse como una repetición de los pasos anteriores, en nuevas instancias del objeto que no han sido consideradas previamente.

Paso 5. Generalización de la conjetura

Un aspecto importante del proceso de conjeturación es que este debe llevar a un cambio en la estructura mental del estudiante acerca de la conjetura que ha formulado. Usando la terminología de la perspectiva sociocultural de Vygotski, esto quiere decir que es necesario que los estudiantes internalicen lo observado al manipular los objetos que se encuentran inmersos en el ambiente de geometría dinámica en el cual han trabajado. Este proceso de internalización lleva a la certeza de que la conjetura es cierta en todos los posibles casos del objeto en cuestión. Una conjetura en la que se ha dado este proceso de adquisición de certeza así no haya sido validad dentro de un sistema teórico, es definida por Cañadas et al. (2008) como una conjetura generalizada.

En la descripción del proceso de conjeturación, que he presentado anteriormente, se evidencia una estrecha relación entre los pasos de este proceso y los modos epistémicos del modelo MTTP de Leung (2011). Esta relación se ilustra en la Tabla 2.1, en la cual establecemos un paralelo entre los primeros cuatro pasos propuestos por Cañadas y el modelo de Leung.

Tabla 2.1 Relación entre el Modelo de Conjeturación de Cañadas y el Modelo MTTP

Conjeturación (Cañadas, 2008)	**Modelo MTTP (Leung, 2011)**
Manipulación de una situación dinámicamente por medio de la continuidad de casos.	Modo de Establecimiento de Prácticas (*PM*).
Observación de una propiedad invariante de la situación.	Modo de discernimiento crítico (*DCM*)
Formulación de la conjetura.	Modo de discurso situado (*DSM*).
Verificación de la Conjetura.	Iteración de los modos descritos anteriormente, sobre nuevas instancias del objeto.

2.3. CONJETURACIÓN Y PATRONES DE VARIACIÓN

Con el fin de integrar los dos referentes teóricos de la investigación (Modelo TTP y proceso de conjeturación) y disponer de una herramienta analítica, veo necesario caracterizar cada uno de los patrones de variación en el contexto de la formulación de conjeturas que surgen de la búsqueda de una condición necesaria para establecer una propiedad de algún objeto geométrico, partir de la exploración en ambientes de geometría dinámica. Para ello, he construido una propuesta (Tabla 2.2) que muestra cómo considero deben ser experimentados los patrones de variación para llegar a una conjetura de la forma p → q. Ejemplifico los patrones a partir de una tarea que fue propuesta a los estudiantes en el marco del presente trabajo de grado, que buscaba que los estudiantes establecieran condiciones necesarias que debía cumplir un polígono para poder teselar el plano.

El propósito de la caracterización propuesta en la Tabla 2.2 es permitirme identificar la emergencia de patrones de variación y de discernimiento en el análisis de la producción de los estudiantes durante la resolución de la tarea.

Tabla 2.2 Caracterización de los patrones de Variación en términos de la formulación de una conjetura

Patrones de variación	**Conjetura $p \rightarrow q$**	**Tarea sobre teselación** *"Si los ángulos internos de un polígono regular miden un valor divisor de 360° entonces el polígono tesela el plano*."
Contraste	Experimentar situaciones donde se cumple q y no q.	Experimentar la existencia de polígonos que teselan y otros que no.
Separación	Experimentar situaciones donde aspectos relacionados con el antecedente p , como por ejemplo el número de lados del polígono, varíen mientras el consecuente q permanece invariante.	Experimentar diversas teselaciones donde cambia el tipo de polígonos que permiten la teselación.
Generalización	Experimentar situaciones donde siempre que se cumple el antecedente p también se cumple el consecuente q	Experimentar que todo polígono cuya medida de sus ángulos internos es divisor de 360 es un polígono con el cual se puede realizar la teselación
Fusión	Experimentar situaciones donde p y q se cumplen simultáneamente.	Experimentar simultáneamente las propiedades de los ángulos internos de los polígonos que interesan y la teselación.

3. METODOLOGÍA

Como he mencionado anteriormente, el propósito de mi trabajo es estudiar la utilidad del Modelo de diseño de Tareas Tecno Pedagógicas (Modelo MTTP) propuesto por Leung (2011) para promover actividades de conjeturación en una clase de geometría para estudiantes universitarios. En este sentido mi trabajo se ubica en un enfoque fenomenológico, ya que pretendo describir, interpretar y explicar la influencia de las tareas diseñadas bajo la orientación del Modelo MTTP en las oportunidades que tienen los estudiantes para desarrollar procesos propios de la conjeturación.

La estrategia investigativa desarrollada se enmarca en lo que se define como un "Experimento de Enseñanza". Este consiste en el diseño, implementación y evaluación de una secuencia de enseñanza, organizada con el fin de poner en juego una hipótesis acerca de un aprendizaje específico (Camargo, s.f.).

De acuerdo con Camargo (s.f.), un Experimento de Enseñanza se estructura de acuerdo con cinco fases. A continuación, presento una descripción general de cada una de ellas. En las siguientes secciones describo detalles de la implementación de las fases 2 a 5 en el desarrollo de este trabajo.

> Fase 1: Consiste en la fundamentación conceptual sobre el aprendizaje específico que se pretende desarrollar, lo cual equivale a la selección de un marco teórico pertinente al aprendizaje deseado. En mi caso, este marco corresponde a la articulación de las perspectivas socio cultural de Vygotsky y fenomenográfica de Marton y su uso para interpretar el proceso de conjeturación, visto inicialmente a partir de la caracterización presentada en Cañadas (2008). Este marco se presenta en el capítulo 2 de este trabajo.
>
> Fase 2: Corresponde a la formulación de una hipótesis (trayectoria hipotética de aprendizaje) sobre cómo diseñar tareas que promuevan el aprendizaje como se conceptualizó en la fase anterior. En el caso de este trabajo, mi hipótesis corresponde a la potencialidad de los modos epistémicos propuestos en el modelo MTTP como

herramientas para estructurar el diseño de tareas en la clase de geometría y favorecer el proceso de conjeturación.

Fase 3: Es la planeación de una secuencia de enseñanza, que debe especificar los contenidos matemáticos que se van a abordar en el experimento y la manera como estos se organizan, así como el tipo de tareas que se propondrán, los recursos y artefactos con los que se contará para la resolución de estas tareas y las acciones evaluativas que se tendrán en cuenta para valorar el aprendizaje (Confrey y Lanchance, citados en Camargo, s.f.). En mi trabajo, la secuencia de enseñanza se estructura en torno a dos tareas que comprenden cinco actividades centradas en temáticas relacionadas con teselaciones usando polígonos regulares.

Fase 4: Es la implementación de las tareas de la secuencia, en la cual se desarrollan procesos de análisis intercalados con la experimentación y se hacen ajustes a las tareas. La estrategia contempla varios ciclos de experimentación para cada tarea de la secuencia de enseñanza, a través de los cuales esta se ajusta para volver a experimentarla. En el caso de mi trabajo, solo pude desarrollar un ciclo, debido a las limitaciones de tiempo que imponía la planificación del curso diseñada por la Universidad. Por lo tanto, los procesos de análisis intercalados y ajustes de la secuencia se desarrollaron analizando cada actividad después de aplicada y usando estos análisis para ajustar la actividad siguiente en la secuencia. Para el registro de la información de lo sucedido se tuvieron en cuenta las elaboraciones escritas de los estudiantes al resolver las tareas presentadas, las grabaciones de audio de las interacciones sostenidas entre los estudiantes y el profesor, y las grabaciones de video de las pantallas de los computadores en que trabajaban. Estas grabaciones de video se realizaron utilizando el software libre CamStudio.

Fase 5: Corresponde al análisis retrospectivo que se hace al efecto de la secuencia de enseñanza, una vez realizada la experimentación. Para llevar a cabo el análisis, se construyen los datos investigativos, a partir del registro de la información realizado en la Fase 4 y se adopta una herramienta analítica con la cual se estudian los datos.

3.1 FORMULACIÓN DE TRAYECTORIA HIPOTÉTICA DE APRENDIZAJE

La hipótesis que movilizó el diseño de las tareas incluye los siguientes elementos:

- Los planteamientos de Ainley (2006), mencionados en el marco teórico, en cuanto a la importancia del realismo y la contextualización en el diseño de las tareas. En ese sentido, teniendo en cuenta que el experimento se implementó en un curso universitario de geometría para estudiantes de Arquitectura, consideré que el contenido matemático debía estar relacionado con propiedades de objetos geométricos que permitieran resolver problemáticas propias del diseño artístico. Para estructurar las tareas del Experimento de Enseñanza opté por el contenido Teselación con polígonos regulares, debido a que este tema tiene varias aplicaciones para el diseño arquitectónico. De manera más específica, el propósito de las tareas fue que los estudiantes discernieran qué tipo de polígonos regulares permiten construir teselas en el plano, entendiendo estas como configuraciones de polígonos donde no se presentan traslapes ni huecos entre estos.

- El interés en promover el proceso de conjeturación, teniendo en cuenta la caracterización que hace Cañadas (2008) de las conjeturas que surgen a partir de varios casos dinámicos. En ese sentido, busqué impulsar la exploración de construcciones que involucran teselas en un ambiente dinámico que promueve el proceso de formular y justificar conjeturas acerca de cuáles son los polígonos que teselan el plano. Estas conjeturas están estrechamente relacionadas con propiedades geométricas de los polígonos.

- La pretensión de promover la conjeturación en la clase de geometría a partir del discernimiento de los invariantes de los objetos geométricos. Como mencionamos en el marco teórico del presente trabajo, para poder formular una conjetura acerca del tipo de polígonos que permiten teselar el plano, es necesario que los estudiantes disciernan ciertos invariantes de los polígonos regulares. De acuerdo con la Teoría de la Variación, ese discernimiento provendrá de la experimentación de patrones de variación sobre esos polígonos, lo cual requiere que estos se presenten en un ambiente que permita variar algunos de sus aspectos.

Teniendo en cuenta los tres elementos de la hipótesis, una posible ruta de avance en el proceso de conjeturación incluye los siguientes momentos:

- Un primer momento de familiarización con el ambiente de Geometría Dinámica, puesto que los estudiantes con los cuales se va a implementar la secuencia de enseñanza no tienen experiencia previa con el uso del software GeoGebra. El objetivo es que ellos instrumentalicen las herramientas necesarias para identificar los invariantes. Por ejemplo, herramientas de medidas de ángulos y de lados, usos de deslizadores, herramientas que permitan construir rotaciones de polígonos para generar las teselas, entre otros. En este sentido, nos alineamos con la Teoría de la Génesis Instrumental de Rabardel (1995), con el fin de generar un establecimiento de prácticas (Leung 2011) acerca de las herramientas del ambiente.
- En un segundo momento, los estudiantes identifican las características específicas de los polígonos regulares que permiten hacer una teselación; en particular, deben establecer la relación que existen entre las medidas de los ángulos internos y el ángulo en el que se debe rotar un polígono para poder generar un teselado. Para ello, los estudiantes deben discernir propiedades invariantes de los polígonos regulares, como el hecho que la medida de sus ángulos internos debe ser divisor de 360, en el caso que solo se quiera usar un polígono.
- En un tercer momento, los estudiantes deben formular sus conjeturas en un lenguaje relativamente formalizado, que les permita compartir con sus compañeros y con el profesor lo que ha encontrado en su exploración.

3.2 PLANEACIÓN DE LA SECUENCIA DE ENSEÑANZA

Diseñé la secuencia para ser resuelta con el apoyo del software de geometría dinámica GeoGebra, por lo cual preparé un archivo con una construcción en este software que los estudiantes tenían que explorar con el fin de dar respuestas a las preguntas que fueron planteadas en la secuencia. Teniendo en cuenta que las actividades fueron planeadas siguiendo la trayectoria hipotética de aprendizaje presentada en la sección anterior, la construcción incluye herramientas que permiten variar aspectos de la construcción para favorecer el discernimiento de las propiedades invariantes de los objetos inmersos en la construcción.

A continuación, presento las dos tareas caracterizando los enunciados de las preguntas en términos del Modelo de Tareas Tecno pedagógicas, con el fin de describir cómo se espera evidenciar los modos epistémicos propuestos por Leung (2011) y como se espera lograr la conjeturación.

3.2.1 Tarea 1

Descripción de la Tarea 1

La Tarea 1 consiste en la exploración de una construcción diseñada en GeoGebra que consta originalmente de un triángulo equilátero y un deslizador α (Ilustración 3.1). Al ser manipulado el deslizador, aparece un nuevo triángulo imagen del anterior que rota alrededor de uno de los vértices del triángulo original a medida que se arrastra el punto que está en el deslizador. En la tarea se solicita a los estudiantes que arrastren el punto en el deslizador con el fin de que los dos triángulos que aparecen en la construcción se yuxtapongan, es decir, que no queden espacios entre ellos y que no se solapen. A continuación, se les pide identificar qué relación hay entre el valor del deslizador y la medida de los ángulos del triángulo. Posteriormente, con el uso de la herramienta rotación, se solicita a los estudiantes que construyan triángulos adicionales de tal manera que no se solapen ni queden espacios entre ellos, y se les pide determinar cuál es al ángulo de rotación necesario en cada caso para poder hacer la construcción.

Logros esperados con la Tarea 1

En esta tarea se espera que los estudiantes disciernan los siguientes invariantes:

- Que para construir un arreglo de triángulos alrededor de un punto fijo que no se solapen ni queden espacios entre ellos, a partir de la rotación de uno de ellos, es necesario que el ángulo de rotación sea múltiplo de la medida del ángulo interno del correspondiente triángulo.

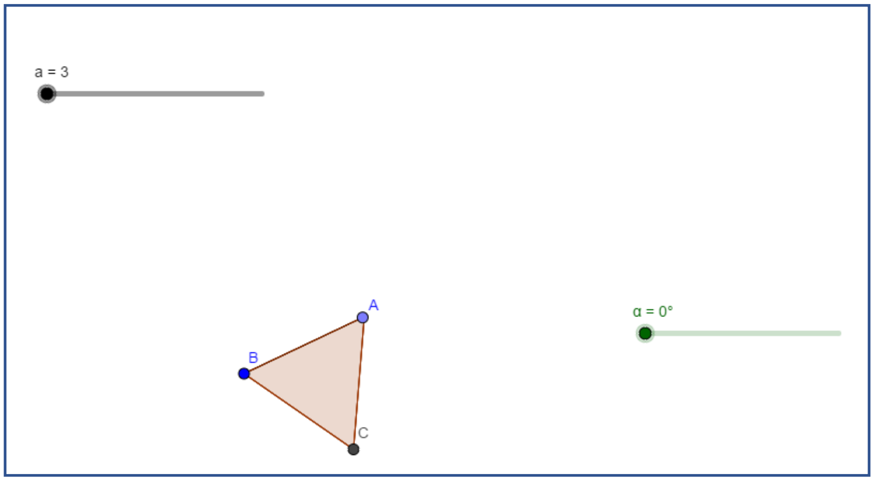


Ilustración 3.1

Enunciados de la tarea 1 y su caracterización de acuerdo con el Modelo MTT

Actividad 1

Abran el archivo correspondiente a la tarea 1 (Ilustración 3.1). En este observarán el triángulo $\varDelta ABC$, junto con dos deslizadores a, α. a) Arrastren el punto sobre el deslizador α y también usen las flechas izquierda y derecha del teclado para producir un efecto similar. Expliquen qué sucede. b) ¿Qué relación hay entre el valor de α y la manera como varía la construcción? c) ¿Qué tipo de triángulos aparecen en la construcción y qué relación hay entre ellos?

La actividad 1 tiene como propósito la instrumentalización del deslizador α por parte de los estudiantes. En ese sentido, se espera que en esta actividad identifiquen cuál es el efecto que tiene el arrastre de este deslizador sobre la construcción que se muestra en la Ilustración 3.1 y la manera de usarlo para poder identificar el ángulo de rotación que permite la yuxtaposición de los triángulos que aparezcan.

Teniendo en cuenta lo discutido en el párrafo anterior, esta actividad se enmarca en el modo Establecimiento de Prácticas del MTTP, ya que en ella los estudiantes exploran las características del deslizador α a través de su manipulación

En el numeral (a) de la actividad, se les pide manipulen el deslizador de dos formas distintas, haciendo uso del ratón para arrastrar el punto que se encuentra en él, y utilizando las flechas de dirección del teclado, para que aparezca un segundo triángulo congruente al primero el cual rota en sentido antihorario tantos grados como sea el valor de α . A partir de esta manipulación, en el numeral (b) se solicita a los estudiantes que describan el efecto que produce el deslizador α sobre la construcción, buscando que identifiquen que el valor que aparece en el deslizador corresponde al ángulo de rotación del segundo triángulo con respecto al primero. Posteriormente, en el numeral (c), se les pide caracterizar los triángulos que aparecen en la construcción, con el fin de que identifiquen que se tratan de triángulos equiláteros y congruentes entre sí.

Actividad 2

Determinen el valor de α para que los triángulos que resultan no se solapen ni dejen espacios en blanco entre ellos. ¿Cuál es la relación entre el valor de α y la medida del ángulo *ACB*?

Se les pide a los estudiantes que identifiquen el valor de α que permite la yuxtaposición de los triángulos. Los estudiantes experimentan que no cualquier valor permite que esto suceda, es decir, que hay valores que permiten que suceda y hay valores que no lo permiten. En ese sentido, la actividad 2 permite la experimentación de los estudiantes de un patrón de contraste, necesario para el discernimiento de la propiedad deseada acerca de la construcción.

Posteriormente, se les pide que describan la relación que hay entre este ángulo y los ángulos interiores del triángulo, los cuales son congruentes. Al realizar esta acción, se espera que los estudiantes experimenten un caso particular de la conjetura que se espera que formulen al finalizar la tarea.

Teniendo en cuenta que el propósito de esta actividad es el discernimiento de ciertos invariantes en la construcción, esta actividad hace parte del modo de Discernimiento Crítico del MTTP.

Actividad 3

Utilizando la herramienta **rotación**, construyan triángulos adicionales de tal manera que uno de sus vértices sea el punto C, y que uno de los lados del último triángulo que se construya sea el segmento AC. Ninguno de los triángulos debe solaparse y no deben quedar espacios en blanco. (La construcción obtenida se denomina una **teselación del plano por rotación).**   a) ¿Cuántos triángulos se necesitaron? _______________   b) ¿Cuál debe ser el ángulo de rotación de cada triángulo con respecto al triángulo $\triangle ABC$?   ____

A continuación, se invita a los estudiantes a que, con el uso de la herramienta Rotación, construyan triángulos congruentes con los anteriores de tal manera que no se generen traslapes ni huecos entre ellos, para que la construcción quede de la forma que se muestra en la Ilustración 3.2

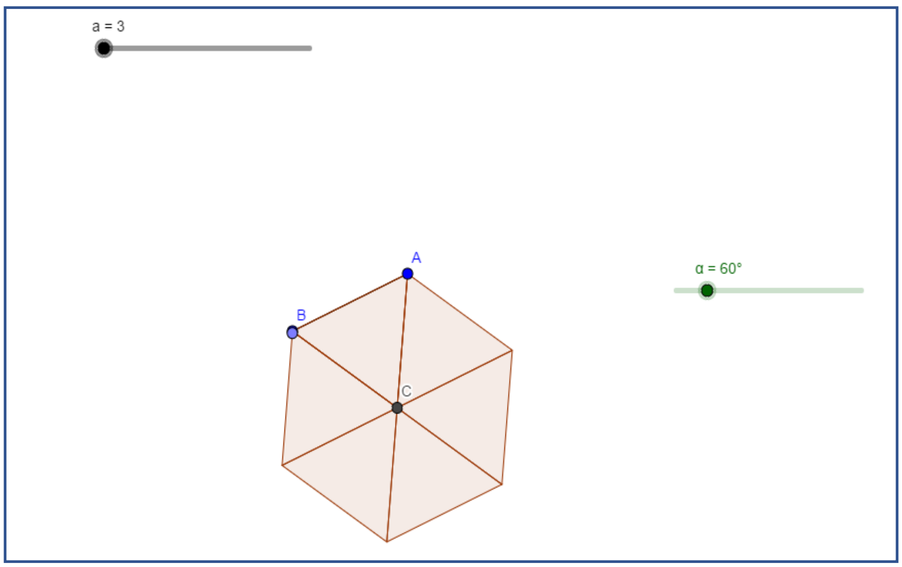


Ilustración 3.2

Al realizar esta acción, los estudiantes instrumentalizan una nueva opción de GeoGebra, que corresponde a la opción Rotación. El uso de esta nueva herramienta permitirá que los estudiantes construyan otros triángulos manteniendo la yuxtaposición entre ellos. Al hacerlo, experimentan la separación entre el número de triángulos que se pueden construir por rotación a partir del triángulo original y la yuxtaposición. Posteriormente, se espera que los estudiantes identifiquen un patrón en el valor de las medidas de los ángulos de rotación de estos nuevos triángulos con respecto al triangulo original, que le permita generalizar la propiedad que deben tener las medidas de los ángulos de rotación.

Esta actividad corresponde a dos modos epistémicos del modelo MTTP. La instrumentalización de la opción Rotación corresponde al modo Establecimiento de Practicas, y el discernimiento de que el ángulo de rotación para determinar de la teselación corresponde a la medida de los ángulos internos del triángulo se ubica dentro del modo de Discernimiento Crítico.

En la tabla 3.1 se sintetizan los aspectos del modelo de Tareas TecnoPedagógicas de Leung (2011) que se evidencian la tarea 1.

Tabla 3.1 Modos epistémicos por los que deberían transitar los estudiantes al resolver la Tarea 1

Modos epistémicos	
PM	**Instrumentalización deslizador α** Instrumentalizan el uso del deslizador α operando con el de dos formas, con el fin de mover el punto que se encuentra en el deslizador, **Forma 1:** Los estudiantes ponen el cursor del ratón sobre el punto, hacen click izquierdo en el ratón, y mueven el ratón. **Forma 2: Los** estudiantes ponen el cursor del ratón sobre el punto, hacen click izquierdo en el ratón, y utilizan las teclas de desplazamiento derecha e izquierda. Instrumentan el deslizador reconociendo el efecto que tiene el arrastre del deslizador en la construcción, es decir, que el deslizador α genera una rotación en el triángulo imagen. **Instrumentalización opción Rotación:** Instrumentalizan la herramienta rotación al operar de la siguiente forma: • Hacer click izquierdo sobre la herramienta Rotación • Hacer click izquierdo sobre el triángulo que se pretende rotar y posteriormente sobre el punto con respecto al cual se produce la rotación • En la ventana que se abre a continuación, escribir el ángulo de rotación deseado y el sentido de rotación (horario o antihorario)

	Instrumentan la herramienta rotación cuando la usan para completar la construcción de triángulos equiláteros que se yuxtaponen.
CDM	**Contraste:** hay valores de α donde los polígonos regulares se yuxtaponen y hay valores donde no. **Separación:** Se puede aumentar el número de triángulos en la construcción manteniendo la yuxtaposición. La separación se hace evidente al construir triángulos adicionales a los que fueron preconstruidos de tal manera que no se solapen ni dejen huecos entre ellos. **Generalización:** para cualquier nuevo triángulo que se construya manteniendo la yuxtaposición, el ángulo de rotación con respecto al triángulo original debe ser múltiplo de 60.
SDM	Los estudiantes describen los cambios percibidos en la construcción al hacer arrastre en el deslizador. Los estudiantes describen las propiedades de los triángulos que aparecen en la construcción y la relación entre ellos y los objetos en el deslizador
Conjetura prevista: En un teselado con triángulos equiláteros, el ángulo de rotación de cualquier triangulo con respecto a otro triangulo debe ser múltiplo de la medida del ángulo interno del triángulo.	

3.2.2 Tarea 2

Descripción de la Tarea 2

La Tarea 2 consiste en la construcción de teselados con polígonos regulares de distintos números de lados, tomando como base la misma construcción presentada en la Tarea 1. En esta tarea, se espera que los estudiantes instrumentalicen el deslizador a, el cual cambia el número de lados del polígono que aparece en la construcción. Utilizando esta herramienta, los estudiantes deben discernir con cuales polígonos se pueden construir los teselados y formular una conjetura acerca de las propiedades que deben tener estos polígonos.

Logros esperados con la Tarea 2

La Tarea 2 se propuso buscando que los estudiantes disciernan los siguientes invariantes:

- Que los únicos polígonos regulares que teselan el plano son aquellos cuya medida de sus ángulos internos son divisores de 360.

- Que el número de polígonos que se necesitan para realizar una teselación por rotación corresponde a 360 dividido por el número de lados del polígono.

Enunciados de la tarea 2 y su caracterización de acuerdo con el Modelo MTTP

Actividad 4

Reestablezcan la construcción, hasta que quede exactamente como estaba originalmente (Pueden cerrar el archivo y abrirlo nuevamente o pueden borrar las construcciones hechas). Ahora, arrastren el deslizador a y establezcan una relación entre el valor de a y el polígono que aparece.

En esta actividad se les solicita a los estudiantes que, después de reiniciar la construcción hasta su versión original, arrastren el deslizador a, el cual modifica el número de lados del polígono regular que aparece en la construcción. Con esta actividad se espera que los estudiantes identifiquen el efecto que tiene el deslizador a en la construcción, para poder generar las diferentes instancias que les permitan reproducir la construcción realizada en la Tarea 1 con cualquier polígono regular. En ese sentido, en esta actividad se desarrolla un proceso de instrumentalización del deslizador a que hace parte del modo Establecimiento de Prácticas.

Actividad 5

Exploren la construcción para investigar qué polígonos teselan el plano.

a) Comiencen con cuadrados ¿Cuántos necesitarían? __________ ¿Cuál es el ángulo de rotación de cada cuadrado con respecto al cuadrado original? ____________________

b) Completen la siguiente tabla:

Número de lados del polígono	Polígonos necesarios para hacer la teselación	Ángulo de rotación necesario para la teselación.
3		
4		
5		

6		
7		
8		

c) Establezcan la relación entre el número de polígonos en una teselación, y el ángulo de rotación.

d) Completen la oración: Si el ángulo interno de un polígono regular es __________________________entonces es posible hacer una teselación del plano con ese polígono.

e) Formulen una conjetura sobre qué polígonos regulares teselan el plano.

En la actividad 5, en (a) se les pide a los estudiantes que con los nuevos polígonos intenten construir teselaciones de la misma manera que lo hicieron con los triángulos equiláteros. En este proceso de construcción se espera que los estudiantes experimenten los patrones de variación que se describirán en la tabla que se muestra a continuación, (b) con el fin de discernir que propiedades deben cumplir los polígonos regulares para poder construir la teselación. Posteriormente, en (c) y (d) se les pide que identifiquen como debe ser la medida de los ángulos internos de un polígono regular que permita la teselación, para que posteriormente en (e) formulen conjeturas que caractericen los polígonos que permiten realizar la teselación.

La actividad 5 corresponde a dos modos epistémicos del MTTP. En los literales a) y b) se desarrolla un proceso de discernimiento a partir de la experimentación de los patrones de contraste entre polígonos que permiten construir la teselación y los que no, la separación a partir de la construcción de teselaciones con diversos polígonos, y la generalización de las propiedades que permiten caracterizar los polígonos que hacen posible construir la teselación. En ese sentido, estos literales corresponden al modo de Discernimiento Crítico.

Los literales c), d) y e) tienen como propósito que los estudiantes formulen conjeturas acerca del tipo de polígonos que permiten construir teselaciones. En ese sentido, en estos literales los estudiantes transitan por un modo de Establecimiento de un Discurso Situado que les permite explicitar el razonamiento usado para formular dichas conjeturas.

Tabla 3.2 Modos epistémicos por los que deberían transitar los estudiantes al resolver la Tarea 2

Modos epistémicos	
PM	Los estudiantes instrumentaliza el deslizador a, identificando que su manipulación produce el efecto de modificar el número de lados del polígono que aparece en la construcción.
CDM	**Contraste:** hay polígonos con los que se puede construir la teselación y hay polígonos con los que no. **Separación:** los polígonos con los que se puede producir la teselación son de varios números de lados y varios ángulos de rotación. **Generalización:** la cantidad de polígonos que se requiere para teselar por rotación corresponde al cociente entre 360 y la medida del ángulo interno del polígono.
SDM	Se formula una conjetura acerca de las características que deben presentar los polígonos regulares para poder construir la teselación
Conjeturas previstas: • Los polígonos regulares que permiten realizar una teselación son aquellos cuya medida de sus ángulos internos es divisor de 360. • La cantidad de polígonos regulares del mismo tipo necesarios para realizar una teselación resulta de dividir 360 entre la medida de los ángulos internos del polígono.	

3.3 EXPERIMENTACIÓN DE LA SECUENCIA DE ENSEÑANZA

La experimentación de la secuencia de enseñanza la realicé en dos clases regulares del curso Geometría en el primer semestre de 2017, el cual tiene una intensidad horaria semanal de dos horas, en una sesión de clase. En la experimentación les entregué a los estudiantes los enunciados de las tareas de forma escrita, y les di un enlace para descargar el archivo de GeoGebra donde se encontraba la construcción con la cual debían trabajar.

El grupo era de 21 estudiantes. Les solicité que se dividieran en grupos de tres personas para resolver la tarea. Durante la experimentación, los estudiantes trabajaron en la resolución de los puntos de la tarea mientras que yo, actuando como profesor, iba de grupo en grupo revisando el avance del trabajo y discutiendo con ellos acerca de las dudas que se fueran presentando.

Los estudiantes manifestaron al inicio del curso que no tenían experiencia con el uso del software GeoGebra. Debido a ello, en las clases anteriores a la experimentación les expliqué el funcionamiento de algunas de las herramientas básicas del software, especialmente aquellas que correspondían al cálculo de medidas de segmentos y ángulos.

3.4 ANÁLISIS RETROSPECTIVO

Como se mencionó en la descripción de la metodología de este trabajo, el primer paso del análisis de la información consiste en la construcción de los datos investigativos. Para ello, recopilé el material correspondiente a la producción escrita de cada uno de los grupos de trabajo, las grabaciones de audio de las conversaciones sostenidas por mí con los integrantes de cada grupo y las grabaciones de video de las capturas de pantalla del trabajo realizado por cada grupo con el software GeoGebra. Tuve en cuenta la información correspondiente a dos de los grupos de trabajo, que fueron seleccionados para el análisis debido a que fueron los que presentaron una actividad más rica en cuanto a la actividad de conjeturación durante el desarrollo de la tarea. Esta riqueza en la actividad fue establecida tomando en cuenta los grupos en los que los estudiantes operaron de manera más autónoma en el desarrollo de la secuencia y en los que ellos formularon más conjeturas.

El propósito de recolectar esta información fue transcribir fragmentos de lo sucedido en cada uno de los grupos de trabajo cuando resolvían las tareas propuestas. Eliminando la información no relevante y juntando algunas interacciones constituí lo que en adelante denomino episodios. Los datos investigativos en este trabajo corresponden a los episodios en los cuales se evidencia el tránsito de los estudiantes por alguno de los modos epistémicos que describe el Modelo de Tareas Tecno Pedagógicas (2011). En algunos episodios los estudiantes transitaron por más de un modo epistémico, ya que algunas preguntas de la secuencia de actividades así lo promovían.

La herramienta analítica que se usó para el análisis de los datos es pre-estructurada. Tiene en cuenta tanto los modos epistémicos del MTT como el modelo de conjeturación que plantean Cañadas et al (2008) (Tabla 3.3). En ese sentido, sobre cada dato describo tanto el modo o los modos epistémicos por lo que transitaron los estudiantes en el desarrollo de la tarea como la fase del proceso de conjeturación que se promovió en el correspondiente episodio.

Tabla 3.3 Herramienta analítica de los datos investigativos.

<table>
<tr><td rowspan="3">Modos epistémicos</td><td colspan="5">Establecimiento de Prácticas:</td></tr>
<tr><td colspan="5">Discernimiento Crítico:</td></tr>
<tr><td colspan="5">Discurso Situado:</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Conjeturación</td><td colspan="5">Fases del proceso de conjeturación</td></tr>
<tr><td>Manipulación</td><td>Observación</td><td>Formulación</td><td>Verificacion</td><td>Generalizacion</td></tr>
</table>

4. **ANÁLISIS**

En este capítulo presento los análisis realizados a los datos investigativos. Hago la organización por grupo de estudiantes, presentando los episodios de manera cronológica, y especificando a que actividad corresponde cada dato.

Después de presentar cada dato interpreto por cuales modos epistémicos transitaron los estudiantes en el correspondiente episodio, destacando los aspectos más importantes que se observaron durante el análisis. También las fases del proceso de conjeturación en las que se puede enmarcar cada episodio.

4.1 ANÁLISIS DEL TRABAJO REALIZADO POR EL GRUPO 1

Episodio 1 (Actividad 1)

Los estudiantes descargan el archivo sobre el cual van a desarrollar la tarea. Después, el profesor les entrega la hoja donde se encuentra el enunciado, y Camila procede a leerla, lo cual da lugar a la siguiente conversación:

Camila: (Lee) Abran el archivo Tarea 1. En este observarán el triángulo $\triangle ABC$, junto con dos deslizadores a, α. Arrastren el punto sobre el deslizador α y usen las flechas izquierda y derecha del teclado para producir un efecto similar (Procede a arrastrar el punto que se encuentra en el deslizador α con el ratón; posteriormente, utiliza las teclas de dirección para generar el mismo efecto). Pues [con las teclas, la imagen del triángulo] se mueve más lento (…) [que cuando se utiliza el ratón]. (Escribe en el espacio asignado sus apreciaciones) En el punto inicial (…) [marcado con] cero grados (…) y (…) ¿en el otro cuál sería? Hagámoslo más rápido.

Pedro: 360 [grados].

Camila: (…) y 360, se ubican (…) no, se observa (…) un triángulo. Pero al moverse, se empieza a (…) ¿se empieza a qué? ¿a salir?

Pedro: Se empieza a rotar.

Camila: Se empieza a rotar (…) un nuevo (…) un triángulo similar al [triangulo] ABC. ¿Qué otra cosa escribimos? (...) ¡Ah! que hacia la derecha se abre en el sentido de las manecillas del reloj (…)

Pedro: (…) y hacia la izquierda, en el sentido contrario (…).

Camila: Al mover [el deslizador] hacia la derecha (…) el triángulo, el triángulo dos (la imagen) rota, hacia las manecillas del reloj, y [al mover] a la izquierda, en contra. Y va cambiando (…) el valor de $\propto$

con cada movimiento. (Lee) Qué relación hay entre el valor de $\propto$ y la forma como varia la construcción. (Respondiendo a la pregunta) Pues eso (…) pues porque, cada vez que se mueve (…)

Pedro: se incrementa el valor de los grados de $\propto$.

Camila: Exacto (…) si se mueve hacia la derecha, va disminuyendo (…) no, si se mueve hacia la izquierda, va disminuyendo (…) el valor; pero si se va hacia la derecha (…) no, hacia la izquierda (…) mmm (Arrastra el deslizador de izquierda a derecha). ¿Así es hacia la izquierda cierto?

Pedro: Así está girando hacia la derecha.

Camila: ¿Derecha?

Pedro: Derecha es esto (arrastra el deslizador hacia la derecha) ¿Tú hablas de esto (arrastra a la derecha)? ¿o de esto (arrastra a la izquierda)?

Camila: De esto (arrastra hacia la derecha).

Pedro: ¡Ah! (...) Eso es hacia la derecha.

Camila: ¡Ah!, entonces la cagamos (…) porque (…) [arrastra el punto que está en el deslizador α hacia la derecha] a la derecha va en contra de las manecillas del reloj. Toca corregir eso. (Corrige en la hoja)

En este episodio se observa como los estudiantes, a partir de lo que se les solicita en la actividad 1 de la Tarea 1, exploran el funcionamiento del deslizador α, al arrastrar el punto que se encuentra sobre él. Al realizar esta exploración, identifican el efecto que tiene el deslizador α sobre la construcción que aparece en la pantalla del computador. Más específicamente, identifican que aparece un triángulo “similar” al que se encontraba originalmente, cuando se arrastra el punto en el deslizador. Luego observan que, al mover el deslizador, el triángulo imagen rota con respecto a uno de los vértices del triángulo; es decir, se produce una rotación del triángulo imagen con respecto al triángulo original en un sentido u otro, dependiendo del movimiento del deslizador a izquierda o derecha. También identifican que al utilizar las teclas derecha e izquierda del teclado se produce el mismo efecto, pero de manera más lenta.

Modos epistémicos

Establecimiento de Prácticas

Interpreto que la manipulación del punto que se encuentra en el deslizador α lleva a los estudiantes a reconocer las características y potencialidades de esta herramienta con respecto al triángulo que aparece en la construcción; en otras palabras, a instrumentalizar el deslizador. Este proceso de instrumentalización (Rabardel, 1995) es favorecido por el hecho que el enunciado de la actividad 1 solicita a los estudiantes que describan lo que sucede al manipularla. De hecho, la discusión surgida al describir lo que sucede lleva a los estudiantes a enfocar su mirada en la manera como el arrastre del punto en el deslizador afecta el sentido de rotación del triángulo imagen con respecto al triángulo original. Lleva a los estudiantes a reflexionar sobre el significado de los términos “sentido de las manecillas del reloj” y “sentido en contra de las manecillas del reloj”.

Proceso de Conjeturación

Manipulación de una situación dinámicamente por medio de la continuidad de casos

Como se discutió en el marco teórico, el modo Establecimiento de Prácticas del modelo MTTP de Leung (2011) debe motivar a la manipulación dinámica de una representación, tal y como lo hacen los estudiantes en este episodio cuando arrastran el punto que se encuentra en el deslizador α. Esta manipulación genera diversas instancias en la rotación del triángulo imagen con respecto al triángulo original, que permitan identificar posteriormente invariantes que emergen en la construcción.

Episodio 2 (Actividad 1)

Después de que los estudiantes han verificado que los triángulos que aparecen en la construcción son equiláteros, haciendo uso de la opción Longitud o distancia, el profesor se acerca al grupo y les pregunta cómo van con la tarea. Cuando los estudiantes le responden que ya han verificado que los triángulos son equiláteros, el profesor les pide que devuelvan la construcción hasta su forma original, y que lean el primer punto de la tarea, el cual les pide explicar qué sucede cuando se arrastra el punto en el deslizador α. Camila empieza a arrastrar el punto en el deslizador mientras explica que al hacerlo aparece un segundo triángulo que rota con respecto al vértice C. Mientras arrastra, el profesor le pide que deje de hacerlo y se establece el siguiente diálogo.

Profesor: Listo (…) Déjalo quieto [el deslizador] ahí-

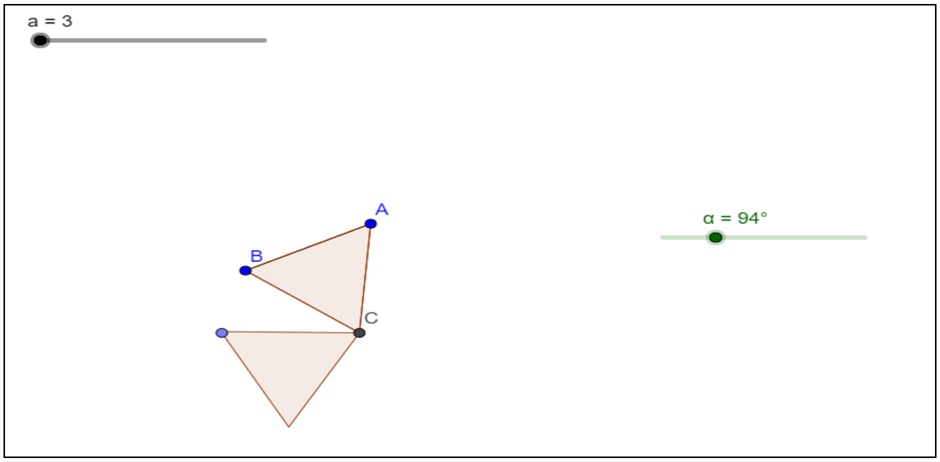


Ilustración 4.1

¿Cuál es el valor de ∝ ahí?

Pedro: Noventa y cuatro grados.

Profesor: Y ese número, ¿qué tiene que ver con esta construcción? (Señala los triángulos).

Camila: Es este (señala el segmento AC y la imagen del segmento AC). Es el ángulo que tiene este segmento con este otro segmento.

Profesor: ¿Cuáles segmentos?

Camila [El segmento] AC con el [segmento] C (…) (Señala el vértice imagen del punto A). Porque si te das cuenta, [cuando ∝ es] 90, [el ángulo formado el segmento AC y la imagen del segmento AC] tiene que ser así recto (señala el ángulo formado por el lado AC y la imagen del lado AC).

Profesor: ¿Y si comprobaron que efectivamente ese ángulo es recto?

Camila: Pues, saquémosle [la medida] a el ángulo [Trata de usar la opción Medida de ángulo. Nota que el triángulo rotado no tiene destacados sus vértices de manera explícita y no la puede obtener).

Profesor: ¿Cómo hacen para sacar [la medida de] el ángulo que quieren sacar?

Pedro ¿Una recta?

Camila: Y si hacemos un segmento de aquí (señala el punto C) a aquí (señala un vértice del triángulo imagen).

Profesor ¿Cómo miden un ángulo? (….) ¿Cómo miden ese ángulo que me están diciendo?

Camila ¡Ah! Ya (…). (Utiliza la opción **Punto** y ubica un punto E tratando de que quede en el vértice imagen del punto B) A continuación, utiliza la opción **Polígono** y construye el triángulo con vértices A, C, E.

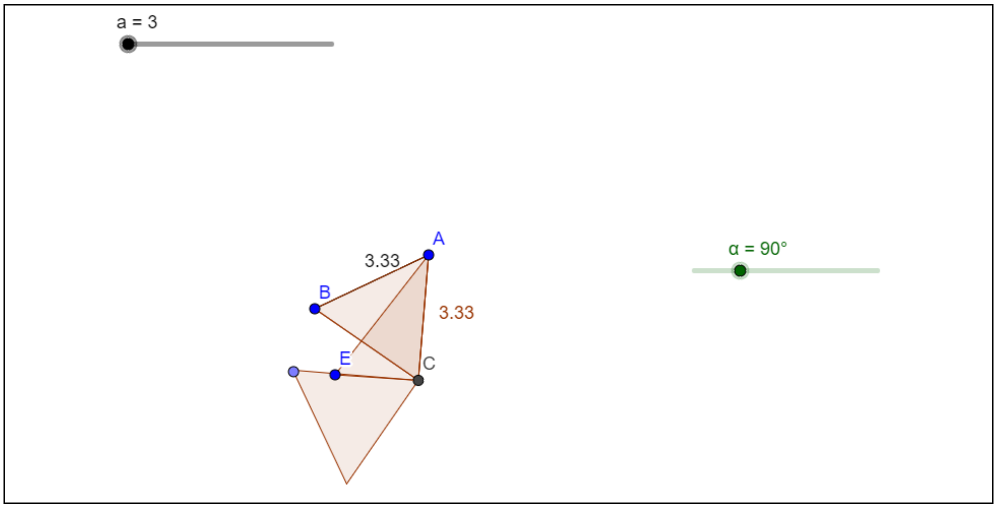


Ilustración 4.2

(mide el ángulo ACE Obtiene 89.83°)

Profesor: Pero eso no dio 90.

Camila: ¡No! Espérate a ver, que es que no lo tomé bien.

Pedro: ¿Y si tratamos [con la opción] **Punto en objeto?**

Camila: (Selecciona la opción **Punto en objeto** y trata de ubicar un punto en el vértice). No [es ahí]; espera que no queda ahí [en el vértice].

Profesor: ¿Y necesitan ese punto? (…) (…) Miren la opción **Ángulo.**

Camila: (Selecciona la opción Á**ngulo**).

Profesor: Y dale [clic] en este segmento (AC), y traten de coger este [segmento imagen del segmento AC] de aquí abajo (señalando el segmento imagen del segmento AC) a ver si aparece.

Camila: (Comprueba que no se puede tomar el lado del triángulo) ¿Y si hacemos un segmento sobre ese [lado]?

Profesor: Pero tendrían que poner el punto exactamente donde es [señala el segmento donde debería el punto]. ¿Por qué no intentamos esto? (Selecciona la opción **Punto en objeto**, y construye un punto D ubicado sobre el lado que es imagen del lado AC). ¿Sera necesario que el punto este aquí en el final? (en el vértice).

Camila: ¡Ah! ¡No! ¡Qué bobos! Muchas gracias profe.

Por solicitud del profesor, los estudiantes buscan establecer la relación entre el número que aparece en el deslizador α y el ángulo que aparece en la construcción, es decir, que el valor que aparece en el deslizador α corresponde precisamente a la medida del ángulo de rotación del triángulo imagen con respecto al triángulo original. Por lo tanto, utilizan la opción Ángulo en una situación en la que no lo habían hecho hasta ahora. Es decir, los estudiantes habían calculado ángulos previamente con GeoGebra, pero siempre habían contado con la posibilidad de poder seleccionar los dos segmentos que determinaban dicho ángulo.

Por lo tanto, hacen uso de una construcción auxiliar que les permita medir el ángulo de rotación de manera precisa. Para hacer esta construcción, que consiste en un nuevo triangulo que tiene un ángulo interno que corresponde al ángulo de rotación, los estudiantes deben ubicar un nuevo punto en uno de los lados del triángulo imagen, por lo que hacen uso de la opción **Punto en objeto.**

Modos epistémicos

Establecimiento de Prácticas

Como el triángulo imagen no tiene destacados sus lados ni sus vértices, se hace necesario destacarlos. Los estudiantes tienen la necesidad de construir un esquema de utilización de la opción Ángulo que les permita hacerlo. Es decir, emerge un proceso de instrumentación de la opción para resolver la tarea que se propone.

En este caso, este proceso de instrumentación surge de manera autónoma por parte de los estudiantes, en particular de Camila, quien propone la construcción de un segmento sobre uno de los lados del triángulo para poder realizar la medición. Este es un hecho que hay que resaltar, porque aquí se observa que es el diseño de la tarea quien guía a los estudiantes a través de esta génesis instrumental, sin necesidad de que se haga explícito o que el profesor así lo solicite. Más aún, este esquema de utilización no había sido previsto cuando se diseñó la actividad, sino que surge como producto del ingenio de los estudiantes ante una inquietud planteada por el profesor. En ese sentido, el rol del profesor es guiar la instrumentalización del artefacto (opción Ángulo) dando recomendaciones acerca de cómo construir el segmento.

Proceso de Conjeturación

Manipulación de una situación dinámicamente por medio de la continuidad de casos

El proceso de instrumentación de la opción Ángulo les permitió a los estudiantes enriquecer la representación y manipulación que hacen al arrastrar el punto que se encuentra en el deslizador. Esta manipulación, que ya se había realizado anteriormente para identificar las características del deslizador, ahora con la opción Ángulo instrumentada permite que, a través de diversas instancias, los estudiantes identifiquen la relación entre los valores que aparecen en el deslizador α y el ángulo que existe entre lados correspondientes de los dos triángulos que aparecen en la construcción. En ese sentido, la manipulación de la situación por medio del deslizador α favorece el proceso de identificación de invariantes en la construcción, como se observa en el siguiente episodio.

Episodio 3 (Actividad 2)

Los estudiantes trabajan en la construcción la cual está como se muestra la Ilustración 4.3

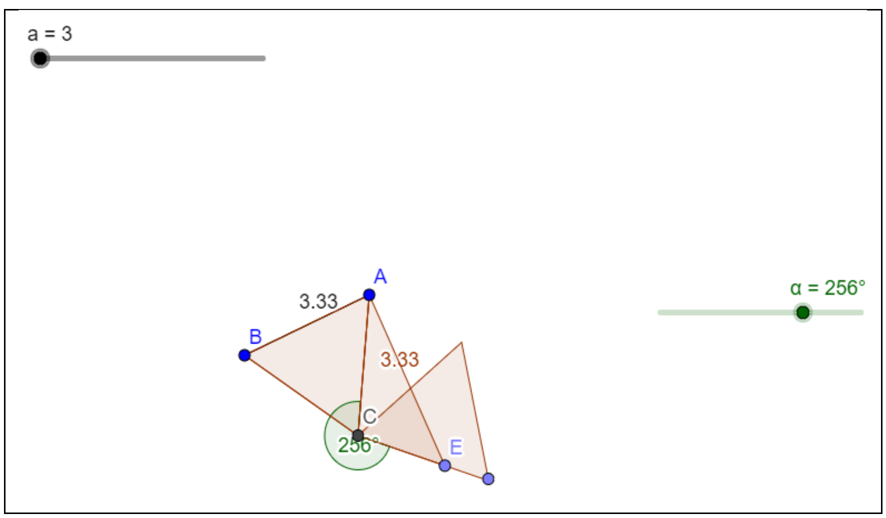


Ilustración 4.3

Después de haber descrito el funcionamiento del deslizador α y de haber establecido que la relación entre el valor de α y la manera como varía la construcción es que el valor de $\propto$ determina el ángulo entre el segmento AC y el segmento CE, leen la actividad 2, en la que se les pide determinar el valor de α para que los dos triángulos se yuxtapongan. Se entabla la siguiente conversación:

Camila: O sea, sería (…) ¿así? [arrastra el punto en el deslizador α hasta que queda la siguiente figura].

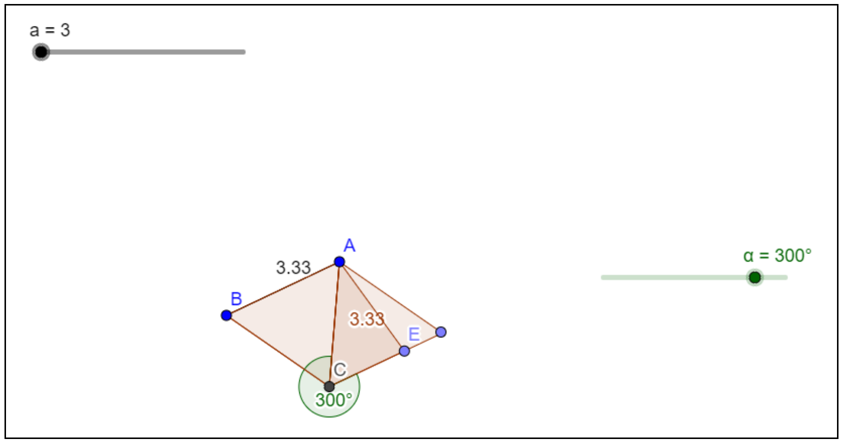


Ilustración 4.4

Porque es que dice "determine el valor de α para que los triángulos que resulten no se solapen", , que se pongan encima de otro, ¿no? (...) "ni dejen espacios en blanco entre ellos". Ahí no hay espacios.

Pedro: Podría ser 300 [grados](…) pero debe haber otra opción.

Camila: Pues para el otro lado, espera (…) (Arrastra el punto el deslizador α hasta que la cosntruccion queda de la siguiente forma:

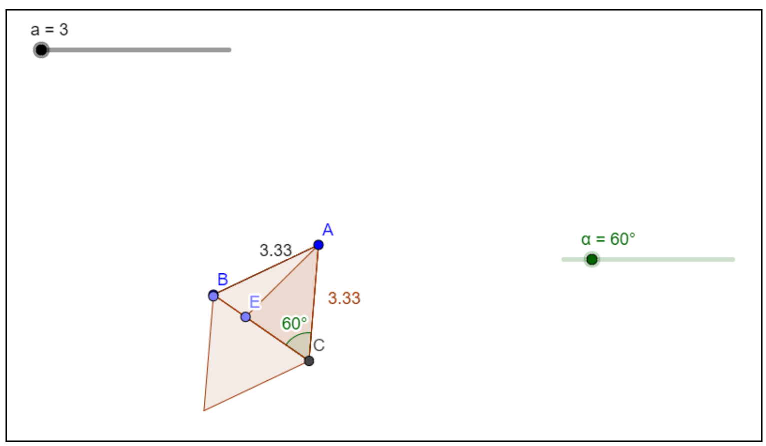


Ilustración 4.5

(Llama al profesor) Que no se solapen es que no queden así ¿cierto?

Profesor:	Sí, exactamente (…) bórrame ese nuevo triángulo [refiriéndose al triangulo ACE] ya sabemos para que era ese triángulo, bórralo.
Camila:	(Hace click sobre el punto E y oprime la tecla SUPR, con lo cual se borra el triángulo ACE. Arrastra el deslizador α hasta que toma un valor de 60, quedando la construcción de la siguiente forma:

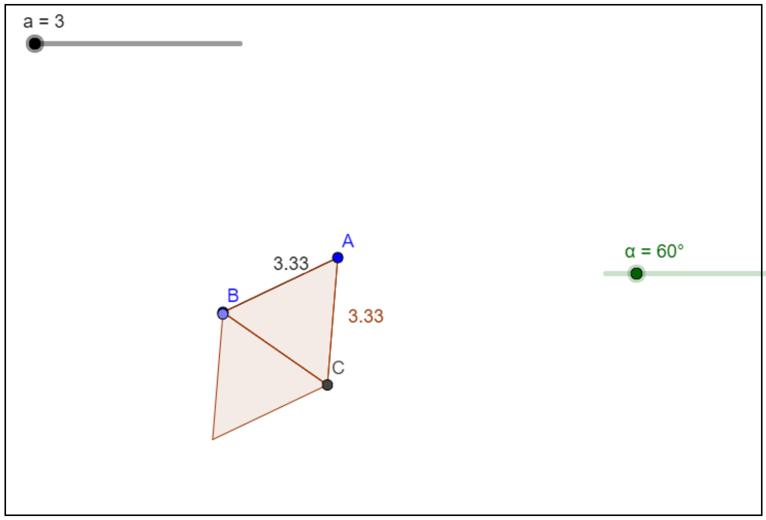


Ilustración 4.6

	Listo.
Pedro:	Y en 300 [grados] también (…).

En este episodio, los estudiantes exploran la construcción con el fin de determinar los valores del deslizador α que generan la yuxtaposición entre el triángulo ΔABC y su triangulo imagen.

Modos epistémicos

Establecimiento de prácticas

En este episodio identifico la emergencia de un esquema de utilización para el deslizador α, cuyo propósito es el establecimiento del valor de α que permita la yuxtaposición de los dos triángulos que aparecen en la construcción. En este esquema, los estudiantes arrastran el punto en el deslizador buscando unir lados de los dos triángulos.

Discernimiento crítico-Contraste

La búsqueda del valor del ángulo de rotación que permita yuxtaponer los dos triángulos describe la experimentación por parte de los estudiantes del contraste que hacen los estudiantes entre los valores del ángulo α que permiten y los que no permiten la yuxtaposición. Considero que este dato evidencia la emergencia del discernimiento crítico al que hace referencia Leung (2011) en la descripción del Modelo MTT.

Esto se evidencia cuando los estudiantes experimentan la existencia de valores donde la yuxtaposición no se presenta, como en el caso de lo que se muestra en la Ilustración 4.3, y otros casos donde sí se presenta (Ilustraciones 4.4, 4.5 ,4.6). En este episodio, a pesar de que el contraste no es explicitado por los estudiantes ni verbalmente ni por escrito, este se evidencia en el hecho que los estudiantes manipulan el deslizador varias veces hasta encontrar un valor donde sí se pueda realizar la yuxtaposición.

Proceso de Conjeturación

Manipulación de una situación dinámicamente por medio de la continuidad de casos

En este episodio interpreto el arrastre que hacen los estudiantes del punto que se encuentra en el deslizador α como una manera de manipular la situación de manera dinámica con el fin de encontrar valores específicos de α que permitan yuxtaponer los dos triángulos.

Episodio 4 (Actividad 3)

En la pantalla del computador, los estudiantes tienen un deslizador de número y un deslizador de ángulo, un triángulo, y su imagen por rotación con respecto al vértice C (obtenida al arrastrar el deslizador a la posición 60°). Ana lee la actividad 3 en la que se pide utilizar la herramienta **Rotación** para construir triángulos que se yuxtapongan entre sí. Como esta herramienta no había sido empleada hasta el momento, Pedro busca en las herramientas del software hasta que encuentra la herramienta **Rotación**. La seleccionan, y luego hace click primero en el punto C y luego en el punto A. Aparece el cuadro de diálogo que se muestra en la Ilustración 4.7.

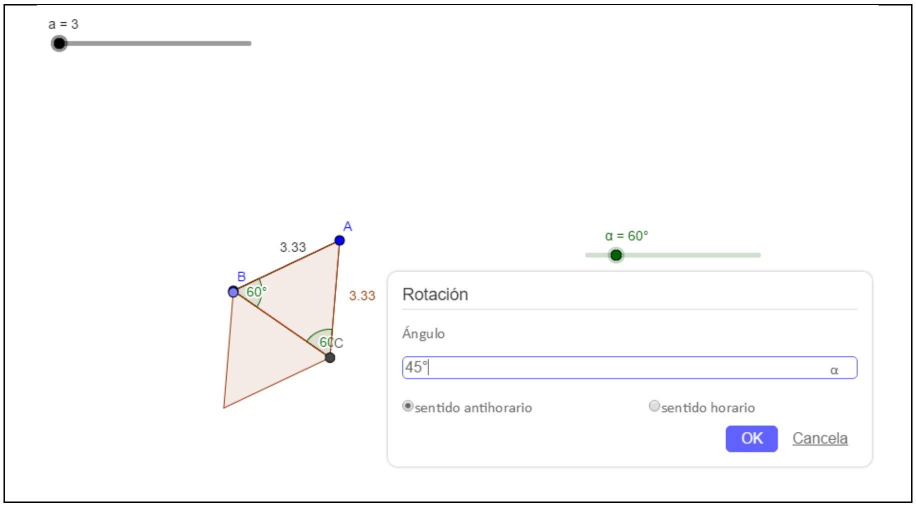


Ilustración 4.7

A continuación, Pedro selecciona la opción **sentido horario** en el cuadro de diálogo y da click en el botón OK. Al hacerlo, aparece un punto en la construcción, como se muestra en la Ilustración 4.8. En ese momento, Ana sugiere que se vuelva a realizar la misma acción, pero ahora seleccionando la opción **sentido antihorario** en el cuadro de diálogo. Pedro hace click en la herramienta **Rotación** nuevamente, y selecciona la opción **sentido antihorario**: En ese momento Ana le dice que en la opción **Ángulo**, escriba 60. A continuación, Pedro digita ese número y da click en Ok. La construcción queda como se muestra en la Ilustración 4.9.

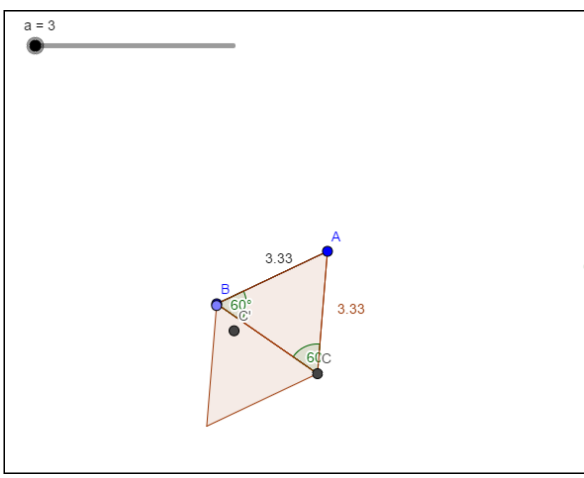


Ilustración 4.8

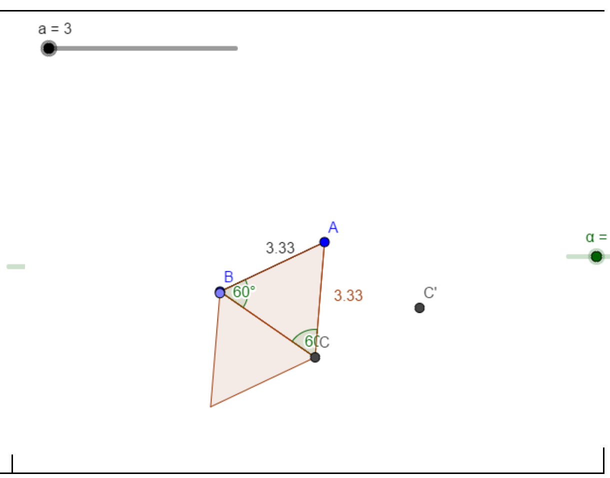


Ilustración 4.9

A continuación, usando la opción **Polígono,** Pedro construye el triángulo ACC' con lo cual la construcción queda como la Ilustración 4.10.

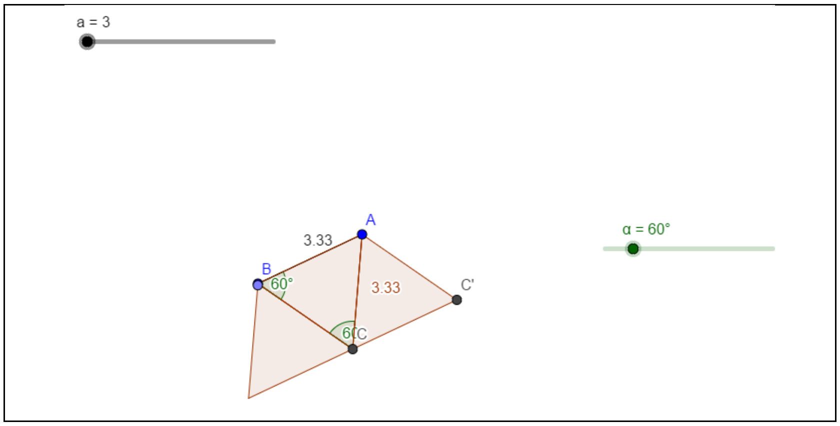


Ilustración 4.10

Modos epistémicos

Establecimiento de Prácticas

En este episodio se presenta la génesis instrumental de una nueva opción de GeoGebra para los estudiantes, la opción Rotación. Es utilizada con el fin de construir teselaciones de triángulos equiláteros. En ese sentido, el proceso de instrumentalización de esta opción implica principalmente la identificación de dos aspectos dentro del cuadro de diálogo generado al seleccionar la opción: el ángulo de rotación y el sentido de rotación. Como se puede observar en el episodio, la selección inicial que usan los estudiantes de estos aspectos (45 grados en sentido horario) genera una construcción que no es la esperada, lo que los lleva a un replanteamiento del esquema de utilización de la opción para resolver la tarea. Esto último refleja el proceso de instrumentación hecho por parte de los estudiantes de la opción Rotación, y, por lo tanto, siguiendo los planteamientos de la Teoría de la Génesis Instrumental, la transformación de la opción Rotación en un instrumento.

Es de destacar que el esquema de utilización desarrollado por los estudiantes de este grupo no implica rotar todo el triángulo, sino solamente uno de sus vértices (el punto A). Este esquema de utilización que resulta útil en el caso del triángulo, presenta dificultades cuando se quiere rotar un polígono con un mayor de número de lados, como se verá más adelante.

Discernimiento Crítico- Contraste- Separación-Generalización

En este episodio los estudiantes experimentan diversos patrones de variación que los llevan al establecimiento de condiciones acerca de cómo deben ser los ángulos de rotación entre los triángulos para poder generar la teselación. El primer patrón que experimentan es el contraste cuando intentan construir el tercer triángulo de la teselación. Al intentar rotar con un ángulo de 45 grados, que era el valor que estaba predeterminado, y cuando intentan hacerlo con un ángulo de 60 grados, les permite experimentar nuevamente, como había sucedido en el Episodio 3, que existen valores de α que hacen posible la yuxtaposición y otros que no. Posteriormente experimentan la separación cuando mientras van aumentando el número de triángulos tratan de mantener fija la yuxtaposición entre ellos, lo que los lleva generalizar que el valor debe ser siempre de 60 grados entre cada triángulo nuevo y el anterior que han construido.

Proceso de Conjeturación

Observación de una propiedad invariante de la situación

Como se discutió en la sección anterior, los patrones de variación experimentados por los estudiantes permiten que los estudiantes observen un invariante en la situación, lo cual se evidencia cuando los estudiantes después de construir el tercer triángulo de la teselación descubren que el ángulo siempre debe ser de 60 grados para que los triángulos no se yuxtapongan.

Episodio 5 (Actividad 5)

Después de haber explorado el uso del deslizador número a, Camila lee la actividad 5 de la tarea 2, donde se les solicita analizar con cuáles polígonos es posible construir una teselación, empezando por el cuadrado. A continuación, Pedro arrastra el punto en el deslizador, hasta que toma el valor de 4. Aparece un cuadrado en la construcción, como se muestra en la Ilustración 4.11.

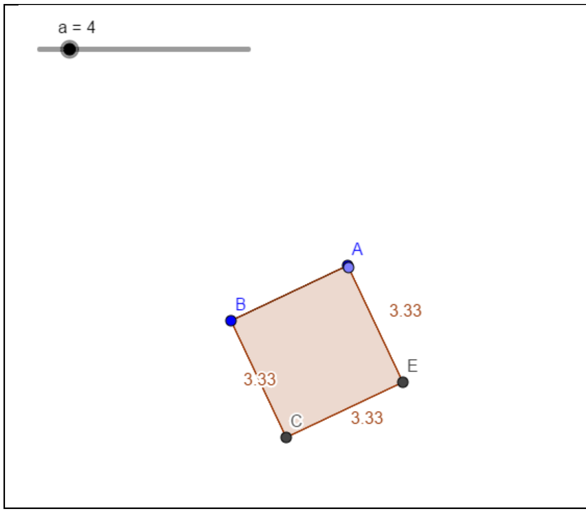


Ilustración 4.11

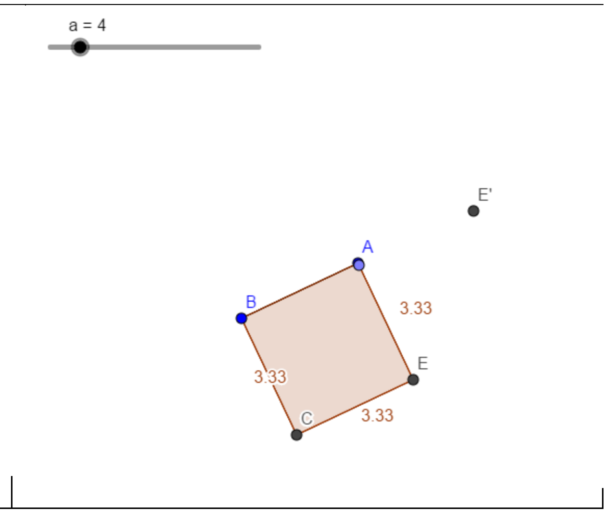


Ilustración 4.12

Después, Pedro hace click en la opción **Rotación**, luego en el punto E y luego en el punto A. Cuando aparece el cuadro de diálogo correspondiente a la opción **Rotación**, en la parte donde debe escribir el valor del ángulo escribe 90 grados y en la parte donde debe especificar el sentido de la rotación pone **sentido horario**, con lo cual aparece un nuevo punto $E´$, como se muestra en la Ilustración 4.12.

Al observar el resultado obtenido con la opción **Rotación**, y ver que no obtienen un cuadrado, los estudiantes se cuestionan si en este caso la construcción solicitada también debe hacerse utilizando la herramienta **Rotación**, y deciden preguntar al profesor. Él les dice que deben hacerlo como lo hicieron con el triángulo; es decir, efectivamente utilizando la herramienta **Rotación**. Pedro hace click nuevamente en la opción **Rotación**, pero ahora primero da click en el interior del cuadrado y luego en el punto E, con lo cual la construcción queda como se muestra en la Ilustración 4.13.

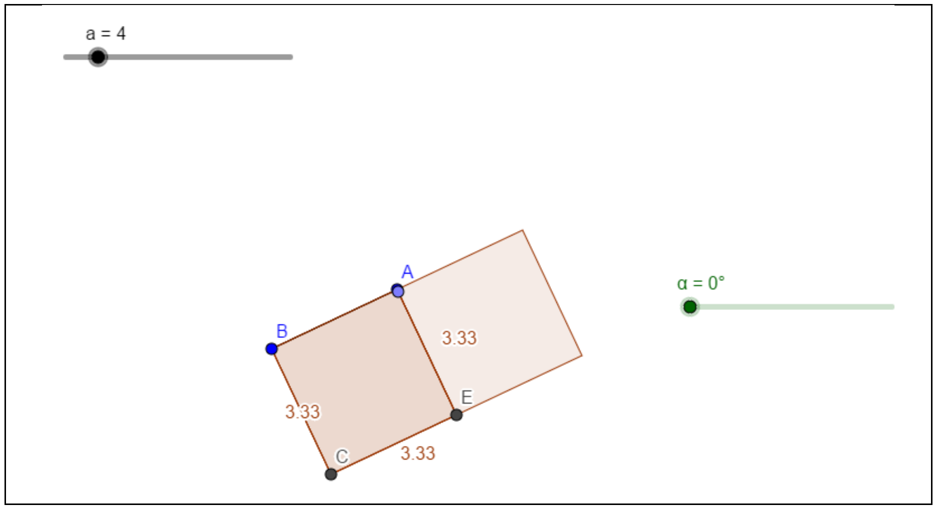


Ilustración 4.13

Modos epistémicos

Establecimiento de prácticas

En este dato interpreto que los estudiantes establecen un nuevo tipo de práctica correspondiente al uso de la opción Rotación con respecto a la manera como la utilizaron para la construcción de la teselación con triángulos. El anterior esquema de utilización que habían desarrollado anteriormente se muestra insuficiente para la construcción de los cuadrados que permitan la teselación, porque en este solo se rota un vértice del cuadrado original, lo cual no facilita construir el cuadrado imagen. En ese caso, los estudiantes se ven obligados a replantear cómo utilizar la opción.

Discernimiento crítico-Separación-Generalización

Teniendo en cuenta que los estudiantes ya habían construido la teselación previamente con triángulos equiláteros, este episodio les permite experimentar el patrón de separación del tipo de polígonos que permite construir la teselación, el cual varía, y la posibilidad de hacer la teselación. También interpreto que generalizan que el valor del ángulo de rotación que permite hacer la teselación corresponde al ángulo interno del polígono regular correspondiente, teniendo en cuenta que, al momento de seleccionar el valor del ángulo de rotación para generar la yuxtaposición, Pedro inmediatamente selecciona el valor 90 grados.

Proceso de Conjeturación

Observación de una propiedad invariante de la situación

Por el uso que los estudiantes hacen de la opción Rotación interpreto que ellos han internalizado que el ángulo que permite la yuxtaposición es precisamente aquel cuya medida corresponde a la medida de los ángulos internos del polígono. En ese sentido, interpreto que los estudiantes han identificado que el hecho que el ángulo de rotación que permite la yuxtaposición corresponde a la medida de los ángulos internos es un invariante para cualquier polígono regular.

Episodio 6 (Actividad 5)

Los estudiantes se encuentran resolviendo el numeral b) de la actividad 5, en el que se les pide explorar la construcción con el fin de determinar qué tipo de polígonos permiten construir teselaciones. Ana arrastra el punto en el deslizador número a hasta que toma el valor 5, con lo cual aparece un pentágono regular como se muestra en la Ilustración 4.14. A continuación, hace click en la opción **Rotación**, luego en el punto E, y posteriormente en el interior del pentágono. Aparece lo que se muestra en la Ilustración 4.15.

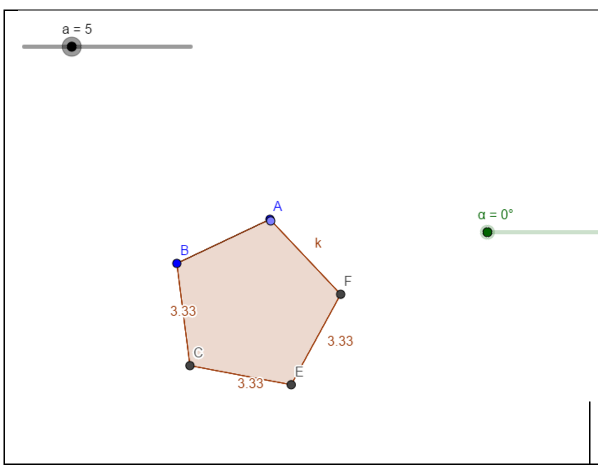


Ilustración 4.14

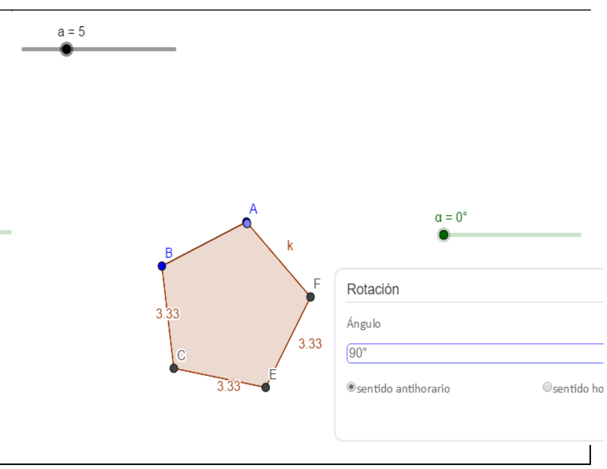


Ilustración 4.15

Ana selecciona la opción **sentido horario**, y da click en OK con lo cual resulta la representación que aparece en la Ilustración 4.16. Al ver esto, Pedro comenta: “Pero (…) eso [el ángulo de rotación] ya no era noventa [grados] (…). Toca medirle los grados [señala el polígono.].

A continuación, Ana borra el pentágono imagen, haciendo click derecho sobre él y seleccionando la opción **Borrar**. A continuación, selecciona la opción **Angulo** y hace click en dos de los lados del pentágono, con lo cual aparece el valor 108, como se ve en la Ilustración 4.17.

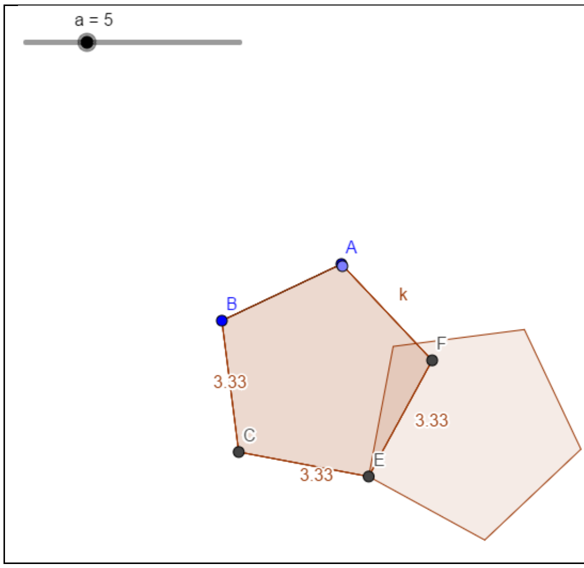


Ilustración 4.16

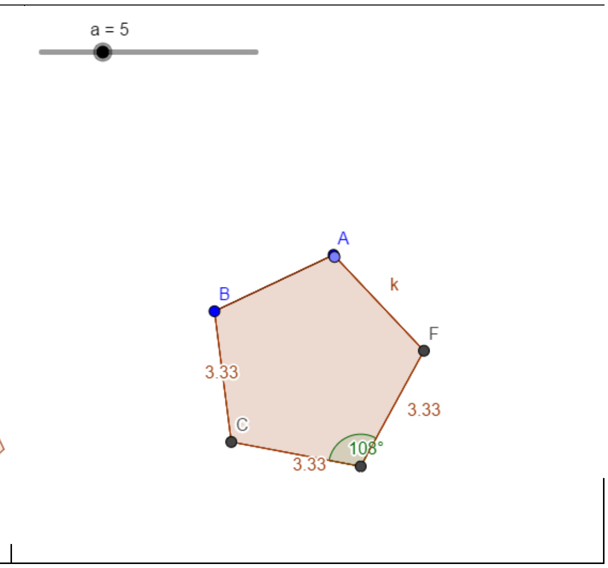


Ilustración 4.17

A continuación, Ana hace click en la opción **Rotación** y ahora, en el cuadro de diálogo donde debe poner el ángulo de rotación, escribe 108 grados. Hace click en Ok y aparece un nuevo pentágono regular como se muestra en la Ilustración 4.18. Repite el procedimiento anterior, y un nuevo pentágono aparece como se muestra en la Ilustración 4.19.

Después de hacer las construcciones se presenta la siguiente conversación:

Ana: Eso me dio mal.

Pedro: Este triángulo [señala el espacio que queda entre el pentágono original y el último que se construyó por rotación] (…) este triángulo va a quedar vacío ahí (…).

Ana: Sí (…) pero no se puede [terminar la construcción].

Pedro: Pues síguelo haciendo para mostrarle al profesor (…).

Ana: No (…) ¿sabe yo que creo? Que va a tocar es desde acá [señala el tercer pentágono debía construirse rotando el pentágono original].

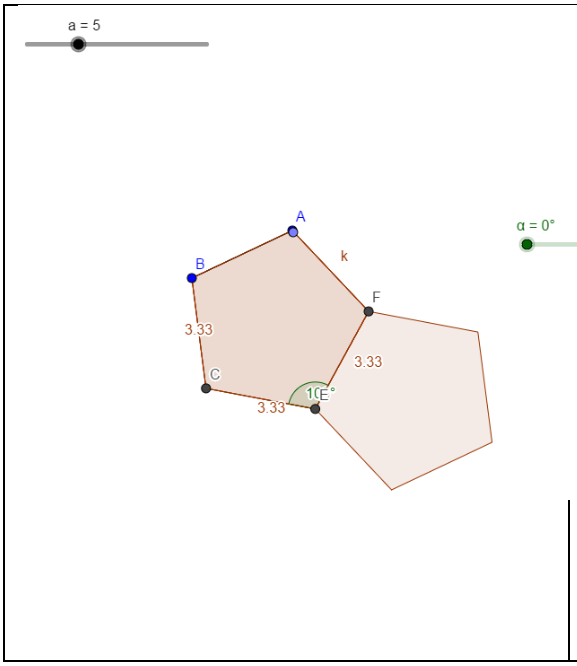


Ilustración 4.18

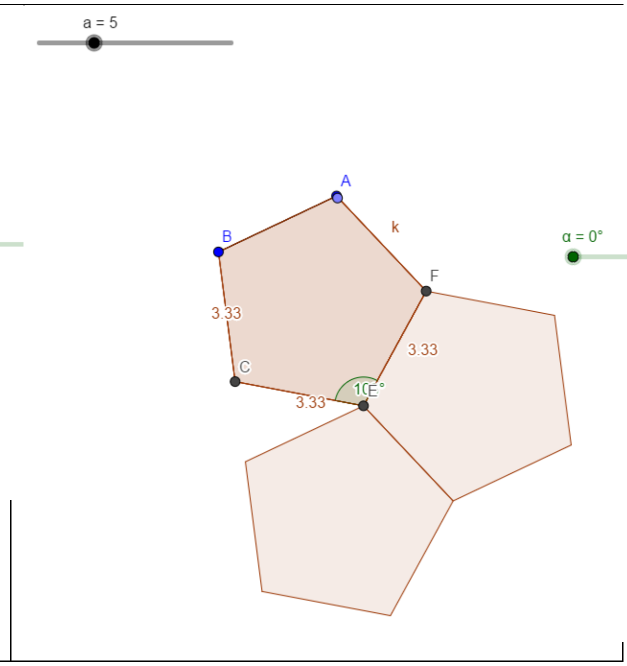


Ilustración 4.19

Ana borra el último pentágono construido, haciendo click derecho sobre él y luego haciendo click en la opción **Borrar.** A continuación, selecciona la opción **Rotación,** y hace click sobre el pentágono original, haciéndolo rotar con respecto al punto C en sentido antihorario. La construcción queda como se muestra en la Ilustración 4.20. Posteriormente, Ana repite el mismo procedimiento ahora realizando la rotación sobre el pentágono recién construido (Ilustración 4.21). En ese momento, Pedro dice: "Pero (…) entonces quedaría aquí en el centro un vacío", haciendo referencia al espacio que se observa entre el pentágono original y el último pentágono construido".

A continuación, Pedro borra el último polígono que construyó hasta que vuelve a quedar como en la Ilustración 4.20 y luego construye un nuevo pentágono como se muestra en la Ilustración 4.22.

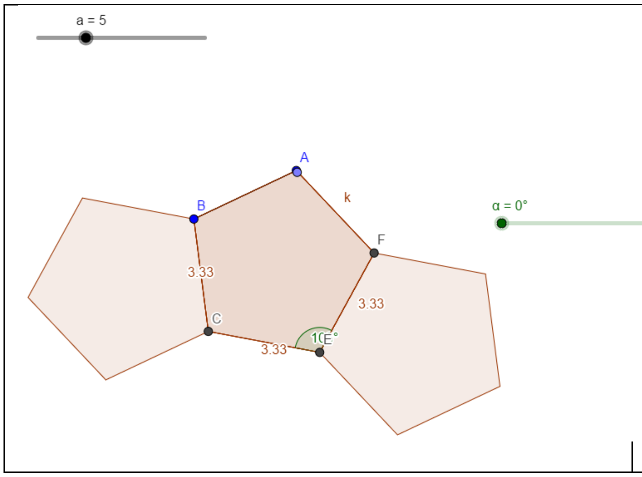


Ilustración 4.20

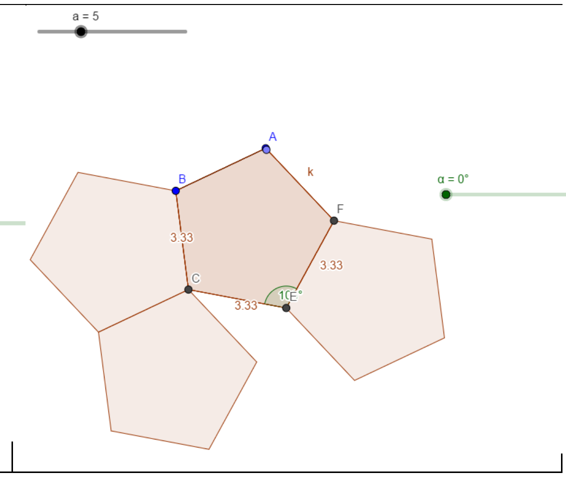


Ilustración 4.21

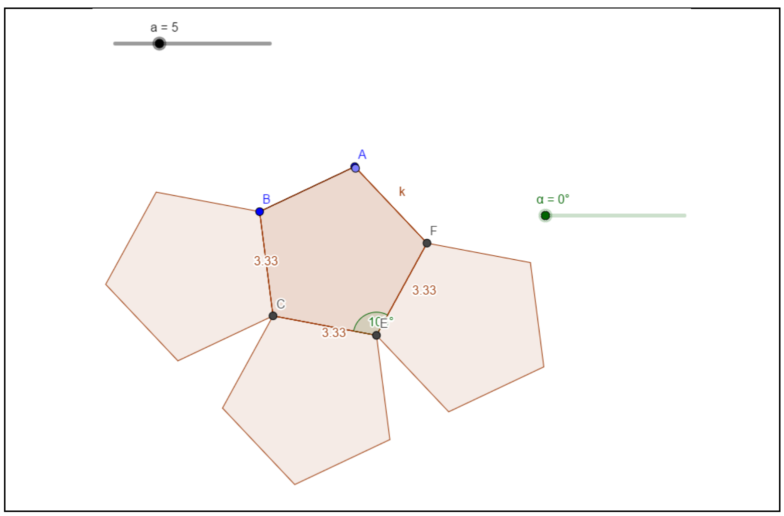


Ilustración 4.22

A continuación, construye otros dos pentágonos, con lo cual la construcción queda como se muestra en la Ilustración 4.23.

Después de esto, deciden llamar al profesor, y cuando este se acerca al grupo, se entabla el siguiente diálogo.

Ana: Profe, ¿aquí cómo hacemos con el pentágono?

Profesor: ¿Qué pasó con el pentágono?

Ana: Pues que queda así [señalando en la pantalla la construcción que se muestra en la Ilustración 4.23]

Profesor ¿Qué hicieron ahí?

Ana Pues teselar (…)

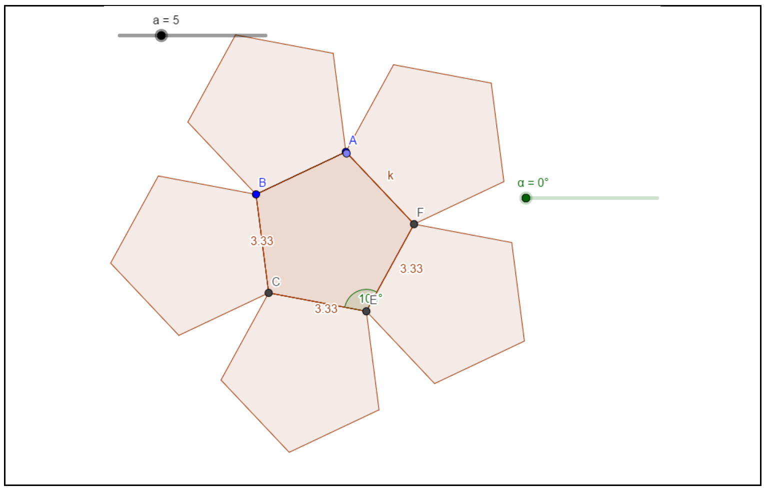


Ilustración 4.23

El profesor les dice que no es esa la construcción que se les pide hacer, ya que no puede haber espacios entre los polígonos que construyan. Entonces Pedro borra los pentágonos que han construido, hasta que queda como se mostró en la ilustración 4.17. A continuación, construye tres pentágonos de la forma en que se muestra en la ilustración 4.24, y Ana le dice que así tampoco se puede construir el arreglo como lo pide la tarea.

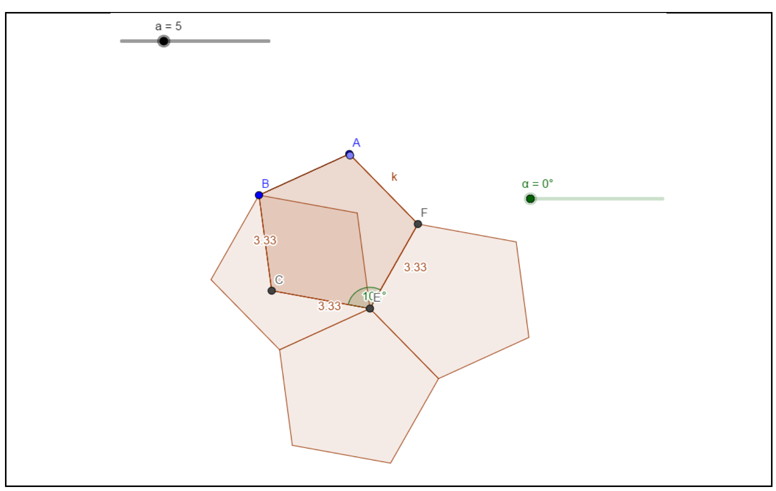


Ilustración 4.24

Modos epistémicos

Establecimiento de prácticas

En la primera parte de este episodio evidencio que los estudiantes empiezan a reconocer la relación que existe entre las medidas de los ángulos internos del polígono y el valor que hay que introducir en el cuadro de diálogo de la opción Rotación para que los polígonos se yuxtapongan. Esto se evidencia cuando Pedro comenta que para determinar el valor que debe ir en el cuadro de diálogo deben medir los ángulos internos del pentágono, después de observar que en el primer intento los pentágonos no se yuxtaponen (Ilustración 4.16)

Discernimiento Critico-Contraste-Generalización

En este episodio los estudiantes experimentan un patrón de contraste, al observar por primera vez un ejemplo de un polígono donde no se puede realizar la teselación, en comparación con el caso de los triángulos y los cuadrados. Este contraste es significativo para los estudiantes teniendo en cuenta que hasta el momento ellos solo habían trabajado con polígonos para los cuales era posible realizar la teselación, por lo cual consideraban que siempre sería posible realizarla. Esto se evidencia en el hecho que los estudiantes tratan de construir la teselación con pentágonos de diversas formas, incluso llegando a realizar construcciones que no correspondían a lo solicitado.

La sugerencia de Pedro de medir los ángulos internos del pentágono para determinar el valor de la rotación confirma que los estudiantes han generalizado el hecho que el ángulo de rotación que permite la yuxtaposición es igual a la medida del ángulo interno para cualquier polígono regular.

Proceso de conjeturación

Verificación de la Conjetura

El hecho que los estudiantes intentaran construir la teselación con pentágonos de diversas maneras, a pesar de la imposibilidad de ello, indica que los estudiantes tenían internalizada la generalización de que con cualquier polígono se puede realizar la teselación. En ese sentido, a pesar de que no lo expresaron de manera verbal, infiero que establecieron una conjetura que con todos los polígonos se podía teselar el plano, lo cual correspondería a la fase 3 del modelo de Cañadas (2008). Posteriormente realizaron un proceso de verificación con el pentágono con lo que refutaron esa conjetura.

Episodio 7 (Actividad 5)

Después de haber explorado la construcción de las teselaciones con los diferentes polígonos que permite construir el archivo de la tarea, los estudiantes completan la tabla que se les presenta en la actividad 5 de la tarea (Tabla 4.1). A continuación, Ana lee la el numeral c) de la actividad, en la que se les pide establecer la relación entre el número de polígono y el ángulo de rotación que permite hacer la teselación. Se presenta la siguiente conversación

Ana	Pues el ángulo de rotación sí es el valor del ángulo interno de la figura
Pedro	Pero como relacionarlo con el número de (…)
Ana	Exacto, con el número de polígonos. (…) ¿sesenta por seis cuanto da?
Pedro	360.
Ana	¡Eso es! ¿noventa por cuatro?(…) Entonces eso quiere decir (…) el ángulo de rotación es el valor del ángulo interno de la figura y (…) no sé cómo voy a escribirlo (…)
Pedro	Sería como (…) al multiplicar el valor del ángulo (…) por el número de polígonos (…)
Ana	Da 360 grados (…) en todos los casos.
Pedro	(…) que son posibles.
Ana	En todos los casos posibles de teselación (…).

***Tabla 4.1* Resolución Actividad 5, numeral (b). Grupo 1**

Numero de lados del polígono	Polígonos necesarios para hacer la teselación	Ángulo de rotación necesario para la teselación.
3	6	60°
4	4	90°
5	no se puede, queda solapado, con espacios	
6	3	120°
7	no se puede, queda solapado, con espacios	
8	no se puede, queda solapado, con espacios	

Modos epistémicos

Discernimiento Crítico-Generalización-Fusión

Los estudiantes disciernen el invariante esperado, a partir de la generalización de una relación aritmética entre el número de polígonos y el ángulo de rotación requerido para realizar la teselación. Puedo observar que dicha generalización se fundamenta en la tabla 4.1, la cual es un instrumento que les permite experimentar visualmente los distintos patrones de variación. De manera más específica puedo identificar como, con esta tabla, los estudiantes experimentan la separación entre el tipo de polígonos y las medidas de los ángulos de rotación necesarios para generar la teselación. Establecen un contraste entre polígonos que pueden teselar y que no pueden teselar. Además, a partir de la conversación sobre los datos contenidos en la tabla los estudiantes logran generalizar una propiedad con respecto a la relación que existe entre las medidas de los ángulos de rotación y el número de polígonos necesario para realizar la teselación, lo cual permite fusionar estos dos aspectos al experimentar simultáneamente cómo varían.

Establecimiento de discurso situado

Observo en este episodio que los estudiantes intentan construir un discurso a partir de lo que han discernido, y tratan de situarlo en el marco de las operaciones aritméticas básicas. A pesar que no formulan sus descubrimientos en un lenguaje formalizado, se identifica la inquietud de los estudiantes, especialmente de Ana, por encontrar una manera precisa de formular lo que han descubierto.

Proceso de conjeturación

Formulación de una conjetura

En este episodio se observa que los estudiantes inician, de manera incipiente, el proceso de formular una conjetura acerca de la relación que existe entre los datos que aparecen en la Tabla 4.1. Como afirmo, esa formulación no se hace de manera explícita, sin embargo se evidencia la intención de plantear una afirmación generada a partir de la observación de los diversos invariantes que han experimentado en el desarrollo de la tarea.

4.2 ANÁLISIS DEL TRABAJO REALIZADO POR EL GRUPO 2

Episodio 1 (Actividad 1)

Los estudiantes inician la resolución de la Tarea 1, actividad 1, en la cual se solicita mover el punto que se encuentra sobre el deslizador α de dos maneras distintas: una de ellas, arrastrando directamente el punto con el puntero del ratón, y la otra, oprimiendo simultáneamente la tecla CTRL y algunas de las flechas de dirección del teclado. A continuación, Manuel coloca el puntero del ratón en el punto que se encuentra sobre el deslizador, como se muestra en la Ilustración 4.25, y arrastra el punto hasta que el valor de α se hace igual a 96 grados, como se muestra en la Ilustración 4.26.

Manuel arrastra el punto del deslizador hasta su configuración original (0 grados) y usa las flechas de dirección izquierda y derecha del teclado, haciendo rotar el triángulo hasta que el valor de α es de 360 grados. En las Ilustraciones 4.27, 4.28 y 4.29 se observa la secuencia de lo que sucedió en la pantalla cuando Manuel realizó esta acción. Se ve que Manuel arrastra el punto en el deslizador α, lo cual genera la aparición de un triángulo imagen del triángulo original que rota con respecto al vértice C.

Después de hacer los arrastres descritos, los estudiantes conversan sobre cómo explicar lo que sucede:

Manuel: [La imagen del triángulo] Rota.

Alejandra: Pues, los grados van variando. Entonces, por lo tanto, [la imagen del triángulo] se mueve mediante un punto fijo que sería C.

Manuel, Sí.

Alejandra: Entonces el polígono, que en este caso sería un triángulo, va variando sus ángulos [de rotación]; entonces va rotando mediante un punto fijo.

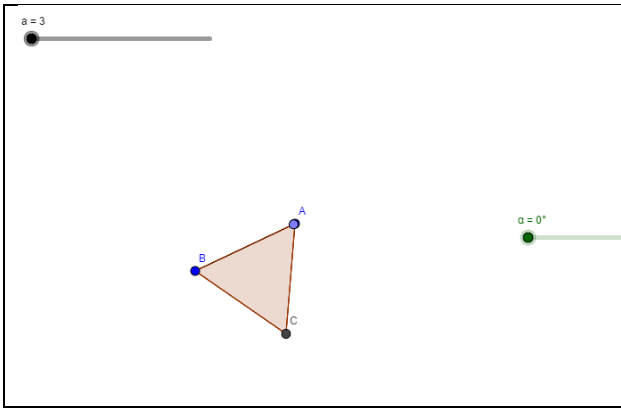


Ilustración 4.25

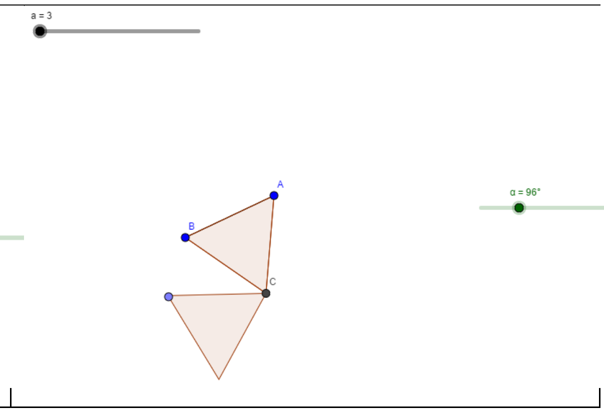


Ilustración 4.26

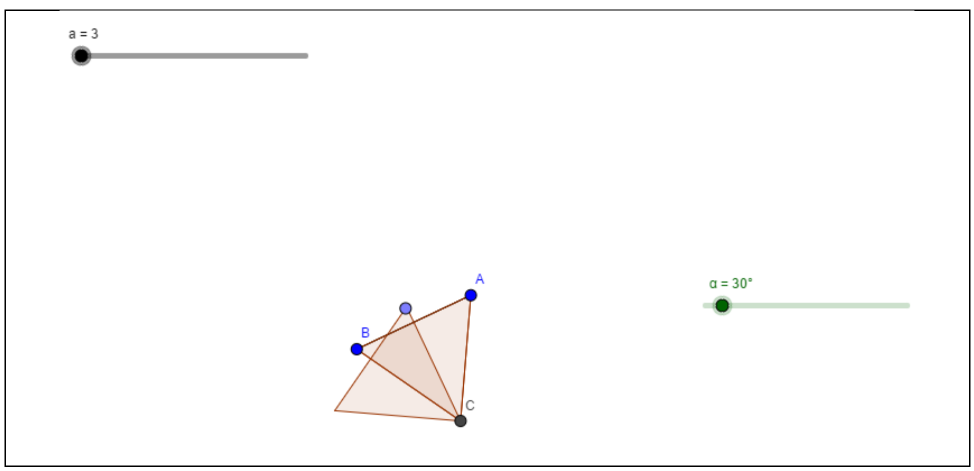


Ilustración 4.27

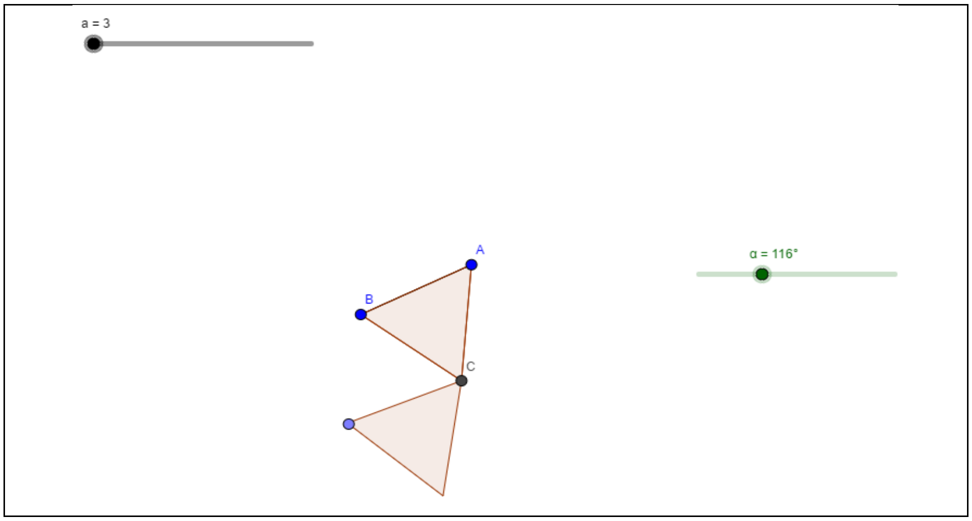


Ilustración 4.28

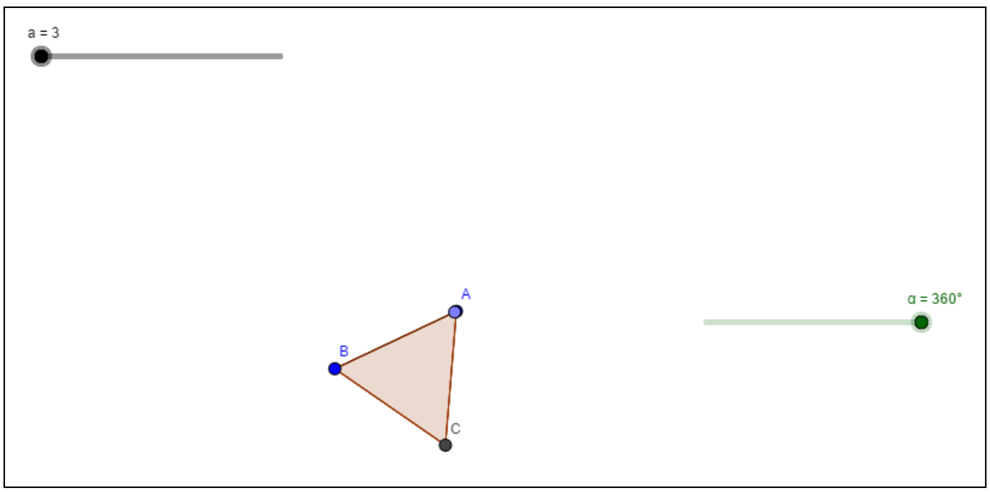


Ilustración 4.29

A continuación, Alejandra escribe en la hoja de trabajo lo siguiente:

“Se observa que al deslizar el punto α los grados del triángulo ABC van variando mediante un punto fijo que es C"

En este episodio los estudiantes identifican el efecto que el deslizador α tiene sobre la construcción, en particular que el arrastre del punto en el deslizador produce la aparición de un nuevo triángulo imagen del original que rota a medida que se produce el arrastre. También identifican que la rotación se produce con respecto a un vértice fijo del triángulo, que sería el punto C.

Modos epistémicos

Establecimiento de Prácticas

En este episodio se observa que los estudiantes instrumentalizan el deslizador al identificar sus propiedades. A diferencia del grupo 1, los estudiantes no profundizan en que la manera como se arrastra el punto en el deslizador influye en el sentido de rotación del triángulo, ni en cuál es la diferencia en operar el deslizador con el ratón o con el teclado. Concluyo que hay menos profundidad en el proceso de instrumentalización desarrollado por los estudiantes de este grupo con respecto al grupo 1.

Proceso de conjeturación.

Manipulación de una situación dinámicamente por medio de la continuidad de casos

Al igual que en el grupo 1, el proceso de instrumentalización desarrollado por los estudiantes de este grupo se logra mediante la manipulación dinámica del deslizador, a partir de la cual los estudiantes buscan identificar cual es la propiedad que describe el funcionamiento del mismo.

Episodio 2 (Actividad 2)

Después de haber medido los lados y ángulos internos del triángulo que aparece originalmente en la construcción, los estudiantes arrastran el deslizador α con el fin de determinar qué tipo de ángulos permiten construir un cubrimiento del plano alrededor de un punto (teselación por rotación), usando triángulos equiláteros.

Después de leer la actividad 2 de la tarea 1, acerca de cuánto debe medir el ángulo de rotación del triángulo alrededor de un vértice (C) para que aparezcan dos triángulos yuxtapuestos, Ana arrastra continuamente el deslizador $\propto$, usando las flechas del teclado, hasta que los triángulos que aparecen en la representación quedan yuxtapuestos (Ilustración 4.30). Pero ella no habla, ni sus compañeros tampoco. En las hojas de trabajo responden la pregunta así: “La relación que existe es que forma un rombo cuando el punto α está en 60° y el ángulo ACB de igual manera es 60°”.

Mientras Ana escribe lo anterior en las hojas de trabajo, Manuel dice: “Del otro lado también se podrá hacer lo mismo…”. Después de lo cual, Manuel arrastra nuevamente el deslizador $\propto$ hasta que el triángulo imagen queda en la posición que se muestra en la Ilustración 4.31.

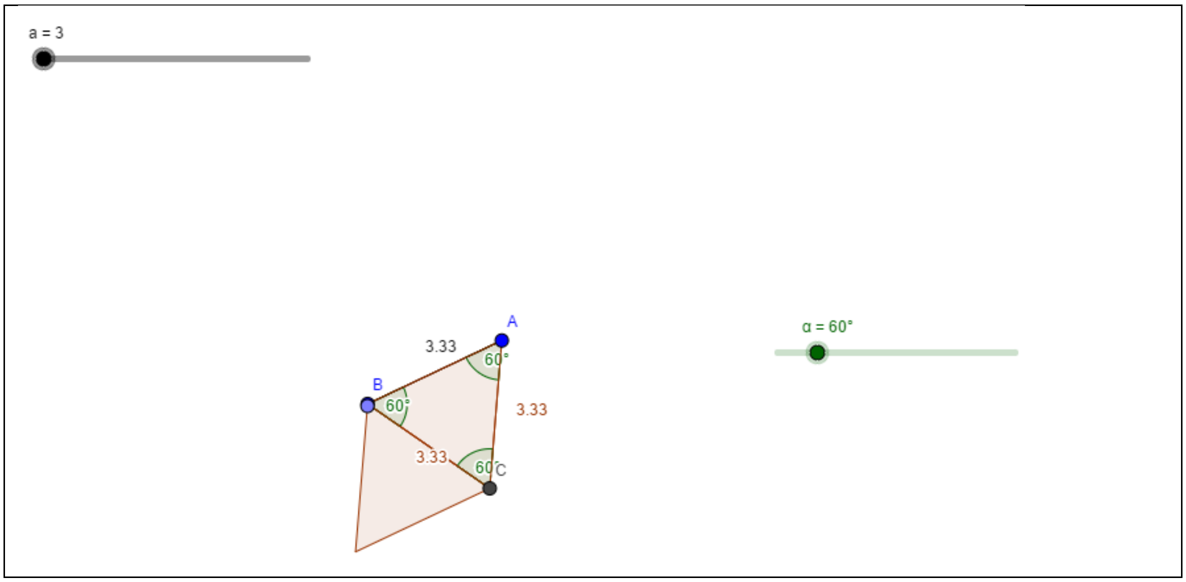


Ilustración 4.30

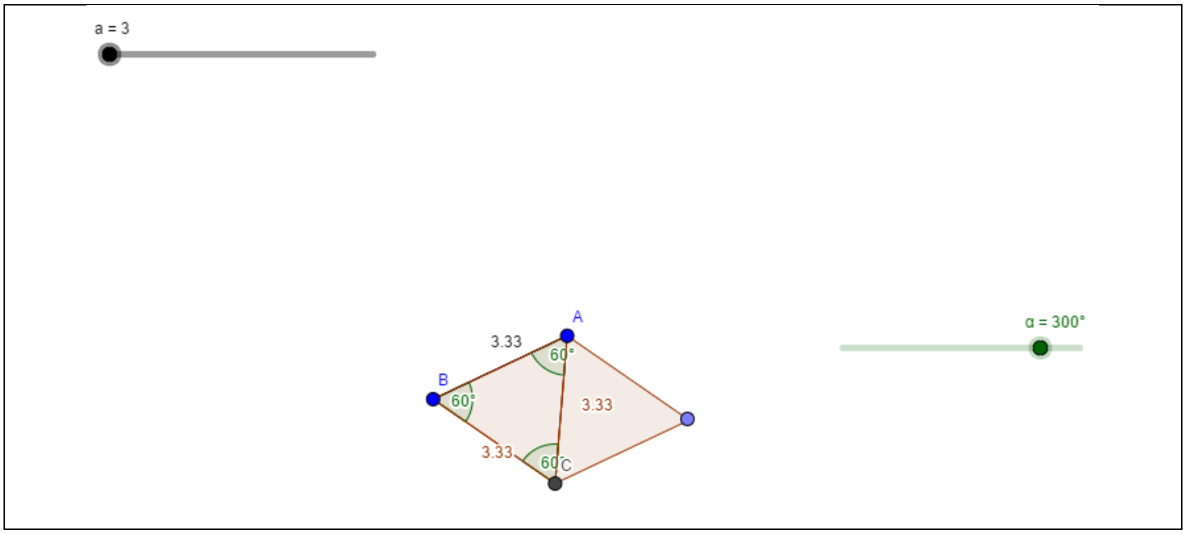


Ilustración 4.31

Posteriormente, al informar al profesor acerca de la exploración, se presenta el siguiente diálogo:

Manuel: La relación que vimos fue que el ángulo de 60 grados era quien cubría ese [espacio], y que era sin la solapación.

Profesor: ¿Y esa es la única forma en que no se solapen?

Alejandra: No, si lo seguimos rotando, hasta (…) trescientos, se vuelve a formar la misma figura y no se solapan (…)

Modos epistémicos

Establecimiento de prácticas

En este episodio identifico el mismo proceso de instrumentalización describí en el análisis del grupo 1 (Episodio 3). En este proceso, los estudiantes desarrollan un esquema de utilización del deslizador α que les permita yuxtaponer los dos triángulos.

Discernimiento crítico-Contraste

De la misma manera que sucedió con el grupo 1, los estudiantes experimentan el contraste entre valores de α donde se presenta la yuxtaposición y los valores donde no, al arrastrar de manera continua el punto que se encuentra en el deslizador.

Proceso de conjeturación

Manipulación de una situación dinámicamente por medio de la continuidad de casos

Los estudiantes manipulan la construcción al arrastrar el punto en el deslizador α para poder encontrar los valores que permiten la yuxtaposición de los triángulos. En ese sentido, la actividad desarrollada por los estudiantes de este grupo coincide con la desarrollada por los estudiantes del grupo 1 en el episodio 3.

Episodio 3 (Actividad 3)

Alejandra lee el punto 3, en el cual se solicita que usen la herramienta rotación para construir triángulos que se yuxtapongan al triángulo original. A continuación, Manuel mueve el puntero por los diferentes menús hasta encontrar la opción **Rotación**. Posteriormente se presenta la siguiente conversación:

Manuel: O sea que se tiene que dar acá. [Señala con el puntero del ratón el vértice C].

Alejandra: No, el triángulo.

Manuel: [Da click primero en el triángulo, y luego en el punto C; aparece un cuadro de diálogo en el centro de la pantalla, como se muestra en la Ilustración 4.32:

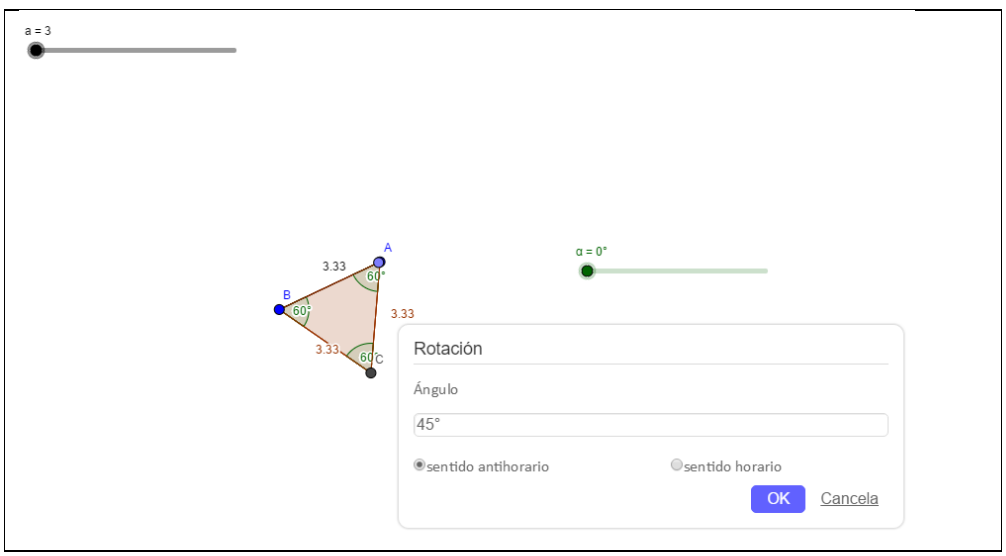


Ilustración 4.32

A continuación, introduce el valor 45° y hace click en el botón OK. Se genera una figura como se muestra en la Ilustración 4.33

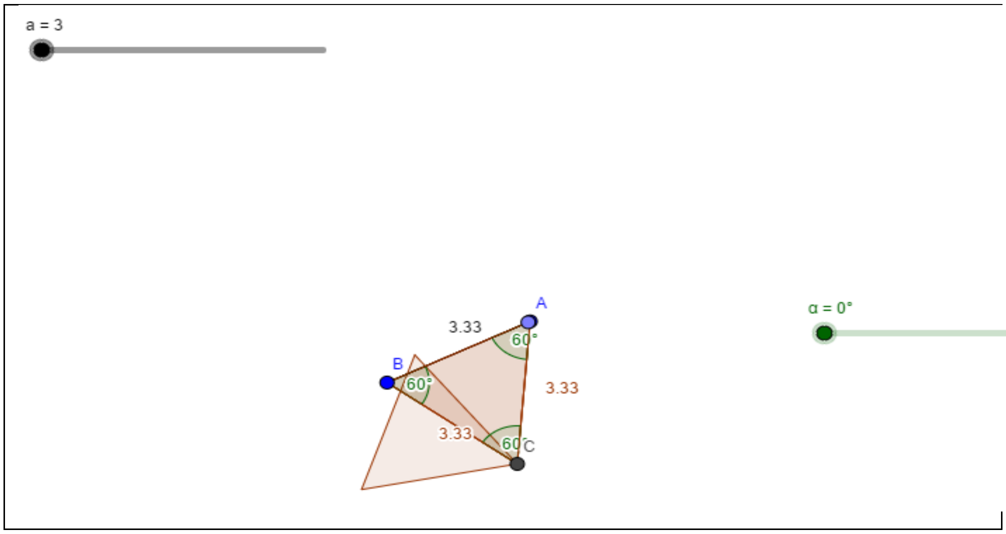


Ilustración 4.33

Alejandra: No, porque tiene que ser 60 grados. Porque te dice que rote, pero que no se superponga (…) [Dirigiéndose a Manuel] Borra.

Manuel: [Borra el triángulo que apareció en el paso anterior, haciendo click en este y luego oprimiendo la tecla SUPR del teclado].

Alejandra: Entonces, (…) [Opción] Rotación, [punto] C, y el triángulo.

Manuel: [Sigue las instrucciones, y aparece el cuadro de diálogo].

Alejandra; Pon 60 [en el cuadro de diálogo] Listo. (Aparece la siguiente imagen en la pantalla):

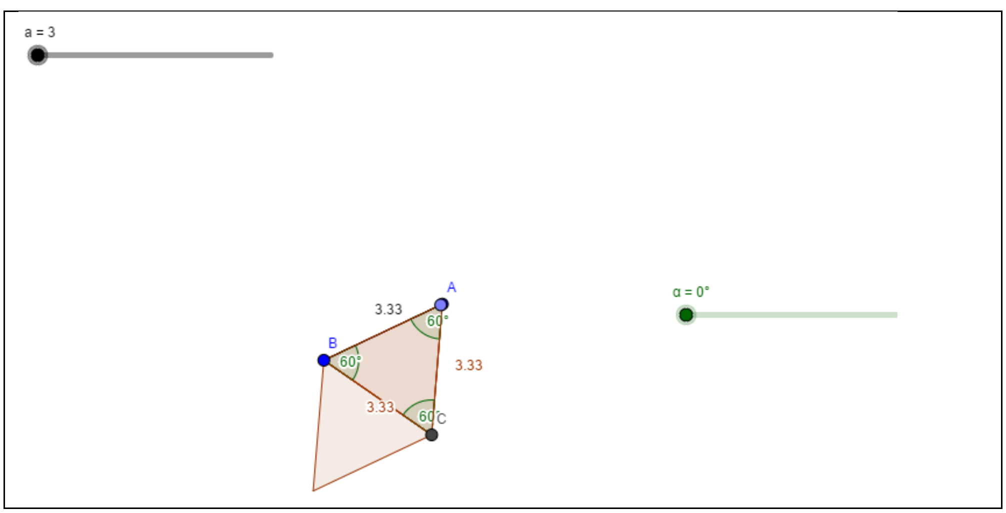


Ilustración 4.34

Vuélvelo a hacer.

Manuel: [Realiza el mismo proceso anterior, pero ahora hace click en el triángulo original y luego en el punto C]

Alejandra: Pero (…) 6 y 6 (…), doce (…) 120 [grados].

Manuel: [Cuando aparece el cuadro de diálogo, Manuel escribe en 120 en el ángulo, Aparece la siguiente imagen:

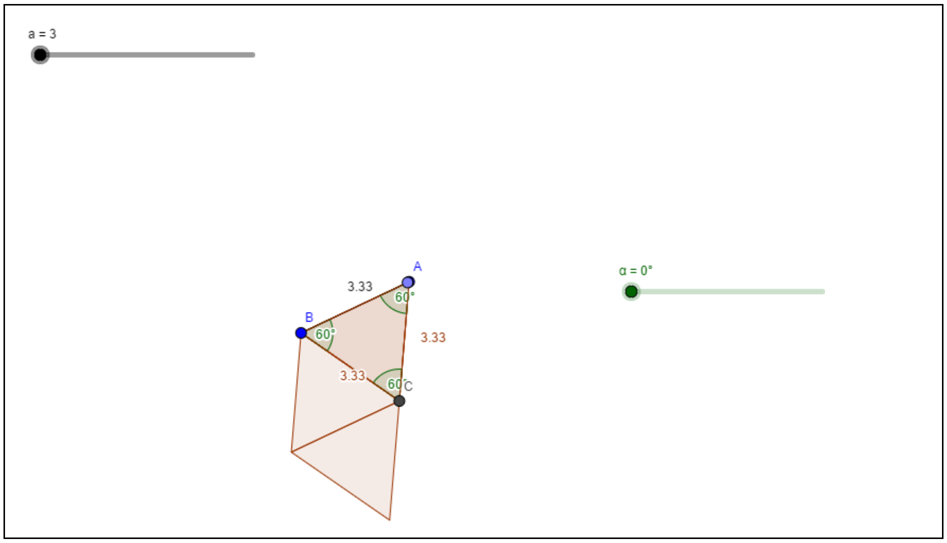


Ilustración 4.35

Modos epistémicos

Establecimiento de Practicas

En este episodio infiero el establecimiento de prácticas de los estudiantes con respecto a la opción **Rotación**. Como se discutió en el marco teórico de este trabajo, este modo epistémico se asocia a un proceso de génesis instrumental, el cual se refleja en este dato. El proceso de instrumentalización de la opción Rotación en este caso corresponde al establecimiento del orden en que deben seleccionarse los elementos de la construcción para producir la rotación deseada, como se observa al principio del episodio en el que los estudiantes discuten brevemente si primero se selecciona el triángulo o el punto con respecto al cual se va a rotar.

La instrumentación de la opción Rotación emerge de la identificación que los estudiantes han hecho previamente del valor de α que permite la yuxtaposición. Esto les permite establecer que este valor corresponde a la medida del ángulo que deben escribir en la ventana de diálogo de la opción Rotación para obtener la teselación deseada.

A diferencia del grupo 1, el esquema de utilización desarrollado por los estudiantes de la opción Rotación sí les permite rotar todo el polígono, desde el primer intento

Discernimiento Crítico-Contraste-Separación-Generalización

Los estudiantes experimentan el contraste entre los valores de α que permiten la yuxtaposición entre los triángulos y los valores que no lo permiten, y la separación del número de triángulos y la posibilidad de realizar la yuxtaposición, En el caso de este grupo, a diferencia del Grupo 1 (Episodio 4), los estudiantes construyen la teselación haciendo la rotación siempre a partir del triángulo original en vez de hacerlo sobre el triángulo recién construido. Lo anterior lleva a que no solo separen la cantidad de triángulos, sino también el valor del ángulo que deben seleccionar cuando usan la herramienta Rotación. En ese sentido, la generalización que hacen los estudiantes de este grupo es distinta a la del Grupo 1, ya que a la hora de hacer la construcción ellos tienen en cuenta cuantos triángulos han construido para determinar el ángulo de rotación (60 °, 120°…).

Proceso de conjeturación

Observación de una propiedad invariante de la situación

Infiero que los estudiantes identifican una propiedad invariante acerca del valor del ángulo que permite la teselación. Más específicamente, los estudiantes generalizan que el valor del ángulo de rotación con respecto al triángulo original debe corresponder a la medida del ángulo interno del triángulo (60 grados) multiplicado tantas veces como el número de triángulos que se desee construir. Ellos no lo dicen explícitamente, pero al hacer la rotación tienen en cuenta este hecho para determinar el valor del ángulo de rotación necesario para que no se yuxtapongan los triángulos.

Episodio 4 (Actividad 5)

Después de haber arrastrado el punto en el deslizador a hasta que toma un valor de 4 y obtener la construcción que aparece en la Ilustración 4.36, los estudiantes leen la actividad 5, la cual les pide que exploren la construcción que aparece en la pantalla con el fin de determinar cuáles son los polígonos regulares que permiten hacer la teselación. Al leerlo, los estudiantes se muestran confusos acerca del significado de la palabra teselación, por lo cual deciden consultar el término en Internet.

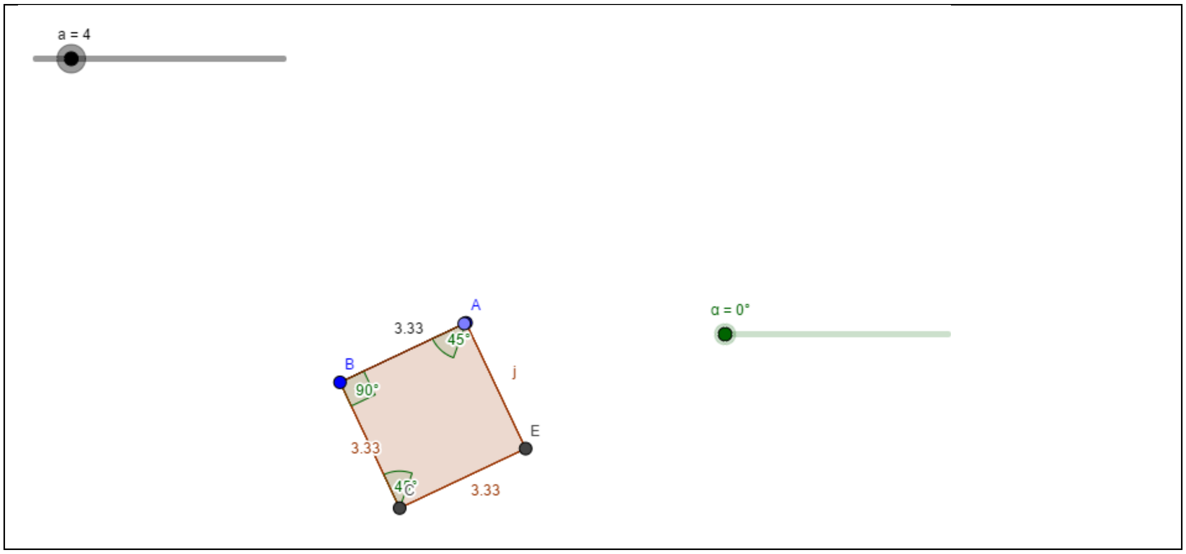


Ilustración 4.36

Después hacer la consulta y verificar que un teselado es una construcción como la que realizaron con los triángulos en la tarea 1, proceden a hacer lo mismo con el cuadrado que les aparece en la construcción. Hacen click en la herramienta Rotación. A continuación, en el punto D, y cuando van a escoger el ángulo de rotación en el cuadro de diálogo, Alejandra dice que con un ángulo de 90 grados. A continuación, repiten el procedimiento, pero esta vez con un ángulo de 180 grados, luego con 270, hasta que aparece la siguiente construcción:

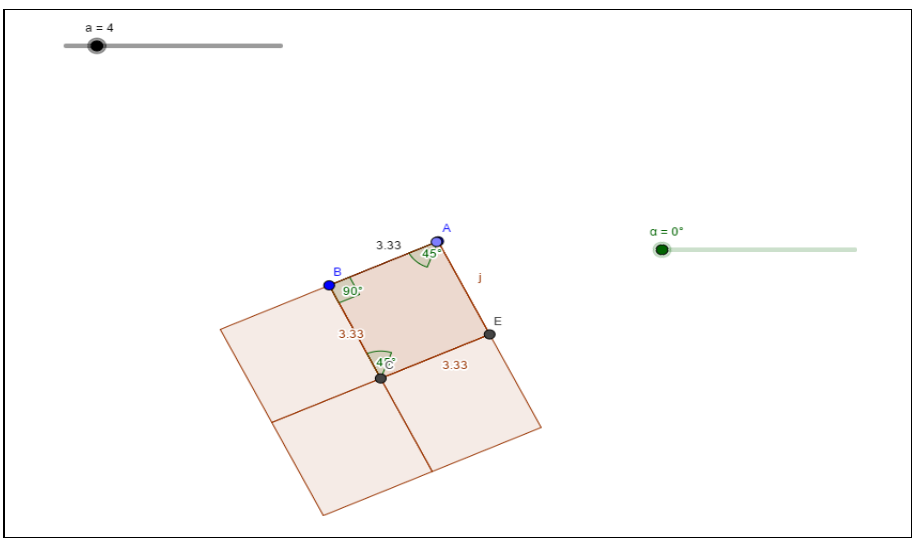


Ilustración 4.37

Modos epistémicos

Discernimiento crítico-Separación

Infiero que los estudiantes experimentan la separación entre la teselación y el tipo de polígonos con el que se puede realizar. Los estudiantes se dan cuenta que el triángulo equilátero no es el único polígono regular que permite realizar la teselación.

Proceso de conjeturación

Observación de una propiedad invariante de la situación

Teniendo en cuenta la relación discutida en el marco teórico acerca del proceso de discernimiento de invariantes planteado en la Teoría de la variación de Marton (1997) y la fase de observación de invariantes del modelo de conjeturación de Cañadas (2008), infiero en este episodio que los estudiantes transitan por esta fase, al identificar de manera casi inmediata cual es el ángulo de rotación que corresponde a la teselación hecha con cuadrados.

Episodio 5 (Actividad 5)

Después de haber resuelto el numeral (a) de la actividad 5, los estudiantes dialogan con el profesor acerca de la exploración que realizaron al construir teselaciones con triángulos y cuadrados, rotando una figura inicial alrededor de un vértice. Le informan que han calculado las medidas de algunos de los ángulos internos y de algunos de los lados de los polígonos utilizando las opciones del software Ángulo y Longitud.

A continuación, leen el numeral b) de la actividad 5, y proceden a intentar construir una teselación con el pentágono. Inician arrastrando el deslizador a hasta que toma el valor 5, tal como se muestra en la Ilustración 4.38. En la Ilustración 4.38 se observa que aparecen también las medidas de los ángulo BAC y ACB correspondientes a ángulos internos del triángulo ABC que aparecía en la representación cuando el deslizador a tenía el valor de 3.

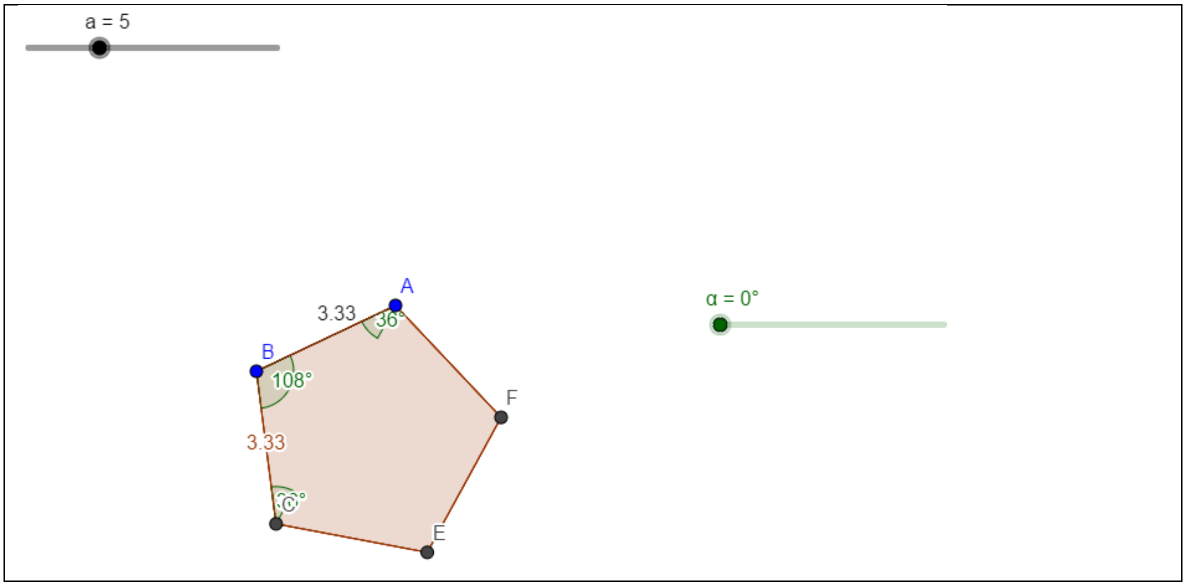


Ilustración 4.38

Luego hacen click en la opción “Rotación”, del menú de GeoGebra, luego en el pentágono, y al abrirse el cuadro de diálogo en donde hay que introducir el ángulo de rotación, sucede el siguiente diálogo:

Alejandra:	De cuanto sería [el ángulo]; de (…) ¿35? o ¿[de] 108 [grados]?
Ana:	Intentemos 108.
Manuel:	¿De cuánto?
Alejandra:	108.
Manuel:	[Escribe el número en el cuadro de diálogo, da click en Ok y aparece la imagen del pentágono correspondiente a la rotación indicada; Ilustración 4.39].

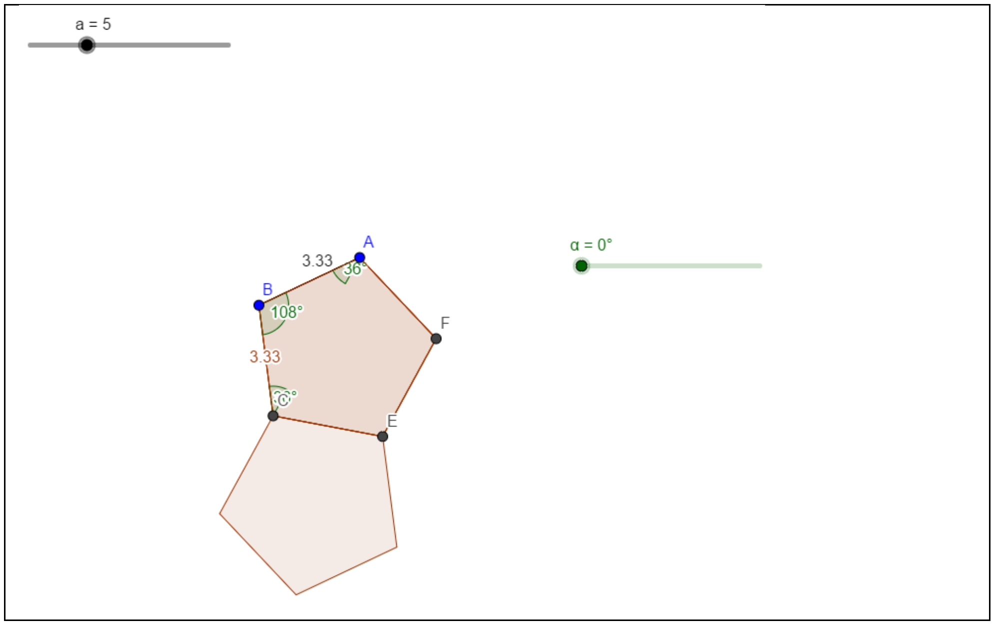


Ilustración 4.39

[Repite el procedimiento con el pentágono imagen para hacer una nueva rotación; Ilustración 4.40]

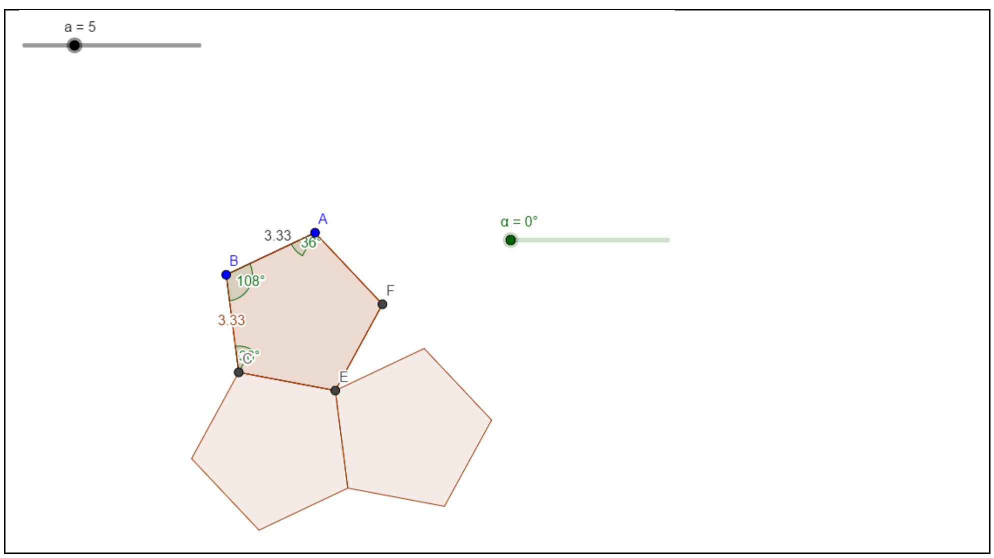


Ilustración 4.40

]

Ana: ¡Y ya! [Parece indicar que la construcción ya estaría terminada],

Alejandra: ¡Pero quedaría un espacio en blanco!

Ana: Entonces, sería el de 35 [grados].

Alejandra: Pues démosle con el de 35.

A continuación, Manuel borra las imágenes del pentágono inicial y utiliza nuevamente la opción "Rotación" del programa, pero esta vez con un ángulo de 35 grados. Después de hacer la rotación una vez, obtiene una construcción como la de la Ilustración 4.41.

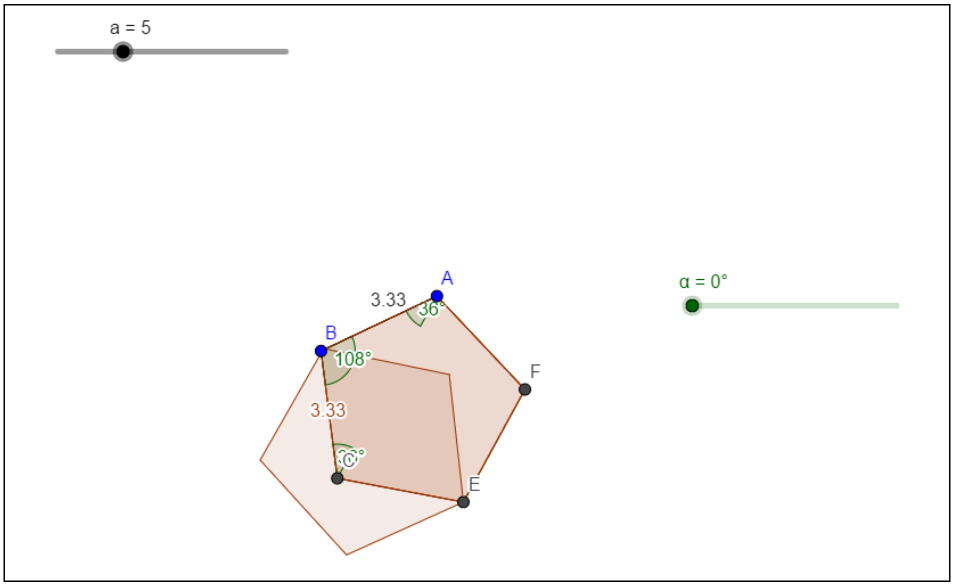


Ilustración 4.41

Debido a la configuración obtenida, los estudiantes discuten acerca de nuevas formas de utilizar la opción "Rotación" para poder hacer la construcción solicitada en la tarea. Alejandra propone que en vez de seleccionar en el cuadro de diálogo de la opción Rotación el sentido antihorario, escojan el sentido horario. Después de intentarlo, modificando el valor del ángulo de rotación con valores como 108° o 35°, o cambiando el centro de rotación a distintos vértices infructuosamente, obtienen varias figuras como las que se muestran en la Ilustración 4.42 y la Ilustración 4.43.

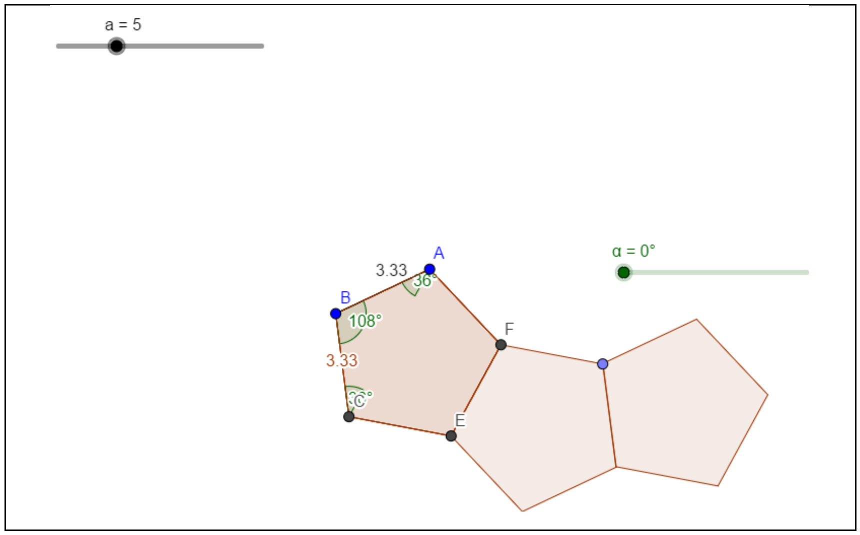


Ilustración 4.42

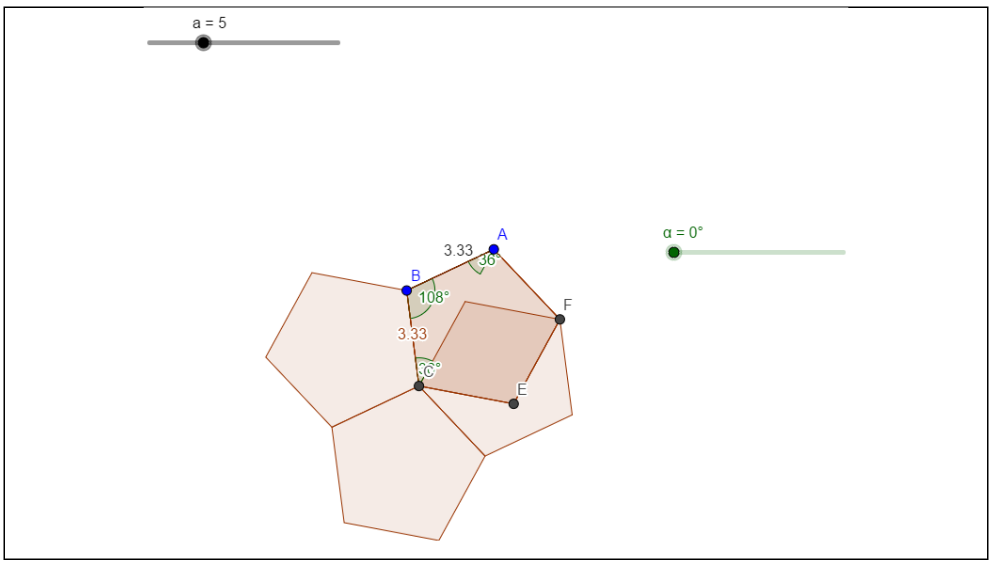


Ilustración 4.43

Después de haber realizado todas las construcciones que se han descrito anteriormente, se entabla el siguiente diálogo entre los estudiantes:

Manuel: Es que podemos seguir haciendo lo mismo (…) nos va a quedar es un hueco (…).
Alejandra: No se puede [realizar la teselación].

Manuel: ¿No se puede?

Alejandra: No.

Modos epistémicos

Establecimiento de prácticas

En la primera parte de este episodio se evidencia que los estudiantes empiezan a reconocer la relación que existe entre las medidas de los ángulos internos del polígono y el valor que hay que introducir en el cuadro de diálogo de la opción Rotación para que los polígonos se yuxtapongan. Esto se evidencia en el hecho que Ana, en algún momento, propone que el valor debería ser 35 grados, porque es una de las medidas que aparece en el pentágono. Sin embargo ella no se da cuenta que ese valor corresponde realmente al valor de los ángulos BCA y CAB, los cuales no son ángulos internos del pentágono. En ese sentido, los estudiantes realizan la instrumentación de la opción Rotación, identificando un esquema de uso de la ventana de esta opción para poder realizar la teselación solicitada.

Este proceso de instrumentación transcurre de manera paralela a una reflexión acerca de la instrumentalización de la opción Rotación, que emerge del hecho de que, a diferencia de los casos anteriores, donde se podía realizar la teselación, en este caso esto no es posible. Esto los obligó a una nueva exploración de las características de esta opción, especialmente sobre la manera como la información que hay que escribir en la ventana de esta opción afecta la construcción.

Discernimiento crítico-Contraste-Generalización

Los estudiantes experimentan la existencia de un polígono con el cual no es posible realizar una teselación, construcción que sí habían podido hacer con el triángulo equilátero y con el cuadrado. En ese sentido, ellos experimentan el patrón de contraste al identificar polígonos con los que no se puede realizar la teselación y polígonos con los que sí se puede realizar. También observo que los estudiantes de este grupo han generalizado para cualquier polígono que el valor del ángulo de rotación debe corresponder a la medida de los ángulos internos del polígono

Proceso de conjeturación

Verificación de la conjetura

El contraste experimentado por los estudiantes en este episodio involucra un proceso de verificación de una generalización que parece habían internalizado, la cual es que cualquier polígono tesela el plano. Como en el Grupo 1, se observa que los estudiantes intentan de diversas maneras construir la teselación con pentágonos, porque están seguros que debe poderse realizar de alguna forma. En ese sentido, este episodio representa según el modelo de Cañadas (2008) un proceso de verificación de una conjetura, que, al no resultar exitoso, conlleva al replanteamiento de la generalización que se busca.

Episodio 6 (Actividad 5)

Después de haber hecho la verificación de cuáles polígonos sirven para realizar una teselación (triángulos, cuadrados, hexágonos) y cuáles no (pentágonos, heptágonos, octágonos, nonágonos y decágonos), los estudiantes diligencian la Tabla 4.2 que se les solicita en el numeral b) de la Actividad 5. Esta queda de la siguiente forma:

***Tabla 4.2* Resolución Actividad 5, numeral (b). Grupo 2, primera versión.**

Número de lados del polígono	Polígonos necesarios para hacer la teselación	Ángulo de rotación (aplicado al polígono o a sus imágenes) necesario para la teselación.
3	6	60
4	4	90
5	No se puede	No se puede
6	7	120
7	No se puede	No se puede
8	No se puede	No se puede

A continuación, Alejandra lee la pregunta (c), en la cual se les solicita que establezcan una relación entre el número de polígonos que se requiere para hacer la teselación y el ángulo de rotación necesario a partir de cada imagen lograda por rotación. Inicialmente, los estudiantes se encuentran confundidos sobre lo que quiere decir la pregunta. Llaman al profesor para tratar de aclararlo. El profesor les dice que deben mirar qué relación observan entre los números de la segunda y tercera columna de la tabla, para los polígonos donde sí se pudo realizar la teselación. Entonces, se presenta la siguiente conversación:

Alejandra: […] Cuando (…) la suma de todos los ángulos dé [igual a] 360 (…) porque se supone que tiene que dar la (…) vuelta entera.

Camila: Mira el hexágono.

Manuel procede a realizar la teselación con el hexágono nuevamente, obteniendo la representación de la Ilustración 4.44

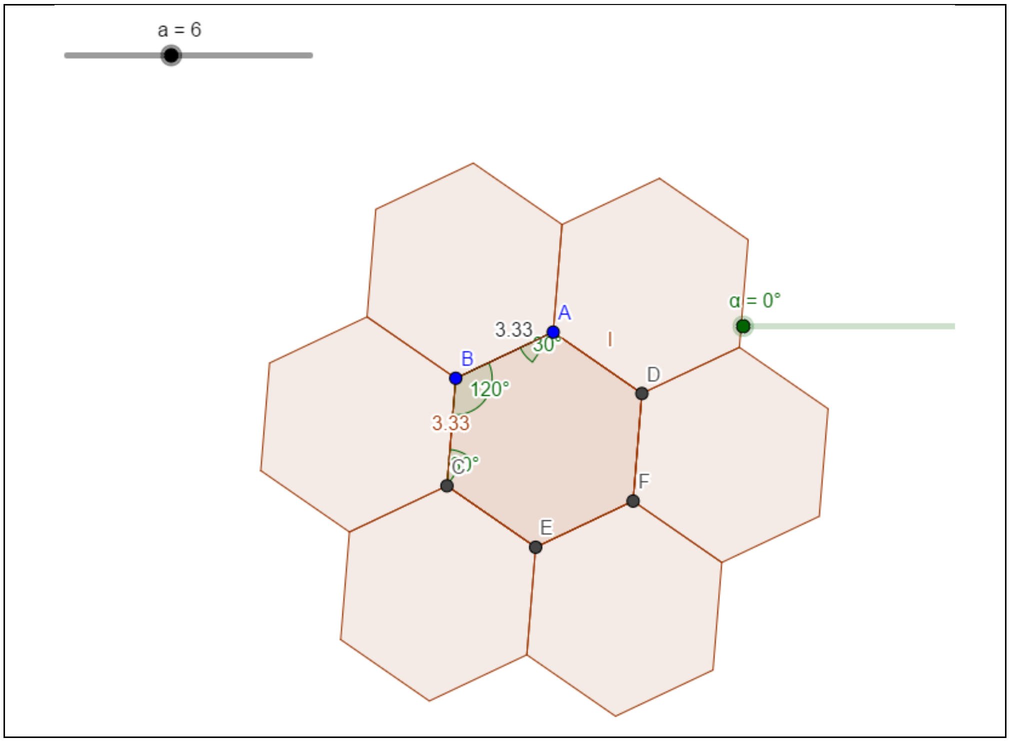


Ilustración 4.44

Al ver esto, Alejandra se retracta de la afirmación hecha. Afirma que como son seis las rotaciones que se hicieron para realizar la construcción, la suma de los ángulos internos de los polígonos da 720 y no 360 grados.

Modos epistémicos

Discernimiento crítico-Generalización

Alejandra experimenta el patrón de generalización de la propiedad de que la suma de los ángulos internos de los polígonos que teselan el plano debe ser igual a 360 grados. Esta generalización emerge de haber experimentado los patrones de contraste y separación, lo que la lleva a percibir que la rotación tiene que ser de tal forma que el último polígono que se obtenga como imagen por rotación del anterior tiene que yuxtaponerse con el primero. Ella hace referencia a esto cuando afirma que "se supone que tiene que dar la vuelta entera". En esta generalización, Alejandra no tiene en cuenta los datos específicos que aparecen en la tabla, los cuales, tal y como se encuentran en ese momento, no apoyan la afirmación que hace. Esto se debe a que la construcción que este grupo hace (Ilustración 4.38) no corresponde a la que se solicita en la tarea.

Esta generalización experimentada por Alejandra moviliza a sus compañeros (en especial a Manuel) a replantear la construcción, ya que debido a la manera equivocada como los estudiantes entendieron como debía realizarse genera una contradicción entre los datos contenidos en la tabla y la generalización propuesta por Alejandra.

Discurso situado

Evidencio el establecimiento de un discurso situado en el ambiente de geometría dinámica, cuando Alejandra afirma que la suma de los ángulos internos de los polígonos que teselan el plano debe ser igual a 360 grados. Este discurso no tiene la formulación matemática esperada, porque se pretendía que la afirmación hiciera referencia a una relación numérica entre el número de lados del polígono y el valor que debe tomar el ángulo de rotación para que se produzca yuxtaposición. Esto parece deberse al hecho que como la tabla no contiene la información correcta, debido al error en la construcción realizada por los estudiantes, la generalización realizada por Alejandra está basada en la idea de que los polígonos deben "dar la vuelta entera" en la construcción.

Proceso de conjeturación

Observación de una propiedad invariante de la situación

En este episodio Alejandra detecta una propiedad invariante que deben cumplir los polígonos para poder construir la teselación. Infiero ello del hecho de que cuando afirma que la suma de los ángulos internos de todos los polígonos en la construcción debe ser igual a 360 grados. Este invariante no surge de lo que observa en la tabla, la cual presenta errores, sino de la intuición que tiene acerca de que los ángulos internos de los polígonos sumados deben dar una vuelta entera.

Formulación de la conjetura

A partir del invariante observado, Alejandra formula una conjetura acerca de la condición que deben cumplir los polígonos para que se pueda realizar la teselación. Esta conjetura no corresponde a la que se había presupuestado cuando se diseñó la tarea. La razón parece estar en que esperar que los estudiantes dieran el salto de establecer una relación entre el número de lados que debe tener un polígono para poder realizar una teselación y el ángulo de rotación de estos polígonos a partir de unos pocos datos de una tabla es en sí bastante ambicioso. Sin embargo, la conjetura formulada por Alejandra a partir de la percepción que ella tiene sobre las características que deben tener los polígonos que hacen parte de la teselación surge como un paso intermedio, que no fue presupuestado por mí, para poder llegar a establecer la relación que se desea los estudiantes identifiquen.

Verificación de la conjetura

A partir de la conjetura formulada por Alejandra, se presenta una propuesta por parte de Ana de verificar si efectivamente lo sugerido por Alejandra se cumple en el hexágono. Desafortunadamente esa verificación lleva a rechazar momentáneamente la conjetura debido a la deficiencia en la construcción realizada previamente. Pese a ello, se observa como las preguntas que hacen parte de la tarea guían a los estudiantes a través de un proceso donde se ven en la necesidad de plantear sus propias afirmaciones a partir de lo que observan tanto en la construcción como en la información contenida en la tabla.

Episodio 7 (Actividad 5)

Los estudiantes revisan el punto (e) de la actividad 5 de la tarea 2 que pide completar la siguiente oración:

"Si el ángulo interno de un polígono regular es ________________________entonces es posible hacer una teselación del plano con ese polígono." Al respecto, se presenta el siguiente diálogo:

Ana:	Si el ángulo interno de un polígono regular es 60, 90 y 120
Alejandra:	Son múltiplos de 3…¿Para el nonágono se puede?, si para el nonágono se puede es múltiplo de 3 [la respuesta]

A continuación, Manuel arrastra el deslizador a hasta que toma el valor de 9, y con la opción Rotación construye un nonágono imagen del original. Para ello, usa un ángulo de 140 °. Al construir el segundo nonágono imagen, los estudiantes observan que se traslapan y se dan cuenta que con el nonágono no es posible hacer la teselación. A partir de ahí, concluyen que la afirmación hecha por Alejandra acerca de que el número de lados del polígono debe ser múltiplo de 3 para que se pueda hacer la teselación no es correcta.

Modos epistémicos

Discernimiento crítico

En este episodio se describe como Alejandra experimenta la generalización de una propiedad que ella identifica a partir de los datos de la tabla. Sin embargo, esa generalización, que consiste en considerar que los polígonos con los cuales se puede construir la teselación son aquellos cuya medida de sus ángulos internos debe ser múltiplos de 3, es puesta en duda por la misma Alejandra. Ella se confunde en si lo que debe ser múltiplo de 3 deben ser la medida de los ángulos internos o el número de lados del polígono. Eso conlleva a que la generalización que había percibido, que a pesar de no ser la esperada, sea descartada cuando es verificada a partir de la manipulación de la construcción en GeoGebra.

El hecho que la generalización que surge en este momento no corresponde a la que se esperaba cuando se diseñó de la tarea parece estar relacionada con las limitaciones de la construcción que se les presentó a los estudiantes. El deslizador, al no permitir una exploración más amplia de los polígonos, ya que solo varían en su número de lados, no favorece que los estudiantes puedan identificar un invariante geométrico en la construcción, y por lo tanto las generalizaciones experimentadas corresponden a características numéricas de los valores que observan en la tabla.

En ese sentido esta generalización no parece provenir de los patrones de contraste y separación experimentados previamente, sino que surge exclusivamente de la identificación de una relación numérica trivial en los valores de la tabla.

Proceso de Conjeturación.

Observación de una propiedad invariante de la situación

En este episodio se observa como Ana y Alejandra identifican un invariante en los polígonos que permiten realizar la teselación, que aparentemente está basado en la medida de los ángulos de estos polígonos. Este invariante es observado por ellas a partir de la información contenida en la tabla.

Formulación de la conjetura

Al igual que en el dato anterior, se observa como Ana y Alejandra formulan una conjetura acerca del tipo de polígonos regulares que permiten la construcción de una teselación, a partir del invariante observado cuando se revisa la tabla. Sin embargo, el planteamiento de esta conjetura es confuso, debido a que cuando Alejandra afirma "es múltiplo de 3", no queda claro si se refiere al número de lados del polígono o a la medida de los ángulos internos del polígono.

Verificación de la conjetura

Ante la afirmación que hacen Ana y Alejandra, Manuel procede a verificarla con el nonágono, asumiendo que la afirmación se está haciendo sobre el número de lados del polígono. Al observar que no es cierto, proceden a rechazar la conjetura.

Episodio 8 (Actividad 5)

Los estudiantes han explorado los diferentes polígonos que surgen al arrastrar el deslizador a, identificando con cuáles de ellos se puede construir la teselación y con cuáles no. Para ello, han medido un ángulo interior de cada polígono y utilizando esta medida como ángulo de rotación, han utilizado la herramienta Rotación para verificar cuando la construcción se puede realizar sin que se presenten espacios ni solapamientos. Una vez hecha esta identificación, los estudiantes han escrito lo que han observado en la tabla que se muestra a continuación, para dar respuesta a la pregunta 5 de la tarea.

Tabla 4.3 ***Resolución Actividad 5, numeral (b). Grupo 2, segunda versión***

Número de lados del polígono	Polígonos necesarios para hacer la teselación	Ángulo de rotación (aplicado al polígono o a sus imágenes) necesario para la teselación.
3	6	60
4	4	90
5	No se puede	No se puede
6	7	120
7	No se puede	No se puede
8	No se puede	No se puede

El profesor se acerca al grupo y establece el siguiente diálogo con los estudiantes:

Profesor: ¿Que encontraron en esa tabla [del punto 5 de la tarea] ustedes?

Alejandra: Que no se podían hacer unas teselaciones (…).

Profesor: ¿Cuáles no?

Alejandra: Pentágono, heptágono y…octágono.

Profesor: ¿Y en cuáles si se puede?

Manuel: Triángulo, cuadrado y hexágono.

Profesor: ¿Y cuál es el ángulo (…)? Por ejemplo, en el (…) hexágono, ¿cuál es el ángulo [de rotación]?

Todos: 120 [grados].

Profesor: ¿Y cuántos hexágonos necesitaron? (…) (Mira la tabla) ¿Siete?

Alejandra: Sí.

Profesor: Dejen ver [cómo hicieron la construcción], por favor.

Manuel arrastra el deslizador a hasta que toma un valor de 6 y comienza a realizar la teselación. Cuando aparecen tres hexágonos en la pantalla, producto de dos rotaciones con relación al vértice *C*, como se muestra en la Ilustración 4.45, el profesor le pide que suspenda lo que está haciendo e inicia el siguiente diálogo:

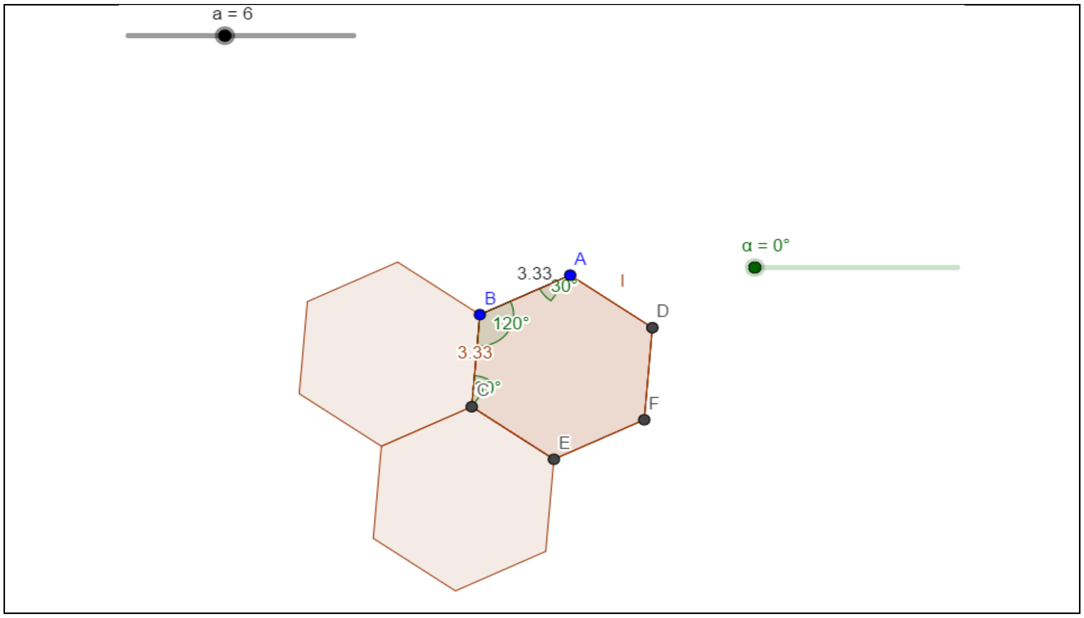


Ilustración 4.45

Profesor: ¿Y para que más [hexágonos]? (…) ¿Ahí no se cumplió ya lo que queríamos?

Alejandra: Pero se puede formar todo (…)

Profesor: No. Pero yo les dije (..) yo lo cojo, y lo cierro [se refiere a que la rotación se haga hasta que el último polígono se yuxtaponga al primero].

Alejandra: Mmm.

Profesor: ¿Sí o no? ¿Entonces, cuántos [polígonos] son en realidad?

Alejandra: Tres [hexágonos].

Profesor: [Mientras se retira del grupo]. Ya lo demás es pegarle las demás baldosas (…).

Manuel: [Cuando el profesor ya se ha ido] Eso era lo que yo pensaba ¿Para qué le damos toda la vuelta (…)? Porque igual siempre es con respecto al punto C. (corrige el valor que aparece en la columna “Polígonos necesarios para hacer la teselación” correspondiente al hexágono, escribiendo 3 en vez de 7)

Camila: Entonces la relación entre los polígonos necesarios y el ángulo (…). La relación es que (…).

Alejandra: ¡Ay! Entonces ahora sí (…) sí. Entonces sí estaba bien (…) se dan tantos polígonos como el ángulo alcance para llegar a 360 [grados].

Modos epistémicos

Discernimiento Crítico

En este episodio se observa como los estudiantes retoman el patrón de generalización experimentado en el Episodio 6, pero ahora tomando en cuenta la corrección que les hace el profesor sobre la manera en que estaban haciendo la construcción. Aquí se observa como la generalización que hizo Alejandra, con base a su intuición acerca de cómo debía generarse la teselación, en esta ocasión se ve respaldada por la información contenida en tabla ya corregida; esto a partir de los patrones de contraste y de separación que han experimentado los estudiantes al observar la variación de los datos al cambiar el número de lados del polígono.

La generalización experimentada por los estudiantes se establece en términos de una relación entre el número de polígonos y la medida de los ángulos internos de cada uno de ellos, sin tener en cuenta el número de lados del polígono. En ese sentido la caracterización esperada cuando se diseñó la tarea no se logra, a pesar de que si se observa que los estudiantes experimentan la existencia de una propiedad invariante en los polígonos que permiten construir la teselación.

Discurso Situado

Alejandra confirma la generalización que había planteado en el Episodio 6. La manera de expresar la generalización se hace de manera más cercana a la esperada, estableciendo una relación numérica entre el número de polígonos y el ángulo de rotación.

Proceso de conjeturación

Observación de una propiedad invariante de la situación

En este episodio se observa como Alejandra, después de haber corregido la información contenida en la tabla, confirma la identificación del invariante que había sido rechazada en el episodio descrito en el Episodio 6.

Formulación de una conjetura

En base al invariante observado, después de la corrección de la tabla, Alejandra vuelve a formular la conjetura que había sido rechazada en el Episodio 6.

Generalización de la conjetura

Como describí en el marco teórico, afirmo que los estudiantes han generalizado una conjetura cuando tienen la certeza que esta es cierta. Se puede observar que Alejandra adquiere esa certeza cuando al final del episodio afirma con seguridad con su conjetura es correcta. Observo como la adquisición de esa certeza por parte de Alejandra emerge del proceso de verificación que se había realizado anteriormente, y de la corrección de la información contenida en la tabla

Episodio 9 (Actividad 5)

Alejandra lee la pregunta (d) de la Actividad 5 en la que se le pie completar la oración "Si el ángulo interno de un polígono regular es__________ entonces es posible hacer una teselación el plano con él". A continuación, Alejandra dice que la oración se completa con la frase "múltiplo de 3", pero Ana le replica que como no se pudo con el nonágono, entonces no sería cierta la afirmación. Se establece la siguiente discusión.

Alejandra No espera porque (…) en el nonágono no se daba (…) 150 [el valor del ángulo interno] Espera, pon el nonágono [le dice a Pedro, haciendo referencia a que arrastre el deslizador α hasta que aparezca un nonágono]

Pedro [Arrastra el punto α hasta que toma un valor de 9. A continuación, arrastra el deslizador α hasta que los dos nonágonos se yuxtaponen, como se muestra en la Ilustración 4.46

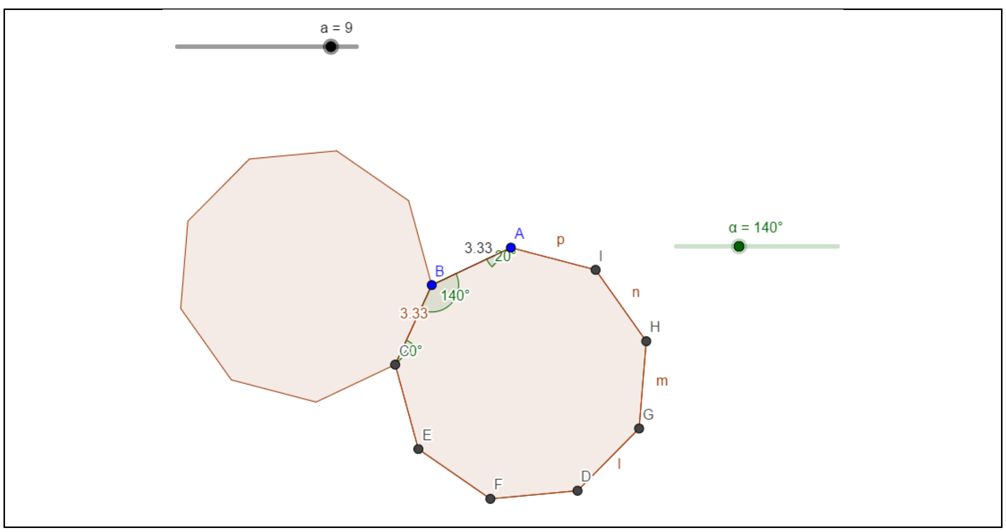


Ilustración 4.46]

Alejandra Mira, es 140 [el ángulo donde se solapan](…) Si lo ponemos en 150(…)

Pedro [Arrastra el deslizador α hasta que toma el valor de 150, quedando de la siguiente forma

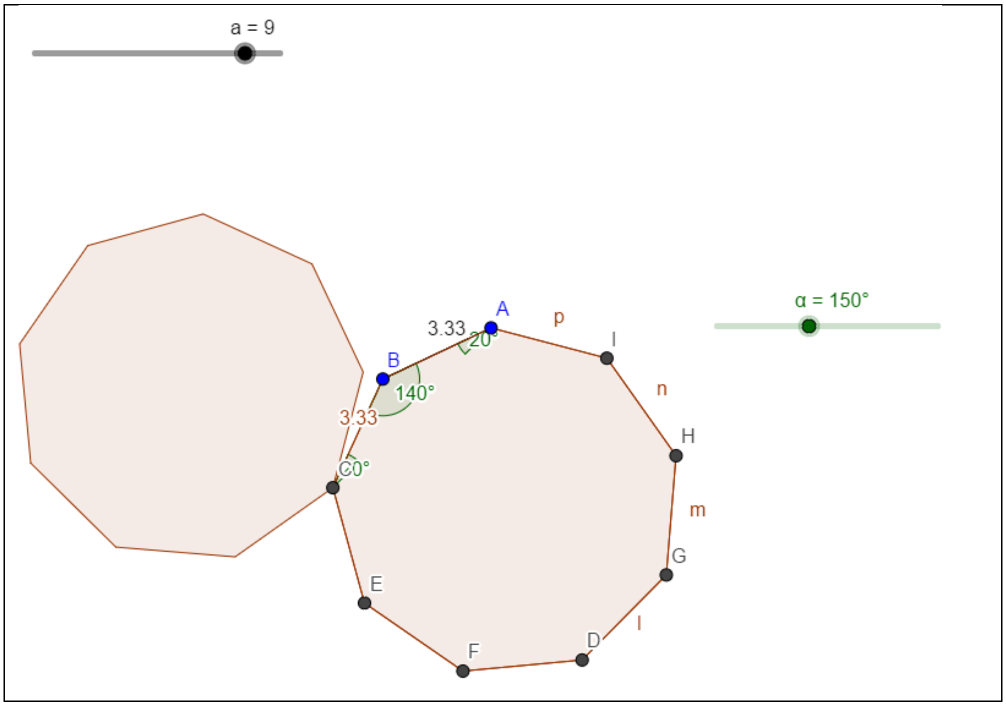


Ilustración 4.47]

Alejandra No, no da [la yuxtaposición](…) Pon el decágono

Pedro [Arrastra el deslizador α hasta que toma un valor de 10, quedando asi la construcción:

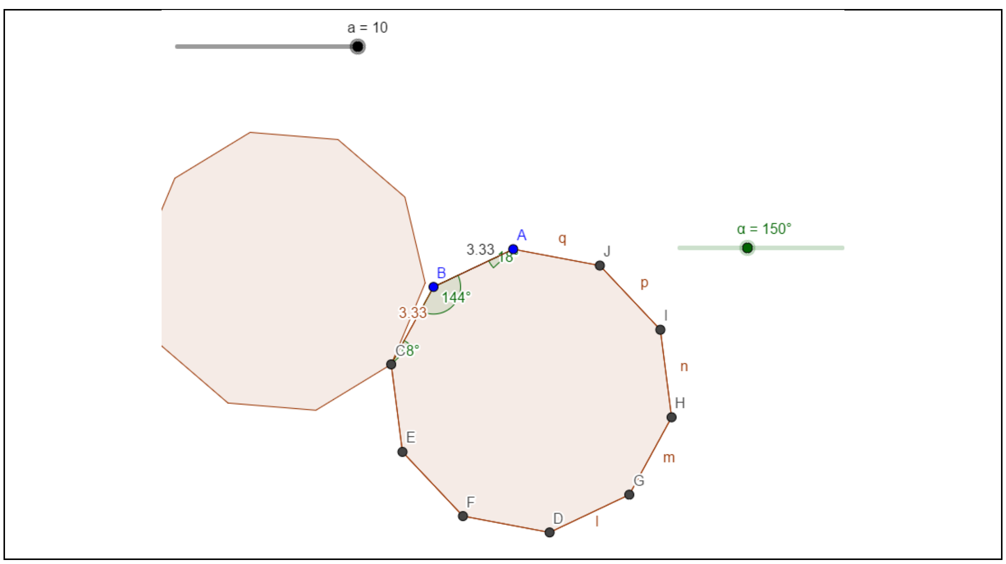


Ilustración 4.48]

Alejandra ¿Qué ángulo tiene? [Aquí hace referencia al ángulo que permite la yuxtaposición de los decágonos]

Pedro [Arrastra el deslizador α hasta que los decágonos se yuxtaponen,

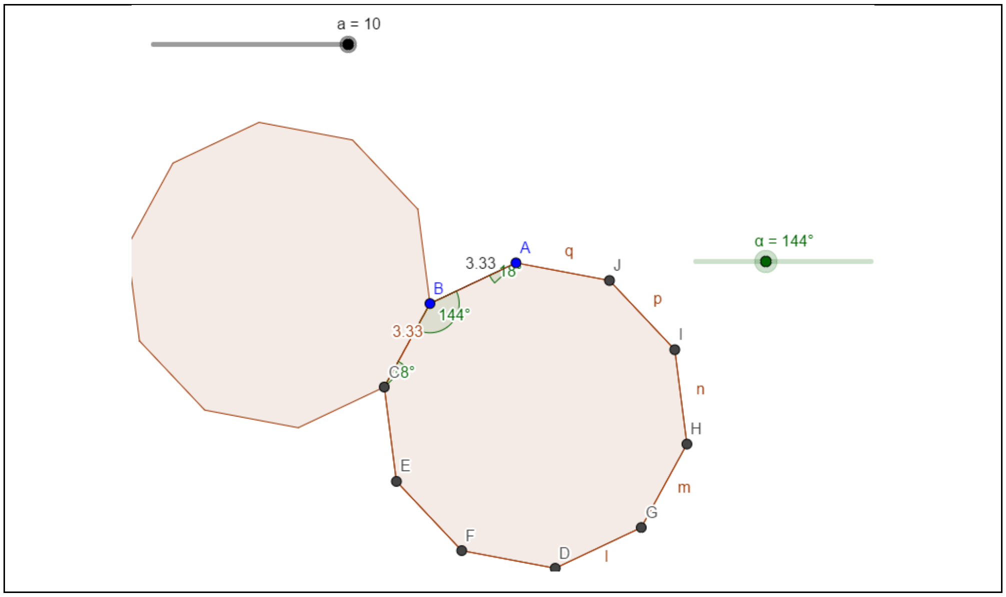


Ilustración 4.49]

Alejandra 144 [grados](…) Entonces sí, se puede múltiplo de 3 [como frase para completar el enunciado de la pregunta]

Modos epistémicos

Discernimiento crítico

En este episodio se retoma la generalización experimentada durante el episodio descrito en el Episodio 7, acerca del tipo de polígonos que permiten construir la teselación. En esta ocasión, Alejandra aclara que cuando hablaba de "múltiplo de 3" se refería a la medida del ángulo interno, por lo cual el nonágono ya no es un contraejemplo de la afirmación hecha por ella. A partir de ello, y de verificar que el decágono tampoco es un contraejemplo, Alejandra generaliza que si la medida del ángulo interno del polígono es múltiplo de 3, entonces sí se puede realizar la teselación. Aquí la generalización emerge del contraste que experimenta Alejandra al observar casos donde no se puede hacer la teselación y revisar la medida de sus ángulos, comparado con los casos donde sí se puede (triangulo, cuadrado y hexágono).

Discurso situado

Observo como el hecho que la pregunta este formulada en términos de completar una oración condiciona la manera en que Alejandra formula la respuesta. Alejandra no responde en términos de “si…entonces…”, sino que se limita a describir la propiedad que ella piensa caracteriza los polígonos con los cuales se puede construir la teselación.

Proceso de conjeturación

Observación de una propiedad invariante

Se observa en este episodio como Alejandra retoma el invariante que había identificado en el Episodio 7, después de haber hecho la aclaración que se mencionó anteriormente.

Formulación de una conjetura

La aclaración acerca del sentido de la afirmación que había hecho en el Episodio 7 lleva a Alejandra a volver a formular la conjetura que había realizado anteriormente.

Verificación de la conjetura

Alejandra verifica la conjetura de que los polígonos regulares que permiten la teselación son aquellos cuyos ángulos internos tienen una medida que es múltiplo de 3, al intentar hacer la teselación con dos polígonos que no cumplen con la condición (nonágono y decágono). A pesar que no verifica todos los casos posibles, se observa como este proceso lleva a Alejandra a confirmar su afirmación.

Generalización de la conjetura

Al igual que sucedió en el Episodio 8, la verificación que hace Alejandra de su afirmación genera en ella la certeza que su afirmación es correcta. Esta adquisición de certeza surge del discernimiento que Alejandra ha hecho a partir de la variación del tipo de polígonos con los cuales ha intentado construir la teselación.

5. DISCUSIÓN

En este capítulo presento la discusión acerca de los aspectos destacados de la actividad desarrollada por los estudiantes que fueron observados en los análisis presentados en la Sección 4. Esta discusión se centra en cinco aspectos que serán desarrollados en detalle a continuación.

5.1 ORGANIZACIÓN DE LOS PATRONES DE VARIACIÓN EN LA ACTIVIDAD DESARROLLADA POR LOS ESTUDIANTES

La Teoría de la Variación sugiere una organización en los patrones de variación que determina en qué orden deberían ser experimentados por los estudiantes para favorecer el discernimiento de invariantes. Leung (2008) considera estos patrones como parte de una secuencia anidada en la cual el contraste y la separación llevan a la generalización, y a partir de esta última surge la fusión cuando se trata de establecer una relación entre dos invariantes distintos. El diseño de la secuencia de enseñanza en este trabajo se realizó teniendo en cuenta esa organización, por lo que las actividades se presentaron de tal manera que los estudiantes experimentaran en el orden planteado en esa secuencia anidada.

Sin embargo, en el análisis del trabajo realizado por los estudiantes de los dos grupos que fueron considerados pude observar que, en los episodios correspondientes al modo de Discernimiento Crítico, esta organización de los patrones presenta variaciones con respecto a lo planteado por Leung. En el caso particular de la Actividad 3, se observa como los patrones de separación y generalización no son necesariamente experimentados en el orden prescrito, lo cual se puede evidenciar el episodio 4 del grupo 1 y el episodio 3 del grupo 2.

En los dos episodios mencionados anteriormente observo que la separación no es necesariamente quien lleva a la generalización, sino que ambos patrones son experimentados simultáneamente en el proceso de construcción de la teselación utilizando triángulos equiláteros. De manera más específica, observo como la separación de aspectos que varían y la generalización de aspectos invariantes son actividades que se retroalimentan entre sí.

En ese sentido, propongo que a la hora de diseñar una secuencia de enseñanza teniendo como base los postulados de la Teoría de la Variación, se adopte cierta flexibilidad en la manera como se organicen las actividades que permitan la experimentación de los patrones de variación por parte de los estudiantes. Desde mi punto de vista, lo realmente importante es la experimentación de los diversos patrones sin necesidad que sigan estrictamente el orden establecido por Leung (2008).

5.2 FORMULACIÓN DE CONJETURAS

En el análisis de la actividad desarrollada por los estudiantes durante el proceso de resolución de la secuencia de enseñanza pude observar como ellos recorren la trayectoria establecida en el modelo del proceso de conjeturación propuesto por Cañadas et al (2008). En cada uno de los episodios presentados en el análisis encontré evidencia del tránsito de los estudiantes por las fases descritas en la sección 2.2 de este trabajo, lo cual me permite afirmar que las tareas fomentaron la conjeturación en los estudiantes de los grupos analizados.

Con respecto al grupo 1, los estudiantes transitaron por la fase 1 (Manipulación de una situación dinámicamente por medio de la continuidad de casos) en los episodios 1, 2 y 3, en el proceso de instrumentalización del deslizador α, para posteriormente observar el invariante (Fase 2) a partir de la experimentación de los diferentes patrones de variación (Episodio 4). A continuación, en la resolución de la tarea 2, los estudiantes descubrieron que el invariante identificado en triángulos equiláteros en la Tarea 1 (que el ángulo de rotación de la yuxtaposición corresponde a la medida de los ángulos internos) se podría generalizar a cualquier polígono regular, con lo cual intentaron construir teselaciones con los distintos polígonos regulares (Episodios 5 y 6). A partir de los patrones de variación que experimentaron al realizar estas construcciones, los estudiantes descubrieron una propiedad invariante en el tipo de polígono que permite construir las teselaciones (Episodio 7 y 8), lo cual los llevó a la formulación de una conjetura que caracterizara estos polígonos.

En el caso del grupo 2, el proceso de conjeturación se desarrolló inicialmente de una manera similar a como sucedió en el grupo 1. Los estudiantes transitaron por la fase de Manipulación de una situación dinámicamente por medio de la continuidad de casos (Episodio 1 y 2) y

Observación de una propiedad invariante de la situación (Episodio 3) en la Tarea 1, para que con este invariante y el uso del deslizador a procedieran a explorar los distintos polígonos (Episodio 4 y 5) para construir teselaciones. Posteriormente, los estudiantes formularon conjeturas acerca del tipo de polígonos que permitían la teselación (Episodio 6 y 7).

Sin embargo, las conjeturas formuladas, la cuales eran correctas, fueron cuestionadas cuando al momento de verificar la conjetura (Fase 4) se enfrentaron con una construcción deficiente, lo que los llevó a replantear la construcción (Episodios 8 y 9) y a confirmar la veracidad de las conjeturas planteadas inicialmente.

Por otro lado, se evidencian falencias en el proceso de formulación de conjeturas, el cual es precisamente el propósito del proceso de conjeturación. Este hecho es particularmente notable en la Tarea 1, en la cual los estudiantes no formularon de manera verbal ninguna conjetura acerca de las condiciones que permitirían construir la teselación utilizando únicamente triángulos equiláteros. Esto no implica que no se haya desarrollado el proceso de conjeturación en esta Tarea. Posiblemente era necesaria una actividad que requiriera que los estudiantes expresaran de manera verbal o escrita sus observaciones acerca de los invariantes observados.

5.3 IMPORTANCIA DEL PATRÓN DE GENERALIZACIÓN EN LA FORMULACIÓN DE CONJETURAS

Un aspecto importante que se destaca del análisis que realicé a la actividad desarrollada por los estudiantes es la influencia del patrón de generalización en el proceso de formulación de conjeturas. Los episodios donde identifiqué que los estudiantes formularon conjeturas acerca de los polígonos que permiten realizar teselaciones (Episodios 7 y 8, Grupo 1; Episodios 6,7,8 y 9, Grupo 2) correspondían a episodios donde los estudiantes experimentaron el patrón de generalización.

Este hecho me permite inferir la importancia de que los estudiantes experimenten la generalización de ciertos aspectos de las teselaciones para que puedan formular conjeturas acerca de las propiedades que deben cumplir los polígonos que permiten teselar el plano. Teniendo en cuenta que, de acuerdo con lo planteado por la Teoría de la Variación y lo observado en los análisis, este patrón de generalización emerge de la experimentación previa o simultanea de los patrones de contraste y separación, puedo inferir que la experimentación de los patrones de variación fue una condición necesaria para el proceso de formulación de conjeturas acerca de las características de los polígonos que permiten teselar el plano.

5.4 AUSENCIA DE EPISODIOS EN LA ACTIVIDAD 4 DE LA SECUENCIA DE ENSEÑANZA

Como se discutió en la sección correspondiente al diseño de la secuencia de actividades, cada una de las actividades diseñadas se encuentra relacionada con uno de los modos epistémicos del MTTP. Por lo tanto, se esperaba que en la selección de los episodios que fueron objeto de análisis se encontrara por lo menos un episodio por cada una de las actividades propuestas. Esto se cumplió en la mayoría de los casos, e incluso hubo actividades que generaron varios episodios, como fue el caso de la Actividad 5.

La única excepción al hecho mencionado anteriormente fue la de la Actividad 4, la cual en ninguno de los dos grupos analizados correspondió a alguno de los episodios que fueron considerados para el análisis. En esta actividad, como se mencionó en la sección 3.1.1, se les solicitaba a los estudiantes explorar el funcionamiento del deslizador a, el cual modificaba el número de lados del polígono regular que se mostraba en la construcción.

La razón por la que la actividad desarrollada en la Actividad 4 no fue considerada en ninguno de los episodios que fueron analizados es que la identificación del efecto del deslizador en la construcción fue identificada casi que inmediatamente por los estudiantes. En ese sentido, el trabajo realizado por los estudiantes al resolver esa actividad no fue lo suficientemente significativo como para que el análisis arrojara alguna conclusión importante sobre el proceso de conjeturación desarrollado.

Lo anterior no implica que esta sea una actividad que pueda ser eliminada de la secuencia de enseñanza sin ningún efecto sobre las actividades posteriores. Desde mi punto de vista, es necesario que los estudiantes exploren este deslizador e identifiquen sus características. De hecho, precisamente la experimentación de la variación del número de lados de los polígonos que aparecen en la construcción constituye la base para la experimentación de los patrones de variación de la Tarea 2.

5.5 RIQUEZA DE LA ACTIVIDAD DESARROLLADA POR LOS ESTUDIANTES

En el trabajo desarrollado por los estudiantes en la resolución de la secuencia de actividades evidenció que lo que descubrieron es realmente novedoso para ellos. Es decir, el hecho que se requieren ciertas condiciones sobre los polígonos regulares para poder realizar teselaciones con ellos es algo que no era evidente para ellos antes de resolver las tareas e incluso durante su resolución.

Esta situación es evidente especialmente en el episodio 6 del Grupo 1 y el episodio 5 del Grupo 2, cuando experimentan el contraste de un polígono que no permite la teselación (el pentágono) con respecto a los que anteriormente habían explorado (triángulos y cuadrados) que si la permitían. En el análisis de esos episodios se hizo especial énfasis en el hecho que esto causó sorpresa a los estudiantes, hasta el punto de que expresaron dudas acerca de la manera como se debía realizar la construcción. A partir de esto infiero que los estudiantes de ambos grupos estaban convencidos que con cualquier polígono debía poder realizarse la teselación.

En ese sentido, puedo afirmar que la actividad desarrollada por los estudiantes fue enriquecedora para ellos, en el sentido que el conocimiento adquirido por ellos en la resolución de la secuencia de actividades fue realmente nuevo. Esto a pesar de que este conocimiento no pareciera estar dotado de mucha profundidad, ya que el contenido matemático subyacente a la secuencia de actividades no es en sí de mucha complejidad.

6. CONCLUSIONES

En este capítulo presento las conclusiones del trabajo, tomando en cuenta la discusión acerca de la actividad desarrollada por los estudiantes que presenté en el capítulo anterior. En las dos primeras secciones presento mis apreciaciones acerca del efecto que tuvo la secuencia de enseñanza en promover procesos de conjeturación en los estudiantes y en su aprendizaje acerca de las propiedades de la teselación. Posteriormente, en las dos secciones siguientes, exhibo lo que considero son los principales aportes de este trabajo a mi formación como profesor y como investigador, y en la última sección describo las proyecciones que considero puede tener esta investigación para trabajos posteriores.

6.1 ACERCA DE LA UTILIDAD DE LA SECUENCIA DE ENSEÑANZA EN PROMOVER PROCESOS DE CONJETURACIÓN

Como mencioné en los objetivos de este trabajo, mi propósito era determinar la utilidad del Modelo de Tareas TecnoPedagógicas (MTTP) para promover procesos de conjeturación en los estudiantes de la clase de Geometría. La actividad desarrollada por los grupos en los episodios presentados en el análisis, estuvo enmarcada en las fases descritas por el modelo de Cañadas (2008). Esto me permite afirmar, desde la óptica seleccionada para el análisis del proceso de conjeturación, que la secuencia de actividades que diseñé generó un ambiente propicio para que los estudiantes formularan conjeturas que permitieran caracterizar los polígonos regulares que teselan el plano.

En la generación de dicho ambiente tuvieron un papel fundamental la experimentación por parte de los estudiantes de los distintos patrones de variación que surgieron en la manipulación de la construcción en la cual se basó la tarea. Las conjeturas que fueron formuladas por los estudiantes emergieron los invariantes observados por ellos en medio de los distintos procesos de contraste, separación y generalización que los estudiantes desarrollaron durante la resolución de la secuencia de actividades.

Otro aspecto que influyó en el desarrollo de procesos de conjeturación por parte de los estudiantes fue el uso del programa de Geometría Dinámica. El proceso de instrumentalización de las herramientas del software y de los deslizadores que hicieron parte de la construcción fue la base para la experimentación de los diversos patrones de variación que, como se discutió en el párrafo anterior, permitieron a los estudiantes la observación de los invariantes que llevaron a la formulación de conjeturas.

Por otra parte, es necesario reconocer que el proceso de formulación de conjeturas desarrollado por los estudiantes no fue todo lo rico que se desearía, en el sentido que dichas conjeturas fueron pocas y casi siempre el proceso de verificación fue inexistente. A este hecho le atribuyo principalmente dos causas; en primer lugar, la falta de preguntas que requirieran que los estudiantes expresaran sus observaciones de manera escrita, y en segundo lugar que el número de polígonos en los cuales realizar la verificación fuera muy pequeño. En ese sentido, un ajuste que debería ser considerado para posteriores diseños de secuencias de tareas es la inclusión de más actividades que lleven a los estudiantes a expresar de manera escrita o verbal los invariantes observados y las justificaciones que puedan dar a esos invariantes.

6.2 ACERCA DEL APRENDIZAJE DE LOS ESTUDIANTES A PARTIR DE LA SECUENCIA DE ENSEÑANZA

En el marco teórico de este trabajo se caracterizó el aprendizaje de los estudiantes en términos del discernimiento de invariantes (Marton & Booth, 1997). En ese sentido, en la actividad desarrollada por los estudiantes de los grupos analizados se identifica que existe aprendizaje cuando los estudiantes identifican las propiedades que permiten caracterizar los polígonos regulares que permiten teselar el plano.

Teniendo en cuenta esta caracterización del aprendizaje, puedo afirmar que en los grupos analizados se evidenció el aprendizaje de los estudiantes acerca de propiedades de las teselaciones. El discernimiento de los invariantes esperados cuando se diseñó la secuencia de actividades es muestra del conocimiento adquirido por los estudiantes a partir de la resolución de las tareas que hacen parte de la secuencia de enseñanza.

En este proceso de aprendizaje es notable la influencia del uso de los patrones de variación (Marton, 1997) en el diseño de la secuencia de enseñanza. En los episodios descritos en el análisis se observa cómo el discernimiento de los invariantes surge a partir de la experimentación de patrones de separación, contraste y generalización, lo cual refuerza lo planteado por Marton acerca de la utilidad de la Teoría de la Variación como herramienta teórica para para fomentar el aprendizaje en los estudiantes.

Un aspecto interesante que observé en la actividad desarrollada por los estudiantes con respecto a su proceso de aprendizaje es el hecho que este fue desarrollado por ellos mismos a partir de la interacción con las construcciones prediseñadas por el profesor en el software utilizado. En ese sentido, debo destacar la importancia del ambiente de geometría dinámica en la construcción del conocimiento.

El hecho que las tareas diseñadas tuvieran como eje central el proceso de conjeturación permitió que los estudiantes desarrollaran un proceso de aprendizaje más autónomo. El rol del profesor fue más el de un guía que el de un transmisor de conocimientos, en el sentido que más que exponerles resultados, promovía la experimentación de los patrones de variación. Al pedirle a los estudiantes que formularan sus propias afirmaciones acerca del fenómeno que observaban, se logró que los estudiantes tuvieran la oportunidad de realizar sus propios descubrimientos y de construir su propio conocimiento.

6.3 ACERCA DE MI FORMACIÓN COMO PROFESOR

Uno de los aspectos destacados en el proceso de resolución de la secuencia de actividades es el papel protagónico que tienen los estudiantes en la construcción del conocimiento. En los episodios presentados en el capítulo de análisis se observa como son los estudiantes los que, a partir de la exploración de los objetos y las herramientas presentes en el ambiente de geometría dinámica, descubren las propiedades de los polígonos que permiten realizar teselaciones del plano. El rol del profesor, en este caso, es el de guiar las observaciones de los estudiantes hacia el conocimiento que espera que ellos adquieran, sin transmitírselos de manera directa.

Este hecho me llevó hacia una reflexión acerca de mi papel como profesor en cuanto a mi concepción sobre el papel que juegan las tareas en el proceso de aprendizaje de los estudiantes. En la indagación realizada pude evidenciar que las tareas no solo sirven para reforzar los conceptos y técnicas explicados por el profesor previamente, sino que también pueden llevar a los estudiantes a construir conocimiento nuevo a partir de su resolución, sin necesidad de que el profesor haya expuesto ese conocimiento previamente a los estudiantes.

Para que esto suceda, se hace necesario que el diseño de las tareas esté debidamente fundamentado, como fue el caso de la secuencia de actividades que se implementó en este trabajo. En ese sentido, desde mi perspectiva personal, es importante que los docentes universitarios de matemáticas en ejercicio se formen en los diferentes referentes teóricos acerca del diseño de tareas en matemáticas, y a partir de este conocimiento teórico diseñen sus propias tareas y analicen las potencialidades y restricciones de cada uno de los modelos de diseño de tareas que experimenten. Esto con el fin de cambiar su rol de transmisores de conocimiento por el de profesores que fomenten que ese conocimiento sea construido por los mismos estudiantes a partir de la resolución de tareas diseñadas cuidadosamente.

6.4 ACERCA DE MI FORMACIÓN COMO INVESTIGADOR

En mi caso personal, este trabajo es mi primera aproximación a un ejercicio investigativo en el campo de la educación matemática. Teniendo en cuenta que mi formación de pregrado es en el área de las matemáticas, y a pesar de haber ejercido la docencia durante los últimos diez años, nunca había realizado el ejercicio de indagar de manera sistemática los procesos de enseñanza y aprendizaje en la clase de matemáticas.

En ese sentido, considero importante describir los aportes que la realización de este trabajo ha traído a mi formación como investigador en el campo de la educación matemática. En particular quiero destacar dos aspectos en los cuales considero que este trabajo ha impactado en mi formación: la importancia de la indagación en el aula de clase para la mejora de mi práctica docente, y la pertinencia de la estrategia metodológica escogida en este trabajo para determinar el efecto de las Tareas Tecno Pedagógicas en los procesos de aprendizaje de los estudiantes.

Como mencioné en la sección anterior, el desarrollo de este trabajo me llevó a una reflexión acerca de mi papel como docente de matemáticas. Esta reflexión no hubiera sido posible si no fuera consecuencia de un ejercicio analítico sobre la actividad desarrollada por los estudiantes en la resolución de las tareas propuestas. El proceso de analizar la producción de los estudiantes tomando como base ciertos referentes teóricos me permitió interpretar la influencia de las tareas en su aprendizaje y, a partir de ello, de establecer maneras de mejorar mí práctica docente.

Con respecto a la metodología seleccionada, considero importante destacar que la organización metodológica del experimento de enseñanza me permitió establecer de qué manera las Tareas Tecno Pedagógicas influyen en la construcción de un ambiente que fomente el proceso de conjeturación de los estudiantes. El diseño adecuado de la secuencia de actividades ajustado a un referente teórico específico, la experimentación de la secuencia en un grupo de estudiantes y el análisis de la actividad desarrollada por los estudiantes en la experimentación fueron la base para determinar la influencia de las actividades en el aprendizaje de las propiedades de los polígonos regulares que permiten la teselación.

6.5 ACERCA DE LAS PROYECCIONES DE ESTE TRABAJO

En el análisis realizado a la producción de los estudiantes, que presenté en el capítulo 4 de este trabajo, se observaron profundas conexiones entre los postulados entre la Teoría de la Variación de Marton & Booth (1997) y el proceso de conjeturación. Esta relación había sido prevista en el marco teórico de este trabajo, como se puede observar en las secciones 2.2 y 2.3. Lo anterior sugiere que la Teoría de la Variación puede servir como fundamento teórico para los profesores universitarios que deseen fomentar en sus prácticas de enseñanza procesos de conjeturación en la clase de matemáticas. A pesar de que este trabajo está enfocado en conceptos y propiedades geométricas, eso no implica que el potencial de la Teoría de la Variación para promover la conjeturación este restringido a los estudiantes de la clase de geometría. El diseño de secuencias de actividades fundamentadas en la Teoría de la Variación también podría ser útil para el aprendizaje de otras ramas de las matemáticas universitarias, tales como el cálculo y el álgebra.

En cuanto al Modelo de Tarea Tecno Pedagógicas (MTTP) en sí, este trabajo es evidencia de su potencial para diseñar secuencias de actividades que favorezcan el aprendizaje de geometría en ambientes de Geometría Dinámica. En ese sentido, la secuencia de actividades propuesta en este trabajo puede servir de modelo para quien este los profesores en ejercicio interesados en diseñar tareas que permitan a sus estudiantes un aprendizaje más significativo de los conceptos matemáticos.

7. **REFERENCIAS**

Ainley, J., & Pratt, D. (2005). The significance of task design in mathematics education: Examples from proportional reasoning. In H. L. Chick & J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 103–108). Melbourne: PME

Ainley, J., Pratt, D., & Hansen, A. (2006). Connecting engagement and focus in pedagogic task design. *British Educational Research Journal*, *32*(1), 23-38.

Álvarez, I., Ángel, J. L., Vargas, E., & Soler, M. N. (2014). Actividades matemáticas: conjeturar y argumentar. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 85*, 75-90.

Baccaglini-Frank, A. (2010). *Conjecturing in dynamic geometry: A model for conjecture-generation through maintaining dragging*. Doctoral dissertation, University of New Hampshire, Durham, NH

Baccaglini-Frank, A., & Mariotti, M. A. (2010). Generating conjectures in dynamic geometry: The maintaining dragging model. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *15*(3), 225-253.

Bell, A. W. (1979). Research on teaching methods in secondary mathematics. In D. Tall (Ed.), *Proceedings of the Third Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 4–12). Warwick: PME.

Camargo, L. (s.f.) *Estrategias Cualitativas de Investigación en Educación Matemática.* Libro en evaluación. Fondo Editorial Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá.

Camargo, L., Perry, P., & Samper, C. (2005). La demostración en la clase de geometría: ¿puede tener un papel protagónico? *Educación Matemática*, *17*(3), 53-76.

Camargo, L., Pérez, C., Plazas, T., Perry, P., Samper, C. & Molina, Ó. (2013). Enseñanza de la geometría mediada por artefactos: teoría de la mediación semiótica. En P.

Perry (Ed.), *Memorias del 21º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 85-96). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Cañadas, M., Deulofeu, J., Figueiras, L., Reid, D. & Yevdokimov, O. (2008). Perspectivas teóricas en el proceso de elaboración de conjeturas e implicaciones para la práctica: Tipos y Pasos. *Revista Enseñanza de las Ciencias*, *6* (3), 431-441.

Fahlgren, M., & Brunström, M. (2014). A model for task design with focus on exploration, explanation, and generalization in a dynamic geometry environment. *Technology, knowledge and learning*, *19*(3), 287-315.

Fundación Universidad de America. (2011). *Proyecto Educativo Institucional*. Recuperado de http://www.uamerica.edu.co/la-universidad/documentos-institucionales/proyecto-educativo-institucional/

Janvier, C. (1979). The use of situations for the development of mathematical concepts. In D. Tall (Ed.), *Proceedings of the Third Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 135–143). Warwick: PME.

Kieran, C., Doorman, M., & Ohtani, M. (2015). Frameworks and principles for task design. In *Task design in mathematics education* (pp. 19-81). Springer, Cham.

Kieran, C., & Saldanha, L. (2008). Designing tasks for the co-development of conceptual and technical knowledge in CAS activity: An example from factoring. *Research on technology and the teaching and learning of mathematics*, *2*, 393-414.

Leung, A. (2003). Dynamic Geometry and The Theory of Variation. *International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *3*, 197-204.

Leung, A. (2008). Dragging in a Dynamic Geometry Environment Through the Lens of Variation. *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 13, 135–157

Leung, A. (2011). An epistemic model of task design in dynamic geometry environment. *ZDM: the international journal on mathematics education*, 43(3), 325-336.

Leung, A., & Bolite-Frant, J. (2015). Designing mathematics tasks: The role of tools. In *Task design in mathematics education* (pp. 191-225). Springer, Cham.

Lo, M. L. (2012). *Variation theory and the improvement of teaching and learning*. Gothenburg Studies in Educational Science, 323. Acta Universitatis Gothoburgensis. Göteborg, Sweden: Acta Universitatis Gothoburgensis..

Mariotti M.A. (2006). Proof and Proving in Mathematics Education. En Á. Gutiérrez, P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 173-204). Rotterdam, Los Países Bajos, Sense Publishers.

Mariotti, M.A. & Bartolini Bussi M.G. (1998). From drawing to construction: teachers mediation within the Cabri environment, *Proc. of the 22nd PME Conference*, Stellenbosch, South Africa, I-180-95.

Marton, F., & Booth, S. (1997). *Learning and awareness*. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, INC, Publishers.

Marton, F., Runesson, U., & Tsui, A. B. M. (2004). The space of learning. In F. Marton & A. B. M. Tsui (Eds.), *Classroom discourse and the space of learning* (pp. 3–40). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, INC Publishers.

MEN (s.f.). *Propuesta de Lineamientos para la Formación por Competencias en Educación Superior*. Recuperado de http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles261332_archivo_pdf_lineamientos.pdf.

Perry, P., Samper, C., Molina, O., Camargo, L., & Echeverry, A. (2013). Actividad instrumentada y mediación semiótica: dos teorías para describir la conjeturación como organizador curricular. *Aportes investigativos para el diseño curricular en geometría y estadística*, 13-92.

Perry, P., Samper, C., Camargo, L., y Molina, Ó. (2013). Innovación en un aula de geometría de nivel universitario. En C. Samper y Ó. Molina (Eds.), *Geometría plana: un espacio de aprendizaje* (pp. 14-24). Bogotá, Colombia: Fondo Editorial Universidad Pedagógica Nacional.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies - Approche cognitive des instruments contemporains*. Paris: Armand Colin.

Vygotsky, L. S. (1981). The genesis of higher mental functions. In J. V. Wertsch (Ed.), *The concept of activity in Soviet Psychology*, Armonk, NY. Sharpe.