USO E INTERPRETACIÓN DE REPRESENTACIONES CUANDO SE RESUELVEN PROBLEMAS DE CONJETURACIÓN EN UN AMBIENTE DE GEOMETRÍA DINÁMICA

CARLOS DAVID SÁNCHEZ

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA
BOGOTÁ D.C.
2018

USO E INTERPRETACIÓN DE REPRESENTACIONES CUANDO SE RESUELVEN PROBLEMAS DE CONJETURACIÓN EN UN AMBIENTE DE GEOMETRÍA DINÁMICA

CARLOS DAVID SÁNCHEZ
2016185021

Tesis para optar por el título de
Magister en Docencia de la Matemática

Asesora
Carmen Samper de Caicedo

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA
BOGOTÁ D.C.
2018

“*Para todos los efectos, declaro que el presente trabajo es original y de mi total autoría: en aquellos casos en los cuales he requerido del trabajo de otros autores o investigadores, he dado los respectivos créditos*”.

(Acuerdo 031 del 2007. Artículo 42. Parágrafo 2.)

Agradecimientos

A la profesora Carmen Samper por su orientación y sus aportes, en especial por cuestionar, discutir y enriquecer mis ideas durante la realización de este trabajo.

A mi madre y a mi novia por su comprensión y apoyo incondicional.

A mis estudiantes por permitirme aprender de ellos y con ellos.

A los docentes y compañeros de la Maestría en Docencia de la Matemática con quienes tuve la oportunidad de compartir, por generar en mi inquietudes y reflexiones que me han permitido crecer personal y profesionalmente.

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
Educadora de educadores

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

ACTA DE VALORACIÓN DE TRABAJO DE GRADO

Escuchada la sustentación del Trabajo de Grado titulado ***Uso e interpretación de representaciones cuando se resuelven problemas de conjeturación en un ambiente de geometría dinámica***, presentado por el estudiante:

Carlos David Sánchez, Cód. 2016185021,
CC.1.019.003.001

como requisito parcial para optar al título de **Magíster en Docencia de la Matemática**, analizado el proceso seguido por el estudiante en la elaboración del trabajo y evaluada la calidad del escrito final, se le asigna la calificación de **Aprobada,** con 49 puntos.

Observaciones:
Se postula la Tesis de grado a distinción Laureada.

En constancia se firma a los 28 días del mes de agosto de 2018.

JURADOS

Director del Trabajo: Profesor: Carmen Samper de Caicedo
CARMEN SAMPER CAICEDO (UPN)

Jurados:

Profesora: Leonor Camargo
LEONOR CAMARGO URIBE (UPN)

Profesora:
ARMANDO ECHEVERRY (UNIVERSITAT DE VALENCIA)

RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN – RAE	
1. Información General	
Tipo de documento	Tesis de maestría
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento	Uso e interpretación de representaciones cuando se resuelven problemas de conjeturación en un ambiente de geometría dinámica
Autor (es)	Sánchez, Carlos David
Director	Carmen Samper de Caicedo
Publicación	Bogotá, Universidad Pedagógica Nacional, 2018, p. 96
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional
Palabras Claves	Teoría de la Variación, Teoría de las Aprehensiones Figurales, tipos de arrastre, tipos de aprehensiones, representaciones en geometría dinámica, problemas abiertos de conjeturación, exploración, visualización.

2. Descripción

El objetivo de este trabajo es identificar qué aspectos del uso e interpretación de lo que representan los estudiantes en un Sistema Geometría Dinámica (SGD), cuando resuelven problemas de conjeturación, influyen para que reconozcan o no propiedades geométricas. Se utilizaron como principales referentes teóricos la Teoría de la Variación (Leung, 2003, 2008, 2013) y la Teoría de las Aprehensiones Figurales (Duval, 1995,1998,1999). En el diseño metodológico se implementó una estrategia investigativa de tipo naturalista. La recolección de la información se realizó sobre el proceso de resolución de dos problemas abiertos de conjeturación, que se propusieron a dos grupos, de tres estudiantes cada uno, de grado noveno de un colegio oficial del municipio de La Calera (Cundinamarca).

3. Fuentes

A continuación, se presentan las principales referencias que se utilizaron en este trabajo.

Álvarez-Gayou, J. (2003). *Cómo hacer investigación cualitativa: fundamentos y metodología*. México: Paidós.

Baccaglini-Frank, A., y Mariotti, M. A. (2010). Generating conjectures in dynamic geometry: The maintaining dragging model. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *15*(3), 225-253.

Camargo, L. (s.f.). *Estrategias Cualitativas de Investigación en Educación Matemática.* Libro en evaluación. Fondo Editorial Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá.

Campistrous, L., y Rizo, C. (2013). La resolución de problemas en la escuela. *Primer Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe*, Santo Domingo, República Dominicana.

Duval, R. (1995). Geometrical pictures: Kinds of representation and specific processings. En R. Suttherland y J. Mason (Eds.), *Exploiting mental imagery with computers in mathematics education* (pp. 142-157). Berlin: Springer.

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. En C. Mammana y V. Villani (eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century* (pp.37-52). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Duval, R. (1999). Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. Basic Issues for Learning. En F. Hitt y M. Santos (Eds.), *Proceedings of the 21st North American PME Conference* (pp. 3-26), Columbus, Ohio, USA: ERIC/CSMEE Publications–The Ohio State University.

Leung, A. (2003). Dynamic Geometry and The Theory of Variation. En N. A. Pateman, B. J. Doughherty, y J. T. Zillox (Eds.), *Proceedings of PME 27: Psychology of Mathematics Education 27th International Conference* (pp. 197–204). Honolulu: University of Hawaii.

Leung, A. (2008). Dragging in a dynamic geometry environment through the lens of variation. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 13*(2), 135-157.

Leung, A. (2011). An epistemic model of task design in dynamic geometry environment. *ZDM—The International Journal on Mathematics Education*, *43*(3), 325–336.

Leung, A., Baccaglini-Frank, A., y Mariotti, M. A. (2013). Discernment of invariants in dynamic geometry environments. *Educational Studies in Mathematics*, *84*(3), 439-460.

Lo, M. L. (2012). *Variation theory and the improvement of teaching and learning*. Gothenburg Studies in Educational Science, 323. Acta Universitatis Gothoburgensis. Göteborg, Sweden: Acta Universitatis Gothoburgensis.

Marmolejo, G., y Vega, M. (2012). La visualización en las figuras geométricas: Importancia y complejidad de su aprendizaje. *Educación matemática*, *24*(3), 7-32.

Marton, F., Runesson, U., y Tsui, A. (2004). The space of learning. En F. Marton y A. Tsui (Eds.), *Classroom Discourse and the Space of Learning*. London: Lawrence Erlbaum Associates.

Orgill, M. (2012). Variation theory. En N. Seel (Ed.), *Encyclopedia of the Sciences of Learning* (pp. 3391-3393). Dordrecht: Springer.

Samper, C., Molina, Ó., Camargo, L., Perry, P. y Plazas, T. (2013). Problemas abiertos de conjeturación. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 21º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 167-170). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Torregrosa, G., y Quesada, H. (2007). Coordinación de procesos cognitivos en geometría. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *10*(2), 275-300.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 65–81). Dordrecht: Kluwer.

4. Contenidos

El trabajo se divide en cinco capítulos cuyo contenido se describe a continuación.

En el Capítulo 1 se describe el problema y se formula la pregunta de investigación. Se presentan la justificación del estudio, el objetivo general y los objetivos específicos de este. Se incluye la revisión de la literatura.

El Capítulo 2 consta del marco teórico. Aquí se plantean los conceptos básicos de las dos teorías que se utilizaron como referentes: la Teoría de la Variación y la Teoría de las Aprehensiones Figurales. También se establece una conceptualización sobre: problema, problemas abiertos de conjeturación y su clasificación.

En el tercer capítulo, se presenta el diseño metodológico. El capítulo se divide en dos partes: aspectos generales y aspectos específicos. En la primera parte se menciona el tipo de investigación, el enfoque investigativo y la estrategia metodológica que se utilizó. En la segunda parte se describe cómo se llevó a cabo cada una de las fases en las que se divide la estrategia metodológica adoptada.

El desarrollo del análisis se expone en el Capítulo 4. En este capítulo se analiza el proceso de resolución que llevó a cabo cada grupo de trabajo para resolver las tareas propuestas. En el análisis, se describen e interpretan las intervenciones de los estudiantes y extractos de sus reportes escritos en los que utilizaron tipos de arrastre y de aprehensiones.

En el Capítulo 5 se presentan los resultados y conclusiones del ejercicio investigativo. Los resultados corresponden a observaciones que resultan de comparar los procesos de resolución de los problemas de ambos grupos. A partir de esas observaciones, se establecen conclusiones que dan respuesta a la pregunta de investigación. También hay conclusiones sobre el tipo de problema propuesto, el papel del docente y las teorías que se utilizaron como herramientas de análisis.

5. Metodología

El ejercicio investigativo es de tipo cualitativo y la estrategia metodológica es de carácter naturalista basada en práctica usuales (Camargo, s.f.). La principal característica de esta estrategia es que la recolección de información se efectúa mientras los estudiantes y el docente realizan sus actividades de clase como habitualmente lo hacen. Para la implementación de esta estrategia, se desarrollaron las siguientes fases: selección del escenario, fundamentación teórica inicial, recolección de la información, concreción de la fundamentación teórica, establecimiento de categoría de análisis, obtención de datos y, finalmente, el análisis. El escenario que se seleccionó fue las clases de geometría de grado noveno de una institución educativa del municipio de La Calera. Antes de la recolección de información se trabajó con los estudiantes de grado octavo, durante un año, desarrollando todas las clases de geometría con el uso de un SGD, para que el ambiente natural de las clases se convirtiera en un ambiente de geometría dinámica. La información para el estudio se obtuvo del proceso de resolución de dos problemas abiertos de conjeturación, que se les propusieron a los estudiantes cuando estaban en grado noveno. De ellos, se seleccionaron dos grupos, de tres estudiantes cada uno, para realizar el registro de información mediante un programa de captura de pantalla y audio, videograbación y reportes escritos. Las categorías de análisis se establecieron directamente de los dos principales referentes teóricos que se utilizaron:

los tipos de arrastre de acuerdo con la Teoría de La Variación y los tipos de aprehensiones según la Teoría de las Aprehensiones Figurales. Los datos fueron los episodios en los que se identificaron intervenciones de las estudiantes en las que se reconocen tipos de arrastre (de contraste, separación, generalización y fusión) y de aprehensiones (perceptual, discursivas y operativas). El análisis de los datos se realizó mediante la interpretación de estas intervenciones, de acuerdo con las categorías de análisis propuestas. Para establecer los resultados, se compararon los procesos de resolución de ambos grupos para cada problema de donde surgieron 15 observaciones relacionadas con el uso e interpretación de representaciones, de acuerdo con los tipos de arrastre y de aprehensiones.

6. Conclusiones

Respecto a cómo los estudiantes usan e interpretan representaciones en un SGD, se concluyó que influye, para discernir propiedades geométricas durante el proceso de resolución de problemas de conjeturación, que los estudiantes: 1) acepten o no medidas aproximadas para determinar el cumplimiento de una propiedad, cuando se hace arrastre de contraste; 2) realicen aprehensión perceptual o discursiva para proponer soluciones particulares e inmediatas a un problema; 3) combinen la aprehensión operativa de cambio figural con la perceptual para generalizar una solución particular; 4) combinen la aprehensión operativa de cambio posicional con el arrastre de separación para percibir una solución general; 5) utilicen los arrastres de separación y generalización para determinar condiciones suficientes para que se cumpla una propiedad; 6) comparen diferentes representaciones en las que se cumple una misma propiedad, mediante el arrastre de contraste, para realizar aprehensión con anclaje de lo visual a lo discursivo. También se concluyó que existe una mutua influencia entre los tipos de arrastre y los tipos de aprehensiones, durante el proceso de resolución de problemas abiertos de conjeturación en un SGD, por lo cual resulta útil combinar ambas teorías (de La Variación y de las Aprehensiones Figurales) como herramientas de análisis.

Elaborado por:	Sánchez, Carlos David
Revisado por:	Samper de Caicedo, Carmen

Fecha de elaboración del resumen:	15	junio	2018

CONTENIDO

LISTA DE TABLAS Y FIGURAS

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo corresponde a la línea de investigación Argumentación y Prueba en Geometría, de la Maestría en Docencia de la Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional. En esta línea de investigación, se estudia, entre otras, la actividad demostrativa en el campo de la Didáctica de la Geometría. Esa actividad comprende los procesos de conjeturación y justificación. En este trabajo se aborda el uso e interpretación de lo que representan los estudiantes en un programa de geometría dinámica cuando resuelven problemas de conjeturación. El trabajo se dividió en cinco capítulos:

En el Capítulo 1 se describe el problema y se formula la pregunta de investigación. Se presenta la justificación del estudio y los objetivos. Además, se incluye la revisión de la literatura.

El segundo capítulo consta del marco teórico. Aquí se plantean los conceptos básicos de las dos teorías que se utilizaron como referentes: la Teoría de la Variación y la Teoría de las Aprehensiones Figurales. También se establece una conceptualización sobre: definición de problema, problemas abiertos de conjeturación y su clasificación.

En el Capítulo 3, se presenta el diseño metodológico. El capítulo se divide en dos partes: aspectos generales y aspectos específicos. En la primera parte se menciona el tipo de investigación, el enfoque investigativo y la estrategia metodológica que se utilizó. En la segunda parte se describe cómo se llevó a cabo cada una de las fases en las que se divide la estrategia metodológica adoptada.

El desarrollo del análisis se muestra en el Capítulo 4. En este capítulo se analiza el proceso de resolución que llevó a cabo cada grupo de trabajo para resolver las tareas propuestas. En el análisis, se describen e interpretan las intervenciones de los estudiantes y extractos de sus reportes escritos en los que utilizaron tipos de arrastre y de aprehensiones.

Finalmente, en el Capítulo 5 se muestran los resultados y conclusiones del ejercicio investigativo. Los resultados son observaciones que resultan de un análisis comparativo. A partir de estas, se establecen conclusiones que dan respuesta a la pregunta de investigación. También hay conclusiones sobre el tipo de problemas propuestos, el papel del docente y las teorías que se utilizaron como herramientas de análisis.

1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En este capítulo se describe el problema de investigación, para lo cual se presentan evidencias empíricas y teóricas del mismo. Luego, se formula la pregunta de investigación y se presentan la justificación, la revisión de la literatura y, por último, los objetivos. El hecho de que se presenten los objetivos al final del capítulo, es porque algunos de ellos se proponen a propósito de los referentes teóricos sobre los que se hizo la revisión de la literatura.

1.1. DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Existen numerosos estudios e investigaciones que reportan las ventajas de implementar las TIC (Tecnologías de la Información y la Comunicación) para promover el aprendizaje en el aula de matemáticas. Particularmente, se ha comprobado que la geometría dinámica es útil para mejorar procesos como la resolución de problemas y la demostración (De Villiers, 1998; Laborde, 1998; Marrades y Gutiérrez, 2000). De acuerdo con esto, desde el año 2000, el Ministerio de Educación Nacional (MEN), en asociación con otras entidades gubernamentales, promueven el programa Computadores para Educar, por medio del cual se ha dotado a los colegios oficiales con computadores y tabletas, para fomentar su uso en el aula de clase.

La presente tesis se enmarca en el contexto mencionado anteriormente, ya que la institución educativa en la que se realizó la experiencia que se reporta en este trabajo de grado, fue dotada, por Computadores para Educar, con tabletas, algunas de ellas destinadas para las clases de matemáticas. Las tabletas se han utilizado principalmente en las clases de geometría. Desde que se llevaron a cabo las primeras experiencias del uso de un Sistema de Geometría Dinámica (SGD), se identificó que los estudiantes tenían la siguiente dificultad: reconocer propiedades o relaciones geométricas para poder formular una conjetura cuando resuelven problemas usando geometría dinámica.

Para comprender mejor el problema anterior, se realizó el ejercicio de recopilar evidencias empíricas y teóricas del mismo. Las evidencias empíricas se utilizaron para verificar que efectivamente este era un problema en el contexto real del aula. Las evidencias teóricas permitieron reconocer que este es un problema de investigación en el campo de estudio de la Didáctica de la Geometría.

Las evidencias empíricas se obtuvieron de los registros escritos de 41 estudiantes de grado octavo y de una entrevista que se les hizo a seis de ellos. La entrevista fue acerca de las estrategias que usaron para resolver la tarea de hallar el conjunto de puntos del plano que equidistan de dos puntos fijos A y B.

Los estudiantes debían resolver el problema, individualmente, utilizando GeoGebra, y hacer su propio registro escrito del proceso de solución o autoprotocolo (Gutiérrez, 2005). Ellos contaban con cierta experiencia en el manejo del programa, porque en clases anteriores se había trabajado algunas actividades sobre perpendicularidad, punto medio de un segmento y mediatriz, conceptos que podrían ser útiles en la resolución del problema.

Los seis estudiantes que se entrevistaron fueron elegidos porque en sus registros escritos mostraron diferentes estrategias de solución. El propósito era indagar sobre el tipo de exploración que realizaron en GeoGebra y las conclusiones que obtuvieron. En general, los estudiantes usaron las siguientes estrategias de exploración.

Arrastre guiado: esta estrategia consistió en ubicar un punto C que no perteneciera al $\overline{AB}$, medir las distancias AC y BC, y arrastrar a C para ver si existe una posición en la que las medidas coincidan exactamente. Así, el arrastre guiado (Gutiérrez, 2005) los llevó a obtener una solución particular del problema.

Localización de punto medio: con esta estrategia se halló como solución particular el punto medio C entre A y B.

Construcción de circunferencias: esta estrategia consistió en trazar las circunferencias con centros A y B, y radio AB. Como puntos equidistantes se obtuvieron los puntos de intersección C y D de las circunferencias.

Uso de la mediatriz: esta estrategia consistió en trazar la mediatriz del $\overline{AB}$ y ubicar en ella algunos puntos, confirmando que estos eran equidistantes de A y de B.

En la siguiente tabla se muestran las cantidades de estudiantes que utilizaron cada estrategia de exploración.

Tabla 1. Cantidad de estudiantes que usaron cada estrategia

Estrategia	Cantidad de estudiantes
Arrastre guiado	32
Localización de punto medio	4
Construcción de circunferencias	2
Uso de la mediatriz	3

Los estudiantes que usaron una de las tres primeras estrategias, tuvieron dificultad para, a partir de la observación de sus representaciones, reconocer la existencia del lugar geométrico (mediatriz) que es la solución de la tarea propuesta. Por ejemplo, algunos de los estudiantes que utilizaron la *estrategia arrastre guiado* consideraron que se puede garantizar la equidistancia de C a A y a B solo cuando las medidas que aparecen en la pantalla coinciden exactamente. Olivero y Robutti (2007) plantean que estos estudiantes permanecen en el campo de la percepción visual, es decir, que solo confían en lo que está a la vista. En la siguiente transcripción es evidente esta dificultad.

> 11. Profesor: ¿Podrías encontrar algún otro [otro punto equidistante, aparte de C]? ¿Me puedes mostrar cómo?
>
> 12. Patricia: Voy a colocar D por acá (selecciona la herramienta Punto), y luego distancia de este a este (halla la distancia AD), y de este a este (halla la distancia BD). Acá podemos ir moviendo (arrastra el punto D procurando que sea equidistante de A y de B). Espera… … …. (Intenta por varios segundos y descarta a D porque las medias respectivas no quedan exactamente iguales).

Aunque Patricia se imagina que existen otros puntos que equidistan de A y de B, como no logra que las medidas reportadas coincidan exactamente, la forma como interpreta su representación limita la posibilidad de que establezca relaciones para identificar el lugar geométrico que es solución de la tarea propuesta.

Respecto a las estrategias *localización de punto medio* y *construcción de circunferencias*, es posible afirmar que en cada una de estas los estudiantes evocaron representaciones visuales relacionadas con el término *equidistancia*, el cual aparece en el enunciado del problema, y que previamente fue utilizado para definir punto medio y circunferencia. Los estudiantes que construyeron circunferencias obtuvieron dos puntos C y D que eran equidistantes de A y de B, pero les faltó visualizar que a la recta que determinan estos dos puntos podrían pertenecer otros puntos equidistantes de los dos puntos dados. En ambos casos, al observar las representaciones no se reconoció la posible de existencia de otros puntos con la misma propiedad. Se concluye que la dificultad de todos estos estudiantes para identificar propiedades y relaciones geométricas que les permitan plantear una conjetura, se deba, entre otras, a la forma como utilizaron e interpretaron las representaciones que construyeron.

Los estudiantes que construyeron la mediatriz del $\overline{AB}$ evocaron una imagen de este objeto geométrico, el cual era conocido por ellos. No obstante, la mediatriz nunca se había relacionado con el término equidistancia en clases anteriores, ya que esta se había definido solo como la recta perpendicular a un segmento en su punto medio. Lo que sí se había realizado era la construcción de la mediatriz con regla y compás. Es posible que ellos hayan logrado “ver” la equidistancia de varios puntos a los extremos del segmento, en el momento en el que trazaron la recta, y por ello la evocaron. Como no tenían seguridad de que los puntos de la mediatriz eran equidistantes de A y de B, tuvieron que comprobarlo hallando las medidas correspondientes, como se puede observar en el reporte escrito de Alex.

1/ construi un segmento AB
2/ Le saque mediatriz al segmento AB
3/ ala mediatris de AB le hize un punto C
4/ medi la distancia entre los puntos AC la cual dio 3,56
5/ medi la distancia entre los puntos CB la cual dio 3,56.

Así, Alex y los otros dos estudiantes que utilizaron esta estrategia, lograron reconocer el lugar geométrico de los puntos que satisfacen la condición exigida en el enunciado del problema. Sin embargo, cuando se le preguntó a Alex sobre la existencia de otros puntos equidistantes, aparte de C, él ubicó otros puntos en la mediatriz y verificó que las medidas fueran iguales. Esto evidencia que hay un problema en la interpretación de la representación construida, ya que el punto C es considerado por Alex como un punto particular y no, de manera general, como cualquier punto perteneciente a la mediatriz. Al respecto Maracci (2001) plantea que es difícil para los estudiantes reconocer el carácter general de las representaciones en un programa de geometría dinámica.

De acuerdo con las evidencias empíricas y teóricas planteadas anteriormente, se formula la siguiente pregunta de investigación:

¿Qué aspectos del uso e interpretación de lo que representan los estudiantes en un Sistema de Geometría Dinámica (SGD), cuando resuelven un problema, les permite o no identificar propiedades y relaciones geométricas con las que puedan formular una conjetura que sea solución de este?

1.2. JUSTIFICACIÓN

De acuerdo con la descripción del problema, se presentan los siguientes argumentos para justificar la necesidad de llevar a cabo el ejercicio investigativo que se propone en el presente trabajo.

- Se aprovecha el potencial pedagógico de la geometría dinámica, en este caso mediante el uso de tabletas digitales (Bairral y Arzarello, 2015). Con esto se fomenta en las clases el uso de estos instrumentos, lo cual es una de las necesidades institucionales que motivaron la elaboración de esta propuesta.

- Se diseñan tareas para que las clases de geometría en la institución se desarrollen en un ambiente de geometría dinámica. Ello cambia las prácticas educativas que hasta el momento se han venido desarrollando en dichas clases, pues se promueven en el aula de clase los procesos de comunicación, razonamiento y resolución de problemas, a partir del de conjeturación. Estos son tres de los cinco procesos generales cuya importancia se resalta en los Estándares de Matemáticas y que son evaluados en las Pruebas Saber.

- Se puede aportar a la investigación en el campo de la resolución de problemas. Como este estudio consiste en determinar cómo los estudiantes exploran y visualizan, para reconocer propiedades geométricas de las figuras, que les permita formular conjeturas cuando resuelven problemas, los resultados obtenidos pueden servir para confirmar o discutir ideas sobre los procesos de conjeturación, exploración y visualización en la resolución de problemas en clases de geometría de educación básica.

- Se puede mostrar existencia de complementariedad entre teorías propuestas en el campo de la Didáctica de la Geometría, cuando se utilizan como herramientas de análisis de las producciones de los estudiantes. En particular entre la Teoría de la Variación y la Teoría de las Aprehensiones Figurales, de las que a continuación se presenta una revisión de algunas de las investigaciones que se han hecho al respecto.

1.3. REVISIÓN DE LA LITERATURA

La revisión de la literatura se centró, principalmente, en dos teorías que guardan estrecha relación con el problema de investigación planteado: la Teoría de la Variación, en particular, su aplicación en el estudio del aprendizaje de la geometría, y la Teoría de las Aprehensiones Figurales de Raymond Duval. Las razones para que la revisión de la literatura se haya centrado en estas dos teorías son: primero, ambas teorías estudian cómo los estudiantes interpretan y pueden utilizar representaciones geométricas cuando resuelven problemas; segundo, hay indicios investigativos (Leung, 2011) que sugieren que estos dos referentes teóricos pueden complementarse tanto en el diseño de tareas, como en el análisis de los procesos de exploración, visualización y conjeturación en geometría. Por lo anterior, en lo que sigue se describe en qué consisten ambos referentes y se mencionan algunos trabajos que permiten ilustrar cómo se ha desarrollado la investigación en ambas vertientes.

La Teoría de la Variación es una teoría del aprendizaje que surge de la fenomenografía. Esta teoría busca explicar cómo un estudiante puede ver, experimentar y entender un fenómeno (Orgill, 2012). Los primeros trabajos de investigación acerca de la Teoría de la Variación (Bowden y Marton, 1998; Marton, Runesson, y Tsui, 2004) mencionan que el discernimiento, la variación y la simultaneidad son los conceptos principales de esta teoría. En particular, resaltan la importancia de que los estudiantes disciernan los aspectos críticos de un fenómeno o problema mediante experiencias de variación, pues ello posibilita su comprensión o resolución. En Marton et al. (2004) se plantea que el objeto de aprendizaje de la Teoría de la Variación son las competencias, entendidas como aquellas acciones (interpretar, ver, discernir etc.) que se realizan en el proceso de aprendizaje de cierto conocimiento en determinada área de estudio; por ejemplo, la clasificación de polígonos en geometría euclidiana. En ese mismo trabajo, establecen los cuatro patrones de variación que pueden promover el discernimiento de las características críticas de un fenómeno o problema: contraste, separación, generalización y fusión.

Los trabajos mencionados anteriormente establecen las bases de la Teoría de la Variación. Posteriormente, aparecen otros trabajos en los que se desarrollan o ejemplifican los conceptos propios de esta teoría. Entre estos, se destaca el trabajo de Lo (2012) cuyo objetivo es mostrar cómo esta teoría puede mejorar las prácticas de enseñanza y de aprendizaje. En particular, muestra ejemplos, en diferentes áreas del conocimiento, con el fin de ayudar a comprender cómo el uso de los patrones de variación puede promover el aprendizaje en el aula de clase.

En el campo de la Didáctica de la Geometría, la mayoría de los trabajos de investigación relacionados con la Teoría de la Variación son de autoría o coautoría del profesor Allen Leung de *Hong Kong Baptist University*. En Leung (2003), él muestra, por primera vez, cómo los conceptos de la Teoría de la Variación (discernimiento, simultaneidad y patrones de variación) pueden utilizarse para analizar el proceso de aprendizaje cuando se trabaja en un ambiente de geometría dinámica. Este documento es introductorio y tiene como fin divulgar la relación entre la Teoría de la Variación y los ambientes de geometría dinámica. Más adelante, en Leung (2008), el autor profundiza en dicha relación explicando cómo los patrones de variación permiten interpretar y analizar propiedades durante el proceso de exploración, mediante los diferentes tipos de arrastre en geometría dinámica (Arzarello, Olivero, Paola, y Robutti, 2002), cuando se resuelve un problema de conjeturación.

Existen otros trabajos más recientes (Leung, 2011, 2014, 2015; Leung, Baccaglini-Frank y Mariotti, 2013) en los que se analiza el uso de la Teoría de la Variación en dos situaciones: el diseño de tareas para trabajar en ambientes de geometría dinámica y el discernimiento de invariantes. Por ejemplo, en Leung (2011) se presenta un modelo de diseño de tareas para ambientes tecnológicos, particularmente ambientes de geometría dinámica, que se desarrolla en tres fases: la primera para reconocer y aplicar los tipos de arrastre, la segunda para identificar invariantes, y la tercera relacionada con la formulación de conjeturas y la producción de argumentos. En Leung et al. (2013), se profundiza en lo que significa discernimiento de invariantes y se definen tipos de invariantes en un SGD. En ese documento se establece una diferenciación entre las acciones percibir y discernir, lo que complementa el concepto de discernimiento que originalmente se plantea en la Teoría de la Variación.

Por otra parte, se revisaron documentos acerca de la Teoría de las Aprehensiones Figurales de Raymond Duval. Estos documentos pueden clasificarse en dos grupos: los artículos publicados por Duval en los que expone su teoría, y las investigaciones que se han realizado aplicándola, en algunos casos junto con otros referentes teóricos.

En uno de los primeros trabajos de Duval (1995), este investigador francés muestra la complejidad cognitiva de la interpretación de figuras geométricas cuando se resuelven problemas. En este trabajo, el autor utiliza el término *aprehensión* para dar a entender que hay diferentes formas de *ver* una figura geométrica. Duval considera cinco tipos de aprehensiones: perceptual (reconocimiento a simple vista de una figura), secuencial (utilizada para describir construcciones de figuras), discursiva (reconocimiento visual relacionado con definiciones, teoremas o propiedades geométricas) y operativa (relativa a las formas como se puede modificar una figura conservando sus propiedades).

En documentos posteriores, Duval profundiza en la relación entre los distintos tipos de aprehensiones. En Duval (1998) se establece que la visualización en geometría implica tres cambios que dependen de los tipos de aprehensiones que se puede tener de una figura geométrica: cambio dimensional (por ejemplo de 3D a 2D), cambio de anclaje (de lo discursivo a lo visual y viceversa) y cambio figural (que corresponde a la aprehensión operativa). Duval (1999) plantea conclusiones respecto a las aprehensiones y su relación, Entre estas se encuentran: que la aprehensión operativa es independiente de la discursiva, que la aprehensión discursiva muchas veces se reduce a la aprehensión perceptual mediante el simple reconocimiento de formas, y que la aprehensión perceptual no necesariamente promueve un tipo de aprehensión operativa en la resolución de problemas. Cabe mencionar que en estos trabajos no se profundiza en el estudio de la aprehensión secuencial. Es posible que esto se deba a que este tipo de aprehensión corresponde más al proceso de construcción de figuras geométricas, que al proceso de visualización. Esto teniendo en cuenta que para Duval (1998) los procesos de visualización, construcción y razonamiento deben trabajarse por separado.

Luego de que Duval planteara la Teoría de Aprehensiones Figurales, varios investigadores se han dado a la tarea de profundizar en sus planteamientos. Por ejemplo, Torregrosa y Quesada (2007) proponen un modelo para analizar la relación entre el proceso de visualización y el de razonamiento. Para esto, proponen el concepto de *proceso configural* como la coordinación entre las aprehensiones discursiva y operativa. Este estudio se realizó mediante el análisis de respuestas de profesores en formación a determinados problemas geométricos. La investigación confirma la hipótesis de Duval respecto a que la coordinación de los procesos de visualización y razonamiento se puede lograr mediante un trabajo diferenciado de ambos procesos en el desarrollo curricular. En Marmolejo y Vega (2012) se analiza el rol heurístico de las figuras geométricas. Ello se hace a través del proceso de resolución de tareas sobre regiones poligonales propuestas a estudiantes de tercero de primaria. Los resultados del análisis evidencian que la aprehensión operativa de reconfiguración es poco utilizada por los estudiantes cuando resuelven ese tipo de problemas. En Michael-Chrysanthou y Gagatsis (2013), se analiza la relación entre la aprehensión perceptual y operativa mediante los resultados de dos tareas propuestas a 881 estudiantes de secundaria de Chipre. Los autores muestran que la aprehensión perceptual puede ayudar o inhibir la aprehensión operativa; además, exponen que la aprehensión perceptual de una figura geométrica muchas veces se conserva a pesar de las diferentes experiencias de enseñanza. Finalmente, en Deliyianni, Elia, Gagatsis, Monoyiou, y Panaoura (2009) se documenta un estudio en el que se analizaron los resultados de tareas que se propusieron a estudiantes de primaria y secundaria. Las tareas se diseñaron específicamente para cada tipo de aprehensión. Los resultados muestran que existe una estructura en el uso de las aprehensiones que se conserva en primaria y secundaria, aunque con ciertas diferencias. Por ejemplo, en primaria se privilegia el uso de la aprehensión perceptual, lo que implica que las figuras geométricas se utilicen como objeto de validación.

La revisión de la literatura aporta elementos teóricos y metodológicos para la realización del presente trabajo, así como una nueva forma de entender el problema y la pregunta de investigación planteada. Respecto a los elementos teóricos se puede distinguir la evolución de los conceptos claves de la Teoría de la Variación y de la Teoría de las Aprehensiones Figurales, y sus posibles relaciones. Metodológicamente, se puede evidenciar cómo se han utilizado los referentes teóricos de ambas teorías para construir categorías de análisis del aprendizaje de los estudiantes. Además, de acuerdo a estos dos referentes teóricos, es posible entender el uso de lo que representan los estudiantes en un SGD, en términos de los tipos de arrastre, y la interpretación de las representaciones, en términos de los tipos de aprehensiones, cuando resuelven problemas de conjeturación.

1.4. OBJETIVOS

De acuerdo a la pregunta de investigación formulada y a la revisión de la literatura hecha, se proponen los siguientes objetivos.

1.4.1. Objetivo general

Determinar el potencial de la articulación de la Teoría de la Variación y la Teoría de las Aprehensiones Figurales como herramienta de análisis para la identificación de aspectos del uso e interpretación de lo que representan los estudiantes en un SGD, que influyan en el reconocimiento o no de propiedades geométricas durante el proceso de resolución de problemas.

1.4.2. Objetivos específicos

- Estudiar tipos de tareas que favorezcan la formulación de conjeturas y que promuevan la exploración en SGD; seleccionar aquellas que se consideren útiles para el estudio.

- Reconocer los momentos en los que los estudiantes utilizan e interpretan lo que representan en un SGD durante el proceso de resolución de las tareas que se propongan.

- Caracterizar la relación entre ambas teorías cuando se utilizan como herramientas para analizar el trabajo de los estudiantes en un ambiente de geometría dinámica.

- Conformar la articulación de la Teoría de la Variación y la Teoría de Aprehensiones Figurales.

2. MARCO TEÓRICO

De acuerdo con el problema de investigación planteado, en el presente trabajo se busca caracterizar cómo los estudiantes utilizan e interpretan lo que representan en un SGD cuando resuelven problemas que implican la formulación de una conjetura. En este sentido, en el marco teórico se exponen los referentes que se utilizan para entender: 1) qué son problemas de conjeturación y cómo se clasifican; 2) cómo los estudiantes utilizan las representaciones que construyen; 3) cómo interpretan dichas representaciones. En el primer aspecto, se utiliza la definición de problema que proponen Campistrous y Rizo (2013), la definición de problema de conjeturación de Baccaglini-Frank y Mariotti (2010) y la clasificación de este tipo de problemas que proponen Samper, Molina, Camargo, Perry y Plazas (2013). En el segundo, se explica qué es percepción, discernimiento, y cómo se puede utilizar los patrones de variación cuando se resuelven problemas en un SDG, de acuerdo con los planteamientos de Allen Leung. Y en el tercero, se propone la Teoría de las Aprehensiones Figurales de Raymond Duval.

2.1. PROBLEMAS ABIERTOS DE CONJETURACIÓN

Campistrous y Rizo (2013) plantean la siguiente definición:

> "Se denomina problema a toda situación en la que hay un planteamiento inicial y una exigencia que obliga a transformarla. La vía para pasar de la situación o planteamiento inicial a la nueva situación exigida tiene que ser desconocida y la persona debe querer hacer la transformación" (p. 293).

En particular, problemas abiertos son aquellos cuyo enunciado no sugiere la solución ni un método específico para hallarla (Moggeta, Olivero y Jones, 1999, citados en Baccaglini-Frank y Mariotti, 2010). En geometría, la resolución de problemas abiertos generalmente involucra la formulación de una conjetura. Por esto, se les denomina problemas abiertos de conjeturación (Baccaglini-Frank y Mariotti, 2010).

Para ilustrar las anteriores definiciones observemos las siguientes tareas.

- Demostrar que cualquier punto que pertenece a la mediatriz de un $\overline{AB}$ equidista de sus extremos.
- Hallar el conjunto de puntos del plano que equidistan de dos puntos fijos A y B.

Si partimos del supuesto de que una persona quiere resolver estas dos tareas y desconoce la estrategia para hacerlo, podemos decir que ambas tareas son problemas para ella. En el primer problema, la persona puede desconocer cómo hacer la demostración, pero en el enunciado es explícita la respuesta: cualquier punto P de la mediatriz de un $\overline{AB}$ equidista de sus extremos. Por esto, ese no es un problema abierto. En cambio, en el segundo problema no es explícita la respuesta ni se sugiere algún método de solución. Además, la solución de ese problema implica la formulación de una conjetura: si P es cualquier punto que equidista de dos puntos fijos A y B, entonces P pertenece a la mediatriz del $\overline{AB}$. Por lo anterior, el segundo problema es un problema abierto de conjeturación.

Como el objetivo de un problema abierto de conjeturación es formular una conjetura y expresarla como una proposición condicional, este tipo de problemas se pueden clasificar de acuerdo con el tipo de información que los estudiantes deben encontrar, bien sea el antecedente o el consecuente de la condicional (Samper et al., 2013). Generalmente, en geometría, los problemas abiertos de conjeturación requieren la representación de una situación geométrica, para estudiarla con el fin de descubrir relaciones entre los objetos representados. Para resolver la mayoría de estos problemas resulta conveniente utilizar geometría dinámica, porque permite estudiar varias representaciones de una misma situación geométrica en un tiempo reducido. Samper et al. (2013) clasifican los problemas abiertos de conjeturación de la siguiente forma.

Problema de búsqueda del consecuente: es aquel en el que el enunciado brinda las condiciones suficientes (antecedente) y se deben buscar las consecuencias necesarias de estas (consecuente); es decir, este tipo de problema exige, no solo la representación de los objetos que se mencionan en el enunciado, sino la exploración de las representaciones construidas para identificar propiedades y relaciones invariantes que son consecuencia de aquellas que se construyeron. Un ejemplo de este tipo de problemas es: Sea $\Delta\, ABC$, P cualquier punto de la $\overleftrightarrow{BC}$ y M punto medio del $\overline{AP}$. ¿Qué relación existe entre el conjunto de puntos M y la $\overleftrightarrow{BC}$? En este caso los estudiantes deben construir el $\Delta\, ABC$, el $\overline{AP}$ y M. Si la representación es con geometría dinámica, mediante el arrastre, pueden observar que los puntos M son colineales y que M es un punto de una recta paralela a la $\overleftrightarrow{BC}$. Más aún, pueden reconocer que la recta, es la $\overleftrightarrow{DE}$, donde D y E son los puntos medios del $\overline{AB}$ y del $\overline{AC}$, respectivamente.

Problemas de búsqueda del antecedente: es aquel en el que en el enunciado se menciona la consecuencia necesaria y se deben hallar las condiciones suficientes para que esta se cumpla. Para esto, es posible que se deba construir, además de los objetos mencionados en el enunciado, algunas construcciones auxiliares que, durante la exploración, permitan determinar las propiedades de un objeto existente, o determinar aquellas que garantizan la existencia de un objeto. Un ejemplo de este tipo de problemas es: ¿qué condición debe cumplir un punto P para que equidiste de los lados de un $\angle ABC$? En este caso, los estudiantes deben hallar la condición suficiente (que el punto P pertenezca a la bisectriz) para que se cumpla la propiedad de equidistancia.

Problema de determinación de dependencia: es aquel en el que el enunciado provee un conjunto referencial de figuras geométricas y alguna propiedad, y se debe establecer la relación de dependencia entre ambos. Para esto, la persona que resuelve el problema puede decidir en qué se enfoca. Si estudia cierto tipo de figuras del conjunto referencial para determinar si cumplen la propiedad, entonces el antecedente de la conjetura es el tipo de figura. Si busca establecer la propiedad para determinar el tipo de figura resultante, la propiedad se vuelve el antecedente de su conjetura. Es decir, la posible conjetura que formula la persona que resuelve el problema depende de qué moviliza sus acciones, si el conjunto de figuras o la propiedad. Un ejemplo de este tipo de problemas es: ¿cuál es la relación entre tipos de triángulos y la propiedad dos de sus alturas son congruentes? En este caso los estudiantes pueden enfrentar el problema de dos formas distintas. Primera, construyendo en un ΔABC dos de sus alturas, medirlas y procurar mediante el arrastre que sean congruentes para identificar qué tipo de triángulo se forma, con lo cual la propiedad es el antecedente y el tipo de figura el consecuente. Segunda, construir diferentes tipos de triángulos, o descubrir el tipo de triángulo mediante el arrastre en un SGD, y verificar en cuáles de ellos se cumple la congruencia de dos de sus alturas, con lo cual el tipo de figura es el antecedente y la propiedad el consecuente.

2.2. PERCEPCIÓN, DISCERNIMIENTO Y PATRONES DE VARIACIÓN

Investigadores como Leung et al. (2013) consideran necesario precisar la diferencia entre percepción y discernimiento, cuando se realiza un proceso de exploración en un SGD con el propósito de descubrir una propiedad y formular una conjetura. Para esto, dichos investigadores toman como referentes algunos conceptos que, desde el punto de vista psicológico, plantea Neisser (1989, citado en Leung et al. 2013), y otros que corresponden a la Teoría de la Variación.

Neisser establece dos acciones cognitivas: percibir (*perceiving*) y pensar (*thinking*). Según él, percibir es inmediato y no requiere esfuerzo, es decir, se realiza de manera directa. En cambio, pensar es un proceso indirecto, que no depende, en su totalidad, de la experiencia inmediata que tenga el individuo con su entorno. Neisser establece que percibimos objetos, sus propiedades y también posibles acciones que se pueden realizar con estos.

En consonancia con lo anterior, Leung et al. (2013) consideran que en un SGD una persona puede percibir, no solo las representaciones que construye y sus propiedades, sino también un conjunto de posibles acciones que se pueden realizar con estas y que involucran el uso de varias herramientas, entre ellas el arrastre. El arrastre da lugar a una infinidad de representaciones que permiten que la persona perciba aspectos que persisten a pesar del movimiento, los cuales se denominan *invariantes* (Neisser, 1989 citado en Leung et al. 2013).

Que un estudiante perciba un invariante en un SGD, no necesariamente implica que él lo interprete matemáticamente. Así, es necesario que, asociado a la percepción, haya cierto tipo de reflexión (*thinking*) que haga que el estudiante evoque aspectos conceptuales. Por tanto, para distinguir entre la simple percepción y la percepción acompañada por interpretación geométrica en el que se traen a colación aspectos conceptuales, Leung et al. (2013) usan la palabra *discernimiento*. Por ejemplo, si se le propone a un estudiante construir un paralelogramo $ABCD$ en GeoGebra, él podría usar la definición para construirlo utilizando las herramientas Recta y Paralela. Si él arrastra alguno de los vértices podría percibir en un primer momento que hay lados que tiene medidas iguales. Hasta aquí, solo hay percepción del invariante. Pero si él afirma que “en el paralelogramo los lados opuestos son congruentes”, en ese momento hay discernimiento de ese invariante, ya que ha relacionado su percepción inicial con el concepto de paralelogramo y con la relación de congruencia de segmentos, elementos que hacen parte del sistema teórico de la geometría euclidiana.

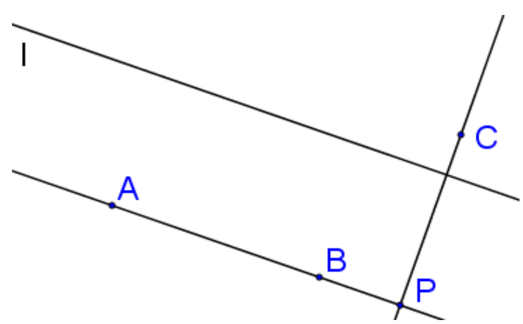
2.2.1. Tipos de invariantes en un SGD

Laborde y Strässer (1990, citados en Leung et al. 2013) establecen una diferencia entre invariantes en un SGD. En primer lugar, están aquellos *construidos* por el uso de herramientas, las cuales determinan relaciones geométricas específicas. Además, están los invariantes *derivados*, es decir, aquellos que resultan de los invariantes construidos, como consecuencia de las relaciones de dependencia definidas en geometría euclidiana. Según Leung et al. (2013) la relación entre invariantes también es un invariante. Por esto, clasifican los invariantes en dos niveles:

Nivel 1: aspectos de una representación percibidos como constantes durante su variación mediante el arrastre (invariantes construidos y derivados).

Nivel 2: relaciones invariantes entre invariantes del Nivel 1.

Figura 1. Niveles de invariantes



Para identificar en qué consisten los dos niveles de invariantes se presenta el siguiente ejemplo. En un SGD, se construye una $\overleftrightarrow{AB}$ y un punto *P* de ella, una $\overleftrightarrow{CP}$ perpendicular a la $\overleftrightarrow{AB}$ y una recta *l* paralela a la $\overleftrightarrow{AB}$, por cualquier punto externo a la $\overleftrightarrow{AB}$. Al arrastrar el punto A o el punto B , es posible percibir que la perpendicularidad ($\overleftrightarrow{CP} \perp \overleftrightarrow{AB}$ construido) y el paralelismo ($l \parallel \overleftrightarrow{AB}$ construido) son invariantes, así como la relación de perpendicularidad entre *l* y la $\overleftrightarrow{CP}$ (derivado). Este tipo de invariantes son de nivel 1. Ahora bien, si se establece una relación entre estos tres invariantes, puede obtenerse uno nuevo que es de nivel 2: si una recta es perpendicular a una de dos rectas paralelas, entonces es perpendicular a la otra. Por tanto, el invariante de nivel 2 corresponde al reconocimiento de una relación causal o de dependencia entre invariantes de nivel 1.

2.2.2. Discernimiento de invariantes y patrones de variación en un SGD

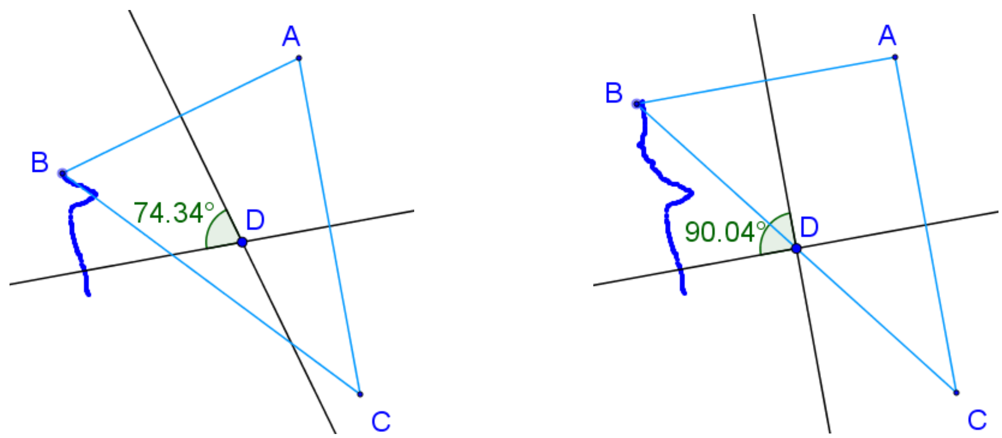
Como aspecto esencial de la Teoría de la Variación, Marton et al. (2004) propone cuatro patrones de variación que pueden intervenir en el proceso de discernimiento, ya sea si se está trabajando en un SGD o no: contraste, separación, generalización y fusión. Los patrones de variación pueden utilizarse para el diseño de tareas y para analizar el proceso de exploración de los estudiantes cuando usan el arrastre para resolver problemas en ambientes de geometría dinámica (Leung, 2003, 2008, 2011). En el presente trabajo se utilizarán como herramienta de análisis. De acuerdo con esto, los patrones de variación que puede utilizar un estudiante cuando resuelve un problema en un SGD, se pueden identificar si se determina con qué intención él utiliza la herramienta arrastre en el proceso de exploración. A continuación, se describe cada patrón de variación. Para ilustrar en qué consiste cada uno de ellos, se propone como ejemplo la siguiente tarea y se describe una posible ruta de exploración en un SGD que permita resolverla usando dichos patrones.

> ¿Existen tipos de triángulos en los que las mediatrices de dos de sus lados sean perpendiculares entre sí?

Contraste: consiste en determinar si un objeto o fenómeno cumple cierta condición o no. Este patrón de variación favorece la percepción de invariantes, al identificar diferencias entre las distintas representaciones de una misma situación. De acuerdo con esto, el *arrastre de contraste* es aquel que se realiza con la intención de buscar diferencias entre las configuraciones para las cuales pudiera cumplirse determinada propiedad (Leung et al., 2013).

En el problema anterior, que es de determinación de dependencia, se puede centrar la atención en buscar cuándo se cumple la propiedad. La exploración comienza con la construcción de un ΔABC, las mediatrices de dos de sus lados (por ejemplo, del $\overline{AB}$ y del $\overline{BC}$) y medir el $\angle D$ que estas determinan. Luego, se puede arrastrar, por ejemplo, el vértice B, con el fin de determinar si existen puntos para los cuales se cumpla la perpendicularidad de las mediatrices. En la siguiente imagen se muestra el arrastre del punto B, con el Rastro activado, hasta hallar un punto para el cual el triángulo cumple la propiedad.

Figura 2. Arrastre de contraste

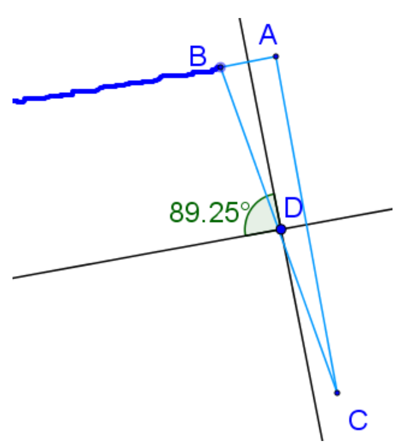


Con el *arrastre de contraste* es posible comparar que hay triángulos para las que no se cumple que dos mediatrices sean perpendiculares, con un triángulo en el que sí cumple esa propiedad.

Separación: consiste en variar cierto aspecto de un objeto o fenómeno, mientras se mantienen otros invariantes, para promover un posterior discernimiento de alguna de sus características críticas. En el *arrastre de separación* se varía la posición de un punto mientras se intenta mantener invariante una propiedad (Leung et al., 2013).

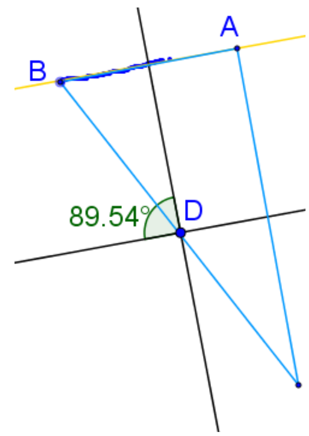
Continuando con la exploración del problema en cuestión, mediante el arrastre de contraste se determinó que hay triángulos para los que las mediatrices del $\overline{AB}$ y del $\overline{BC}$ son perpendiculares. Luego, se puede arrastrar a B, con el Rastro activado, procurando mantener invariante la perpendicularidad de las mediatrices. Al centrar la atención en los puntos B que hacen cumplir la propiedad, es posible discernir que para cualquiera de esos puntos el ΔABC es rectángulo.

Figura 3. Arrastre de separación



Generalización: consiste en verificar, en forma global, la invariancia de una característica crítica de un objeto o fenómeno. El *arrastre de generalización* se utiliza para verificar el invariante que se ha descubierto en el proceso de exploración (Leung et al., 2013).

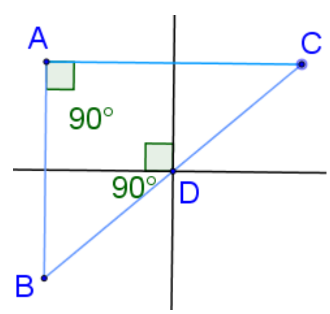
Figura 4. Arrastre de generalización



Hasta el momento, en la exploración del problema se ha discernido que los puntos B, que cumplen la propiedad, determinan triángulos rectángulos. Para comprobar este posible invariante, se puede construir una recta l perpendicular al $\overline{AC}$ en A y arrastrar a B tratando de mantenerlo sobre esa recta para observar que efectivamente las mediatrices construidas son perpendiculares, cuando B pertenece a la recta.

Fusión: consiste en establecer una relación entre varios aspectos críticos de un fenómeno, cuando se experimenta la variación simultánea de estos. El *arrastre de fusión* se realiza cuando se hace una construcción robusta del invariante que se discernió y se arrastra de modo que se evidencie la relación entre la característica crítica dada en el enunciado del problema y el invariante descubierto (Leung et al., 2013).

Figura 5. Arrastre de fusión



Para concluir la exploración del problema, se construye un ΔABC rectángulo con $\angle A$ recto, las mediatrices de sus catetos (invariante que posiblemente solo se descubra en este momento) y se mide el ángulo que estas determinan. El arrastre de cualquiera de los vértices permite percibir un invariante de nivel 2: la relación entre el tipo de triángulo y la perpendicularidad de las mediatrices de dos de sus lados. Esto brinda la posibilidad de formular la siguiente conjetura: si un triángulo es rectángulo, entonces las mediatrices de sus catetos son perpendiculares.

2.3. VISIÓN, VISULIZACIÓN Y TIPOS DE APREHENSIONES

Según Duval (1998), para que una figura represente un objeto geométrico debe cumplir:

- Ser una configuración, es decir, la unión de varias gestalts (puntos, segmentos, rectas, entre otras) que tienen relaciones entre ellas, relaciones que visualmente caracterizan la configuración (por ejemplo, que los segmentos se intersecan dos a dos y solo en sus extremos).

- Estar anclada a un enunciado o a un discurso que determine algunas de las propiedades que representan las gestalts que la constituyen (por ejemplo, que los segmentos son congruentes).

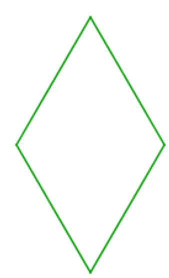
La percepción de una figura geométrica y el discernimiento de propiedades invariantes a partir de esta, tienen relación, respectivamente, con lo que Duval (1998) denomina visión y visualización. La visión es lo que se reconoce a primera vista. La visualización permite reconocer relaciones entre las gestalts que determinan una configuración. Así, hay diferentes formas de ver una figura, las cuales se denominan *aprehensiones* (Duval, 1995).

2.3.1. Tipos de aprehensiones

De acuerdo con las condiciones mencionadas anteriormente, una persona podría identificar en una figura solo la configuración como tal (visión), o podría plantear algún tipo de enunciado sobre sus propiedades (visualización). Esto permite establecer dos posibles tipos de aprehensiones de la figura: una perceptual y otra discursiva.

Perceptual: es la identificación simple de una figura en su totalidad. Por ejemplo, una persona puede ver la Figura 6 en su totalidad (solo en 2D) como una ventana, como un diamante o como un rombo. En geometría, es usual identificar la figura como un rombo, si ese objeto geométrico lo conoce la persona. Por ejemplo, es posible que un estudiante de sexto grado reconozca que la figura es un rombo, porque esta es la imagen conceptual (Vinner, 1991) que seguramente adquirió en primaria. Pero esto

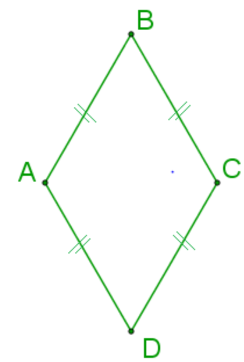
Figura 6. Aprehensión perceptual



no necesariamente significa que reconozca algún tipo de relación entre sus gestalts constitutivas (por ejemplo, la congruencia de sus lados).

Discursiva: es la relación entre las gestalts que constituyen la representación y el enunciado que expresa propiedades del objeto geométrico representado. Esta relación se puede presentar en dos sentidos.

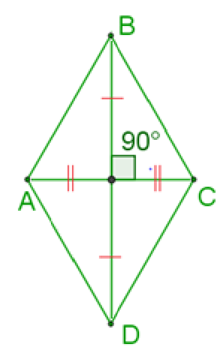
Figura 7. Aprehensión de lo visual a lo discursivo



De lo visual a lo discursivo

Al observar la Figura 7 una posible afirmación sobre esta es que "$ABCD$ es un rombo". Así, se podría estar relacionando las gestalts que constituyen la representación (los segmentos) con propiedades que determinan al objeto que representa la figura. El enunciado se plantea a partir de la representación (por esto es de lo visual a lo discursivo), y las marcas en los lados comunican que existe una relación de congruencia entre los mismos. A diferencia de la aprehensión perceptual, más que ver la figura en sí misma, se observa la figura como un todo a partir de las relaciones entre las gestalts que la conforman.

Figura 8. Aprehensión de lo discursivo a lo visual



De lo discursivo a lo visual

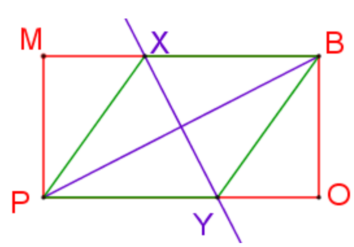
Del enunciado "$ABCD$ es un rombo" una persona podría, entre otras, realizar la Figura 8. En este caso, la representación se hace teniendo en cuenta, por ejemplo, el enunciado del siguiente teorema (por esto es de lo discursivo a lo visual): si un cuadrilátero es rombo, entonces sus diagonales se bisecan y son perpendiculares. La persona utiliza propiedades específicas de un rombo (en este caso respecto a sus diagonales) para construir una configuración que lo represente.

Según Duval (1999), la aprehensión discursiva muchas veces se reduce al reconocimiento de formas, lo cual es propio de la aprehensión perceptual. El reconocimiento y organización de formas, en ciertas situaciones, se presenta de acuerdo con las leyes de la Gestalt: proximidad, similaridad, continuidad, cerramiento, simetría, o figura y fondo (Gal y Linchevski, 2010). Hay *proximidad* cuando se realiza agrupamiento de objetos porque se encuentra cerca unos a otros; *similaridad* cuando, habiendo diferentes objetos, se tiende a agrupar aquellos que tiene formas similares; *continuidad* cuando se privilegia la "buena continuación de una curva", por ejemplo, cuando dos líneas se intersecan se tiende a percibir cada una, más que las configuraciones que determinan su intersección*; cerramiento* cuando mentalmente se "completa" una figura de modo que se obtenga determinada figura (Pomerantz y Kubovy, 1986); *simetría* cuando hay una tendencia a reconocer figuras simétricas o completarlas como tal; *figura y fondo* cuando hay regiones que comparten un borde, el cual visualmente se asigna a una de estas para conformar la figura, y la región adyacente, sin borde, se convierte en el fondo (Gal y Linchevski, 2010).

Cuando se resuelve un problema geométrico, muchas veces se debe modificar la configuración inicial. Este tipo de cambios en la representación supone otro tipo de aprehensión que se denomina operativa (Duval, 1995). Según el tipo de modificación, la aprehensión operativa puede ser: de cambio figural, de reconfiguración (Torregrosa y Quesada, 2007) o posicional (Duval, 1998).

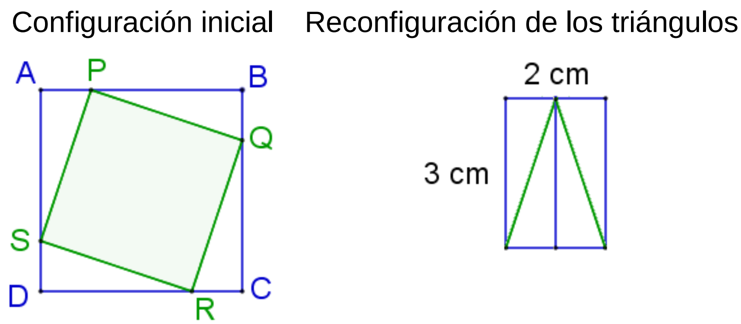
Aprehensión operativa de cambio figural: se da cuando se modifica la configuración inicial agregándole o quitándole elementos para crear nuevas subconfiguraciones que permitan resolver el problema. Por ejemplo, si se debe construir robustamente un rombo $XBYP$ en un rectángulo $MBOP$ dado, tal que X y Y pertenezcan al $\overline{BM}$ y al $\overline{OP}$, respectivamente, se puede construir la diagonal $\overline{BP}$ del rectángulo y su mediatriz, la $\overleftrightarrow{XY}$. En este caso se presenta aprehensión operativa de cambio figural porque se construyen objetos nuevos, que no hacen parte de la configuración inicial, para poder resolver el problema.

Figura 9. Aprehensión operativa de cambio figural



Aprehensión operativa de reconfiguración: sucede cuando se utiliza la configuración inicial para crear otras configuraciones. Es la manipulación de las figuras que conforman la configuración inicial como si fueran piezas de un rompecabezas (Torregrosa y Quesada, 2007). Por ejemplo, en el problema de calcular el área del cuadrado $PQRS$ en la siguiente figura, en la que el que $ABCD$ es cuadrado, $AB = 4 \text{ cm}$ y $AP = SD = BQ = CR = 1 \text{ cm}$, se puede presentar la aprehensión operativa de reconfiguración.

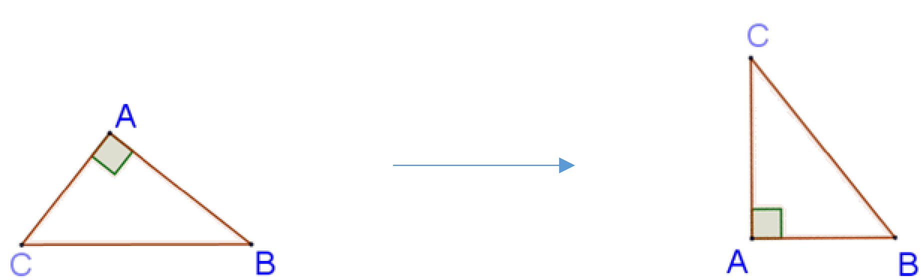
Figura 10. Aprehensión operativa de reconfiguración



La reconfiguración de los triángulos permite determinar que el área total de la región no sombreada es 6 cm^2. Como el área del cuadrado $ABCD$ es 16 cm^2, el área del cuadrado $PQRS$ es 10 cm^2. En este caso no se agregó ni se quitó elemento alguno de la configuración inicial, sino que se creó, a partir de esta, una nueva subconfiguración.

Aprehensión operativa posicional: consiste en cambiar la orientación de una figura para poder reconocerla. Este tipo de modificación influye en la forma como se perciben, por ejemplo, los ángulos rectos. Así, para hallar el área del ΔABC rectángulo un estudiante puede requerir rotarlo para reconocer que una de sus alturas es precisamente uno de sus catetos.

Figura 11. Aprehensión operativa posicional



Los tres tipos de aprehensiones (perceptual, discursiva y operativa) producen cambios en la visualización. Estos cambios pueden ser de anclaje, figurales o dimensionales. Los cambios de anclaje son propios de la aprehensión discursiva, es decir, puede haber cambio de lo discursivo a lo visual o viceversa. Los cambios figurales son propios de la aprehensión operativa pues se modifica la figura. En cambio, los cambios dimensionales se presentan cuando, a partir de una configuración simple, se identifica otra de mayor dimensión o cuando a partir de una figura dada se reconocen sus gestalts constitutivas. Este tipo de cambio se puede presentar como resultado de cualquiera de las tres aprehensiones.

3. DISEÑO METODOLÓGICO

El presente trabajo se enmarca en lo que se denomina investigación cualitativa, porque estudia un problema relacionado con el aprendizaje de la geometría desde la perspectiva de los estudiantes y en el contexto del aula de clase. Según Hernández, Fernández y Baptista (2010) esta es una de las principales características de la investigación cualitativa: comprender los fenómenos desde la perspectiva de los participantes y en relación con su contexto.

En este tipo de investigación el diseño metodológico puede ser flexible (Abarca, Alpizar, Sibaja, y Rojas, 2012). Con esto se quiere decir que si bien se escoge una estrategia metodológica específica que se considera permite atender al problema de investigación, esta se puede adaptar al contexto, tiempos y recursos con los que se dispone para llevar a cabo el ejercicio investigativo.

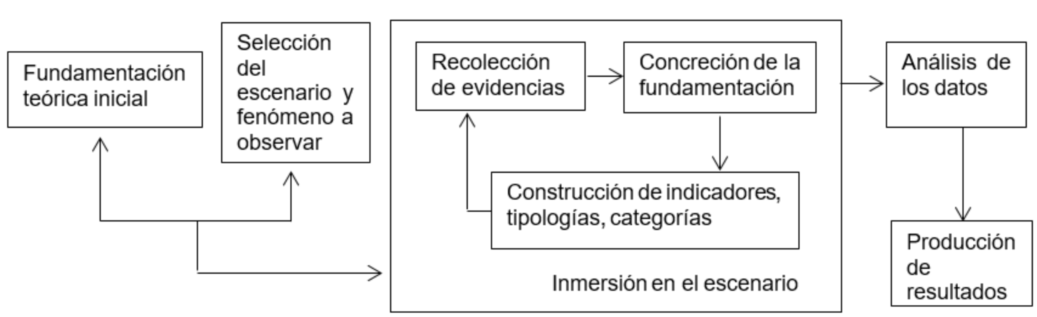
En lo que sigue se plantean aspectos generales y específicos del diseño metodológico de este estudio. En los aspectos generales, se establece el enfoque y la estrategia investigativa que se utilizó. En los aspectos específicos, se menciona cómo se hizo operativa dicha estrategia en el contexto en el que se realizó el estudio.

3.1. ASPECTOS GENERALES

Según Camargo (s.f.), hay dos enfoques que predominan en la investigación en educación matemática: el empírico- analítico y el fenomenológico. El primero se caracteriza porque busca controlar variables, predecir resultados y formular leyes, generalmente mediante el uso de recursos estadísticos, por lo cual se relaciona con el enfoque cuantitativo. El segundo busca describir, interpretar, explicar con el fin de hacer inferencias fundamentadas de los fenómenos que se indagan en la investigación. Por esto, el enfoque fenomenológico se asocia a las investigaciones de tipo cualitativo. Este enfoque es el que se asumió en el presente trabajo, porque se quería analizar qué aspectos del uso e interpretación de lo que representan los estudiantes en un SGD les permite o dificulta discernir propiedades cuando resuelven problemas abiertos de conjeturación.

Teniendo en cuenta el enfoque investigativo y el problema de investigación planteado, se requiere de una estrategia de investigación cualitativa que provea cierta sistematicidad en los procesos de recolección de la información, obtención de los datos, definición de categorías de análisis, análisis y producción de resultados. Por ello, la estrategia que se adoptó en este trabajo es la que Camargo (s.f.) denomina "basada en prácticas usuales", es decir, basada en las actividades que forman parte del quehacer habitual del contexto en el que se realiza el estudio. En esta estrategia se asume una perspectiva naturalista del ejercicio investigativo, porque el investigador está presente en el escenario en el que se llevan a cabo dichas prácticas tratando de generar la menor alteración posible. Cuando el propósito es estudiar la vida en el aula de clase (Johnson, Sullivan, y Williams, 2009) en nuestro caso la clase de geometría, la estrategia basada en prácticas usuales se le denomina específicamente *classroom based research*. En esta estrategia se hace la recolección de información mientras que los estudiantes y el docente realizan sus actividades como habitualmente lo hacen. Camargo (s.f.) propone las siguientes etapas para aplicar la estrategia basada en prácticas usuales, cuando ya se tiene idea del fenómeno que se quiere estudiar.

Figura 12. Estrategia metodológica basada en prácticas usuales. Tomado de Camargo (s.f.)



El objetivo de la fundamentación teórica inicial es tener ciertos referentes previos que sirvan para orientar el proceso de observación, en este caso, cuando se haga la inmersión en el aula de clase. Estos referentes se pueden modificar o concretar durante el trabajo investigativo con el fin de plantear las categorías que se utilizarán para el análisis de los datos obtenidos.

A continuación, se menciona de qué forma se utilizó dicha estrategia investigativa en el presente estudio, adaptándola al contexto en el que se realizó la recolección de información.

3.2. ASPECTOS ESPECÍFICOS

La descripción que se presenta a continuación tiene como fin mostrar qué acciones se realizaron en cada etapa, sin que por ello se entienda que las etapas se desarrollaron en forma lineal. Por ejemplo, la fundamentación teórica inicial se realizó a la vez que se seleccionó el escenario (la clase de geometría) y los estudiantes (dos grupos de tres estudiantes) que se iban a observar cuando realizaban las tareas propuestas. Para contextualizar al lector sobre el tipo de población con la que se trabajó, se describirá primero cómo fue el proceso de selección del escenario y de la muestra de estudiantes. Luego, se describirá cómo se realizaron las otras etapas de la estrategia investigativa.

3.2.1. Contexto y selección del escenario

La investigación se hizo en las clases de geometría de un grupo de estudiantes de una institución educativa oficial del municipio de La Calera (Cundinamarca). En el año 2016, cuando se inició la investigación, había 44 estudiantes de grado octavo, divididos en dos cursos, cada uno de 22 estudiantes. Para ellos, la enseñanza de la geometría había sido irregular en años anteriores debido a que, como ellos mismos manifestaban, los profesores que habían tenido priorizaban el trabajo en aritmética, usando para ello la hora de clase de geometría. A inicios de ese año, el profesor del grupo, autor de este estudio, propuso algunas tareas con geometría dinámica dado su interés por esta y la necesidad de utilizar los recursos tecnológicos (tabletas digitales) con los que contaba la institución. Los acontecimientos en el aula durante esas experiencias sirvieron para dos cosas: 1) reconocer que el uso de geometría dinámica motivó a los estudiantes a resolver las tareas y 2) identificar lo que más adelante se definiría como el problema de investigación.

Dado que el uso de geometría dinámica no era una práctica usual, en todas las clases que se realizaron con ese grupo de estudiantes durante ese año se promovió su uso a través de diversas tareas. Esto con el fin de que los estudiantes se habituaran a ciertas prácticas de aula como: el trabajo en grupo, la resolución de problemas abiertos, el uso de un SGD, la necesidad de elaborar reportes escritos del proceso de resolución de las tareas propuestas; todo lo anterior constituye lo que se denomina un ambiente de geometría dinámica (Sinclair y Robutti, 2013). También fue usual que el profesor utilizara cámaras o programas de captura de pantalla y registro de audio durante las clases, con lo cual estos recursos de recolección de información también se volvieron parte del ambiente habitual de la clase. Así, ese primer año de trabajo con los estudiantes sirvió para convertir el ambiente natural de la clase en un ambiente de geometría dinámica.

En el año 2017, los dos grupos de grado octavo pasaron a conformar un solo grupo de grado noveno con 36 estudiantes. La dinámica de trabajo con ese grupo se mantuvo; para los estudiantes ya era usual que las clases de geometría se gestionaran con geometría dinámica. En ese momento, se decidió hacer una selección de los estudiantes para el proceso de observación. La muestra inicial correspondía a tres grupos, cada uno con tres estudiantes. Se conformaron los tres grupos teniendo como principal criterio que los estudiantes en cada uno se hubiesen destacado en las clases porque se involucraban en la resolución de los problemas propuestos. Al mismo tiempo que se seleccionó la muestra, se realizó una fundamentación teórica inicial, antes de realizar lo que, en la estrategia investigativa, se denomina “inmersión en el escenario”; es decir, el proceso que inicia con la recolección de información.

3.2.2. Fundamentación teórica inicial

La fundamentación teórica inicial que tuvo el profesor autor de este trabajo, se llevó a cabo durante la formulación del proyecto en el año 2016, a partir de su participación en los seminarios de la Maestría en Docencia de las Matemáticas de la UPN de la cual es estudiante. La línea de investigación (Argumentación y Prueba en Geometría), en la que se inscribe este trabajo, orientó la fundamentación hacia el estudio de la Teoría de la Variación y sus aplicaciones en el campo de la Didáctica de la Geometría. Esto permitió tener un primer referente para definir el problema de investigación y para posteriormente orientar la observación. Durante este tiempo, también se hizo un estudio sobre problemas abiertos de conjeturación, dado que en los documentos estudiados era recurrente referirse a la implementación de este tipo de tareas, lo que sugirió la idea de que su resolución, por parte de los estudiantes, podría ser un buen insumo para la recolección de información.

3.2.3. Recolección de la información

La técnica que se utilizó para la recolección de información fue la observación del proceso que llevaron a cabo los grupos de estudiantes seleccionados para resolver dos problemas abiertos de conjeturación. En lo que sigue se explica cómo se aplicó esta técnica: los problemas propuestos, la dinámica de trabajo en las clases, el tiempo que se empleó, el rol del docente y los recursos o instrumentos que se utilizaron. Luego, se presentan algunos argumentos sobre porqué la forma como se hizo la recolección de información hace parte de la estrategia investigativa basada en prácticas usuales.

Para realizar la observación se seleccionaron los siguientes dos problemas abiertos de conjeturación.

Problema 1

Dados dos puntos fijos A y B:

a) ¿Existe un punto X tal que la medida del $\mathrm{m}\angle AXB = 90°$?

b) ¿Existen más puntos con esa propiedad?

c) ¿Cómo le explicarían a otra persona dónde encontrar todos los puntos que encontraron?

Problema 2

a) Dado un ΔABC, ¿es posible que las bisectrices de dos ángulos consecutivos sean perpendiculares? Describan lo que hicieron para responder esta pregunta.

b) Dado un cuadrilátero $ABCD$, ¿es posible que las bisectrices de dos ángulos consecutivos sean perpendiculares? Describan lo que hicieron para responder esta pregunta.

c) Realicen la construcción robusta de un cuadrilátero en el cual se cumpla esa propiedad. Expliquen cómo lo construyeron.

Estos problemas se seleccionaron porque: 1) se deben representar, en el SGD, las situaciones que se mencionan en los enunciados, lo que presupone que durante el proceso de resolución se realice algún tipo de aprehensión; 2) son problemas abiertos de conjeturación, específicamente, de búsqueda de antecedente. Se decidió elegir, de los problemas preseleccionados, los dos de búsqueda de antecedente, porque en el proceso de fundamentación teórica inicial se pudo observar su potencial para promover diferentes estrategias de exploración en un SGD, principalmente mediante el uso del arrastre. En el Problema 1 se previó que los estudiantes podrían representar el $\angle AXB$ y en el Problema 2 construir el triángulo (literal a) o el cuadrilátero (literal b) con las bisectrices de dos ángulos consecutivos, con lo cual podría realizarse, al menos, aprehensión perceptual de estas representaciones. Luego, a partir de esas representaciones, se previó que los estudiantes arrastrarían para hallar, en el Problema 1, una configuración en la que la $\mathrm{m}\angle AXB = 90$, y en el Problema 2, configuraciones en las que las bisectrices de dos ángulos consecutivos (en el triángulo o en el cuadrilátero) fueran perpendiculares. Con esto, se consideró la posibilidad de que en principio se presentaría arrastre de contraste en ambos casos.

Los estudiantes trabajaron en los dos problemas durante tres clases de dos horas cada una. Para esto, cada grupo contó con una tableta digital en la que se encontraba instalado GeoGebra. La propuesta de trabajo en las clases fue la siguiente: cada grupo tuvo dos horas para resolver cada problema y para realizar el reporte escrito. Al finalizar, se hacía la socialización con todo el grupo de 36 estudiantes para discutir las diferentes estrategias de solución. Se utilizó esta dinámica de trabajo porque era a la que ya estaban habituados los estudiantes.

Durante el proceso de resolución de los problemas, el profesor pasaba por los diferentes grupos observando e indagando sobre las ideas que surgieron en cada uno, principalmente en los tres grupos seleccionados. En este sentido, el profesor asumió el rol de *observador participante* porque cumplió la función de observador por tiempos cortos en cada grupo de trabajo (Junker, 1960 citado en Álvarez-Gayou, 2003).

El tipo de observación que se realizó es el que Rodríguez (1999, citado en Álvarez-Gayou, 2003) denomina como *sistema tecnológico de observación*, que consiste en el registro de las situaciones mediante instrumentos de grabación de audio o imágenes para lograr una observación más precisa. Los instrumentos de registro que se utilizaron fueron: un programa de captura de pantalla y grabación de audio que fue instalado en las tabletas de los tres grupos de estudiantes y una videocámara. El programa se activó antes de que los estudiantes empezaran a resolver cada problema y la videocámara la usó el profesor con el fin de obtener un registro más preciso de las estrategias de exploración de los estudiantes, en especial cuando utilizaban el arrastre.

Según Gutiérrez (1991, citado en Camargo, s.f.) en las estrategias de investigación naturalistas, como la basada en prácticas usuales, lo ideal es que el proceso de recolección de información sea lo menos intrusivo posible para evitar que la información recolectada y los análisis que posteriormente se hagan se vean afectados. Al respecto, Wu (2002) aclara que es posible integrar recursos en el entorno natural de la clase de modo que este se mantenga como tal. Los instrumentos de registro de información mencionados en el párrafo anterior, pueden verse como intrusivos, así como el hecho de que el profesor videograbara las intervenciones de los estudiantes. No obstante, vale la pena recordar que el uso de estos instrumentos era parte del ambiente natural de las clases de geometría, ya que desde un año antes de la observación se utilizaban en estas. Para los estudiantes, el hecho de que el profesor usara estos recursos estaba justificado porque sabían que él observaba los registros para preparar las socializaciones con el fin de promover la discusión sobre las estrategias llevadas a cabo para resolver los problemas. Además, el hecho de que el observador haya sido el profesor, hizo que la comunicación con los estudiantes fuera espontánea, lo que supone una ventaja respecto al rol que podría asumir un observador externo.

3.2.4. Concreción de la fundamentación teórica y categorías de análisis

La fundamentación teórica inicial, que se realizó sobre la Teoría de La Variación, sirvió para orientar la observación durante la recolección de información. No obstante, se reconoció la necesidad de complementar ese referente teórico con otro que permitiera describir y analizar las interpretaciones de los estudiantes de las representaciones que construían en el SGD. Leung (2011) sugiere que los tipos de arrastre según la Teoría de La Variación y los Tipos de Aprehensiones Figurales de Duval (1995, 1998, 1999) pueden utilizarse en el diseño de tareas en ambientes de geometría dinámica. Esto motivó a que en este trabajo se utilizaran ambas teorías, no para diseñar tareas, sino como herramienta de análisis de las producciones de los estudiantes.

Antes de establecer las categorías de análisis, se observó que hay conceptos que pueden tener el mismo significado en ambas teorías. Específicamente, lo que Leung et al. (2013) denomina percepción y discernimiento, se puede entender en términos de Duval (1995, 1998, 1999) como visión y visualización, ligados a la aprehensión perceptual y discursiva, respectivamente. Las categorías de análisis surgieron directamente de los referentes teóricos que se tuvieron en cuenta. Estas fueron: tipos de arrastre de acuerdo con los patrones de variación y tipos de aprehensiones figurales. Para identificar estas categorías durante el proceso de depuración de la información y obtención de datos, se les asignaron los siguientes códigos.

Tabla 2. Categorías de análisis según tipos de arrastre y tipos de aprehensiones

Tipos de arrastre	*Código*
Contraste	C
Separación	S
Generalización	G
Fusión	F
Tipos de aprehensiones	*Código*
Perceptual	AP
Discursiva con anclaje de lo discursivo a lo visual.	AD-DV
Discursiva con anclaje de lo visual a lo discursivo.	AD-VD
Operativa de cambio figural	AO-F
Operativa de cambio posicional	AO-P

3.2.5. Descripción del proceso de obtención de datos y análisis

Como uno de los grupos quedó incompleto cuando uno de sus integrantes dejó el colegio por razones personales, los datos se conformaron con las producciones de los otros dos grupos. La obtención de los datos inició con la clasificación de la información que se tenía a la mano y con las transcripciones de los registros de audio y video. Los videos grabados por el profesor y los registros de captura de pantalla y audio, se clasificaron por problema y por grupo de estudiantes. A esta información se agregó el reporte escrito escaneado de los estudiantes cuando resolvieron cada problema. Para realizar las transcripciones, primero se identificaron en cada registro de audio los fragmentos en los que los estudiantes utilizaron el arrastre, realizaron alguna interpretación de lo que representaron en GeoGebra o reconocieron alguna propiedad geométrica. Luego, se transcribieron estos fragmentos complementando las intervenciones con imágenes capturadas en pantalla y con observaciones que se pudieron hacer a partir de los videos que grabó el docente.

Una vez realizadas las transcripciones, se identificaron, con los códigos correspondientes a las categorías de análisis, las intervenciones de los estudiantes que posiblemente se relacionaban con algún tipo de arrastre relacionado con los patrones de variación, o con alguna aprehensión figural. Con esto, los datos que posteriormente se analizaron fueron los episodios en los que se encontraban dichas intervenciones.

El proceso de análisis de los datos obtenidos se realizó mediante la *triangulación de investigadores* que sucede cuando varios investigadores interpretan un mismo conjunto de datos, confrontan y discuten sus ideas hasta llegar a interpretaciones similares (Camargo, s.f.). En este caso, el autor de este trabajo realizó una primera interpretación de las intervenciones para obtener los datos. Luego, confrontó sus interpretaciones con las de la profesora asesora. Se lograron interpretaciones comunes con las cuales se redactó un primer documento en el que se analizaron los datos; ese documento se revisó, y de la revisión surgieron ajustes que permitieron crear un segundo documento del análisis. Esto se realizó para cada problema y para cada grupo de estudiantes.

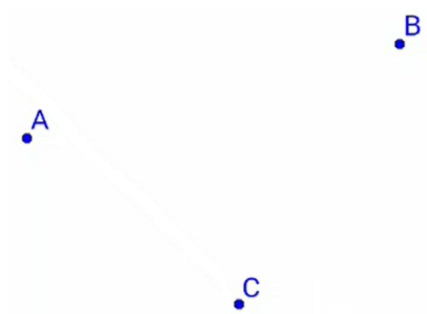
4. ANÁLISIS

A continuación, se analiza el proceso de resolución de los dos problemas propuestos. Al iniciar el análisis de cada problema, se presenta una breve descripción de cómo cada grupo lo resolvió.

4.1. ANÁLISIS DEL PROBLEMA 1 – GRUPO 1

Los estudiantes de este grupo hallan algunos posibles puntos que, con los puntos A y B dados, determinarían ángulos rectos. Esto lo realizan combinando el arrastre de un punto con el uso de la herramienta Rastro. Luego, identifican el lugar geométrico al que pertenecen los puntos que encuentran, disciernen algunas de sus propiedades y formulan una conjetura.

5.	Alex:	Ahí están fijos [los puntos A y B]. No, espere, un punto X que sea 90. Si tiene que haberlo, ¿no?	
6.	Brenda:	Obvio sí. Si pone un punto por acá (construye un punto C) eso va a ser un ángulo de 90.	AD-DV



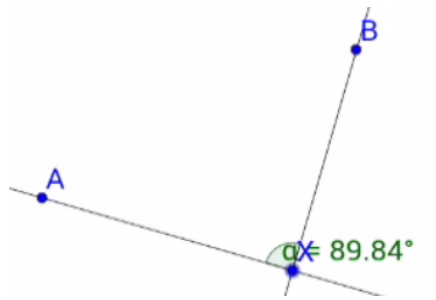
Los estudiantes representan los dos puntos dados A y B. Luego, Alex se cuestiona sobre la existencia de otro punto X tal que $\mathrm{m}\angle AXB = 90°$. Brenda le responde que este punto sí existe.

Consideramos que en este caso Brenda realiza aprehensión discursiva con anclaje de lo discursivo a lo visual, ya que la expresión "ángulo de 90" le permite a Brenda evocar una representación de este, que hace parte de su imagen conceptual (Vinner, 1991) de ángulo recto. Por eso, ella representa un punto C en un sitio tal que el $\angle ACB$ parece recto.

En la representación que hizo Brenda, Alex renombra a C como X y construye el $\angle AXB$ siguiendo las instrucciones de ella.

10.	Brenda:	Una recta de A a X, y a esta se le saca la perpendicular tal que quede con B.	AD-VD
11.	Alex:	¿Cómo así? Espere, una recta (construye la $\overleftrightarrow{AX}$).	

12.	Brenda:	Y ahora la perpendicular.	
13.	Alex:	Venga hacemos lo siguiente (construye una recta perpendicular a la $\overleftrightarrow{AX}$ en X). Sí se puede mover (arrastra el punto X con la intención de lograr que el perpendicular pase por B y mide el $\angle AXB$). Mide 89, 84. Hay más puntos con esa misma [propiedad]. Habría otro [punto], el de acá y ya (señala lo que parece ser el cuarto vértice de un cuadrilátero).	C y AP



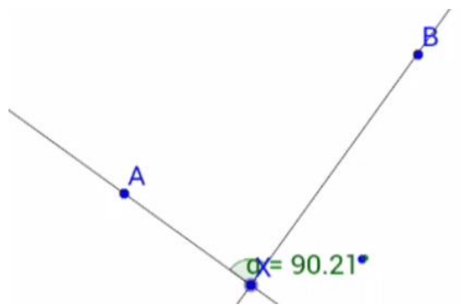
14.	Brenda:	¿Pero cómo le haríamos para que diera 90 exacto?	
15.	Alex:	No sé. Si corremos este se va a ir quitando (arrastra X de modo que la medida del $\angle AXB$ ya no se aproxima a 90°). No, dejémoslo ahí (arrastra nuevamente a X para que el $\angle AXB$ mida aproximadamente 90°).	C

En la intervención 10 Brenda realiza aprehensión discursiva, esta vez con anclaje de lo visual a lo discursivo, porque relaciona la representación de los tres puntos (A, B, C) con la definición de perpendicularidad. Alex acepta la sugerencia de Brenda, pero construye la recta perpendicular a la $\overleftrightarrow{AX}$ por X y no por B como ella propone. Luego, Alex mide el $\angle AXB$ y como B no es un punto de la perpendicular, esto le permite experimentar el patrón de contraste. Este patrón de variación se presenta cuando Alex arrastra a X para que B pertenezca a la perpendicular y compara que hay un punto X para el que la medida del $\angle AXB$ se aproxima a 90°, con otros para los que esta condición no se cumple [13 y 15].

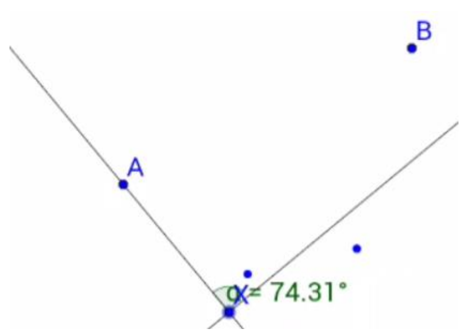
Cuando en la línea 13 Alex dice “Habría otro [punto], el de acá y ya”, él reconoce la existencia de otro punto X para el que la medida del $\angle AXB$ se aproxima a 90. Consideramos que el reconocimiento de ese punto se debe a que Alex realiza un tipo de aprehensión perceptual de la representación del $\angle AXB$, que involucran dos leyes de la Gestalt: buena forma y cierre. Alex percibe la representación del ángulo de 90° que ha construido y la completa mentalmente para formar un cuadrilátero con dos ángulos rectos (posiblemente un rectángulo), en el que los puntos A, B, y los dos posibles puntos X, son sus vértices.

Bajo la insistencia del profesor de que determinen si hay más puntos, Alex continúa arrastrando a X y logra hallar encontrar otro punto para el que la medida del $\angle AXB$ es 90,21°.

30.	Alex:	Sí, yo creo que sí (representa, con el Rastro, el punto X que acababa de hallar). Venga, elige y mueve (selecciona la herramienta arrastre y mueve el punto X hasta que encuentra otra posición en la que la medida del $\angle AXB$ se aproxima a 90°). Queda otro.	S y AP



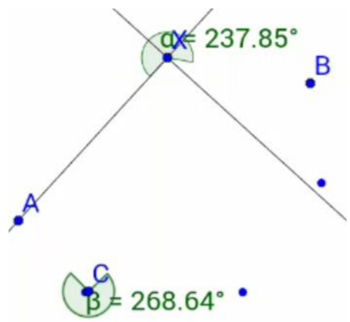
31.	Brenda:	¿Y el otro dónde estaba? [Refiriéndose al primer punto que habían hallado].	
32.	Alex:	Hum, ¿Cómo lo hallé? No sé, pero lo hallé. Sí, ahí hay otro (marca el otro punto que hallaron).	S.



En ese momento, se inicia la exploración mediante un arrastre de separación en el que los estudiantes identifican otros puntos que cumplen la característica crítica exigida en el problema. Hay separación porque Alex decide que la medida del $\angle AXB$ se debe mantener cerca de 90°, mientras varía la posición del punto X asegurando que B pertenezca a la perpendicular. Como Alex centra su atención en lograr que B pertenezca a la perpendicular, consideramos que en este caso él realiza un tipo de aprehensión perceptual de la representación construida.

Durante el proceso de exploración anterior, los estudiantes identificaron puntos que cumplían la condición exigida en el problema, solo en uno de los semiplanos determinados por la $\overleftrightarrow{AB}$. En un momento dado de la exploración Alex decide arrastrar a X al otro semiplano como se muestra a continuación.

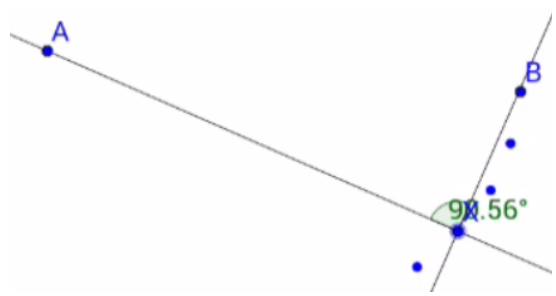
38.	Alex:	Vea si lo ponemos acá también (marca la posición de otro punto usando Rastro). ¿Venga se puede hacer esto? (arrastra el punto X con el rastro desactivado al otro semiplano determinado por la $\overleftrightarrow{AB}$, selecciona la herramienta ángulo y ubica un punto C sobre el rastro de uno de los puntos que había encontrado en el semiplano original, y mide el $\angle ACB$. Arrastra la construcción y se desaparecen los rastros que había encontrado). Pero, ¿por qué se quita? ¿Qué hago ahí? Llame al profe.	AO-P



39.	Brenda:	¡Profe!	
40.	Profesor:	¿Hallaron otro [punto]?	
41.	Alex:	Varios, Profe. Pero es que vea este lo pusimos al revés [refiriéndose al $\angle AXB$] pero si uno le da este [se refiere al punto C] se borran estos dos puntos [los rastros del punto X que ya habían marcado].	AO-P

El hecho de que Alex haya arrastrado a X al otro semiplano determinado por la $\overleftrightarrow{AB}$ puede considerarse como aprehensión operativa de tipo posicional, porque se cambia la orientación del $\angle AXB$ representado. Este cambio de posición no es accidental, sino que es una idea que Alex pone en práctica [38] para poder determinar la existencia de otros posibles puntos X. Esta idea es tenida en cuenta por Brenda quien percibe la existencia de otros tres puntos en ese semiplano, como se muestra a continuación [52]. El programa de geometría dinámica le provee una medida (237,85°) que dista bastante de los 90°, pero ese valor es ignorado por ella, quien decide aceptar el cumplimiento de la propiedad, basándose solo en su percepción del ángulo que determinan las dos rectas.

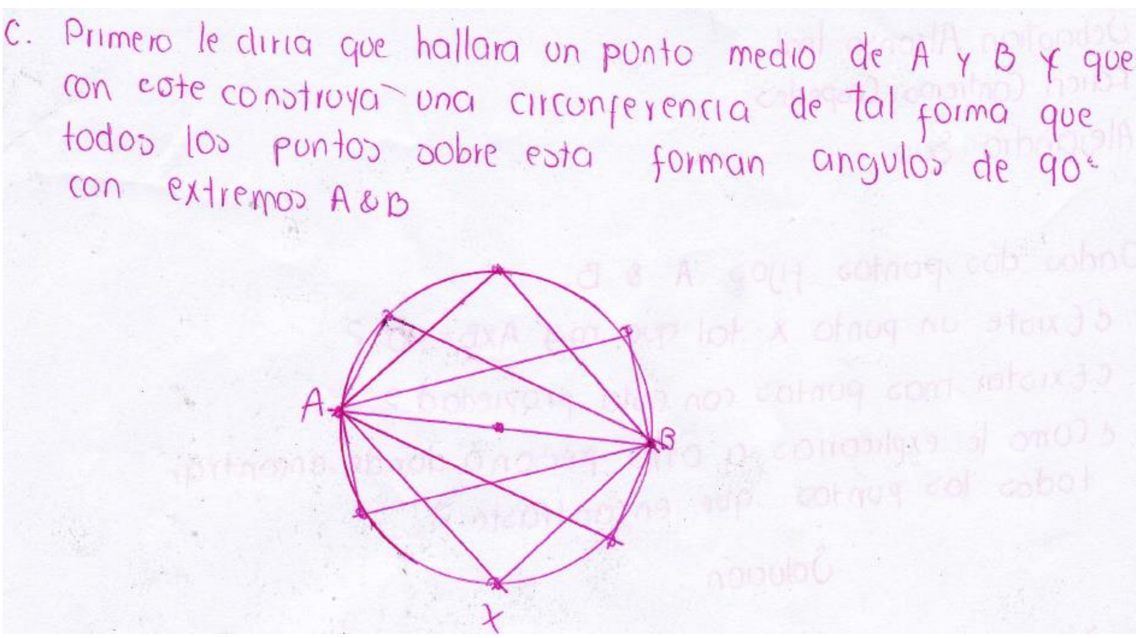
51.	Profesor:	Ya llevan tres [puntos], ¿será que solo hay tres?	
52.	Brenda:	No, hay seis porque por el otro lado también.	AP
53.	Alex:	Entonces qué, ¿escribimos eso?	
54.	Profesor:	Bueno, ustedes dicen que hay seis, ¿dónde están esos seis puntos?	
55.	Alex:	No sé si hay seis o no. Volvamos a hacer esto: archivo, nuevo, no guardar (vuelve a iniciar la construcción. Construye la perpendicular a la $\overleftrightarrow{AX}$ que pasa por X y arrastra este punto hasta que la perpendicular pase por B. Luego, mide el $\angle AXB$, cuya medida se aproxima a 90°. Activa el rastro de X lo desactiva y así marca diferentes puntos para los cuales la medida del ángulo se aproxima a 90°).	
56.	Brenda:	Profe, todos están en un círculo. Hay una circunferencia trazada acá (señalando el rastro de los puntos).	AP



57.	Alex:	Profe, se forma un círculo.	
58.	Profesor:	¿Será que sí?	
59.	Brenda:	Sí vea.	
60.	Alex:	Si uno sigue trazando vea profe se está comenzado a ver (construye el $\overline{AB}$ y su punto medio. Luego, construye la circunferencia con centro en el punto medio del $\overline{AB}$ que pasa por *B*).	AD-VD
61.	Brenda:	¿Si ve?	
62.	Alex:	Sí, profe vea.	

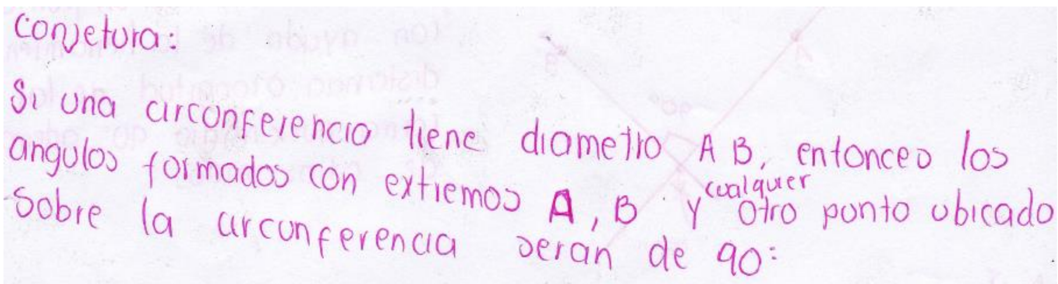
63.	Profesor:	Reporte lo que descubrieron. ¿Y si ustedes intentan arrastrar el $\angle AXB$, qué pasaría?	
64.	Alex:	¿Por todo este [círculo]? ¿Por toda la circunferencia? Vea acá va a dar 90, acá también (arrastra X sobre la circunferencia).	G
65.	Brenda:	Desde que esté sobre la circunferencia el punto X.	

Consideramos que en [52] Brenda realiza aprehensión perceptual cuando reconoce la existencia de otros tres puntos en el otro semiplano determinado por la $\overleftrightarrow{AB}$. En este caso, la percepción obedece la Ley de Simetría; es decir, Brenda percibe los puntos que son imagen de los tres puntos que ya había representado Alex. Esto se puede corroborar en el registro escrito de este grupo, ya que en este representan una circunferencia, para explicar lo que finalmente descubrieron, y en esta es evidente la simetría en la representación de los puntos.



Alex repite el proceso de exploración [55] y encuentra nuevamente varios puntos X para los cuales la medida del $\angle AXB$ se aproxima a 90°. De nuevo, se evidencia que Brenda realiza aprehensión perceptual de los puntos representados [57], esta vez bajo la Ley Cerramiento. Con esa serie de puntos Brenda completa los espacios (cerramiento) y así lo percibe como una circunferencia (Boring 1942, citado en Pomerantz y Kubovy, 1986), pero sin las propiedades geométricas que la determinan. Esto lo representan, en el reporte final, a través de la figura anterior. En la intervención 60, Alex realiza aprehensión de lo visual a lo discursivo, porque a partir de lo que percibe Brenda, identifica exactamente de qué circunferencia se trata: “una circunferencia con centro en el punto medio del $\overline{AB}$”.

Por último, se evidencia [64 y 65] el arrastre de generalización, ya que Alex arrastra a X sobre la circunferencia que construyó, para verificar que se cumple la propiedad siempre que X pertenece a esta, como lo confirma Brenda. Además, este proceso de generalización les permitió plantear la siguiente conjetura como solución del problema propuesto.

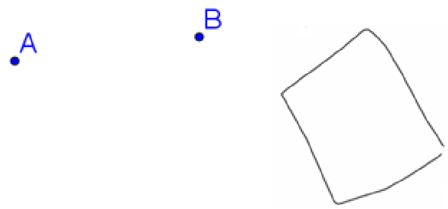

Conjetura:
Si una circunferencia tiene diametro A B, entonces los angulos formados con extremos A, B y cualquier otro punto ubicado sobre la circunferencia seran de 90:

4.2. ANÁLISIS DEL PROBLEMA 1 – GRUPO 2

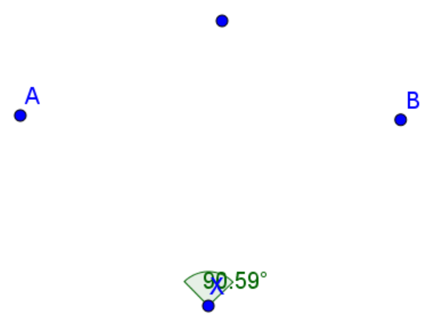
La solución de los estudiantes de este grupo al problema propuesto, es que existen solo dos puntos X tales que la $\mathrm{m}\angle AXB = 90°$. Esta solución surge de la idea de construir un cuadrado en el que los dos puntos X y los puntos A y B, son los vértices. Por esto, el proceso de resolución del problema de este grupo consiste en crear diferentes estrategias para construir un cuadrado: utilizando la bisectriz de un ángulo, la mediatriz de una de las posibles diagonales y usando como guía la cuadrícula de GeoGebra.

Desde el principio del proceso de resolución del problema, se presenta la idea de construir un cuadrado para hallar dos puntos X tales que la medida del $\angle AXB$ se aproxime a 90°.

6.	Camila:	(Representa los puntos A y B) ¿Acá no se puede dibujar un cuadradito? Elipse, circunferencia, polígono (explora la diferentes herramientas de GeoGebra). Pongamos Lápiz y hagamos un cuadrado. Listo, hice un **cuadrado** (traza el siguiente dibujo con la herramienta Lápiz). Entonces, deshagamos (borra el cuadrado que dibujó con la herramienta Deshacer). Entonces, dice un punto X, entonces hagamos un punto X.	AD-DV Luego, AP



7.	John:	Con un $\angle AXB$.	
8.	Camila:	Entonces X. ¿Dónde está, dónde está, donde está? (busca la herramienta Punto y construye un punto). Ahora renombrar, le vamos a poner X (coloca X como nombre del punto que construyó). Entonces vamos a poner Distancia o Longitud. ¡Ay no! ¿Qué hice? Y ángulo. (Selecciona la herramienta ángulo y mide el $\angle AXB$) Mide 82°. Entonces, espere, 91, 93…(arrastra a A aproximando la medida del ángulo a 90°).	C
9.	Diana:	90.59. ¡Uy!	
10.	Camila:	Bueno, ya sé. Ponga cuidado. **Si fuera un cuadrado mediría 90°.** O sea otro punto. Digamos si ponemos otro acá, también mediría 90.	AD-DV
11.	Diana:	Pues colócalo.	
12.	John:	Espere, espere. Ya. Listo (construye otro punto).	



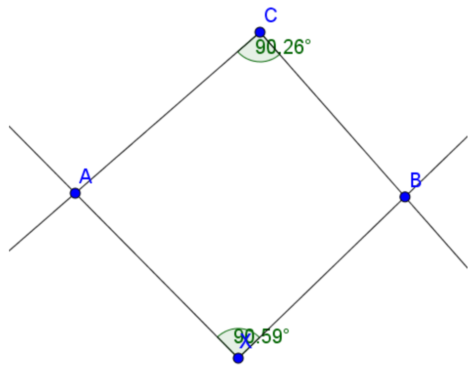
13.	John:	(Construye la $\overrightarrow{XA}$ y la $\overrightarrow{XB}$)	
14.	Camila:	Profe, profe. Tengo una hipótesis: otro punto a parte de X sería este [refiriéndose al último punto que constuyeron], porque si fuera un cuadrado esto también mediría 90°.	AD-DV

En las intervenciones anteriores se puede observar que Camila realiza aprehensión discursiva con anclaje de lo discursivo a lo visual, porque recuerda que los ángulos de un cuadrado son rectos y a partir de esa idea hace una representación con la herramienta Lápiz [6]. Esto lo confirma cuando menciona [10 y 14] la posibilidad de construir un cuadrado en el que dos de sus vértices son los puntos que solucionan el problema propuesto. Camila no involucra los puntos A y B en su dibujo de cuadrado. Consideramos que esto se debe a que ella hace en primera instancia el dibujo de un cuadrado en posición no estándar, para decidir, a través de la percepción, si este útil para resolver el problema. Luego de ver el dibujo se convence de que esa idea puede funcionar y construye un punto X [8] en una posición, no al azar, sino producto de la aprehensión perceptual que realiza del dibujo. Por esto, es que al medir el $\angle AXB$ su medida se aproxima a los 90°. No obstante, parece que para John es poco clara la idea que propone Camila, ya que a diferencia de ella construye lo que debería ser el otro vértice del cuadrado, en una posición en la que evidentemente la medida del ángulo que se determina dista mucho de los 90° [12].

Camila arrastra a A para que la medida del $\angle AXB$, que percibe en la pantalla, sea exactamente igual a 90° [8]. Es decir, que ella quiere determinar si hay una posición del punto A que cumpla esa condición y para ello *contrasta* diferentes posiciones en las que las medidas se aproximan a los 90°. Camila y Diana solo consideran que esta condición la pueden cumplir las posiciones de A para las cuales la medida del ángulo tiene como parte entera 90 [9]; para ellas, todas las otras posiciones que determinan ángulos cuyas medidas tienen como parte entera 89 y 91 no cumplen la condición establecida en el problema.

Camila nombra C al punto que construyó John y Diana mide el $\angle ACB$. Luego, John y Diana arrastran a C en busca de que la medida de ese ángulo sea igual a 90°. Dado que las medidas que los estudiantes ven en la pantalla no son exactas, Camila propone una estrategia para lograr exactitud [32].

31.	John:	Me pasé, ya casi (arrastró la construcción y buscó que la medida del $\angle ACB$ se aproximara a 90°).	
32.	Camila:	¡Ah! No, mire, pues hagamos esto: si sacamos la bisectriz va a quedar **recto** totalmente.	
33.	Diana:	(Continúa arrastrando para aproximar la medida del $\angle ACB$ a 90°).	
34.	John:	Ya. Déjelo ahí. Ya.	
35.	Camila:	¿Listo? Entonces hagamos una vaina. Espere. Semirrecta (construye la $\overrightarrow{CA}$ y la $\overrightarrow{CB}$). Pero eso no es un cuadrado.	AP



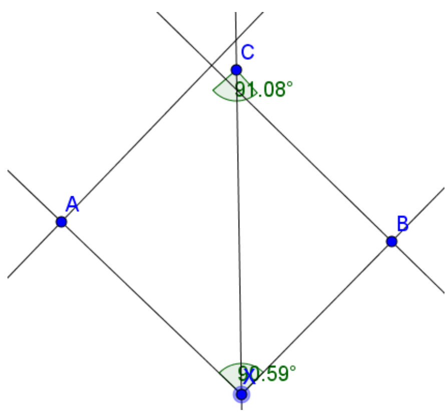
36.	John:	Es algo parecido (…). Estos no se pueden mover [refiriéndose a A y a B].	
37.	Camila:	Ay son puntos fijos, verdad. Pero este sí se puede mover (arrastra C). Tendría que acomodarse este, póngale cuidado (construye la bisectriz del $\angle AXB$ y arrastra C para que quede en la bisectriz).	AO-F

Inicialmente, John tiene dificultad para encontrar la posición del otro vértice C del cuadrado mediante el arrastre libre de ese punto [31]. Por esto, Camila sugiere construir la bisectriz para que quede *recto* [32]. En este caso, parece que la palabra *recto* hace referencia a que en la representación mental que tiene Camila de un cuadrado la bisectriz de un ángulo del cuadrado contiene al vértice opuesto.

La idea de Camila de construir la bisectriz se pospone, porque al parecer John y Diana encuentran una posición de C que para ellos cumple la condición de que el $\angle AXB$ es recto [33 y 34]. Por esto, Camila construye la $\overrightarrow{CA}$ y la $\overrightarrow{CB}$ que determinan los lados que faltan representar del cuadrado. Sin embargo, al construir estas semirrectas, Camila y John expresan que la figura no es un cuadrado [35 y 36]. En este caso hay aprehensión perceptual de la representación que construyeron los estudiantes, porque, como lo expresa Camila [35], lo que ven no concuerda con la imagen conceptual (Vinner, 1991) de cuadrado que tienen. Es posible que el hecho de que los estudiantes en este caso hayan determinado que la figura no representa un cuadrado, sea porque perceptualmente la figura representada incumple la ley de simetría; es decir, el punto C no se ve como imagen del punto X, si se considera la simetría axial respecto a la $\overleftrightarrow{AB}$. Camila cree que este inconveniente se soluciona si C pertenece a la bisectriz del $\angle AXB$; por esto ella la construye [37] como recurso para hallar la posición del cuarto vértice del cuadrado. Entonces, en este caso, hay aprehensión operativa de cambio figural.

Camila arrastra a C para que este pertenezca a la bisectriz, pero se le dificulta lograr que la medida del $\angle ACB$ sea igual a 90. Por esto, decide eliminarlo y construirlo nuevamente, esta vez como punto de la bisectriz. Es decir, que ahora no solo se trata de que C pertenezca a la bisectriz, sino que además debe buscar el punto de la bisectriz que cumple la condición exigida en el problema.

45.	Camila:	(Borra el punto C y las semirrectas $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$. Construye nuevamente C, esta vez ubicándolo en la bisectriz) Ángulo, listo 95 (mide el $\angle ACB$ y lo arrastra aproximando su medida a 90°).	
46.	Diana:	Ahí, ahí.	
47.	Camila:	Bueno, dejémoslo ahí. Mira, ¿acá no se puede poner una perpendicular? (explora las herramientas de GeoGebra) Recta, polígono, semirrecta, bisectriz	
48.	Diana:	Ahí está.	
49.	Camila:	(Construye la perpendicular a la $\overrightarrow{XA}$ que pasa por A y la perpendicular a la $\overrightarrow{XB}$ que pasa por B)	AO-F



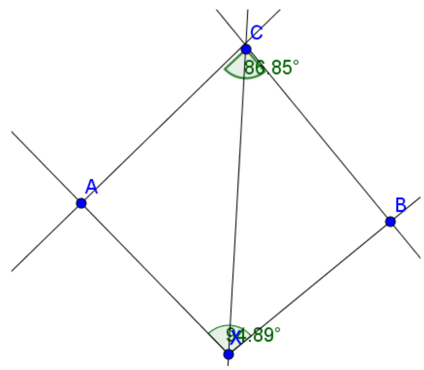
50.	Diana:	Ponlo ahí [en el punto C].	
51.	Camila:	Sí, pero es que se supone que deberían cruzarse en un mismo punto.	
52	John:	Sí.	
53.	Diana:	¿Se deberían cruzar en el punto en el que está [punto C]?	
54.	Camila:	Sí (…). Esperen, esperen tantito (arrastra el punto X de modo que el punto de intersección de las perpendiculares coincida con el punto C).	AP
55.	John:	Ah ok. Bueno, ahí se aproxima.	

56. Diana: Acá está 91 [la medida del $\angle AXB$].

57. Camila: (Continúa arrastrando X y C de tal forma que el punto de intersección de las perpendiculares coincida con el punto C). Ahí, ahí, ya (vuelve a mover a X).

58. Diana: No lo mueva, porque lo que toca es subir este punto [C].

59. Camila: Toca subir este un poquito (sigue arrastrando X), más arriba, más abajo, más abajo (…). Espere, ¿aquí no se puede crear un ángulo perpendicular? (explora las diferentes herramientas de GeoGebra). No, no se puede (… …). AP

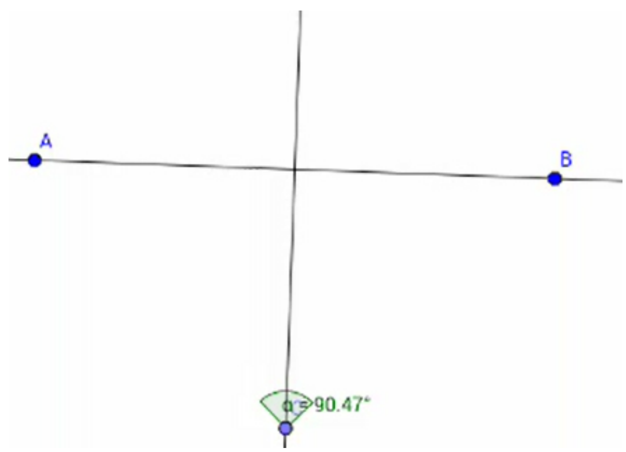


Nuevamente, Camila realiza aprehensión operativa de cambio figural al construir las perpendiculares a la $\overrightarrow{XA}$ y a la $\overrightarrow{XB}$, ya que las construye para solucionar el problema de exactitud de la medida del $\angle ACB$. Además, se confirma que, en la imagen conceptual (Vinner, 1991) de cuadrado que tiene Camila, un vértice del cuadrado debe pertenecer a la bisectriz del ángulo opuesto a este. Esto porque ella afirma que la intersección de las rectas debería ser en un punto de la bisectriz [51], es decir, que ella esperaba que dichas perpendiculares, además de garantizar la existencia de los dos ángulos rectos en A y en B, se intersecaran en C.

Camila busca que C coincida con el punto de intersección de las rectas perpendiculares mientras varía la posición del punto X [54 y 59]. Por esto, puede pensarse que se presenta el patrón de separación. No obstante, consideramos que no hay separación porque ella no arrastra a X con el fin de descubrir alguna propiedad que desconozca, sino que lo hace para determinar una posición de C en la mediatriz para la cual la medida del $\angle ACB$ sea exactamente 90°.

La estrategia de construir la bisectriz del $\angle AXB$ resultó ser poco efectiva para lograr la construcción del cuadrado. Por esto, Camila propone otra estrategia: utilizar la mediatriz del $\overline{AB}$.

81. Camila:	Y si ubicamos la mediatriz ¿no? Entonces, hagamos, digamos un segmento.		
82. Diana:	La mediatriz es la parte central del ángulo ¿cierto?		
83. Camila:	No, esa es la bisectriz.		
84. Diana:	La mediatriz es ¿qué?		
85. Camila:	La mediatriz es la que atraviesa un segmento en su mitad. Entonces, esa tal vez si podría funcionar (elimina el punto C y la perpendicular, dejando solo la $\overleftrightarrow{AB}$) Bueno, entonces acá mediatriz (construye la mediatriz del $\overline{AB}$), ubicamos un punto acá (ubica un punto C en la mediatriz), ángulo (mide el $\angle ACB$) 105 (arrastra para que la medida del ángulo se aproxime a 90°). Bueno más o menos así.	AO-F y C	



86. Diana:	(Lee de nuevo el enunciado) ¿Existe un punto X tal que la medida del $\angle AXB$ sea igual a 90? Pero nos dice explícitamente que si hay un punto que esté ahí para que mida 90.	
87. Camila:	¿Te acuerdas que yo había dicho como que una propuesta en que si fuera un cuadrado? Si fuera un cuadrado todos serían de 90°. Tenemos que lograr que	
88. Diana:	pues colocar otro punto en esta parte [en el otro semiplano determinado por la $\overleftrightarrow{AB}$] para que comience como a crearse el cuadrado y nosotros mismos lo vamos arreglando para que quede el cuadrado ¿no?	AP
89. Camila:	Sí , pero es como un punto que siempre va a estar ahí	

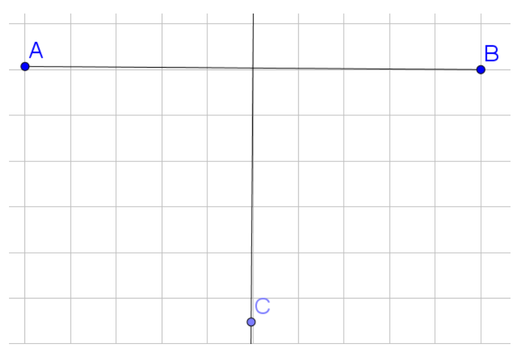
90.	Diana:	Puede ser un punto como no sé. Pero, sería bien que fuera una perpendicular al punto que está abajo [C].	
91.	Camila:	Entonces, si ubicamos, si ubicamos otro punto… ¿Esto no nos da la opción de insertar objetos o algo? (Explora las diferentes herramientas de GeoGebra) No, esto es colores (…).	
92.	Diana:	¿Con qué propiedad?	
93.	Camila:	(Seleccionó la opción cuadrícula).	AO-F
94.	Diana:	Ahí, ubícalo ahí.	
95.	Camila:	(Intenta arrastrar el punto A).	
96.	Diana:	Eso no se le va a mover. Es un punto fijo [A].	
97.	Camila:	(Quita la opción de objeto fijo a los puntos A y B. Luego, arrastra para que la $\overleftrightarrow{AB}$ coincida con una de las líneas horizontales de la cuadrícula).	
98.	Diana:	Ahí, ya suelta, suelta, suelta.	
99.	Camila:	Espera porque toca acomodar la perpendicular también.	

Camila introduce dos elementos nuevos para construir el cuadrado: la mediatriz [85] y la cuadrícula de GeoGebra [93]. Es decir que ella realiza aprehensión operativa de cambio figural, porque estos elementos cambian la configuración inicial de los dos puntos dados A y B, y este cambio se realiza con el fin de buscar nuevos recursos para resolver el problema. Además, cuando inicialmente Camila construye la mediatriz y el punto C [85], ella arrastra y experimenta el patrón de contraste de las posiciones de este punto, el cual es un punto que pertenece a la mediatriz, y determina que la posición de C que cumple la condición exigida en el problema es aquella para la cual el $\angle ACB$ mide 90,47. Luego, Diana realiza aprehensión perceptual de esa representación y propone construir otro punto en la mediatriz, de igual forma como se hizo con C [88]. En este caso, se puede justificar que hay aprehensión perceptual a partir de la ley de simetría: Diana quiere encontrar la imagen de C respecto al $\overline{AB}$.

Parece que Camila quiere encontrar una herramienta que le produzca el otro punto sin tener que realizar nuevamente todo el proceso que llevo a cabo para hallar a C; sin haberlo planeado, introduce la cuadrícula de GeoGebra y decide aprovecharla ajustando la representación [97 y 99] de tal forma que el $\overline{AB}$ y su mediatriz coincidan con las líneas de esta.

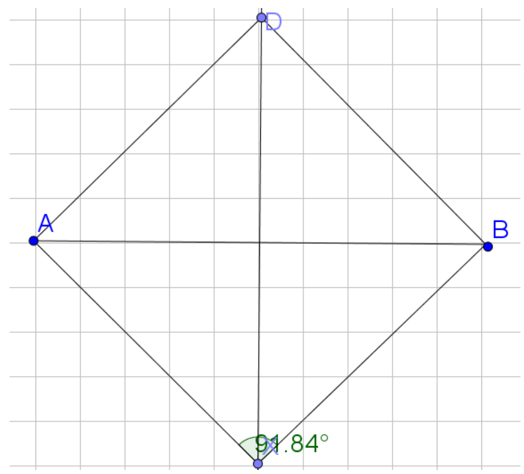
Ante la dificultad de arrastrar los puntos A y B (por que estaban fijos), Camila decide borrar la representación y realizar de nuevo la construcción.

103.	Camila:	(Seleccionó la opción borrar todo) Es más fácil así, pues para que… Ahora sí, pongamos un punto A acá y un punto B acá, entonces espere 2, 4 ,6, 8, 10 (ubica los puntos A y B en la cuadrícula y cuenta las unidades que hay entre ambos puntos). Ahora sí, propiedades, objeto fijo (fija los puntos A y B). Bueno, entonces digamos que va un segmento ¿sí? Es como más fácil trabajarlo así (construyó el $\overline{AB}$). Bueno más o menos está derecho, más o menos. Entonces vamos a hacer la mediatriz. Entonces si ubicamos un punto X	AP
104.	Diana:	pero tratemos de buscar ahí ya entonces, en ese momento, ya tratemos de hacer el cuadrado.	
105.	Camila:	Ubiquemos el punto X, entonces, ¿de cuántos son?	
106.	John:	Cinco, cinco y cinco.	
107.	Camila:	(Ubica un punto C en la mediatriz del $\overline{AB}$) ¡Ay! lo hice muy abajo, ¿cierto?	AP
108.	John:	Sí, por uno [refiriéndose a que el punto C no quedó a cinco unidades del punto medio del $\overline{AB}$].	AP



109.	Camila:	(Arrastró a C para que quedara a cinco unidades del punto medio del $\overline{AB}$).	
110.	Diana:	Ahí ya. Ahora coloca el otro punto.	
111.	Camila:	Entonces, si más o menos hacemos esto (construye un punto D en la mediatriz, también a cinco unidades del punto medio del $\overline{AB}$. Luego,	

		construye los segmentos: $\overline{CA}$, $\overline{AD}$, $\overline{DB}$ y $\overline{BC}$). Listo, entonces más o menos me va a dar	
112.	Diana:	un cuadradito.	AP
113.	Camila:	Es como que quede perpendicular. No sé cómo explicar eso.	
114.	Diana:	Sí, un cuadrado para que quede perpendicular.	
115.	Camila:	(Mide el $\angle ACB$) Por un poquito, entonces miremos acá (renombra C como X). Listo, entonces llegamos a una conclusión. Es como que estén en una perpendicular, y ¿cómo es que se dice eso?	AD-VD



116.	Diana :	Perpendicular, perpendicular, y que tiene que estar a la misma medida de donde cruza la otra recta.	AD-VD

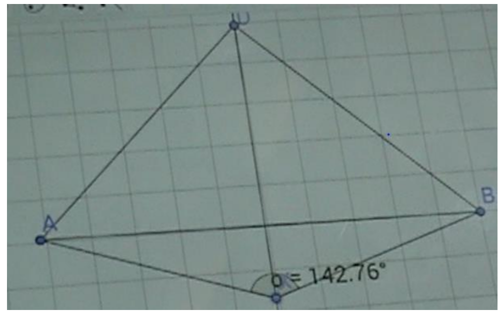
Los estudiantes buscan que, *perceptualmente*, los puntos A,B y C equidisten del punto medio del $\overline{AB}$ [103 a 108]. Luego, Diana le sugiere a Camila que ubique el cuarto vértice D del cuadrado también a la misma distancia. La representación de cuadrado que construyeron y la forma cómo lo construyeron, les permitió a Camila y a Diana determinar ciertas propiedades. En primer lugar que los puntos X tales que $\mathrm{m}\angle AXB = 90$, pertenecen, como lo menciona Camila [115], a una recta perpendicular, que es precisamente la mediatriz del $\overline{AB}$. En segundo lugar, que el punto de intersección de las diagonales del cuadrado equidista de sus vértices [116], que en otras palabras significa que las diagonales del cuadrado son congruentes y se bisecan. Por lo anterior, las estudiantes realizaron aprehensión discursiva con anclaje de lo visual a lo discursivo de la representación de cuadrado que construyeron.

Con el reporte escrito de los estudiantes podemos confirmar que hubo aprehensión discursiva en este caso, ya que en este se reportan las propiedades descritas anteriormente, como se muestra a continuación.

> · **Que exploramos:**
>
> Primero ubicamos un punto **X** sobre la mediatriz del $\overline{AB}$ de forma que estubiera a la misma distancia de la que está el punto **A** al punto medio del $\overline{AB}$. Buscando que se formara un angulo de 90°.
>
> • **Que descubrimos:**
>
> Intentamos asimilar la idea de un cuadrado ya que todos sus angulos son rectos.
>
> Teniendo en cuenta esta asimilacion anterior un ubicamos sobre la misma mediatriz un punto **D** que cumpliera las mismas propiedades que el punto **X**

Los estudiantes consideran que solo hay dos posibles puntos X tales que $m\angle AXB = 90$, que son, con A y B, los vértices de un cuadrado. Por esto, el docente los cuestiona acerca de la posibilidad de que existan otros puntos.

156.	Profesor:	O sea que, ¿cuántos puntos tenemos que forman un ángulo de 90?	
157.	Camila:	Dos.	
158.	Profesor:	¿Será que hay más?	
159.	Camila:	No creo… No porque si vamos corriendo el punto para allá (indica con su mano mover el punto X hacia D) es como si el ángulo se fuera abriendo (arrastra el punto X). Entonces	G



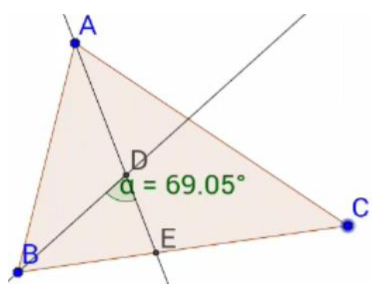
160.	Diana:	si se da cuenta, se va a dañar.	
161.	Profesor:	Ah, pero entonces, ¿ahí lo estás arrastrando sobre qué?	
162.	Camila:	Sobre la mediatriz.	
163.	Profesor:	Por eso, entonces ahí cambia.	
164.	Camila:	Sí.	
165.	Profesor:	O sea, sobre la mediatriz, ¿habría cuántos puntos?	
166.	Camila:	Dos.	
167.	Profesor:	¿Y si no estuviesen en la mediatriz? Si ese punto X y ese punto D no estuviesen en la mediatriz, ¿será que habría otro punto, que me ayude a formar un ángulo de 90?	
168.	Camila	No, porque es como que para hallar ese punto es como seguir esa expectativa: que tiene que medir lo mismo de lo que mide de un extremo a la mitad.	AD-VD

Cuando el profesor les pregunta a los estudiantes si hay más puntos que cumplan la condición propuesta en el problema, Camila arrastra a X para verificar que solo hay dos puntos [159]. Consideramos que en este caso el arrastre se relaciona con el patrón de variación generalización, porque lo que Camila busca es comprobar que solo hay dos posibles posiciones de X en la mediatriz que solucionan el problema. En consecuencia, Camila afirma que solo estos puntos tienen la posibilidad de determinar un ángulo recto con los dos puntos dados y lo justifica mediante una de las propiedades que ha discernido a partir de la representación que construyeron: que el punto de intersección de las diagonales equidista de los vértices del cuadrado [168].

4.3. ANÁLISIS DEL PROBLEMA 2 – GRUPO 1

Los estudiantes de este grupo construyen un triángulo y las bisectrices de dos de sus ángulos, miden el ángulo que estas determinan y arrastran para determinar si este puede ser recto. Al descartar la posibilidad de que esto suceda, procedien a la segunda parte de la tarea. Construyen un cuadrado y otro cuadrilátero, y en cada uno, las bisectrices de dos ángulos consecutivos. Miden uno de los ángulos que determinan las bisectrices en cada caso; arrastran y logran discernir como invariante el paralelismo de los lados opuestos. Finalmente, realizaron una construcción robusta para verificar la propiedad que descubrieron.

Brenda y Alex construyen un Δ ABC, las bisectrices del $\angle A$ y del $\angle B$, y miden el ángulo que estas determinan. Luego, arrastran a A y a C para explorar la posibilidad de que ese ángulo mida 90°.

8.	Brenda:	Da igual ¿ves? Entre más arriba [refiriéndose a la posición de C], más se acerca a los 90. ¿Y si esto fuera más abierto? [refiriéndose al $\angle ABC$] Espere (arrastra el punto A y observa que la medida del $\angle BDE$ se aproxima cada vez menos a los 90°) ¡Ah no! (Arrastra a A y luego a C buscando que el $\angle BDE$ sea recto). 	C
9.	Alex:	No porque la gracia es un truiángulito normal. Pongamos lo que encontramos. O sea sería no. Un triángulo normal sería así (arrastra a A y luego a C). Eso ya sería quién sabe qué especie de triángulo. 	AP
10.	Brenda:	Pero sigue siendo un triángulo.	
11.	Alex:	Pero quién sabe qué especie de triángulo.	
12.	Brenda:	¡Pero sigue siendo un triángulo!	

13.	Alex:	(Lee el enunciado) ¿Es posible que las bisectrices de dos ángulos consecutivos sean perpendiculares? No.	
14.	Brenda:	¿Y qué tal sí?	
15.	Alex:	Pues no porque es lo que descubrimos. ¿Escribes?	
16.	Patricia:	Sí.	
17.	Brenda:	(Continúa arrastrando a A y a C para lograr que el $\angle BDE$ sea recto) Un triángulito (risas). 	C
18.	Alex:	¿Qué es eso?	
19.	Brenda:	Es el triángulo (risas).	

Brenda arrastra a C y a A para hallar puntos para los cuales el $\angle BDE$, que determinan las bisectrices, sea recto [8]. En este sentido, puede afirmarse que ella *contrasta* los triángulos en busca de determinar si es posible que se cumpla la propiedad. Inicialmente, ella percibe que en los triángulos, para los cuales la medida del $\angle ABC$ es cada vez mayor, la medida del $\angle BDE$ distan de los 90°. Por esto, ella contrasta solo los triángulos para los que $\angle ABC$ no es obtuso, buscando la posibilidad de que haya al menos uno para el que las bisectrices sean perpendiculares.

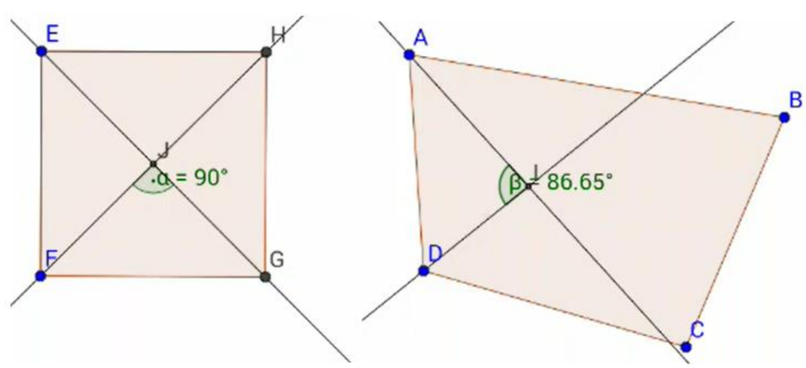
Alex realiza aprehensión perceptual de la representación del triángulo que Brenda establece luego de experimentar el patrón de contraste. La representación que Alex percibe contradice su imagen conceptual (Vinner, 1991) de triángulo, lo que lo lleva a expresar que esta no corresponde a un triángulo normal [9]. Parece que el criterio de Alex para considerar que una figura es triángulo tiene que ver con las medidas de los lados o de los ángulos y no con la no colinealidad de los tres puntos que lo determinan. Además, el hecho de que el ángulo que determinan las bisectrices no sea recto en un "triángulo normal", implica que esa propiedad no se cumple para cualquier tipo de triángulo.

Brenda continúa aplicando el patrón de contraste para hallar un posible punto A para que el $\angle BDE$ sea recto [17]. En este proceso Brenda, a diferencia de Alex, sí considera las representaciones que percibe [en 8 y 17] como triángulos. No obstante, ella identifica que el ángulo que determinan las bisectrices es recto solo cuando A coincide con B, en cuyo caso la representación no correspondería a la de un triángulo.

24	Brenda:	Profe vea, entre más chiquito está [se refiere al triángulo] pues más se acerca a los 90 (arrastra a A). Pero si los dos estuvieran sobre [si los puntos A y B coinciden] eso ya no sería un triángulo.	C

Para estudiar en qué casos las bisectrices de dos ángulos consecutivos de un cuadrilátero son perpendiculares, Alex propone construir un cuadrado y otro cuadrilátero.

31.	Alex:	Ahí está. Hallamos en un cuadrado [$EFGH$] y en otro [cuadrilátero $ABCD$]. Son dos cuadriláteros diferentes. En alguno de los dos tendrá que pasar algo. De los dos ángulos consecutivos… (selecciona la herramienta Bisectriz), de este (construye la bisectriz del $\angle E$) y de este (construye la bisectriz del $\angle F$).	
32.	Brenda:	Ahí da 90 y son perpendiculares. Ahí sí da.	AP
33.	Alex:	Y ahora acá (construye las bisectrices del $\angle A$ y del $\angle D$).	
34.	Brenda:	¿Y ahí también son perpendiculares?	AP
35.	Alex:	(Construye los puntos de intersección J,I de las bisectrices del cuadrado $EFGH$ y del cuadrilátero $ABCD$, respectivamente).	
36.	Brenda:	Ahí. Ya.	
37.	Alex:	(Mide el $\angle FJG$) Ahí 90. ¡Ah! Ahí si toca poner otro [punto para medir el ángulo que determinan las bisectrices del cuadrilátero $ABCD$]. O no, hagamos la fácil (mide el ángulo $\angle AID$).	
38.	Brenda:	86.65.	



39.	Alex:	Pero acá creo que da los 90 (construye un punto K en la bisectriz del $\angle A$, tal que I está entre A y K. Luego, mide el $\angle DIK$). No. Entonces …¡Venga, Profe!	AP

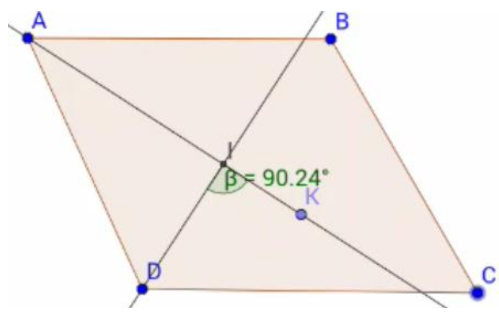
En el anterior episodio se evidencian tres momentos en los que los estudiantes realizan aprehensión perceptual de las figuras que construyeron. El primer momento es cuando Brenda percibe el tipo de ángulo que determinan las bisectrices del $\angle E$ y del $\angle F$ en el cuadrado $EFGH$. Brenda expresa que es recto, sin haberlo medido [32]. El segundo es cuando Brenda cuestiona si las bisectrices en el cuadrilátero $ABCD$ son perpendiculares. En este caso Brenda percibe que el ángulo que determinan las bisectrices posiblemente no es recto. El tercer momento es cuando Alex considera que el $\angle DIK$, que determinan las bisectrices del $\angle A$ y del $\angle D$ en el cuadrilátero $ABCD$, es recto. Alex piensa que ese ángulo puede medir 90° a pesar de que ya ha observado que la medida del ángulo adyacente ($\angle DIA$) no tiene esa medida [38 y 39]. Él decide medir el $\angle DIK$ para confirmar lo que ha percibido visualmente [39]. De acuerdo con lo que han planteado hasta el momento, Alex afirma:

47.	Alex:	Nos dimos cuenta que si es en el cuadrado, sí se forma un ángulo de 90°. Y se mueve (arrastra a E) y van a seguir dando los 90. Pero en el otro cuadrilátero (arrastra a B), si se mueve, no. Cambia, pero igual sigue siendo cuadrilátero.	G y C

Alex arrastra a E para comprobar que el ángulo que determinan las bisectrices de dos ángulos del cuadrado $EFGH$ siempre es recto. En este caso hay un invariante de tipo 2: la relación entre el tipo de cuadrilátero (cuadrado) y la perpendicularidad de las bisectrices. Sin embargo, Alex arrastra para verificar solo la perpendicularidad de las bisectrices y no para asegurarse de que $EFGH$ sea cuadrado. Por esto, solo se está verificando un invariante de tipo 1 y en consecuencia el patrón que se realiza es de generalización. Cuando arrastra a B concluye que $ABCD$ continúa siendo un cuadrilátero. En ese caso también identifica un invariante tipo 1, el cual está dado por la construcción que había realizado. El arrastre de B le permite *contrastar* que en el cuadrado se cumple la propiedad, mientras que en otro tipo de cuadriláteros no.

El profesor cuestiona a los estudiantes sobre la posibilidad de hallar puntos que sean vértices de un cuadrilátero $ABCD$, para el cual el ángulo que determinan las bisectrices sea recto.

48.	Profesor:	¿Y será que en este cuadrilátero, que no es cuadrado, hay un punto en el que sí sea de 90?	
49.	Brenda:	No porque las bisectrices van a ser de este y de este [$\angle A$ y $\angle D$].	
50.	Profesor:	¿Pueden arrastra y mirar si es posible?	
51.	Brenda:	Pues tiene que quedar cuadrado. Literal.	
52.	Profesor:	¿Si? ¿Siempre? Intenten arrastrar para que sea de 90.	
53.	Brenda:	(Arrastra a C buscando que $\mathrm{m}\angle DIK = 90$).	C
54.	Profesor:	Ahí se va aproximando.	
55.	Alex:	Ahí. Ya.	C

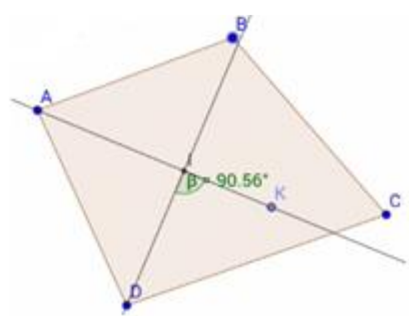


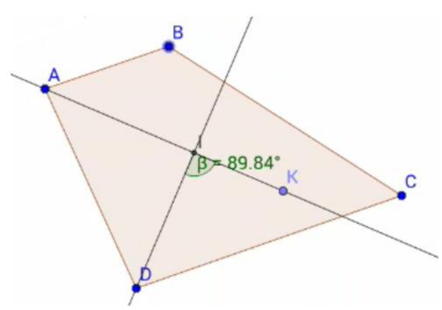
56.	Profesor:	¿Y es un cuadrado?	
57.	Brenda:	No.	
58.	Profesor:	Entonces, ¿qué se deberá cumplir?	
59.	Brenda:	Estas tienen que ser paralelas.	AD-VD
60.	Profesor:	¿Quiénes tiene que ser paralelas?	
61.	Brenda:	Los segmentos $\overline{DC}$ y $\overline{AB}$	
62.	Alex:	Los segmentos opuestos son paralelos. Véalo.	AD-VD
63.	Profesor:	¿Te refieres a los lados?	

64.	Alex:	Sí. Los segmentos opuestos. Estos son paralelos [los lados opuestos de $ABCD$] y estos también [los lados opuestos de $EFGH$].	AD-VD
65.	Profesor:	O sea, ¿tienen que tener cuántos pares de lados paralelos?	
66.	Alex:	Dos pares.	
67.	Profesor:	¿Sí?	
68.	Alex:	Sí.	
69.	Profesor:	No sé. Sigan explorando (se aleja del grupo).	

Los estudiantes experimentan el patrón de contraste cuando Brenda arrastra a C para buscar un punto que cumpla la condición de que $\mathrm{m}\angle DIK = 90°$ [53]. Hay contraste porque los estudiantes perciben, mediante el arrastre de C, puntos que para ellos el cuadrilátero no cumple esa condición, hasta hallar uno que para Alex sí la cumple [55]. Luego de encontrar una representación de $ABCD$ que cumple la condición dada en el problema, Brenda realiza aprehensión discursiva con anclaje de lo visual a lo discursivo de esa representación, porque identifica la posible relación de paralelismo entre los lados del cuadrilátero [59 y 61]. La afirmación de Brenda hace que Alex reconozca que el paralelismo de dos pares de lados es una propiedad invariante, tanto en el cuadrilátero $ABCD$, como en el cuadrado $EFGH$ [64 y 66]. El profesor cuestiona esta idea [67 y 69] lo que promueve que los estudiantes continúen explorando.

70.	Brenda:	(Arrastra a B) Alex mira. Si están ubicados sobre digamos una misma recta [se refiere a mantener el paralelismo entre la $\overleftrightarrow{AB}$ y la $\overleftrightarrow{DC}$], el punto puede estar en cualquier lado y va a dar 90.	S



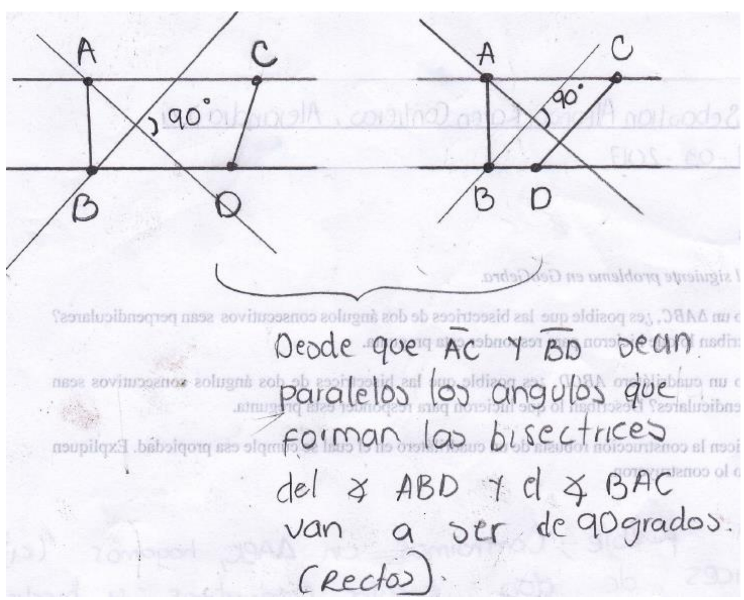


71.	Alex:	Tiene que ser un par. Solo un par.	AD VD

Brenda varía la posición de B pero buscando que el paralelismo se mantenga invariante [70]. Por esto, el arrastre que ella realiza en ese momento corresponde al patrón de separación. Cuando Alex observa el arrastre que hace Brenda, él discierne que solo es necesario que haya un par de lados paralelos para que las bisectrices de un par de ángulos consecutivos del cuadrilátero sean perpendiculares [71]. Es decir, que él realiza aprehensión con anclaje de lo visual a lo discursivo. Brenda y Alex borran las construcciones que habían realizado y construyen un nuevo cuadrilátero $ABCD$, con un par de lados paralelos, para verificar la propiedad que han descubierto.

80.	Brenda:	(Construye la bisectriz del $\angle C$) Ya. (Construye el punto E de intersección de las bisectrices y mide el $\angle CEA$) Da 90. Y donde sea que esté ubicado va a dar 90 (arrastra a D y luego a C). O sea, desde que haya un par de [lados] paralelos va a dar de 90.	F

En este caso Brenda arrastra los vértices A y D con el fin de *fusionar* el invariante que han descubierto con el invariante dado en el enunciado del problema. Es decir, este arrastre le permite variar dos aspectos críticos del problema con los que ella puede plantear la conjetura: si el cuadrilátero tiene un par de lados paralelos, entonces las bisectrices de dos de sus ángulos consecutivos son perpendiculares. En el reporte escrito aparece de la siguiente forma:



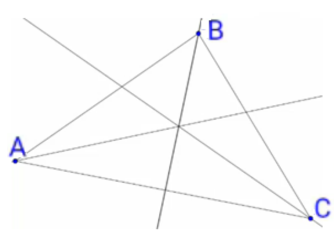
Los estudiantes proponen que el paralelismo de un par de lados de un cuadrilátero es una condición suficiente para que las bisectrices de dos ángulos consecutivos de un cuadrilátero sean perpendiculares. Sin embargo, les faltó expresar, en forma general, cuáles ángulos consecutivos son los que cumplen esa propiedad.

4.4. ANÁLISIS DEL PROBLEMA 2 – GRUPO 2

Para resolver la primera parte del problema, los estudiantes construyen las tres bisectrices de los ángulos de un ΔABC. Luego, arrastran uno de sus vértices para percibir si las bisectrices son perpendiculares en algún tipo de triángulo: acutángulo, rectángulo u obtusángulo. En la segunda parte del problema, los estudiantes construyen un cuadrilátero $BCDE$ y las bisectrices de dos de sus ángulos consecutivos. Al percibir la representación que construyeron, los estudiantes reconocen la posibilidad de que $BCDE$ sea cuadrado. Luego, miden los ángulos de $BCDE$ y arrastran sus vértices para verificar su idea. Finalmente, construyeron un cuadrado a partir de la mediatriz de un $\overline{AB}$ para resolver la tercera parte del problema.

Diana construye las tres bisectrices de los ángulos de un ΔABC. Camila interpreta la representación construida y plantea la posibilidad de que las bisectrices sean perpendiculares.

6.	Diana:	Entonces busquemos las bisectrices. Venga yo le ayudo (construye las bisectrices del $\angle A$ y del $\angle C$). No (constuye la bisectriz del $\angle B$).	
7.	Camila:	Bueno. Se forma un asterisco (risas).	AP



8.	Diana:	Bueno (lee nuevamente el enunciado del problema). Dado un ΔABC, ¿es posible que las bisectices de dos ángulos consecutivos sean perpendiculares? Describan lo que hicieron para responder esta pregunta.	

9.	Camila:	Yo digo que puede ser posible, si el triángulo es exacto en medidas ¿no? Digamos si logramos que sea isósceles o algo.	

La primera interpretación que Camila realiza de la representación que construye Diana, corresponde a un tipo de aprehensión perceptual. Camila considera, a primera vista, que las bisectrices intersecadas forman un asterisco [7]. Esta representación percibida no les sugiere a los estudiantes alguna idea para resolver esta parte del problema, ni tampoco les permite caer en cuenta de que solo era necesario construir dos bisectrices.

Camila menciona la posibilidad de que se cumpla la perpendicularidad de las bisectrices, si el triángulo es, por ejemplo, isósceles [9]. No obstante, consideramos que esta idea no surge de algún tipo de aprehensión de la representación construida, ya que en esta el ΔABC parece isósceles, y sin embargo, perceptualmente las bisectrices no son perpendiculares [7].

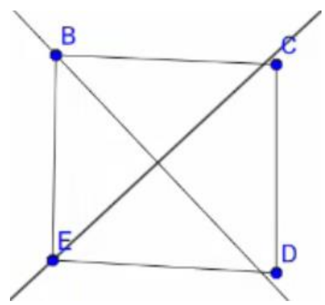
El profesor cuestiona a los estudiantes sobre la posibilidad de que las bisectrices determinen un ángulo recto y Camila utiliza el arrastre para mostrarle que esto no es posible.

20.	Profesor:	¿Y pueden [las bisectrices] formar un ángulo de 90?	
21.	Camila:	No.	
22.	Profesor:	¿Arrastraron?	
23.	Camila:	Sí (arrastra a B). Si miramos con el triángulo rectángulo (arrastra a B buscando que la representación sea la de un triángulo rectángulo) o con el obtusángulo (continúa arrastrando a B) no da. Ni en el rectángulo ni nada.	C AD-VD
24.	Profesor:	Bueno, ya tienen una parte. ¿Y en un cuadrilátero? (se aleja del grupo).	

En este caso, Camila realiza aprehensión discursiva con anclaje de lo discursivo a lo visual y también utiliza el patrón de contraste. El tipo de aprehensión es de lo discursivo a lo visual porque Camila propone diferentes representaciones del ΔABC mediante el arrastre de B, a partir de las propiedades específicas que ella les asigna: ser rectángulo o ser obtusángulo [23]. Además, el arrastre de B es de contraste porque ella reconoce diferencias entre los triángulos cuando arrastra con la intención de buscar si hay algún tipo de triángulo en el que se cumpla la perpendicularidad de las bisectrices.

Camila construye un cuadrilátero $BCDE$ y las bisectrices de dos de sus ángulos consecutivos para resolver la segunda parte del problema.

28.	Camila:	(Construye un cuadrilátero $BCED$ y lee la pregunta) ¿Es posible que las bisectrices de dos ángulos consecutivos sean perpendiculares? Bisectrices (seleccionan la herramienta Bisectriz) ta, ta, ta (selecciona los puntos C, B y E para construir la bisectriz del $\angle CBE$) y ta, ta, ta (construye la bisectriz del $\angle DEB$). ¡Ah! ¡Sí! ¡Qué emoción!	AP

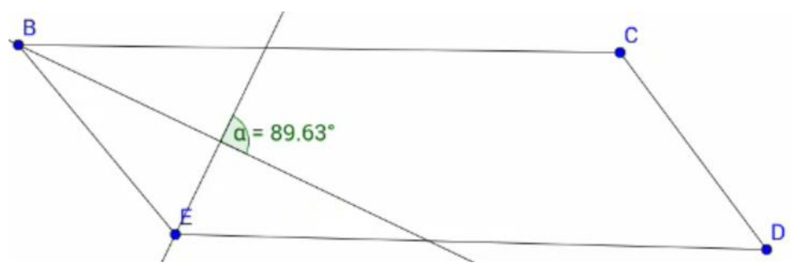


29.	Diana:	Venga, ¿qué son perpendiculares?	
30.	Camila:	Perpendiculares es que forman cuatro ángulos de 90 grados.	
31.	Diana:	Entonces, sí es posible.	AP
32.	Camila:	¿Por qué?	
33.	Diana:	Pues porque mire; ahí demuestra lo que hicimos.	AP
34.	Camila:	Sí, sí, sí, pero eso no es algo exacto. Ese cuadrado tan cuadrado no es.	AP
35.	Diana:	Mi cielo, es que ese no es un cuadrado. Si no sabías es un cuadrilátero: de cuatro lados.	
36.	Camila:	Listo. Dice que es un cuadrilátero, dice un cuadrilátero $ABCD$. Entonces un cuadrilátero es esto (arrastra a D), un cuadrilátero es esto (arrastra a C). Eso es un cuadrilátero: tiene cuatro lados.	C

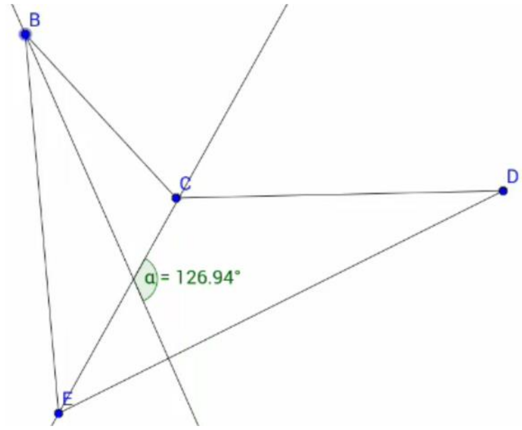
En este episodio hay aprehensión perceptual tanto del cuadrilátero $BCDE$ que construye Camila, como del ángulo que determinan las bisectrices. Camila realiza aprehensión perceptual del cuadrilátero cuando reconoce a primera vista que podría ser un cuadrado. Ella confirma esto cuando menciona que "ese cuadrado no es tan cuadrado" [34]. Sin embargo, Camila arrastra para *contrastar* la existencia de diferentes tipos de cuadriláteros, de acuerdo con la definición de cuadrilátero que le propone Diana [36], lo que le permite tener en cuenta que hay otras posibles representaciones. Luego, Camila y Diana realizan aprehensión perceptual del ángulo determinado por las bisectrices cuando afirman que son perpendiculares, aun cuando no han medido el ángulo [28, 31 y 33]. En el caso de Camila, la aprehensión perceptual que realiza está guiada por la definición y su imagen conceptual (Vinner, 1991) de perpendicularidad, que posiblemente incluye la representación visual de dos rectas que se intersecan determinando cuatro ángulos rectos [30].

Camila mide uno de los ángulos que determinan las dos bisectrices del cuadrilátero $BCDE$. Luego, arrastra los vértices para verificar que la perpendicularidad de estas solo se cumple en el cuadrado.

38.	Camila:	(Mide el ángulo que determinan las bisectrices). Entonces venga 89. Póngale cuidado. ¡Profe venga! (Continúa arrastrando los puntos B, C y D).	AP



39.	Diana:	¿Qué le vamos a decir?	
40.	Camila:	El profesor nos dijo que es un cuadrilátero. Y esto es un cuadrilátero. Entonces puede haber muchas posibilidades. Tenía que ser exacta en un cuadrilátero.	
41.	Diana:	¡No! Déjelo como estaba.	
42.	Camila:	Hagamos un avión (arrastra a B y a D). ¡Profe! Entonces le decimos: como usted no dijo nada exacto, sí puede haber ángulos de 90°, y es un cuadrado, si todos sus lados son iguales. Si no, no.	C

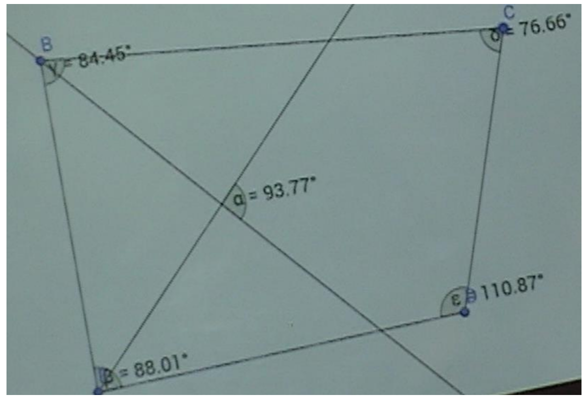


43.	Profesor:	(Se acerca al grupo)
44.	Camila:	Profe mire. Usted nos hablaba de un cuadrilátero. Esto es un cuadrilátero ¿no?
45.	Profesor:	Sí.
46.	Camila:	Entonces póngale cuidado. Nosotros tenemos esta idea. Si más o menos todos miden 90°
47.	Diana:	Si es un cuadrado.
48.	Camila:	Sí, eso. Entonces sus bisectrices van a formar 90°, o sea una perpendicular.
49.	Profesor:	¿Cuándo los cuatro ángulos de quién?
50.	Camila:	Del cuadrilátero son rectos.
51.	Profesor:	¿Y será solo en ese caso que pasa eso?
52	Camila:	Sí.
53.	Profesor:	¿O encontraron otro caso? Sigan explorando (se retira del grupo).

Camila *percibe* una representación de un cuadrilátero diferente a la de un cuadrado en el que el ángulo que determinan las bisectrices mide aproximadamente 90° [38]. No obstante, ella pasa por alto esa situación y mantiene su idea de que la propiedad solo se cumple en el cuadrado. Cuando ella arrastra a B y a D y dice “hagamos un avión” está *contrastando* que en otro tipo de representaciones, diferentes a las de un cuadrado, la propiedad no es un invariante.

Camila tiene en cuenta dos propiedades del cuadrado, cuadrilátero que ha identificado como aquel en que la perpendicularidad de las bisectrices se cumple: 1) que sus cuatro lados tienen igual medida [42] y 2) que sus ángulos son rectos [42 y 50]. El profesor los motiva para que sigan explorando [53]. En lo que sigue, los estudiantes centran su atención en verificar que esta segunda propiedad es una condición suficiente para que la perpendicularidad de las bisectrices se cumpla.

54.	Camila:	Bueno (mide los ángulos el cuadrilátero $BCDE$). Más o menos [refiriéndose a las medidas de los ángulos de $BCDE$]	
55.	Diana:	Digamos que son de 90°. Supongamos.	
56.	Camila:	(Arrastra a B para que la medida del $\angle B$ se aproxime a 90).	G
57.	Diana:	Profe no hay una herramienta para que nos ayude si quiero un ángulo de 90.	
58.	Profesor:	(Se acerca al grupo) ¿Qué herramienta será?	
59.	Camila:	Cuadrado. No mentiras. No sé (explora las herramientas de GeoGebra). Profe, le explico. Para nosotros las bisectrices sí pueden ser perpendiculares si todos los vértices del cuadrilátero son ángulos rectos.	
60.	Profesor:	Si los vértices son ángulos rectos, ¿cómo así?	
61.	Camila:	¡Si los ángulos son rectos!	
62.	Profesor:	¿Y será que es el único caso en el que pasa eso?	
63.	Diana:	Pues buscamos y nos dimos cuenta de eso.	
64.	Camila:	Sí, más o menos.	
65.	Profesor:	Arrastren a ver qué pasa. Exploren otro poco.	
66.	Camila:	Sí. Ahí estamos explorando (arrastra a C).	C
67.	Profesor:	¿Será el único caso?	
68.	Camila:	No pues pueden haber más, pero el más lógico es como ese (continúa arrastrando a C).	
69.	Profesor:	Mira ahí ese caso. ¿Qué pasó? ¿Ahí son perpendiculares?	



70.	Camila:	Sí. Más o menos. Casi. Es que no son en realidad todos los ángulos, sino los ángulos consecutivos, o sea, los de las bisectrices. Los dos ángulos que tengan las bisectrices deben ser más o menos de 90°, para que puedan ser perpendiculares las bisectrices. Lo que importa más fundamentalmente son los ángulos de las bisectrices.	AD-VD
71.	Profesor:	Entonces ya tienen una idea. Vamos registrando todas esas ideas. Y después hacen la construcción robusta.	
72.		[…]	

Camila mide los ángulos del cuadrilátero $BCDE$ y arrastra uno de sus vértices (B) para que el ángulo correspondiente sea recto [56]. Ella tiene la intención de verificar, mediante el arrastre de B, que si los ángulos del cuadrilátero son rectos, se cumple la perpendicularidad de las bisectrices. Como su intención es verificar ese invariante, consideramos que en este caso hay arrastre de generalización. Ella confirma que quiere generalizar ese invariante cuando menciona que las bisectrices son perpendiculares “si los ángulos son rectos” [61], es decir si es rectángulo.

El profesor le solicita a los estudiantes que exploren más y los cuestiona sobre la posibilidad de que existan otro tipo de cuadriláteros que cumplan la propiedad [65 y 67]. Camila menciona que el caso del cuadrado es “el más lógico” y arrastra a C, buscando, nuevamente, si existen otros cuadriláteros en los que las bisectrices sean perpendiculares [68]. Es decir, que de nuevo se presenta el arrastre de contraste. Cuando Camila arrastra a C, el profesor le pide que observe una representación en la que la medida del ángulo que determinan las bisectrices es aproximadamente 90° [69]. Ella realiza aprehensión discursiva con anclaje de lo visual a lo discursivo de esa representación, ya que propone, que para que se cumpla esa propiedad, el cuadrilátero no necesariamente debe ser un rectángulo, sino que los dos ángulos consecutivos que se bisecan deben ser rectos. En consecuencia, su conjunto de ejemplos relacionado con los cuadriláteros que cumplen la propiedad, se amplió nuevamente; ahora incluye las representaciones, no solo de cuadrados o de rectángulos, sino también de cuadriláteros que tengan un par de ángulos consecutivos rectos. En su reporte escrito, los estudiantes describieron cómo fue su proceso de exploración y registraron una conjetura basada en la propiedad que descubrieron.

Exploramos

·Movimos los angolos a los que les incertamos bisectris para que sos medidas fueran de 90° y sos bisectrices se intercecaran y fueran perpendiculares.

·Observamos diferentes formas de cuadrilaleros a ver si sos bisectrices lograban ser perpendicolares.

Descubrimos

·Si los angolos donde aplicamos las bisectrices median 90° entonces sos bisectrices serian perpendiculares formando cuatro angulos de 90°

Para resolver la tercera parte del problema, los estudiantes realizan la construcción que Camila describe a continuación.

73.	Camila:	(Describe la construcción que realizaron para resolver la tercera parte del problema) Bueno. Tenemos que hacer una construcción robusta y para hacerla primero hicimos un $\overline{AB}$ y luego le insertamos la mediatriz. Hicimos dos puntos C y D en la mediatriz. Luego, sacamos las bisectrices del $\angle CAD$ y del $\angle ADB$. [En el video, se ve que ella arrastra a A y a D buscando que la bisectriz del $\angle CAD$ contengan al $\overline{AB}$. Esto no lo reporta]. Hicimos esos puntos fijos [C y D]. Luego, movimos los puntos A y B (arrastra esos puntos), y vemos	F
74.	Diana:	Que va a ser una construcción robusta.	
75.	Camila:	Sí y ya.	

Los estudiantes construyen la mediatriz de un $\overline{AB}$ para garantizar perpendicularidad, los puntos C y D en la mediatriz, y las bisectrices de los ángulos ($\angle CAD$ y $\angle ADB$). Luego, arrastran a A y a D para que la bisectriz del $\angle CAD$ contenga al $\overline{AB}$, ya que la bisectriz del otro ángulo ($\angle ADB$) coincide con la mediatriz. Para volver la construcción robusta, fijan a C y a D y construyen el cuadrilátero $ACBD$ que se asemeja mucho a un cuadrado. Con esta construcción los estudiantes verifican el recíproco de la conjetura que plantearon en el reporte escrito: si las bisectrices son perpendiculares, entonces los ángulos consecutivos correspondientes a estas son rectos (invariante de nivel 2). Es decir, que Camila aplica el arrastre de fusión con A y con B, para verificar el invariante de nivel 2 que establecieron mediante la representación que construyeron.

Es posible que la falta de tiempo, pues ya se acababa la clase, y el deseo de terminar la tarea, haya influido para que los estudiantes intentaran hacer la construcción robusta de un cuadrado, en lugar de la de cualquier cuadrilátero con solo dos ángulos consecutivos rectos, que es lo que correspondería a la conjetura formulada en la segunda parte del problema. También en esa construcción influye que Camila había representado, al iniciar el proceso de resolución, un cuadrado como primera posible solución, y por esto, al realizarla, utiliza su imagen conceptual (Vinner,1991) de cuadrado y la relación especial que tienen las diagonales de este: se bisecan, son congruentes y son perpendiculares.

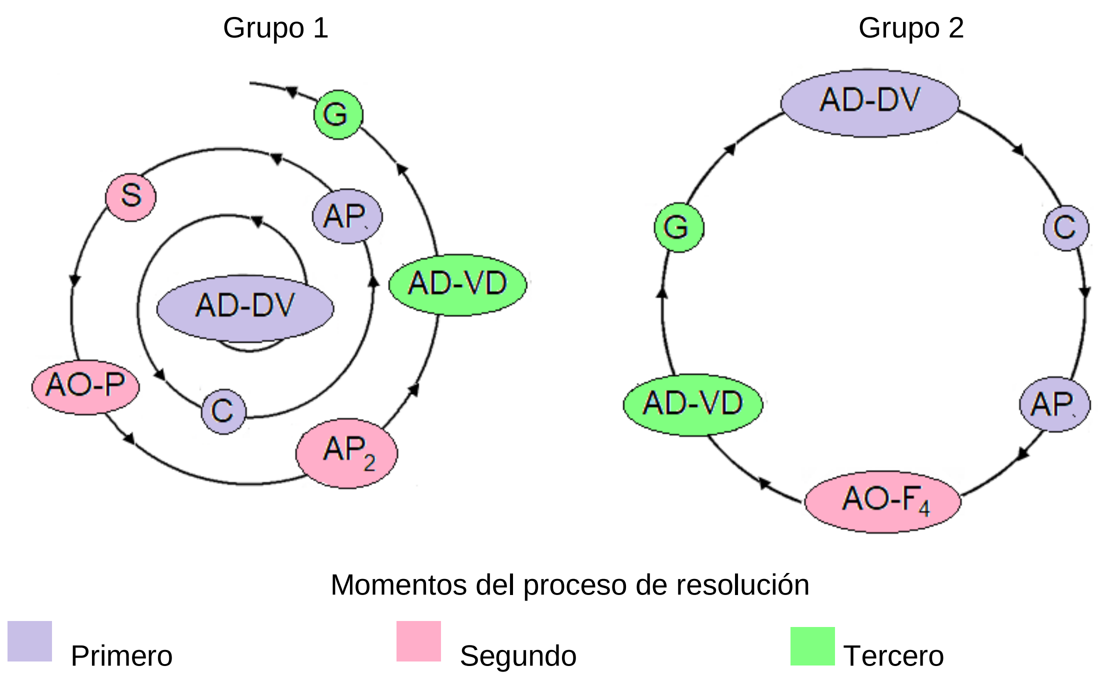
5. RESULTADOS Y CONCLUSIONES

Un objetivo de este estudio es determinar los aspectos que permitieron o dificultaron que los estudiantes reconocieran propiedades geométricas de las figuras para resolver cada problema de conjeturación, mediante el uso e interpretación de lo que representaron en el SGD. Para determinar estos aspectos se propone comparar los procesos de resolución de los problemas de ambos grupos de estudiantes, en relación con los tipos de arrastre y los tipos de aprehensiones que se evidenciaron en cada proceso. La comparación se realiza: 1) ilustrando y sintetizando, mediante esquemas, los principales tipos de arrastre y de aprehensiones que usaron los estudiantes en cada grupo; 2) describiendo las diferencias y semejanzas en el modo como utilizaron el arrastre e interpretaron las representaciones en el SGD; 3) planteando observaciones que permiten determinar qué aspectos influyeron para que los estudiantes discernieran o no propiedades al resolver cada problema de conjeturación.

5.1. OBSERVACIONES DEL PROCESO DE RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA 1

Los esquemas que ilustran y sintetizan los tipos de arrastre y de aprehensiones que utilizó cada grupo en el Problema 1 son los siguientes. Estos esquemas muestran solo los tipos de arrastre y de aprehensiones que fueron determinantes en las soluciones que obtuvo cada grupo de estudiantes.

Figura 13. Esquemas que ilustran el proceso de resolución del Problema 1



Para interpretar los esquemas es necesario tener en cuenta: los códigos, los colores y la forma. Los códigos son los mismos que se utilizaron para representar las categorías de análisis. Aquellos que aparecen como AP_2 y $AO\text{-}F_4$ significa que los estudiantes realizaron aprehensión perceptual dos veces y aprehensión operativa de cambio figural cuatro veces consecutivas, respectivamente. Se utilizan los códigos de esa forma solo con el ánimo de sintetizar cada esquema. Los colores muestran lo que sucedió en cada momento del proceso de resolución, el cual se dividió en tres momentos para poder hacer la comparación. La forma del esquema del Grupo 1 es en espiral porque indica que en este grupo los tipos de arrastre y de aprehensiones que utilizaron los estudiantes les permitieron discernir una propiedad diferente a la que consideraron cuando empezaron a resolver el problema. En cambio, el esquema del Grupo 2 es circular porque indica que los estudiantes utilizaron los tipos de arrastre y de aprehensiones para verificar su solución inicial.

En el primer momento, ambos grupos realizaron aprehensión discursiva con anclaje de lo discursivo a lo visual (AD-DV), arrastre de contraste (C) y aprehensión perceptual (AP). El Grupo 1 realizó AD-DV con el fin de expresar la posible existencia de un punto X tal que el $\angle AXB$ fuera recto. El Grupo 2 realizó AD-DV para indicar que la solución del problema sería dos puntos X_1 y X_2 que con A y B fueran vértices de un cuadrado. En ambos casos, los grupos utilizaron el arrastre de contraste para hallar al menos un punto que cumpliera la condición exigida en el problema. Sin embargo, la no exactitud en las medidas fue interpretada por ambos grupos de manera diferente. En el Grupo 1, si la $\mathrm{m}\angle AXB = 89{,}84°$ entonces X se consideró como un posible punto que cumplía la propiedad. Mientras que en el Grupo 2 medidas como 89,91° o 91° no fueron tenidas en cuenta para establecer que el punto X en estos casos determinaba un ángulo recto.

Observación 1. La aprehensión discursiva, con anclaje de lo discursivo a lo visual, puede utilizarse para explorar la posibilidad de que se cumpla cierta propiedad e incluso para sugerir una solución inmediata al problema. El Grupo 1 la utilizó para expresar la posible existencia de un punto X tal que la $\mathrm{m}\angle AXB = 90°$. El Grupo 2 la usó para proponer, como solución inmediata, dos puntos X_1 y X_2 que con los puntos A y B dados fueran los vértices de un cuadrado.

Observación 2. Cuando la medida que se obtiene se aproxima a la esperada, la aceptación o no de esta permite determinar el cumplimiento de la propiedad exigida en el problema; en este caso, la existencia del ángulo recto.

Teniendo en cuenta la Observación 2, la aprehensión perceptual que cada grupo realizó en el primer momento del proceso es diferente. En el Grupo 1 se percibe la posibilidad de que exista otro punto X, aparte del que ya habían hallado, que cumpla la propiedad, el cual sería para ellos, en ese momento, el cuarto vértice de un cuadrilátero. En cambio, en el Grupo 2 los estudiantes realizaron aprehensión perceptual de la figura y afirmaron que esta no correspondía a la de un cuadrado. Esto pudo reforzar la no aceptación de aproximaciones como indicador de existencia del ángulo recto, y, por tanto, los puntos X_1 y X_2, que eran dos vértices, no eran aún solución del problema.

El segundo momento de los procesos de resolución es consecuencia de lo que se expuso anteriormente en las *Observaciones 1 y 2*. El Grupo 1 consideró que había varias posibilidades para la medida del $\angle AXB$ que se aproximan 90°, y por esto empezó a hallar otros posibles puntos que determinaban ángulos que tuvieran esa medida, utilizando el arrastre de separación. A la vez realizaron aprehensión operativa posicional al cambiar la orientación del $\angle AXB,$ lo que los llevó a explorar la posibilidad de hallar nuevos puntos en el otro semiplano determinado por la $\overleftrightarrow{AB}$. Luego de este tipo de exploración, los estudiantes de este grupo realizaron aprehensión perceptual del conjunto de puntos que habían representado y reconocieron que estos pertenecían a una circunferencia. Por su lado, los estudiantes del Grupo 2 mantuvieron la solución inicial que propusieron al problema y decidieron aplicar diferentes estrategias para construir un cuadrado. De esta forma garantizarían que los dos vértices del cuadrado, diferentes de A y de B, fueran la solución del problema. Para la construcción del cuadrado, realizaron aprehensión operativa de cambio figural, ya que incluyeron diferentes elementos a la configuración que tenían inicialmente (la bisectriz de uno de los ángulos, la mediatriz del $\overline{AB}$, la cuadrícula de GeoGebra) para resolver el problema. El hecho de que cada vez se introdujeran nuevos elementos para la construcción del cuadrado, fue promovido por la aprehensión perceptual que los estudiantes realizaban de las representaciones que iban construyendo. Así, por ejemplo, como la representación que construyeron mediante el uso de la bisectriz no parecía un cuadrado, entonces decidieron utilizar la mediatriz del $\overline{AB}$.

Grupo 1
Observación 3. El arrastre de separación junto con la aprehensión operativa posicional abrió un nuevo horizonte de exploración.
Observación 4. La representación de más de dos puntos mediante el arrastre de separación permitió realizar aprehensión perceptual para reconocer un lugar geométrico que se aproxima a la solución del problema.

Grupo 2

Observación 5. La aprehensión operativa de cambio figural y la aprehensión perceptual promovieron el uso de diferentes estrategias para construir el cuadrado.

En el tercer momento, en ambos grupos hubo aprehensión discursiva con anclaje de lo visual a lo discursivo (AD-VD) y arrastre de generalización (G). En el Grupo 1, este tipo de aprehensión se realizó para determinar qué circunferencia era la que correspondía a la solución del problema: la circunferencia con centro en el punto medio del $\overline{AB}$ y diámetro AB. Luego, el arrastre de generalización se realizó para verificar que si X pertenece a dicha circunferencia, entonces el $\angle AXB$ es recto. En el Grupo 2, hubo AD-VD cuando lo estudiantes establecieron algunas propiedades del cuadrado (que sus diagonales son perpendiculares, congruentes y se bisecan) como resultado de haber construido el cuadrado utilizando la mediatriz del $\overline{AB}$ y la cuadrícula. En el cuadrado que construyeron, los vértices X_1 y X_2 que hallaron pertenecían a la mediatriz del $\overline{AB}$. Por tanto, al utilizar el arrastre de generalización con, por ejemplo X_1, verificaron que solo existen dos puntos que cumplen la condición exigida en el problema.

Grupo 1.

Observación 6. La aprehensión con anclaje de lo visual a lo discursivo permitió a los estudiantes discernir la relación entre los puntos A y B dados y el lugar geométrico que reconocieron mediante la aprehensión perceptual.

Observación 7. Con el arrastre de generalización los estudiantes verificaron la relación que discernieron mediante la aprehensión de lo visual a lo discursivo. Esto los motivó a formular una conjetura.

Grupo 2

Observación 8. Con la aprehensión de lo visual a los discursivo se reconocieron ciertas propiedades de las diagonales del cuadrado que posibilitaron su construcción.

> *Grupo 2*
>
> *Observación 9*. Cuando se utilizó el arrastre de generalización con un punto que pertenecía a un elemento previamente construido, en este caso la mediatriz, se confirmó la solución propuesta inicialmente, pero se limitaron las posibilidades de buscar otras estrategias de exploración.

5.2. OBSERVACIONES DEL PROCESO DE RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA 2

Los estudiantes utilizaron los siguientes tipos de arrastre y de aprehensiones para responder a la primera pregunta del Problema 2, que consistía en explorar la posibilidad de que las bisectrices de dos ángulos de un triángulo determinaran un ángulo recto.

Figura 14. Esquemas de resolución del Problema 2 literal *a*

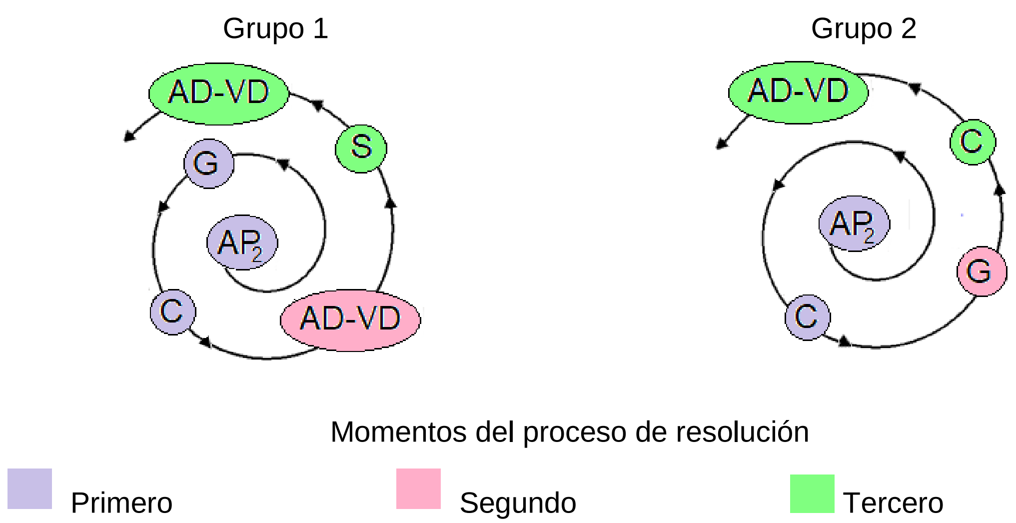
Grupo 1 | Grupo 2

Ambos grupos combinaron el arrastre de contraste con al menos un tipo de aprehensión, lo que les permitió concluir que es imposible que se cumpla la perpendicularidad de las bisectrices de dos ángulos de un triángulo. En el Grupo 1, la exploración inició con el arrastre libre de uno de los vértices del triángulo para buscar un posible triángulo que cumpliera la propiedad. Luego, realizaron aprehensión perceptual para afirmar que era imposible que se cumpliera dicha propiedad en los triángulos “normales”, como los denominó uno de los estudiantes. Otro de los estudiantes de ese grupo, que continúo con el arrastre de contraste, confirmó que en ningún triángulo se cumplía la propiedad. A diferencia del Grupo 1, en el Grupo 2 el arrastre de contraste estuvo precedido por dos tipos de aprehensiones: perceptual y de lo discursivo a lo visual. La aprehensión perceptual la realizaron cuando construyeron el triángulo con las tres bisectrices de los ángulos y afirmaron que se formaba un asterisco, lo cual no les sugirió algún tipo de solución al problema. La aprehensión de lo discursivo a lo visual se realizó cuando los estudiantes asignaron propiedades al triángulo (ser rectángulo, ser obtusángulo) y buscaron representarlos, lo que resultó en el contraste entre tipos de triángulos.

Observación 10. El arrastre de contraste se puede presentar mediante el arrastre libre de un punto o mediante el arrastre guiado con la intención de que se cumpla una propiedad previamente establecida.

En la segunda parte del problema, en la que se propuso estudiar la posibilidad de que las bisectrices de dos ángulos consecutivos de un cuadrilátero fueran perpendiculares, los estudiantes utilizaron los tipos de arrastre y de aprehensiones según se ilustra en los siguientes esquemas.

Figura 15. Esquemas de resolución del Problema 2 literal *b*



En el primer momento del proceso de resolución, la exploración realizada por cada grupo fue diferente. El Grupo 1 construyó dos figuras: un cuadrado de manera robusta y otro cuadrilátero. El Grupo 2 construyó un cuadrilátero que perceptualmente parecía un cuadrado. En un primer momento, en ambos grupos hubo aprehensión perceptual cuando afirmaron que las bisectrices de dos ángulos consecutivos del cuadrado eran perpendiculares, aun cuando no habían medido el ángulo que estas determinaban. A diferencia del Grupo 2, el Grupo 1 verificó este invariante mediante el arrastre de generalización en el cuadrado que construyeron robustamente. Hubo otro momento en el que se realizó aprehensión perceptual en ambos grupos. El Grupo 1 cuando percibió que en el otro cuadrilátero que construyeron el ángulo que determinaban las bisectrices no era recto. Y el Grupo 2 cuando afirmó que el cuadrilátero construido no era en realidad un cuadrado. Este tipo de aprehensión promovió en ambos grupos el arrastre de contraste: en el Grupo 1 para buscar un posible cuadrilátero en el que las bisectrices fueran perpendiculares y en el Grupo 2 para comparar la representación construida inicialmente, que parecía la de un cuadrado, con otras posibles representaciones de cuadrilátero.

Observación 11. La aprehensión perceptual fue útil en dos sentidos. Primero, para hallar una solución particular del problema: el cumplimiento de la propiedad en el cuadrado. Segundo, para definir una posible ruta de exploración en cada caso mediante el arrastre de contraste.

Observación 12. El arrastre de contraste dependió de la representación sobre la cual se realizó aprehensión perceptual. En el Grupo 1, hubo aprehensión de la representación del ángulo determinado por las bisectrices y se contrastaron los posibles cuadriláteros en los que era recto. En el Grupo 2, hubo aprehensión del cuadrilátero en sí, y se contrastó la representación inicial con otras posibles representaciones de cuadriláteros, sin fijarse en el ángulo determinado por las bisectrices.

En el segundo momento del proceso de resolución, se evidenciaron las consecuencias del arrastre de contraste que cada grupo llevó a cabo. En el Grupo 1, mientras los estudiantes arrastraban un vértice del cuadrilátero buscando otro posible cuadrilátero, diferente del cuadrado, en el que se cumpliera la propiedad, el docente les solicitó que centraran su atención en la representación de un cuadrilátero, que no era un cuadrado, y en el que la medida del ángulo se aproximaba a 90°. En ese momento, los estudiantes afirmaron que para que dicha propiedad se cumpliera ambos pares de lados debían ser paralelos, es decir, hubo aprehensión de lo visual a lo discursivo. Por su parte, en el Grupo 2, como el arrastre de contraste no les sugirió a los estudiantes la existencia de otro posible cuadrilátero diferente al cuadrado, en el que inicialmente percibieron que se cumplía la propiedad exigida, entonces decidieron arrastrar los vértices para generalizar que solo en el cuadrado se cumplía. No obstante, al arrastrar notaron que solo era suficiente que todos los ángulos del cuadrilátero fueran todos rectos, para que se cumpliera la perpendicularidad de las bisectrices. Por tanto, se pasó de considerar que solo se cumplía la propiedad en el cuadrado, a considerar su cumplimiento en cualquier rectángulo.

Observación 13. Cuando el arrastre de contraste permite comparar dos representaciones diferentes, en los que se cumple una misma propiedad, se promueve la aprehensión de lo visual a lo discursivo.

Observación 14. El arrastre de generalización permite determinar las condiciones suficientes para que cumpla cierta propiedad.

En el tercer momento del proceso de resolución, el docente cuestionó la solución que cada grupo había encontrado, lo que promovió que los estudiantes continuaran la exploración mediante el arrastre. El Grupo 1 utilizó el arrastre de separación manteniendo el paralelismo entre un par de lados mientras variaban la posición de uno de los vértices. Esto les permitió discernir que solo era necesario que el cuadrilátero tuviera un par de lados paralelos para que se cumpliera la perpendicularidad de las bisectrices de dos de sus ángulos. Puede afirmarse que con el arrastre de separación también se evidencia la *Observación 14*, es decir, que este tipo de arrastre permite determinar cuáles condiciones son suficientes para que se cumpla una propiedad dada. En el Grupo 2, mientras los estudiantes usaban el arrastre de contraste para hallar otro posible cuadrilátero, diferente al rectángulo, el docente les pidió que observaran una de las representaciones de un cuadrilátero en el que la medida del ángulo que determinaban las bisectrices se aproximaba a los 90°, pero para el cual sus cuatro ángulos no eran rectos. En ese momento, uno de los estudiantes afirmó que en realidad solo bastaba con que el cuadrilátero tuviese dos ángulos consecutivos rectos, para que se cumpliese la propiedad. En esta situación también se evidencia la *Observación 13*, ya que, mediante el arrastre de contraste, los estudiantes compararon dos representaciones distintas en las que se cumplía la propiedad y lograron realizar aprehensión con anclaje de lo visual a lo discursivo.

La tercera parte del problema consistía en realizar una construcción robusta de un cuadrilátero con la propiedad que cada grupo había determinado causa la perpendicularidad de las bisectrices de dos ángulos consecutivos. El Grupo 1 construyó un cuadrilátero con un par de lados paralelos, lo que les permitió verificar, mediante el arrastre de fusión, la relación entre la perpendicularidad de las bisectrices de dos ángulos consecutivos, y el paralelismo de un par de lados. El Grupo 2 no construyó un cuadrilátero con solo dos ángulos consecutivos rectos para comprobar la propiedad que descubrieron. En cambio, construyeron un cuadrado y verificaron el cumplimiento de la propiedad en este; es decir, verificaron la solución que habían considerado inicialmente. Esto pudo deberse al poco tiempo que les quedaba para cumplir con la realización de esta parte del problema. A pesar de que no hubo arrastre de fusión para verificar la relación entre la propiedad que discernieron y la propiedad exigida en el enunciado del problema, la conjetura que formularon sí lo reportaba.

Observación 15. El arrastre de fusión sucede al verificar, mediante una construcción robusta, la relación entre una propiedad dada y otra que se ha discernido en el proceso de exploración, lo cual brinda la posibilidad de que se formule una conjetura. No obstante, la formulación de una conjetura puede presentarse en cualquier momento del proceso de exploración, por ejemplo, cuando se realiza aprehensión de lo visual a lo discursivo producto del arrastre de contraste, como fue el caso del Grupo 2.

5.3. CONCLUSIONES

Las observaciones mencionadas en el apartado anterior permiten establecer conclusiones sobre: la pregunta de investigación, los problemas propuestos a los estudiantes y las teorías utilizadas como herramienta de análisis.

5.3.1. Acerca de la pregunta de investigación

Respecto a cómo los estudiantes usan e interpretan representaciones en un SGD, se concluyó que influye en el discernimiento de propiedades geométricas durante el proceso de resolución de problemas de conjeturación, que los estudiantes:

- *Acepten o no medidas aproximadas para determinar el cumplimiento de una propiedad, cuando se hace arrastre de contraste.* La *Observación 2* muestra que este aspecto fue determinante para que los Grupos 1 y 2 definieran distintas rutas de exploración en el Problema 1. El Grupo 1 aceptó medidas aproximadas a 90 para establecer la existencia de un punto X que con los puntos A y B determinaran un ángulo recto; en cambio, el Grupo 2 no las aceptó, lo que hizo que los estudiantes de este grupo se concentraran solo en concebir un procedimiento para construir un cuadrado con el fin de garantizar exactitud en las medidas.

- *Realicen aprehensión perceptual o discursiva para proponer soluciones particulares e inmediatas a un problema*. En la *Observación 11* se manifiesta que la aprehensión perceptual permitió que los estudiantes de ambos grupos afirmaran, inmediatamente, que una solución del Problema 2 es el cuadrado. En el Problema 1, el Grupo 2, producto de la aprehensión con anclaje de lo discursivo a lo visual (*Observación 1*), desde el principio planteó la posibilidad de que la construcción de un cuadrado permitiría hallar dos puntos que, con los puntos dados A y B, determinarían dos ángulos rectos.

- *Combinen la aprehensión operativa de cambio figural con la perceptual para generalizar una solución particular*. Como se mencionó anteriormente, en el Problema 1 el Grupo 2 estableció una solución particular mediante la construcción de un cuadrado. Para construirlo, los estudiantes incluyeron elementos nuevos en la representación hasta lograr que fuera, perceptualmente, un cuadrado (*Observación 5*). Decidieron que solo había dos puntos que determinarían ángulos rectos con A y B, ya que el arrastre de generalización lo realizaron con un punto ligado a la mediatriz (*Observación 9*). Cabe desatacar que el proceso de construcción que los llevó a la solución particular les permitió discernir propiedades de las diagonales del cuadrado (*Observación 8*).

- *Combinen la aprehensión operativa de cambio posicional con el arrastre de separación para percibir una solución general*. En el Problema 1, el Grupo 1 utilizó el arrastre de separación y el cambio de orientación del ángulo hacia el otro semiplano para encontrar nuevos puntos que determinaran, con los puntos dados, ángulos rectos. Ello promovió que los estudiantes percibieran el lugar geométrico (la circunferencia) con el que obtuvieron la solución general del problema y formularon una conjetura al respecto (*Observaciones 3 y 4*).

- *Utilicen los arrastres de separación y generalización para determinar condiciones suficientes para que se cumpla una propiedad*. Este aspecto se evidenció en ambos grupos durante el proceso de resolución del Problema 2 (*Observación 14*). En el Grupo 1, utilizando el arrastre de separación para mantener el paralelismo entre dos lados del cuadrilátero, determinaron que era condición suficiente para que se cumpliera la perpendicularidad entre las bisectrices. En el Grupo 2 sucedió cuando, al arrastrar, notaron que bastaba que el cuadrilátero fuera rectángulo para que esta se cumpliera la propiedad.

- *Comparen diferentes representaciones en las que se cumple una misma propiedad, mediante el arrastre de contraste, para realizar aprehensión con anclaje de lo visual a lo discursivo.* Este aspecto también se evidenció en ambos grupos en el Problema 2 (*Observación 13*). El Grupo 1 comparó representaciones de cuadriláteros en los que se cumplía la perpendicularidad de las bisectrices, para determinar que el paralelismo entre los lados era una condición necesaria para que se cumpliera esa propiedad. El Grupo 2, al comparar el rectángulo, solución ya obtenida, con la representación de un cuadrilátero en el que solo dos ángulos consecutivos eran rectos, lograron reformular su conjetura.

5.3.2. Acerca de los problemas propuestos

Al igual que en los documentos de referencia estudiados, se confirma el potencial de los problemas de búsqueda de antecedente para promover diferentes estrategias de exploración. Al respecto, un posible objeto de futuros estudios es determinar si los problemas de búsqueda de consecuente y determinación de dependencia tienen el mismo potencial para fomentar los diferentes tipos de arrastre y de aprehensiones figurales. Además, dado que en los enunciados de los problemas que se propusieron en este trabajo no se incluían representaciones de figuras geométricas como parte del enunciado, puede ser interesante hacer un estudio similar usando problemas que sí incluyen esas representaciones. También se puede estudiar el papel de los tipos de arrastre en problemas que no tienen solución, pues lo que se evidenció en el Problema 2 literal *a*, lleva a cuestionar si solo el arrastre de contraste tiene sentido en estos casos.

5.3.3. Acerca de las teorías utilizadas como herramienta de análisis

Respecto al uso de la Teoría de la Variación y la Teoría de las Aprehensiones Figurales como herramienta de análisis de las producciones de los estudiantes, se puede concluir que:

- En algunos de los documentos estudiados sobre la Teoría de la Variación en geometría dinámica (Leung, 2008; Leung et al., 2013), se presentan ejemplos del proceso de resolución de problemas abiertos de conjeturación en el que se aplican los patrones de variación. En estos documentos se propone una ruta de exploración que muestra la siguiente secuencia en el uso de los tipos de arrastre: contraste, separación, generalización y fusión. En este estudio, al usar estos tipos de arrastre como herramienta de análisis del trabajo de los estudiantes, se pudo observar que esa secuencia no siempre se cumple; pueden presentarse variaciones en el orden e incluso omisiones de algunos de estos tipos de arrastre en el proceso de exploración. Por ejemplo, en el Problema 1, el Grupo 2 pasó de realizar arrastre de contraste a realizar arrastre de generalización sin que se presentara el de separación. Esto porque, en su proceso de resolución, la aprehensión con anclaje de lo discursivo a lo visual, reforzada por la imagen conceptual (Vinner,1991) de cuadrado, atenuó otras posibilidades de exploración y, por tanto, el único medio para resolver el problema fue la construcción de un cuadrado. En ese mismo problema, el Grupo 1 sí encontró el lugar geométrico solución del problema, al utilizar el arrastre de separación luego del de contraste (*Observaciones 3 y 4*). Esto lleva a pensar que es importante el arrastre de separación para promover la aprehensión operativa posicional y perceptual. Además, ello impulsó el arrastre de generalización que llevó a establecer la conjetura esperada.

- Existe una mutua influencia entre los tipos de arrastre y los tipos de aprehensiones en el proceso de resolución de problemas de conjeturación. Esto se evidencia en las diferentes observaciones hechas y se ilustra en los esquemas propuestos. Por ejemplo, en las *Observaciones 10 y 12* se menciona que el arrastre de contraste dependió, respectivamente, de la aprehensión discursiva y perceptual. En la *Observación 10* se menciona que el arrastre de contraste puede ser guiado para lograr el cumplimiento de cierta propiedad. En la *Observación 12* se destaca que este tipo de arrastre puede depender de las representaciones sobre las que se hace aprehensión perceptual en cierto momento del proceso de resolución del problema. Recíprocamente, la *Observación 13* expresa que el arrastre de contraste promueve la aprehensión discursiva, con anclaje de lo visual a lo discursivo, cuando se comparan representaciones diferentes para las que se cumple una misma propiedad.

5.4. REFLEXIONES FINALES

Se finaliza este trabajo con cuatro reflexiones acerca del tipo de tareas propuestas, el potencial de las teorías usadas en el análisis para orientar prácticas de enseñanza, el rol del docente y la importancia de que las clases se configuren como ambientes de geometría dinámica.

Primera reflexión: En las observaciones que se realizaron se destacó el papel de los tipos de arrastre que, de acuerdo con los patrones de variación, promovieron el discernimiento de propiedades, propiciando que en algunos casos los estudiantes lograran formular la conjetura que resolvía el problema abierto. Debido a esto, puede cuestionarse si los enunciados de los problemas abiertos de conjeturación influyen para que en el proceso de resolución se experimenten, o no, todos los patrones de variación. Sin embargo, es posible que al incluir más instrucciones o preguntas que garanticen esto, las estrategias de exploración se limiten y se pierdan situaciones que pueden convertirse en nuevos escenarios de aprendizaje.

Segunda reflexión: En cada tipo de arrastre media un tipo de aprehensión y viceversa. Por esto, antes de proponer un problema abierto de conjeturación, conviene determinar las posibles estrategias de resolución para identificar los tipos de aprehensiones que predominan. Como estas pueden afectar el proceso de resolución y el discernimiento de propiedades, de ser necesaria la intervención del profesor para evitar estancamientos que afectan el objetivo de aprendizaje correspondiente, él puede orientar a los estudiantes para que en la exploración acudan a determinados tipos de arrastre.

Tercera reflexión: Algunas intervenciones del docente promovieron que los estudiantes realizaran algún tipo de arrastre o de aprehensión. Básicamente hubo dos tipos de intervenciones: aquellas que buscaron centrar la atención de los estudiantes en una representación particular, y las que expresaron duda acerca de las soluciones, que, en un momento dado del proceso de resolución, dieron los estudiantes.

Un ejemplo del primer tipo de intervención se presentó en el Problema 2. Mientras los estudiantes del Grupo 1 realizaban arrastre de contraste para observar la posibilidad de que otro cuadrilátero, diferente del cuadrado, cumpliera la propiedad exigida en el problema, el docente los interrumpió para solicitarles que centraran su atención en otro cuadrilátero en el que esta se cumplía. Esto promovió aprehensión de lo visual a lo discursivo, ya que los estudiantes discernieron que bastaba que ambos pares de lados fueran paralelos. En esa misma situación, se presentó un ejemplo del segundo tipo de intervención. El docente les preguntó cuántos pares de lados paralelos debía tener el cuadrilátero para que se cumpliera la propiedad, ellos afirmaron que dos y enseguida él replicó: “¿Si? No sé. Sigan explorando”. Esa afirmación hizo que los estudiantes dudarán de la solución que habían descubierto hasta ese momento y continuaran explorando, esta vez, mediante el arrastre de separación.

Hubo un momento en el que se presentó el segundo tipo de intervención, en el Problema 1 con el Grupo 2, en el que se promovió un tipo de arrastre, pero este no dio lugar a que los estudiantes buscaran otras rutas de exploración. Ellos habían construido un cuadrado a partir de la mediatriz del $\overline{AB}$ y afirmaron que la solución al problema era solo dos puntos D y C de la mediatriz. El docente los cuestionó sobre esto, lo cual solo promovió el arrastre de D en la mediatriz para generalizar esa solución. Al respecto podría ser objeto de estudio determinar cómo deben ser las intervenciones del docente para que los estudiantes usen otras rutas de exploración en un SGD y experimenten otros patrones de variación, promoviendo las aprehensiones necesarias para que se aproximen a la solución del problema.

Cuarta reflexión: Fue importante convertir el ambiente natural de las clases en un ambiente de geometría dinámica, principalmente por dos razones. Primera, porque esto promovió la comunicación sobre asuntos matemáticos entre los estudiantes, de modo que lograron expresar sus significados personales y sus estrategias durante la resolución de cada problema, apoyados en lo que representaron mediante el SGD. Segunda, porque gracias a las características de un ambiente de geometría dinámica, los estudiantes lograron discernir, no solo propiedades invariantes con las que formularon conjeturas que resolvían los problemas, sino también otras propiedades que resultaron de sus propuestas de construcción y exploración en el SGD, las cuales generaron nuevas oportunidades de aprendizaje.

BIBLIOGRAFÍA

Abarca, A., Alpizar, F., Sibaja, G., y Rojas, C. (2012). *Técnicas cualitativas de investigación*. San José: Editorial UCR.

Álvarez-Gayou, J. (2003). *Cómo hacer investigación cualitativa: fundamentos y metodología*. México: Paidós.

Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D., y Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practises in Cabri environments. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 34*(3), 66-72.

Baccaglini-Frank, A., y Mariotti, M. A. (2010). Generating conjectures in dynamic geometry: The maintaining dragging model. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 15*(3), 225-253.

Bairral, M., y Arzarello, F. (2015). The use of hands and manipulation touchscreen in high school geometry classes. En Krainer, K. y Vondrová, N. (Eds). *CERME 9-Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2460-2466).

Bowden, J., y Marton, F. (1998). *The university of learning: Beyond quality and competence in Higher Education*. London: Kogan Page.

Camargo, L. (s.f.). *Estrategias Cualitativas de Investigación en Educación Matemática.* Libro en evaluación. Fondo Editorial Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá.

Campistrous, L., y Rizo, C. (2013). La resolución de problemas en la escuela. *Primer Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe*, Santo Domingo, República Dominicana.

De Villiers, M. (1998). An alternative approach to proof in dynamic geometry. En R. Lehrer y D. Chazan (Eds.), *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space* (pp. 369-393). Mahwah (USA): Lawrence Erlbaum.

Deliyianni, E., Elia, I., Gagatsis, A., Monoyiou, A., y Panaoura, A. (2009). A theoretical model of students' geometrical figure understanding. *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 696-706). Lyon, France.

Duval, R. (1995). Geometrical pictures: Kinds of representation and specific processings. En R. Suttherland y J. Mason (Eds.), *Exploiting mental imagery with computers in mathematics education* (pp. 142-157). Berlin: Springer.

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. En C. Mammana y V. Villani (eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century* (pp.37-52). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Duval, R. (1999). Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. Basic Issues for Learning. En F. Hitt y M. Santos (Eds.), *Proceedings of the 21st North American PME Conference* (pp. 3-26), Columbus, Ohio, USA: ERIC/CSMEE Publications–The Ohio State University.

Gal, H., y Linchevski, L. (2010). To see or not to see: analyzing difficulties in geometry from the perspective of visual perception. *Educational studies in mathematics, 74*(2), 163-183.

Gutiérrez, A. (2005). *Aspectos metodológicos de la investigación sobre aprendizaje de la demostración mediante exploraciones con software de geometría dinámica*. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/1312/.

Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, P. (2010). *Metodología de la investigación*. México: Mc Graw Hill.

Johnson, B., Sullivan, A., y Williams, D. (2009). A one-eyed look at classroom life: Using new technologies to enrich classroom-based research. *Issues in Educational Research, 19*(1), 34-47.

Laborde, C. (1998). Relationships between the spatial and theoretical in geometry: the role of computer dynamic representations in problem solving. En J. D. Tinsley y D. C.

Johnson (Eds.), *Information and communications technologies in school mathematics* (pp. 183-195). London: Chapman & Hall.

Leung, A. (2003). Dynamic Geometry and The Theory of Variation. En N. A. Pateman, B. J. Doughherty, y J. T. Zillox (Eds.), *Proceedings of PME 27: Psychology of Mathematics Education 27th International Conference* (pp. 197–204). Honolulu: University of Hawaii.

Leung, A. (2008). Dragging in a dynamic geometry environment through the lens of variation. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 13*(2), 135-157.

Leung, A. (2011). An epistemic model of task design in dynamic geometry environment. *ZDM—The International Journal on Mathematics Education*, *43*(3), 325–336.

Leung, A. (2014). Principles of acquiring invariant in mathematics task design: A dynamic geometry example. En P. Liljedahl, C. Nical, S. Oesterle, y D. Allan (Eds.), *Proceedings of the 38th Conference the International Group for the Psychology of Education and the 36th Conference of the North American Chapter of the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 89–96). Vancouver, Canada.

Leung, A. (2015). Discernment and reasoning in dynamic geometry environments. En S. Cho (Ed.), *Selected regular lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 451-469). Suiza: Springer International Publishing. doi: 10.1007/978-3-319-17187-6

Leung, A., Baccaglini-Frank, A., y Mariotti, M. A. (2013). Discernment of invariants in dynamic geometry environments. *Educational Studies in Mathematics, 84*(3), 439-460.

Lo, M. L. (2012). *Variation theory and the improvement of teaching and learning.* Gothenburg Studies in Educational Science, 323. Acta Universitatis Gothoburgensis. Göteborg, Sweden: Acta Universitatis Gothoburgensis.

Maracci, M. (2001). Drawing in the problem solving process. En J. Novotná (ed.), *Proceedings of 2nd Conference of the European Society for Research in Mathematics Education,* (pp. 478-488). Praga: Charles University.

Marmolejo, G., y Vega, M. (2012). La visualización en las figuras geométricas: Importancia y complejidad de su aprendizaje. *Educación matemática, 24*(3), 7-32.

Marrades, R., y Gutiérrez, Á. (2000). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. *Educational studies in mathematics, 44*, 87-125.

Marton, F., Runesson, U., y Tsui, A. (2004). The space of learning. En F. Marton y A. Tsui (Eds.), *Classroom Discourse and the Space of Learning*. London: Lawrence Erlbaum Associates.

Michael-Chrysanthou, P., y Gagatsis, A. (2013). Geometrical figures in geometrical task solving: An obstacle or heuristic tool. *Acta Didactica Universitatis Comenianae Mathematics, 13*, 17-32.

Olivero, F., y Robutti, O. (2007). Measuring in dynamic geometry environments as a tool for conjecturing and proving. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 12*(2), 135-156.

Orgill, M. (2012). Variation theory. En N. Seel (Ed.), *Encyclopedia of the Sciences of Learning* (pp. 3391-3393). Dordrecht: Springer.

Pomerantz, J. R., y Kubovy, M. (1986). Theoretical approaches to perceptual organization: Simplicity and likelihood principles. *Organization, 36*(3), 36-1.

Samper, C., Molina, Ó., Camargo, L., Perry, P. y Plazas, T. (2013). Problemas abiertos de conjeturación. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 21º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 167-170). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Sinclair, N., y Robutti, O. (2013). Technology and the role of proof: The case of dynamic geometry. En A. Bishop, K. Clement, C. Keitel, J. Kilpatrick y F. Leung. *Third International Handbook of Mathematics Education* (pp. 571-596). Berlin: Springer.

Torregrosa, G., y Quesada, H. (2007). Coordinación de procesos cognitivos en geometría. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 10*(2), 275-300.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 65–81). Dordrecht: Kluwer.

Wu, H.-K. (2002). *Middle school students' development of inscriptional practices in inquiry-based science classrooms*. Unpublished doctoral dissertation, University of Michigan, Ann Arbor, MI.