

DESARROLLO DEL PROCESO DE DEFINIR CON GEOMETRÍA
DINÁMICA: UNA REFLEXIÓN DESDE NUESTRO ROL COMO
DOCENTES

JAMES ALEXANDER CUELLAR CARRILLO
2017285010

JUAN CARLOS JIMÉNEZ RUIZ
2017285017

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ D. C
2019

DESARROLLO DEL PROCESO DE DEFINIR CON GEOMETRÍA
DINÁMICA: UNA REFLEXIÓN DESDE NUESTRO ROL COMO
DOCENTES

Autores:

James Alexander Cuellar Carrillo
Juan Carlos Jiménez Ruiz

TRABAJO DE GRADO PARA OPTAR POR EL TÍTULO DE MAGISTER EN
DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA

Director: Claudia Marcela Vargas Guerrero
Profesora Departamento de Matemáticas

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ D. C.
2019

“Para todos los efectos, declaro que el presente trabajo es original y de mi total autoría: en aquellos casos en los cuales he requerido del trabajo de otros autores o investigadores, he dado los respectivos créditos”

(Acuerdo 031 del 2007. Artículo 42. Parágrafo 2.)

DEDICATORIA

A aquellos que, con la lectura de este trabajo, se sientan motivados a realizar un ejercicio de reflexión sobre su práctica docente y den giro a la enseñanza y aprendizaje de la matemática, en especial la de la geometría.

A mi esposa Andrea Patricia y a mi hijo, por su infinita paciencia, sacrificio de tiempos. Pues fueron mi motor para no desfallecer durante este proceso académico.

A mi esposa Juliette Alejandra y a mis padres Carmelita y José, que con su cariño y paciencia fueron mi apoyo y fortaleza en el transcurso de esta Maestría.

AGRADECIMIENTOS

A Dios por guiarnos y acompañarnos en nuestras vidas y permitir cursar esta Maestría.

A la Gobernación de Cundinamarca por su gestión administrativa y apoyo económico.

A la Universidad Pedagógica Nacional, la “educadora de educadores” por recibirnos en su Alma Mater y hacer realidad un sueño.

A nuestra asesora de trabajo de grado, la profesora Claudia Marcela Vargas Guerrero, por su paciencia, dedicación, amistad y apoyo incondicional al orientar la construcción del presente documento.



UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA
NACIONAL

Universidad de la Pedagogía

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

ACTA DE VALORACIÓN DE TRABAJO DE GRADO

Escuchada la sustentación del Trabajo de Grado titulado *Desarrollo del proceso de definir con geometría dinámica: una reflexión desde nuestro rol como docentes*, presentado por los estudiantes:

James Alexander Cuellar Carrillo, Cód. 2017285010, CC. 80.210.613
Juan Carlos Jiménez Ruiz, Cód. 2017285017, CC. 80024105

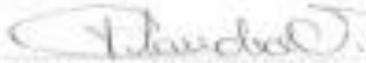
como requisito parcial para optar al título de **Magister en Docencia de la Matemática**, analizado el proceso seguido por los estudiantes en la elaboración del trabajo y evaluada la calidad del escrito final, se le asigna la calificación de **Aprobada así**,

James Alexander Cuellar Carrillo con 46 puntos.
Juan Carlos Jiménez Ruiz con 45 puntos.

Observaciones:

En constancia se firma a los 11 días del mes de septiembre de 2019.

JURADOS

Director del Trabajo: Profesora: 
CLAUDIA MARCELA VARGAS (UPN)

Jurado: Profesora: 
CLAUDIA SALAZAR AMAYA (UPN)

Profesor: 
JORGE ENRIQUE SISELO (UPN)

 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL <small>Formación al servicio de la sociedad</small>	FORMATO	
	RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE	
Código: FOR020GIB	Versión: 01	
Fecha de Aprobación: 10-10-2012	Página 5 de 109	

1. Información General	
Tipo de documento:	Trabajo de Grado de Maestría en profundización
Acceso al documento:	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central.
Título del documento:	Desarrollo del proceso de definir con geometría dinámica: una reflexión desde nuestro rol como docentes
Autor(es):	Cuellar Carrillo, James Alexander; Jiménez Ruiz, Juan Carlos.
Director:	Vargas Guerrero, Claudia Marcela.
Publicación:	Bogotá D.C., Universidad Pedagógica Nacional. 2019. 169 p.
Unidad Patrocinante:	Universidad Pedagógica Nacional.
Palabras Clave:	REFLEXIÓN PROFESIONAL DOCENTE, REFLEXIÓN GUIADA, GEOMETRÍA DINÁMICA, DEFINIR.

2. Descripción
<p>El objetivo del presente trabajo es sistematizar un proceso de reflexión sobre nuestra práctica docente que se realiza durante la planeación, implementación y análisis de una secuencia de tareas para promover el proceso de definir, usando un software de geometría dinámica. Para ello, se realizaron dos ciclos de reflexión, cada uno constituido por una fase pre-activa (antes de una intervención en el aula), activa (intervención en el aula) y post-activa</p>

(después de la intervención en el aula). De la planificación y gestión elaborada se realizaron diarios de campo, relatorías y descripciones de clase, en los cuales se reportaba las acciones realizadas en cada ciclo y fase, las razones por las cuales realizábamos esas acciones, entre otros asuntos. Estos documentos fueron la fuente para la obtención de datos. Estos últimos fueron interpretados en relación con el contenido de la práctica del profesor sobre los cuales versan (Linares, 1999) y el momento de la reflexión (Smyth, 1991, citado por Ñacupil, Carneiro y Flores, 2013).

3. Fuentes

Para la elaboración de este documento se tuvo en cuenta nueve fuentes de referencia:

Camilloni, A. (1995). *Reflexiones para la construcción de una Didáctica para la Educación Superior*. 1–9.

De Villiers, M. (1998). To teach definitions in geometry or teach to define? *Proceedings of the Twentysecond International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, 2(July), 248–255.

Flores, P. (2000). Reflexión sobre problemas profesionales surgidos durante las prácticas de enseñanza. *Revista EMA*, 5(2), 113–138. Retrieved from http://funes.uniandes.edu.co/1107/1/63_Flores2000Reflexión_RevEMA.pdf

Herbst, P. (2005). How Can Geometry Students Understand What It Means to Define in Mathematics? *Mathematics Educator*, 15(2), 17–24.

Jackson, P. (1968). *La vida en las aulas*.

Llinares, S. (1999). Intentando comprender la práctica del profesor de matemáticas. *Educação Matemática Em Portugal, Espanha e Itália*, 109–132. Retrieved from http://www.researchgate.net/publication/39435028_Intentando_comprender_la_prctica_del_profesor_de_matemticas/file/9c96051655421015e9.pdf%5Cnhttp://rua.ua.es/dspace/bitstream/10045/857/1/Llinares-comprendiendo_la_practica_del_profesor.pdf

Ñacupil, J., Carneiro, F., & Flores, P. (2013). La reflexión sobre la práctica del profesor de matemática : el caso de la enseñanza de las operaciones con números enteros . *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 34, 37–46.

Ñacupil, P. J. C., Carneiri, Fernando, R., & Flores, Martínez, P. (2013). La reflexión sobre la práctica del profesor de matemática : el caso de la enseñanza de las operaciones con números enteros . *Revista*

Iberoamericana de Educación Matemática, 34, 37–46.

Nolan, A. (2008). *Encouraging the reflection process in undergraduate teachers using guided reflection*. 7(1).

Parada, S. (2011). *Reflexión y acción en comunidades de práctica: Un modelo de desarrollo profesional*. 329.

Vargas, G. (2013). Documentación narrativa de las primeras experiencias de enseñanza de la física: un estudio autobiográfico (Tesis de Maestría). Universidad Pedagógica Nacional.

Vinner, S. (1991). *The role of definitions in the teaching and learning of mathematics shlomo vinner*. 29(4), 65.

4. Contenidos

En el primer capítulo presentamos el contexto del estudio realizado, donde se aborda el enfoque a trabajar, los objetivos generales y específicos, la justificación y la literatura escogida; literatura que sirvió como marco de referencia para establecer, los elementos esenciales que caracterizan un ejercicio de reflexión sobre la práctica docente.

En el segundo capítulo desarrollamos el marco de referencia, donde se da respuesta a preguntas como: ¿Qué es la reflexión sobre la práctica? ¿Qué es la reflexión guiada y cuáles son sus fases? ¿Cuáles son los asuntos que atiende la reflexión sobre la práctica? Finalmente, presentamos el modelo de reflexión empleado en este trabajo.

En el tercero, explicitamos la metodología adoptada en este trabajo de grado para el proceso de reflexión guiada. Además de presentar una estructura de preguntas diseñadas por parte de la asesora para guiar la reflexión en cada una de sus etapas, describimos cómo se desarrolla cada uno de los ciclos de reflexión hasta la consolidación de los datos.

En los capítulos cuarto y quinto, presentamos el primer y segundo ciclo de reflexión, donde se analizan cada uno de los datos obtenidos durante la planeación y gestión de las tareas. Por otra parte, en el capítulo quinto realizamos una síntesis de los dos ciclos dando a conocer los aspectos más relevantes de esta reflexión.

Esperamos que a partir de las conclusiones reportadas en el capítulo seis y bajo la mirada de los referentes teóricos elegidos, podamos realizar una «radiografía» de nosotros mismos como profesores de matemáticas.

5. Metodología

Inicialmente realizamos una descripción de lo que es el proceso reflexivo. En seguida, mencionamos algunas técnicas para llevar a cabo el proceso reflexivo que se utilizaron durante los ciclos de reflexión. Luego explicamos cuáles fueron los instrumentos para registrar información sobre el proceso reflexivo, continuando con el procedimiento para obtener los datos investigativos y con el procedimiento para analizarlos. Finalmente, presentamos la forma como se consolidaron los resultados.

6. Conclusiones

Observamos que introducirnos en un ejercicio de reflexión sobre la práctica nos permitió ser conscientes de nuestro rol como docentes a partir de una confrontación con nuestros conocimientos matemáticos, pedagógicos y didácticos.

El proceso de reflexión sobre la práctica que experimentamos nos permitió hacer una sistematización de las acciones que, como docentes, realizamos al momento de diseñar, gestionar y repensar una clase.

Las transformaciones que evidenciamos en el marco de la reflexión surgieron a partir de las dudas, inquietudes, creencias y dificultades que teníamos.

La reflexión guiada jugó un papel fundamental para el desarrollo de nuestra reflexión docente y nos estimuló a reinventarnos como profesores.

Elaborado por:	Cuellar Carrillo, James Alexander; Jiménez Ruiz, Juan Carlos.		
Revisado por:	Vargas Guerrero, Claudia Marcela		
Fecha de elaboración del Resumen:	16	06	2019

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN	1
1 ENFOQUE DEL TRABAJO DE GRADO	2
1.1 INQUIETUD INVESTIGATIVA	2
1.1.1 FORMACIÓN ACADÉMICA Y PROFESIONAL DEL PROFESOR JAMES CUELLAR 2	
1.1.2 FORMACIÓN ACADÉMICA Y PROFESIONAL DEL PROFESOR JUAN JIMÉNEZ ..	4
1.2 JUSTIFICACIÓN	6
1.3 OBJETIVOS	8
1.3.1 OBJETIVO GENERAL	8
1.3.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS	9
1.4 REVISIÓN LITERARIA.....	9
2 MARCO DE REFERENCIA	12
2.1 ¿QUÉ ES LA REFLEXIÓN SOBRE LA PRÁCTICA?	12
2.2 ¿QUÉ ES UNA REFLEXIÓN GUIADA?	13
2.3 FASES DEL PROCESO DE REFLEXIÓN.....	14
2.4 ¿SOBRE QUÉ ASUNTOS VERSA LA REFLEXIÓN SOBRE LA PRÁCTICA?	17
2.5 MODELO DE REFLEXIÓN SOBRE LA PRÁCTICA IMPLEMENTADO EN EL TG	18
3 METODOLOGÍA PARA UN PROCESO DE REFLEXIÓN GUIADA	19
3.1 ASPECTOS METODOLÓGICOS.....	19
3.2 CICLOS DE REFLEXIÓN.....	19
3.3 TÉCNICAS PARA LLEVAR A CABO EL PROCESO REFLEXIVO	20
3.3.1 PREGUNTAS PARA PROMOVER LA REFLEXIÓN GUIADA EN CADA FASE DEL PROCESO	21
3.4 INSTRUMENTOS PARA RECOPIRAR INFORMACIÓN Y PROMOVER LA REFLEXIÓN GUIADA.....	23
3.5 PROCEDIMIENTO PARA OBTENER LOS DATOS INVESTIGATIVOS.....	24
3.6 PROCEDIMIENTO PARA ANALIZAR LOS DATOS	25
3.7 CONSOLIDACIÓN DE RESULTADOS DE ANÁLISIS	27
4 PRIMER CICLO DE REFLEXIÓN	28
4.1 REFLEXIÓN DE JUAN CARLOS JIMÉNEZ.....	28
4.1.1 FASE PRE-ACTIVA	28
4.1.2 FASE ACTIVA	33
4.1.3 FASE POST-ACTIVA.....	36
4.1.4 CONCLUSIONES DERIVADAS DEL PRIMER CICLO PROFESOR JUAN CARLOS 41	
4.2 REFLEXIÓN DEL PROFESOR JAMES ALEXANDER CUELLAR	46
4.2.1 FASE PRE-ACTIVA	47
4.2.2 FASE ACTIVA	51
4.2.3 FASE POST-ACTIVA.....	55
4.2.4 CONCLUSIONES DERIVADAS DEL PRIMER CICLO JAMES ALEXANDER	60
5 SEGUNDO CICLO DE REFLEXIÓN	65
5.1 FASE PRE-ACTIVA	66

5.1.1	CONTENIDOS MATEMÁTICOS.....	66
5.1.2	GESTIÓN	70
5.1.3	DISCURSO	72
5.1.4	MEDIOS	74
5.1.5	APRENDIZAJES	76
5.2	FASE ACTIVA	77
5.2.1	CONTENIDO.....	77
5.2.2	DISCURSO	78
5.2.3	GESTIÓN	80
5.2.4	MEDIOS	84
5.3	FASE POST-ACTIVA	86
5.3.1	CONTENIDOS MATEMÁTICOS.....	86
5.3.2	DISCURSO	87
5.3.3	GESTIÓN	88
5.3.4	MEDIOS	90
5.4	CONCLUSIONES DERIVADAS DEL SEGUNDO CICLO DE REFLEXIÓN.....	91
5.4.1	ASUNTO 1: RELACIÓN ENTRE LA DEFINICIÓN DE UNA FIGURA Y SU REPRESENTACIÓN.....	91
5.4.2	ASUNTO 2: USO DEL LENGUAJE MATEMÁTICO.....	93
5.5	COMPARATIVO ENTRE LOS CICLOS DE REFLEXIÓN	94
6	CONCLUSIONES	98
7	REFERENCIAS.....	99
8	ANEXOS	100
8.1	ANEXO 1: CLASE IMPLEMENTADA POR EL PROFESOR JAMES A. CUELLAR	100
8.2	ANEXO 2: CLASE IMPLEMENTADA POR EL PROFESOR JUAN C. JIMÉNEZ.....	103
8.3	ANEXO 3: PROPUESTA INICIAL DE CLASE	105
8.4	ANEXO 4: PROPUESTA DE CLASE IMPLEMENTADA	117
8.5	ANEXO 5: DESCRIPCIÓN DE LA CLASE IMPLEMENTADA.....	137

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. Aspectos orientadores según la fase de reflexión.....	18
Tabla 2. Preguntas fase Pre-activa.....	22
Tabla 3. Preguntas fase activa.....	22
Tabla 4. Preguntas fase Post-activa	23
Tabla 5. Ejemplo de Matriz de Decodificación	25
Tabla 6. Clasificación de asuntos según el contenido	26
Tabla 7. Concepción del profesor sobre la definición y las propiedades del objeto a definir.....	44
Tabla 8. Tratamiento de los conceptos previos y la simbología geométrica.	46
Tabla 9. Ciclo 1: Relación entre Definición y Construcción profesor James	62
Tabla 10. Ciclo1: Tratamiento de los conceptos previos profesor James	64
Tabla 11. Ciclo 2: Relación entre representación y definición	93
Tabla 12. Uso del lenguaje matemático.....	94

ÍNDICE DE GRÁFICOS

Gráfica 1. Ciclo de Smyth	16
Gráfica 2. Ciclos y fases de reflexión	19
Gráfica 3. Clasificación datos Primer Ciclo de reflexión de Juan Carlos.....	28
Gráfica 4. Simbología geométrica sobre cuadriláteros	31
Gráfica 5. Ciclo de Smyth según Juan Carlos.....	42
Gráfica 6. Clasificación datos Primer Ciclo de reflexión de James Alexander	47
Gráfica 7. Ciclo de Smyth según James Alexander	61
Gráfica 8. Datos Ciclo 2	65
Gráfica 9. Ciclo 2: Ciclo de Smyth	91

INTRODUCCIÓN

Nosotros, como profesores de matemáticas y estudiantes de la Maestría en Docencia de la Matemática (MDM) de la Universidad Pedagógica Nacional (UPN), comenzamos a realizar un ejercicio de reflexión sobre nuestra práctica. Concretamente, sobre cómo estábamos realizando el proceso de enseñanza-aprendizaje. Este documento reporta la fundamentación teórica, la sistematización, el análisis y los resultados del proceso de reflexión realizado, organizado en cinco capítulos.

En el primero de ellos se presenta el contexto de la investigación, donde se aborda el enfoque a trabajar, los objetivos generales y específicos, la justificación y la literatura escogida cuyo objeto de estudio es la reflexión sobre la práctica docente. En el segundo capítulo se desarrolla el marco de referencia, donde se da respuesta, desde los educadores e investigadores seleccionados, a preguntas como: ¿Qué es la reflexión sobre la práctica? ¿Qué es la reflexión guiada y cuáles son sus fases? ¿Cuáles son los asuntos que atiende la reflexión sobre la práctica? Finalmente, se presenta el modelo de reflexión empleado en este trabajo.

En el tercero, presentamos la metodología para el proceso de reflexión guiada, se presenta una estructura de preguntas diseñadas por parte del asesor para guiar la reflexión en cada una de las tres etapas que según Parada (2011) llama reflexión-para-la acción, reflexión-en-la acción y reflexión-sobre-la acción y a partir de ello cómo se desarrollará cada uno de los ciclos de reflexión hasta la consolidación de los datos. En los capítulos cuarto y quinto, se presentan el primer y segundo ciclo de reflexión, donde se analizan cada uno de los datos obtenidos durante la planeación y gestión de las tareas. En este último se realiza una síntesis de los dos ciclos dando a conocer los aspectos más relevantes de esta reflexión.

Finalmente esperamos que a partir de las conclusiones reportadas en el capítulo sexto y bajo la mirada de los referentes teóricos elegidos, podamos realizar una «radiografía» de nosotros mismos como profesores de matemáticas, para reconocer cómo nos movilizamos frente a un objeto matemático y con respecto a este cómo se deciden cuáles serán los elementos para llevar a un escenario educativo que favorezca la enseñanza y el aprendizaje en los estudiantes.

1 ENFOQUE DEL TRABAJO DE GRADO

Los aspectos que presentamos en este capítulo son los que promovieron la realización de este trabajo de grado. Estos están conformados por una descripción de nuestra formación como docentes en matemáticas y de nuestra experiencia profesional, la cual nos ayuda a generar una pregunta de investigación. Enseguida hacemos la presentación de los objetivos de estudio y la justificación. Finalmente, presentamos algunos referentes teóricos que evidencian que el trabajo de la reflexión sobre la práctica profesional docente es un asunto de interés, sobre el cual está soportado el presente trabajo.

1.1 INQUIETUD INVESTIGATIVA

Los propósitos de este trabajo de grado surgen a partir de la formación académica, experiencia profesional, interés de formación y énfasis ofertado en la MDM. Por esta razón, empezaremos realizando una presentación personal de nosotros como autores donde contamos cómo incidió nuestra formación académica retomando algunos aspectos de nuestro paso por la educación básica secundaria, la licenciatura y la intención inicial con la que llegamos a la MDM ofertada en la UPN; posteriormente, la forma como nuestros intereses iniciales cambiaron de rumbo y se relacionaron para dar lugar a un mismo trabajo de grado.

1.1.1 FORMACIÓN ACADÉMICA Y PROFESIONAL DEL PROFESOR JAMES CUELLAR

Es egresado de la Normal Superior Nuestra Señora De La Paz Varones, de allí obtuvo el título de bachiller académico con énfasis en educación. Luego, su formación profesional como licenciado se desarrolló en la Universidad la Gran Colombia en la modalidad semipresencial.

En su paso por la universidad tuvo tres campos de conocimiento que influenciaron su formación académica. El primero orientado a la línea de pedagogía, donde las clases estaban orientadas a la lectura de documentos y reflexiones de algunas situaciones de aula para evidenciar diferentes corrientes y modelos pedagógicos. El segundo campo estaba relacionado con la formación en matemática, la cual se centró en el desarrollo de clases en forma de cátedra y ejercicios propuestos para cada espacio académico y un acercamiento a la resolución de problemas. Finalmente, el tercer campo estuvo orientado hacia el estudio de la física, este espacio académico se centró en el análisis de situaciones, resolución de problemas y trabajo práctico que permitía reconocer fenómenos físicos en situaciones cotidianas. Este último campo le permitió ver la importancia de la matemática como una herramienta para interpretar el contexto que nos rodea.

Unos años después de terminado su pregrado, inició un estudio de posgrado en estadística aplicada en la Universidad los Libertadores. Ello porque durante su experiencia docente había evidenciado que este campo presenta numerosas aplicaciones y la especialización le permitiría tener nuevos elementos para el trabajo de esta asignatura en el aula y así expandir su campo de acción a nivel profesional.

Respecto al campo profesional, vale la pena mencionar que como docente tiene alrededor de 15 años de experiencia. Diez de ellos han sido en colegios de carácter privado y cuatro años y medio en el sector público. Como docente siempre se ha preocupado porque sus estudiantes logren potenciar y desarrollar los procesos de pensamiento que involucra el estudio de la matemática. Por tal razón en el campo conceptual da bastante prioridad al uso apropiado del lenguaje que caracteriza a esta rama del conocimiento. Por otro lado, busca que los estudiantes vean la importancia del estudio de la matemática como una herramienta que les permite interpretar su mundo. Además, es un docente convencido que el estudiante es un individuo en formación, de tal manera que promueve la importancia del respeto y los valores en la clase, procurando que sean conscientes de las acciones y decisiones que toman a lo largo de su trayectoria académica.

Su motivación para cursar la MDM estuvo orientada por la convicción de seguir con la formación disciplinar en Matemáticas. Al finalizar este programa de posgrado busca tener nuevos elementos que le permitan realimentar y direccionar desde otra perspectiva sus prácticas de aula.

En el año 2017 tuvo la oportunidad de acceder a la MDM, por medio de un convenio entre la UPN y la Gobernación de Cundinamarca. Por tanto, optó por postularse por dos razones, en primera instancia porque cree en la calidad de la educación pública y en el profesionalismo de sus docentes, además, porque reconoce que es una institución de gran exigencia académica. En segunda instancia porque la UPN era la institución que ofertaba un programa flexible de alta calidad y que se ajustaba a sus condiciones laborales. Por otra parte, era una oportunidad de formarse en su disciplina, vinculando sus intereses a una de las líneas de investigación orientada al aprendizaje y enseñanza de la Geometría, dado que sus inquietudes giraban en torno al aprendizaje de la geometría en los estudiantes de grado sexto de la Institución Educativa Rural Departamental San Antonio del municipio de Anapoima – Cundinamarca.

Al iniciar esta carrera de posgrado uno de los requisitos para la postulación era la realización de una propuesta para el trabajo de grado. Desde el inicio, él tenía claro que su trabajo iba a estar enfocado en la geometría. En esta expresó su interés por desarrollar un trabajo orientado al diseño de estrategias metodológicas para el desarrollo del pensamiento espacial. Por tanto, este trabajo iba orientado hacia el estudiante como objeto de estudio.

Luego de los procesos de selección y estar vinculado como estudiante de la Maestría, al iniciar semestre, uno de los espacios académicos que se desarrolló era el Seminario de Innovación e Investigación cuya finalidad era orientar las propuestas de trabajo de grado que se presentaron al momento de la postulación. Durante el paso por este seminario se desarrollaron diversas tareas que permitirían direccionar la propuesta de trabajo de grado a un proceso, un objeto matemático y orientarlo en el enfoque de reflexión sobre la práctica. El llegar a ser consciente que el objeto de estudio se centraba en la práctica docente y no sobre el estudiante, le generó algunas dificultades, dado que tradicionalmente los trabajos de grado que se desarrollan consisten en ubicar la mirada en un tercero y no sobre los autores de este. Además, porque en las actividades que se proponían, su mirada seguía puesta en el estudiante como objeto de estudio. Por esta razón, cuando el trabajo se orientó hacia la reflexión sobre la práctica, generó un poco de incertidumbre, ya que él no conocía mucho acerca del tema e imaginaba que el trabajo iba a ser orientado hacia la producción de los estudiantes. Pero cuando inició con el desarrollo de las distintas actividades desde el Seminario de Innovación y posteriormente en el trabajo de grado que estaban orientadas a este enfoque, estas evocaron en él momentos cuando en la Normal hacía observación de clase y registraba en un diario de campo todas las situaciones que se derivaban del contexto de la clase. Ello le generó una gran expectativa, ya que siempre se ha cuestionado sobre si la forma en que orienta las temáticas y gestiona su clase, permite que los estudiantes puedan dominar los diferentes conceptos matemáticos.

1.1.2 FORMACIÓN ACADÉMICA Y PROFESIONAL DEL PROFESOR JUAN JIMÉNEZ

Su formación académica profesional inició en el primer semestre del año 2000 en la Escuela Colombiana de Carreras Industriales (ECCI) donde comenzó la carrera de Ingeniería en Electrónica, la cual hizo hasta séptimo semestre. Allí aprendió a aplicar las matemáticas a la electrónica. Los cursos de Cálculo avanzado y Estadística estaban diseñados para usar técnicas y resolver numerosos ejercicios que involucraban algoritmos reiterativos con el fin de memorizar su desarrollo. Sin embargo, no era de interés para la carrera estudiar el funcionamiento de dichas técnicas o qué las fundamentaban. Durante su recorrido en la ingeniería no había profundizado más allá en geometría, además de aprender de memoria fórmulas de área y volumen de figuras y cuerpos geométricos para la solución de problemas en Cálculo. Él desconocía el papel que jugaba en la geometría la idea de noción, de postulado o de teorema. A mediados del año 2001 entró al programa de Licenciatura en Matemáticas en la Universidad Pedagógica Nacional. Llevó simultáneamente estas dos carreras; sin embargo, por falta de recursos económicos decidió terminar únicamente la licenciatura, culminándola al inicio del primer semestre del 2011.

Cuando retomó sus estudios de pregrado en la UPN experimentó inmediatamente, en los primeros semestres, otra manera de trabajar las matemáticas en comparación a lo que había aprendido en la Ingeniería, pues existía la intención de vivenciar y reconocer las matemáticas como un desarrollo del ser humano y para ello se proponían en los diferentes cursos de cada línea (aritmética y álgebra, geometría, cálculo y estadística) estrategias para generar un acercamiento a los fundamentos conceptuales. La línea de geometría estaba orientada hacia el uso de instrumentos de medición como la regla, el compás, y el transportador, los cuales eran muy interesantes para él por su precisión en su uso y orden de la construcción que se debía llevar. En otras ocasiones, se proponían situaciones problema para generar conjeturas comprobándolas con el uso de un software de geometría dinámica, que estaba disponible en calculadoras especiales. Acá jugaba un nuevo rol como estudiante, pues debía contar con nuevas habilidades para el descubrimiento de propiedades de objetos geométricos vistas en una pantalla gráfica y otras habilidades para el manejo del software y reconocer su potencial frente a los instrumentos de medición, lápiz y papel.

Durante su estadía en la UPN se interesó en el desarrollo del pensamiento geométrico, porque en las actividades que se proponían en las clases se propiciaba el desarrollo de procesos matemáticos como el de visualizar, explorar, generalizar, conjeturar, justificar entre otros. Por otro lado, participó como asistente en aproximadamente seis versiones del Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones realizados en la UPN, el primero de ellos fue en el 2002 cuando se realizó el XIII Encuentro y el último al cual asistió fue en el año 2017 cuando se realizó el XXIII Encuentro. Fuera de estos eventos, en el año 2012 fue coautor de capítulos en los textos de octavo y décimo para la serie de libros de matemáticas llamada: Los Caminos del Saber de la editorial Santillana.

A mediados del 2017, inició sus estudios de posgrado con la *Especialización de Aplicación de TIC para la enseñanza*, en modalidad virtual en la Universidad de Santander, la cual concluyó en el primer semestre del 2018. Uno de los objetivos alcanzados fue diseñar y construir un recurso educativo digital (RED) el cual fue nutriéndose de las problemáticas de aprendizaje que se iban evidenciando en las clases de grado sexto y séptimo en la institución educativa donde él labora. En paralelo a la Especialización, inició la MDM en modalidad presencial en la UPN a través de un convenio interadministrativo con la Secretaría de Educación de la Gobernación de Cundinamarca. Durante el 2017 y el 2018 llevar a cabo los dos programas fue un reto personal y profesional que le demostraron la capacidad del ser humano para lograr objetivos y metas propuestas.

Su experiencia laboral en el campo educativo se ha desarrollado en tres colegios privados y una institución pública, en los grados de básica secundaria y media. Durante todo este tiempo de experiencia laboral ha reconocido que el lenguaje matemático que usa para comunicarse con sus estudiantes y el que ellos también usan para comunicar sus ideas debe ser claro, sucinto y preciso. Que los

conceptos que les presenta deben estar acompañados de al menos dos representaciones: la gráfica y la simbólica, entre otras, pues considera que ello ayuda a construir, a transformar el objeto matemático que se está estudiando.

Los motivos que le llevaron a estudiar la Maestría son: primero, que es fundamental que un profesor de matemáticas se esté actualizando con respecto a su saber y lo confronte con los aportes que le puede brindar un programa de formación a un nivel más avanzado y segundo existe una necesidad académica urgente en la institución donde labora, puesto que en la mayoría de las clases de matemáticas se le da prioridad a desarrollar el pensamiento numérico dejando de lado el pensamiento geométrico. Por tanto al finalizar el estudio de postgrado, busca fortalecer sus aprendizajes y tener las herramientas necesarias para orientar de una mejor manera sus prácticas de aula.

Uno de los requisitos para ingresar al programa de Maestría en Docencia de la Matemática consistió en presentar una propuesta inicial de trabajo de grado en donde se debía elegir un pensamiento y sistema de acuerdo a los estándares básicos de competencia en matemáticas dados por el Ministerio de Educación Nacional (MEN). En esta propuesta se debía partir de una situación de su interés que hubiera identificado en clase y que estuviera relacionada con las matemáticas escolares; luego, plasmar el contexto institucional y su relación con la problemática elegida. Se debía escribir además una justificación del porqué consideraba que el problema que eligió debía ser el centro de atención de su proyecto de grado. Debió adjuntar evidencias que soportaran la dificultad que presentaba.

Una vez seleccionado para cursar la Maestría, en el primer semestre se llevó a cabo el Seminario de Innovación e Investigación, cuya intención era perfilar las propuestas iniciales de trabajo de grado y de acuerdo a la problemática presentada se iba seleccionando para trabajar en alguna de las líneas de investigación existentes en la maestría quedando vinculado a la línea de geometría. Posteriormente, el desarrollo de este seminario se iba acentuando en una problemática que poco tenía que ver con sus estudiantes. Donde el análisis de él como profesor de matemáticas era la excusa para abordar un objeto geométrico ligado a un proceso de la geometría, es decir que la prioridad estaba enfocada en desarrollar un trabajo en la reflexión sobre su práctica docente pero que también tenía que ver con una problemática que se presenta en la institución educativa donde labora.

1.2 JUSTIFICACIÓN

Como se mencionó anteriormente, este trabajo está enmarcado en el énfasis reflexión sobre la práctica, ofertado por la MDM. Para tratar de justificar la pertinencia de este documento, pretendimos rastrear en diferentes artículos, libros y tesis doctorales en educación por qué es importante la reflexión sobre la práctica y cuál es la contribución de la misma a la formación docente. En ese sentido, encontramos tres ideas fundamentales respecto al proceso de reflexión que se van a desarrollar posteriormente: 1) permite al profesor ser consciente del conocimiento que

pone en juego durante la actividad de enseñar, 2) ayuda a caracterizar sus propias prácticas a partir de las acciones y decisiones que toma; y, 3) contribuye a reconstruir y transformar su práctica docente.

En primera medida, el proceso de reflexión permite al docente una comprensión de su actuación en la deliberación del sentido y valor educativo de las situaciones problemáticas, la meditación sobre las finalidades y la valoración argumentada de procesos y sus consecuencias. De esta manera, la reflexión facilita la realización de acciones conscientes orientadas a la construcción del conocimiento profesional y a la capacidad de desenvolverse en esas situaciones conflictivas e inciertas que son parte del ejercicio de su profesión (Flores, 2000).

A su vez, la reflexión sobre la práctica es un proceso que permite al profesor de matemáticas tener conciencia de sus creencias, sus concepciones y sus teorías acerca de la matemática, de su enseñanza y su aprendizaje y de su influencia en los procesos que orienta. Además, posibilita que el profesor perciba las situaciones de su práctica que necesitan de otra manera de actuar o que problematice algunas de estas situaciones. Lo anterior es posible porque al reflexionar sobre su práctica, el profesor debe distanciarse de las acciones y decisiones que desarrolla, para poder analizarlas y buscar otras formas de interpretarlas a partir de diferentes fuentes, como los compañeros de trabajo, los documentos curriculares, los libros de textos, las investigaciones en el campo de la Educación Matemática, entre otras (Ñancupil, Carneiro y Flores, 2013).

Del mismo modo, se hace necesario indagar sobre modelos que permitan promover y guiar el proceso de reflexión sobre la práctica del maestro, ya que reflexionar sobre toda su actividad dentro y fuera del aula es complejo. Por ejemplo, un criterio sobre el cual se podría reflexionar es cómo los conocimientos matemáticos con los que los profesores han sido formados, desenlazan o no aprendizajes en sus estudiantes y qué de ello permite realimentar su proceso de enseñanza para mejorar su profesionalización docente. Es así como el proceso de reflexión que hacen los profesores de matemáticas en sus experiencias dentro de las comunidades de práctica es importante, pues ello ayuda a fortalecer su desarrollo profesional en cuanto a conocimientos matemáticos, pedagógicos y didácticos a partir de la confrontación de estos saberes. Hacer un ejercicio de reflexión sobre la práctica promueve el desarrollo de capacidades y auto aprendizajes del profesor de matemáticas y le permite identificar cambios o adaptaciones a sus prácticas (Parada, 2011)

El análisis de una observación en acción de lo que sucede y hace un profesor en el aula y qué de ello lo hace ser reconocido dentro de una comunidad educativa, permite entrever elementos para mejorar las prácticas profesionales. Sin embargo, no siempre es así, ya que las actitudes del profesor con respecto a sus sentimientos frente al éxito o al fracaso en relación a su conocimiento profesional y la enseñanza de lo que sabe hacia otros, no son visibles si no es a través de alguien que los haya experimentado con él o durante el diálogo en entrevistas con pares o superiores de la institución, con el fin de determinar si existe una satisfacción del do-

cente al interior del aula o si reconoce cuándo sabe que realiza una buena práctica. En otras palabras, realizar una reflexión sobre la práctica y profesionalización, significa identificar y remover nudos que se generan al organizar la práctica educativa (Jackson, 1968).

Finalmente, realizar un proceso de reflexión también requiere de una ayuda profesional que domine algunas técnicas de reflexión, a este asunto se le llamará *reflexión guiada*, de tal manera que involucre al profesor en la actividad reflexiva y a partir de ella tomar conciencia de la relación que existe entre enseñanza y aprendizaje de un saber y al final comprender si ha sufrido transformaciones a partir de las experiencias de prácticas profesionales, las creencias y el dominio de un conocimiento (Nolan, 2008).

Si bien, es posible identificar en la literatura diversos investigadores que abogan por involucrar a los estudiantes escolares en el proceso de definir (v.g. Herbst, 2005; De Villiers, 1998; Vinner, 1991), el estudio que aquí se documenta no pretende establecer la pertinencia de incluir este proceso en el ámbito escolar o dar recomendaciones para profesores que deseen hacerlo. En consecuencia, estos aspectos no se incluyen ni en la justificación, ni en el marco teórico. El estudio, al estar centrado en un proceso de reflexión sobre la práctica, intenta que los profesores – autores del trabajo de grado - sean conscientes de los supuestos y los conocimientos que pone en juego cuando diseña, implementa y analiza los resultados de una secuencia de tareas que tiene como propósito que los estudiantes desarrollen el proceso de definir una figura geométrica con el apoyo de un programa de geometría dinámica. A su vez, pretende rastrear los cambios que han surgido alrededor de las prácticas de aula, examinando la gestión y cada una de las situaciones que han generado dudas, inquietudes, conflictos, problemas o alteraciones en cada una de las etapas al implementar una clase. Se espera que esto sea posible mediante el diálogo entre pares académicos (los autores del trabajo de grado) y un asesor que domina algunas técnicas de reflexión, como crear montajes o glosarios de términos, leer y comentar artículos académicos relacionados con el proceso que se pretende desarrollar, evocar experiencias pasadas, entre otros.

1.3 OBJETIVOS

1.3.1 OBJETIVO GENERAL

Sistematizar un proceso de reflexión sobre nuestra práctica docente que se realiza durante la planeación, implementación y análisis de una secuencia de tareas para promover el proceso de definir cuadrado usando un software de geometría dinámica.

1.3.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- A. Diseñar una secuencia de tareas que promuevan el proceso de definir en los estudiantes usando geometría dinámica.
- B. Registrar a través de relatorías de asesoría y diarios de campo la información sobre nuestra práctica docente que surge de un proceso de reflexión.
- C. Interpretar nuestra práctica docente a partir de la identificación de momentos de reflexión y de asuntos que se priorizan en las prácticas.
- D. Brindar evidencias sobre cómo se ha transformado nuestra práctica y conocimiento profesional docente antes y después de un proceso de reflexión.

1.4 REVISIÓN LITERARIA

A continuación, se presenta una síntesis de algunas investigaciones cuyo foco de atención es la reflexión sobre la práctica, de manera que con sus aportes permitan fundamentar y situar este documento.

La primera investigación, fue desarrollada por Ñancupil, Carneiro y Flores (2013), quienes describen el proceso reflexivo llevado a cabo por dos de los autores, cuando, en un curso del Máster en Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, se enfrentaron a un problema surgido en la práctica de aula que se refiere a la enseñanza de la suma y de la resta de números enteros con los alumnos de 12 o 13 años. Como marco de referencia en esta experiencia de reflexión se hace uso del ciclo de reflexión propuesto por Smyth (1991). El proceso de reflexión debe comenzar por llevar al profesor a tener conciencia de sus creencias acerca de la matemática, su enseñanza, aprendizaje y también a verificar si alguna de ellas está frenando o dificultando la enseñanza. El aporte de este documento a nuestro trabajo de grado es la aproximación a la forma en que se emplea el ciclo de reflexión de Smyth para analizar las diversas situaciones que se presentan en la gestión del profesor al planear y ejecutar una clase, además de los aspectos sobre los cuales versa un proceso de reflexión y la manera que se debe abordar cuando el centro de la investigación es la práctica de aula.

Una segunda investigación, que también está fundamentada en el ciclo de Smyth, es la desarrollada por Flores (2000). En ella, se presenta una experiencia de reflexión sobre problemas prácticos profesionales que han surgido en los docentes en formación del último curso de la Licenciatura de matemáticas de la Universidad de Nueva Granada, mientras se encontraban desarrollando sus prácticas de enseñanza en centros de educación secundaria. En el proceso de reflexión se implementan las siguientes estrategias: 1) desarrollos de debates para delimitar la cuestión y hacer un primer diseño para el desarrollo de una clase; 2) estudio de artículos académicos para estudiar la cuestión y para concretar mejor el diseño de la clase; 3) discusión con un docente; 4) Narración de lo sucedido durante la implementación. Este trabajo tiene como finalidad implicar a los estudiantes en un proceso de formación basado en detectar, analizar, compartir y tratar de resolver un

problema profesional del profesor de matemáticas que sea significativo para ellos. Además, pretende hacer que los estudiantes entren en contacto con las fuentes de reflexión que tiene un profesor de matemáticas. Este documento brinda un aporte significativo a nuestro trabajo, dado que ilustra un proceso de reflexión en la práctica basado en el ciclo de Smyth. De esta manera nos permite tener una visión clara sobre el tratamiento de cada uno de los aspectos o situaciones que surgen cuando el centro de la investigación son las acciones del docente en ejercicio, asunto que es el pilar fundamental de este trabajo de grado.

Una tercera investigación considerada es la esbozada por Parada (2011), quien presenta un modelo de reflexión – acción en una comunidad de práctica que permite promover en los profesores de educación básica la reflexión sobre la actividad matemática que promueven en sus estudiantes durante la clase. El modelo está estructurado en tres etapas: reflexión-para-la acción, reflexión-en-la acción y reflexión-sobre-la acción. Como resultados de este trabajo se evidenció que las reflexiones de los profesores les permitieron centrar su atención sobre la actividad matemática de sus estudiantes, prever sus posibles respuestas y tomar conciencia de las dificultades de aprendizaje. El aporte de este documento a nuestro trabajo son los tres momentos del modelo de reflexión-acción en una comunidad de práctica, dado que serán fundamentales para guiar el análisis en cada una de las fases de reflexión de este trabajo de grado.

La cuarta investigación consultada corresponde a la desarrollada por Vargas (2013), quien reconstruye narrativamente los conocimientos pedagógicos y didácticos que puso en juego durante sus tres primeras experiencias de planificación y enseñanza de la física, en el marco de sus prácticas docentes pre-profesionales. Respecto a la metodología seleccionada, se encuentra la investigación narrativa. Como resultado de este estudio, la autora reporta un cambio en su percepción sobre la planificación de la enseñanza en la que se deben incluir muchos más aspectos que solo la selección de temas y el diseño de actividades para la enseñanza de un contenido temático específico. Ello porque una vez realizado el trabajo, ella es consciente que la planificación de la enseñanza de las ciencias está orientada según las corrientes epistemológicas relacionadas con el conocimiento científico. Además, que el objetivo que los estudiantes aprendan física depende de las creencias bien sea que estén orientadas a un conocimiento individual o a una construcción colectiva. Por consiguiente, esta investigación proporciona un aporte sustancial al presente trabajo porque está relacionada con el objetivo de este trabajo de grado, además de brindar orientaciones sobre la forma como se deben analizar las gestiones y acciones del docente en los procesos de diseño, planeación y ejecución de una secuencia de actividades.

Uno de los principales aportes de estos antecedentes al presente trabajo es su acercamiento a lo que significa la reflexión sobre la práctica, ya que es una herramienta que permite al docente identificar su práctica y, aún más a fondo, analizar las acciones que subyacen en ella. Por tanto, al reflexionar sobre su práctica

el docente es capaz de ser más consciente de sus creencias, conocimiento profesional y de la gestión que realiza en el aula de clase.

Por otra parte, estos documentos ayudan a nutrir el presente trabajo en la medida que muestran un panorama sobre la forma como se debe realizar este proceso reflexivo. Dicho de otra manera , estos documentos son un apoyo metodológico porque aluden a los momentos o fases que debe tener un proceso de reflexión y que tienen una proximidad al proceso metodológico sobre el cual está fundamentado este trabajo.

2 MARCO DE REFERENCIA

Con este trabajo queremos ejemplificar cómo nuestras prácticas pueden mejorar a partir de la reflexión sobre las mismas. Pero ¿en qué consiste el proceso de reflexión sobre la práctica? A continuación, se intenta dar respuesta a preguntas que serán el soporte de este documento desde algunos referentes teóricos. También, se hace una presentación de qué se entiende por reflexión sobre la práctica. Luego, se explica lo que es la reflexión guiada, cómo se promueve y las técnicas asociadas a este proceso. Enseguida, se hace una descripción de fases o momentos que para ciertos autores deben existir en un proceso de reflexión sobre la práctica y finalmente se nombran algunos asuntos que atiende la reflexión sobre la práctica.

2.1 ¿QUÉ ES LA REFLEXIÓN SOBRE LA PRÁCTICA?

Para la Real Academia Española (RAE), *reflexión* es la acción y efecto de reflexionar, o es una advertencia o consejo con que alguien intenta persuadir o convencer a otra persona. Para Dewey (1989; citado en Parada 2011), la reflexión es un proceso de resolución de conflictos, de dudas, a la vez que una actitud de disposición para revisar su actuación. Realizar una reflexión implica un distanciamiento de la realidad que permite poner en evidencia las propias creencias sobre la cuestión para poder confrontarlas con la evidencia empírica (Cooney, 2001; citado en Parada 2011).

Para Dewey (1989; citado en Parada 2011), la reflexión no implica tan solo un conjunto de ideas, sino una ordenación secuencial de ellas, en la que cada una determina la siguiente como su resultado, mientras que cada resultado, a su vez, apunta y remite a las que les precedió. La reflexión es un proceso de resolución de conflictos, de dudas, a la vez que provee una oportunidad para revisar la actuación del docente. La reflexión de los profesores comienza cuando se encuentran dificultades y surgen problemas que no pueden resolverse de inmediato.

La reflexión sobre la práctica del profesor es un ejercicio donde el docente es el centro de la investigación. Este ejercicio se sustenta en la documentación y sistematización de sus prácticas, dado que a partir de ellas puede ser capaz de identificar las situaciones que han causado cambios o perturbaciones en las dinámicas de la clase. En este sentido Schön (citado en Flores, 2000, p. 115) menciona que la reflexión es un proceso sistemático que permite actuar frente a un evento que necesita solución en un momento dado, por medio de la toma de decisiones basadas en experiencias anteriores sobre situaciones similares o relacionadas. Por consiguiente, esta acción reflexiva permite que el docente crezca profesionalmente, en el sentido que está en constante aprendizaje, evaluación y reestructuración de su labor. Esta visión de reflexión como herramienta se sustenta desde autores como Ñancupil, Carneiro y Flores (2013, p. 32) para los cuales “la reflexión es una importante herramienta de formación para los profesores, porque permite que piensen de forma sistemática sobre su práctica, buscando la for-

ma de interpretar los problemas que encuentra a la luz de teorías y aportes de la didáctica de la Matemática”.

De esta manera, la mirada del docente se transforma dado que su interés va más allá de analizar las producciones y acciones de los estudiantes, como lo menciona Nolan (2008), quien asume que la reflexión es aprender y desarrollar procesos de examinar cada uno su práctica, además la reflexión docente genera conexiones entre la teoría/práctica y las creencias/experiencias. Esto implica que el docente se centre en la forma como decide los contenidos que va a implementar, la gestión de las sesiones de clase, la valoración de las producciones de sus estudiantes, la conducción de las explicaciones, el lenguaje utilizado, entre otros aspectos que emergen de la planeación, ejecución y evaluación de una sesión de clase.

2.2 ¿QUÉ ES UNA REFLEXIÓN GUIADA?

Según Nolan (2008) la reflexión guiada es una técnica por parte de profesores o asesores para involucrar y comprometer a sus estudiantes o asesorados en el proceso de reflexión a partir de preguntas que los guíen en su proceso reflexivo sobre su enseñanza. En otras palabras, entendemos la reflexión guiada como el mecanismo o andamiaje para que alguien encamine a otro, permitiendo que experimente un ejercicio de reflexión. La reflexión guiada es una actividad diferente al ejercicio de reflexionar sobre la práctica y lo ejecuta quien introduce al asesorado al proceso de reflexión sobre la práctica.

Nosotros como estudiantes de la MDM en la UPN, a través de una figura de asesor fuimos embarcados, sin percibirlo, en el proceso de la reflexión guiada. En él han sucedido un conjunto de acontecimientos que se podrían caracterizar como técnicas que favorecen la reflexión: generar escritos en forma personal o en conjunto -con el par académico- diarios de campo, relatorías de asesoría, interpretaciones y descripciones de clase. Es decir, el asesor promovió que se describiera con detalle lo sucedido en una de nuestras clases de matemáticas y a partir de ello nos tenía preparado una serie de preguntas orientadoras que estaban relacionadas con lo que se pensó para realizar la preparación de la clase, además de prever las reacciones a las preguntas de los estudiantes cuyas respuestas serían el insumo de la reflexión sobre la práctica. Por otro lado, cada grupo de preguntas orientadoras tenía unos momentos específicos generando otras que no estaban contempladas sobre la marcha de la asesoría, cuyas finalidades fueron: evocar y hablar sobre el porqué se enseña lo que hay que enseñar, generar interpretaciones distintas entre asesorados, hacer que un asesorado comunique aspectos que su otro compañero no tuvo en cuenta o no había pensado.

Para Nolan (2008), las siguientes son técnicas o pautas que puede implementar el profesor asesor para que el asesorado se introduzca en el proceso de reflexión sobre la práctica:

- ✓ Retomar experiencias pasadas: evocar recuerdos sobre su aprendizaje y sobre las prácticas de enseñanza que han desarrollado.
- ✓ Considerar cualidades personales de los maestros que les enseñaron: Explicitar las características de los profesores que le marcaron por su forma de enseñar, de aplicar pruebas, de implementar sus clases, entre otros aspectos.
- ✓ Retratar al profesor: mencionar elementos que caractericen cómo debería ser un profesor.
- ✓ Uso de metáforas: caracterizar a cada asesorado con un animal o animales que presenten las habilidades o elementos muy especiales que como maestro también debería tener.
- ✓ Crear un montaje: construir un escenario donde se ponga en juego aquellos aspectos de la enseñanza y el aprendizaje que se consideran fundamentales para la enseñanza y aprendizaje.
- ✓ Desarrollar un glosario de términos de uso común en las prácticas de aula y que sean importantes para los asesorados.
- ✓ Leer y discutir artículos de educación. Se propone un conjunto de lecturas que describan puntos de vista distintos y que aporten para dar respuesta a preguntas diseñadas sobre la enseñanza y aprendizaje.
- ✓ Considerar imágenes fotográficas. Proporcionar a los asesorados una selección de fotografías que muestren a estudiantes involucrados en diferentes contextos de aprendizaje (entornos escolares formales, entornos naturales, entre otros.) para que comenten sobre estos.

2.3 FASES DEL PROCESO DE REFLEXIÓN

Al referirnos a los momentos que subyacen del proceso de reflexión identificamos que nosotros como docentes en nuestra labor cotidiana estamos enfrentados a una serie de dudas, preguntas, cuestionamientos entre otros, sobre los asuntos que emergen desde la planeación hasta la ejecución de una clase. En este sentido hay momentos en los que centramos nuestras preocupaciones. Parada (2011) reconoce tres momentos de reflexión: 1) Reflexión-para-la acción (el antes), es toda la preparación previa a la gestión en el aula como las decisiones que se vayan a tomar en la planeación, el recurso, la gestión, el conocimiento sobre el objeto matemático, el discurso con respecto a la triada didáctica; 2) Reflexión-en-la acción (el durante), aquí están presentes las nuevas decisiones sobre algo que no se planeó y las decisiones que pueden emerger en clase y 3) Reflexión-sobre-la acción (el después), por un lado es la confrontación de lo planeado con lo sucedido en la clase y por otro lado es el efecto positivo de la incidencia que tuvieron las decisiones en acto.

Para otros autores como Jackson (citado en Llinares, 1999, p. 111) existen tres momentos “la fase Pre-activa, interactiva y Post-activa para señalar distintos momentos en los que se desarrollan las actividades del profesor”. En la fase pre-activa se encuentran incluidas todas aquellas acciones que como docentes realizamos antes del desarrollo de una clase, esto incluye la selección y planeación de

los contenidos, los tratamientos que les damos a las intervenciones y productos de los estudiantes. Respecto a esta fase Linares (1999, p.111) comenta que:

Las tareas del profesor en esta fase están condicionadas por su reconstrucción subjetiva de las nociones matemáticas (currículum) como objetos de enseñanza-aprendizaje y de la definición de los objetivos de enseñanza (referencias personales e institucionales). Estos procesos de reconstrucción del contenido matemático realizados por el profesor vienen determinados por su experiencia previa (la historia del profesor) y por el contexto curricular en el que se encuentran. La relación entre el profesor y el contenido matemático del currículum, entendida en el contexto de la enseñanza secundaria, permite caracterizar los dominios experienciales del profesor a través del proceso mediante el cual el profesor dota de significado a los 'objetos' de la situación en la que deben actuar. (p. 111)

Continuando con los momentos de la reflexión, nos encontramos con aquellos instantes en los que como docentes identificamos situaciones que emergen durante la aplicación de una tarea. Estas situaciones surgen cuando nos encontramos desarrollando las acciones previstas con los estudiantes, es decir, nuestra clase, según Camilloni (1995), "(...) es un segmento de una unidad temática programada previamente por el docente".

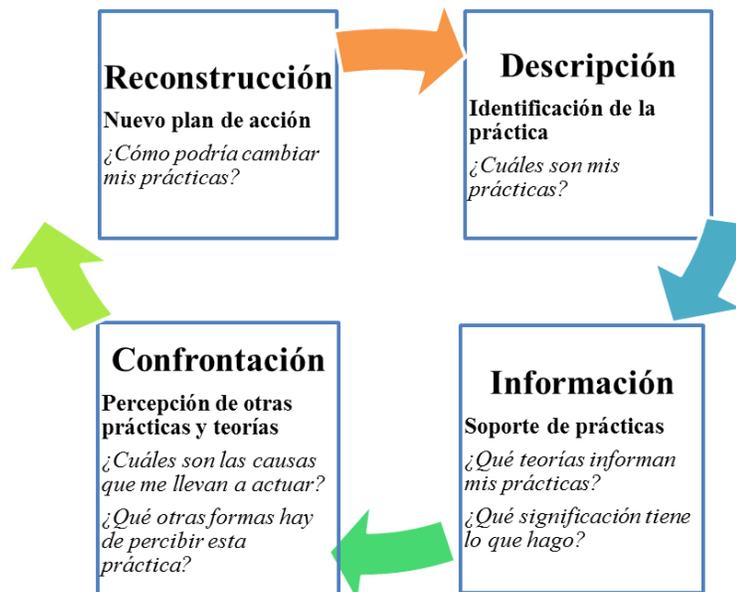
Una vez realizada la planificación y ejecución de las estrategias planificadas, viene el último momento de la reflexión sobre la práctica. La fase post-activa, esta alude a los instantes en los cuales como docentes evaluamos todas las acciones que se derivaron de la ejecución de la clase, la forma como se realizó su conducción, la pertinencia del lenguaje empleado, la valoración de los medios empleados, la reacción ante las respuestas de los estudiantes que no se contemplaron en la planeación, entre otros aspectos. Ello nos permite como docentes evaluar el diseño implementado, identificar nuevas formas de afrontar las situaciones que emergen de la clase, la pertinencia de los contenidos, recursos, tiempo empleado, entre otros aspectos.

Finalmente, Smyth (citado en Flores, 2000, p.117) menciona una propuesta cíclica de cuatro fases que representan las etapas en el proceso de reflexión docente: el describir, el informar, el confrontar y el reconstruir. Con motivo de lo anterior Smyth afirma que:

"la reflexión tiene que encerrar procesos de clarificación de los problemas (descripción e información), y de comunicación con otras fuentes (confrontación). De esta forma se puede llegar a reformular los problemas y, sobre todo, a plantear nuevas propuestas de acción (reconstrucción). La aplicación de nuevas acciones dará origen a otros nuevos problemas, con lo que se repetirá el proceso, dando lugar a un ciclo de reflexión,"

Respecto a este modelo cíclico de reflexión planteado por Smyth se puede establecer que la **Descripción** es el proceso reflexivo donde el docente narra su experiencia durante la enseñanza. En esta, el docente puede plasmar sus sentimientos, observaciones, preocupaciones, y demás datos de interés que puedan aportar a su proceso reflexivo. En cuanto a la **Inspiración**, es el proceso reflexivo donde el docente señala las razones que le motivaron a trabajar de la manera en que lo hace, además de especificar por qué considera esa forma de trabajar la más ade-

cuada y, en general, los aspectos relacionados al modelo de enseñanza empleado. En esta etapa, al analizar y explicar la forma en que se desarrollaba la práctica, se puede ayudar al docente a ver desde otra perspectiva su método de enseñanza. Respecto a la **Confrontación**, el docente inicia el proceso de cuestionar sus métodos de enseñanza. Esta etapa comienza por el mismo cuestionamiento del docente hacia sus prácticas, continuando con la conexión con otros profesores, y luego de una forma más general, situándose en un contexto social, político y/o cultural. Por último, el ciclo finaliza con la etapa de **Reconstrucción**, en la cual el docente reconstruye su metodología para mejorarla. Este mejoramiento se dará con base al proceso reflexivo realizado, analizando los puntos débiles que se presentaban en sus prácticas. Tras mejorar el modelo de enseñanza propio, partiendo de bases ya establecidas, se finaliza el ciclo. Vale la pena aclarar que este modelo, al ser cíclico, forma un bucle y por tanto puede iniciar en cualquiera de sus fases, no necesariamente en la descripción.



Gráfica 1 Ciclo de Smyth

Al observar los enfoques de Parada (2011) y Jackson (citado en Llinares, 1999, p. 111) se identifican asuntos similares sobre los momentos de reflexión. En el presente trabajo se tomará como base la postura presentada por Llinares, (1999), en la cual se incluirán algunos elementos del modelo de Parada (2011), los cuales serán descritos en la parte final de este capítulo.

2.4 ¿SOBRE QUÉ ASUNTOS VERSA LA REFLEXIÓN SOBRE LA PRÁCTICA?

Al realizar una búsqueda en la literatura encontramos algunos autores que muestran diversos asuntos sobre los cuales se debe centrar la reflexión sobre la práctica. Sobre estos asuntos encontramos que, según Llinares (1999), pueden ser:

- ✓ Contenidos, cuando hacen mención a la planeación de la secuencia, ordenamiento de contenidos, conceptos previos, interpretación del tratamiento de los contenidos en la acción, nuevos conceptos para tener en cuenta entre otros.
- ✓ Medios, cuando entra en juego el uso de recursos ya conocidos o nuevos para el desarrollo de la clase, además de situaciones imprevistas que generan cambios en su implementación o la interpretación de su uso en la acción.
- ✓ Gestión, la entendemos como el compendio de elementos que hacen referencia a la anticipación de la actividad matemática de los estudiantes por parte del profesor; a las tareas, ejercicios y/o problemas que se proponen; a la organización del tiempo para la ejecución de las actividades; las situaciones que producen cambios en la ejecución de tareas propuestas a los estudiantes por sus dificultades, dudas o bloqueos; nuevas propuestas de tareas o la interpretación de su uso en la acción.
- ✓ Discurso, cuando emergen situaciones que involucran la conducción de la clase, lenguaje usado por el profesor, cambios en la forma como se orienta la clase o las explicaciones, interpretación del uso discursivo del profesor y de los estudiantes o nuevos elementos que se pueden tener en cuenta para la orientación de la misma en términos de las explicaciones, preguntas, entre otros.
- ✓ Aprendizaje y la forma como el docente lo valora en sus estudiantes, contemplando las dudas y bloqueos que se pueden presentar en este proceso o las nuevas formas de valorarlo.

Por otro lado, en Parada (2011), se describen aspectos para que los profesores perfilen su proceso de reflexión. A continuación, se presenta la Tabla 1, donde se relaciona cada una según los aspectos orientadores:

Fases / Orientadores	El pensamiento didáctico	El pensamiento matemático	Uso de los instrumentos	Uso del lenguaje matemático
Para la acción	¿Qué enseñar? ¿Para quién enseñar? ¿Cuál es el contexto de los estudiantes?	¿Qué tanto sé del contenido matemático? ¿Qué tareas promueven el entendimiento del objeto matemático?	¿Qué herramientas o instrumentos llevar a la clase para la enseñanza y aprendizaje? ¿En qué momento usarlos?	¿Qué palabras se deben introducir para el desarrollo de la clase? ¿Cómo se deberán explicar? ¿Qué términos, notaciones, expresiones piensa promover y por qué?
En la acción	¿Cómo llegar al objeto matemático? ¿Qué tipo de ejercicios se les presenta a los estudiantes?	¿Qué enseñé de aquello que tenía planeado? ¿Qué usó de lo que sabía al enseñarlo? ¿Realizó cambios respecto a lo planeado? ¿Por qué?	¿De qué recursos se valió? ¿Para qué usó los recursos? ¿Hubo cambios respecto a lo planeado?	¿Qué términos, notaciones, expresiones promovió? ¿Qué modificaciones al lenguaje surgieron en relación con lo planeado? ¿Usaron los estudiantes los términos que introdujeron?
Sobre la acción	¿Cómo enseñé el objeto matemático? ¿Qué aspectos debo mejorar en mis prácticas?	¿Realizaría cambios respecto a lo enseñado? ¿Por qué?	¿Creen que el material fue importante para lo que querían enseñar?	¿Qué aspectos del lenguaje matemático introduciría en una nueva implementación?

Tabla 1 Aspectos orientadores según la fase de reflexión

2.5 MODELO DE REFLEXIÓN SOBRE LA PRÁCTICA IMPLEMENTADO EN EL TG

Para la implementación de este trabajo de grado se tomará como base los momentos de reflexión propuestos por Jackson (citado en Llinares, 1999, p. 111). Por tanto, en cada uno de estos, los autores del presente trabajo explicitarán las creencias y conocimientos que ponen en juego durante las fases pre-activa, activa y post-activa, respecto a los asuntos sobre los cuales Parada (2011) y Llinares (1999) consideran que debe versar una reflexión. Finalmente, las reflexiones que realizan los profesores serán categorizadas según las etapas propuestas por Smyth (citado en Flores, 2000, p.117). Este modelo será descrito con mayor profundidad en el siguiente capítulo, el cual está relacionado con la metodología.

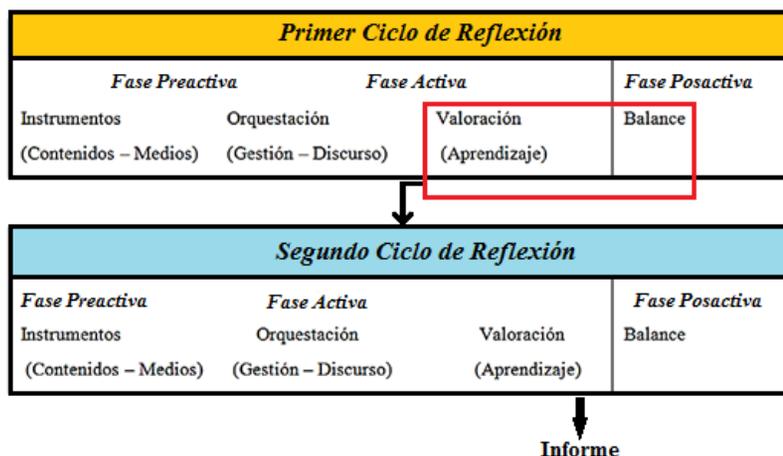
3 METODOLOGÍA PARA UN PROCESO DE REFLEXIÓN GUIADA

3.1 ASPECTOS METODOLÓGICOS

A continuación, se presenta la ruta metodológica seguida para el desarrollo del trabajo y que consideramos afín a los objetivos del mismo. Inicialmente se hace una descripción de algunas técnicas para llevar a cabo el proceso reflexivo que se experimentaron durante los ciclos de reflexión, después se explica cuáles fueron los instrumentos para registrar información sobre el proceso reflexivo, continuando con el procedimiento para obtener los datos investigativos y con el procedimiento para analizar los datos, finalmente se presenta el proceso llevado a cabo para la consolidación de resultados.

3.2 CICLOS DE REFLEXIÓN

En este apartado se presentan dos ciclos de reflexión. Estos se sustentan desde los autores reportados en el marco teórico del presente trabajo y se sintetizan en la Gráfica 2, donde se hace alusión a cada una de las fases empleadas.



Gráfica 2 Ciclos y fases de reflexión

El primer ciclo de reflexión, cada uno de los autores del trabajo de grado, diseñaron, implementaron y evaluaron una clase. Estas se desarrollaron durante el primer semestre de la MDM durante el desarrollo del Seminario de Innovación e Investigación. La clase de James Alexander Cuellar se implementó en la I.E.R.D. San Antonio del municipio de Anapoima – Cundinamarca en una sesión de clase de 120 minutos con grado sexto y tuvo como objetivo reconocer diferentes tipos de cuadriláteros estableciendo sus propiedades (Anexo 1). La clase de Juan Carlos Jiménez se implementó en la I.E.D. Monseñor Agustín Gutiérrez del municipio de Fómeque – Cundinamarca en dos sesiones cada una de 60 minutos con grado séptimo y su objetivo era construir una definición de cuadrado y de rectángulo, a

partir de propiedades específicas que permitieran realizar una representación gráfica (Anexo 2).

El segundo ciclo de reflexión se desarrolló en torno al diseño, implementación y evaluación de una secuencia de tareas que tenía como propósito que los estudiantes propusieran diversas definiciones para el cuadrado, apoyados con Geometría dinámica. La secuencia fue desarrollada conjuntamente entre los dos autores del trabajo de grado y tuvo dos versiones (Anexo 3 y Anexo 4). Una vez consolidada la secuencia de actividades, resultado del proceso de reflexión del segundo ciclo en la fase pre-activa, la misma fue implementada en la institución educativa donde labora James, con estudiantes de grado sexto en la I.E.R.D. San Antonio del municipio de Anapoima – Cundinamarca. Este grupo está conformado por 16 estudiantes de los cuales 9 son hombres y 7 mujeres, ellos oscilan en edades entre los 11 y 14 años, de este grupo 10 pertenecen a zona rurales y 6 al casco urbano. Para lograr esta meta buscamos hacer un acercamiento descriptivo e interpretativo usando procedimientos cualitativos. Luego de esta implementación se registra la descripción de la clase (Anexo 5), resaltando la gestión que realizó el docente.

3.3 TÉCNICAS PARA LLEVAR A CABO EL PROCESO REFLEXIVO

A partir de una figura de asesor fuimos embarcados, sin percibirlo, en el proceso de la reflexión guiada durante el primer ciclo. En él sucedieron un conjunto de acontecimientos que se podrían caracterizar en técnicas que favorecen la reflexión. Por ejemplo, el proceso de planear una clase que diera cuenta del objeto matemático que se quería promover. En el caso del profesor Juan Carlos, se implementó una actividad (Anexo 2), con ejercicios de no ejemplos de cuadriláteros con la “intensión” que los estudiantes definieran cuadrado; para el profesor James Alexander, la clase estaba orientada a que los estudiantes hicieran una construcción de polígonos regulares partiendo de la definición (Anexo 1).

En esta implementación se realizaron grabaciones en formato audio y video. Luego, se realizó una transcripción de las intervenciones de estudiantes y profesor para analizar las decisiones que se tomaron al interior del aula y aquellos episodios en donde se presentaron situaciones imprevistas que generaron dificultades, trastornos, dudas o cambios en el desarrollo de la actividad.

De allí se generaron escritos en forma personal o en conjunto con el par como diarios de campo, relatorías de asesoría, interpretaciones y descripciones de clase, donde el asesor promovió que se describiera con detalle lo sucedido de una de nuestras clases de matemáticas y a partir de ello, nos tenía preparado un banco de preguntas orientadoras que pueden ir desde lo que se pensó para realizar la preparación de la clase, las reacciones a preguntas de estudiantes, hasta cómo nuestro conocimiento se moviliza frente a discusiones entre ellos. Las respuestas a algunas de estas se convirtieron en material de las asesorías y fueron el insumo

de la reflexión sobre la práctica. Por otro lado, cada grupo de preguntas se planteaban en momentos específicos y podían darse otras preguntas que no estaban contempladas sobre la marcha de la asesoría, con la finalidad de evocar y hablar sobre el por qué hay que enseñar lo que hay que enseñar. Estas preguntas pueden generar interpretaciones distintas entre los asesorados, también comunicar aspectos que su otro par académico no tuvo en cuenta o no había pensado ampliando la perspectiva sobre su práctica.

Para el segundo ciclo se inició un proceso de documentación sobre el contenido matemático que estaba involucrado. De allí surgió la realización de un mapa conceptual basado en la lectura del documento de Cañadas y Gómez (2007) sobre análisis de contenido, con el cual confrontamos nuestro saber matemático antes de planear la actividad que se pretendía implementar. De este trabajo, la asesora continuó con el proceso de reflexión guiada y planteó interrogantes como ¿Qué consideraba que era conocer el contenido matemático que iba a enseñar? ¿Lo que sabía acerca del concepto fue suficiente elaborar el mapa conceptual? Cuando estaba realizando el mapa de la estructura conceptual, ¿cuáles fueron las dudas que presentó? ¿Respecto a lo conceptual y a lo procedimental? ¿Cómo se determina la jerarquía de los conceptos? estas buscaban dar cuenta acerca del conocimiento profesional.

Una vez analizado nuestro conocimiento del objeto matemático, la siguiente etapa de este proceso inició con el diseño de la secuencia implementada de actividades. Para esto se presentó una primera propuesta (Anexo 3) donde se esbozaba lo que creíamos que debía contener una secuencia de actividades que promovieran el proceso de definir. En las asesorías, la profesora nos cuestionó sobre una serie de elementos que estaban relacionados con la estructura de estas actividades, los cuales estaban orientados a analizar la pertinencia de: instrumentos de medición (regla y compás, uso de GeoGebra), la relación que existía entre cada actividad, el proceso que se pretendía promover y los objetivos que buscamos alcanzar.

De este análisis caímos en la cuenta de que debíamos realizar un rediseño de la propuesta inicial (Anexo 4), puesto que evidenciamos que estas actividades no tenían relación entre sí y por tanto no correspondían a una secuencia. De este rediseño surgió un bloque compuesto de dos actividades denominadas: Explorando GeoGebra y Definiendo el Cuadrado, en las cuales se plasman los elementos que se consideran relevantes en torno a cómo se debía orquestar cada sesión de clase, las maneras de afrontar las intervenciones de los estudiantes, las posibles respuestas que podrían surgir, la valoración de los aprendizajes y los posibles hechos geométricos, entre otros aspectos.

3.3.1 PREGUNTAS PARA PROMOVER LA REFLEXIÓN GUIADA EN CADA FASE DEL PROCESO

Las preguntas que se presentan a continuación fueron realizadas por la asesora luego de la realización de la planeación e implementación de la clase (vista en re-

trospectiva). La asesora no dio a conocer las preguntas a los asesorados sino al momento de la asesoría para no condicionar aquello sobre lo que hablan y reflexionan:

	Fases	Instrumentos		Orquestación		Valoración del aprendizaje
		Conceptuales	Técnicos	Gestión	Discurso	
		Instrumentales				
Pre-activa	Al planear	¿Qué quieren enseñar a los estudiantes? ¿Qué saben del tema que van a enseñar?	¿Qué recursos usará y qué papel cree que jugará el material?	¿Qué preguntas le van a hacer a los estudiantes? ¿Qué creen que ellos responderían?	¿Qué términos, notaciones, expresiones piensa promover y por qué?	¿Cómo van a valorar los aprendizajes?
		¿Qué material de consulta hay que revisar para hacer la planeación?		¿Qué tiene pensado hacer con lo que respondan los estudiantes?		
		¿En qué se basan para proponer el objetivo de la clase?				

Tabla 2 Preguntas fase Pre-activa

	Fases	Instrumentos		Orquestación		Valoración del aprendizaje
		Conceptuales	Técnicos- Instrumentales.	Gestión	Discurso	
Activa	Relacionada con la ejecución de la clase	¿Qué enseñó de aquello que tenía planeado? ¿Qué usó de lo que sabía al enseñarlo?	¿De qué recursos se valió? ¿Para qué usó los recursos? ¿Hubo cambios respecto a lo planeado?	¿Cómo gestionó la enseñanza? ¿Qué aspectos de los estudiantes y del contexto influyeron en la enseñanza? ¿Qué modificaciones surgieron en relación con lo planeado? ¿Surgieron	¿Qué términos, notaciones, expresiones promovió? ¿Qué modificaciones al lenguaje surgieron en relación con lo planeado? ¿Usaron los estudiantes los términos que introdujeron?	¿Realizó en clase alguna valoración de los aprendizajes?
		¿Realizó cambios respecto a lo planeado? ¿Por qué?				

Tabla 3 Preguntas fase activa

Fases		Instrumentos		Orquestación		Valoración del aprendizaje
		Conceptuales	Técnicos	Gestión	Discurso	
			Instrumentales.			
Post-activa	Relacionada con la reflexión posterior a la clase	¿Realizaría cambios respecto a lo enseñado? ¿Por qué?	¿Creen que el material fue importante para lo que querían enseñar? ¿Haría cambios respecto al material empleado?	¿Cambiarían algo respecto a lo gestionado? ¿Cambiarían el patrón de interacción? ¿Qué acciones de institucionalización promovería?	¿Qué aspectos del lenguaje matemático introduciría en una nueva implementación?	¿Pudo identificar qué estaban interpretando los estudiantes sobre el tema de la clase? ¿Hubo actividad matemática? ¿Cambiaría algo respecto a la valoración de los aprendizajes?

Tabla 4 Preguntas fase Post-activa

3.4 INSTRUMENTOS PARA RECOPIRAR INFORMACIÓN Y PROMOVER LA REFLEXIÓN GUIADA

Cada una de las fases de la reflexión que se realizó en las asesorías se registró mediante diversos documentos como: tareas de seminario, diarios de campo, relatorías, descripciones de clase e interpretaciones. La finalidad y el contenido de estos documentos serán descritos a continuación:

Tareas de Seminario: son una secuencia de escritos a partir de los intereses, inquietudes y problemas profesionales que consistían en descubrir el modelo de investigación del trabajo de grado de la MDM orientado al proceso de la reflexión docente, con la finalidad de elaborar un documento llamado *Anteproyecto* (documento escrito con el cual se presentó la propuesta inicial de trabajo de grado). Dichas tareas son: descripción del problema, diseño, planeación, transcripción y análisis de la primera clase implementada.

Diarios de campo: son escritos donde se reporta de forma personal sucesos, inquietudes, preguntas y discusiones con pares académicos sobre situaciones que se hubieran podido generar bien sea en las asesorías de trabajo de grado, en la planeación e implementación de la secuencia o en nuestras prácticas de clase, las cuales dieran cuenta de nuestra gestión. Además, el registro de respuestas a preguntas propuestas por la asesora.

Relatorías: son documentos escritos por los estudiantes de la MDM generados en cada una de las asesorías. En ellas se cuenta de forma breve, puntual, pero sin dejar escapar detalle, los momentos más significativos para el ejercicio de aproximación a la reflexión.

Interpretaciones: son las intervenciones, reacciones, cuestionamientos entre pares con sus posibles respuestas que surgen después de la asesoría con respecto a lo sucedido en ella, o en un diálogo ajeno a esta. De otra manera, dentro de una

conversación entre pares, es la comunicación más suelta, espontánea que sucede al momento de generar ideas provocadas luego de una asesoría, pero debe existir el otro para confrontar la interpretación la cual se debe reportar de forma escrita.

Secuencia de actividades: Es el compendio de tareas específicas para ser presentadas a los estudiantes en diferentes sesiones de clase consecutivas y cuyo propósito es desarrollar un proceso matemático. Para la construcción de esta secuencia de actividades inicialmente se realizó un análisis del conocimiento profesional de cada uno de los docentes respecto al proceso de definir y al objeto matemático que en este caso son los cuadriláteros. Luego de este proceso se realizó una primera propuesta que era un compendio de seis actividades con las cuales se pretendía que promover el proceso de definir vinculando instrumentos de medición y geometría dinámica. Una vez analizada la secuencia de actividades y como se observa en el análisis de los datos del segundo ciclo los profesores Juan y James rediseñaron la actividad para lo cual se tuvo en cuenta: los hechos geométricos relevantes; los conceptos y términos involucrados; los recursos y el papel de estos en el desarrollo de la tarea propuesta; las posibles respuestas de los estudiantes en términos de las construcciones (blandas o robustas) que podían surgir y la forma en que se gestionarían; la socialización de las producciones entre otros aspectos de la gestión permitieron que se condensara finalmente la propuesta implementada.

Descripciones: es la narración detallada por escrito de lo sucedido durante la aplicación de una secuencia de actividades. En ella se cuenta la interacción y las reacciones entre los estudiantes y el profesor con respecto a inquietudes y/o preguntas que él les formula.

3.5 PROCEDIMIENTO PARA OBTENER LOS DATOS INVESTIGATIVOS

El procedimiento que se empleó para obtener los datos de la investigación inicia con la codificación de cada uno de los documentos (diarios de campo, relatorías, descripciones de clase, interpretaciones). Mediante esta codificación se extraen los fragmentos que hacen alusión a nuestra práctica docente. Cada uno de estos fragmentos es un dato. De ser necesario estos fragmentos se adecuan de forma que no cambien su sentido. Luego de ello, se organizan los datos en una tabla donde se ordenan por categorías de acuerdo a: la fuente que en este caso corresponde al tipo de documento mencionado anteriormente, al ciclo (primero y segundo), las fases de reflexión (pre-activa, activa y post-activa), los contenidos que representa (contenidos, medios, gestión, discurso, aprendizaje), el asunto específico que hace referencia al tipo de contenido, es decir, el tipo de acción desarrollada (conducción de una clase, planeación de la secuencia, uso del recuso, entre otras), la caracterización de acuerdo al ciclo de Smyth (describir, confrontar, inspirar y reconstruir) y finalmente el generador que corresponde a la persona, objeto o acción que propició la preocupación.

3.6 PROCEDIMIENTO PARA ANALIZAR LOS DATOS

El proceso de análisis de los datos se realizó con base a los fragmentos codificados en la tabla 5. Las columnas tienen como finalidad clasificar los episodios de la siguiente manera:

	Párrafo	Fuente	Ciclo	Fase	Contenido	Asunto específico	Caracterización	Generador
No.		Fecha y procedencia	Primer o segundo ciclo	Momento de reflexión: Pre-activa, Activa o Post-activa	Contenidos, medios, gestión, discurso o aprendizaje	Sobre el contenido ¿qué está haciendo?	Ciclo de Smyth	¿Quién o qué generó la preocupación?

Tabla 5 Ejemplo de Matriz de Decodificación

Párrafo: fragmento extraído de los diarios de campo, relatorías, descripción de clase o interpretaciones que hace relación a episodios donde se reportan dificultades, dudas, cambios, entre otros aspectos que corresponden a nuestras prácticas.

Fuente: permite realizar un rastreo de orden temporal de cada uno de los párrafos según documento y fecha.

Ciclo: esta columna permite ubicar el espacio en que se realizó la reflexión, es decir el primer ciclo donde se analizan los sucesos derivados de la implementación de la secuencia diseñada en el Seminario de Innovación e Investigación o el segundo ciclo donde se analizan los episodios derivados de la implementación de la secuencia explorando GeoGebra y definiendo el cuadrado.

Fase: hace referencia a los momentos en los cuales se realiza la descripción bien sea: todas las acciones previas a la clase como diseñar una secuencia, planear la gestión y proyectar una evaluación, ello corresponde a la fase pre-activa. Las acciones que como docentes llevamos a cabo durante la clase que se derivan de la toma de decisiones, uso de recursos, intervenciones de los estudiantes o cambio en su implementación pertenecen a la fase activa. Finalmente, la interpretación de asuntos relacionados con el manejo de instrumentos conceptuales o técnicos, orquestación de la clase y valoración de los aprendizajes es lo que se llama fase post-activa.

Contenido: está relacionado con el asunto sobre el cual se reflexiona en el párrafo. Estos contenidos son tomados según Llinares (1999) y han sido sintetizados en la tabla 6 para permitirnos clasificar cada uno de los asuntos que surgieron en las diferentes fases de reflexión.

CONTENIDOS	ASUNTOS
Contenido matemático	<p><i>Acercamiento a los contenidos matemáticos</i></p> <p><i>Conceptos previos</i></p> <p><i>Conocimiento profesional</i></p> <p><i>Documentos curriculares</i></p> <p><i>Procesos matemáticos</i></p> <p><i>Tratamiento de los contenidos</i></p>
Gestión	<p><i>Anticipación de la actividad matemática</i></p> <p><i>Interpretación de la gestión</i></p> <p><i>Necesidad institucional</i></p> <p><i>Planeación de la organización</i></p> <p><i>Previsión de la organización</i></p> <p><i>Tareas propuestas</i></p> <p><i>Tiempo de ejecución</i></p>
Discurso	<p><i>Conducción de la clase</i></p> <p><i>Explicación del contenido matemático</i></p> <p><i>Lenguaje empleado</i></p>
Medios	<p><i>Uso de los recursos</i></p> <p><i>Papel del recurso</i></p> <p><i>Valoración del recurso</i></p>
Aprendizaje	<p><i>Valoración de los aprendizajes</i></p>

Tabla 6 Clasificación de asuntos según el contenido

Asunto específico: hace referencia al componente del contenido que se menciona en el párrafo, por ejemplo: contenidos planeados, recursos empleados, conducción de la clase, valoración de los aprendizajes entre otros.

Caracterización: hace referencia a la etapa del ciclo de Smyth en el cual se centra la reflexión.

Generador: hace mención de un objeto o sujeto como la asesoría, el compañero, los estudiantes, nosotros mismos, entre otras, que sirvieron como detonante para que se presentara la situación de duda, bloqueo, cuestionamiento entre otros a la que hace mención el párrafo.

Una vez diligenciada la tabla con cada uno de los fragmentos y teniendo en cuenta los elementos anteriores, procedemos a realizar un rastreo de los asuntos más relevantes en las columnas *Ciclo* para identificar si corresponde al primer o segundo ciclo, *Fase* porque permite identificar el momento de la reflexión, *Contenido* porque representa las categorías sobre los cuales se centró la reflexión y la columna de *Caracterización* porque está relacionada con los momentos de reflexión según el ciclo de Smyth. Las dos últimas columnas están resaltadas con colores diferentes para detectar cuáles subcategorías predominan y por tanto representan los elementos sobre los cuales se centró la reflexión. Ello permite evidenciar la transformación o cambio de mirada de las gestiones, acciones, decisiones, entre otros que afrontamos durante el proceso de reflexión

3.7 CONSOLIDACIÓN DE RESULTADOS DE ANÁLISIS

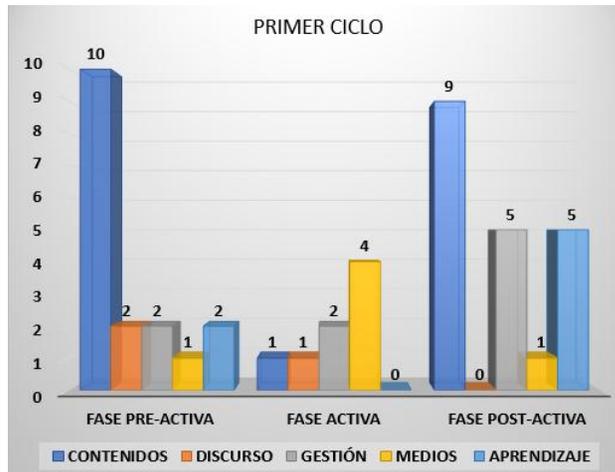
Con el análisis de los datos investigativos y a partir de los instrumentos de registro de la información sobre el proceso reflexivo, se realizará un proceso narrativo por cada ciclo ejemplificando con fragmentos de datos las situaciones relevantes de nuestro proceso reflexivo. Estos fragmentos son aquellos que permitan identificar las acciones relacionadas a la práctica del profesor y serán extraídos por los colores más representativos en las categorías relacionadas con el contenido y la caracterización. Estas categorías permitirán clasificar los asuntos del ciclo por fase, en cada una de estas fases se realiza la narración del dato y la respectiva interpretación sobre la práctica del profesor, para luego relacionar el sentido de esta práctica en términos del ciclo de Smyth. En otras palabras, lo que se busca con esta relación es explicitar por qué en el dato analizado se evidencia un proceso reflexivo de Descripción, Inspiración, Confrontación o Transformación.

Una vez realizado este ejercicio de interpretación de cada uno de los datos, se procede a realizar un rastreo de los asuntos que predominaron en cada uno de los ciclos y las fases que los componen, con estos se procede a realizar la síntesis de cada uno de ellos en donde se busca identificar como durante la fase o el ciclo de Smyth se mantuvo o se transformó la práctica o la creencia del profesor

4 PRIMER CICLO DE REFLEXIÓN

4.1 REFLEXIÓN DE JUAN CARLOS JIMÉNEZ

En el Gráfico 3 se presentan los asuntos de la reflexión agrupados en las diferentes fases del Ciclo de reflexión del profesor Juan Carlos.



Gráfica 3 Clasificación datos Primer Ciclo de reflexión de Juan Carlos

A continuación, se describen los datos correspondientes a cada fase de la reflexión y a cada asunto de la práctica. Adicionalmente, se realiza una interpretación en relación con las preocupaciones, creencias o intereses del profesor que comunica cada dato o conjunto de datos y una clasificación con respecto al *Ciclo de Smyth*.

4.1.1 FASE PRE-ACTIVA

4.1.1.1 CONTENIDO MATEMÁTICO

	Párrafo	Asunto específico	Caracterización
1	El dominio matemático que prevalece en mis clases es el de los sistemas numéricos y en ocasiones se desarrolla el pensamiento geométrico por baja intensidad horaria. Por tal motivo, opté por enseñar algunas temáticas de la aritmética usando objetos propios de la geometría con el supuesto que ya eran objetos conocidos por los estudiantes, encontrando dificultades inmediatas en el reconocimiento de propiedades y relaciones geométricas, en particular de los cuadriláteros.	Planeación de la organización	Describir
2	Diseñé una actividad encaminada al proceso de definir. Consistía en realizar dibujos de cuadriláteros que cumplieran ciertas condiciones de paralelismo, congruencia, ser adyacente, ser opuesto y de ángulo recto.	Acercamiento a contenidos matemáticos	Describir

4	[...Considero que] la mayoría de los profesores del área de matemáticas en mi institución, en sus prácticas escolares en el aula, proponen temáticas y actividades enfocadas principalmente en el campo de los sistemas numéricos.	Planeación de la organización	Inspirar
5	[La planeación de la clase] fue pensada para que los estudiantes comenzaran a reconocer algunas propiedades de los paralelogramos (cuadrado y rectángulo).	Acercamiento a contenidos matemáticos	Describir
7	Un primer objetivo está encaminado a que ellos [los estudiantes] dibujen cuadriláteros con unas propiedades particulares, usando como instrumento únicamente la regla, lápiz y un transportador. [De tal manera que] estos dibujos les sirva para deducir propiedades que debe cumplir un cuadrilátero para ser cuadrado o rectángulo y utilizar estas propiedades para definir estos cuadriláteros.	Acercamiento a contenidos matemáticos	Describir
9	Mis conocimientos matemáticos estaban enmarcados en lo estudiado en los cursos de geometría vistos en pregrado, en los cuales se estudia objetos de la geometría euclidiana plana y del espacio, la geometría analítica y las geometrías no euclidianas.	Conocimiento profesional	Confrontar
10	[...]las definiciones de cuadriláteros que presentaré en clase, serán las que maneje desde mi dominio matemático.	Conocimiento profesional	Inspirar
11	[Para el desarrollo de la clase implementada supongo que ellos pueden] reconocer fácilmente algunos tipos de cuadrilátero (cuadrado, rombo, rectángulo y romboide) en su posición estándar.	Conceptos previos	Inspirar
12	[Además, supuse] que los estudiantes desconocían la simbología para referirse a propiedades de objetos geométricos como lados congruentes, medida de ángulo, segmentos perpendiculares entre otros.	Conceptos previos	Inspirar
17	Anterior a la clase implementada, se realiza una clase donde se dedicaría al estudio e introducción de las ideas primitivas en geometría (punto, recta, plano y espacio). [Para el cierre] mencionar los elementos que tiene un polígono y su relación con las ideas primitivas.	Conceptos previos	Describir

De los datos asociados al contenido matemático, dos datos corresponden al **Tra-tamiento de los contenidos**. El primero, plantea una preocupación del profesor que lo lleva a iniciar el ciclo de reflexión:

El dominio matemático que prevalece en mis clases es el de los sistemas numéricos y, en ocasiones, se desarrolla el pensamiento geométrico a pesar de que no existía una hora destinada al estudio de la geometría. Por tal motivo, opté por enseñar algunas temáticas de la aritmética usando objetos propios de la geometría con el supuesto que ya eran objetos conocidos por los estudiantes, encontrando dificultades en el reconocimiento de propiedades y relaciones geométricas, en particular de los cuadriláteros [1]. [Considero que] la mayoría de los profesores del área de matemáticas en mi institución, en sus prácticas escolares en el aula, proponen temáticas y actividades enfocadas principalmente en el campo de los sistemas numéricos [4].

El primer dato [1] es de **Descripción** porque reporta las decisiones que toma el profesor para poder dar cuenta de dos pensamientos matemáticos que considera

que sus estudiantes deben desarrollar. Un segundo dato [4] es de **Inspiración** porque reporta una creencia que, de alguna manera, sustenta lo que hace el profesor en relación con lo que pasa en su institución. Observamos que la geometría es entendida por este profesor como una herramienta que puede utilizarse para desarrollar el pensamiento aritmético. De alguna manera, podemos interpretar que este profesor asumía que esa herramienta era conocida por los estudiantes. No obstante, ese supuesto rápidamente se diluye al evidenciar las dificultades de sus estudiantes para resolver problemas aritméticos que requieren conocer algunas propiedades geométricas. Asumimos que el uso de la geometría para resolver problemas aritméticos, es además una estrategia del profesor para integrar los sistemas numéricos y la geometría, debido a la poca intensidad horaria.

El tercer, cuarto y quinto dato están relacionados al **Acercamiento de los contenidos matemáticos**. Reportan que la tarea que propuso el profesor pedía a sus estudiantes realizar, con regla, transportador y lápiz, dibujos de cuadriláteros que cumplieran propiedades de congruencia, paralelismo y perpendicularidad. El profesor esperaba que, a partir de estos dibujos, los estudiantes pudieran deducir propiedades que debe cumplir un cuadrilátero para ser un cuadrado o un rectángulo y utilizar estas propiedades para definirlos [2, 5, 7]. Los datos **Describen** la tarea que propuso el profesor Juan Carlos y entrevemos que quería desarrollar el proceso de definir. Evidenciamos una relación que el profesor asume entre las propiedades de un objeto y su definición. Las propiedades que este profesor espera que sus estudiantes reporten en la definición, son aquellas que les permitan generar un dibujo de lo que se quiere definir. Adicionalmente, consideramos que para este profesor es posible inferir propiedades a partir de un dibujo.

El sexto y séptimo dato corresponden a los **Conceptos previos**. Estos datos surgen en una relatoría y hacen mención a un supuesto que tiene éste profesor con respecto a sus estudiantes. Por un lado, asume que los estudiantes deben identificar los cuadriláteros (cuadrado, rectángulo, rombo y romboide) en su posición estándar porque están en grado séptimo, y por otro lado, da por hecho que la simbología geométrica usada en las representaciones gráficas para indicar paralelismo, perpendicularidad y congruencia, eran desconocidas por los estudiantes [11 y 12]. Estos datos son de **Inspiración** pues reportan una creencia del profesor con respecto a que los pre-saberes de sus estudiantes están determinados por el grado que están cursando. Consideramos que la creencia del profesor puede venir de sus experiencias como profesor de geometría, de documentos oficiales propuestos por el MEN, por el mismo plan de estudios de su institución o de libros de texto.

Un octavo dato sobre este mismo asunto, menciona que anterior a la clase implementada, se realiza una clase donde se dedicaría al estudio e introducción de las ideas primitivas en geometría (punto, recta, plano y espacio). A partir de ello, mencionar los elementos que tiene un polígono y su relación con las ideas primitivas [17]. Este dato **Describe** la preparación que hace el profesor para garantizar los conocimientos previos que deben tener los estudiantes para desarrollar una tarea.

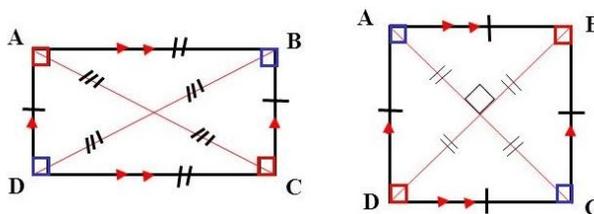
Observamos que para este profesor es fundamental que la enseñanza de la geometría inicie con el estudio de las nociones básicas, ya que sin estas no será posible estudiar polígonos.

El noveno y décimo dato sobre los **contenidos matemáticos**, alude al **Conocimiento profesional**. En ellos se reporta que los conocimientos matemáticos del profesor Juan Carlos, estaban impregnados por los cursos de geometría vistos en pregrado, en los cuales se estudia objetos de la geometría euclidiana plana y del espacio, la geometría analítica y las geometrías no euclidianas. A partir de ellos, presenta las definiciones de cuadriláteros que él aprendió [9, 10]. En este dato se realiza una **Confrontación**, dado que se presenta un contraste entre el saber adquirido por el docente en sus estudios de pregrado y los contenidos que él enseña. De igual manera, se realiza una **Inspiración** dado que, para él, es suficiente con los conocimientos que adquirió como estudiante o como profesor para estructurar su clase. Asimismo, se ve a un profesor que confía en sus recuerdos y aprendizajes cuando cursó la Licenciatura en Matemáticas, pues considera que las definiciones que daría a los estudiantes son las que él domina y éstas provienen principalmente de sus cursos de pregrado.

4.1.1.2 DISCURSO

	Párrafo	Asunto específico	Caracterización
13	[L]a finalidad de la clase es aportar al lenguaje matemático de los estudiantes, haciendo uso de la simbología que yo también manejo.	Lenguaje empleado	Describir
18	En la clase se tiene planeado presentar la notación geométrica de paralelismo, perpendicularidad y congruencia sobre un polígono y poder aportar a mejorar la comunicación de los estudiantes.	Lenguaje empleado	Describir

Se encontraron dos datos relacionados con el **discurso**. Ambos refieren al **Lenguaje empleado**. En ellos se realiza una **Descripción** sobre la importancia que el profesor da al **Uso al lenguaje**. Describen lo que el profesor presenta a sus estudiantes para que logren comunicar relaciones geométricas entre las partes constitutivas de una figura por medio del uso de simbologías (Gráfica 4). Él considera que las mismas son herramientas que favorecen la comunicación.



Gráfica 4 Simbología geométrica sobre cuadriláteros

4.1.1.3 GESTIÓN

	Párrafo	Asunto específico	Caracterización
3	Una necesidad que se ha identificado en la institución [educativa donde laboro], es que se requiere de un espacio propio para la enseñanza de la geometría.	Necesidad institucional	Describir
15	La planeación de clase a implementar se pensó en dos sesiones. Cada una de ellas con un tiempo de 2 horas.	Tiempo de ejecución	Describir

Los dos datos correspondientes a gestión describen una **Necesidad institucional**. El primer dato reporta que en la institución no existe un espacio académico exclusivo para la geometría [3]. Se **Describe** cómo están distribuidos los tiempos para los campos de la matemática en la institución. Al parecer el profesor tiene una preocupación al no contar con un espacio académico propio para el estudio de la geometría, que le permita tener el tiempo necesario para desarrollar en los estudiantes habilidades y competencias en el *pensamiento espacial y sistemas geométricos*.

El segundo dato corresponde al **Tiempo de ejecución**. Este reporta que: “La planeación de clase a implementar se pensó en dos sesiones. Cada una de ellas con un tiempo de 2 horas [15]”. Aquí se **Describe** cuáles fueron los tiempos que se iban a dedicar para la implementación de la clase los cuales serían suficientes para lograr continuar con el desarrollo del plan de estudios de la institución. Se interpreta cómo el profesor considera que dos sesiones, cada una de dos horas, eran suficientes para lograr el propósito de las tareas propuestas: proponer definiciones para cuadrado y rectángulo a partir de las propiedades que identificaban en representación realizados con regla y compás.

4.1.1.4 MEDIOS

	Párrafo	Asunto específico	Caracterización
16	[D]ecidí que los estudiantes trabajaran con hojas totalmente blancas, una regla y un transportador. Estos instrumentos los elegí pues son de fácil acceso y considero que son suficientes para realizar la actividad propuesta.	Uso de recursos	Inspirar

El único dato relacionado con los **Medios** corresponde al **Uso de los recursos**. El dato menciona que: “[D]ecidí que los estudiantes trabajaran con hojas totalmente blancas, una regla y un transportador. Estos instrumentos los elegí pues son de fácil acceso y considero que son suficientes para realizar la actividad propuesta [16]”. Se realiza una **Inspiración** porque expresa una de las razones para seleccionar un instrumento: su fácil acceso. Se interpreta que la elección de la hoja sin cuadrícula se realiza porque el profesor considera que esto hará que el estudiante

tenga la necesidad de utilizar la regla y el transportador para garantizar las propiedades de las representaciones que realizará.

4.1.1.5 APRENDIZAJE

	Párrafo	Asunto específico	Caracterización
8	Un segundo objetivo, está orientado a lograr enunciar una definición para rectángulo y cuadrado a partir de las propiedades que reporten los estudiantes.	Valoración de los aprendizajes	Describir
14	Como producto final, se espera que los estudiantes reconozcan y comuniquen [verbalmente] características de los cuadriláteros, en especial de los paralelogramos. Con la intención de describir, enumerar propiedades y a partir de ellas definir [cuadrado y rectángulo].	Valoración de los aprendizajes	Describir

Los dos datos que corresponden al aprendizaje [8, 14] hacen referencia a la **Valoración de los aprendizajes**. Ambos datos quedan sintetizados en el dato [14].

Estos datos **Describen** de qué forma el profesor espera valorar los aprendizajes obtenidos. Se hace explícito que son indicadores de que el estudiante habrá aprendido lo esperado si comunica propiedades de un objeto y propone una definición. Para este profesor es inherente que la comunicación que realiza el estudiante es necesaria para valorar el aprendizaje.

4.1.2 FASE ACTIVA

4.1.2.1 CONTENIDO MATEMÁTICO

	Párrafo	Asunto específico	Caracterización
22	En la segunda sesión, se analizan las definiciones que los estudiantes encontraron de cuadrilátero y a partir de ellas se eligió entre todos una definición por su economía, la cual fue: polígono de cuatro lados.	Tratamiento de contenidos	Describir

Un dato relacionado con el **Contenido matemático** está orientado al **Tratamiento de los contenidos**. En este se menciona que “*En la segunda sesión, se analizan las definiciones que los estudiantes encontraron de cuadrilátero y a partir de ellas se eligió, entre todos, una definición por su economía, la cual fue: polígono de cuatro lados [22]*”. Se **Describe** la forma cómo el profesor realiza el tratamiento de los contenidos en su clase. Se interpreta que a partir de un listado de definiciones dadas por sus estudiantes, el profesor propone elegir aquellas que tengan los elementos mínimos necesarios para ser una definición. Se manifiesta que uno de los atributos que él le asigna a una definición es la economía, es decir, que tenga los elementos necesarios y suficientes que caractericen al objeto geométrico de estudio.

4.1.2.2 DISCURSO

	Párrafo	Asunto específico	Caracterización
19	[L]os estudiantes comenzaron a mencionar lo que habían encontrado, por ejemplo, que un punto es la marca que deja la punta de un lápiz afilado, que la recta estaba formada por puntos, que el plano era una superficie infinita. Yo les pregunté que si alguna de ellas decía qué era realmente el punto, la recta o el plano y ellos respondieron pues que era eso que sus compañeros habían dicho. Yo les dije que esas afirmaciones realmente no eran definiciones pues no estaban aludiendo a propiedades del objeto en cuestión y que por ello se les llamaba ideas primitivas y que a partir de ellas podíamos definir a otros objetos geométricos como segmento, semirrecta, ángulo.	Tratamiento de contenidos	Describir

El anterior es el único dato que corresponde al **Discurso** y está relacionado con la **Conducción de la clase**. Éste **Describe** el proceso de conducción de la clase en un momento en el cual el profesor pretendía, a partir de las ideas de los estudiantes, presentar lo que se iba a interpretar como idea primitiva. Se observa que el profesor escucha las participaciones de sus estudiantes, sin embargo, son sus ideas las que se institucionalizan. Se infiere que, para sus estudiantes, una descripción permite definir un objeto, mientras que, para el profesor una definición debe incluir propiedades.

4.1.2.3 GESTIÓN

	Párrafo	Asunto específico	Caracterización
20	Para cada uno de los conceptos (punto, recta, plano, segmento, semirrecta, ángulo) se decidió realizar en el tablero, un cuadro comparativo [en ese orden] donde se pueda organizar el objeto geométrico de estudio. En frente de cada concepto, escribir su definición si la tiene, su representación pictórica, la simbología que se usaría para hablar del objeto en el dibujo y la notación geométrica que se usa al momento de escribir el objeto geométrico.	Planeación de la organización	Describir
21	[S]e expone una definición de polígono y se realiza una caracterización de congruencia de segmentos, de lados adyacentes y opuestos de un polígono y de lados perpendiculares. Finalmente, se realizaron algunos dibujos en el tablero para que los estudiantes los clasificaran si eran o no polígonos.	Planeación de la organización	Describir

Dos datos corresponden a la **Planeación de la organización**. Ellos reportan que para organizar lo que expone, el profesor presenta las ideas primitivas y otros objetos geométricos a través de una tabla, donde ubica definiciones, representación gráfica del objeto de estudio y simbologías. Además, cuando el profesor presenta la definición de polígono, ejemplifica a partir de varios dibujos para que sus estudiantes determinen si estos son o no un polígono a partir de la definición [20, 21].

Este dato **Describe** cómo el profesor decide la manera como serán organizados (en el tablero) los elementos expuestos acerca de los objetos geométricos; concretamente, por medio de tablas. Se interpreta que usar una tabla para organizar definiciones, representaciones y notación de un objeto geométrico es una estrategia para institucionalizar aspectos del objeto que el profesor considera importantes. El dato también deja entrever la intención que tiene el profesor de encaminar a sus estudiantes a que utilicen las definiciones para clasificar objetos.

4.1.2.4 MEDIOS

	Párrafo	Asunto específico	Caracterización
23	Durante el desarrollo de la clase surgieron algunas dificultades frente al manejo de hojas con cuadrícula. Porque considero que la cuadrícula en una hoja hace que cuando se les pida trazar dos o más líneas que sean paralelas o perpendiculares, ellos recurran a dicha cuadrícula y tracen sobre la misma, líneas que cumplan la condición de paralelismo o perpendicularidad.	Valoración del recurso	Inspirar
24	[La cuadrícula] no ayuda al propósito que tengo y es que los alumnos, por sí mismos, se den cuenta de las características de paralelismo y/o perpendicularidad, que hacen parte de las características de los cuadriláteros cuadrado y rectángulo.	Valoración del recurso	Inspirar
25	Yo utilicé un transportador grande de madera para mostrarles sobre el tablero cómo usarlo y cómo ubicarlo.	Uso de recursos	Describir
26	Les di unos pasos, como trazar una recta inicialmente y sobre esa recta se localizaría un punto para ubicar luego el punto guía o marca que traen los transportadores y finalmente hacer coincidir los ceros de este instrumento con la recta que se había trazado inicialmente. A partir de estos pasos, ya se podía localizar un punto sobre la hoja que permitiera trazar otra línea que fuera perpendicular con la inicial.	Uso de recursos	Describir

Dos datos hacen referencia a la **Valoración del recurso**. En el primero el profesor explicita que él considera que usar la cuadrícula para construir cuadriláteros genera una dificultad [23]. Esta idea se explica en el siguiente dato: “[La cuadrícula] no ayuda al propósito que tengo y es que los alumnos, por sí mismos, se den cuenta de las características de paralelismo y/o perpendicularidad, que hacen parte de las características de los cuadriláteros cuadrado y rectángulo [24]”. Estos datos son de **Inspiración** pues se reporta una creencia que tiene el profesor con respecto al uso de hojas con cuadrícula. Él considera que estas no permiten que el estudiante identifique atributos de paralelismo y perpendicularidad, seguramente porque en este tipo de hojas, los estudiantes se apoyan en la cuadrícula para trazar rectas paralelas y/o perpendiculares.

Otros dos datos están relacionados con el **Uso de los recursos**. Reportan que el profesor brinda a los estudiantes una secuencia de pasos para usar adecuada-

mente el transportador y así determinar una recta perpendicular a otra [25, 26]. Estos datos **Describen** la forma como el profesor busca que sus estudiantes logren usar el recurso para solucionar la tarea propuesta. Se interpreta que el profesor reconoce que el uso de instrumentos de medida permite garantizar unas propiedades. Adicionalmente, explicar cómo usar este recurso que seguramente los estudiantes utilizaron en cursos anteriores, muestra que el profesor prevé que el recurso puede generar dificultades en sus estudiantes, y realiza acciones en correspondencia.

4.1.3 FASE POST-ACTIVA

4.1.3.1 CONTENIDO MATEMÁTICO

	Párrafo	Asunto específico	Caracterización
35	[...]reí que a partir del trabajo previo realizado en clase, ellos iban a tener suficientes elementos para lograr construir una definición de rectángulo y otra para cuadrado, donde se reportara las características de estos cuadriláteros y que a partir de ellas, logran encontrar diferencias entre estas dos definiciones. Esto no pasó.	Conceptos previos	Confrontar
39	El proceso matemático de mi interés, es el de definir en Geometría. Ahora bien, ¿Qué es definir? ¿Qué entiendo por definir? ¿Cualquier afirmación que nombre características sobre algo puede ser una definición? ¿Qué elementos debo tener en la cuenta para aprender a definir? Y una vez reconozca esos elementos o quizás pasos, ¿cómo debo enseñar a mis estudiantes para que también aprendan a definir o se acerquen al proceso de definir en matemáticas?	Conocimiento profesional	Inspirar
40	[A partir de una asesoría] Me surgen preguntas como ¿yo sí sé matemáticas? ¿Qué tipo de matemáticas son las que yo creo saber?	Conocimiento profesional	Confrontar
41	[En una asesoría se propone enunciar] una definición para rectángulo [a lo que el profesor James da una propuesta y luego usa el software Geogebra para construir la figura a partir de su definición]. A lo que yo le comento que los elementos reportados en la definición, no son los mismos elementos usados en GeoGebra, puesto que en la definición se habla de segmentos y en la construcción se usa la herramienta recta y rectas perpendiculares	Conocimiento profesional	Inspirar
42	[En una asesoría] expongo que para determinar una nueva definición de rectángulo, mi punto de partida es la definición usual de rectángulo y que es la que normalmente presento a los estudiantes, la cual es: cuadrilátero con cuatro ángulos rectos y dos pares de lados opuestos paralelos y congruentes.	Conocimiento profesional	Inspirar
43	Para la elaboración de mis definiciones tuve en cuenta la economía y la jerarquía, recordando el artículo del profesor Orlando Aya del 2016. Menciono que bajo este criterio, de economía y jerarquía, elaboro 5 definiciones para rectángulo.	Conocimiento profesional	Inspirar

44	[L]a primera definición [para rectángulos es] paralelogramo con un ángulo recto. La profesora Claudia me pregunta sobre cómo llegué a esta definición y le respondí que primero me cuestioné para mi qué era un rectángulo y que si quería definirlo desde la jerarquía debía tener en cuenta que el rectángulo estaba clasificado en los paralelogramos. Comento que imagino al paralelogramo de forma dinámica y hago que exista un ángulo recto en un par de lados adyacentes, al hacer esto, automáticamente los otros tres ángulos deberán ser rectos y obtengo al rectángulo.	Conocimiento profesional	Inspirar
45	[L]a segunda definición [para rectángulo es] paralelogramo con un par de lados adyacentes perpendiculares. Tuve en cuenta al paralelogramo nuevamente, pero pensando en qué característica debía cumplir los lados adyacentes para que fuera un rectángulo.	Conocimiento profesional	Inspirar
46	La asesora me preguntó ¿Qué consideraba que era conocer el contenido matemático que iba a enseñar? a lo que respondí que mi práctica docente me ha enseñado que mi saber sobre un contenido matemático a enseñar, es tener la destreza, la habilidad de reconocer los conceptos matemáticos en sus fundamentos y sus distintas transformaciones para luego poderlos usar de una forma adecuada y que sean útiles para mis estudiantes.	Conocimiento profesional	Confrontar
35	[...]reí que a partir del trabajo previo realizado en clase, ellos iban a tener suficientes elementos para lograr construir una definición de rectángulo y otra para cuadrado, donde se reportara las características de estos cuadriláteros y que a partir de ellas, logran encontrar diferencias entre estas dos definiciones. Esto no pasó.	Conceptos previos	Confrontar

El primer dato de esta categoría está relacionado a los **Conceptos previos**. Se reporta una creencia que tenía el profesor con respecto a que los estudiantes iban a lograr construir una definición de cuadrado y de rectángulo a partir de lo que él les enseñó previamente, lo cual no sucedió [35]. Este dato es de **Confrontación** puesto que hay una convicción del profesor con respecto a las orientaciones de los elementos que, según él, eran necesarios para que sus estudiantes fueran encaminados al proceso de definir. Por lo anterior, acá hay un profesor que proporciona a sus estudiantes herramientas que él considera son las necesarias para que sus estudiantes se acerquen a este proceso.

El segundo y tercer dato se centraron en el **Conocimiento profesional**:

La asesora me preguntó ¿Qué consideraba que era conocer el contenido matemático que iba a enseñar? Respondí que mi práctica docente me ha enseñado que mi saber sobre un contenido matemático a enseñar, es tener la destreza o la habilidad para reconocer los conceptos matemáticos y sus distintas transformaciones para luego poderlos usar de una forma adecuada y que sean útiles para mis estudiantes [46]. [A partir de una asesoría] Me surgen preguntas como ¿yo sí sé matemáticas? ¿Qué tipo de matemáticas son las que yo creo saber? [40]

Estos datos son de **Inspiración**, pues el rol de la asesora era examinar a partir de preguntas, si en ese instante, para el profesor Juan Carlos, eran suficientes los conocimientos que tenía previstos para el desarrollo de la actividad. Se percibe que el papel que juega el asesor en este proceso reflexivo con su asesorado, es hacerle caer en la cuenta sobre cómo entiende los objetos matemáticos que enseña a sus estudiantes y cómo podría nutrir su conocimiento profesional para fortalecer su práctica en aula.

Los siguientes seis datos también están relacionados con el **Conocimiento profesional**. Ellos reportan dudas e inquietudes que le surgen al profesor Juan Carlos con respecto a lo que él entiende por definir, el contraste que realiza entre el uso de las herramientas del software GeoGebra y los elementos que reporta una definición, los criterios que tiene en cuenta para representar gráficamente un objeto a partir de su definición, la definición de rectángulo que usa para sus estudiantes y cómo crea otras definiciones para rectángulo a partir de su conocimiento profesional y su pensamiento dinámico [39, 41, 42, 43, 44 y 45]. Los datos son de **Inspiración** pues ellos evidencian, en el profesor Juan Carlos, un proceso que ha formado de experiencias pasadas, para entender la definición, en este caso la de rectángulo. Por ejemplo, que la información que reporte una definición de un objeto geométrico debe estar en concordancia con los elementos que se usan para su representación gráfica. Que esta información permita construir una definición económica y/o jerárquica. Que el dinamismo que hace el profesor sobre un objeto estático en su mente le permite abstraer el comportamiento de una figura sobre el plano. En estos datos se interpreta que a partir del conocimiento que maneje el profesor, acerca de los elementos que debe tener una afirmación para llamarse definición, podrá determinar nuevos elementos a partir de una definición conocida y lograr proponer otras definiciones donde se busque la economía o la jerarquía en la misma. Además, para este profesor, su pensamiento dinámico juega un papel significativo en la construcción de definiciones.

4.1.3.2 GESTIÓN

	Párrafo	Asunto específico	Caracterización
30	[S]e observa que hubo dificultades en la gestión del profesor para evitar que los estudiantes entraran en confusiones al generar una definición para rectángulo y otra para cuadrado, puesto que en la planeación se tenía pensado que dar un contraejemplo era suficiente para refutar una definición, sin embargo, esto no fue así.	Planeación de la organización	Confrontar
31	Una segunda problemática que se evidenció tanto en el profesor como en los estudiantes, gira en torno al uso de términos dinámicos tales como: cambiar de posición y girar [el papel donde hicieron los dibujos y] reconocer propiedades de un cuadrilátero para llamarse cuadrado.	Planeación de la organización	Confrontar

32	Es evidente que no fue acertada la manera como intenté hacer caer en la cuenta a mis estudiantes de las dificultades que ellos estaban presentando con respecto a los segmentos de un cuadrilátero que ellos mismos dibujaron.	Planeación de la organización	Confrontar
34	Observo que generé confusiones, que no me esperaba, al tratar que ellos me explicaran qué era un rectángulo.	Planeación de la organización	Confrontar
36	[...]observo que las preguntas que formulaba a los estudiantes conducían a que reportaran una definición para rectángulo.	Anticipación de la actividad matemática	Describir

Cuatro datos sobre este asunto corresponden a la **Planeación de la organización**. En uno de ellos se reporta que, en la gestión del profesor, se propuso a los estudiantes un contraejemplo a una afirmación geométrica, y se pensó que sería suficiente para que ellos construyeran una definición para rectángulo y otra para cuadrado. Sin embargo, esta idea del contraejemplo generó confusiones en los estudiantes [30]. En otro dato, *“Una segunda problemática que se evidenció tanto en el profesor como en los estudiantes, gira en torno al uso de términos dinámicos tales como: cambiar de posición y girar [el papel donde hicieron los dibujos y] reconocer propiedades de un cuadrilátero para llamarse cuadrado [31]”*. En otros dos datos se reporta una dificultad por parte del profesor al gestionar su clase y terminó generando confusiones en los estudiantes [32]. Esto se explicita cuando: *“Observo que generé confusiones, que no me esperaba, al tratar que ellos me explicaran qué era un rectángulo [34]”*. Estos datos son de **Confrontación** ya que una posible causa de las dificultades que presentaron los estudiantes en esta clase pudo haber sido por falta de conocimiento profesional, en su didáctica o quizás en la pedagogía que usó al proponer el contraejemplo. En este caso, el profesor no planeó las posibles dificultades que podrían surgir en sus estudiantes, ni cómo sanarlas. Además, el pensamiento dinámico del profesor que permeó en sus estudiantes (el dato no reporta si se hizo con intención) para intentar cambiar de posición y girar el papel donde ellos hicieron los dibujos de cuadriláteros, causó que los estudiantes creyeran que al señalar los lados paralelos en un romboide y luego rotar el papel, éstos se “convirtieran” en lados verticales. Y otras dos, donde el profesor al querer corregir dicha dificultad no logró explicar contundentemente a sus estudiantes para sacar adelante la confusión que se creó. Se interpreta que presentar un solo contraejemplo de un objeto geométrico, no es suficiente para que los estudiantes identifiquen propiedades y logren construir una definición. Que usar términos dinámicos sobre un recurso que es estático sin tener en cuenta su significado, puede generar malas interpretaciones sobre las propiedades del objeto geométrico de estudio. Por otro lado, se observa en este profesor que no tuvo en cuenta en su planeación de clase, el cómo iba a explicar o a orientar a sus estudiantes, situaciones que pudieran obstaculizar su aprendizaje.

El dato quinto, concierne a la **Anticipación de la actividad matemática**. En el reporta que: *“las preguntas que formulaba a los estudiantes conducían a que reportaran una definición para rectángulo [36]”*. Este dato **Describe** que una manera para provocar una comunicación con los estudiantes y en este caso, poderlos

acercar al proceso de definir, es que el profesor formule preguntas, de tal manera que ellos comuniquen elementos que necesiten para construir una definición. Este profesor reconoce que una de las competencias matemáticas que se deben promover en sus estudiantes, es que comuniquen matemáticamente lo observado y ello se logra a partir de una formulación preparada de preguntas.

4.1.3.3 MEDIOS

	Párrafo	Asunto específico	Caracterización
38	Con respecto a usar hojas en blanco para realizar dibujos o construcciones geométricas, pienso que es un buen recurso didáctico pero quizás deba profundizar sobre su uso y pertinencia en clase.	Papel del recurso	Inspirar

Un dato corresponde al ***Papel del recurso***. Este dato, da cuenta una concepción del profesor frente al recurso. El dato es de ***Inspiración***, pues el profesor manifiesta un sentir sobre la oportunidad de trabajar dibujos o construcciones geométricas sobre hojas sin cuadrícula en clase. También reconoce que debe consultar sobre la usabilidad de este material y su pertinencia en la clase de geometría. De alguna manera, podemos interpretar que para este profesor la elección del recurso está relacionada con los atributos que le permita potencializar en su clase de geometría.

4.1.3.4 APRENDIZAJE

	Párrafo	Asunto específico	Caracterización
27	[P]retendía que los estudiantes relacionaran determinadas propiedades con un tipo específico de cuadrilátero, el del rectángulo y el cuadrado, y a partir del reconocimiento de dichas propiedades elaboraran con sus palabras una definición para rectángulo y otra para cuadrado.	Valoración de los aprendizajes	Describir
28	[...]Se evidencia que los estudiantes comienzan a generar propuestas que apuntan al proceso de definir, realizan dibujos de cuadriláteros a partir de algunas relaciones de dependencia tales como tener exactamente un par de lados opuestos paralelos, que tengan ambos pares de lados opuestos paralelos, cuatro lados congruentes, dos ángulos opuestos rectos, entre otras.	Valoración de los aprendizajes	Describir
29	[Los estudiantes] nombran propiedades como horizontalidad, verticalidad, ser opuestos, ser congruentes, ser adyacente entre segmentos. Además, utilizaron la interpretación de la definición formulada para decidir si una figura era o no un rectángulo, lo cual hace parte del proceso de definir.	Valoración de los aprendizajes	Describir
33	[...]U]no de mis objetivos era que usaran la simbología geométrica para referirse a segmentos que fueran paralelos, perpendiculares y/o congruentes.	Valoración de los aprendizajes	Describir

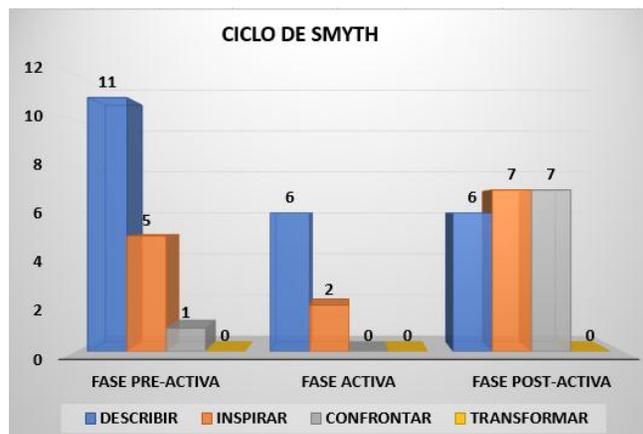
37	A partir de estas preguntas, mi intención era que ellos mencionaran características de los ángulos que se forman entre dos lados adyacentes pues esperaba como respuesta que como los lados eran adyacentes y perpendiculares entonces forman un ángulo recto o sea de 90°.	Valoración de los aprendizajes	Describir
----	---	--------------------------------	-----------

Se encontraron cinco datos que conciernen a la **Valoración de los aprendizajes**. Estos reportan que se pretendía en los estudiantes relacionaran propiedades de cuadrado y rectángulo y a partir de estas lograr construir una definición para cada uno. Ellos realizan dibujos de cuadriláteros con algunas relaciones de dependencia, el cual hace parte del proceso de definir. Otro dato registra a los estudiantes nombrando propiedades de horizontalidad, verticalidad, ser opuestos y ser adyacente para decidir si una figura es un rectángulo o no. Se menciona que el objetivo de aprendizaje, refiere a que sus estudiantes adoptaran la simbología geométrica para referirse a propiedades que se observarían en los lados de los cuadriláteros y el último dato reporta que de acuerdo a las preguntas que formula el profesor, él espera en sus estudiantes, comuniquen la característica de un ángulo cuando los lados adyacentes que lo forman son perpendiculares [27, 28, 29, 33, 37]. Estos datos **Describen** los aprendizajes que el profesor deseaba impulsar en sus estudiantes. Identificando, relaciones de dependencia y propiedades en cuadriláteros (rectángulo y cuadrado), permitiéndoles elaborar con sus propias palabras definiciones que los reportaran. Además, los datos están relatando, de alguna manera, cómo el profesor valora lo enseñado a partir de las conversaciones que tiene con sus estudiantes sobre los objetos geométricos de estudio. Se interpreta que para este profesor el uso que se le dé al lenguaje geométrico, como instrumento para comunicar, le deja entrever si hay un dominio de dicho concepto geométrico para lograr comunicar características especiales en los cuadriláteros que los estudiantes dibujen.

4.1.4 CONCLUSIONES DERIVADAS DEL PRIMER CICLO PROFESOR JUAN CARLOS

Respecto al *ciclo de Smyth*, de los 17 datos obtenidos en la **Fase Pre-activa**, 11 de ellos están relacionados con **Describir** que corresponden al 65%. Cinco (5), están relacionados con la **Inspiración** que corresponden al 29% y un (1) dato que atañe a **Confrontar** que representa el 6% de los datos en esta primera fase. Era de esperarse que en esta primera fase de reflexión la mayor cantidad de datos apuntaran a la descripción según el *ciclo de Smyth*, puesto que acá se expusieron los datos concernientes a las necesidades de la institución educativa, cómo iba a ser la práctica del profesor, el proceso matemático que quería desarrollar en sus estudiantes, cómo planea y gestionaría una clase, los materiales que decidiría implementar y cómo evaluaría los aprendizajes esperados. En la **Fase Activa** de los 8 datos obtenidos, 6 de ellos están relacionados con **Describir** que corresponden al 75% y dos (2) datos están relacionados con la **Inspiración** que corresponden al 25%. De esta manera se puede inferir que los datos que surgieron en esta fase la

mayoría siguen siendo de descripción, a pesar de ello, una cuarta parte del total de los datos son de inspiración y esto es importante, pues revela en el profesor Juan Carlos algunas creencias sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y las concepciones frente al recurso y el lenguaje matemático utilizado en sus clases. Finalmente, en la **Fase Post-activa** de los 20 datos obtenidos, 6 de ellos están relacionados con el proceso reflexivo de **Describir** que corresponden al 30%, otros 7 están relacionados con la **Inspiración** que corresponden al 35% y 7 datos que conciernen a la **Confrontación** que corresponden al 35%. En esta última fase del proceso de reflexión del profesor Juan Carlos, es más notorio un equilibrio en los datos con respecto a tres de las fases del *ciclo de Smyth*, donde el describir, inspirar y confrontar, generan una radiografía un poco más clara sobre cómo son sus prácticas y cómo confronta su conocimiento matemático, dificultades y concepciones frente a un objeto y proceso matemático. La *gráfica 5*, muestra el comportamiento de estos datos, al pasar de una fase a otra.



Gráfica 5 Ciclo de Smyth según Juan Carlos

Luego de realizar la organización y análisis de los datos en el primer Ciclo en cada una de las fases, se determinaron unos ejes sobre los cuales se centró la reflexión del profesor Juan Carlos y que estuvieron presentes de forma constante. A continuación, se muestra cada uno de estos asuntos y la forma como se relacionaron.

4.1.4.1 PRIMER ASUNTO: “LA CONCEPCIÓN DEL PROFESOR SOBRE LA DEFINICIÓN Y LAS PROPIEDADES DEL OBJETO GEOMÉTRICO A DEFINIR”

A continuación, se reportan algunas interpretaciones, que surgieron con mayor intensidad en los datos que fueron recolectados y analizados. Estas inferencias permitieron seguir un patrón de comportamiento frente a cómo el profesor Juan Carlos, asumió la definición y su relación con los elementos intrínsecos del objeto matemático de estudio. Lo anterior puede observarse en la Tabla 7.

		FASES DE REFLEXIÓN		
		PRE-ACTIVA	ACTIVA	POST-ACTIVA
CILCO DE SMYTH	DESCRIBIR	<p>Se evidencia una relación que establece el profesor entre las propiedades de un objeto y su definición. Las propiedades que este profesor espera que sus estudiantes reporten en la definición, son aquellas que les permitan generar un dibujo de lo que se quiere definir.</p>	<p>El profesor propone elegir las definiciones que tengan los elementos mínimos necesarios para seguir siendo una definición. Se manifiesta que uno de los atributos que él le asigna a una definición es la economía, es decir, que tenga los elementos necesarios y suficientes que caractericen al objeto geométrico de estudio.</p> <p>Se observa que, para sus estudiantes, una descripción permite definir un objeto, mientras que, para el profesor, una definición es más que esto.</p> <p>Se interpreta que usar una tabla para organizar definiciones, representaciones y notación de un objeto geométrico es una estrategia para institucionalizar aspectos del objeto que el profesor considera importante. Además, la intención que tiene el profesor de encaminar a sus estudiantes a que utilicen las definiciones para clasificar objetos.</p>	
	INSPIRAR			<p>El profesor proporciona a sus estudiantes herramientas que él considera son las necesarias para que sus estudiantes se acerquen al proceso de definir.</p>

CONFRONTAR				A partir del conocimiento que maneje el profesor, acerca de los elementos que debe tener una afirmación para llamarse definición, podrá determinar nuevos elementos a partir de una definición conocida y lograr proponer otras definiciones donde se busque la economía o la jerarquía en la misma. Además, para este profesor, su pensamiento dinámico juega un papel significativo en la construcción de definiciones.
	CONFRONTAR			Presentar un solo contraejemplo de un objeto geométrico, no es suficiente para que los estudiantes identifiquen propiedades y logren construir una definición. Usar términos dinámicos sobre un recurso que es estático sin tener en cuenta su significado puede generar malas interpretaciones sobre las propiedades del objeto geométrico de estudio.
	TRANSFORMAR			

Tabla 7 Concepción del profesor sobre la definición y las propiedades del objeto a definir.

Respecto a “la concepción del profesor sobre la definición y las propiedades del objeto geométrico a definir”, se observa en la fase Pre-activa la **Descripción** de un profesor que encamina a sus estudiantes al proceso de definir, mostrando una relación inseparable entre las propiedades del objeto a representar gráficamente y su definición. De la misma manera, en la Fase Activa, es claro para el profesor que realizar un proceso de definición implica caracterizar al objeto geométrico para elegir las propiedades mínimas que lo definan además, que estas sean los elementos necesarios y suficientes para caracterizar el objeto geométrico de estudio y por otro lado, en las definiciones se deben dar otros elementos que permitan escribirla de manera económica o jerárquica. En la Fase Post-Activa, también se

observa que el profesor Juan Carlos presenta dos momentos según el Ciclo de Smyth: En el primero se da una **Inspiración**, pues su reacción frente a la enseñanza del proceso de definir lo lleva a cuestionarse respecto a lo que sabe de este proceso y si es suficiente para enseñarles a sus estudiantes los objetos matemáticos de estudio. Y el segundo asunto es cómo **Confronta** las decisiones que tomó en clase; las cuales generaron dificultades en los estudiantes, pues a pesar que él creía saber lo que sabía sobre el objeto y proceso matemático que quería enseñar, no planeó adecuadamente los elementos que presentaría en esta clase. Por ello, un contraejemplo que presentó a sus estudiantes resultó siendo el ejemplo de clase planeada de forma incompleta.

4.1.4.2 SEGUNDO ASUNTO: “TRATAMIENTO DE LOS CONCEPTOS PREVIOS Y LA SIMBOLOGÍA GEOMÉTRICA”

En la Tabla 8, se consignan las interpretaciones que surgieron a partir de datos y que reportan el sentir del profesor Juan Carlos con respecto al manejo e importancia que da a los conceptos previos en paralelo al uso del lenguaje geométrico.

		FASES DE REFLEXIÓN		
		PRE-ACTIVA	ACTIVA	POST-ACTIVA
CICLO DE SMYTH	DESCRIBIR	Observamos que, para este profesor es fundamental que la enseñanza de la geometría inicie con el estudio de las nociones básicas, ya que sin estas no será posible estudiar polígonos.		El uso que se le dé al lenguaje geométrico, como instrumento para comunicar, le deja entrever si hay un dominio del significado de un concepto en geometría, para lograr comunicar características especiales en los cuadriláteros que los estudiantes dibujen.
		Se interpreta cómo el profesor piensa que es significativo que sus estudiantes logren comunicar las relaciones geométricas entre las partes constitutivas del rectángulo y del cuadrado, usando notaciones sobre un dibujo para referirse a la congruencia, al paralelismo y a los ángulos rectos. Además, brindarles a ellos más herramientas para su comunicación al mencionar una definición de un cuadrilátero en particular.		

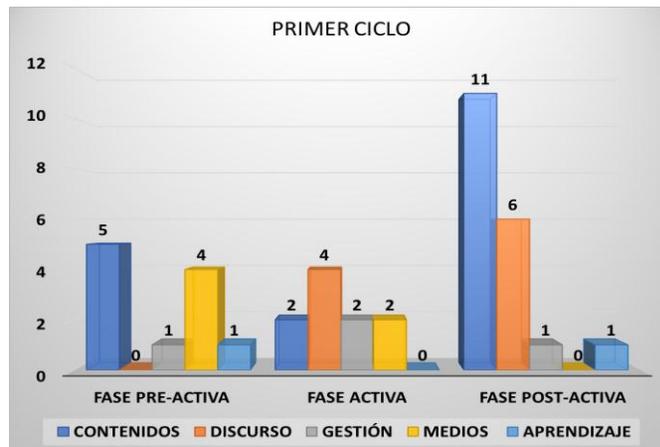
	INSPIRAR	Se infiere que el profesor confía en sus recuerdos y aprendizajes cuando cursó la Licenciatura en Matemáticas, pues considera que las definiciones que daría a los estudiantes, son las que él domina y éstas provienen principalmente de sus cursos de pregrado.		Se percibe que el papel que juega el asesor en este proceso reflexivo con su asesorado, es hacerle caer en la cuenta sobre cómo entiende los objetos matemáticos que enseña a sus estudiantes y cómo podría nutrir su conocimiento profesional para fortalecer su práctica en aula.
	CONFORTAR			
	TRANSFORMAR			

Tabla 8 Tratamiento de los conceptos previos y la simbología geométrica.

En relación al “tratamiento de los conceptos previos y la simbología geométrica”, surge en la fase Pre-activa una Descripción de las acciones que el profesor Juan Carlos realiza al momento de presentar por primera vez un objeto geométrico a sus estudiantes y es que es primordial iniciar la clase de geometría con los fundamentos tales como las nociones básicas, representaciones en dibujo y el lenguaje geométrico a usar, pues esto le permite a los estudiantes lograr comunicar las relaciones geométricas entre las partes constitutivas de un cuadrilátero usando la simbología geométrica sobre un dibujo para indicar congruencia, paralelismo y perpendicularidad. Al parecer, esta manera de abordar la clase de geometría, le garantiza al profesor que sus estudiantes tengan una nueva herramienta al momento de sumergirlos en el proceso de definir. Por otro lado, en la fase Post-activa le permitió tener un acercamiento al proceso de reflexión. Pues considera que este proceso implica un pleno conocimiento del objeto matemático y cómo a partir de este, puede fortalecer su conocimiento.

4.2 REFLEXIÓN DEL PROFESOR JAMES ALEXANDER CUELLAR

cómo se puede observar en la *gráfica 6* de los 41 datos encontrados en este primer ciclo para cada una de las de las fases se encontraron las siguientes categorías: En la **Fase Pre-activa** de los 11 datos encontrados, 5 están relacionados con el **Contenido Matemático**, 1 con la **Gestión**, 4 con los **Medios** y 1 con los **Aprendizajes**. En la **Fase activa** de los 10 datos encontrados, 2 están relacionados con el **Contenido Matemático**, 4 con el **Discurso**, 2 con la **Gestión** y 2 con los **Medios**. En la **Fase Post-activa** de los 19 datos encontrados, 11 están relacionados con los **Contenidos**, 6 con el **Discurso**, 1 con la **Gestión** y 1 dato con el **Aprendizaje**



Gráfica 6 Clasificación datos Primer Ciclo de reflexión de James Alexander

A continuación, se muestra cada uno de los asuntos sobre los cuales se centró la reflexión en cada una de las tres fases. Adicionalmente, al finalizar cada asunto se encuentra la caracterización del proceso según el *Ciclo de Smyth* y la respectiva interpretación de los distintos datos.

4.2.1 FASE PRE-ACTIVA

4.2.1.1 CONTENIDO MATEMÁTICO

	Párrafo	Asunto específico	Caracterización
1	En el inicio del programa de posgrado de la Maestría en Docencia de la Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional, mi interés estaba direccionado en que los estudiantes realizaran la construcción de cuadriláteros y establecieran sus propiedades partiendo de una definición que yo les presentaba. Este interés nace de la necesidad que se evidencia en la institución de potenciar el trabajo de geometría.	Actividad matemática prevista	Describir
2	[E]speraba que la clase les permitiera a los estudiantes reconocer los elementos básicos de la geometría (segmento, recta y ángulos) en diversos polígonos, de tal forma que estos elementos les permitan la construcción de figuras (cuadriláteros) partiendo de sus características.	Procesos matemáticos	Describir
3	[A] realizar la planeación de la clase sopesé qué nivel de conocimiento tenía sobre las temáticas que iba a tratar. En este caso particular, revisé qué conocía acerca de polígonos regulares, sus características y los elementos que pertenecen a este como vértices, ángulos, lados, apotema, centro del polígono, entre otros.	Conceptos previos	Describir
4	[E]n sesiones anteriores diseñé una clase que buscaba trabajar con el grupo de estudiantes los conceptos básicos que en ese momento consideré que eran pertinentes para el inicio de la temática de polígonos, como línea, recta, segmentos, ángulos y clasificación de ángulos.	Conceptos previos	Describir

5	Al hacer este análisis encontré que tenía pleno conocimiento de los conceptos y elementos que pretendía trabajar en esta clase. Para mi tener pleno conocimiento implica conocer el significado del término, su representación y la utilidad que tiene dentro de la figura (¿Para qué sirve o para que se emplea dentro de la figura?). Aquí asocio significado con la definición.	Conceptos previos	Inspirar
---	--	-------------------	----------

En la fase Pre-activa se observó que cinco datos estaban enmarcados en el **Contenido Matemático**. De estos, el primero estaba orientado al **Acercamiento a los contenidos matemáticos**, y surgió en el instante en el cual se inició la MDM. El dato reporta que el interés inicial del profesor James estaba direccionado en que los estudiantes realizarán la construcción de cuadriláteros y establecieran sus propiedades partiendo de una definición que él les presentaba [1]. En este se realiza una **Descripción** sobre el acercamiento de los contenidos que esperaba propiciar en los estudiantes. Este es el primer dato en el cual el profesor James explicitó una relación entre dos procesos: la definición y la representación de figuras geométricas. En este se evidencia que él consideraba que una definición da las propiedades que son suficientes para realizar una construcción, y que, por ende, si el estudiante tenía la definición de un objeto, podría construirlo.

El segundo estaba orientado a los **Procesos matemáticos**. En este dato se reporta como el profesor James pretendía que los estudiantes identificaran algunos de los elementos básicos de la geometría (recta, ángulo y segmento) en diversos polígonos, de tal forma que estos elementos facilitarían la construcción de figuras (cuadriláteros) partiendo de sus características [2]. Este dato *Describe* los procesos matemáticos que el profesor quería desarrollar en los estudiantes. En este dato se pone en manifiesto la importancia que el docente le atribuye a que los estudiantes reconozcan diversos objetos geométricos y sus propiedades, pues los considera como los medios que permiten que el estudiante pueda realizar la construcción de figuras.

El tercero, cuarto y quinto estaban orientados a los **Conceptos Previos**. En este dato se reporta el proceso empleado por el docente James para identificar el nivel de conocimiento que él tiene de una temática específica realizando una indagación retrospectiva de sus saberes [3]. Además, se reporta cuáles son las temáticas que previamente deben conocer los estudiantes y se explicita que el profesor realiza una clase para explorar los conceptos previos de los estudiantes [4]. El último dato establece que, para el docente, tener conocimiento de un tema es poder reconocer su definición, representación y utilidad [5]. Estos datos *Describen* cuales fueron los conceptos previos del profesor y del estudiante. En estos se hace explícito como el docente prevé cuales son los conceptos que requieren los estudiantes para desarrollar la actividad matemática. Además, se puede interpretar cómo para el docente los conceptos previos ayudan a que los estudiantes logren identificar las propiedades y realizar construcciones de una figura.

4.2.1.2 GESTIÓN

	Párrafo	Asunto específico	Caracterización
6	En el inicio del programa de posgrado de la Maestría en Docencia de la Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional, mi interés estaba direccionado en que los estudiantes realizaran la construcción de cuadriláteros y establecieran sus propiedades partiendo de una definición que yo les presentaba. Este interés nace de la necesidad que se evidencia en la institución de potenciar el trabajo de geometría.	Tareas propuestas	Describir

En esta misma fase se encontró que un dato estaba enmarcado en la **Gestión**. Este dato se relaciona con las **Tareas propuestas**. Este dato reporta el interés del profesor James por diseñar una clase que permitiera el estudio de los cuadriláteros y el reconocimiento de sus propiedades partiendo de la definición [6]. Este dato **describe** qué aspectos considera el profesor al planear la clase. En este se hace evidente como el docente busca que las actividades potencien en los estudiantes las relaciones entre construcción y reconocimiento de propiedades, las cuales para él son importantes. Es un dato que expresa el papel que el profesor le asigna a la definición, al identificarla como el elemento que reporta las propiedades que se requieren para hacer una construcción.

4.2.1.3 MEDIOS

	Párrafo	Asunto específico	Caracterización
7	En la clase de geometría en la cual desarrollé el trabajo acerca de segmentos, rectas y ángulos [la que había implementado anteriormente], orienté al grupo de estudiantes en el manejo de los instrumentos de medición y construcción como la regla, el compás y el transportador pues muchos de ellos presentaban confusiones en el uso de estas herramientas	Uso de recursos	Describir
8	[Tuve la oportunidad de ingresar] a la sala de informática, por lo cual opté por iniciar la introducción del programa GeoGebra con los estudiantes de grado sexto.	Uso de recursos	Describir
9	Una vez realizado el trabajo con los instrumentos de medición y con el software opté por la implementación del programa dado que este permite integrar las funcionalidades de la regla, el transportador y el compás en un solo ambiente, sin tener los limitantes del papel o que los estudiantes no tengan a la mano los implementos necesarios para realizar el trabajo.	Uso de recursos	Inspirar
10	[E]n mi práctica veo importante vincular las tecnologías en el trabajo de clase siempre y cuando las condiciones lo permitan.	Uso de recursos	Inspirar

En la fase Pre-activa se identificaron cuatro datos asociados a los **Medios**. El primer y segundo están relacionados con el **Uso de los medios**. Este dato surge de

una relatoría en la cual se describió una clase implementada previamente por el profesor James en la institución donde labora. En este dato se reporta que el profesor James da indicaciones acerca de cómo utilizar un recurso cuando implementa actividades que requieren de su uso, aun cuando son instrumentos conocidos por ellos, como la regla, el compás y el transportador; esta acción se realiza porque el profesor evidencia dificultades de los estudiantes para manipularlos [7]. El segundo reporta que el profesor James aprovechó la disponibilidad de la sala de informática para realizar una introducción a los estudiantes, sobre el manejo de GeoGebra [8]. Estos datos *Describen* cuales son los instrumentos que el profesor suele utilizar en sus clases (regla, transportador y compás) y el programa que empezará a utilizar (GeoGebra). En ellos se puede reconocer la forma como el profesor orienta a los estudiantes en el manejo de los instrumentos cuando son conocidos y desconocidos para ellos. Cuando son conocidos, recuerda unas instrucciones acerca de cómo usarlos; cuando no lo son, realiza actividades introductorias que consisten en identificar las herramientas y funciones del programa. En ambos casos, el profesor realiza actividades que tienen como propósito verificar que el estudiante sepa manejar el recurso, para que luego pueda utilizarlo en la resolución de otras tareas propuestas. Estas acciones del profesor son su forma de garantizar que el recurso no se convierta en un obstáculo.

El tercero y cuarto están orientados a la **Valoración del recurso**. Estos datos reportan algunos criterios que tuvo el profesor James para elegir utilizar el programa GeoGebra, en la actividad que se desarrolló:

“Una vez realizado el trabajo con los instrumentos de medición y con el software opté por la implementación del programa dado que este permite integrar las funcionalidades de la regla, el transportador y el compás en un solo ambiente, sin tener los limitantes del papel o que los estudiantes no tengan a la mano los implementos necesarios para realizar el trabajo [9]”. “En mi práctica veo importante vincular las tecnologías [digitales] en el trabajo de clase siempre y cuando las condiciones [infraestructura] lo permitan” [10].

Estos datos son de **Inspiración** porque expresan las concepciones que tiene el docente en relación con los programas de geometría dinámica y su relación con otros instrumentos de trazo y medida. En este caso, se interpreta que el profesor considera que GeoGebra integra estos instrumentos, al asumir que las acciones que puede realizar un estudiante con compás, regla y transportador, también las puede realizarlas en el software. Adicionalmente, en el dato [10] el profesor explicita el papel preponderante que le da al uso de las tecnologías digitales, acción que sustenta, en muchas ocasiones, por qué las selecciona frente a otros tipos de recursos.

4.2.1.4 APRENDIZAJES

	Párrafo	Asunto específico	Caracterización
11	[Otro de los aspectos que consideré en la planeación y proyección de la clase es la forma en que esperaba realizar la valoración del producto realizado con los estudiantes...] [L]a representación del polígono de cuatro lados la planeé con el fin que los estudiantes reportaran nuevas formas de realizar la construcción, propiedades de la figura, herramientas empleadas, características del software, dificultades o inquietudes en el desarrollo de la actividad. El reporte oral de las propiedades involucradas en la construcción es el principal elemento para valorar el aprendizaje.	Valoración de los aprendizajes	Describir

En esta fase un dato estaba relacionado con los **Aprendizajes**. Este está orientado hacia **la Valoración de los aprendizajes**. Este dato reporta:

“[Otro de los aspectos que consideré en la planeación y proyección de la clase es la forma en que esperaba realizar la valoración del producto realizado con los estudiantes...] La representación del polígono de cuatro lados la planeé con el fin que los estudiantes reportaran nuevas formas de realizar la construcción, propiedades de la figura, herramientas empleadas, características del software, dificultades o inquietudes en el desarrollo de la actividad. El reporte oral de las propiedades involucradas en la construcción es el principal elemento para valorar el aprendizaje [11].”

En este dato se realiza una **Descripción** sobre la forma como se valoran los aprendizajes. Se evidencia que el profesor, al momento de planear sus actividades, tiene presentes las intervenciones de sus estudiantes como herramienta de valoración de aprendizajes. Con estas intervenciones el profesor hace interpretaciones del aprendizaje de sus estudiantes en relación con dos asuntos: las propiedades que descubren y la forma como hacen uso del programa para este fin. Se hace evidente como en las prácticas del profesor prevalece la comunicación oral como herramienta de valoración de los aprendizajes.

4.2.2 FASE ACTIVA

4.2.2.1 CONTENIDO MATEMÁTICO

	Párrafo	Asunto específico	Caracterización
12	Con el trabajo individual buscaba que los estudiantes representaran el centro de un polígono regular de cuatro lados, inicialmente los estudiantes buscaban realizar esta actividad replicando los pasos reportados en el pentágono regular, con la particularidad que en este caso al trazar las perpendiculares, ellos eligieron un vértice y un lado del polígono que no tuviera como extremo al vértice elegido. Al hacerlo, estas rectas contenían a los lados sin formarse una intersección en el centro del polígono	Actividad matemática prevista	Describir

13	[M]e llevó a cuestionarme sobre mi rol como docente en términos de las orientaciones dadas. ¿Los conceptos previos que tenían los estudiantes eran suficientes? ¿La herramienta seleccionada sí era la indicada para la realización de la actividad?	Explicación	Confrontar
----	--	-------------	------------

En esta fase dos datos estaban relacionados con el **Contenido matemático**. El primero está orientado a **la Actividad matemática prevista**. En este dato se reporta que los estudiantes intentaron utilizar un procedimiento que les había presentado el profesor, el cual permitía hallar el centro del polígono en un pentágono regular pero que no servía para hallar el centro de un polígono regular de cuatro lados [12]. El segundo está orientado a la **Explicación del contenido matemático** que hace el profesor. En este dato se reporta la preocupación del docente en el momento que observa la actividad que desarrollan los estudiantes:

“Me llevó a cuestionarme sobre mi rol como docente en términos de las orientaciones dadas. ¿Los conceptos previos que tenían los estudiantes eran suficientes? ¿La herramienta seleccionada sí era la indicada para la realización de la actividad? [13]”

En estos se hace una **Descripción** sobre la actividad matemática que se esperaba desarrollar en los estudiantes [12] y además un proceso de **Inspiración** por parte del profesor [13], ya que se evidencia una descripción de una situación imprevista en el desarrollo de actividad por parte de los estudiantes y se expresa su preocupación sobre cuáles fueron las posibles causas de las dificultades que presentaron los estudiantes. En este se evidencia como las explicaciones dadas por él en una clase anterior influyen en la forma como los estudiantes realizan la actividad, y le generan una preocupación, dado que simplemente buscaban replicar los pasos sin tener conciencia de las propiedades que había en juego. El profesor cuando observa que en la clase se presenta alguna dificultad llega a cuestionarse sobre las causas de esta, lo cual deja en evidencia que su mirada no está solo centrada en la actividad de los estudiantes sino en otros aspectos que también involucran lo que el profesor hace.

4.2.2.2 DISCURSO

	Párrafo	Asunto específico	Caracterización
14	[P]resenté a los estudiantes la temática, los objetivos de la clase y las pautas del desarrollo de esta.	Conducción de la clase	Describir
15	Mientras que ellos realizaban esta actividad, yo pasé por cada puesto para observar el trabajo de los estudiantes, realizando algunos interrogantes sobre los procesos que realizaban.	Preguntas	Describir
16	[P]regunté a los estudiantes ¿Por qué razón al trazar una recta perpendicular en un polígono regular de cuatro lados estas coinciden con los lados? Esta pregunta la realicé para que los estudiantes identificaran una de las propiedades de la figura, es decir, reportaran que los segmentos consecutivos formaban un ángulo recto.	Preguntas	Describir

17	Esta propiedad no fue reconocida por los estudiantes, por lo cual reformulé la pregunta. ¿Qué ángulo forman dos segmentos consecutivos de un polígono regular de cuatro lados? A este interrogante las repuestas de los estudiantes fueron un ángulo recto o que mide 90°	Conducción de la clase	Describir
----	---	------------------------	-----------

En esta fase, se registran cuatro datos relacionados con el **Discurso**. Estos están orientados con la **Conducción de la clase**. El primero reporta los aspectos que el profesor James aborda al inicio de una clase como la explicación de los objetivos, presentación de la temática y pautas para el desarrollo de la clase [14]. El segundo reporta cuáles son las acciones del profesor mientras los estudiantes desarrollan la actividad: “Mientras que ellos realizaban esta actividad, yo pasé por cada puesto para observar el trabajo de los estudiantes, realizando algunos interrogantes sobre los procesos que realizaban.” [15]

El tercero y cuarto reportan las preguntas que el profesor James realiza al grupo de estudiantes para que identifiquen las propiedades del polígono de cuatro lados:

“Pregunté a los estudiantes ¿Por qué razón al trazar una recta perpendicular en un polígono regular de cuatro lados estas coinciden con los lados? Esta pregunta la realicé para que los estudiantes identificaran una de las propiedades de la figura, es decir, reportaran que los segmentos consecutivos formaban un ángulo recto” [16]. “Esta propiedad de perpendicularidad no fue reconocida por los estudiantes, por lo cual reformulé la pregunta. ¿Qué ángulo forman dos segmentos consecutivos de un polígono regular de cuatro lados? A este interrogante las repuestas de los estudiantes fueron un ángulo recto o que mide 90°” [17].

En estos se hace una **Descripción** de cómo son las prácticas del profesor James. Se puede interpretar cómo el profesor evidencia que un procedimiento que había explicitado en una clase anterior genera un bloqueo en la actividad pues los estudiantes buscan replicarlo sin tener en cuenta las condiciones de perpendicularidad entre los segmentos. Por tanto, realiza un conjunto de preguntas logrando que ellos vean cuales son las propiedades que están haciendo que en ese momento no se pueda utilizar. Además, deja en evidencia las decisiones que él toma en medio del desarrollo de la actividad cuando los estudiantes no encuentran las relaciones entre los segmentos. En estos datos se puede interpretar como el docente percibía la relación entre segmentos y porque para los estudiantes, no era evidente la perpendicularidad entre los segmentos. Estos datos ponen en manifiesto la forma como el profesor relaciona las construcciones con características y propiedades de una figura.

4.2.2.3 MEDIOS

	Párrafo	Asunto específico	Caracterización
18	[M]e percaté que muchos de los estudiantes tenían dificultad para representar el centro de la figura, puesto que buscaban en los menús de herramientas aquellas que les sirvieran para representar dos rectas que se cortaran entre sí y que les permitieran ubicar el centro de la figura.	Uso de recursos	Describir

19	[E]videncié cómo algunos estudiantes que tenían dificultad con el manejo del software se apoyaban en sus compañeros y cómo la mayoría usaban las herramientas al azar,	Uso de recursos	Describir
----	--	-----------------	-----------

En esta fase dos datos se relacionaron con los **Medios**. Estos datos surgen de una relatoría. Están orientados hacia el **Uso de los recursos**. Ellos reportan, cómo el profesor James observa las dificultades que presentan los estudiantes al tratar de representar el centro de un polígono de cuatro lados:

“Me percaté que muchos de los estudiantes tenían dificultad para representar el centro de la figura, puesto que buscaban en los menús de herramientas aquellas que les sirvieran para representar dos rectas que se cortaran entre sí y que les permitieran ubicar el centro de la figura [18]”. “Evidencié cómo algunos estudiantes que tenían dificultad con el manejo del software se apoyaban en sus compañeros y cómo la mayoría usaban las herramientas al azar [19].”

Estos hacen una **Descripción** de cómo el docente percibe el uso que le dan los estudiantes al recurso. En estos se puede interpretar las acciones del docente en el momento que los estudiantes desarrollaban la actividad, dado que tuvo un papel de observador sin intervenir en lo que los estudiantes proponían. Además, el uso de las herramientas al azar parece indicar que los estudiantes no eran conscientes de las propiedades que garantizaba el uso de una herramienta específica del programa. Esto llevo al profesor a cuestionarse sobre las explicaciones dadas con anterioridad, porque al explicar el procedimiento que los estudiantes intentaron utilizar en esta clase, se centró en el uso del programa y se dio por hecho que lo relacionado con las propiedades se deducía de la definición.

Por otro lado, una preocupación previa que tenía el profesor durante la planeación era que ellos pudieran manipular la herramienta, pero no en que ellos comprendieran para que servía una herramienta, es decir, se centró más en la parte operativa (reconocimiento de funciones como etiquetado, cambio de color, entre otras) más que en la potencialidad.

4.2.2.4 GESTIÓN

	Párrafo	Asunto específico	Caracterización
20	[D]ar la definición de apotema no fue suficiente, principalmente porque los estudiantes no lograron construir el centro de la figura.	Interpretación de la gestión.	Confrontar
21	[A] observar que el tiempo de la clase se estaba agotando decidí realizar la socialización, pues uno de los intereses que tenía era recoger las apreciaciones de los estudiantes respecto al trabajo realizado.	Tiempo de ejecución	Describir

En esta fase se encuentran dos datos relacionados con la **Gestión**. Estos surgen de una relatoría. El primero está orientado con la **Interpretación de la gestión**. En este se reporta como el profesor James es consciente que en el desarrollo de la

actividad: “dar la definición de apotema no fue suficiente, principalmente porque los estudiantes no lograron construir el centro de la figura [20].” En este dato, el docente hace una **Confrontación** respecto a la causa de las dificultades presentadas en la clase. En este dato se puede interpretar cómo la relación entre definición y construcción que percibe el docente permeó de manera directa en los resultados de la actividad de los estudiantes, dado que el profesor pensaba que los elementos que estaban presentes en la definición dada eran suficientes para que el estudiante pudiera extraer las propiedades del objeto y de esta manera construirlo. En este dato se hace evidente las preocupaciones del docente frente a las orientaciones dadas en clase.

En el segundo dato está relacionado con el **Tiempo de ejecución**. En este dato se reporta cómo el profesor James, al observar que el tiempo de la clase se estaba agotando, decide realizar la socialización de la actividad porque para él es importante recoger las interpretaciones que los estudiantes hacen de la actividad desarrollada [21]. En este dato se hace una **Descripción** de cuáles son las decisiones que el profesor toma en clase. Se evidencia la importancia que le da a que los estudiantes comuniquen a los otros lo que hacen. También que para él es importante concluir la clase con las intervenciones de los estudiantes buscando que puedan comunicar sus ideas.

4.2.3 FASE POST-ACTIVA

4.2.3.1 CONTENIDO MATEMÁTICO

	Párrafo	Asunto específico	Caracterización
22	[L]a planeación que realicé no está favoreciendo que los estudiantes logren construcciones a partir de propiedades porque el ejercicio se limitó a dar una definición.	Tratamiento de los Contenidos.	Confrontar
23	A pesar de que tuve en cuenta los conocimientos previos que debían tener los estudiantes, estos no fueron suficientes para abordar la actividad.	Tratamiento de los Contenidos.	Confrontar
24	Para elegir los elementos que voy a definir, selecciono los elementos geométricos que me son útiles para deducir propiedades de objetos geométricos que se van a estudiar posteriormente	Tratamiento de los Contenidos.	Inspirar
25	[S]i voy a trabajar con el cuadrado, con anterioridad defino en clase rectas perpendiculares, rectas paralelas, ángulos rectos, segmentos, vértices.	Tratamiento de los Contenidos.	Inspirar
26	Considero que tener pleno conocimiento implicar tener claridad acerca de tres criterios: definición, representación y utilidad de este elemento.	Conocimiento profesional	Inspirar
27	[Al analizar la definición de centro del polígono,] me percaté que para representar este punto no se pueden usar cualquier tipo de segmentos con extremos en algún vértice del polígono, pues no mencioné que se deben cruzar.	Conocimiento profesional	Inspirar

28	[L]a asesora propone indagar sobre qué elementos me llevaron a establecer que esta no era una definición de centro del polígono, a lo que yo comento que al construirlo los segmentos no necesariamente se intersecan y si se intersecan no necesariamente lo hacen en el centro del polígono.	Conocimiento profesional	Inspirar
29	[L]a asesora me pregunta sobre cuál fue el problema que encontré en esta definición que construí, a lo cual respondo que los segmentos de la figura mencionados en la definición no pueden ser consecutivos	Conocimiento profesional	Inspirar
30	[D]estaco la importancia de poder rastrear como va cambiando el conocimiento que tengo sobre los objetos que se trabajan en la clase de geometría, pues las asesorías y el trabajo de la maestría han permeado en la visión que tengo sobre la forma en que oriento mis clases.	Conocimiento profesional	Inspirar
31	Una primera inquietud que surgió luego de la asesoría me llevó a cuestionarme acerca de los Contenidos que están planteados en la malla curricular del área de matemáticas referentes al trabajo con geometría y su concordancia con los procesos que se esperan que se desarrollen en los estudiantes, y pude detectar que hay algunas falencias que debo corregir puesto que realmente está más enfocada hacia desarrollo de aspectos aritméticos.	Documentos institucionales	Confrontar

En esta fase once datos estaban relacionados con el **Contenido Matemático**. Estos datos surgieron en la construcción de los documentos y asesorías de trabajo de grado. Cuatro datos están relacionados con el **Tratamiento de los contenidos**. En el primer dato se reportan cómo para el profesor James la planeación realizada no favoreció que los estudiantes realizaran las construcciones, dado que el ejercicio se limitó a dar una definición [22]. En el segundo dato, se reporta que a pesar de que el profesor tuvo en cuenta los conocimientos previos que debían tener los estudiantes, no fueron suficientes para abordar la actividad [23]. En estos datos se evidencia una **confrontación** donde el profesor experimenta una toma de conciencia sobre la forma en que dio el tratamiento a los contenidos. Se puede interpretar cómo el profesor es consciente que el hecho que dar una definición de un objeto no es garantía que los estudiantes logren extraer las propiedades suficientes y necesarias para realizar su construcción.

El tercer y cuarto dato, el profesor James hace explícita la forma como selecciona los elementos que va a definir en clase:

“Para elegir los elementos que voy a definir, selecciono los elementos geométricos que me son útiles para deducir propiedades de objetos geométricos que se van a estudiar posteriormente [24]”. “Si voy a trabajar con el cuadrado, con anterioridad defino en clase: rectas perpendiculares, rectas paralelas, ángulos rectos, segmentos, vértices [25].”

En estos datos se evidencia una **Inspiración** por la forma en que el profesor expresa los criterios que tiene en cuenta para la selección de los objetos que define en clase. En este dato se hace evidente cómo para el docente las definiciones son herramientas que le permiten deducir las propiedades. Ello facilita que sus estu-

diantes tengan conocimiento de los elementos que son útiles para abordar cualquier objeto geométrico. Por tanto, se pone en manifiesto que es común en las prácticas del docente hacer un trabajo con la finalidad de garantizar que el aprendizaje de los elementos geométricos necesarios para deducir propiedades de un objeto.

Del quinto al octavo dato están orientados hacia **el Conocimiento Profesional**. Estos datos surgen de una relatoría realizada luego de implementada la actividad, donde la asesora propuso al profesor proponer una definición para centro de polígono. En el dato quinto al séptimo se percata que la definición propuesta no lo es pues al realizar su representación en GeoGebra no se obtiene el objeto que se busca y, por ende, falta agregarle una condición [27, 28, 29]. En el octavo, se reporta que el profesor trató “de construir definiciones que un estudiante podría plantear, teniendo en cuenta que estas estuvieran relacionadas con una forma de construcción [32]”. En estos datos se realiza una **Inspiración** sobre cuál es el conocimiento profesional docente sobre el contenido que se va a enseñar: Polígonos Regulares. En estos datos se pone en manifiesto cómo el profesor toma conciencia de su saber frente a los objetos matemáticos abordados en la clase, al dar cuenta de los diversos elementos y propiedades que no pueden ser obviados en una definición debido a que son necesarias para una construcción.

En los datos nueve y diez, se hace explícita la concepción del profesor James de lo que implica tener pleno conocimiento sobre un objeto geométrico relacionándolo a tres criterios “*definición, representación y utilidad* [26].” Además, se pone en manifiesto cómo para él es importante rastrear el cambio en su conocimiento profesional dado que en el transcurso de la MDM han permeado su visión sobre la orientación que da a sus clases [30]. En estos datos se realiza una **Inspiración** sobre las concepciones del profesor acerca de cómo él valora el conocimiento matemático de él mismo. Además, se hace explícito nuevamente como para el docente es importante relacionar los procesos de *Definir y construir*, dado que para él son criterios que le permiten establecer qué nivel conocimiento tiene sobre una temática en particular.

El onceavo dato está orientado a los **documentos institucionales**. Este surge a raíz de una asesoría. En este se realiza una **confrontación** sobre los contenidos contemplados en las mallas curriculares. Se reporta una preocupación del profesor James respecto a la forma como están estructurados los contenidos relacionados con la geometría en el plan de estudios y la necesidad evidente de reestructurarlos dado que están enfocados hacia el trabajo aritmético [31]. En este dato se evidencia la importancia que tiene para el profesor orientar el trabajo de geometría con los estudiantes, además se observa cómo se ha transformado su mirada respecto a la forma de abordar la geometría.

4.2.3.2 GESTIÓN

	Párrafo	Asunto específico	Caracterización
33	La reflexión de la clase aplicada me ayudo a establecer que en la enseñanza de la geometría no basta con solo dar una definición de un objeto geométrico, sino que hay una relación de dependencia entre las temáticas a tratar y que por lo tanto, como docente debo garantizar que el estudiante tenga los elementos necesarios para asumir cualquier temática	Interpretación del contenido	Confrontar

En esta fase un dato se relaciona con la **Gestión**. El primero de ellos orientado a la **interpretación del contenido**. En este dato se reporta el resultado del análisis que el profesor James realiza de la clase implementada:

“la reflexión de la clase aplicada me ayudó a establecer que en la enseñanza de la geometría no basta con solo dar una definición de un objeto geométrico, sino que hay una relación de dependencia entre las temáticas a tratar y que, por lo tanto, como docente debo garantizar que el estudiante tenga los elementos necesarios para asumir cualquier temática [33].”

En este se realiza una **Confrontación** sobre si el tratamiento dado a los contenidos en la clase fue el apropiado. Se hace explícito cómo el docente reconoce que la forma como orientó el tratamiento de los contenidos no fue la adecuada porque no basta solo con dar una definición. Ello conduce al profesor a reconocer que debe tener en cuenta que entre los diversos conceptos hay relaciones de dependencia. Además, se hace explícito el hecho de garantizar que en las orientaciones dadas el estudiante tenga los elementos que le permitan afrontar la actividad matemática propuesta.

4.2.3.3 DISCURSO

	Párrafo	Asunto específico	Caracterización
35	Consideré que dar la definición era suficiente para construir la figura. Pero los estudiantes no utilizaron las propiedades reportadas en la definición (de la definición a la construcción), porque se seguían guiando por la imagen conceptual asociada a un punto en el centro del polígono.	Tratamiento de los Contenidos.	Confrontar
36	Esta nueva forma de orientar la clase de geometría la hice pensando no en la definición como medio que me permitiera que los estudiantes logren dominar los diferentes elementos geométricos, sino que, por el contrario, ellos puedan llegar a construir esta definición reconociendo en cada una de las actividades las características y propiedades de los objetos que se trabajen.	Conducción de la clase	Transformar
37	[C]omenté a la asesora que, me percaté que en esa clase me faltaron orientaciones para que los estudiantes pudieran realizar la representación del centro del polígono.	Conducción de la clase	Inspirar

38	[I]ndiqué que en esa sesión de clase asumí que, con las orientaciones dadas para el polígono regular de cinco lados, los estudiantes tendrían elementos necesarios y construir el centro en un polígono de cuatro lados.	Conducción de la clase	Inspirar
39	[F]ui consciente que en esa clase no di las orientaciones suficientes para que los estudiantes representaran este objeto, el cual suponía en ese momento que era sencillo de representar	Conducción de la clase	Inspirar
40	[N]o mencioné en la clase que ese centro debía cumplir unas propiedades para poder ser representado la de figura propuesta.	Conducción de la clase	Inspirar

En esta fase se encontraron seis datos relacionados con el **Discurso**. Estos datos surgieron en las asesorías de trabajo de grado realizadas posteriormente a la implementación de la primera clase. Estos estaban orientados a la **conducción de la clase**. El primer dato reporta de manera contundente algunas preocupaciones del profesor James una vez implementada la clase: dar la definición no fue suficiente porque los estudiantes no usaron las propiedades allí reportadas [35]. Del segundo al quinto dato, él cae en la cuenta y es consciente que las orientaciones dadas no fueron las suficientes para que los estudiantes lograran representar la figura dado que faltó incluir algunas propiedades del centro del polígono en la definición [37, 38, 39, 40]. Se puede interpretar cómo el profesor detecta que, en la orquestación de su clase, vista en términos de las orientaciones dadas, su idea de definición como herramienta para detectar las propiedades de un objeto geométrico no favoreció la actividad matemática que él tenía presupuestada en ese momento. Dado que sus indicaciones giraban en torno a la definición, los estudiantes no contaban con los elementos necesarios y suficientes para lograr el objetivo de la actividad que era la construcción del centro del polígono. Esto pudo deberse a que esta partía de la imagen conceptual asociada y no de las propiedades que se le pueden atribuir a este punto.

Por otra parte, en el sexto dato se reporta cómo, tras los sucesos de la clase implementada, el profesor James asume una nueva orientación en sus clases de geometría.

Esta nueva forma de orientar la clase de geometría la hice pensando no en la definición de una figura como medio que me permitiera que los estudiantes logren hacer su representación, sino que, por el contrario, ellos puedan llegar a construir esta definición reconociendo en cada una de las actividades las características y propiedades de los objetos que se trabajen [36].

En este se realiza una **Transformación** de las prácticas de clase y de la mirada respecto al proceso matemático. Se explicita nuevamente la relación entre dos procesos: la definición y la representación de una figura. Se interpreta una decisión del profesor de cambiar algunas prácticas que él consideraba que ocurrían en sus clases y que no favorecían el proceso y la actividad matemática que se estaba desarrollando

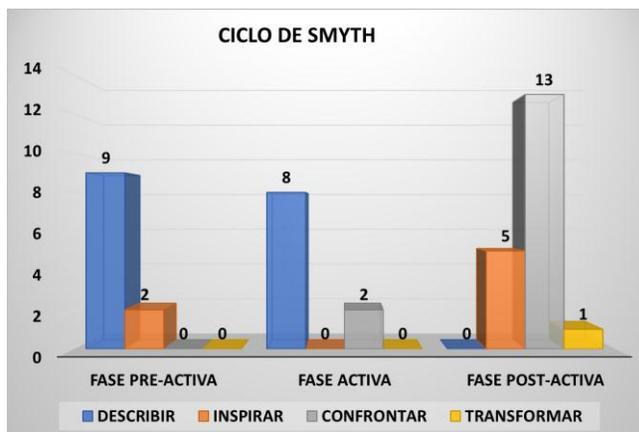
4.2.3.4 APRENDIZAJES

	Párrafo	Asunto específico	Caracterización
41	[Al construir una definición con los estudiantes de un objeto geométrico] para mi es importante que ellos primero visualicen la representación de este y comenten que características pueden observar, para construir y orientar la definición a partir de estas propiedades.	Formas de valorar los aprendizajes	Inspirar

En esta fase un dato estaba relacionado con los **Aprendizajes**. Este está orientado hacia la **valoración de los aprendizajes**. En este se reporta que el profesor James, al construir una definición, le da bastante importancia a que los estudiantes involucren el proceso de visualización en la representación de un objeto geométrico para que puedan comunicar las características presentes y de esa manera construir la definición. En este dato se evidencia una **Fundamentación** sobre las creencias de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Se muestra cómo para el profesor una forma de valorar los aprendizajes es a través de las intervenciones de sus estudiantes.

4.2.4 CONCLUSIONES DERIVADAS DEL PRIMER CICLO JAMES ALEXANDER

Respecto al *ciclo de Smyth*, de los 11 datos obtenidos en la **Fase Pre-activa**, 9 de ellos están relacionados con **Describir** que corresponden al 82% y 2 están relacionados con la **Inspiración** que corresponden al 18%. En la **Fase Activa** de los 10 datos obtenidos, 8 de ellos están relacionados con **Describir** que corresponden al 80% y 2 están relacionados con la **Inspiración** que corresponden al 20%. Ello indica que para el Profesor James la **fase Activa** está orientada principalmente a **Describir** las prácticas de enseñanza, sentimientos, observaciones, preocupaciones, que surgieron en los instantes que se orquestó la primera clase diseñada. En la **Fase Post-activa** de los 19 datos obtenidos, 5 de ellos están relacionados con el proceso reflexivo de **Inspirar** que corresponden al 26.3%, 13 están relacionados con la **Confrontación** que corresponden al 68,4% y 1 esta relacionados con la **Transformación** que corresponden al 5,3%. Ello indica que para el Profesor James la **Fase Post-activa** está orientada principalmente a **Confrontar**, es decir, el cuestionamiento del docente hacia sus prácticas luego de la implementación de la clase, continuando con la conexión con otros profesores (compañero de trabajo o asesora). Lo anterior se expone en la *gráfica 7*.



Gráfica 7 Ciclo de Smyth según James Alexander

Después de realizado el análisis de los datos se encontraron algunos asuntos sobre los cuales se centró la reflexión y que estuvieron presentes de forma constante en cada una de las fases y ciclos. A continuación, se muestra cada uno de estos asuntos y la forma como se relacionan.

4.2.4.1 PRIMER ASUNTO: “LA RELACIÓN EN LA DEFINICIÓN DE UNA FIGURA Y SU REPRESENTACIÓN”.

La Tabla 9 reporta algunas interpretaciones que surgieron a partir de datos que reportan ideas del profesor James sobre “*la relación en la definición de una figura y su representación*”.

		FASES DE REFLEXIÓN		
		PRE-ACTIVA	ACTIVA	POST-ACTIVA
CICLO DE SMYTH	DESCRIBIR	Una definición da las propiedades que son suficientes para realizar una construcción, y que, por ende, si el estudiante tiene la definición de un objeto, puede construirlo.	El profesor evidencia que un procedimiento que había explicitado en una clase anterior genera un bloqueo en la actividad pues los estudiantes buscan replicarlo sin que tengan las condiciones. Por tanto, realiza un conjunto de preguntas logrando que ellos vean cuáles son las propiedades que están haciendo que en ese momento no se pueda utilizar.	

	INSPIRAR		Las explicaciones dadas por el docente en una clase anterior influyen en la forma como los estudiantes realizan la actividad, y generan una preocupación en el profesor, dado que simplemente buscaban replicar los pasos sin tener conciencia de las propiedades que había en juego.	Para el docente es importante relacionar los procesos de <i>Definir</i> y <i>construir</i> , dado que para él son criterios que le permiten establecer qué nivel conocimiento tiene sobre una temática en particular.
	CONFRONTAR		La relación entre definición y construcción que percibe el docente permeo de manera directa en los resultados de la actividad desarrollada por el estudiante, dado que el profesor pensaba que los elementos que estaban presentes en la definición dada eran suficientes para que el estudiante pudiera extraer las propiedades del objeto y de esta manera construirlo.	El hecho que dar una definición de un objeto no es garantía que los estudiantes logren extraer las propiedades suficientes y necesarias para realizar su construcción.
	TRANSFORMAR			El profesor decide cambiar algunas prácticas que él consideraba que ocurrían en sus clases y que no favorecían el proceso y la actividad matemática que se estaba desarrollando.

Tabla 9 Ciclo 1: Relación entre Definición y Construcción profesor James

Respecto a “la relación en la definición de una figura y su representación”, es posible evidenciar cómo en la fase Pre-activa la reflexión se centró en realizar un proceso **Descriptivo** de las características que el profesor le atribuye a una definición. Él tenía la idea que al dar una definición de una figura geométrica se garantizaba tener los elementos necesarios para efectuar su representación, desde el punto de vista matemático efectivamente las definiciones dan unas propiedades que son suficientes para representar un objeto, lo cual no significa que dar la definición al estudiante le permita extraer las propiedades para realizar su representación. En la Fase Activa, se **Describe** cómo esta idea trajo a su vez algunos inconvenientes en el desarrollo de la actividad porque al tratar de replicar el procedimiento explicitado por el docente, los estudiantes recurren a buscar al azar herramientas en GeoGebra de forma que alguna de ellas les permitiera obtener la representación del objeto. Además, en esta fase, se evidencia un proceso de inspiración donde se explicitan las preocupaciones del docente derivadas del desarrollo de la actividad, dado que los estudiantes no son conscientes de las propiedades que involucran la representación del centro del polígono. Adicionalmente en esta fase se hace evidente una confrontación donde el docente tiene en cuenta que su

forma de percibir la definición del centro del polígono no brindaba a los estudiantes las propiedades suficientes para realizar su construcción. Posteriormente en la Fase Post-activa se inicia con un proceso se **Inspiración** donde se expresa cómo para el docente la forma en que relaciona los procesos de definir y construir son indicadores del nivel de conocimiento que él tiene sobre un objeto matemático. Esta relación se **Confronta** al igual que en la fase activa, pues en esta fase el docente es consciente que dar la definición no garantiza que los estudiantes realicen una construcción. Ello permite finalmente que la relación entre definición y construcción se **Transforme**, por tanto, el docente asume una nueva postura donde la definición no es una herramienta para garantizar una construcción, sino que la construcción partiendo de las propiedades de un objeto permite al estudiante acercarse al proceso de definir ese objeto.

4.2.4.2 SEGUNDO ASUNTO: “TRATAMIENTO DE LOS CONCEPTOS PREVIOS”

La Tabla 10 reporta algunas interpretaciones que surgieron a partir de datos que reportan ideas del profesor James sobre “*el tratamiento de los conceptos previos*”.

		FASES DE REFLEXIÓN		
		PRE-ACTIVA	ACTIVA	POST-ACTIVA
CILCO DE SMYTH	DESCRIBIR	Los conceptos previos ayudan a que los estudiantes logren identificar las propiedades y realizar construcciones de una figura.	Para el profesor James es importante que al inicio de sus clases los estudiantes tengan conocimiento de los aspectos generales que se van a tratar.	
	INSPIRRAR			Para el docente es importante garantizar que sus estudiantes tengan conocimiento de los elementos que son útiles para abordar cualquier objeto geométrico. Se pone en manifiesto que es común en las prácticas del docente hacer un trabajo con la finalidad de garantizar el aprendizaje de los elementos geométricos necesarios para deducir propiedades de un objeto.

	CONFRONTAR			El docente reconoce que la forma como oriento el tratamiento de los contenidos no fue la adecuada porque no basta solo con dar una definición. Ello conduce al profesor a reconocer que debe tener en cuenta que entre los diversos conceptos hay relaciones de dependencia, además, se hace explícito que el hecho que debe garantizar que en las orientaciones dadas el estudiante tenga los elementos que le permitan afrontar la actividad matemática propuesta.
	TRANSFORMAR			El profesor James es consciente de la necesidad de implementar actividades que permitan en sus estudiantes el desarrollo de habilidades que favorezcan los procesos de construcción de objetos partiendo de sus propiedades.

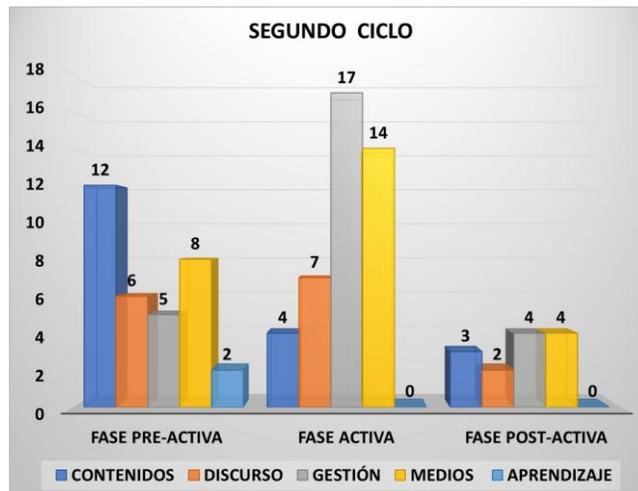
Tabla 10 Ciclo1: Tratamiento de los conceptos previos profesor James

Este asunto emerge en la fase Pre-activa donde el profesor James **Describe** la forma como él determina cuáles son los conceptos previos que deben poner en juego él y sus estudiantes para desarrollar la actividad matemática prevista. Por ende, se percibe que para el docente los conceptos previos ayudan a que los estudiantes logren identificar las propiedades y realizar construcciones de una figura. En la fase activa, aunque este asunto no tuvo una gran relevancia, se puede evidenciar en la descripción como él al iniciar la implementación de la actividad considera importante que los estudiantes tengan conocimiento de los aspectos que se van a abordar en la clase. En la fase Post-activa este asunto tuvo un papel importante en el análisis de la práctica y las acciones realizadas por el profesor durante la clase. Por consiguiente, se manifiesta en un proceso de **Inspiración** el hecho que para el docente es común en sus prácticas dar prioridad a que los estudiantes tengan conocimiento de los elementos que le son útiles para abordar una temática en particular. Por otro lado, se hace explícita una **Confrontación** de este asunto, por la forma como él realizó el tratamiento de los contenidos, dado a que se limitó con dar una definición y aunque inicialmente tuvo en cuenta los conceptos previos, estos no fueron suficientes porque los estudiantes no lograron el objetivo de la actividad. Por ende, esta idea de **“tratamiento de conceptos previos”** se **Transforma** en la medida que el profesor identifica la necesidad de implementar actividades que permitan a los estudiantes desarrollar habilidades que favorezcan el proceso de construcción de un objeto partiendo de sus propiedades y no de una definición.

5 SEGUNDO CICLO DE REFLEXIÓN

Una vez terminada la implementación de las actividades diseñadas en el primer ciclo se encuentran varios asuntos en común entre los profesores Juan y James que permitieron que se elaborara un trabajo mancomunado. Estos asuntos giraron alrededor del proceso y objeto matemático que se quería abordar, dado que en su primera actividad el profesor James quería propiciar en sus estudiantes la construcción de polígonos partiendo de la definición que él les daba. Mientras que el profesor Juan buscaba que sus estudiantes, partiendo de construcciones, llegaran a definir rectángulo. Además, otro de los aspectos comunes que surgieron en estas actividades, está orientado a las problemáticas presentadas en la implementación de las actividades de cada uno: en primera instancia, el hecho que el profesor Juan relacionaba dibujos con construcciones y que el profesor James tenía la idea que dar la definición a sus estudiantes les garantizaba el poder realizar construcciones de un polígono fueron situaciones que generaron bloqueos y dudas en la implementación de la clase. Estos asuntos en común les permitieron desarrollar un segundo Ciclo de reflexión en conjunto.

En este ciclo los datos más relevantes de cada fase fueron los siguientes: Pre-activa, surgieron asuntos relacionados con el **Contenido matemático** y los **Medios**, activa se centró en mayor medida por atender lo relacionado con la **Gestión** y los **Medios**, finalmente en la Post-activa no hubo un asunto que haya predominado. Esto pone en evidencia que este ciclo se centró en atender lo relacionado con el conocimiento del profesor, el tratamiento de los contenidos, el uso de los recursos y el papel de estos en el desarrollo de la actividad, las formas como el profesor orientó las tareas y la actividad matemática que se esperaba desarrollar. Lo anterior se ilustra en la Gráfica 8.



Gráfica 8 Datos Ciclo 2

5.1 FASE PRE-ACTIVA

5.1.1 CONTENIDOS MATEMÁTICOS

	Párrafo	Asunto específico	Caracterización
1	Los cuadriláteros pueden estar relacionados con algunos ámbitos en los cuales el estudiante debe realizar alguna representación de su entorno o alguna construcción de objetos que tengan implícitas propiedades de esta figura.	Conocimiento profesional	Inspirar
2	La importancia de que el estudiante aprenda este campo conceptual radica en que le permite tener en cuenta todos los elementos relacionados a este objeto matemático, la forma de construir y extraer propiedades. Además, que tenga los elementos necesarios y suficientes para poder realizar este ejercicio.	Conocimiento profesional	Inspirar
3	Una definición se construye con los términos que se plantean y el objeto matemático presentado en la estructura conceptual. Además, con las propiedades que se expresan de este objeto matemático.	Conocimiento profesional	Inspirar
4	Reportamos que es más sencillo establecer el campo conceptual dado que este relaciona nuestro conocimiento del objeto matemático, mientras que en el campo procedimental además de nuestro conocimiento debe tener en cuenta también los procesos y estrategias que son empleados por el estudiante.	Conocimiento profesional	inspirar
5	Una vez terminada la documentación sobre los paralelogramos inicia la etapa de diseño de las actividades, en esta surgen varios interrogantes: ¿Qué tipo de actividades son pertinentes para que los estudiantes puedan desarrollar el proceso de definir con cuadriláteros?	Planeación de la organización	inspirar
6	Comentamos a la asesora que uno de los elementos que tuvimos en cuenta en el diseño de la secuencia fue la jerarquía de los conceptos, entendida como el orden en que estos se iban a trabajar y las propiedades que consideramos cumplían estos objetos. Dado que este orden se deriva de las decisiones que como docentes debemos tomar en el desarrollo de nuestras actividades	Planeación de la organización	inspirar
7	[A]l momento de proponer las actividades que se van a desarrollar nos cuestiona la forma en que deben estar estructuradas las mismas, dado a que deben responder a dos enfoques, en primera instancia los previstos en los documentos institucionales y del ministerio de educación enfocados y por otra parte al del trabajo de grado orientado al proceso de definir cuadriláteros	Documentos curriculares	Inspirar

8	La primera propuesta de secuencia diseñada está orientada para trabajar las propiedades expuestas en el mapa conceptual, producto del análisis de nuestro conocimiento de los cuadriláteros. Por esta razón, vemos viable el diseño de una secuencia que incluya varias actividades encaminadas a que el estudiante reconozca las propiedades de los paralelogramos y por tanto pueda construir su definición de estos objetos geométricos.	Procesos matemáticos	Describir
9	Reportamos a la asesora que con estas actividades se busca que el estudiante realice un proceso de definir para lo cual se pretende observar las propiedades comunes que tienen las figuras que las hacen pertenecer grupo de paralelogramos.	Procesos matemáticos	Describir
10	[E]n reuniones conjuntas, diseñamos una nueva actividad de exploración que busca desarrollar los procesos, conceptos y propiedades que se pretendían trabajar en las actividades iniciales. En esta actividad se construyeron dos tareas que permiten al estudiante tener un acercamiento al manejo del software de geometría dinámica y además explorar algunas propiedades de los triángulos. Estas fueron seleccionadas por la relación que guardan con el objeto finalmente seleccionado, es decir, el cuadrado.	Procesos matemáticos	Describir
11	La actividad que presentamos tiene como propósito de enseñanza explorar propiedades relacionadas con la perpendicularidad de una recta a un segmento y la congruencia de ángulos y lados de un triángulo y, como objetivo de aprendizaje, determinar cuáles son las condiciones que debe cumplir una construcción para garantizar las propiedades establecidas.	Procesos matemáticos	Describir
12	Esta nueva actividad surge del intercambio de ideas entre los profesores Juan y James. En este vemos la necesidad de que las dos tareas propuestas sobre el cuadrado que conforman la actividad pudieran realizarse en una sola sesión	procesos matemáticos	Describir

En esta fase se encontraron que los datos [1-12] estaban orientados a los **Contenidos matemáticos**. Los datos [1,2,3,4] corresponden a relaciones que reportan los autores entre algunas ideas asociadas a su **Conocimiento Profesional** y algunas ideas expuestas por Gómez (2012) respecto al campo conceptual y procedimental relacionado con el objeto matemático que se va a trabajar.

“Los cuadriláteros pueden estar relacionados con algunos ámbitos en los cuales el estudiante debe realizar alguna representación de su entorno o alguna construcción de objetos que tengan implícitas propiedades de esta figura [1]”. “La importancia de que el estudiante aprenda este campo conceptual radica en que le permite tener en cuenta todos los elementos relacionados a este objeto matemático, la forma de construir y extraer propiedades. Además, que tenga los elementos necesarios y suficientes para poder realizar este ejercicio [2]”. “Una definición está relacionada con los términos que se plantean y el objeto matemático presentado en la estructura conceptual. Además, con las propiedades que se expresan de este objeto matemático [3]”.

En estos datos se realiza un proceso de **Inspiración** porque a partir de la lectura del documento los profesores manifiestan algunas aplicaciones que ellos le atribuyen al objeto en relación con: representación del entorno, uso para la deducción de otras propiedades, representación de otros objetos. La necesidad que puede llegar a tener un estudiante para efectuar estas aplicaciones es lo que determina que el campo conceptual alrededor de los cuadriláteros deba ser enseñado. Además, se evidencia una interpretación de lo que es una definición para los profesores, intentando involucrar las ideas expuestas por Gómez (2012). Específicamente, ellos consideran que una definición se construye a partir de los términos y hechos geométricos identificados para un concepto matemático. En conclusión, los datos permiten entrever las características que estos profesores le atribuyen a los procesos de definir y construir que esperan desarrollar en clase. Se atribuye que estas características están determinadas por la experiencia del profesor con las matemáticas y con su enseñanza.

El dato [4] reporta las creencias que los profesores tienen respecto a la construcción del campo conceptual y procedimental:

“Reportamos que es más sencillo establecer el campo conceptual dado que este relaciona nuestro conocimiento del objeto matemático. Mientras que, en el campo procedimental, además de nuestro conocimiento se debe tener en cuenta también los procesos y estrategias que son empleados por el estudiante [4]”.

Se realiza una **Inspiración** porque se mencionan las razones por las cuales, para los profesores es más fácil establecer el campo conceptual de un objeto. Se puede interpretar cómo los profesores realizan una valoración de lo que plantea el autor respecto al conocimiento que ellos tienen. Estos datos mencionan cuáles son las creencias que los profesores tienen respecto a la construcción de los campos conceptual y procedimental. El conceptual lo relacionan con su saber profesional; se les facilita puesto que para ellos solo involucra elementos que provienen de su formación académica o experiencia en la enseñanza. Para el caso del procedimental, los profesores consideran que no solo basta con el conocimiento del objeto matemático y las estrategias o procedimientos que ellos habitualmente usan, sino que deben tener en cuenta elementos que dependen de terceros. Es decir, los procesos y estrategias que podría poner en juego el estudiante para enfrentarse al objeto matemático.

El dato [5] está orientado al **Tratamiento de los contenidos**. En este se reporta:

“Comentamos a la asesora que uno de los elementos que tuvimos en cuenta en el diseño de la secuencia fue la jerarquía de los conceptos, entendida como el orden en que estos se iban a trabajar y las propiedades que consideramos cumplían estos objetos. Dado que este orden se deriva de las decisiones que como docentes debemos tomar en el desarrollo de nuestras actividades [5]”

Se realiza una **inspiración** pues manifiesta las ideas que fundamentan la forma como los profesores determinan el orden de los conceptos que se encuentran involucrados en la secuencia de tareas propuesta. Se interpreta cómo ellos tienen

una idea de las matemáticas, donde los conceptos se construyen a partir de otros y, por ende, cuando se realiza una secuencia de actividades se debe garantizar que, si una de ellas está orientada a trabajar un objeto en particular, con anterioridad se debe realizar una actividad en relación con dicho objeto.

Los datos [6,7] están enmarcados en **Documentos curriculares**. En este se reporta:

"Una vez terminada la documentación sobre los paralelogramos inicia la etapa de diseño de las actividades. En esta surgen varios interrogantes: ¿Qué tipo de actividades son pertinentes para que los estudiantes puedan desarrollar el proceso de definir con cuadriláteros? [6]". "Al momento de proponer las actividades que se van a desarrollar nos cuestiona la forma en que deben estar estructuradas las mismas, dado a que deben responder a dos enfoques. En primera instancia, los previstos en los documentos institucionales y del Ministerio de Educación y, por otra parte, al del trabajo de grado orientado al proceso de definir cuadriláteros [7]"

Se realiza un proceso de **Inspiración** donde se manifiestan las preocupaciones de los profesores respecto al trabajo que se está realizando. Se interpreta cómo en los profesores existe una preocupación sobre la pertinencia de las tareas que se diseñarán. Además, una tensión entre el proceso que se pretende desarrollar con las actividades enmarcadas en este trabajo de grado (definir) y lo que considera que su institución les solicita. Se interpreta que ellos buscan encontrar una relación entre el proceso de definir y lo que está plasmado en los documentos curriculares, de tal forma que la secuencia que diseñen pueda cubrir las necesidades que demanda la institución donde será implementada.

Los datos [8,9,] están orientados a los **Procesos matemáticos**. Reportan las características de la primera propuesta de tareas para promover el proceso de definir paralelogramos. En estos se evidencia que la primera propuesta está orientada a que los estudiantes reconozcan las propiedades y conceptos que los profesores identificaron en el análisis de contenido sobre los cuadriláteros y que de esta forma tenga elementos suficientes para construir su definición [8,9]. En estos se realiza una **Descripción** sobre las características de la actividad matemática que se espera de los estudiantes. Se puede interpretar como para los profesores en el momento de proponer la actividad es importante que el estudiante logre reconocer e identificar las propiedades del objeto geométrico a trabajar, pues esto le garantiza que pueda tener los elementos suficientes para realizar su representación y un acercamiento al proceso de definir. Esta ha sido una descripción recurrente desde el primer ciclo de reflexión de ambos profesores.

Los datos [10,11,12] están relacionados con **Conceptos previos**. Reportan el propósito de la primera actividad de la secuencia que se implementó:

"En reuniones conjuntas, diseñamos la nueva propuesta de actividad de exploración que busca desarrollar los procesos, conceptos y propiedades del objeto cuadrado que se pretendían trabajar en las actividades iniciales. En esta actividad se propusieron dos tareas [construir un triángulo isósceles y construir un triángulo rectángulo isósceles] que permiten al estudiante tener un acercamiento al manejo del software de geometría dinámica y además explorar algunas propiedades de los triángulos. Estas fueron seleccionadas por la relación que

guardan con el objeto finalmente seleccionado, es decir, el cuadrado [10]”. “La actividad que presentamos tiene como propósito de enseñanza explorar propiedades relacionadas con la perpendicularidad de una recta a un segmento y la congruencia de ángulos y lados de un triángulo y, como objetivo de aprendizaje, determinar cuáles son las condiciones que debe cumplir una construcción para garantizar las propiedades establecidas [11]”. “Esta nueva actividad surge del intercambio de ideas entre los profesores Juan y James [12]”

Se hace una **Descripción** de los parámetros que se tuvieron en cuenta para el diseño de una actividad de exploración, la cual es entendida como una tarea que le permite reconocer elementos del programa e identificar propiedades que se utilizaran en las actividades posteriores de la secuencia. El profesor busca garantizar que el estudiante tenga los conocimientos previos, respecto a propiedades y manejo del programa, que posteriormente le permitan realizar un proceso de definir y representar una figura en específico.

5.1.2 GESTIÓN

	Párrafo	Asunto específico	Caracterización
13	Nuestra secuencia no cumple con los requerimientos, porque de alguna manera es una amplia gama de actividades que buscan una secuencia de desarrollar conceptos previos que se consideraban pertinentes al momento de desarrollar el proceso de definir pero que en realidad no están encadenados.	Planeación de la organización	Confrontar
14	[A] observar la secuencia propuesta y dadas las recomendaciones hechas en la asesoría, comprendimos que esta secuencia no se trata de la cantidad de actividades, sino que el trasfondo de estas está en nuestra Gestión, que es lo que finalmente se debe analizar. Es decir, poder determinar cómo orquestamos nuestra clase, bajo qué criterios escogemos el recurso que se va a utilizar, cómo las condiciones de la población permean las actividades, cómo anticipamos las posibles repuestas de los estudiantes para planear la forma en que se va a socializar la actividad realizada, entre otros.	Planeación de la organización	Transformar
15	Debemos replantear la actividad de forma que sea más evidente la secuencialidad entre las actividades.	Planeación de la organización	Transformar
16	Destacamos cuatro aspectos relacionados con el diseño de la actividad los cuales estaban orientados el contenido matemático, valoración de los recursos, rol y gestión del docente y valoración de los aprendizajes.	Planeación de la organización	Describir

	<p>En una primera propuesta realizada por el profesor Juan Carlos, la actividad estaba orientada a que en una sola construcción los estudiantes trabajarán el triángulo rectángulo e isósceles de manera simultánea. Luego en diálogo sostenido con el profesor James, comenta que considera importante que se trabaje de forma independiente la construcción del triángulo isósceles y una vez se haya logrado este objetivo, pedir a los estudiantes que ubiquen el punto de tal manera que ese triángulo siga siendo isósceles pero también que tenga un ángulo recto.</p>	<p>Actividad matemática prevista</p>	<p>Confrontar</p>
--	---	--------------------------------------	-------------------

En esta fase se encontraron los datos [13-17] que están relacionados con la **Gestión**. Los datos [13,14,15,16] estaban orientados con la planeación de la organización. Estos reportan:

“Nuestra secuencia no cumple con los requerimientos, porque de alguna manera es una amplia gama de actividades que buscan una secuencia de desarrollar conceptos previos que se consideraban pertinentes al momento de desarrollar el proceso de definir pero que en realidad no están encadenados [13]”. “Al observar la secuencia propuesta y dadas las recomendaciones hechas en la asesoría, comprendimos que esta secuencia no se trata de la cantidad de actividades, sino que el trasfondo de estas está en nuestra Gestión, que es lo que finalmente se debe analizar. Es decir, poder determinar cómo orquestamos nuestra clase, bajo qué criterios escogemos el recurso que se va a utilizar, cómo las condiciones de la población permean las actividades, cómo anticipamos las posibles repuestas de los estudiantes para planear la forma en que se va a socializar la actividad realizada, entre otros [14]”. “debemos replantear la actividad de forma que sea más evidente la secuencialidad entre las actividades [15]”. “Destacamos cuatro aspectos relacionados con el diseño de la actividad los cuales estaban orientados el contenido matemático, valoración de los recursos, rol y gestión del docente y valoración de los aprendizajes [16]”.

Se realiza un proceso de **confrontación** donde los profesores caen en la cuenta de que deben rediseñar la secuencia de actividades dado que no hay una secuencialidad, esto los lleva a realizar una transformación de la actividad donde vinculan nuevos elementos que no habían sido tenidos en cuenta en el diseño de la primera actividad. Estos tienen una estrecha relación con los asuntos reportados en los datos [9,10] de contenido donde se presentan los propósitos de la primera actividad implementada. Se puede interpretar cómo la forma en que estaban interpretando el proceso de análisis de su conocimiento prima en el desarrollo de la primera secuencia de actividades, dado que buscaban proponer varias tareas que promovieran aparentemente el proceso de definir paralelogramos sin tener en cuenta que esta tuviera una secuencialidad. Por otra parte, se evidencia cómo el hecho de tratar de trabajar varios objetos como los contenidos en los paralelogramos los alejó un poco del propósito de la secuencia, no obstante, vale la pena resaltar el papel que jugó la reflexión en el diseño de las actividades, dado que les ayudó a tomar conciencia de la necesidad de establecer un solo objeto matemático, en este caso particular el cuadrado y de replantear la secuencia propuesta de modo que no fuera una variedad de actividades sino que las que propuestas cumplieran su objetivo, potenciar la representación y construcción de la definición del cuadrado.

El dato [17] está orientado a la **previsión de la actividad matemática**. En este se explicita una interacción entre los profesores que busca definir forma como se llevaría a cabo la actividad matemática por parte de los estudiantes.

“En una primera propuesta realizada por el profesor Juan Carlos, la actividad estaba orientada a que en una sola construcción los estudiantes trabajarán el triángulo rectángulo e isósceles de manera simultánea. luego en diálogo sostenido con el profesor James, comenta que considera importante que se trabaje de forma independiente la construcción del triángulo isósceles y una vez se haya logrado este objetivo, pedir a los estudiantes que ubiquen el punto de tal manera que ese triángulo siga siendo isósceles pero también que tenga un ángulo recto [17]”

Se hace explícita una **descripción** expresada en un intercambio de ideas entre los docentes sobre cómo se debe implementar las tareas de formas que el estudiante logre desarrollar la tarea matemática prevista. Se puede interpretar como los profesores ven necesario descomponer e proceso del construcción: de construcciones con menos complejidad a mayor complejidad. En otras palabras, la estrategia usada por los profesores para que el estudiante logre hacer una construcción que cumpla dos propiedades, es que primero realice la construcción que cumpla una propiedad y luego las dos. Por otro lado, es de resaltar que en la planeación de las actividades los procesos de comunicación e intercambio de ideas son una pieza fundamental en el planteamiento de las secuencias ya que este les permitió ser conscientes de la necesidad de reestructurar la forma como estaba siendo abordada la actividad matemática.

5.1.3 DISCURSO

	Párrafo	Asunto específico	Caracterización
18	Es importante al inicio de la actividad, hacer énfasis acerca del objetivo de la actividad y una breve explicación de lo que se busca con el enunciado planteado buscando que a los estudiantes les quede Clara las instrucciones que se exponen en la misma.	Conducción de la clase	Inspirar
19	Es importante que al momento de aplicar la actividad nosotros como docentes seamos quienes orienten cada una de las producciones de los estudiantes, por tanto, nuestro papel es una ficha clave en la conclusión de los objetivos de la actividad dado que nuestra función en el aula en este momento es de recordar conceptos, hacer preguntas pertinentes que permiten que el estudiante pueda ir determinando propiedades en las construcciones que realiza y la relación de estas.	Conducción de la clase	Inspirar

20	Comentamos a la asesora que cuando el estudiante se somete a actividades que requieran justificar, argumentar e identificar propiedades, es importante que desde la función como docentes podamos orientar estos procesos de tal manera que cuando visualice e identifique relaciones entre los elementos del objeto geométrico y sus propiedades puede identificar que entre estos hay ciertas regularidades jerarquías	Conducción de la clase	Inspirar
21	Aunque en periodos anteriores hemos trabajado algunas nociones básicas de geometría, representación de algunos objetos usando regla y compás, es importante que al momento de desarrollar la secuencia se les recuerde a los estudiantes algunos de los temas trabajados como paralelas, perpendiculares, ángulos etcétera, para que puedan desarrollar la actividad prevista.	Conducción de la clase	Inspirar
22	Al momento de aplicar la secuencia se debe hacer mención a los estudiantes de las nociones de segmento y punto puesto que son necesarias para desarrollar la tarea propuesta.	Conducción de la clase	Inspirar
23	Consideramos importante la claridad en las instrucciones y también la forma en que los estudiantes deben comunicar sus ideas, es decir damos prioridad al uso de la terminología y la simbología destacando que, en las clases de geometría buscamos el uso de conceptos y nociones que el estudiante necesita para poder reportar las propiedades de cualquier objeto que se le presente.	Lenguaje empleado	Inspirar

En esta fase los datos [18,19,20,21,22,23] estaban relacionados con el **Discurso**. De estos cinco estaban orientados a la **conducción de la clase**. Estos reportan la forma como los profesores prevén realizar la conducción de la segunda secuencia de actividades. En estos se destacan algunos aspectos que son importantes para ellos en el desarrollo de sus prácticas: hacer énfasis en el objetivo de la clase; explicar el enunciado de la actividad de tal forma que las instrucciones queden claras; orientar las producciones de los estudiantes; recordar conceptos y hacer preguntas encaminadas a que el estudiante pueda detectar las propiedades inmersas en las construcciones que realiza; propender para que el estudiante vislumbre posibles relaciones y jerarquías entre los objetos geométricos [18,19,20,21,22].

El dato [23] está relacionado con el **lenguaje empleado**. Se reporta que los profesores dan prioridad al uso del lenguaje matemático:

“Consideramos importante la claridad en las instrucciones y también la forma en que los estudiantes deben comunicar sus ideas. Es decir, damos prioridad al uso de la terminología y la simbología destacando que, en las clases de geometría, buscamos el uso de conceptos y términos que el estudiante necesita para poder reportar las propiedades de cualquier objeto que se le presente [23]”.

Se realiza un proceso de **Inspiración** sobre las acciones de los profesores que se han constituido desde la experiencia y caracterizan el discurso de sus clases. Se hace evidente un conjunto de acciones que realiza el profesor para que: los estu-

diantes sean conscientes de lo que se va a hacer y porque se hace, descubran propiedades del objeto geométrico de estudio y utilicen formas de comunicación que hagan uso de los términos matemáticos.

5.1.4 MEDIOS

	Párrafo	Asunto específico	Caracterización
24	Al profesor James le inquieta el manejo del recurso, estas actividades son pertinentes en GeoGebra, instrumentos de medición u otro artefacto que permita trabajar el dinamismo del software. Esta inquietud nace del hecho que este año no ha tenido oportunidad de acceder a la sala de sistemas. Facilidad que tenía el año pasado pues le coincidía alguna clase con la disponibilidad de la sala de sistemas. Por tanto, surgen las siguientes inquietudes ¿Es posible aplicar las actividades en mi institución dada esta limitante? ¿Es posible usar otro instrumento que permita el dinamismo de GeoGebra?	Valoración del recurso	Describir
25	En una reflexión conjunta respecto a la valoración del recurso, observamos que no es pertinente plantear una actividad con regla y compás cuando finalmente los estudiantes hacen construcciones a partir del software GeoGebra.	Valoración del recurso	Confrontar
26	Las construcciones con regla y compás tienen una dificultad de tipo temporal es decir que para poder realizarlas se requiere demasiado tiempo que cotejando con la efectividad y eficacia del Software nos permite lograr los mismos objetivos, pero en tiempos más cortos.	Valoración del recurso	Confrontar
27	Proponemos una secuencia de actividades, pensada para que los estudiantes identifiquen las propiedades de los paralelogramos. Estas actividades inicialmente están orientadas al manejo de regla y compás buscando que los estudiantes tengan presente el concepto de congruencia y su posible relación con el objeto geométrico que se quiere trabajar.	Papel del recurso	Describir
28	Consideramos que el trabajo con regla y compás es importante en la medida que permite al estudiante empezar a reconocer propiedades y nociones básicas en caso de que no haya tenido relación alguna con objetos geométricos.	Papel del recurso	Inspirar
29	Los instrumentos como la regla y el compás ayudan a que el estudiante identifique ciertas relaciones, el software tiene funciones adicionales que le permiten al estudiante manipular los objetos geométricos.	Papel del recurso	Inspirar

30	Proponemos un nueva actividad de exploración que busca que el estudiante reconozca el ambiente de GeoGebra, sus herramientas y la forma de emplearlas, además que se adapte a la forma en que se pueden realizar las construcciones en términos de ser blandas o robustas, para que al momento de realizar el trabajo con los cuadriláteros propuestos, tenga los elementos y el conocimiento del software necesario para que pueda lograr el objetivo, reconocer las propiedades y hacer un acercamiento al proceso de definir un cuadrado.	Papel del recurso	Describir
31	Las actividades planteadas van a permitirle al estudiante identificar herramientas del software, como <i>recta perpendicular</i> , <i>segmento</i> , <i>ángulo</i> , que puede utilizar para efectuar construcciones robustas de cuadriláteros que deberá realizar en las siguientes actividades de la secuencia.	Papel del recurso	Describir

En esta fase se encontraron diez datos relacionados con los **Medios**. Dos están orientados con la **valoración de los recursos**:

“Al profesor James le inquieta el manejo del recurso. La inquietud nace del hecho que este año no ha tenido oportunidad de acceder a la sala de sistemas, facilidad que tenía el año pasado pues le coincidía alguna clase con la disponibilidad de la sala. Por tanto, surgen las siguientes inquietudes ¿Es posible aplicar las actividades en mi institución dada esta limitante? ¿Es posible usar otro instrumento que permita el dinamismo de GeoGebra? [24]. Las construcciones con regla y compás tienen una dificultad de tipo temporal. Es decir, para poder realizarlas se requiere demasiado tiempo. Cotejando la efectividad y eficacia del Software, nos permite lograr los mismos objetivos, pero en tiempos más cortos [25,26]”.

El conjunto de datos es de **confrontación** porque explícita un choque entre una dificultad para utilizar GeoGebra en su institución y una creencia que tiene respecto a su uso: GeoGebra permite optimizar el tiempo en el desarrollo de una actividad. Además, se expresa una preocupación del profesor James sobre la pertinencia del uso del programa en el contexto de la institución donde labora. Se interpreta que, para los profesores, GeoGebra permite realizar las tareas que se pueden hacer con otros instrumentos, pero en menos tiempo. Esto permite evidenciar como influyen las ideas que tienen estos profesores al momento de escoger un recurso para sus clases y que elementos tienen en cuenta para su elección.

Los datos [27,28,29] están orientados con el **papel del recurso**, y surgen cuando los profesores están tratando de determinar el recurso que se utilizaría. Los datos reportan que los profesores consideran que la regla, el compás y GeoGebra, ayudan a los estudiantes a identificar relaciones entre los elementos de una construcción. Además, ellos destacan que GeoGebra permite integrar las funcionalidades de la regla y el compás. Se realiza una **Inspiración** debido a que se pone en manifiesto los atributos y características que los profesores le asignan al papel de recursos como regla, compás o GeoGebra. Ellos consideran que el programa de geometría dinámica le permitirá al estudiante realizar el mismo tipo de tareas que podía realizar con otros instrumentos.

Los datos [30,31] también están orientados al **papel del recurso**. En ellos se reportan que:

“Proponemos una nueva actividad de exploración que busca que el estudiante reconozca el ambiente de GeoGebra, sus herramientas y la forma de emplearlas, además que se adapte a la forma en que se pueden realizar las construcciones en términos de ser blandas o robustas, para que al momento de realizar el trabajo con los cuadriláteros propuestos, tenga los elementos y el conocimiento del software necesario para que pueda lograr el objetivo: reconocer las propiedades y hacer un acercamiento al proceso de definir un cuadrado[30]”. “Las actividades planteadas van a permitirle al estudiante identificar herramientas del software, como recta perpendicular, segmento, ángulo, que puede utilizar para efectuar construcciones robustas de cuadriláteros que deberá realizar en las siguientes actividades de la secuencia [31]”.

Se realiza una **Descripción** donde se relata la funcionalidad del software en el desarrollo de la tarea propuesta. Se interpreta cómo los profesores vislumbran la forma como el software ayudará a los estudiantes a cumplir el objetivo de la actividad. Además, manifiestan cómo las construcciones blandas o robustas se pueden relacionar con el proceso de definir cuadrado. Por ende, reconocen que la manipulación de las herramientas del software contribuye a que el estudiante pueda tener los elementos que le permitan desarrollar las actividades posteriores.

5.1.5 APRENDIZAJES

	Párrafo	Asunto específico	Caracterización
32	Para la preparación de la actividad de exploración tuvimos en cuenta las posibles respuestas que obteníamos de los estudiantes, además las formas en que se iban a realizar nuestras intervenciones y la socialización de los resultados, dado que estos elementos son los insumos para la valoración de los aprendizajes	Valoración de los aprendizajes	Describir
33	Las preguntas incluidas en la actividad forman parte de la socialización. Por tanto, los estudiantes deben comunicar sus respuestas en torno a las producciones realizadas, de forma que al activar el rastro en la proyección de las mismas, se observe el objeto geométrico que garantiza en este caso la que se mantenga la congruencia, como es el caso de la circunferencia.	Valoración de los aprendizajes	Describir

En esta fase los datos [32,33] estaban relacionados con los aprendizajes y están orientados a la **valoración de los aprendizajes**. Estos reportan:

“Para la preparación de la actividad de exploración tuvimos en cuenta las posibles respuestas que obtendríamos de los estudiantes. Además, las formas en que se iban a realizar nuestras intervenciones y la socialización de los resultados, dado que estos elementos son los insumos para la valoración de los aprendizajes [32]”. “Las preguntas incluidas en la actividad forman parte de la socialización. Por tanto, los estudiantes deben comunicar sus respuestas en torno a las producciones realizadas... [33]”.

Se realiza un proceso **Descriptivo**. Para explicar este proceso es necesario recordar que estos profesores en la planificación de las actividades determinaron posibles respuestas (construcciones) de los estudiantes, que estaban ordenadas de menor a mayor complejidad con respecto a la construcción realizada y las habilidades que requerían. Cuando los profesores indican que esta planificación les permitirá valorar los aprendizajes de los estudiantes, es porque la cercanía de las producciones de los estudiantes con alguna de estas respuestas presupuestadas les ayudará valorar lo que el estudiante está aprendiendo en términos del proceso de representar. Es por ello, que la exposición que realizarán los estudiantes de sus producciones les permitirá realizar la valoración del aprendizaje.

5.2 FASE ACTIVA

5.2.1 CONTENIDO

	Párrafo	Asunto específico	Caracterización
37	Al pedirle que explicara a sus compañeros la forma como realizó su construcción, Uriel reportó los pasos que se presentaron anteriormente cuando me acerqué a indagar sobre las formas como habían empleado el software, luego, realicé mi intervención buscando que los estudiantes identificaran en la construcción realizada la forma de garantizar la congruencia de los segmentos	Conducción de la clase	Describir
39	Esta sesión de clase inició recordando las definiciones y hechos geométricos institucionalizados en el desarrollo de la actividad de exploración. Para esto inicié presentando a los estudiantes las construcciones socializadas haciendo énfasis en los objetos geométricos empleados que garantizaban la congruencia entre dos lados del triángulo y los ángulos de 90°	Conducción de la clase	Describir
41	Al ver esta construcción cuestioné a los estudiantes si la congruencia de estos lados se mantenía cuando se arrastraba alguno de los vértices del cuadrado y les recordé las definiciones y hechos geométricos de los cuales se habían hablado en al inicio de la sesión.	Conducción de la clase	Describir
44	En ese instante les indagué sobre cuál era la característica de la circunferencia que permitía que estos segmentos fueran congruentes. La respuesta de los estudiantes fue que como los puntos C y B estaban ubicados sobre la circunferencia, estaban a la misma distancia del punto A	Conducción de la clase	Describir

En esta fase se encontraron que los datos [37,39,41,44] que estaban relacionados con el Contenido Matemático. Específicamente con Procesos matemáticos:

[En la primera sesión, a partir de una construcción que había realizado un estudiante] realicé mi intervención buscando que los estudiantes identificaran en la construcción realizada la forma de garantizar la congruencia de los segmentos [37]. La segunda sesión de clase inició recordando las definiciones y hechos geométricos institucionalizados en el desarrollo de la

actividad de exploración. Para esto inicié presentando a los estudiantes las construcciones socializadas haciendo énfasis en los objetos geométricos empleados que garantizaban la congruencia entre dos lados del triángulo y los ángulos de 90° [39]. Al ver esta construcción [un cuadrado dibujado a partir de la cuadrícula de GeoGebra] cuestioné a los estudiantes si la congruencia de estos lados se mantenía cuando se arrastraba alguno de los vértices del cuadrado y les recordé las definiciones y hechos geométricos de los cuales se habían hablado en al inicio de la sesión [41] [Respecto a una construcción de un cuadrado propuesta por un estudiante] indagué sobre cuál era la característica de la circunferencia que permitía que estos segmentos fueran congruentes [44].

Se realiza un proceso de **Descripción** sobre la forma como el profesor promueve en sus estudiantes el proceso matemático representar. Se puede interpretar como para él, a través de sus intervenciones, manifiesta la relación que ha venido estableciendo entre el proceso de representar un objeto y sus propiedades. Respecto a esta relación es posible observar que para él es importante que los estudiantes estén en la capacidad de identificar y reportar los hechos geométricos que están implícitos en una construcción, pues considera que son los elementos necesarios para que los estudiantes logren extraer propiedades. Consideramos que a esto último es a lo que el profesor se refiere cuando utiliza la palabra “garantizar”.

5.2.2 DISCURSO

	Párrafo	Asunto específico	Caracterización
35	Luego de presentar el ejercicio a los estudiantes, recordé lo planeado en la gestión de clase y las charlas sostenidas en las asesorías, donde se exponía la importancia de las indicaciones iniciales para el desarrollo de la actividad. Por tanto, como orientaciones preliminares recordé a los estudiantes la Definición de Congruencia de segmentos: Dos segmentos son congruentes si y solo si tienen la misma medida.	Conducción de la clase	Describir
36	Esta es una acción que habitualmente realizo: recordar las definiciones o propiedades de los objetos que se han trabajado con anterioridad y que están involucrados en la actividad que se proponga.	Conducción de la clase	Inspirar
38	Usé la intervención de Uriel y la relacioné con la definición y el hecho geométrico de la mediatriz, para esto empecé comentando a los estudiantes que lo que Uriel reconocía como centro del segmento en geometría se llamaba punto medio, en ese momento volví a colocar el punto C sobre el segmento, para que reconocieran que este estaba a distancias iguales de los puntos A y B.	Conducción de la clase	Describir
40	Al igual que en la actividad anterior me desplacé por cada uno de los grupos para identificar las producciones de los estudiantes y cotejar si estas estaban contempladas en la planeación de la clase.	Conducción de la clase	Describir

45	En la interacción con este grupo, al igual que con todos los otros, insistí bastante que al momento de comunicar sus ideas procuraran usar el lenguaje adecuado, pues como lo mencioné antes para mí es importante porque les permite comunicar sus ideas con mayor claridad, siendo realmente conscientes de las relaciones o propiedades que observan y a su vez les permite ampliar la imagen conceptual que tienen del objeto geométrico. Que es una de las finalidades de mi quehacer docente.	Lenguaje empleado	Inspirar
46	En ese instante hice alusión a la importancia de comunicar sus ideas haciendo uso adecuado del lenguaje matemático. Por tanto, retomé la pregunta y pedí a los estudiantes usar el término apropiado para nombrar lo que ellos denominaron corte o cruce de dos objetos geométricos, como en este caso la circunferencia y la perpendicular. Esto para que recordaran que se denomina intersección al punto C.	Lenguaje empleado	Describir
48	Pregunté a los estudiantes por qué usaban la cuadrícula. A este interrogante Ángel respondió “ <i>porque no quiero equivocarme y busco ser exacto</i> ”. Esta pregunta surgió debido a que uno de sus compañeros al observar que habían hecho uso de la cuadrícula lo interpretaron como una forma de hacer trampa. A este comentario reaccioné diciendo que las herramientas se usan teniendo una intencionalidad que en el caso del grupo de Ángel es la que le garantiza la congruencia, pues dada la exactitud tiene la certeza que los segmentos son iguales en su medida.	Apoyo a las expresiones de los estudiantes	Describir

En esta fase se encontraron siete datos que estaban relacionados con el **Discurso**. Estos surgieron de la descripción de la clase implementada. Los datos [35, 36, 40] reportan información acerca de la **conducción de la clase**. En estos se explica que, al iniciar la primera sesión, el profesor James recordó la definición que de los elementos involucrados en la primera actividad (segmentos congruentes) [35], indicando que él habitualmente les recuerda a sus estudiantes las definiciones o propiedades de los objetos involucrados en el enunciado de una tarea [36]. Adicionalmente, comenta que una acción que realiza para identificar las acciones de los estudiantes e identificar su cercanía con las respuestas presupuestadas, era pasar por los puestos de los estudiantes [40]. En estos se realiza un proceso **Descriptivo** donde se hacen explícitas las características de las prácticas de estos profesores al momento de conducir la clase implementada. Además, se realiza una **Inspiración** donde se evidencia cómo la planeación de la actividad fue una pieza clave en la conducción de la clase porque le ayudaron a prever la forma como podría clasificar y orientar las producciones de los estudiantes.

Los datos [38, 45,46] estaban relacionados con el **lenguaje empleado**. Los datos muestran momentos en los cuales el profesor le indica a un estudiante el término adecuado que debe utilizar para referirse al punto medio de un segmento o a la intersección entre dos figuras. En el dato [45] el profesor explicita por qué él realiza este tipo de acciones:

En la interacción con este grupo, al igual que con todos los otros, insistí bastante que al momento de comunicar sus ideas procuraran usar el lenguaje adecuado, pues como lo mencioné antes para mí es importante porque les permite comunicar sus ideas con mayor claridad, siendo realmente conscientes de las relaciones o propiedades que observan y a su vez les permite ampliar la imagen conceptual que tienen del objeto geométrico. Que es una de las finalidades de mi quehacer docente

Se realiza una **descripción** sobre la forma como el profesor orienta el uso de términos matemáticos. Además, se explicita un proceso de **Inspiración** donde se evidencia los atributos que el docente da al uso adecuado de los mismos. Estos datos destacan un asunto recurrente en el primer ciclo: para el docente es habitual en sus prácticas solicitar que los estudiantes hagan uso adecuado del lenguaje matemático. Asume que este uso del lenguaje brinda las herramientas para que puedan comunicar con claridad sus ideas, aspecto que contribuye a que el estudiante sea consciente de las propiedades que se encuentran presentes en las ideas matemáticas que comunica.

El dato [48] estaba orientado al **Apoyo a las expresiones de los estudiantes**. En este se reporta como el docente ante un proceso realizado por un estudiante que, acude al uso de la cuadrícula buscando la exactitud en su construcción y que no es avalado por algunos de sus compañeros, reacciona y hace caer en la cuenta a los demás estudiantes que todo proceso en la construcción de una figura tiene una intencionalidad para quien lo ejecuta [48]. Se realiza una **Descripción** de como el docente apoya las intervenciones de los estudiantes.

Es evidente resaltar el papel que juega nuevamente la planeación de las actividades en el rol del docente mientras que conduce la clase. En estos datos se manifiesta las prácticas comunes de los profesores, se resalta el hecho que predomina la búsqueda del docente porque sus estudiantes hagan uso del lenguaje apropiado, por tanto, en sus acciones realiza explicaciones y preguntas orientadas a que los estudiantes puedan encontrar las propiedades implícitas en las representaciones que realizan.

5.2.3 GESTIÓN

	Párrafo	Asunto específico	Caracterización
34	Esta clase se desarrolló en una sala informática, que, aunque cuenta con 20 portátiles, solamente 7 tienen instalado el programa GeoGebra. Debido a esto, las actividades propuestas se desarrollaron en pequeños grupos de 5 parejas y dos ternas de estudiantes. La cantidad de estudiantes que tenía cada grupo cambió en relación con lo planeado, porque se tenía presupuestado que 8 equipos tenían el programa que se iba a utilizar.	Cambios en la planeación	Describir

49	Este recorrido me permitió observar las construcciones y determinar cuáles iban a ser parte de la socialización, de allí tal como se tenía previsto buscaba poder institucionalizar el hecho geométrico de la circunferencia y la mediatriz como objetos que permiten garantizar la congruencia de los segmentos que en este caso eran los lados de un triángulo. Ninguno de los grupos realizó una construcción robusta lo cual se tenía presupuestado. De este recorrido observe que tres grupos realizaron una construcción similar a la de la circunferencia, dos grupos a la mediatriz y dos con cuadrícula.	Actividad matemática prevista	Describir
50	Indagué a los estudiantes sobre los segmentos que se pretendían fueran congruentes, esto con el fin que centraran su atención en estos de tal manera que al activar el rastro pudieran dar respuesta a las interrogantes que iba a proponer.	Actividad matemática prevista	Describir
51	Activé el rastro buscando los lugares en los que aparentemente fueran congruentes los segmentos, para esto desplazé el punto C. Una vez realizada esta acción pedí a los estudiantes que comunicaran sus apreciaciones, buscando que identificaran que al desplazar el punto C queda la marca de lo que aparentemente es una recta. Efectivamente ellos reportaron la forma de una recta que se intersecaba con el	Actividad matemática prevista	Describir
52	Comenté a los estudiantes que la siguiente actividad iba a estar dirigida a realizar la construcción de un triángulo que tuviera dos lados congruentes pero que también tuviera un ángulo recto. Para esto proyecté en el televisor el enunciado del problema	Actividad matemática prevista	Describir
53	Al ver esta construcción pedí a uno de los estudiantes que desplazaran el punto F para que observaran que al no haber puntos en común entre la circunferencia y el cuadrado estos objetos se desplazaban de forma independiente. Finalmente, les recordé que si el centro de la circunferencia era el punto E, su radio debía corresponder la distancia del punto E hasta uno de los vértices	Actividad matemática prevista	Describir
54	Al observar esta construcción observé que habían formado un aparente rectángulo e inmediatamente los indagué sobre el cuadrilátero construido, para esto pregunté por las características que debe tener un cuadrilátero para ser cuadrado, su respuesta fue lados congruentes. Ante esta respuesta les pregunté cómo podían lograr que los cuatro lados fueran congruentes manteniendo la medida de los ángulos.	Actividad matemática prevista	Describir
55	Realizar esta acción se les dificultó bastante porque debían garantizar que los cuatro segmentos cumplieran de forma simultánea las propiedades “ser congruente con” y “ser perpendicular a”. Al evidenciar que no lograban encontrar el camino para realizar esta construcción les recordé que en la sesión anterior y al iniciar esta, había hablado de herramientas como la circunferencia, la mediatriz y la perpendicular que permitían la congruencia de dos segmentos y obtener un ángulo de 90° grados.	Actividad matemática prevista	Describir

56	Recordé a los estudiantes que en la actividad de construcción del triángulo se habían usado algunas herramientas que garantizaban la congruencia de sus lados. Por tanto, indagué a los estudiantes sobre cuáles eran esas herramientas que mantenían la congruencia y permitían obtener un ángulo cuya medida fuera de 90° . Ellos respondieron la circunferencia, la mediatriz y la perpendicular, respectivamente	Actividad matemática prevista	Describir
57	Les recordé a los estudiantes que el punto C no se había podido desplazar dado que tenía unas condiciones particulares en la forma como fue localizado en la construcción preliminar, haciendo énfasis en que en esta característica encontrarían la forma de construir los lados faltantes del cuadrado. Una vez hecha esta observación, algunos susurraban entre sí y hacían movimientos con la mano (girar el dedo índice formando un arco de circunferencia, desplazar el dedo índice apuntándolo hacia la pantalla y desplazándolo de arriba hacia abajo). Dadas estas acciones, al preguntarles sobre cómo podía garantizar que al ubicar el punto D se obtuviera la congruencia de los lados, surgieron dos posibilidades	Actividad matemática prevista	Describir
58	Les pedí que escribieran las características del cuadrado usando la forma: "si el cuadrilátero ABDC es un cuadrado entonces". De este ejercicio se obtuvo que "si el cuadrilátero ABDC es un cuadrado entonces tiene cuatro lados congruentes y cuatro ángulos de 90° ". Con esto, los estudiantes reconocieron que no es suficiente tener lados congruentes, sino que también se hace necesario los ángulos de 90° para obtener el cuadrado.	Actividad matemática prevista	Describir
59	Solicité a los estudiantes que iniciaran con el desarrollo de la actividad. Mientras que ellos realizaban la construcción con las condiciones solicitadas, yo pasé por cada una de las parejas y ternas observando el trabajo que realizaban, esto buscando clasificar las producciones de los estudiantes en términos de las respuestas que se habían previsto con anterioridad.	Actividad matemática prevista	Describir
60	Ante la evidencia de la dificultad de los estudiantes y a que empecé a darme cuenta de que el tiempo de la clase se estaba terminando, decidí realizar la socialización con las construcciones que habían planteado, para esto inicié con la de ángulos según su medida explicando a los estudiantes que, al utilizar esta herramienta, el software ubica un nuevo punto con la misma notación que la de uno de los dos extremos del segmento.	Actividad matemática prevista	Describir
61	Finalmente, como docente reconocí la importancia de la gestión en la planeación de una secuencia de actividades y, más aún que las decisiones que se toman en el desarrollo de las mismas pueden influenciar de manera positiva en la medida que estas se orienten bajo los objetivos o finalidad de la actividad.	Actividad matemática prevista	Inspirar

62	Como el tiempo de la clase estaba por finalizar, se finaliza la sesión con la institucionalización de las siguientes propiedades del cuadrado usando la forma condicional sí... entonces... Si el cuadrilátero ABDC es un cuadrado entonces sus lados son congruentes y sus ángulos miden 90° . Si el cuadrilátero ABDC es un cuadrado entonces sus diagonales son congruentes, perpendiculares y se bisecan entre sí.	Actividad matemática prevista	Describir
63	Este recorrido me permitió encontrar algunas construcciones que llamaron mi atención y que evocaron en mí la conversación e intercambio de ideas que había entablado con mi compañero en el momento en el estructurar el documento donde se incluía la gestión de dicha clase.	Planeación de la organización	Describir
64	Al igual que en el ejercicio anterior realicé un recorrido por cada uno de los grupos para poder identificar las distintas construcciones que habían realizado los estudiantes. En este observé que presentaban algunas dificultades para poder representar dos propiedades en una misma construcción dado que muchos de los grupos volvían a construir el Triángulo anterior sin tener en cuenta el ángulo de 90 grados. Ante esto pedí a los estudiantes que midieran el ángulo que consideraban que iba a ser recto con ayuda de la herramienta ángulo y que indicarán en qué posición del punto C los segmentos eran congruentes y se obtenía el ángulo de 90° .	Planeación de la organización	Describir

En esta fase los datos [34, 49-64] estaban relacionados con la **Gestión**. Los datos [49-62] Estos están orientados a la **previsión de la actividad matemática**. Estos reportan las acciones del profesor mientras orquestaba la clase implementada: clasificar las producciones de los estudiantes partiendo de la planeación realizada de la actividad, apoyar a los estudiantes que presentaron algún tipo de dificultad debido a que no lograron realizar una construcción que les garantizara cumplir más de dos propiedades, recordar los hechos geométricos que se institucionalizaron en la sesión anterior, buscar que los estudiantes puedan realizar la tarea propuesta teniendo conciencia de las propiedades implícitas la construcción, propender para que puedan identificar las relaciones entre los elementos del cuadrilátero.

Los datos [34,63,64] estaban orientados a la **planeación de la organización**. Estos reportan que el profesor tenía presupuestado que los estudiantes trabajaran en parejas, pero que algunos grupos quedaron conformados por tres personas porque al iniciar la clase algunos computadores no tenían instalado el software [34]. Además, como el profesor James de acuerdo a la planeación de la actividad, realiza un recorrido que le permite identificar y clasificar las producciones de los estudiantes teniendo en cuenta las interacciones que con el profesor Juan que se generaron en el diseño y planeación de la secuencia de las actividades.

En los datos mencionados en el párrafo anterior, se hace una **Descripción** de la forma como el profesor orienta la actividad matemática de los estudiantes, el papel que juega la planeación de la gestión en las acciones que desarrolla, la forma co-

mo clasifica las producciones de sus estudiantes. También, se menciona la modificación realizada a la planeación de la gestión. Por otra parte, hay un momento de **inspiración** cuando el profesor evoca las posibles producciones que surgieron en la planeación de la actividad. Se interpreta como al prever las posibles respuestas de los estudiantes el profesor está en la capacidad de orientar de una forma más eficaz la actividad matemática de los estudiantes, por tal razón se resalta como en sus acciones buscan que los estudiantes identifiquen las propiedades inmersas en las construcciones que ellos realizan. Se puede interpretar como la planeación de la gestión le permite al profesor tener una mejor interpretación de la actividad matemática que realizan sus estudiantes.

5.2.4 MEDIOS

	Párrafo	Asunto específico	Caracterización
47	Después de observar las construcciones propuestas por los estudiantes y dadas las dificultades que se presentaron en la actividad 2, decidí realizar una variación de la actividad respecto a la planeación que se había previsto. En esta oportunidad inicié la sesión recordando a los estudiantes el enunciado de la actividad propuesta	Cambios en la conducción	Describir
65	Indagué a los estudiantes sobre las características de la figura que garantizan la congruencia, para esto planteé la siguiente pregunta ¿Por qué al mover el punto sobre esta aparente recta puedo decir que los segmentos son congruentes? A este interrogante los estudiantes respondieron que esto se debía a que la distancia entre el punto C y los extremos del segmento AB era igual. Ante esto evidencié que por medio de la función de arrastre y rastro ellos identificaban la relación de dependencia que había entre el punto y la recta. Además, sin haberlo institucionalizado aún habían detectado el hecho geométrico de la mediatriz.	Papel del recurso	Describir
66	Una vez que todos tenían sus construcciones realizadas, les pedí que usaran la función arrastre para desplazar los puntos A y B sobre el plano del software. Esta acción les permitió identificar que la propiedad de congruencia se mantenía	Papel del recurso	Describir
67	Luego, pedí al grupo de estudiantes que desplazaran el punto C. Al instante reportaron que no se podía mover. Ante esto reaccioné con otra pregunta ¿Por qué no se puede mover este punto? Esta pregunta no pudo ser respondida, así que la orienté de una forma diferente.	Papel del recurso	Describir
68	Luego, les indiqué que con ayuda de la herramienta ángulo midieran el \sphericalangle CAB, con esta acción ellos relacionaron que efectivamente la recta perpendicular garantizaba el ángulo de 90° como se había institucionalizado en la primera sesión.	Papel del recurso	Describir

69	Dadas las dificultades que se les habían presentado para relacionar más de una propiedad, proyecté en el televisor como debía quedar la construcción finalizada la actividad; para esto oculté los objetos adicionales. Luego, desplacé los puntos A y B en el plano del software para que identificaran que la congruencia y el ángulo de 90° se conservaban.	Papel del recurso	Describir
70	Una vez hecha esta acción activaron la función arrastre para desplazar los vértices del cuadrado y les pedí que reportaran las características que observaban en las diagonales. La primera característica que surgió fue la congruencia entre las diagonales; en ese instante pedí a los estudiantes que reportaran en una hoja las características de la forma "si es un cuadrado entonces sus diagonales son..."	Papel del recurso	Describir
71	Para la tercera condición de las diagonales pedí a los estudiantes que midieran los segmentos, con esto identificaron que se intersecan en su punto medio. Comenté que esta condición se llama biseccarse entre sí.	Papel del recurso	Describir
72	Se invitó a los estudiantes a que, en el momento de realizar la actividad, exploraran todas las herramientas con las que contaba el programa. Para tal fin, les señalé diferentes herramientas y les indiqué la forma cómo podían desplegar los menús. Di esa indicación porque consideré que esto ayudaría a que los estudiantes no eligieran al azar las herramientas del programa, sino que al identificar diferentes herramientas antes de construir podrían utilizarlas de forma más consciente.	Papel del recurso	Inspirar
73	Al acercarme a este grupo indagué a los estudiantes sobre la forma en que usaron el software para construir el triángulo con las condiciones dadas.	Papel del recurso	Describir
74	Les pedí que con ayuda de las herramientas del software construyeran los lados que faltaban para obtener el cuadrado, indicándoles que tuvieran en cuenta que la congruencia se debía mantener al desplazar los puntos A y B.	Papel del recurso	Describir
75	Mientras que los estudiantes trataban de construir los lados del cuadrado restantes, yo recorrí cada uno de los grupos y observé que a pesar de que les acababa de mostrar que había herramientas diferentes a la cuadrícula que les permitan garantizar la congruencia, ellos trataban de construir de nuevo los lados faltantes con ayuda de la cuadrícula.	Papel del recurso	Confrontar
76	Esta acción los desestabilizó bastante, dado que muchos de ellos tenían seguridad que la cuadrícula les garantizaba que la congruencia siempre se iba a mantener. Consideré que esto se debía a que les costaba mucho identificar la relación de dependencia que debía existir entre cada uno de los elementos del cuadrado. Así que les proyecté de forma simultánea las dos construcciones: la robusta y en la que ellos usaron la cuadrícula.	Papel del recurso	Inspirar

77	Luego les pedí que con la ayuda de la herramienta intersección ubicaran el punto E, que era la intersección entre las diagonales. Además, con la herramienta distancia o longitud y ángulo que indicaran las medidas de las diagonales y el ángulo formado entre ellas.	Papel del recurso	Describir
----	---	-------------------	-----------

Se encontraron que los datos [47,65-77] estaban relacionados con los **Medios**. Estos datos están relacionados con el **papel del recurso**. Se reporta como las orientaciones dadas por el profesor permiten que el uso de las herramientas de GeoGebra ayude a los estudiantes a reconocer e identificar las propiedades de las construcciones que realiza. Se hace evidente cómo la planeación de la clase permite al docente que sus intervenciones e interrogantes estén direccionados a potenciar los procesos y la actividad matemática prevista [65-77]. Se realiza una **Descripción** del papel que juega el recurso en el desarrollo de la actividad. Se interpreta cómo el profesor aprovecha el potencial que tiene el software de geometría dinámica para que los estudiantes puedan desarrollar la actividad matemática. Se explicita como concibe el papel del recurso tecnológico como medio que permite el desarrollo de la tarea propuesta.

El dato [47] está orientado al **uso del recurso**. Se reporta que

“Después de observar las construcciones propuestas por los estudiantes y dadas las dificultades que se presentaron en la actividad 2 (garantizar dos propiedades en la construcción del triángulo rectángulo-isósceles), decidí realizar una variación de la actividad respecto a la planeación que se había previsto (el profesor presentó a los estudiantes parte del protocolo de construcción del cuadrado que hacía parte del conjunto de respuestas presupuestadas). En esta oportunidad inicié la sesión recordando a los estudiantes el enunciado de la actividad propuesta [47]”.

En este se realiza una **Descripción** de los cambios que realiza el profesor en la implementación de la actividad. Es una modificación de la actividad en relación con el uso del recurso. El profesor se da cuenta que la construcción de un cuadrado es un proceso complejo para los estudiantes porque requiere garantizar varias propiedades. De alguna manera, considera que si da una parte de la construcción (dos lados adyacentes congruentes que determinan un ángulo recto), a los estudiantes verán con más facilidad como construir el lado que falta.

5.3 FASE POST-ACTIVA

5.3.1 CONTENIDOS MATEMÁTICOS

	Párrafo	Asunto específico	Caracterización
82	Con la representación del cuadrado se presentó una dificultad, porque a pesar de haberse institucionalizado los hechos geométricos necesarios, los estudiantes no lograban que su construcción garantizara más de una condición de forma simultánea (perpendicularidad y congruencia).	procesos matemático	inspirar

87	La intervención del profesor: mostrar una construcción robusta y otra blanda de cuadrado. Buscaba que los estudiantes reconocieran la diferencia entre dibujo y construcción.	Tratamiento de los contenidos	Describir
----	---	-------------------------------	-----------

Se encontró que los datos [82, 87] estaban relacionados con los **Contenidos matemáticos**. Estos hacen alusión al **Tratamiento de los contenidos**. El dato [87] reporta: “La intervención del profesor, mostrar una construcción robusta y otra blanda de cuadrado, buscaba que los estudiantes reconocieran la diferencia entre dibujo y construcción [87]”. En este dato se **Describen** las acciones del profesor James para promover los contenidos que se esperaban desarrollar. Se interpreta cómo el profesor recurre a dos tipos de construcciones, presentadas en forma simultánea para que los estudiantes por medio de comparaciones logren identificar las diferencias entre una construcción y un dibujo.

Los datos [82] estaban centrados en los **Procesos matemáticos**. En ellos se reporta:

“Se presentó una dificultad en la construcción del cuadrado, porque a pesar de haberse institucionalizado los hechos geométricos necesarios, los estudiantes no lograban que su construcción garantizará más de una condición de forma simultánea (perpendicularidad y congruencia) [82].

Se realiza una **Inspiración** porque se reportan nuevas ideas que le permiten a los profesores explicar lo que ocurre en el aula en relación con la forma como los estudiantes realizan una construcción (robusta o blanda). En estos se observa que los profesores interpretan que la dificultad del estudiante para construir un cuadrado proviene del hecho de garantizar que se cumplan más de una condición en su representación. Consideran que cuando una representación requiere un nivel de dificultad menor, entendido como garantizar solo una condición, el estudiante está en la capacidad de ejecutar esta tarea.

5.3.2 DISCURSO

	Párrafo	Asunto específico	Caracterización
90	Con la implementación de la actividad se logró que respecto al uso del lenguaje los estudiantes realizaran una comunicación oportuna, haciendo uso de los términos apropiado, debido que ellos mencionaron los objetos relacionados en la construcción (recta, Angulo, segmento) por su nombre.	Uso del lenguaje	Describir
91	Con el desarrollo de la actividad se logró en los estudiantes el manejo de los términos asociados al objeto matemático. Al momento en que el profesor les solicitó que reportaran las propiedades de una figura, comunicaban con seguridad las características y elementos que estaban implícitos en su representación.	Uso del lenguaje	Describir

Se encontraron que los datos [90, 91] hacían referencia al **discurso** y están orientados al **lenguaje empleado**. La explicación del dato [90] está incluida en el dato [91]. Reporta:

Con el desarrollo de la actividad se logró en los estudiantes el manejo de los términos asociados al objeto matemático. Al momento en que el profesor les solicitó que reportaran las propiedades de una figura, comunicaban con seguridad las características y elementos que estaban implícitos en su representación [91].

En este se realiza un proceso **descriptivo** sobre la forma como los estudiantes hicieron uso del lenguaje en el desarrollo de la actividad. Se interpreta la importancia que los profesores da al uso de los términos y al hecho de que el estudiante logre comunicar con seguridad las propiedades implícitas en una representación. Esta idea es recurrente en las descripciones del profesor, lo cual es una prueba fehaciente que en sus prácticas es un propósito del profesor desarrollar el lenguaje matemático de sus estudiantes.

5.3.3 GESTIÓN

	Párrafo	Asunto específico	Caracterización
78	El profesor Juan Carlos interpreta: el James describe su gestión de la clase en términos de las construcciones realizadas por los estudiantes. Debido a que estas fueron previstas en las reuniones y se hicieron evidentes en el desarrollo de la actividad. Por tal razón, esta dio frutos puesto que las construcciones que se previeron fueron efectivamente realizadas por los estudiantes en el desarrollo de cada una de las actividades.	Interpretación de la gestión	Confrontar
79	A pesar de que todo está dispuesto en la planeación, al momento de desarrollar las actividades el tiempo no alcanzó y se vio la necesidad de cerrar e institucionalizar con los que se tenía en el momento.	Tiempo de ejecución	Describir
80	En caso de poder aplicar nuevamente la secuencia, las actividades se pueden mejorar en términos del manejo de los tiempos, es decir que la actividad se fraccione en términos de la complejidad. Dado que había tareas (construcción del cuadrado) que requerían que los estudiantes involucraran más procesos de los que se habían presupuestado. Además, que hubiese una intervención presupuestada del profesor (protocolo de construcción del cuadrado) para lograr que los estudiantes realizaran actividad prevista.	Tiempo de ejecución	Transformar
83	De no haber presentado [una parte de] el protocolo de construcción robusta del cuadrado. No se habría podido realizar la institucionalización de los hechos geométricos relacionados con este objeto. Por eso se recalca que en ese momento era necesario tomar una decisión: orientar la construcción de los estudiantes para lograr el objetivo de la actividad.	Interpretación la gestión	Inspirar

Los datos [78,79,80,83] estaban relacionados con la **Gestión**. Los datos [78, 83] se enfocan a la **Interpretación de la gestión**. El dato [78] reporta:

El profesor Juan Carlos explica cómo el profesor James describe la gestión de la clase en términos de las construcciones realizadas por los estudiantes, destacando que estas fueron previstas en las reuniones y se hicieron evidentes en el desarrollo de la actividad. Por tal razón, su gestión dio frutos puesto que las construcciones [blandas] que se previeron fueron efectivamente realizadas por los estudiantes en el desarrollo de cada una de las actividades, y a partir de ellas, el profesor pudo ayudar a los estudiantes a que propusieran construcciones robustas [78].

Se realiza una **Confrontación** puesto que hay una interpretación de un par académico sobre la práctica de su compañero. Se interpreta como el profesor Juan Carlos entiende que su par académico gestionó la clase para que los estudiantes hicieran alusión a las posibles construcciones que ellos habían presupuestado. Se entrevé que incluir en la planeación las posibles respuestas que pueden dar los estudiantes, se convierte en una herramienta que le permite al profesor promover la actividad matemática prevista.

El dato [83] menciona que:

De no haber presentado [una parte de] el protocolo de construcción robusta del cuadrado, no se habría podido realizar la institucionalización de los hechos geométricos relacionados con este objeto. Por eso se recalca que en ese momento era necesario tomar una decisión: orientar la construcción de los estudiantes para lograr el objetivo de la actividad [83].

En este se realiza un proceso de **Inspiración**. El profesor James identificó que los estudiantes no lograrían realizar la tarea propuesta, si no se realizaba un cambio en lo presupuestado. En correspondencia, toma decisiones respecto a las orientaciones presupuestadas. Una creencia del profesor que consideramos que subyace a esta acción es: al identificar una dificultad en los estudiantes, el profesor debe realizar acciones que le permitan al estudiante continuar con el desarrollo de la tarea (v.g. recordar conceptos, dar una parte de la solución).

Los datos [79, 80] están orientados al **Tiempo de ejecución**. En estos se reporta:

“A pesar de que todo está dispuesto en la planeación, al momento de desarrollar las actividades el tiempo no alcanzó y se vio la necesidad de cerrar cada actividad e institucionalizar con lo que se tenía en el momento [79]”. “En caso de poder aplicar nuevamente la secuencia, las actividades se pueden mejorar en términos del manejo de los tiempos, es decir que la actividad se fraccione por su complejidad, dado que había tareas (construcción del cuadrado) que requerían que los estudiantes involucraran más procesos de los que se habían presupuestado. Además, que hubiese una intervención presupuestada del profesor (protocolo de construcción del cuadrado) para lograr que los estudiantes realizaran actividad prevista. [80]”

En estos datos se realiza un proceso de **Descripción** acerca de las dificultades que se presentaron en la actividad con respecto al manejo del tiempo y, una posible **Transformación** de las prácticas de los profesores. La limitante con respecto

al tiempo, los lleva a concluir que cuando se proponen actividades en las cuales los estudiantes deben hacer construcciones, el tiempo empleado dependerá de la complejidad de la construcción. Es decir, de la cantidad de propiedades, intersecciones entre figuras y herramientas del software que involucra la representación gráfica realizada. Además, se observa que los profesores consideran que cuando realizan una acción que les permite subsanar un imprevisto con relativo éxito, esta que puede ser convertida en una práctica habitual.

5.3.4 MEDIOS

	Párrafo	Asunto específico	Caracterización
84	Uno de los impedimentos para la consecución de la actividad fue el poco acercamiento que los estudiantes tuvieron de los objetos circunferencia y mediatriz, porque a pesar de que las construcciones blandas de alguna manera mostraban una aproximación a estos objetos, no se logró que llegarán a construcciones robustas que permitieran que ellos observaran la forma como estos objetos garantizaban que se mantuvieran las propiedades al activar el arrastre.	uso del recurso	confrontar
85	Los estudiantes no lograban vislumbrar algunos atributos de los objetos representados en GeoGebra como la diferencia entre un punto cuando se genera por una intersección y cuando se localiza sobre el plano del software. Al no identificar esta condición las construcciones propuestas por ellos fueran blandas, ya que no tenían en cuenta esta característica al momento de representar la figura.	uso del recurso	confrontar
86	A los estudiantes cuando se les pidió representar un cuadrado, ellos realizaron un dibujo mas no una construcción dado que no empleaban las propiedades que estaban relacionadas con este objeto, por esta razón recurrían al uso de cuadrículas.	uso del recurso	confrontar
89	El uso de las funciones de arrastre permitió que los estudiantes vislumbraran algunas propiedades (congruencia, perpendicularidad) que cumplía la representación del cuadrado (presentes en la construcción orientada por el profesor)	uso del recurso	describir

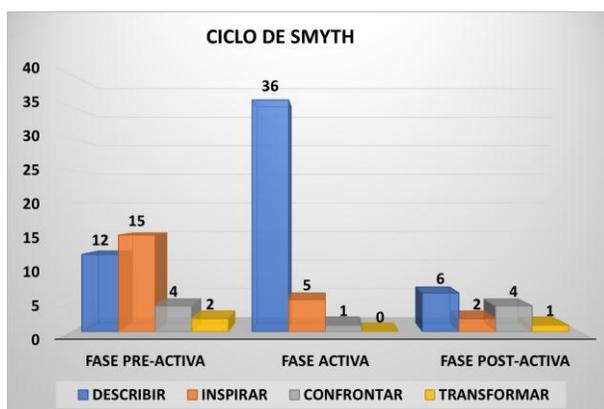
Se encontraron que los datos [84,85,86,88] estaban relacionados con los **Medios**, concretamente al **Uso del recurso**. En estos se reportan algunas justificaciones del profesor respecto al uso que los estudiantes dieron al recurso: predominaban las construcciones blandas porque los estudiantes no habían realizado un acercamiento previo a las herramientas del programa circunferencia y mediatriz y porque las construcciones requerían determinar puntos de intersección entre dos objetos; [84,85,86]. Además, también se menciona el uso de arrastre permitió que los estudiantes detectaran propiedades que cumplía una representación [89].

En estos se realiza un proceso de **inspiración** donde los profesores explican algunas actuaciones de los estudiantes que involucran el software. Se interpreta

como vislumbran que los impedimentos que tienen los estudiantes cuando se enfrentan a tareas que requieren el uso de GeoGebra pueden estar relacionados con la falta de un trabajo previo que permita al estudiante identificar los atributos de cada una de las herramientas del software. Además, explicita cómo algunas funciones del programa contribuyen a que los estudiantes detecten propiedades de las figuras.

5.4 CONCLUSIONES DERIVADAS DEL SEGUNDO CICLO DE REFLEXIÓN

Respecto al Ciclo de Smyth se evidencia que en las diferentes Fases del **Ciclo dos** el proceso que más se desarrollo fue el orientado a describir: sentimientos, dudas, aciertos, acciones recurrentes entorno a nuestras prácticas y conocimiento profesional mientras orquestábamos una serie de tareas que buscaban potenciar el proceso de definir. Lo anterior se observa en la Gráfica 9.



Gráfica 9 Ciclo 2: Ciclo de Smyth

5.4.1 ASUNTO 1: RELACIÓN ENTRE LA DEFINICIÓN DE UNA FIGURA Y SU REPRESENTACIÓN.

Respecto a la relación entre la definición de una figura y su representación en la fase Pre-activa se realiza un proceso que describe la importancia que le dan los profesores al hecho de proponer actividades encaminadas a que los estudiantes puedan reconocer propiedades ya que esto garantiza que pueda tener los elementos suficientes para realizar su representación. En esta fase, mediante un proceso de inspiración, se expresa la idea que tienen estos profesores de las matemáticas donde es necesario construir un concepto a partir de otros, razón por la cual buscan que al trabajar un objeto en particular con anterioridad se realicen actividades relacionada con este objeto.

En la fase activa se describe cómo mediante sus acciones el profesor manifiesta la relación entre la representación de un objeto y sus propiedades. es posible observar que para él es importante que los estudiantes estén en la capacidad de identificar y reportar los hechos geométricos que están implícitos en una construcción

pues considera que son los elementos necesarios para que los estudiantes logren extraer propiedades. Por tanto, es posible ver que esta relación de los procesos se mantiene.

Esta relación entre representación y propiedades se hace recurrente en la fase post-activa donde una vez analizada la clase implementada, se describe cómo el profesor recurre a dos tipos de construcciones, presentadas en forma simultánea para que los estudiantes por medio de comparaciones logren identificar las diferencias entre una construcción y un dibujo. Luego, en un proceso de inspirar interpretan los profesores que la dificultad del estudiante para construir un cuadrado proviene del hecho de garantizar que se cumplan más de una condición en su representación. Consideran que cuando una representación requiere un nivel de dificultad menor, entendido como garantizar solo una condición, el estudiante está en la capacidad de ejecutar esta tarea. Por ende, al identificar una dificultad en los estudiantes, el profesor debe realizar acciones que le permitan al estudiante continuar con el desarrollo de la tarea (v.g. recordar conceptos, dar una parte de la solución). Finalmente, esto se expresa en términos de una transformación de las prácticas de los profesores porque consideran que cuando realizan una acción que les permite subsanar un imprevisto con relativo éxito, esta puede ser convertida en una práctica habitual. Estos asuntos se relacionan en la tabla 11

		FASES DE REFLEXIÓN		
		PRE-ACTIVA	ACTIVA	POST-ACTIVA
ILCO DE SMYTH	DESCRIBIR	Para los profesores al momento de proponer la actividad es importante que el estudiante logre reconocer e identificar las propiedades del objeto geométrico a trabajar, pues esto le garantiza que pueda tener los elementos suficientes para realizar su representación y un acercamiento al proceso de definir.	A través de sus intervenciones, manifiesta la relación que ha venido estableciendo entre el proceso de representar un objeto y sus propiedades. Respecto a esta relación es posible observar que para él es importante que los estudiantes estén en la capacidad de identificar y reportar los hechos geométricos que están implícitos en una construcción pues considera que son los elementos necesarios para que los estudiantes logren extraer propiedades.	El profesor James recurre a dos tipos de construcciones, presentadas en forma simultánea para que los estudiantes por medio de comparaciones logren identificar las diferencias entre una construcción y un dibujo.

	INSPIRAR	Los profesores tienen una idea de las matemáticas donde los conceptos se construyen a partir de otros y, por ende, cuando se realiza una secuencia de actividades se debe garantizar que, si una de ellas está orientada a trabajar un objeto en particular, con anterioridad se debe realizar una actividad en relación con dicho objeto.	Se interpreta como al prever las posibles respuestas de los estudiantes el profesor James está en la capacidad de orientar de una forma más eficaz la actividad matemática de los estudiantes, por tal razón se resalta como en sus acciones buscan que los estudiantes identifiquen las propiedades inmersas en las construcciones que ellos realizan.	los profesores interpretan que la dificultad del estudiante para construir un cuadrado proviene del hecho de garantizar que se cumplan más de una condición en su representación. Consideran que cuando una representación requiere un nivel de dificultad menor, entendido como garantizar solo una condición, el estudiante está en la capacidad de ejecutar esta tarea. Una creencia de los profesores que consideramos que subyace a esta acción es: al identificar una dificultad en los estudiantes, el profesor debe realizar acciones que le permitan al estudiante continuar con el desarrollo de la tarea (v.g. recordar conceptos, dar una parte de la solución).
	CONFRONTAR			El profesor Juan Carlos entiende que su par académico gestionó la clase para que los estudiantes hicieran alusión a las posibles construcciones que ellos habían presupuestado.
	TRANSFORMAR			Por esta razón, se expresa una posible adecuación de esta actividad de forma que al momento que los estudiantes realicen tareas más complejas tengan un lapso de tiempo más amplio para su desarrollo.

Tabla 11 Ciclo 2: Relación entre representación y definición

5.4.2 ASUNTO 2: USO DEL LENGUAJE MATEMÁTICO.

Respecto al uso del lenguaje en el ciclo anterior se manifestó como los profesores daban prioridad al uso del lenguaje matemático. En el ciclo 2 esta idea se manifiesta en el ciclo 2 mediante un proceso de inspiración que expresa como los profesores realizan acciones encaminadas a que los estudiantes los estudiantes sean conscientes de lo que se va a hacer y porque se hace, descubran propiedades del objeto geométrico de estudio y utilicen formas de comunicación que hagan uso de los términos matemáticos, posteriormente en la fase activa esa idea se desarrolla en un proceso de descripción en la cual prevalece el hecho que para estos profesores es habitual en sus prácticas solicitar que los estudiantes hagan uso adecuado del lenguaje matemático. Idea que se fundamenta en la implementación de la secuencia porque el profesor tiene la idea que este uso del lenguaje brinda las herramientas para que puedan comunicar con claridad sus ideas, aspecto que contribuye a que el estudiante sea consciente de las propiedades que se encuentran presentes en las ideas matemáticas que comunica. Finalmente, en la fase post-activa esta idea se hace más recurrente en las descripciones del profesor, lo

cual es una prueba fehaciente que en sus prácticas es un propósito del profesor desarrollar el lenguaje matemático de sus estudiantes.

Esto evidencia que el uso del lenguaje matemático, es un asunto arraigado a las practicas estos profesores por lo tanto no es algo que haya surgido en la reflexión sino por el contrario este ejercicio permitió corrobora lo importante que para ellos es el uso del lenguaje por parte de los estudiantes.

		FASES DE REFLEXIÓN		
		PRE-ACTIVA	ACTIVA	POST-ACTIVA
CICLO DE SMYTH	DESCRIBIR		Se destaca un asunto recurrente en el primer ciclo: para los docentes es habitual en sus prácticas solicitar que los estudiantes hagan uso adecuado del lenguaje matemático.	Esta idea es recurrente en las descripciones del profesor, lo cual es una prueba fehaciente que en sus prácticas es un propósito del profesor desarrollar el lenguaje matemático de sus estudiantes.
	INSPIRAR	Las acciones de los profesores que se han constituido desde la experiencia y caracterizan el discurso de sus clases. Se hace evidente un conjunto de acciones que realiza el profesor para que: los estudiantes sean conscientes de lo que se va a hacer y porque se hace, descubran propiedades del objeto geométrico de estudio y utilicen formas de comunicación que hagan uso de los términos matemáticos.	Asume que este uso del lenguaje brinda las herramientas para que puedan comunicar con claridad sus ideas, aspecto que contribuye a que el estudiante sea consciente de las propiedades que se encuentran presentes en las ideas matemáticas que comunica.	

Tabla 12 Uso del lenguaje matemático

5.5 COMPARATIVO ENTRE LOS CICLOS DE REFLEXIÓN

Del análisis de los datos obtenidos en cada uno de los ciclos, se derivaron algunos asuntos que para cada docente fueron significativos debido a que se presentaron de manera constante o porque sufrieron alguna transformación. A continuación, se presentan dichos asuntos que en el primer Ciclo surgen de manera independiente para los profesores Juan Carlos y James Alexander y en el segundo Ciclo, surgen de forma conjunta.

En el primer ciclo, para los profesores Juan Carlos y James se encuentran dos asuntos que sobresalieron. En primera instancia, se observa la concepción de Juan Carlos sobre la definición y las propiedades del objeto geométrico a definir, mientras que para el profesor James se orienta hacia la relación entre la definición y la construcción de la figura geométrica definida. En este primer asunto, se describe de forma constante en las fases pre-activa y activa la relación que los profesores establecen entre el proceso definir y las propiedades de un objeto. En esta sobresale las características que le atribuyen a una definición: para Juan una definición debe ser económica y tener los elementos necesarios y suficientes para

caracterizar un objeto; para James una definición contiene las propiedades suficientes para que un estudiante pueda realizar una construcción. Finalmente, en la fase post-activa estos profesores son conscientes de algunas acciones que propiciaron dificultades o bloqueos en la implementación de la clase. Para Juan es claro que presentar solo contraejemplos no es suficiente para que los estudiantes identifiquen propiedades y además el hecho de usar términos dinámicos a objetos que son estáticos puede generar una mala interpretación de sus propiedades por parte de los estudiantes. Por otra parte, en el caso de James, él es consciente que el dar una definición no es garantía para que sus estudiantes logren realizar una construcción. Al finalizar el primer ciclo, James considera que enunciar la definición no es suficiente para que los estudiantes tengan claridad acerca de la forma de involucrar en el proceso de construcción de una figura, las propiedades explícitas en su definición.

El segundo asunto que se privilegió en la reflexión de estos profesores está relacionado con el tratamiento de los conceptos previos y la simbología geométrica. Este segundo asunto tuvo bastantes aspectos en común para los dos profesores, ya que inicialmente, se evidencian las acciones que realizan para garantizar que los estudiantes tengan conocimiento de las nociones básicas de la geometría. Además, se evidencia que para ellos es importante que los estudiantes logren comunicar las relaciones geométricas entre las partes que constituyen un objeto, usando el lenguaje y la notación apropiada. Esta idea logra fundamentarse porque para ellos es de gran importancia este tipo de intervenciones por parte de sus estudiantes, pues tienen la creencia que, si ellos logran comunicar relaciones geométricas de un objeto, esto les permite evidenciar si tienen dominio de los significados de los conceptos que deben poner en juego. Por lo tanto, buscan con acciones como: la enseñanza de nociones y uso lenguaje geométrico propender que los estudiantes tengan las herramientas que le permitan la comunicación de sus ideas.

Respecto al segundo ciclo el primer asunto que surge en la reflexión conjunta de los profesores es *relación entre la definición de una figura y su representación*. Sobre este asunto se puede ver como para estos docentes es habitual en sus prácticas prever que los estudiantes tengan los elementos necesarios y suficientes para afrontar una tarea que le exija representar un objeto y extraer sus propiedades. Para ello recurren a estrategias como recordar hechos geométricos institucionalizados, promover actividades que le permitan a los estudiantes reconocer las propiedades implícitas en una construcción y mostrar como con algunos objetos geométricos se puede garantizar que estas propiedades se mantengan. En este segundo ciclo se observa como el hecho de haber planeado la gestión permitió a los docentes anticipar las respuestas de sus estudiantes y de esta manera tener las herramientas necesarias para poder sacar el máximo provecho de la secuencia implementada de forma que los estudiantes pudieran tener un acercamiento al proceso de definir. Otro asunto que sobresalió en este ciclo de reflexión es el uso del *lenguaje Matemático*, en esta evidencia nuevamente como las acciones de los

profesores se han constituido desde la experiencia y caracterizan el discurso de sus clases para que los estudiantes sean conscientes de lo que se va a hacer y porque se hace, descubran propiedades del objeto geométrico de estudio y utilicen formas de comunicación que hagan uso de los términos matemáticos.

Por otra parte, se puede observar que en el primer ciclo de reflexión de Juan Carlos hubo mayor tratamiento en los *Contenidos*, en la *Gestión* y en el *Aprendizaje*. Con ello se evidencia que para este profesor la valoración de los aprendizajes en sus estudiantes estaba ligada a su gestión y en cómo presenta los contenidos. De la misma manera, revisando el ciclo de Smyth, en la fase post-activa, se encuentra que, para Juan Carlos, *Describir*, *Inspirar* y *Confrontar* fueron los elementos que más surgieron en su reflexión, lo que confirma que para él, sus creencias sobre la enseñanza de la geometría está arraigada en lo que él aprendió en sus cursos de geometría. Para James se ve que presenta menor número de datos en la fase activa que en la post-activa pero fueron más equilibrados en la fase post-activa. Es decir, que los *Contenidos*, el *Discurso*, la *Gestión* y los *Medios* estuvieron siempre presentes en esta fase, lo que deja entre ver que su discurso juega un papel fundamental en su práctica, pues de él depende cómo presenta los contenidos, cómo gestiona su clase y cómo presenta a los estudiantes los medios que pondrá en juego para desarrollar los contenidos y cumplir los objetivos.

En relación con la fase pre-activa del segundo ciclo, se evidencia que hubo una mayor afluencia de datos de cada contenido, lo consideramos así porque el papel que jugó la reflexión guiada en esta etapa fue importante para orientar la planeación de la segunda clase implementada. Sin embargo, en la fase activa de este segundo ciclo la gestión que realizó el profesor James Alexander y el uso de los medios que se eligió para esta etapa, fueron los contenidos que emergieron durante la implementación de la segunda clase. Ello también se evidencia al analizar desde el ciclo de Smyth, primero, en la fase pre-activa que el *Describir* y el *Inspirar* fueron momentos claves para determinar la organización de la planeación de la clase y segundo, en la fase activa fue significativo el *Describir* las acciones que tuvo el profesor al momento de gestionar la clase.

Por consiguiente, se puede destacar que en la fase pre-activa del primer ciclo de reflexión se generaron la menor cantidad de asuntos, por tanto, en esta fase se reflexionó en menor cuantía respecto a las demás fases. Esto es debido a que en el diseño de la primera clase implementada por cada de los profesores de forma individual no tuvieron en cuenta los mismos aspectos que en el diseño de la secuencia planeada en conjunto, esto dio como resultado que en la fase pre-activa no se destacaran un solo asunto centrando la reflexión solo en el contenido.

Finalmente consideramos que el ejercicio de reflexionar sobre la práctica potencia en el profesor la habilidad de transformar, fundamentar o problematizar sus creencias sobre la enseñanza. Además permite al profesor ser consciente del conocimiento profesional, didáctico y pedagógico que pone en juego durante la actividad de enseñar. La reflexión permite caracterizar las propias prácticas y a partir de ello lograr una reconstrucción y transformación de la misma.

6 CONCLUSIONES

El proceso de reflexión sobre la práctica nos permitió sistematizar todas las acciones que como docentes realizamos al momento de diseñar y orquestar una clase. Esta sistematización nos permitió tener una mirada crítica hacia nuestra profesión docente ya que dimos cuenta de nuestras falencias, aciertos, hábitos y concepciones al momento de potenciar el proceso de definir.

Se encuentra que en el desarrollo de este trabajo surgieron algunos asuntos comunes entre los profesores James y Juan Carlos, los cuales estaban enfocados hacia: la importancia que dan los profesores porque el estudiante haga uso del lenguaje y terminología asociados a un concepto matemático, propender para que el estudiante tenga claridad de los conceptos necesarios para el desarrollo de cualquier tarea que implique la representación de una figura.

Reconocemos que después de reflexionar sobre nuestra práctica, aunque buscamos diseñar una secuencia que promoviera el proceso de definir, las actividades se centraron en uno de los procesos que implica la construcción de una definición, lo cual nos permitió ver como estábamos relacionando estos dos procesos. Mas sin embargo, a pesar de que no se llegó a que los estudiantes plantearan sus definiciones de cuadrado, nuestra gestión permitió orientarlos hacia un acercamiento de la actividad matemática que también esperábamos potenciar, la representación y la extracción de las propiedades de la misma.

Uno de los asuntos que marcó de forma contundente el desarrollo de este trabajo de grado fue la forma como se transformó nuestro conocimiento profesional. El enfrentarnos a situaciones que implican ser uno mismo el objeto de análisis, nos permitió llegar a cuestionar que se sabe sobre el objeto y el proceso que se espera desarrollar y cómo las acciones en el aula buscan que esto se logre. Por ende, hubo un indudable cambio en la forma como en la actualidad abordamos los procesos y actividades matemáticas. Pues tomamos conciencia de todas las implicaciones y acciones que se ponen en juego cuando se es un profesor de matemáticas.

7 REFERENCIAS

- Camilloni, A. (1995). *Reflexiones para la construcción de una Didáctica para la Educación Superior*. 1–9.
- De Villiers, M. (1998). To teach definitions in geometry or teach to define? *Proceedings of the Twentysecond International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, 2(July), 248–255.
- Flores, P. (2000). Reflexión sobre problemas profesionales surgidos durante las prácticas de enseñanza. *Revista EMA*, 5(2), 113–138. Retrieved from http://funes.uniandes.edu.co/1107/1/63_Flores2000Reflexión_RevEMA.pdf
- Herbst, P. (2005). How Can Geometry Students Understand What It Means to Define in Mathematics? *Mathematics Educator*, 15(2), 17–24.
- Jackson, P. (1968). *La vida en las aulas*.
- Llinares, S. (1999). Intentando comprender la práctica del profesor de matemáticas. *Educação Matemática Em Portugal, Espanha e Itália*, 109–132. Retrieved from
- Ñancupil, J., Carneiro, F., & Flores, P. (2013). La reflexión sobre la práctica del profesor de matemática: el caso de la enseñanza de las operaciones con números enteros. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 34, 37–46.
- Ñancupil, P. J. C., Carneiri, Fernando, R., & Flores, Martínez, P. (2013). La reflexión sobre la práctica del profesor de matemática: el caso de la enseñanza de las operaciones con números enteros. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 34, 37–46.
- Nolan, A. (2008). *Encouraging the reflection process in undergraduate teachers using guided reflection*. 7(1).
- Parada, S. (2011). *Reflexión y acción en comunidades de práctica: Un modelo de desarrollo profesional*. 329.
- Vargas, G. (2013). Documentación narrativa de las primeras experiencias de enseñanza de la física: un estudio autobiográfico (Tesis de Maestría). Universidad Pedagógica Nacional.
- Vinner, S. (1991). *The role of definitions in the teaching and learning of mathematics shlomo vinner*. 29(4), 65.

8 ANEXOS

8.1 Anexo 1: Clase implementada por el profesor James A. Cuellar



INSTITUCIÓN EDUCATIVA RURAL DEPARTAMENTAL
SAN ANTONIO
RESOLUCIÓN DE INTEGRACIÓN N° 00916 DEL 07 DE MARZO DE 2.005
RESOLUCIÓN DE RECONOCIMIENTO N° 007020 DE 05 DE DICIEMBRE DE 2.006
RESOLUCIÓN DE APROBACIÓN N° 001449 DE MARZO 05 DE 2008
PRE - ESCOLAR - BÁSICA PRIMARIA - BÁSICA SECUNDARIA Y MEDIA ACADÉMICA
EMANADAS DE LA SECRETARÍA DE EDUCACIÓN DE CUNDINAMARCA
DANE 225035000072 - NIT 900030748-3
INSPECCIÓN SAN ANTONIO - ANAPOIMA CUNDINAMARCA
lerdsanantonio2013@gmail.com



GUÍA DE GEOMETRÍA SEXTO

OBJETIVOS:

Reconocer diferentes tipos de cuadriláteros estableciendo sus propiedades, mediante su construcción con ayuda de los diferentes elementos geométricos.

Aplicar las propiedades de los cuadriláteros en la solución de problemas

CONCEPTOS BÁSICOS

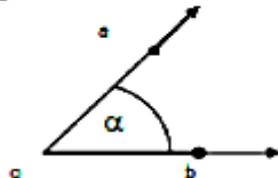
Figura plana: Es una porción del plano limitada por líneas rectas o curvas.

Segmento:  En símbolos: \overline{ab} (se lee: segmento ab)

Segmentos consecutivos: Son los que tienen un solo extremo en común



Ángulo:



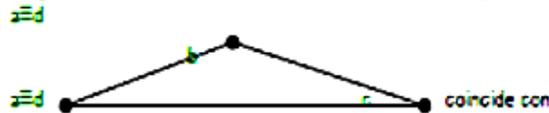
Se lee: $a\hat{o}b$

ó \hat{a}

Vértice: Punto o

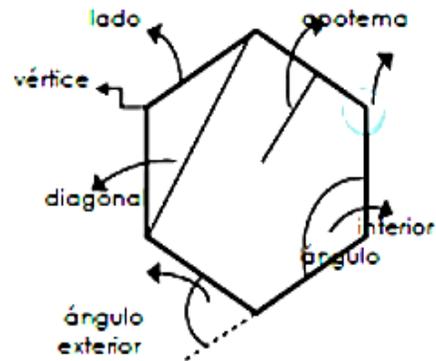
Lados $\left\{ \begin{array}{l} \overline{oa} \\ \overline{ob} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \text{(Semirrecta de origen o} \\ \text{que contiene al punto a)} \\ \text{(Semirrecta de origen o} \\ \text{que contiene al punto b)} \end{array} \right.$

Poligonal cerrada: Si los extremos del primero y del último segmento se tocan, es una poligonal cerrada.



Polígono:

- Un polígono es cóncavo cuando tiene por lo menos un ángulo cóncavo.
- Un polígono es convexo cuando tiene todos sus ángulos convexos.
- Los lados que tienen un extremo en común se denominan consecutivos.
- Los segmentos que tienen por extremos dos vértices no consecutivos se denominan diagonales.
- Se denomina apotema al segmento perpendicular al lado del polígono cuyos extremos son el punto medio del lado y el centro del polígono.
- Un polígono es regular cuando tiene todos sus lados y ángulos congruentes.
- De acuerdo con el número de lados, los polígonos se clasifican en:

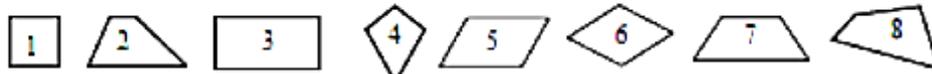


Definición: Es un polígono que tiene cuatro lados.

ELEMENTOS Y CLASIFICACIÓN:

· Realicen la siguiente actividad para clasificar los cuadriláteros.

I. Observen los cuadriláteros y completen la tabla con el número que corresponda:

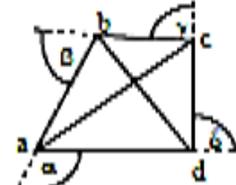


		Ningún par de lados paralelos	Solo un par de lados paralelos	Dois pares de lados paralelos
a)	Ningún lado congruente			
b)	Solo un par de lados congruentes			
c)	Dois pares de lados congruentes			
d)	Todos los lados congruentes			

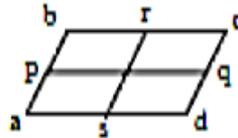
Los cuadriláteros pueden tener dos pares de lados, un par de lados o ningún par de lados paralelos. A partir de de esta observación puede realizar una primera clasificación en: paralelogramos, trapecios y trapezoides, respectivamente.

Los cuadriláteros son polígonos de cuatro lados.

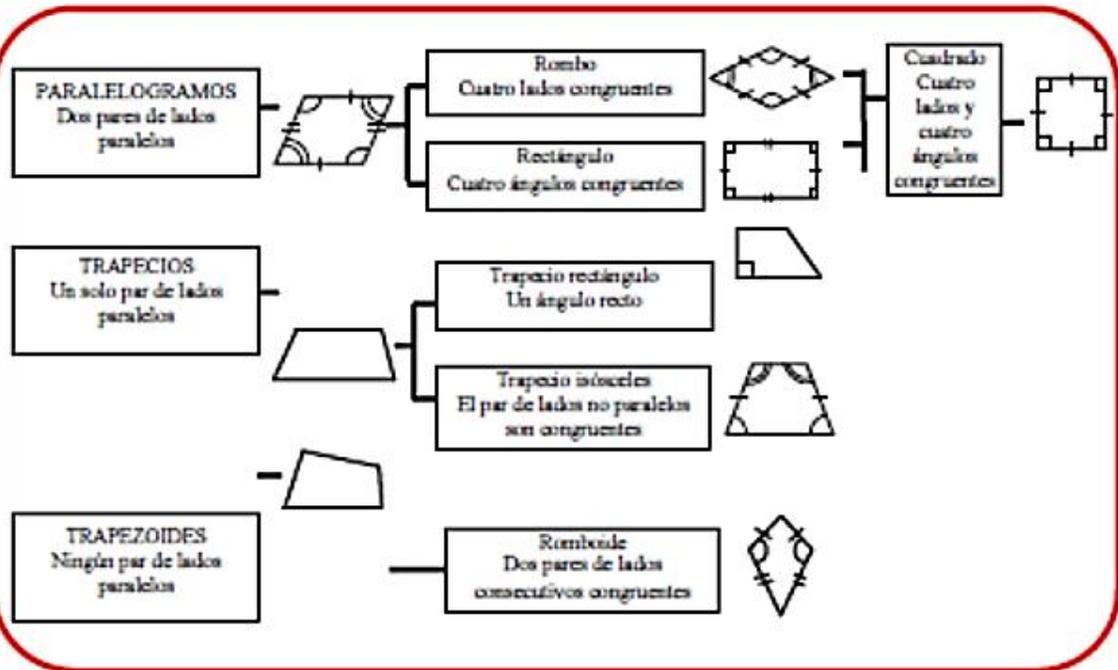
- Dos lados son consecutivos cuando tienen un extremo en común.
- Dos ángulos son opuestos cuando no tienen un lado común.
- Se denominan diagonales a los segmentos determinados por dos vértices no consecutivos.
- Bases medias son los segmentos determinados por los puntos medios de cada par de lados opuestos.



α, β, γ y δ son los ángulos exteriores



\overline{pq} y \overline{rs} bases medias



8.2 Anexo 2: Clase implementada por el profesor Juan C. Jiménez



I.E.D. MONSEÑOR AGUSTÍN GUTIÉRREZ

Geometría grado 7mo

Profesor: Juan Carlos Jiménez

ACTIVIDAD 2.

1. Describa su proceso de construcción para dibujar un cuadrilátero que tenga:

A. exactamente un par de lados opuestos paralelos.	B. ambos pares de lados opuestos paralelos.
C. un par de lados adyacentes congruentes.	D. exactamente un par de lados adyacentes congruentes.
E. todos sus lados de diferente medida.	F. dos pares de lados opuestos congruentes.

G. un ángulo recto.	H. dos ángulos opuestos rectos.
I. cuatro ángulos rectos.	J. cuatro lados congruentes.
K. Dibuja un rectángulo	L. Dibuja un cuadrado

2. Describe qué elementos debe tener una figura geométrica para que sea un rectángulo.

3. Describe qué elementos debe tener una figura geométrica para que sea un cuadrado.

4. Con tus palabras, describe lo que es un rectángulo y luego un cuadrado.

8.3 Anexo 3: Propuesta inicial de clase



I.E.R.D. SAN ANTONIO
Matemáticas Grado Sexto.
Profesor: James Alexander Cuellar
Juan Carlos Jiménez
Noviembre de 2018



CONSTRUCCIONES QUE SE DEBE TENER EN CUENTA USANDO REGLA Y COMPÁS.

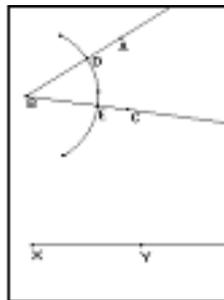
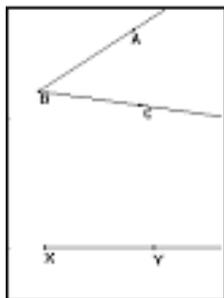


Construcción 1: Ángulos congruentes

Paso 1: Dado $\angle ABC$, trace \overline{XY}

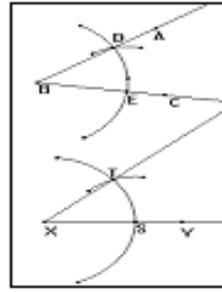
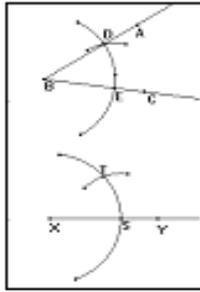
Paso 2: Con centro B , trace un arco que interseque ambos lados del ángulo en los puntos D y E .

Paso 3 Repita el arco con centro X . Llame S al punto de corte con \overline{XY} .



Paso 4 Con radio ED y centrado en S , trace el arco correspondiente. Llame T al punto de corte de los arcos.

Paso 5 Trace \overline{XT} .



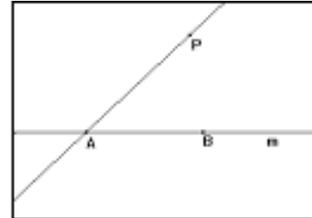
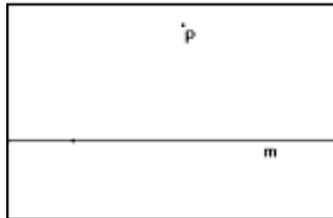
Conclusión: $\angle TXS \cong \angle ABC$



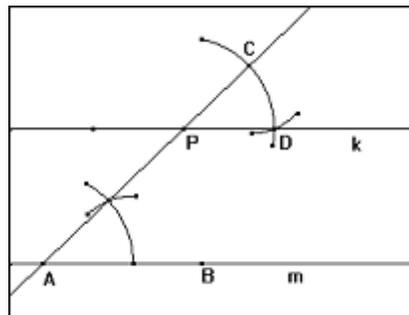
Construcción 2: Rectas paralelas

Paso 1: Escoja un punto P que no esté en la recta m .

Paso 2: Sobre la recta m marque dos puntos A y B y trace la \overline{PA} .



Paso 3: Construya en P un ángulo congruente al $\angle PAB$ que sea correspondiente a éste. Llámelo $\angle CPD$.

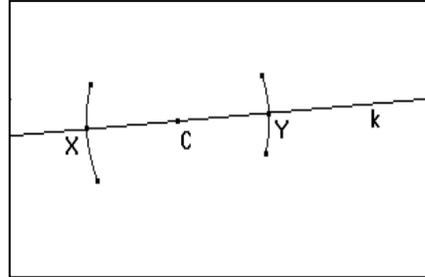
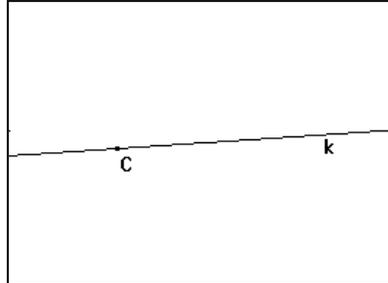


Las rectas k y m son paralelas.

Construcción 3: Recta perpendicular a una recta por un punto dado de ésta

Paso 1 Escoja un punto C sobre la recta k .

Paso 2 Con centro C y cualquier radio, marque arcos que intersequen a k en X y Y .



Paso 3 Con centro en X y radio CX , trace un arco.

Paso 4 Sin cambiar el radio y con centro Y , dibuje un arco que interseque al anterior. Llame Z al punto de intersección. La recta ZC es perpendicular a la recta k .

Construcción 4: Media geométrica

Paso 1. Sean \overline{AB} y \overline{CD} dos segmentos dados. Dibuje una recta y sobre ella construya los segmentos \overline{PQ} y \overline{QR} de tal forma que $PQ = AB$ y $QR = CD$.

Paso 2. Construya el punto medio M de \overline{PR} .

Paso 3. Con centro M y radio PM , construya la semicircunferencia para la cual \overline{PR} es un diámetro.

Paso 4. A partir de Q , construya un segmento perpendicular a \overline{PR} y llame S al punto de intersección del segmento con la semicircunferencia. QS es la media geométrica entre AB y CD .

ACTIVIDAD No. 1_INTRODUCCIÓN A GEOGEBRA

Barra de menú: Se encuentra en la parte superior izquierda de la pantalla de la ventana principal del software GeoGebra, y están los siguientes íconos: Archivo, Edita, Vista, Opciones, Herramientas, Ventana y Ayuda.

Barra de herramientas: Se encuentra debajo de la barra de menú.

Vista Algebraica: Está ubicada a la izquierda de la ventana del software GeoGebra y en ella se reporta por ejemplo las coordenadas de un punto, la expresión algebraica de una recta y una curva en general.

Vista Gráfica: Ocupa la Julior cantidad de espacio en la ventana principal. Es el lugar en donde se realizan las construcciones geométricas, de acuerdo a las herramientas que se utilicen.

A continuación, en tu cuaderno de geometría responde las siguientes preguntas:

- 1) ¿Cuántas pestañas para desplegar se observa en la barra de menú?
- 2) ¿Cuántas pestañas para desplegar se observa en la barra de herramientas?
- 3) ¿Cuántas funciones tiene cada pestaña en la barra de herramientas? Por ejemplo, la primera pestaña tiene 3 funciones. ¿cuántas funciones tiene la segunda pestaña? Etc.

Ahora, construye una tabla como la que observas en el ejemplo al final de esta página, para reportar la siguiente información: debes dibujar la representación gráfica y escribir no solamente el nombre de cada una de las herramientas de construcción que observas en la **barra de herramientas**, si no también describir brevemente su función o lo que puedes ver que hace esta herramienta con respecto a algún objeto gráfico en la ventana del software GeoGebra, **esto último lo completarás en la medida que avances en todo el curso de geometría.**

Representación gráfica de la herramienta.	Nombre de la herramienta de construcción.	Función de la herramienta de construcción.
	Elije y Mueve	Arrastra o selecciona objetos

ACTIVIDAD No. 2_CONSTRUCCIÓN BLANDA 1

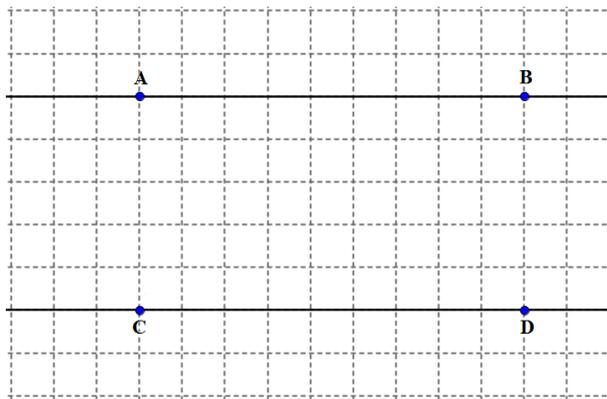
1. Selecciona la opción de **Expone u oculta la cuadrícula** que se encuentra debajo del texto de vista gráfica, o has clic derecho sobre el mouse y elije la opción de **cuadrícula**.
2. Selecciona la opción de **Nuevo punto** y ubica las siguientes coordenadas: $A(3, 6)$, $B(8, 6)$, $C(6, 2)$, $D(1, 2)$. Observarás que automáticamente el programa nombra los puntos sobre el plano.
3. Has clic en la herramienta **Segmento entre dos puntos**, luego pincha sobre el punto A con el clic izquierdo del mouse y sin soltar traza el segmento hasta el punto B , usa este procedimiento para trazar y determinar los lados del cuadrilátero $ABCD$ que son: \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} y \overline{AD} .
4. Oprime la herramienta **Elige y Mueve**, ahora observa la **Vista Algebraica**, aparecen allí dos títulos, uno de ellos llamado **Puntos**, donde puedes observar las coordenadas de cada uno de los puntos que ubicaste en el plano, has clic en el óvalo del punto A que está en esta vista algebraica y observa lo que sucede con el punto A en la vista gráfica. De la misma manera aparece otro título llamado **Segmento**, allí están representados algebraicamente los segmentos y de la misma manera que en los puntos, puedes ocultar o mostrar cada segmento. Intenta ocultar y mostrar nuevamente el cuadrilátero $ABCD$.
5. Ahora, localiza la herramienta **Polígono** para trazar el cuadrilátero $EFGH$ cuyos vértices son: $E(11, 5)$, $F(16, 5)$, $G(14, 1)$, $H(9, 1)$ y la manera de trazar el polígono es la siguiente: ubica inicialmente la coordenada $E(11, 5)$ en el plano, luego sin interesar si se suelta o no el clic izquierdo del mouse trace los demás puntos del polígono en su orden, de E a F , de F a G , de G a H y se cierra el cuadrilátero $EFGH$ de H a E , para formar los segmentos \overline{EF} , \overline{FG} , \overline{GH} y \overline{EH} .
6. Observa que se ha construido 2 cuadriláteros congruentes, es decir, que son iguales. Esto es que la medida de los lados y la medida de los ángulos correspondientes del cuadrilátero $ABCD$ y del cuadrilátero $EFGH$ son iguales. ¿puedes comprobar esta afirmación usando alguna herramienta de medida del software GeoGebra? Describe tu proceso en tu cuaderno.
7. Compara los dos tipos de construcción de ambos cuadriláteros. ¿qué diferencias puedes encontrar?

ACTIVIDAD No. 3_ CONSTRUCCIÓN BLANDA 2

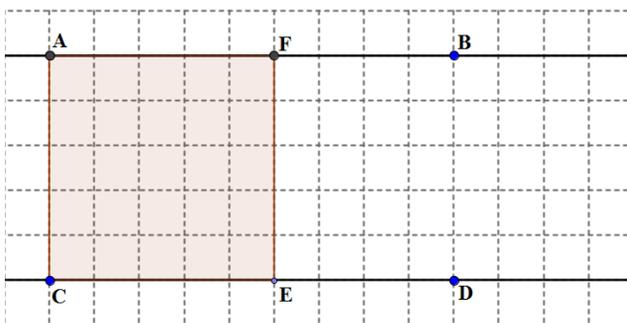
1. Haz clic derecho sobre la vista gráfica y oculta los ejes y activa la cuadrícula.
2. Ve a la opción **Recta que pasa por dos puntos** y traza la recta \overleftrightarrow{AB} de izquierda a derecha.



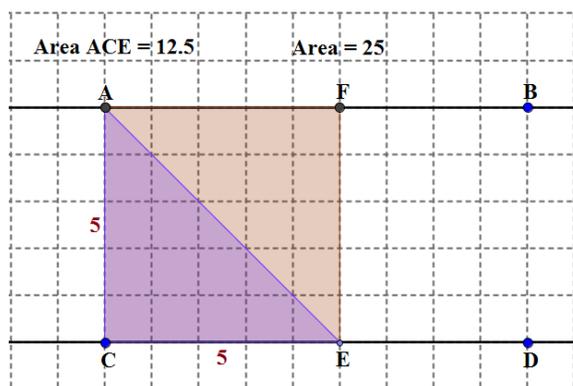
3. Cuenta 5 renglones hacia abajo y a partir del punto A de la \overleftrightarrow{AB} , y traza \overleftrightarrow{CD} con la opción **Recta que pasa por dos puntos** de izquierda a derecha.



4. Activa la opción **Polígono Regular** y construye un polígono de 4 lados, en particular un cuadrado en el siguiente sentido: primero haz clic en el punto **C**, luego cuenta 5 espacios hacia la derecha y haz clic en la intersección de la recta \overleftrightarrow{CD} con la cuadrícula para generar el punto **E**, en seguida cuenta 5 espacios hacia arriba y haz clic nuevamente en la intersección de la recta \overleftrightarrow{AB} y la cuadrícula para generar el punto **F**, después, cuenta 5 espacios hacia la izquierda y haz clic sobre el punto **A**, y finalmente, cierra el cuadrado haciendo clic nuevamente sobre el punto **C**. (Ten presente el sentido como se hace clic en cada vértice del cuadrado, porque la rotación de la figura cambia).

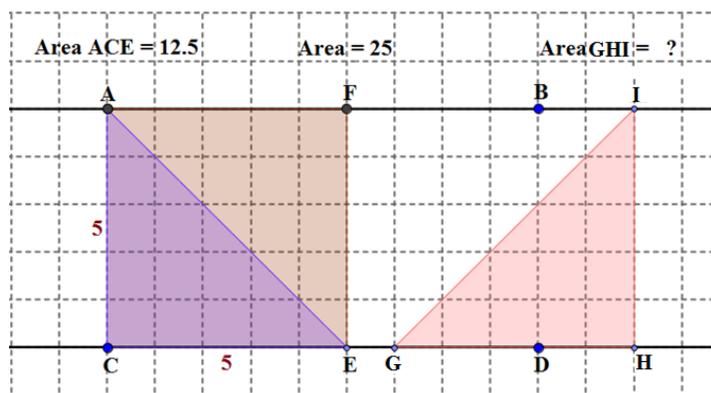


5. Elige la opción **Distancia o longitud** y mide el lado AC y el lado CE del cuadrado.
6. Con la opción **Polígono** construye el triángulo $\triangle ACE$ superpuesto al cuadrado $ACEF$, manteniendo el siguiente orden, primero has clic en el vértice A , luego en el vértice C , después en el punto E y de nuevo sobre el punto A para cerrar el triángulo.
7. Activa la opción **Área** y haz clic en el interior del $\triangle ACE$ y luego en el interior del cuadrado $ACEF$ pero fuera de la región del triángulo ACE , para determinar su área respectiva. Observen que el Área $ACE = 12.5$ corresponde al área del triángulo de color más oscuro y Área = 25 corresponde al área del cuadrado $ACEF$.



8. Haz clic en **Polígono** y construye un triángulo rectángulo congruente cuyos vértices estén sobre las rectas \overline{AB} y \overline{CD} , como se muestra en la siguiente ilustración y manteniendo el siguiente orden: teniendo como guía el vértice E y sobre la recta \overline{CD} has clic en alguna intersección con la cuadrícula para generar el punto G , luego cuenta 5 espacios hacia la derecha y haz clic sobre la inter-

sección para generar en el punto H , después, se cuenta 5 espacios nuevamente hacia arriba y cae justamente sobre la intersección de la recta \overleftrightarrow{AB} con la cuadrícula, has clic allí para generar el punto I y de nuevo sobre el punto G para cerrar el triángulo.



9. Por último, verifica con la opción **Área**, el área del triángulo ΔGHI .
10. ¿Qué sucede con el valor del área del triángulo ΔGHI , si mueves lentamente de izquierda a derecha o viceversa el vértice I sobre la recta \overleftrightarrow{AB} ?
11. ¿Qué sucede con el valor del área del triángulo ΔGHI , si mueves lentamente de izquierda a derecha o viceversa el vértice H sobre la recta \overleftrightarrow{CD} ?
12. Describe lo que observas en los pasos 10 y 11 de esta guía. ¿Qué sucedió? ¿puedes encontrar una expresión matemática que generalice toda área del cuadrado y triángulo a partir de lo observado en todo el proceso de la construcción?

ACTIVIDAD No. 4_ APRENDIENDO A DEFINIR_A

1. ¿Qué entiende por Rombo?

2. Enumere los elementos que debe tener un rombo según el punto anterior.

Elemento **1:**

Elemento **2:**

Elemento **3:**

Elemento **4:**

3. **Dibuje** en cada espacio al menos cinco figuras que cumplan los elementos que describió en el primer punto y otras cinco figuras que no cumplan.

Es un Rombo	No es un Rombo

4. Escriba una definición para rombo, usando elementos descritos en el segundo numeral.

ACTIVIDAD No. 5_ APRENDIENDO A DEFINIR_B

1. ¿Qué es un Rombo?

2. Construya un rombo usando GeoGebra y describa los pasos de la construcción.

Paso **1:**

Paso **2:**

Paso **3:**

Paso **4:**

Paso **5:**

Paso **6:**

Paso **6:**

Paso **6:**

Paso **6:**

3. Confronte la definición que generó en el primer punto con los pasos que realizó para construir el rombo y mencione si utilizó todas las propiedades reportadas en su definición para construirlo.

4. ¿Qué condiciones necesarias y suficientes debe tener un cuadrilátero para llamarse Rombo?

ACTIVIDAD No. 6_ APRENDIENDO A DEFINIR_C

1. En grupo, abran el archivo de GeoGebra llamado Cuadrilátero_Rombo.
2. Describan las propiedades que observan en el cuadrilátero $DEFG$ y que se mantienen al mover los puntos E o D .

Propiedad	1:

Propiedad	2:

Propiedad	3:

Propiedad	4:

Propiedad	5:

Propiedad	6:

3. ¿Qué propiedades, enunciadas anteriormente, son innecesarias pues pueden ser deducidas de otras ya mencionadas? Justifique su respuesta.

4. Eliminen una propiedad y verifiquen en GeoGebra si es posible construir un rombo con las demás propiedades descritas en el segundo numeral.
5. Escriban una definición de rombo de la forma *si... entonces*.

6. Escriban una definición de rombo de la forma *si y solo si*.

8.4 Anexo 4: Propuesta de clase implementada



I.E.R.D. SAN ANTONIO
Matemáticas Grado Sexto.
Profesor: James Alexander Cuellar
Juan Carlos Jiménez
Noviembre de 2018



ACTIVIDAD No. 1_EXPLORANDO GEOGEBRA

Objetivo de enseñanza

- Explorar propiedades relacionadas con la perpendicularidad de una recta a un segmento y la congruencia de ángulos y lados en un triángulo.

Objetivo de aprendizaje

- Determinar cuáles son las condiciones que debe cumplir una construcción para garantizar las propiedades establecidas.

Desempeños esperados

- Usar las herramientas que ofrece el software para la construcción de diferentes objetos geométricos.
- Reconocer a la circunferencia como una figura geométrica que garantiza, a partir de sus radios, segmentos congruentes.
- Identificar la congruencia de segmentos a partir de la mediatriz a un segmento dado.
- Identificar el rastro como herramienta que potencializa el proceso de visualización, al revelar la propiedad que cumple un objeto geométrico.
- Reconocer las bondades de una construcción blanda y robusta en la representación de objetos geométricos.

Materiales

- Tabletillas o computadores con GeoGebra (uno por parejas)
- Televisor o videobeam

Contenido matemático involucrado

- Definición de Congruencia de segmentos: Dos segmentos son congruentes si y solo si tienen la misma medida.
- Notación de congruencia simbólica y sobre la figura
- Definición de triángulos isósceles: es aquel que tiene un par de lados congruentes.
- Definición de ángulo recto: Ángulo cuya medida es de 90° .
- Definición de rectas perpendiculares: Dos o más rectas son perpendiculares (\perp) si al intersectarse forman un ángulo recto.
- Definición de triángulo rectángulo: es aquel que tiene un ángulo recto.

- Definición de mediatriz: Recta perpendicular a un segmento por su punto medio.
- Definición de punto medio: C es punto medio de \overline{AB} si y solo si, C está entre A y B y se cumple que $\overline{AC} = \overline{CB}$.
- Hecho geométrico suma de ángulos internos del triángulo: La suma de las medidas de los ángulos internos es 180° .
- Hecho geométrico de la mediatriz: Dado un segmento. La mediatriz es el conjunto de puntos en un plano que equidistan de los extremos del segmento.
- Hecho geométrico de los radios de circunferencia: Si dos segmentos son radios de una circunferencia entonces son congruentes.
- Hecho geométrico del triángulo isósceles: Los ángulos opuestos a los lados congruentes de un triángulo isósceles son congruentes.
- Hecho geométrico de un triángulo: la suma de dos lados es siempre mayor al tercer lado.
- Hecho geométrico del triángulo rectángulo: la medida del lado opuesto al ángulo recto es siempre mayor a cualquiera de los otros dos lados.

Papel del artefacto escogido

Se emplea *GeoGebra* para descubrir las propiedades que permiten garantizar la congruencia y la perpendicularidad a un segmento, las cuales permitirán construir y definir un cuadrado. Ello es posible porque el lenguaje de programación de *GeoGebra* está creado para cumplir la axiomática de la geometría plana con ayuda de las diferentes herramientas, permitiendo la manipulación de objetos geométricos. Además este recurso permite optimizar los tiempos de construcción a diferencia de la regla y el compás. Por otro lado, las funciones de arrastre y rastro, favorecen el aprendizaje en el estudiante cuando identifica nuevas propiedades sobre la construcción geométrica.

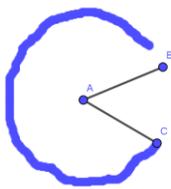
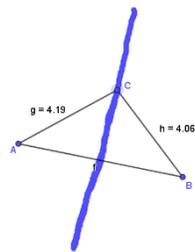
Requisitos de la secuencia

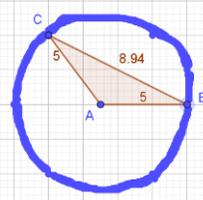
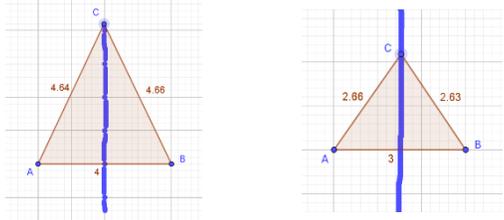
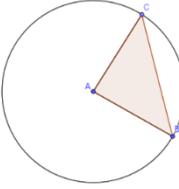
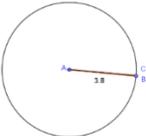
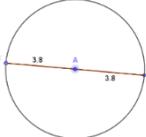
Gestión del Profesor:

Se presenta la siguiente actividad a los estudiantes:

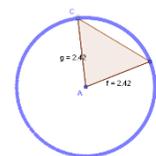
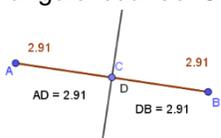
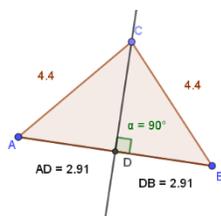
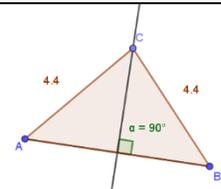
Dado el \overline{AB} . Localice un punto C que no pertenezcan al \overline{AB} para construir un ΔABC que tenga dos lados congruentes. Enuncie los pasos para realizar la construcción en GeoGebra, mencionando la herramienta del software que usa en cada paso.

Antes de iniciar la actividad, el docente hace énfasis en la definición de congruencia de segmentos, recordando que dos segmentos son congruentes cuando tienen la misma medida. Se dará a los estudiantes aproximadamente 20 minutos para que ingresen al software y que mediante la exploración de las herramientas, construyan el triángulo solicitado. Luego, se pedirá a los estudiantes comunicar a sus compañeros la construcción realizada. La Tabla 1 reporta las construcciones que se prevé que hagan los estudiantes y la gestión que se tiene presupuestada para cada una.

Construcciones blandas	
Construcción	Gestión
<p>Trazar \overline{AB} y localizar un punto $C \notin \overline{AB}$. Se traza \overline{AC} buscando que aparentemente sea congruente con \overline{AB}. Se construye $\triangle ABC$.</p>	<p>Se proyectará en el televisor la construcción propuesta. Luego, el profesor activará el rastro al punto C tratando de ubicarlo en otras posiciones del plano en las cuales también se obtiene la congruencia de \overline{AC} y \overline{AB}. Se pide a los estudiantes que comuniquen las características que observan, para esto se indaga sobre su construcción, y se cuestiona cuando al hacer arrastre con el <i>rastro</i> activado desde el punto C del triángulo ¿cómo mantener los dos lados congruentes? La anterior pregunta se hace para que identifique que aparentemente se forma una circunferencia con centro en A y radio AB y a partir de ello reconocer que todo radio de la circunferencia guarda la misma distancia del centro a cualquier punto de ella, por lo tanto, se tienen los lados congruentes. Además, el docente indaga sobre la relación que puede haber con respecto a la suma de las medidas de los ángulos internos del triángulo. Lo anterior para que identifique que la suma de las medidas de los ángulos en un triángulo es 180°. Esto se verifica usando la herramienta distancia o longitud de GeoGebra. Finalmente, el docente es quien institucionaliza la definición de triángulo isósceles, el HG. de la circunferencia y el HG. de la suma de las medidas de los ángulos en un triángulo.</p> 
<p>Trazar \overline{AB} y localizar un punto $C \notin \overline{AB}$. Se traza \overline{AC} buscando que aparentemente sea congruente con \overline{CB}. Se construye $\triangle ABC$.</p>	<p>Se proyectará en el televisor la construcción propuesta. Luego, el profesor activará el rastro al punto C tratando de ubicarlo en todas las posiciones del plano en las cuales también se obtiene la congruencia de \overline{AC} y \overline{CB}. Se pide a los estudiantes que comuniquen las características que observan, para esto se indaga sobre su construcción, y se cuestiona cuando al hacer arrastre con el <i>rastro</i> activado desde el punto C del triángulo ¿cómo mantener los dos lados congruentes? La anterior pregunta se hace para que identifique que aparentemente se forma una recta perpendicular que puede pasar por el punto medio de \overline{AB} y a partir de ello reconocer que C es equidistante a los extremos de \overline{AB}. Además, el docente indaga sobre la relación que puede haber con respecto a la suma de las medidas de los ángulos internos del triángulo. Lo anterior para que identifique que la suma de las medidas de los ángulos en un triángulo es 180°. Esto se verifica usando la herramienta distancia o longitud de GeoGebra. Finalmente, el docente es quien institucionaliza la definición de triángulo isósceles, el HG. de la mediatriz y el HG. de la suma de las medidas de los ángulos en un triángulo.</p> 

<p>Ubicar tres puntos sobre la cuadrícula buscando la congruencia de los lados y construye $\triangle ABC$.</p>	<p>Para esta construcción es posible obtener dos casos. Uno, referente a la posibilidad de determinar la circunferencia a partir de la función de <i>rastro</i> moviendo el C, para conservar la congruencia entre \overline{AC} y \overline{AB}. Por tanto se procede al igual que la construcción blanda 1.</p>  <p>La segunda opción de construcción, hace referencia a que a partir de la función <i>rastro</i> moviendo C, para conservar la congruencia entre \overline{AC} y \overline{CB}. Por tanto se procede al igual que la construcción blanda 2.</p> 
<p>Construcciones robustas</p>	
<p>Trazar \overline{AB}. Construir circunferencia con centro A y radio AB. Se localiza un punto C sobre la circunferencia. Finalmente, se construye $\triangle ABC$.</p>	<p>Se proyectará en el televisor la construcción propuesta. Luego, el profesor desplaza el punto C buscando formar posibles triángulos que cumplan la condición dada. Se pide a los estudiantes que comuniquen las características que observan bajo esta acción, y se cuestiona cuando al hacer arrastre con el <i>rastro</i> activado desde el punto C del triángulo ¿cómo mantener los dos lados congruentes? La anterior pregunta se hace para que identifiquen que los \overline{AC} y \overline{AB} son radios de la circunferencia y por lo tanto son congruentes. Además, el docente indaga sobre la relación que puede haber con respecto a la suma de las medidas de los ángulos internos del triángulo. Lo anterior para que identifique que la suma de las medidas de los ángulos en un triángulo es 180° esto se comprueba con la herramienta distancia y longitud y ángulo.</p> <p>En dado caso que la construcción no se obtenga de las producciones de los estudiantes, el docente los indagara después de analizar la construcción blanda 1, sobre que herramienta de GeoGebra permite que se mantenga la congruencia de estos lados. Buscando que los estudiantes realicen una construcción robusta donde se evidencie el HG. de la circunferencia.</p> <p>Una vez se haya realizado esta construcción el docente propone a los estudiantes analizar los siguientes casos (ver imagen), buscando que los estudiantes identifiquen bajo qué condiciones del punto C se obtiene la construcción solicitada y por lo tanto den cuenta que en el primer caso no se obtiene triángulo puesto que los \overline{AC} y \overline{AB} comparten el mismo vértice.</p> <p>Mientras en el segundo caso, los \overline{AC} y \overline{AB} son colineales y por ello no se forma triángulo. Además, la suma de dos lados es siempre mayor al tercero y en este caso el tercer lado es igual. El profesor institucionaliza la definición de triángulo isósceles, el hecho geométrico del triángulo y el HG. de la suma de</p>   

	las medidas de los ángulos en un triángulo.
<p>Trazar \overline{AB} y luego su mediatriz. Se ubica C sobre la mediatriz $M_{\overline{AB}}$ y se construye $\triangle ABC$.</p>	<p>Se proyectará en el televisor la construcción propuesta. Luego, el profesor desplazará el punto C sobre el plano para validar que pertenezca a la recta para formar todos los posibles triángulos que cumplen con la condición dada ubicándolo en todas las posiciones del plano en las cuales también se obtiene la congruencia de \overline{AC} y \overline{CB}.</p> <p>Se pide a los estudiantes que comuniquen las características que observan bajo esta acción, y se cuestiona cuando al hacer arrastre con el <i>rastro</i> activado desde el punto C del triángulo ¿cómo mantener los dos lados congruentes? La anterior pregunta se hace para que identifiquen que se forma una recta perpendicular que pasa por el punto medio de \overline{AB} y a partir de ello reconocer que C es equidistante a los extremos de \overline{AB}. Además, el docente indaga sobre la relación que puede haber con respecto a la suma de las medidas de los ángulos internos del triángulo. Lo anterior para que identifique que la suma de las medidas de los ángulos en un triángulo es 180°. Lo anterior se verifica usando la herramienta distancia o longitud y ángulo de GeoGebra. Finalmente, el docente es quien institucionaliza la definición de triángulo isósceles y el HG. de la mediatriz y el HG. de la suma de las medidas de los ángulos en un triángulo.</p> <p>En caso que el estudiante reporte la no existencia del triángulo cuando C cumpla la Interestancia con \overline{AB} el profesor recordará el hecho geométrico del triángulo institucionalizado en la socialización de la construcción anterior.</p>
<p>Trazar \overline{AB}. Usar la herramienta <i>segmento dada su longitud</i> trazar desde un extremo de \overline{AB} otro segmento de la misma longitud. Luego se construye $\triangle ABC$</p>	<p>Se proyectará en el televisor la construcción propuesta. Se le solicitará a los estudiantes que muevan B comuniquen la característica observada. Luego, el profesor explicará que al usar la herramienta <i>segmento dada su longitud</i> se garantiza la congruencia de \overline{AB} y \overline{AC} dado que por la programación del software la medida de \overline{AC} depende de la medida de \overline{AB}. Por otro lado, al mover C, se obtiene una circunferencia y se procede al igual que la construcción robusta 1.</p>

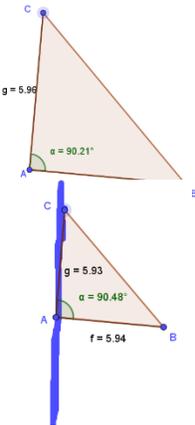
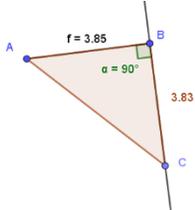


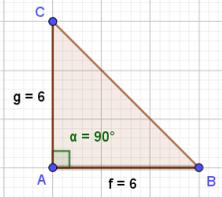
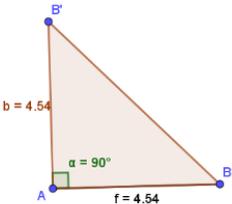
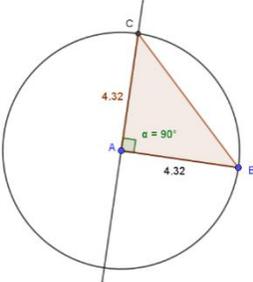
Posteriormente se propondrá a los estudiantes la siguiente actividad:

Dado el segmento \overline{AB} . Localice un punto C fuera de \overline{AB} para construir un triángulo que tenga dos lados congruentes y un ángulo recto.

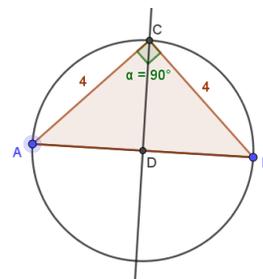
Para dar inicio a la segunda parte de la actividad, el docente hace referencia a la definición de ángulo recto recordando que su medida debe ser de 90° y a la definición de congruencia de segmentos, trabajada en la primera parte de la actividad. Se dará a los estudiantes aproximadamente 20 minutos para que ingresen al soft-

ware y que mediante la exploración de las herramientas, construyan el triángulo solicitado. Luego, se pedirá a los estudiantes comunicar a sus compañeros la construcción realizada. La Tabla 2 reporta las construcciones que se prevé que hagan los estudiantes y la gestión que se tiene presupuestada para cada una.

Construcciones blandas	
Construcción	Gestión
<p>Trazar \overline{AB} y localizar un punto $C \notin \overline{AB}$ tal que $\overline{AB} \perp \overline{AC}$ y que aparentemente sean congruentes. Se construye $\triangle ABC$.</p>	<p>Se proyectará en el televisor la construcción propuesta. Luego, el profesor activará el rastro al punto C tratando de ubicarlo en otras posiciones del plano en las cuales también se obtiene la congruencia de \overline{AC} y \overline{AB} además manteniendo un ángulo aproximadamente recto.</p> <p>Se pide a los estudiantes que comuniquen las características que observan en ese rastro. El docente indagará sobre ¿entre qué lados del triángulo queda determinado el ángulo recto? y ¿cómo es la medida del lado opuesto al ángulo recto con respecto a la medida de los otros dos lados? Para que identifique que aparentemente se forma una recta perpendicular a \overline{AB} por el punto A o por el punto B si la construcción presentada se tiene la congruencia de \overline{BC} y \overline{AB} y a partir de ello reconocer que esta recta por ser perpendicular garantiza el ángulo recto. Además, que al comparar las medidas entre los lados el opuesto al ángulo que mide aproximadamente de 90° es mayor. Adicionalmente, el docente indaga sobre la relación que puede haber con respecto a la suma de las medidas de los ángulos internos del triángulo. Lo anterior para que identifique que la suma de las medidas de los ángulos en un triángulo es 180°. Esto se verifica usando la herramienta distancia o longitud y ángulo de GeoGebra. Finalmente, el docente es quien institucionaliza la definición de recta perpendicular, triángulo rectángulo, HG. triángulo rectángulo y el HG. de la suma de las medidas de los ángulos en un triángulo.</p> 
<p>Trazar \overline{AB} y una recta perpendicular al segmento \overline{AB} por cualquier de sus extremos. Sobre la recta, localizar un punto C que aparentemente sea congruente con \overline{AB}. Se construye $\triangle ABC$.</p>	<p>Se proyectará en el televisor la construcción propuesta. Luego, el profesor activará el rastro al punto C tratando de ubicarlo en todas las posiciones del plano en las cuales también se obtiene la congruencia de \overline{AC} y \overline{CB}. Se pide a los estudiantes que comuniquen las características que observan al arrastrar C sobre la recta y el docente indagará sobre ¿entre qué lados del triángulo queda determinado el ángulo recto? y ¿cómo es la medida del lado opuesto al ángulo recto con respecto a la medida de los otros dos lados? Para que identifique que aparentemente se forma la congruencia de \overline{AC} y \overline{CB} manteniendo el ángulo recto. Además, que al comparar las medidas entre los lados el opuesto al ángulo que mide aproximadamente de 90° es mayor. Adicionalmente, el docente indaga sobre la relación que puede haber con respecto a la suma de las medidas de los ángulos internos del triángulo. Lo anterior para que identifique que la suma de las medidas de los ángulos en un triángulo es 180°. Esto se verifica usando la herramienta distancia o longitud y ángulo de GeoGebra. Finalmente, el docente es quien institucionaliza la definición de recta perpendicular, triángulo rectángulo, HG.</p> 

	<p>triángulo rectángulo y el HG. de la suma de las medidas de los ángulos en un triángulo.</p>
<p>Ubicar tres puntos sobre la cuadrícula buscando la congruencia de los lados y un ángulo recto. Se construye ΔABC.</p>	<p>Se proyectará en el televisor la construcción propuesta. Luego, el profesor activará el rastro al punto C tratando de ubicarlo en otras posiciones del plano en las cuales también se obtiene la congruencia de \overline{AC} y \overline{AB} además manteniendo un ángulo exactamente de 90°.</p>  <p>Se pide a los estudiantes que comuniquen las características que observan en la construcción con la cuadrícula, para que identifique que la cuadrícula garantiza la condición de congruencia en los segmentos del triángulo y que dos de ellos conforman un ángulo recto. Luego el docente explica que la cuadrícula garantiza la condición de perpendicularidad cuando C esté localizado sobre la recta perpendicular de la cuadrícula a \overline{AB} y la congruencia por mantener unidades constantes dentro de la cuadrícula. Adicionalmente, el docente indaga sobre la relación que puede haber con respecto a la suma de las medidas de los ángulos internos del triángulo. Lo anterior para que identifique que la suma de las medidas de los ángulos en un triángulo es 180°. Esto se verifica de forma visual o usando la herramienta distancia o longitud y ángulo de GeoGebra. Finalmente, el docente es quien institucionaliza la definición de recta perpendicular, triángulo rectángulo y el HG. de la suma de las medidas de los ángulos en un triángulo.</p>
<p>Construcciones robustas</p>	
<p>Trazar \overline{AB} y se construye un ángulo de 90° con la herramienta <i>ángulo según la medida</i>. Se construye $\Delta ABB'$.</p>	<p>Se proyectará en el televisor la construcción propuesta. Luego, el profesor trata de mover B' y al no ser posible desplazarlo comunica a los estudiantes que al utilizar la herramienta <i>ángulo según su medida</i> GeoGebra crea un punto B' haciendo una transformación en el plano que es la rotación a 90° en sentido contrario a las manecillas del reloj sobre el punto B. Por tanto, se garantiza que $\overline{AB'}$ y \overline{AB} sean congruentes. Esta construcción no se expondrá a los estudiantes puesto que implica abordar conceptos que no movilizan las propiedades para las cuales se ha diseñado esta actividad.</p> 
<p>Trazar \overline{AB} y una recta perpendicular al segmento \overline{AB} por A. Se traza circunferencia con centro en A y radio AB. Se construye ΔABC.</p>	<p>Se proyectará en el televisor la construcción propuesta. Luego, se solicita a los a los estudiantes que arrastren los vértices del triángulo. Con la intención que reporten que no es posible hacer esta acción con C, esto debido a que es el punto de intersección entre la recta perpendicular y la circunferencia. Además, que identifiquen que A y B por ser centro de la circunferencia y un extremo del segmento que representa el radio respectivamente, permiten modificar la construcción manteniendo las congruencias entre los lados. Adicionalmente, el docente indaga sobre la relación que puede haber con respecto a la suma de las medidas de los ángulos internos del triángulo. Lo anterior para que identifique que la suma de las medidas de los ángulos en un triángulo es 180°. Lo anterior se verifica usando la herramienta distancia o longitud y ángulo de GeoGebra. Finalmente, el docente es quien institucionaliza</p> 

	<p>liza la definición de triángulo rectángulo y el HG. de la circunferencia y el HG. de la suma de las medidas de los ángulos en un triángulo.</p>
<p>Trazar \overline{AB}. Usar herramienta <i>mediatriz</i> a \overline{AB}, localizar punto medio D. Trazar circunferencia centro D y radio DB. C es la intersección entre la mediatriz y la circunferencia. Se construye ΔABC.</p>	<p>Se proyectará en el televisor la construcción propuesta. Se le solicitará a los estudiantes que muevan los vértices del triángulo. Al intentar mover C, darán cuenta que no es posible por ser intersección entre dos objetos geométricos la mediatriz de \overline{AB} y la circunferencia. Al mover A o B se indica a los estudiantes que comuniquen la característica observada. Luego, el profesor indagará sobre ¿entre qué lados del triángulo queda determinado el ángulo recto? explicará que al usar la herramienta <i>mediatriz</i> se garantiza la congruencia de \overline{AC} y \overline{CB} por el HG. de la mediatriz. Luego se indagará sobre qué garantiza el ángulo recto, haciendo un acercamiento al proceso de conjeturación usando el HG. del triángulo isósceles y el HG. de la suma de las medidas de los ángulos en un triángulo.</p>



ACTIVIDAD No. 2: DEFINIENDO EL CUADRADO

Introducción

Hasta el momento se ha hecho una exploración de algunas herramientas del software de geometría dinámica GeoGebra. Además, hemos visto la diferencia entre las construcciones blandas y robustas y cómo estas últimas permiten que podamos identificar las propiedades del objeto geométrico. Asimismo, se han identificado algunos objetos geométricos que permiten garantizar algunas propiedades como la congruencia y perpendicularidad en una construcción.

Objetivo de enseñanza

- Explorar propiedades relacionadas con la perpendicularidad de una recta a un segmento y la congruencia de ángulos y lados en un cuadrado.

Objetivo de aprendizaje

- Determinar cuáles son las condiciones que debe cumplir un cuadrilátero para garantizar que sea cuadrado.

Desempeños esperados

- Usar las herramientas que ofrece el software para la construcción de diferentes objetos geométricos.
- Identificar las propiedades que debe cumplir un cuadrilátero para llamarse cuadrado.
- Usar la circunferencia como una figura geométrica que garantiza, a partir de sus radios, segmentos congruentes.
- Usar el rastro como herramienta que potencializa el proceso de visualización, al revelar la propiedad que cumple un cuadrado.
- Realizar construcciones blandas y robustas para la representación de un cuadrado dadas las condiciones iniciales.

Materiales

- Tablet o computadores con GeoGebra (uno por parejas)
- Televisor o video-beam

Contenido matemático involucrado

- Definición de Congruencia de segmentos: Dos segmentos son congruentes si y solo si tienen la misma medida.
- Notación de congruencia simbólica y sobre la figura.
- Definición de cuadrado: cuadrilátero con cuatro lados congruentes y un ángulo recto.
- Definición de Diagonal: Segmento que une dos vértices no consecutivos.
- Definición de triángulos isósceles: es aquel que tiene un par de lados congruentes.
- Definición de ángulo recto: Ángulo cuya medida es de 90° .

- Definición de rectas perpendiculares: Dos o más rectas son perpendiculares (\perp) si al intersectarse forman un ángulo recto.
- Definición de rectas paralelas: dos o más rectas son paralelas si y solo si no se intersecan y están en el mismo plano.
- Definición de triángulo rectángulo: es aquel que tiene un ángulo recto.
- Definición de punto medio: C es punto medio de \overline{AB} si y solo si, C está entre A y B y se cumple que $\overline{AC} = \overline{CB}$.
- Definición de mediatriz: Recta perpendicular a un segmento por su punto medio.
- Definición de polígono regular: polígono con todos sus lados y ángulos congruentes.
- Hecho geométrico de la mediatriz: Dado un segmento. La mediatriz es el conjunto de puntos en un plano que equidistan de los extremos del segmento.
- Hecho geométrico de los radios de circunferencia: Si dos segmentos son radios de una circunferencia entonces son congruentes.
- Hecho geométrico del triángulo isósceles: Los ángulos opuestos a los lados congruentes de un triángulo isósceles son congruentes.
- Hecho geométrico de las diagonales de un cuadrado: las diagonales de un cuadrado son congruentes, se bisecan entre si y son perpendiculares.
- Hecho geométrico de las diagonales de un cuadrado: la diagonal de un cuadrado lo divide en dos triángulos rectos isósceles congruentes.
- Hecho geométrico de rectas perpendiculares. Si dos rectas forman un ángulo recto entonces son perpendiculares.
- Hecho geométrico de rectas paralelas. Dos o más rectas paralelas y coplanares son equidistantes.

Papel del artefacto escogido

Se emplea *GeoGebra* para descubrir las propiedades que permiten garantizar la congruencia y la perpendicularidad a un segmento, las cuales permitirán construir y definir un cuadrado. Ello es posible porque el lenguaje de programación de *GeoGebra* está creado para cumplir la axiomática de la geometría plana con ayuda de las diferentes herramientas, permitiendo la manipulación de objetos geométricos. Además, este recurso permite optimizar los tiempos de construcción a diferencia de la regla y el compás. Por otro lado, las funciones de arrastre y rastro favorecen el aprendizaje en el estudiante cuando identifica nuevas propiedades sobre la construcción geométrica.

Requisitos de la secuencia

Gestión del Profesor:

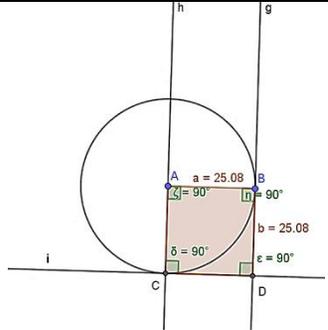
Se presenta la siguiente actividad a los estudiantes:

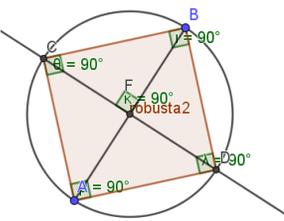
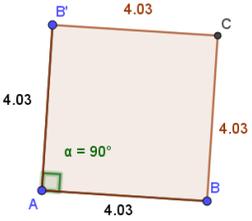
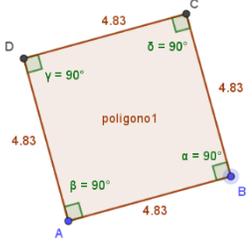
Dados los puntos A y B , construya en GeoGebra un cuadrado que tenga como vértices a A y a B . Enuncie los pasos para realizar la construcción, mencionando la herramienta del software que usa en cada paso.

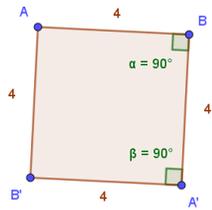
Dado el \overline{AB} . A partir de este construya un cuadrado que tenga como lado al \overline{AB} . Enuncie los pasos para realizar la construcción en GeoGebra, mencionando la herramienta del software que usa en cada paso.

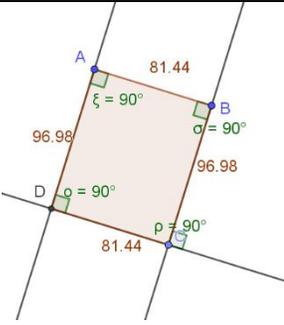
Antes de iniciar la actividad, el docente mencionará la definición de congruencia de segmentos, recordando que dos segmentos son congruentes cuando tienen la misma medida. Además, recordará los hechos geométricos institucionalizados en la clase anterior y la importancia de las construcciones robustas. Se dará a los estudiantes aproximadamente 20 minutos para que ingresen al software y que, mediante el uso de las herramientas del mismo, construyan el cuadrado solicitado. Luego, se pedirá a los estudiantes comunicar a sus compañeros la construcción realizada. La Tabla 2 reporta las construcciones que se prevé que hagan los estudiantes y la gestión que se tiene presupuestada para cada una de ellas.

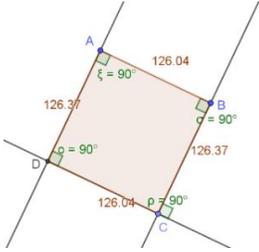
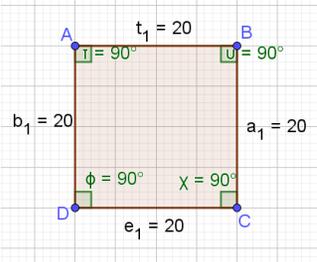
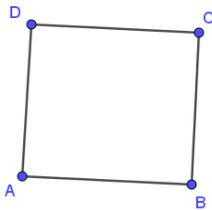
Tabla 2

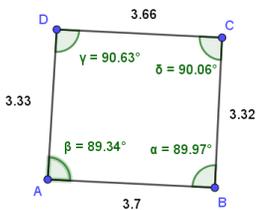
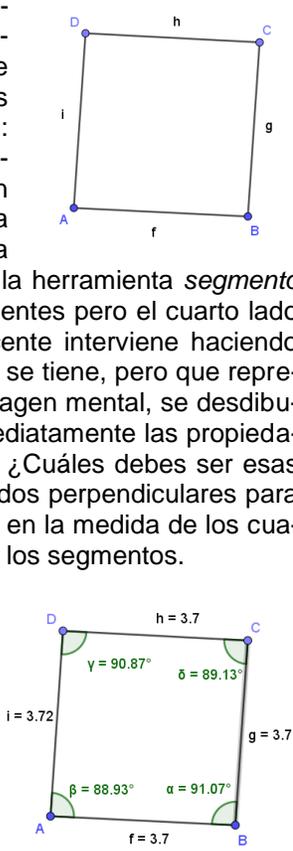
Construcciones Robustas	
Construcción	Gestión
<p>Trazar \overline{AB} y una perpendicular a \overline{AB} por A. Se traza circunferencia con centro en A y radio AB y se denota con la letra C a uno de los puntos de intersección entre la circunferencia y la perpendicular. Se traza una paralela a \overline{AB} por C y una perpendicular a este segmento por B. Se localiza la intersección D entre esta última perpendicular y la paralela. Se construye el $\square ABDC$ con la herramienta polígono.</p>	<p>Se proyectará en el televisor la construcción propuesta y el protocolo usado. Luego, el docente solicita a los estudiantes que empleen la función arrastre en los vértices de la figura construida e indagará sobre: ¿Qué características en la figura se conservan? Esto para que indiquen que se mantiene la congruencia de los lados y de los ángulos. Además, ¿Cuáles de las herramientas usadas en la construcción le garantizan que las características se mantengan? Esto para que comuniquen que por el HG. de la circunferencia y la definición de recta perpendicular institucionalizados anteriormente es posible conservar estas congruencias. Adicionalmente el docente indagará sobre qué nuevo elemento se empleó para la construcción de esta figura y si este garantiza la congruencia, buscando que se reporte la herramienta <i>paralela a una recta por un punto</i> y que los estudiantes comuniquen que las rectas paralelas no se intersecan y están en el mismo plano. Por lo tanto, es un elemento que permite trazar el segmento faltante, y garantiza la congruencia de los segmentos debido al HG. De rectas paralelas. Esto para hacer una aproximación a las condiciones que son necesarias y suficientes en una construcción. Lo anterior se comprueba con las herramientas de distancia o longitud y ángulo. El docente es quien institucionaliza la <i>Definición de Rectas Paralelas</i>.</p> 
<p>Se traza el \overline{AB} y su mediatriz. Se localiza el pun-</p>	<p>Se proyectará en el televisor la construcción propuesta y el protocolo usado. Luego, el docente solicita a los estudiantes que empleen</p>

<p>to F que es la intersección entre el \overline{AB} y la mediatriz. Se traza circunferencia con centro en F y radio alguno de los extremos del \overline{AB}. Se localiza C y D puntos de intersección entre la mediatriz y la circunferencia. Se construye el $\square ADBC$</p>	<p>la función arrastre en los vértices de la figura construida e indagará sobre: ¿Qué características en la figura se conservan? Esto para que indiquen que se mantiene la congruencia de los lados y de los ángulos. Además, ¿Cuáles de las herramientas usadas en la construcción garantizan que las características se mantengan? Esto para que comuniquen que entre el centro F y cada uno de los vértices del $\square ADBC$ se forman radios y por el HG. de la circunferencia, la definición de triángulo isósceles y el HG. de la suma de los ángulos es posible conservar estas congruencias. Adicionalmente, el docente indagará sobre las características que tienen los \overline{AB} y \overline{CD}, buscando que los estudiantes reporten que están formados por vértices no consecutivos y que son perpendiculares entre sí, en miras ir explorando las condiciones de la segunda parte de la actividad. Lo anterior se comprueba con las herramientas de distancia o longitud y ángulo. El docente es quien institucionaliza la <i>Definición de diagonal</i>.</p> 
<p>Trazar \overline{AB} y elegir la herramienta <i>ángulo dada su amplitud</i> 90°. Trazar paralela a \overline{AB} por B'. Trazar paralela a $\overline{AB'}$ por B y se localiza la intersección C entre las dos rectas trazadas. Se construye el $\square ABCB'$</p> <p>Variación</p> <p>Trazar \overline{AB} y elegir la herramienta <i>ángulo dada su amplitud</i> 90°. Trazar $\overline{AB'}$ y perpendicular a $\overline{AB'}$ por B'. Trazar perpendicular a \overline{AB} por B y se localiza la intersección C entre las dos rectas trazadas. Se construye el $\square ABCB'$</p>	<p>Se proyectará en el televisor la construcción propuesta y el protocolo usado. Luego, el docente solicita a los estudiantes que empleen la función arrastre en los vértices de la figura construida e indagará sobre: ¿Qué características en la figura se conservan? Esto para que indiquen que se mantiene la congruencia de los lados. Que solamente es posible arrastrar los puntos A y B ya que los puntos B' y C son puntos fijos por cómo se realizó la construcción. Asimismo, el ángulo de 90° no varía. Además, ¿Cuáles de las herramientas usadas en la construcción garantizan que las características se mantengan? Esto para que comuniquen que La misma herramienta <i>ángulo dada su amplitud</i> garantiza la congruencia entre los segmentos pues esta herramienta al hacer la rotación en el plano a su vez está copiando la distancia entre dos puntos. Dado que los \overline{AB} y $\overline{AB'}$ determinan un ángulo de 90° entonces $\overline{AB} \perp \overline{AB'}$. Además, que al usar la herramienta <i>paralela</i> garantizan la equidistancia entre los \overline{AB} y $\overline{CB'}$ por consiguiente la congruencia entre los $\overline{AB'}$ y \overline{CB}. Lo anterior se comprueba con las herramientas de distancia o longitud. El docente es quien institucionaliza la <i>Definición de Rectas Paralelas</i>, <i>Definición de Rectas Perpendiculares</i>, <i>HG. de rectas paralelas</i> y <i>HG. de rectas perpendiculares</i>.</p> 
<p>Se elige la herramienta <i>polígono regular</i>. Seleccionar 4 vértices. Se construye el $\square ABCD$</p>	<p>Se proyectará en el televisor la construcción propuesta y el protocolo usado. Luego, el docente solicita a los estudiantes que empleen la función arrastre en los vértices de la figura construida e indagará sobre: ¿Qué características en la figura se conservan? Esto para que indiquen que se mantiene la congruencia de los lados. Que solamente es posible arrastrar los puntos A</p> 

	<p>y B ya que los puntos C y D son puntos fijos por como se realizó la construcción. Asimismo, cada uno de los ángulos mide 90°. Además, ¿Cuáles de las herramientas usadas en la construcción garantizan que las características se mantengan? La misma herramienta <i>polígono regular</i> garantiza que el cuadrilátero $ABCD$ es cuadrado. Lo anterior se comprueba con las herramientas de distancia o longitud y ángulo. El docente es quien institucionaliza la <i>Definición de Polígono regular</i>.</p>
<p>Se elige la herramienta <i>ángulo dada su amplitud</i> 90°. Se hace clic sobre el plano para ubicar los puntos A y B. La misma herramienta determina el punto A'. Se elige la herramienta <i>ángulo dada su amplitud</i> 90°. Se hace clic sobre los puntos B y A' en este orden y la misma herramienta determina el punto B'. Se construye el $\square ABCB'$</p>	<p>Se proyectará en el televisor la construcción propuesta y el protocolo usado. Luego, el docente solicita a los estudiantes que empleen la función arrastre en los vértices de la figura construida e indagará sobre: ¿Qué características en la figura se conservan? Esto para que indiquen que se mantiene la congruencia de los lados. Que solamente es posible arrastrar los puntos A y B ya que los puntos A' y B' son puntos fijos por como se realizó la construcción. Asimismo, dos de sus ángulos miden 90°. Además, ¿Cuáles de las herramientas usadas en la construcción garantizan que las características se mantengan? La misma herramienta <i>ángulo dada su amplitud</i> garantiza la congruencia entre los segmentos pues esta herramienta al hacer la rotación en el plano a su vez está copiando la distancia entre dos puntos. Por otro lado, esta herramienta también garantiza la perpendicularidad puesto que se le ingresó que construyera un ángulo de medida 90°. Lo anterior se comprueba con las herramientas de distancia o longitud y ángulo. El docente es quien institucionaliza la <i>Definición de rectas perpendiculares</i> y <i>HG. de rectas perpendiculares</i>.</p> 

Construcciones blandas	
Construcción	Gestión
<p>Trazar el \overline{AB}. Se traza una perpendicular a \overline{AB} por A y se replica el proceso por B. A continuación, se localiza un punto C sobre la recta perpendicular a \overline{AB} por B. Se traza una paralela a \overline{AB} por C y se localiza D que es la intersección entre la perpendicular al \overline{AB} por A y la paralela. Se construye el $\square ABCD$</p>	<p>Se proyectará en el televisor la construcción propuesta y el protocolo usado. Luego, el docente solicita a los estudiantes que empleen la función arrastre en los vértices de la figura construida para que los estudiantes den cuenta que el punto D no es posible moverlo pues se obtiene de la intersección entre la paralela a \overline{AB} por C y una perpendicular a este segmento por B e indagará sobre ¿Qué características en la figura se conservan? Buscando que los estudiantes comuniquen que solo se conserva la congruencia de los ángulos debido a que es una construcción blanda.</p> <p>Además, el docente indagará sobre las herramientas que fueron usadas en esta construcción para que los estudiantes mencionen la recta paralela a un segmento por un punto. Ello para que identifiquen que son rectas que no se intersecan y están en el mismo plano, pero que estas rectas paralelas en conjunto con las perpen-</p> 

	<p>diculares son necesarias para la construcción, pero no suficientes para garantizar la congruencia.</p> <p>Después de esto, el docente usará la función de arrastre sobre los vértices desplazándolos hasta el lugar donde los segmentos tienen aproximadamente la misma medida.</p> <p>Posteriormente, el docente activará el rastro sobre el punto A desplazándolo sobre todos los posibles lugares en donde se mantiene la congruencia e indagará los estudiantes sobre ¿Cuál de las herramientas garantizará que las congruencias de los segmentos se mantengan? Buscando que los estudiantes mencionen la circunferencia con centro en B y radio AB y el HG. de la circunferencia, los cuales fueron institucionalizados en la actividad de exploración.</p> <p>Lo anterior se comprueba con las herramientas de distancia o longitud y ángulo. El docente es quien institucionaliza la <i>Definición de Rectas Paralelas</i>.</p>  
<p>Ubicar cuatro puntos sobre la cuadrícula buscando la congruencia de los lados y construye $\square ABCD$</p>	<p>Se proyectará en el televisor la construcción propuesta y el protocolo usado. Se pedirá a los estudiantes que expliquen por qué la figura resultante es un cuadrado, para que ellos indiquen que se cumple porque la cuadrícula garantiza la congruencia de los lados y los ángulos rectos. Luego, el docente solicita a los estudiantes que empleen la función arrastre en los vértices de la figura construida e indagará sobre: ¿Qué características en la figura se conservan? Buscando que reporten que bajo el arrastre no se conservan las propiedades mencionadas. Finalmente recuerda a los estudiantes que las actividades realizadas en la anterior clase se mostraron algunas de las herramientas del software que garantizan que las condiciones de congruencia entre segmentos y ángulos se mantengan. Además, recuerda la importancia de acudir a construcciones que sean robustas.</p> 
<p>Trazar el \overline{AB}. Luego, trazar \overline{BC} que aparentemente sea congruente y perpendicular con \overline{AB}. Trazar \overline{CD} que aparentemente sea congruente y perpendicular con \overline{BC}. Finalmente se traza el \overline{DA} para construir el cuadrilátero $ABCD$</p>	<p>Se proyectará en el televisor la construcción propuesta y el protocolo usado. Luego, el docente solicita a los estudiantes que empleen la función arrastre en los vértices de la figura construida e indagará sobre: ¿Qué características en la figura se conservan? Buscando que reporten que en este caso no se conservan las medidas de los lados ni de los ángulos puesto que los lados se trazaron de forma libre. Por tanto, el docente interviene haciendo alusión a la</p> 

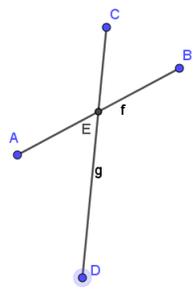
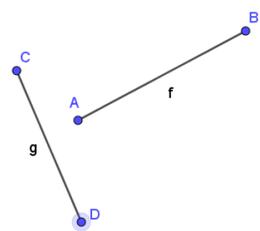
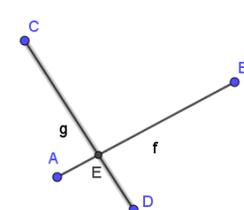
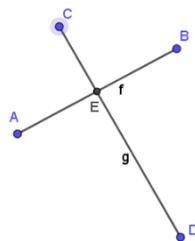
	<p>figura mental de cuadrado que se tiene, pero que representándola en geometría dinámica, esa imagen mental, se desdibuja puesto que al hacer arrastre pierde inmediatamente las propiedades de que un cuadrilátero sea cuadrado. ¿Cuáles debes ser esas propiedades? Se menciona el hecho de lados perpendiculares para garantizar los ángulos de 90° y la igualdad en la medida de los cuatro lados para garantizar la congruencia de los segmentos.</p> <p>Finalmente, se recuerda a los estudiantes que las actividades realizadas en la secuencia anterior se mostraron algunas de las herramientas del software que garantizan que las condiciones de congruencia entre segmentos y ángulos se mantengan. Además, recuerda la importancia de acudir a construcciones que sean robustas. Lo anterior se comprueba con las herramientas de distancia o longitud. El docente es quien institucionaliza la <i>Definición de Rectas Perpendiculares</i> y <i>HG. de rectas perpendiculares</i>.</p> 
<p>Trazar \overline{AB} y elegir la herramienta <i>segmento de longitud dada</i> se hace clic sobre el punto B y se escribe f para determinar el extremo C de \overline{BC}. Luego, \overline{BC} se ubica aparentemente perpendicular a \overline{AB} por B. A partir de C se construye otro segmento usando la herramienta <i>segmento de longitud dada</i> se hace clic sobre el punto C y se escribe f para determinar el extremo D de \overline{CD}. Luego, \overline{CD} se ubica aparentemente perpendicular a \overline{BC} por C, donde D está en el mismo semiplano que A. Finalmente, se traza \overline{AD} para determinar el cuadrilátero que aparentemente es cuadrado.</p>	<p>Se proyectará en el televisor la construcción propuesta y el protocolo usado. Luego, el docente solicita a los estudiantes que empleen la función arrastre en los vértices de la figura construida e indagará sobre: ¿Qué características en la figura se conservan? Buscando que reporten que en este caso no se conserva la congruencia de uno de sus lados ni tampoco la medida de los ángulos de 90° puesto que al usar la herramienta <i>segmento de longitud dada</i> 3 lados van a ser congruentes pero el cuarto lado se traza de forma libre. Por tanto, el docente interviene haciendo alusión a la figura mental de cuadrado que se tiene, pero que representándola en geometría dinámica, esa imagen mental, se desdibuja puesto que al hacer arrastre pierde inmediatamente las propiedades de que un cuadrilátero sea cuadrado. ¿Cuáles debes ser esas propiedades? Se menciona el hecho de lados perpendiculares para garantizar los ángulos de 90° y la igualdad en la medida de los cuatro lados para garantizar la congruencia de los segmentos.</p> <p>Finalmente, se recuerda a los estudiantes que las actividades realizadas en la secuencia anterior se mostraron algunas de las herramientas del software que garantizan que las condiciones de congruencia entre segmentos y ángulos se mantengan. Además, recuerda la importancia de acudir a construcciones que sean robustas. Lo anterior se comprueba con las herramientas de distancia o longitud. El docente es quien institucionaliza la <i>Definición de Rectas Perpendiculares</i> y <i>HG. de rectas perpendiculares</i>.</p> 

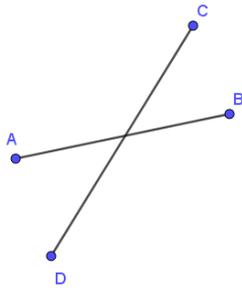
Segunda parte

Gestión del docente: Antes de iniciar la segunda parte de la secuencia. El docente realiza una realimentación del trabajo realizado. Esto buscando que los estudiantes recuerden las Definiciones y Hechos Geométricos institucionalizados hasta el momento. Además, recuerda las ventajas de usar construcciones que sean robustas.

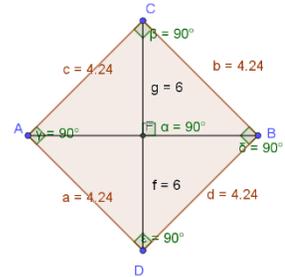
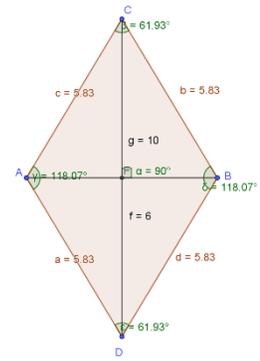
A continuación, comenta que luego de observar las diferentes formas en las que se puede construir un cuadrado y sus propiedades se proponen las siguientes tareas.

Tarea 2.1: Sean \overline{AB} y \overline{CD} las diagonales de un cuadrilátero $ACBD$. ¿Qué condiciones deben cumplir estas diagonales para que el cuadrilátero sea un cuadrado? Emplee las herramientas **Distancia o Longitud** y **Ángulo** y la función de arrastre para la explorar la relación entre estos segmentos.

Exploración realizada			
<p>A esta altura de trabajo, los estudiantes volverán a realizar un proceso de exploración, pero esta vez con las diagonales de un cuadrilátero y deben reconocer que para que este cuadrilátero sea cuadrado sus diagonales deben intersectarse. Luego vendrá el trabajo fuerte de cuestionarse en donde deben intersectarse, cómo deben ser las diagonales, apuntando a la congruencia y a la perpendicularidad. Por lo anterior, los estudiantes deben reconocer que las siguientes ubicaciones de las diagonales no conformarán un cuadrado.</p>			
			
Las diagonales no son congruentes y no se intersectan.	Las diagonales se intersectan, no son congruentes ni perpendiculares.	Las diagonales se intersectan en su punto medio, pero no son congruentes. Son perpendiculares.	Las diagonales se intersectan en su punto medio, pero no son congruentes. No son perpendiculares.
Construcción	Gestión		

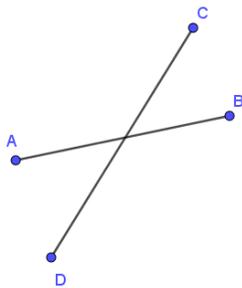


En caso de que los estudiantes busquen solo la congruencia de los lados obtendrán la representación de un rombo. Por tanto se proyecta en el tablero la exploración realizada, el docente indagará ¿Qué condiciones deben cumplir estas diagonales para que el cuadrilátero sea un cuadrado? Buscando que los estudiantes reporten que sean perpendiculares. Además, indagará ¿esta construcción representa un cuadrado? Para que los estudiantes den cuenta que, a pesar de tener lados congruentes, el hecho que las diagonales sean perpendiculares y se bisequen no es suficiente para que el cuadrilátero sea un cuadrado. Una vez se haya llegado a esta conclusión, el docente indagará entonces según las actividades anteriores ¿Cuáles son las características que hacen al cuadrilátero cuadrado? Para que los estudiantes retomando las actividades anteriormente realizadas reporten la congruencia entre lados y los ángulos de 90° .

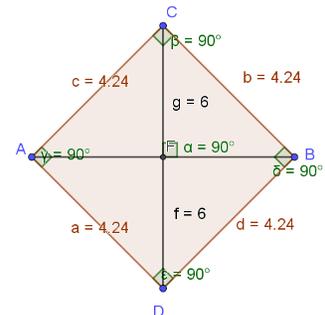


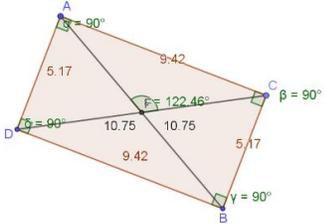
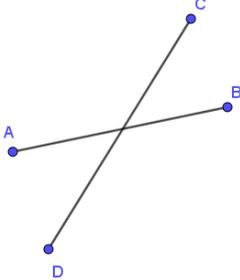
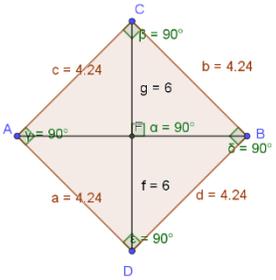
Posteriormente el docente indicará a los estudiantes que desplacen los vértices de la figura buscando el lugar donde los lados son congruentes y los ángulos internos midan 90° .

Finalmente, indagará nuevamente ¿Qué condiciones deben cumplir estas diagonales para que el cuadrilátero sea un cuadrado? Buscando que los estudiantes reporten que las diagonales se deben bisecar, ser congruentes y perpendiculares. El docente es quien finalmente institucionaliza el hecho geométrico de las diagonales de un cuadrado.



En caso de que los estudiantes busquen solo que los ángulos internos del cuadrilátero sean de 90° obtendrán la representación de un rectángulo. Por tanto, se proyecta en el tablero la exploración realizada, el docente indagará ¿Qué condiciones deben cumplir estas diagonales para que el cuadrilátero sea un cuadrado? Buscando que los estudiantes reporten que sean congruentes. Además, indagará ¿esta construcción representa un cuadrado? Para que los estudiantes den cuenta que, a pesar de tener ángulos que miden 90° , el hecho que las diagonales sean congruentes y se bisequen no es suficiente para que el cuadrilátero sea un cuadrado. Una vez se haya llegado a esta conclusión, el docente indagará entonces según las actividades anteriores ¿Cuáles son las características que hacen al cuadrilátero cuadrado? Para que los estu-



	<p>diantes retomando las actividades anteriormente realizadas reporten la congruencia entre lados y los ángulos de 90°.</p> <p>Posteriormente el docente indicará a los estudiantes que desplacen los vértices de la figura buscando el lugar donde los lados son congruentes y los ángulos internos miden 90°. El docente es quien finalmente institucionaliza el hecho geométrico de las diagonales de un cuadrado.</p> <p>Finalmente, indagará nuevamente ¿Qué condiciones deben cumplir estas diagonales para que el cuadrilátero sea un cuadrado? Buscando que los estudiantes reporten que las diagonales se deben bisecar, ser congruentes y perpendiculares. El docente es quien finalmente institucionaliza el hecho geométrico de las diagonales de un cuadrado.</p> 
	<p>Se proyecta en el tablero la exploración realizada, el docente indagará ¿Qué condiciones deben cumplir estas diagonales para que el cuadrilátero sea un cuadrado? Buscando que los estudiantes reporten que sean congruentes, se bisecan y sean perpendiculares. Además, indagará ¿esta construcción representa un cuadrado? Para que los estudiantes den cuenta que, este tiene cuatro lados congruentes y a su vez estos forman ángulos que miden 90°. Por tanto, se institucionaliza que si las diagonales son congruentes, se bisecan y son perpendiculares es condición necesaria y suficiente para que el cuadrilátero sea un cuadrado. El docente es quien finalmente institucionaliza el hecho geométrico de las diagonales de un cuadrado.</p> 

Gestión del docente: Para esta segunda tarea, se pedirá a los estudiantes que comuniquen las propiedades que observaron en sus construcciones durante toda la sesión para construir un cuadrado. El profesor las enlistará en el tablero y a partir de estas se les solicitará realizar la siguiente tarea.

Tarea 2.2: Elimine una de estas propiedades y verifique si es posible construir nuevamente el cuadrado. De ser posible explique por qué.

Exploración realizada	
Posibles propiedades que comuniquen que un cuadrado debe tener:	
<ol style="list-style-type: none"> 1. Cuatro lados congruentes y cuatro ángulos rectos 2. Cuatro lados congruentes y tres ángulos rectos 3. Cuatro lados congruentes y dos ángulos rectos 4. Cuatro lados congruentes y un ángulo recto 5. Diagonales congruentes, perpendiculares y que se bisecten. 	
No.	Gestión
	<p>Al quitar la condición de cuatro lados congruentes y mantener los cuatro ángulos rectos, los estudiantes deben comunicar que los ángulos rectos garantizan que los cuatro lados sean perpendiculares, pero que no es condición suficiente para obtener siempre un cuadrado, puesto que pueden generar un cuadrilátero con dos pares de lados adyacentes no congruentes o con dos pares de lados opuestos paralelos congruentes entre sí, pero no entre los pares. De otra manera se va a obtener un rectángulo. A partir de ello el profesor presenta la definición de rectángulo.</p> <p>Al quitar la condición de cuatro ángulos rectos y mantener los cuatro lados congruentes, los estudiantes deben comunicar que solo con los cuatro lados congruentes no garantizan obtener siempre un cuadrado. Por lo tanto, es una condición necesaria pero no suficiente, puesto que pueden generar un cuadrilátero con dos pares de ángulos opuestos congruentes no rectos. De otra manera se va a obtener un rombo. A partir de ello el profesor presenta la definición de rombo.</p> <p>Sin embargo, se puede dar que los estudiantes caigan en la cuenta que al quitar la condición cuatro ángulos rectos y dejar los cuatro lados congruentes, pueden usar tres o dos o un ángulo recto, puesto que en ningún momento se indica que no deba tener ángulos rectos, solo que no sean cuatro. En este caso, sí lograrán construir un cuadrado.</p>
	<p>Al quitar la condición de cuatro lados congruentes y mantener tres ángulos rectos, los estudiantes deben comunicar que los ángulos rectos garantizan que los cuatro lados sean perpendiculares, pero que no es condición suficiente para obtener siempre un cuadrado, puesto que pueden generar un cuadrilátero con dos pares de lados adyacentes no congruentes o con dos pares de lados opuestos paralelos congruentes entre sí, pero no entre los pares. De otra manera se va a obtener un rectángulo. A partir de ello el profesor presenta la definición de rectángulo.</p> <p>Al quitar la condición de tres ángulos rectos y mantener los cuatro lados congruentes, los estudiantes deben comunicar que solo con los cuatro lados congruentes no garantizan obtener siempre un cuadrado. Por lo tanto, es una condición necesaria pero no suficiente, puesto que pueden generar un cuadrilátero con dos pares de ángulos opuestos congruentes no rectos. De otra manera se va a obtener un rombo. A partir de ello el profesor presenta la definición de rombo.</p> <p>Sin embargo, se puede dar que los estudiantes caigan en la cuenta que al quitar la condición tres ángulos rectos y dejar los cuatro lados congruentes, pueden usar dos o un ángulo recto, puesto que en ningún momento se indica que no deba tener ángulos rectos, solo que no sean tres. En este caso, sí lograrán construir un cuadrado.</p>
	<p>Al quitar la condición de cuatro lados congruentes y mantener dos ángulos rectos, los estudiantes deben comunicar: por un lado si los ángulos rectos son opuestos, se garantiza que se tenga dos pares de lados perpendiculares pero ello no garantiza que los lados opuestos sean paralelos. Por otro lado, si los dos ángulos rectos son</p>

	<p>adyacentes, ellos garantizan que un par de lados opuestos serán paralelos y perpendiculares a un tercer lado, pero no necesariamente al cuarto lado. Por ello, tener dos ángulos rectos sin los cuatro lados congruentes no es condición suficiente para construir un cuadrado.</p> <p>Al quitar la condición de dos ángulos rectos y mantener los cuatro lados congruentes, los estudiantes deben comunicar que solo con los cuatro lados congruentes no garantizan obtener siempre un cuadrado. Por lo tanto, es una condición necesaria pero no suficiente, puesto que pueden generar un cuadrilátero con dos pares de ángulos opuestos congruentes no rectos. De otra manera se va a obtener un rombo. A partir de ello el profesor presenta la definición de rombo.</p> <p>Sin embargo, se puede dar que los estudiantes caigan en la cuenta que al quitar la condición dos ángulos rectos y dejar los cuatro lados congruentes, pueden usar un ángulo recto, puesto que en ningún momento se indica que no deba tener ángulos rectos, solo que no sean dos. En este caso, sí lograrán construir un cuadrado.</p>
	<p>Al quitar la condición de cuatro lados congruentes y mantener un ángulo recto, los estudiantes deben comunicar que un ángulo recto garantiza que se tenga un par de lados perpendiculares pero no los otros tres pares de lados. Por ello, tener un ángulo recto sin los cuatro lados congruentes es condición necesaria pero no es suficiente para construir un cuadrado.</p> <p>Al quitar la condición de un ángulo recto y mantener los cuatro lados congruentes, los estudiantes deben comunicar que solo con los cuatro lados congruentes no garantizan obtener siempre un cuadrado. Por lo tanto, es una condición necesaria pero no suficiente, puesto que pueden generar un cuadrilátero con dos pares de ángulos opuestos congruentes no rectos. De otra manera se va a obtener un rombo. A partir de ello el profesor presenta la definición de rombo.</p>
	<p>Ver análisis de gestión tarea 2.1 en <i>exploración realizada</i>.</p>

8.5 Anexo 5: Descripción de la clase implementada

La clase se implementó en el grado 602 de la IERD San Antonio del municipio de Anapoima, la cual cuenta con 16 estudiantes. Esta clase se desarrolló en una sala informática, que, aunque cuenta con 20 portátiles, solamente 7 tienen instalado el programa GeoGebra. Debido a esto, las actividades propuestas se desarrollaron en pequeños grupos de 5 parejas y dos ternas de estudiantes. La cantidad de estudiantes que tenía cada grupo cambió en relación con lo planeado, porque se tenía presupuestado que 8 equipos tenían el programa que se iba a utilizar.

La clase inició con mi intervención. Para ello, comuniqué a los estudiantes las instrucciones en términos de la disposición del salón, solicitando que se formaran las parejas y ternas según la disponibilidad de equipos de la sala. Una vez organizados los grupos de trabajo, cada uno con su respectivo portátil, se presentó a los estudiantes la actividad prevista como de exploración. Para esto hice lectura del siguiente enunciado, el cual estaba proyectado en un televisor:

Dado el \overline{AB} . Localice un punto C que no pertenezcan al \overline{AB} para construir un $\triangle ABC$ que tenga dos lados congruentes. Enuncie los pasos para realizar la construcción en GeoGebra, mencionando la herramienta del software que usa en cada paso.

Luego de presentar el ejercicio a los estudiantes, recordé lo planeado en la gestión de clase y las charlas sostenidas en las asesorías¹, donde se exponía la importancia de las indicaciones iniciales para el desarrollo de la actividad. Por tanto, como orientaciones preliminares recordé a los estudiantes la *Definición de Congruencia de segmentos: Dos segmentos son congruentes si y solo si tienen la misma medida*. Esta definición había sido institucionalizada en las clases de geometría del primer y segundo periodo cuando había surgido en construcciones iniciales de segmentos congruentes con regla y compás. Esta es una acción que habitualmente realizo: recordar las definiciones o propiedades de los objetos que se han trabajado con anterioridad y que están involucrados en la actividad que se proponga.

Una vez realizada esta intervención sobre la actividad, se invitó a los estudiantes a que, en el momento de realizar la actividad, exploraran todas las herramientas con las que contaba el programa. Para tal fin, les señalé diferentes herramientas y les indiqué la forma cómo podían desplegar los menús de herramientas. Di esa indicación porque consideré que esto ayudaría a que los estudiantes no eligieran al azar las herramientas del programa, sino que al identificar diferentes herramientas antes de construir podrían utilizarlas de forma más consciente.

Luego de estos preliminares, solicité a los estudiantes que iniciaran con el desarrollo de la actividad. Mientras que ellos realizaban la construcción con las condi-

¹ Las asesorías se desarrollan semanalmente con el profesor Juan Carlos Jiménez (estudiante de la Maestría en Docencia de la Matemática) y la profesora Claudia Vargas (profesora de la Universidad Pedagógica Nacional)

ciones solicitadas, yo pasé por cada una de las parejas y ternas observando el trabajo que realizaban, esto buscando clasificar las producciones de los estudiantes en términos de las respuestas que se habían previsto con anterioridad. Este recorrido me permitió encontrar algunas construcciones que llamaron mi atención y que evocaron en mí la conversación e intercambio de ideas que había entablado con mi compañero en el momento en el estructurar el documento donde se incluía la gestión de dicha clase.

En este orden de ideas, la primera construcción que llamó mi atención fue la realizada por el grupo conformado por Uriel y Karol. Ellos buscaban construir un $\triangle ABC$ que tuviera los $\overline{AC} \cong \overline{CB}$, lo cual se asemejaba a la construcción blanda propuesta en la planeación de la actividad² para institucionalizar la definición de mediatriz y el hecho geométrico de mediatriz³. Al acercarme a este grupo indagué a los estudiantes sobre la forma en que usaron el software para construir el triángulo con las condiciones dadas. Ellos reportaron el uso de la herramienta polígono para formar un triángulo partiendo del \overline{AB} y el punto C. Luego, usaron la función de arrastre sobre el punto C buscando que $\overline{AC} \cong \overline{CB}$. Para ello desplazaron de forma vertical el punto C tratando de ubicarlo en lo que denominaron “el centro del \overline{AB} ”. En el momento en que desplazaron este punto recordé las charlas con mi compañero de trabajo sobre la gestión, cuando hablábamos de la forma en que los estudiantes buscarían que fueran $\overline{AC} \cong \overline{CB}$ arrastrando el punto C sobre el lugar geométrico que ocuparía la mediatriz.

La siguiente es la transcripción de la interacción con Karol y Uriel en el momento en el que me explicaron la construcción realizada. Esta transcripción hace evidente que para mí es importante que los estudiantes hagan uso apropiado del lenguaje geométrico cuando necesitan comunicar una propiedad de un objeto geométrico.

Profesor: *Nómbrenme cuáles son los segmentos que ustedes buscaron que sean congruentes. Cuáles son aquellos que ustedes quieren que sean iguales (en medida).*

Uriel: *El B y el C.*

Profesor: *¿Cómo se nombra un segmento?*

Karol: *del C al A y el B. ¡Mentiras!*

Profesor: *del C al A es este (señala el \overline{CA} con el puntero).*

² Esta gestión de la actividad es producto de las asesorías de trabajo de grado y del diálogo conjunto con mi compañero de trabajo de grado.

³ La descripción de la gestión de esta construcción se encuentra en la actividad de exploración parte 1, construcciones blandas.

- Uriel:** del C al B (respondiendo luego de la intervención del docente)
- Profesor:** ¡ah y el (segmento) CB! osea que el (segmento) CA y el CB son los que ustedes quieren que sean congruentes. Muéstrame cómo hiciste. ¿Cuál punto moviste?
- Karol:** el B
- Profesor:** ¿por qué B?
- Karol:** porque intentamos con el A y no nos dio.
- Profesor:** cuando yo les presenté el enunciado, mencioné que partíamos de un \overline{AB} y un punto C y les solicité que buscaran cuáles eran las condiciones del punto C para que el triángulo tuviera dos lados congruentes. En este orden de ideas, ¿cuál punto deben mover?
- Uriel:** el punto C.
- Profesor:** ¿Cómo debo mover el punto C de tal manera que los segmentos sean congruentes?
- Uriel:** ubicándolo en el centro
- Profesor:** ¿cómo lo ubicaría en el centro? [...]
- Uriel:** (arrastra el punto C hasta ubicarlo en el punto medio de \overline{AB} . Aunque la función Rastro no está activada, el arrastre describe el lugar geométrico correspondiente a la mediatriz de este segmento)
- Profesor:** ¿están siendo congruentes los segmentos?
- Uriel:** no
- Profesor:** ¿por qué cree que no están siendo congruentes?
- Uriel:** porque quedó torcido (haciendo énfasis que al desplazar el punto C no quedó exactamente ubicado en el centro del segmento)

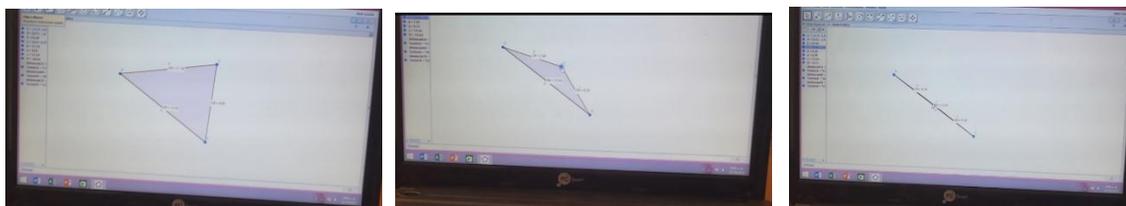


Imagen 1 Construcción realizada por Karol y Uriel

Continuando con la observación de las construcciones, la segunda que llamó mi atención fue la realizada por los estudiantes Martín y Jean Carlo. Ellos realizaron

la construcción del ΔABC que tuviera $\overline{AB} \cong \overline{BC}$. Al igual que la anterior, era una de las construcciones blandas que se habían previsto en la planeación y en esta se tenía presupuestada una gestión para introducir la definición de circunferencia y el hecho geométrico de la circunferencia a partir de dicha construcción, la cual a grandes rasgos consistía en activar el rastro del punto C y arrastrarlo hacia lugares en el plano que mantuvieran la congruencia. En la planeación se consideraba este proceso con $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, lo cual resulta ser equivalente.

Al acercarme a los estudiantes les indagué sobre la forma como habían utilizado el software para realizar esta construcción. Buscando que me reportaran los pasos y herramientas del software que usaron. A este interrogante ellos respondieron que partieron del \overline{AB} y el punto C. Luego usaron la herramienta *segmento* para formar el ΔABC que tuviera $\overline{AB} \cong \overline{BC}$. Para llegar a esta congruencia, usaron la herramienta *distancia o longitud* y luego, con la función de *arrastre*, desplazaron el punto C por el plano del software hasta que fueran congruentes.

En la interacción con este grupo, al igual que con todos los otros, insistí bastante que al momento de comunicar sus ideas procuraran usar el lenguaje adecuado, pues como lo mencioné antes para mí es importante porque les permite comunicar sus ideas con mayor claridad, siendo realmente conscientes de las relaciones o propiedades que observan y a su vez les permite ampliar la imagen conceptual que tienen del objeto geométrico. Que es una de las finalidades de mi quehacer docente.

Este recorrido terminó con el grupo de Simón y Ángel, ellos usaron la cuadrícula para ubicar el \overline{AB} y el punto C y la congruencia de $\overline{AC} \cong \overline{BC}$. De la misma manera que en los casos anteriores, esta construcción blanda estaba contemplada en el documento de gestión de la clase y según a la congruencia que se llegaba, podría institucionalizarse el hecho geométrico de la circunferencia o de la mediatriz. Al acercarme a este grupo, indagué nuevamente sobre la forma como usaron el software y las herramientas que tenían a su disposición. Ellos respondieron que ubicaron el \overline{AB} de forma vertical en la cuadrícula y el punto C unos cuantos cuadros hacia la derecha, luego con la ayuda de la herramienta *segmento* construyeron el ΔABC que tuviera $\overline{AC} \cong \overline{BC}$. Adicional a esto, Ángel mostró la validez de su construcción mostrando que al usar la herramienta *segmento o longitud* se obtenía que $\overline{AC} \cong \overline{BC}$, en ese momento noté que habían usado un número par de cuadros, lo cual captó mi atención. En ese instante, recordé que en las discusiones con mi compañero de trabajo sobre la forma en que podían usarla, él daba mucha importancia si el segmento lo ubicaban en número par o impar de cuadros, argumentando que al ser número impar al estudiante se le podía dificultar ubicar el punto C en caso de que buscaran la congruencia entre los $\overline{AC} \cong \overline{BC}$.

Una vez terminada su intervención, pregunté a los estudiantes por qué usaban la cuadrícula. A este interrogante Ángel respondió “*porque no quiero equivocarme y busco ser exacto*”. Esta pregunta surgió debido a que uno de sus compañeros al

observar que habían hecho uso de la cuadrícula lo interpretaron como una forma de hacer trampa. A este comentario reaccioné diciendo que las herramientas se usan teniendo una intencionalidad que en el caso del grupo de Ángel es la que le garantiza la congruencia, pues dada la exactitud tiene la certeza que los segmentos son iguales en su medida.

A continuación, se muestra una imagen de la construcción realizada por el grupo de Ángel y Simón.

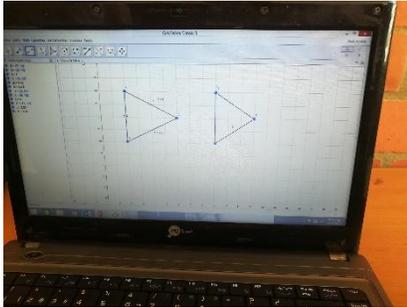


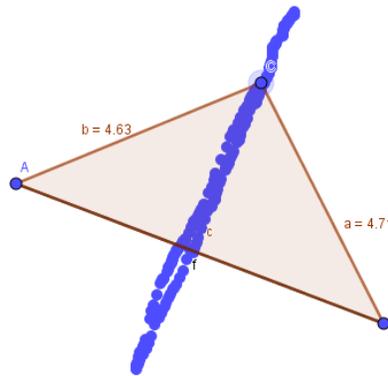
Imagen 2 Construcción realizada por Ángel y Simón

Este recorrido me permitió observar las construcciones y determinar cuáles iban a ser parte de la socialización, de allí tal como se tenía previsto buscaba poder institucionalizar el hecho geométrico de la circunferencia y la mediatriz como objetos que permiten garantizar la congruencia de los segmentos que en este caso eran los lados de un triángulo.

Ninguno de los grupos realizó una construcción robusta lo cual se tenía presupuestado. De este recorrido observe que tres grupos realizaron una construcción similar a la de la circunferencia, dos grupos a la mediatriz y dos con cuadrícula.

De esta manera procedí a realizar la socialización de las construcciones. Para este ejercicio invité a uno de los integrantes del grupo para que pasara de forma libre a exponer su trabajo. La primera construcción en ser socializada fue la realizada por el grupo de Karoll y Uriel. Ellos realizaron una construcción blanda que dadas las condiciones del ejercicio buscaba la $\overline{AC} \cong \overline{CB}$. Al pedirle que explicara a sus compañeros la forma como realizó su construcción, Uriel reportó los pasos que se presentaron anteriormente cuando me acerqué a indagar sobre las formas como habían empleado el software, luego, realicé mi intervención buscando que los estudiantes identificaran en la construcción realizada la forma de garantizar la congruencia de los segmentos. Para tal fin indagué a los estudiantes sobre los segmentos que se pretendían fueran congruentes, esto con el fin que centraran su atención en estos de tal manera que al activar el rastro pudieran dar respuesta a las interrogantes que iba a proponer. A esta interrogante identificaron $\overline{AC} \cong \overline{CB}$. Luego de esto, activé el rastro buscando los lugares en los que aparentemente fueran congruentes los segmentos, para esto desplazé el punto C. Una vez realizada esta acción pedí a los estudiantes que comunicaran sus apreciaciones, bus-

cando que identificaran que al desplazar el punto C queda la marca de lo que aparentemente es una recta. Efectivamente ellos reportaron la forma de una recta que se intersecaba con el \overline{AB} . Esta acción se muestra en la siguiente imagen



Luego de esto indagué a los estudiantes sobre las características de la figura que garantizan la congruencia, para esto planteé la siguiente pregunta ¿Por qué al mover el punto sobre esta aparente recta puedo decir que los segmentos son congruentes? A este interrogante los estudiantes respondieron que esto se debía a que la distancia entre el punto C y los extremos del \overline{AB} era igual. Ante esto evidencí que por medio de la función de arrastre y rastro ellos identificaban la relación de dependencia que había entre el punto y la recta. Además, sin haberlo institucionalizado aun habían detectado el hecho geométrico de la mediatriz.

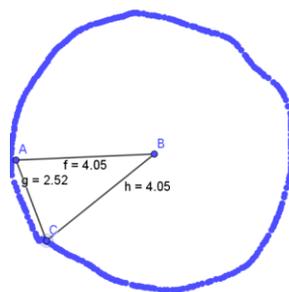
Ahora mi gestión debía estar dirigida a que pudieran identificar las propiedades o características de esta recta, así que procedí a ubicar el punto C sobre el \overline{AB} , en ese instante pedí a los estudiantes que reportaran qué relación podían establecer entre los puntos A, B y C. Uriel respondió que estaban a igual medida, quien había realizado la construcción blanda que representaba la mediatriz. Al tratar de indagar más sobre las características de este punto el afirmó que “si el punto estaba en el centro del \overline{AB} la distancia entre el punto C y los extremos del \overline{AB} iban a ser iguales”. En este instante me valí de esta intervención y se las repetí a todos los estudiantes, pues en ese momento me percaté que era el adecuado para institucionalizar el concepto de mediatriz y su hecho geométrico.

Por consiguiente, use la intervención de Uriel y la relacioné con la definición y el hecho geométrico de la mediatriz, para esto empecé comentando a los estudiantes que lo que Uriel reconocía como centro del segmento en geometría se llamaba punto medio, en ese momento volví a colocar el punto C sobre el segmento, para que reconocieran que este estaba a distancias iguales de los puntos A y B. Luego empecé a desplazarlo buscando de nuevo la congruencia entre los segmentos mencionados. Después de ello busqué que los estudiantes cayeran en la cuenta de que el punto C estaba ubicado sobre la recta que se formaba y les comenté

que esta recta se llamaba mediatriz del \overline{AB} . Al preguntarles que características tenía esta recta, respondieron que pasaba por la mitad del segmento. Adicional a esto les mostré que esta recta formaba un ángulo de 90° con el segmento en su punto medio. De esta manera se institucionalizó la definición y el hecho geométrico de la mediatriz.

Finalmente, en esta parte de la socialización mostré a los estudiantes una construcción del triángulo con ayuda de la recta mediatriz del \overline{AB} y localizando el punto C sobre esta recta. Les pedí que observaran como esta recta permitía que la congruencia de los segmentos se mantuviera, además que al ubicar el punto C sobre esta, no se iba a poder desplazar en otra dirección, para que identificaran o tuvieran una idea que este punto pertenecía a esta recta. Mientras que yo realizaba esta construcción algunos replicaron la construcción en sus portátiles y desplazaban los puntos tratando de comprobar si se mantenía o no la congruencia.

Para institucionalizar la definición y el hecho geométrico de la circunferencia, pedí al grupo de Martín y Jean Carlo que compartieran con sus compañeros la construcción realizada. Ellos comunican los pasos reportados en la descripción anterior buscando la congruencia entre los \overline{AB} y \overline{CB} . Una vez ellos presentan su construcción al grupo, yo realizo mi intervención, así que les comenté a los estudiantes que realizaré el mismo proceso que con la figura anterior, es decir, activé el rastro y desplacé el punto C, luego de esto les pedí que reporten sus observaciones. La primera observación reportada por uno de los estudiantes era que los segmentos parecían las manecillas del reloj, luego de esta intervención planteé de nuevo la interrogante, pero haciendo énfasis a los estudiantes en que reportaran sus comentarios en torno a la marca dejada por el rastro al desplazar el punto C. En ese instante un estudiante respondió es una circunferencia, ante este comentario reaccioné con la interrogante ¿Por qué los segmentos mantienen su congruencia? mientras seguía desplazando el punto C mantenido $\overline{AB} \cong \overline{CB}$. A esta interrogante la respuesta fue “*porque están a la misma distancia del centro*”. En ese instante decidí institucionalizar el hecho geométrico de los radios de la circunferencia. Para esto, comenté a los estudiantes que el rastro efectivamente mostraba la forma de una aparente circunferencia y que \overline{AB} y \overline{CB} eran sus radios, porque se encontraban a la misma distancia del punto B que era su centro. Luego de esta intervención finalicé comentando *Si dos segmentos son radios de una circunferencia entonces son congruentes*. En la siguiente imagen se observa el desplazamiento del punto C que realicé con dicha construcción.

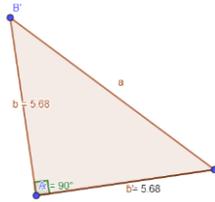


Luego recordé el trabajo que se había realizado, comentando a los estudiantes que hasta el momento estaba dirigido a realizar una construcción de un triángulo que tuviera dos de sus lados congruentes. En esta síntesis, se pudo evidenciar que la circunferencia y la mediatriz permitían conservar esta congruencia. Luego de esto, comenté a los estudiantes que la siguiente actividad iba a estar dirigida a realizar la construcción de un triángulo que tuviera dos lados congruentes pero que también tuviera un ángulo recto. Para esto proyecté en el televisor el enunciado del problema: *Dado el segmento \overline{AB} . Localice un punto C fuera de \overline{AB} para construir un triángulo que tenga dos lados congruentes y un ángulo recto.* Como se había hecho con el ejercicio anterior pregunté a los estudiantes en qué lugar debería estar ubicado el punto C para que los lados fueran congruentes y se pudiera obtener un ángulo de 90 grados.

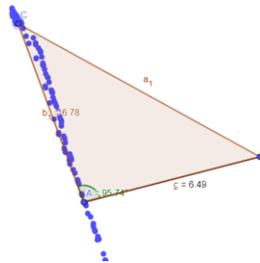
Al igual que en el ejercicio anterior realicé un recorrido por cada uno de los grupos para poder identificar las distintas construcciones que habían realizado los estudiantes. En este observé que presentaban algunas dificultades para poder representar dos propiedades en una misma construcción dado que muchos de los grupos volvían a construir el Triángulo anterior sin tener en cuenta el ángulo de 90 grados. Ante esto pedí a los estudiantes que midieran el ángulo que consideraban que iba a ser recto con ayuda de la herramienta *ángulo* y que indicaran en qué posición del punto C los segmentos eran congruentes y se obtenía el ángulo de 90°. A partir de esta indicación, la mayoría de los grupos recurrieron a la herramienta *ángulo* según su medida y de esta manera construían un triángulo que tenía un ángulo de 90 grados y a su vez dos segmentos congruentes. Sólo un grupo utilizó la función de arrastre para poder obtener la congruencia y el ángulo de 90°, ejercicio que se le dificultó mucho ya que al arrastrar los puntos se mantenía la congruencia pero el ángulo no les daba exactamente los 90 grados.

Ante la evidencia de la dificultad de los estudiantes y a que empecé a darme cuenta de que el tiempo de la clase se estaba terminando, decidí realizar la socialización con las construcciones que habían planteado, para esto inicié con la de ángulos según su medida explicando a los estudiantes que al utilizar esta herramienta, el software ubica un nuevo punto con la misma notación que la de uno de los dos extremos del segmento. Dado que para construir el ángulo de 90 grados GeoGebra rota el punto hasta la posición donde se obtiene esta medida lo cual garantiza la congruencia entre los segmentos AB y AB' .

En la siguiente imagen se muestra la construcción socializada.



Una vez hecha esta aclaración, procedí a realizar la construcción junto a los estudiantes. Para esto ubique el \overline{AB} y el punto C, después construí el triángulo y desplazé el punto sobre el plano del programa de tal manera que pudiera obtener la congruencia. Allí recordé a los estudiantes que esta construcción blanda fue la que se había realizado anteriormente. Una vez obtenida esta congruencia medí el $\sphericalangle CAB$ y empecé a desplazar el punto C de tal manera que este midiera aproximadamente 90° . Cuando encontré el lugar donde esta medida era aproximadamente de 90° , active el rastro y empecé a desplazar el punto de tal manera que el ángulo conservará la medida. En ese instante pregunté a los estudiantes sobre la marca dejada por el punto C sobre el plano; a esta interrogante ellos reportaron que la marca se asemejaba a una recta. Partiendo de esta respuesta, expliqué a los estudiantes que esta recta recibía el nombre de perpendicular y la relacioné con las construcciones que habíamos realizado en el primer y segundo periodo para lo cual recordé a los estudiantes que las rectas perpendiculares son aquellas que se intersectan en un punto formando un ángulo de 90° grados.



En este momento, sonó el timbre para ir a descanso. Concluí la clase, institucionalizando la definición de recta perpendicular recordando lo trabajado en el primer y segundo periodo. Cerré la sesión, recordando a los estudiantes que hasta el momento se usaron herramientas que garantizaban la congruencia de segmentos en una construcción como era el caso de la circunferencia y la mediatriz y una herramienta llamada perpendicular que permiten garantizar que el ángulo formado entre dos segmentos sea de 90° grados.

DESCRIPCIÓN DE LA CLASE IMPLEMENTADA EL 09 DE NOVIEMBRE DE 2018

Esta sesión de clase inició recordando las definiciones y hechos geométricos institucionalizados en el desarrollo de la actividad de exploración. Para esto inicié presentando a los estudiantes las construcciones socializadas haciendo énfasis en los objetos geométricos empleados que garantizaban la congruencia entre dos lados del triángulo y los ángulos de 90° . De forma simultánea, mientras recreaba las construcciones les recordé los siguientes elementos que ingresaron a nuestro sistema teórico:

- **Hecho Geométrico de los radios de la circunferencia:** *si dos segmentos son radios de una circunferencia entonces son congruentes.*
- **Definición de mediatriz:** *Recta perpendicular a un segmento por su punto medio.*
- **Hecho geométrico de la mediatriz:** *Dado un segmento. La mediatriz es el conjunto de puntos en un plano que equidistan de los extremos del segmento*
- **Definición de recta perpendicular:** *Dos o más rectas son perpendiculares (\perp) si al intersectarse forman un ángulo recto.*

Una vez terminada esta socialización, cada uno con su respectivo portátil, procedí a presentar a los estudiantes la actividad prevista para esta sesión. Para esto hice la lectura del enunciado de la primera parte de la actividad, el cual estaba proyectado en un televisor:

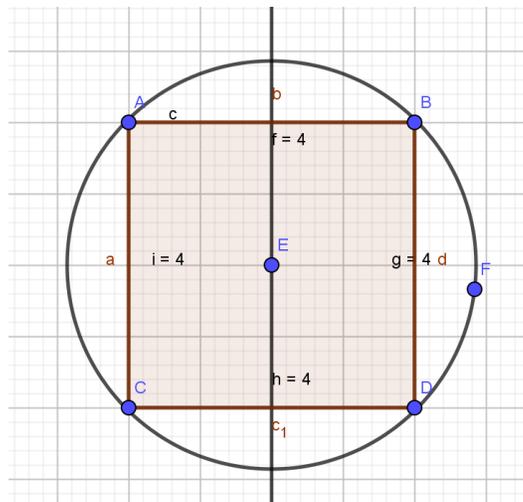
Dados los puntos A y B , construya en GeoGebra un cuadrado que tenga como vértices a A y a B . Enuncie los pasos para realizar la construcción, mencionando la herramienta del software que usa en cada paso.

Al igual que en la actividad anterior me desplazé por cada uno de los grupos para identificar las producciones de los estudiantes y cotejar si estas estaban contempladas en la planeación de la clase. A partir de lo observado en la primera parte de la actividad 2, pude observar que surgieron solamente las siguientes construcciones:

Propuesta Ángel y Simón: esta construcción fue realizada partiendo de la cuadrícula. Para tal fin ubicaron los puntos A y B sobre el plano del software y trazaron el \overline{AB} . La ubicación de los puntos en la cuadrícula se eligió de tal forma que el \overline{AB} quedara en posición horizontal. Luego, construyeron los $\overline{AC}, \overline{BC}, \overline{CD}$, utilizando la cuadrícula para garantizar tanto los ángulos rectos como la congruencia de estos con el \overline{AB} . Finalmente, construyeron el $\square ABDC$ con la herramienta *polígono*. Al ver

esta construcción cuestioné a los estudiantes si la congruencia de estos lados se mantenía cuando se arrastraba alguno de los vértices del cuadrado y les recordé las definiciones y hechos geométricos de los cuales se habían hablado en al inicio de la sesión.

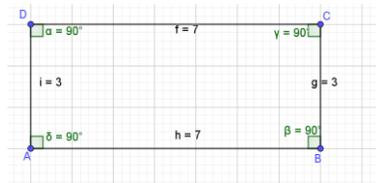
En un segundo momento observé que buscaban garantizar la congruencia de los segmentos para lo cual ubicaron con ayuda de herramienta *mediatriz*, la recta perpendicular que pasa por el punto medio del \overline{CD} . Luego usaron una circunferencia; está la construyeron usando como centro un punto E que ubicaron en lo que aparentemente era el centro del cuadrado, apoyándose de la cuadrícula y la recta mediatriz. El radio de esta circunferencia estaba ubicado en un punto F diferente a los puntos A, B, C y D . Esta fue construida de forma que los vértices aparentemente se localizaran sobre la circunferencia. Al ver esta construcción pedí a uno de los estudiantes que desplazaran el punto F para que observaran que al no haber puntos en común entre la circunferencia y el cuadrado estos objetos se desplazaban de forma independiente. Finalmente, les recordé que si el centro de la circunferencia era el punto E , su radio debía corresponder la distancia del punto E hasta uno de los vértices. A continuación, se muestra la construcción realizada por el grupo de Simón y Ángel.



Propuesta de Iván y Alexander: ellos trataron de representar un cuadrilátero que aparentemente se veía como un rectángulo utilizando la cuadrícula. Para esto ubicaron los puntos A y B , trazaron el \overline{AB} , luego ubicaron los punto C y D buscando que $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ y $\overline{AC} \cong \overline{BD}$. Por último, construyeron el cuadrilátero $ABCD$. Además, con ayuda de la herramienta ángulo tomaron la medida de los ángulos que se formaban por intersección de los lados en el vértice del cuadrilátero. Al observar esta construcción observé que habían formado un aparente rectángulo e inmediatamente los indagué sobre el cuadrilátero construido, para esto pregunté por las características que debe tener un cuadrilátero para ser cuadrado, su respuesta fue

lados congruentes. Ante esta respuesta les pregunté cómo podían lograr que los cuatro lados fueran congruentes manteniendo la medida de los ángulos. Realizar esta acción se les dificultó bastante porque debían garantizar que los cuatro segmentos cumplieran de forma simultánea las propiedades “ser congruente con” y “ser perpendicular a”. Al evidenciar que no lograban encontrar el camino para realizar esta construcción les recordé que en la sesión anterior y al iniciar esta, había hablado de herramientas como la *circunferencia*, la *mediatriz* y la *perpendicular* que permitían la congruencia de dos segmentos y obtener un ángulo de 90° grados.

A continuación, se muestra la construcción realizada por Iván y Alexander



Propuesta de Kelly y Melany: Las estudiantes hicieron la construcción de un cuadrilátero que aparentemente era un cuadrado usando solamente la cuadrícula. Esta última propuesta, fue la que propusieron el resto de los grupos. Esta clase solo duró una hora, por lo que la socialización se realizó en la siguiente sesión.

DESCRIPCIÓN DE LA CLASE 12 DE NOVIEMBRE DE 2018

Después de observar las construcciones propuestas por los estudiantes y dadas las dificultades que se presentaron en el desarrollo de la actividad 2, decidí realizar una variación de la actividad respecto a la planeación que se había previsto. En esta oportunidad inicié la sesión recordando a los estudiantes el enunciado de la actividad propuesta.

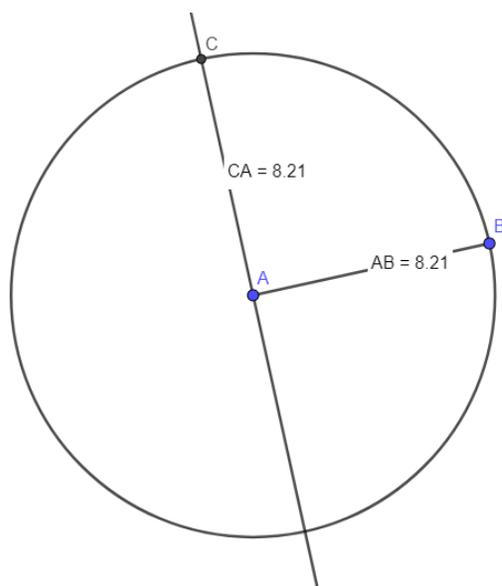
Dados los puntos A y B, construya en GeoGebra un cuadrado que tenga como vértices a A y a B. Enuncie los pasos para realizar la construcción, mencionando la herramienta del software que usa en cada paso.

Después de esto, recordé a los estudiantes que en la actividad de construcción del triángulo se habían usado algunas herramientas que garantizaban la congruencia de sus lados. Por tanto, indagué a los estudiantes sobre cuáles eran esas herramientas que mantenían la congruencia y permitían obtener un ángulo cuya medida fuera de 90° . Ellos respondieron la *circunferencia*, la *mediatriz* y la *perpendicular*, respectivamente. Luego pedí a los estudiantes realizar la siguiente construcción, la cual iba realizando mientras verbalizaba las instrucciones:

- Localice los puntos A y B
- Con la herramienta *segmento*, trace el \overline{AB}
- Con la herramienta *circunferencia*, $\odot A, AB$

- Con la herramienta *perpendicular*, trace una recta l tal que $l \perp \overline{AB}$ por A
- Con la herramienta intersección, $\{C\} = l \cap \odot A, AB$

Mientras que los estudiantes hacían la construcción en sus portátiles, yo la proyectaba en el televisor de manera que pudieran observar e ir corroborando los pasos que realizaban. Posteriormente, perdí a los estudiantes medir \overline{AB} y \overline{AC} . Una vez que todos tenían sus construcciones realizadas, les pedí que usaran la función *arrastre* para desplazar los puntos A y B sobre el plano del software. Esta acción les permitió identificar que la propiedad $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ se mantenían. En ese instante les indagué sobre cuál era la característica de la circunferencia que permitía que estos segmentos fueran congruentes. La respuesta de los estudiantes fue que como *los puntos C y B estaban ubicados sobre la circunferencia, estaban a la misma distancia del punto A* . Ante esta respuesta les aclare que esto sucedía porque A era el centro de la circunferencia y \overline{AB} y \overline{AC} eran sus radios. Esta congruencia se comprobó con la herramienta *distancia o longitud*. A continuación se muestra la construcción que se obtuvo.

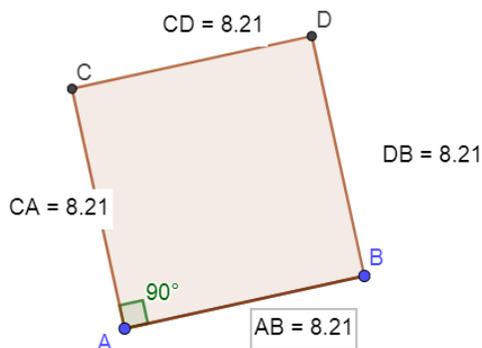


Luego, pedí al grupo de estudiantes que desplazaran el punto C . Al instante reportaron que no se podía mover. Ante esto reaccioné con otra pregunta ¿Por qué no se puede mover este punto? Esta pregunta no pudo ser respondida, así que la oriente de una forma diferente. Para esto indagué a los estudiantes sobre la forma como se había obtenido el punto C , ellos respondieron haciendo alusión a expresiones como *por el corte entre la circunferencia y la perpendicular, por el cruce entre la circunferencia y la perpendicular, por la unión de la circunferencia y la perpendicular o el punto en que se encontraban la circunferencia y la perpendicular*. En ese instante hice alusión a la importancia de comunicar sus ideas haciendo uso adecuado del lenguaje matemático. Por tanto, retorné la pregunta y pedí a los

estudiantes usar el término apropiado para nombrar lo que ellos denominaron corte o cruce de dos objetos geométricos, como en este caso la circunferencia y la perpendicular. Esto para que recordaran que se denomina intersección al punto **C**. Luego, les indiqué que con ayuda de la herramienta *ángulo* midieran el $\sphericalangle CAB$, con esta acción ellos relacionaron que efectivamente la recta perpendicular garantizaba el ángulo de 90° como se había institucionalizado en la primera sesión.

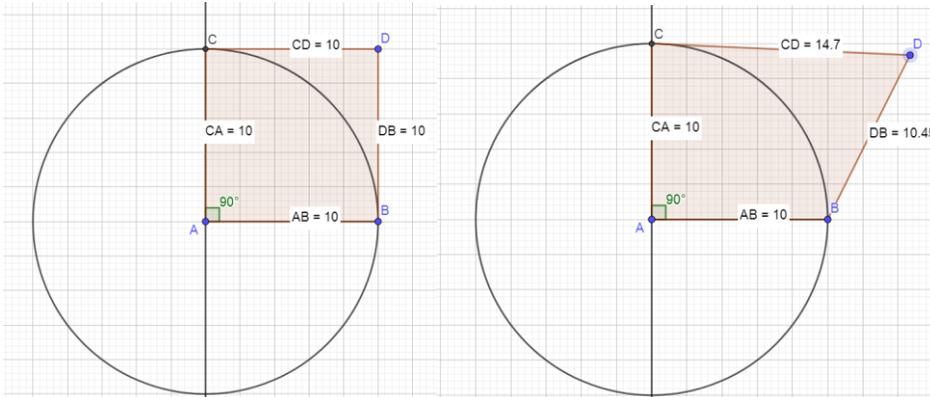
Una vez realizados estos preliminares, volví a involucrar al grupo de estudiantes al problema en cuestión que era la construcción del cuadrado. En ese instante, pregunté de nuevo sobre las características que tiene un cuadrado. Ellos hicieron énfasis en “*los lados congruentes*” ante esta respuesta les comenté que, aunque esa era una de las características no era la única. Luego, les pedí que con ayuda de las herramientas del software construyeran los lados que faltaban para obtener el cuadrado, indicándoles que tuvieran en cuenta que la congruencia se debía mantener al desplazar los puntos *A* y *B*. Dadas las dificultades que se les habían presentado para relacionar más de una propiedad, proyecté en el televisor como debía quedar la construcción finalizada la actividad; para esto oculté los objetos adicionales. Luego, desplacé los puntos *A* y *B* en el plano del software para que identificaran que la congruencia y el ángulo de 90° se conservaban.

A continuación, se muestra la construcción robusta proyectada

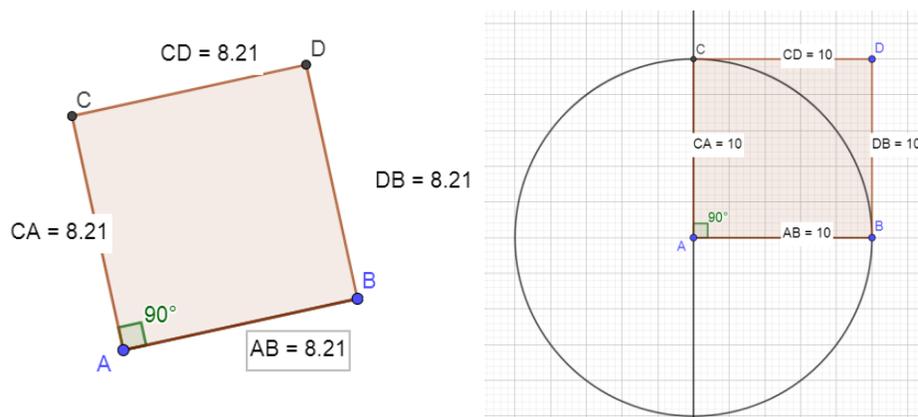


Mientras que los estudiantes trataban de construir los lados del cuadrado restantes, yo recorrí cada uno de los grupos y observé que a pesar que les acababa de mostrar que habían herramientas diferentes a la cuadrícula que les permitan garantizar la congruencia, ellos trataban de construir de nuevo los lados faltantes con ayuda de la cuadrícula. En ese momento decidí intervenir, esto debido a que recordé algunas orientaciones dadas en la asesoría de trabajo de Grado, donde la profesora me mostraba una forma de orientar la construcción para que los estudiantes cayeran en la cuenta que aunque la cuadrícula daba una aparente garantía de la congruencia, este solo era un caso particular, el cual no se mantenía en el arrastre. Para esto capté de nuevo la atención del grupo de estudiantes hacia la pantalla del televisor y les comenté que iba a realizar las mismas acciones que ha-

bía visto en cada uno de los grupos. Procediendo con esto activé la cuadrícula y coloqué el punto D en el lugar donde aparentemente se mantenía que $\overline{AB} \cong \overline{AC} \cong \overline{CD} \cong \overline{BD}$. Después procedí a desplazar el punto D y pedí a los estudiantes que me comentaran sus observaciones. Algunos con cara de asombro y un poco de frustración respondieron que la congruencia no se mantenía como se pude observar en la siguiente imagen.

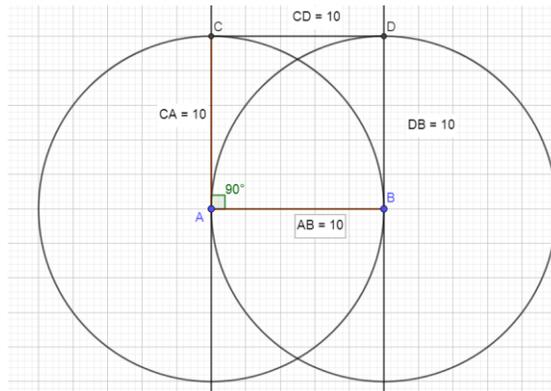


Esta acción los desestabilizó bastante, dado que muchos de ellos tenían seguridad que la cuadrícula les garantizaba que la congruencia siempre se iba a mantener. Consideré que esto se debía a que les costaba mucho identificar la relación de dependencia que debía existir entre cada uno de los elementos del cuadrado. Así que les proyecté de forma simultánea las dos construcciones: la robusta y en la que ellos usaron la cuadrícula.

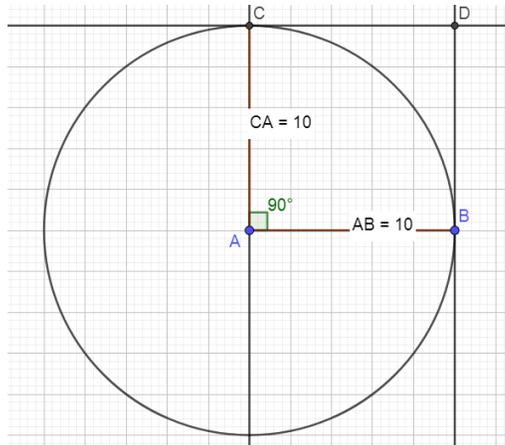


Luego les pedí que comunicaran las diferencias, si las había, entre los cuadrados construidos. Aunque tardaron unos minutos, uno de ellos identificó que los puntos D en cada una de las construcciones eran de colores diferentes. Valiéndome de este comentario, les recordé a los estudiantes que el punto C no se había podido desplazar dado que tenía unas condiciones particulares en la forma como fue localizado en la construcción preliminar, haciendo énfasis en que en esta caracterís-

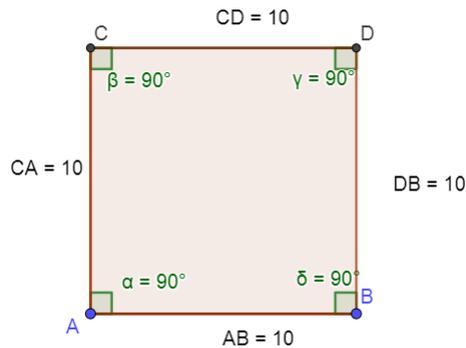
tica encontrarían la forma de construir los lados faltantes del cuadrado. Una vez hecha esta observación, algunos susurraban entre sí y hacían movimientos con la mano (girar el dedo índice formando un arco de circunferencia, desplazar el dedo índice apuntándolo hacia la pantalla y desplazándolo de arriba hacia abajo). Dadas estas acciones, al preguntarles sobre cómo podía garantizar que al ubicar el punto D se obtuviera la congruencia de los lados, surgieron dos posibilidades. La primera fue propuesta por el grupo de Uriel y consistía en replicar la construcción preliminar, pero en el punto B, es decir, $\odot B, BA$, luego una recta m , $m \perp \overline{AB}$ por B como se muestra en la siguiente imagen.



La segunda alternativa surgió de Martín y Jean Carlo el uso de dos recta m y n , $m \perp \overline{AB}$ por B y $n \perp \overline{CD}$ por C.



Una vez lograda esta construcción pedí a los estudiantes que con la herramienta *polígono* marcaran el $\square ABDC$. Luego con la ayuda de la herramienta *objeto visible* ocultaran las rectas y la circunferencia obteniendo así la construcción que se solicitaba. Partiendo de esta construcción pedí a los estudiantes que con la ayuda de la herramienta *distancia o longitud* y *ángulo* indicaran las medidas de los segmentos y ángulos, como se muestra en la siguiente figura.

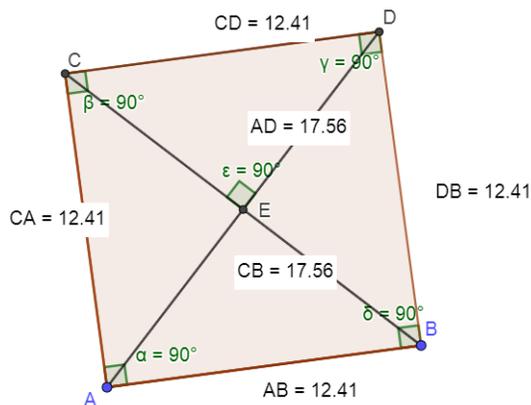


Después les pedí que escribieran las características del cuadrado usando la forma: “si el cuadrilátero $ABDC$ es un cuadrado entonces”. De este ejercicio se obtuvo que “si el cuadrilátero $ABDC$ es un cuadrado entonces tiene cuatro lados congruentes y cuatro ángulos de 90° ”. Con esto, los estudiantes reconocieron que no es suficiente tener lados congruentes, sino que también se hace necesario los ángulos de 90° para obtener el cuadrado.

Una vez obtenidas las propiedades del cuadrado solicité a los estudiantes que construyeran los \overline{AD} y \overline{BC} . Luego les pedí que con la ayuda de la herramienta *intersección* ubicaran el punto E , que era la intersección entre las diagonales. Además, con la herramienta *distancia o longitud y ángulo* que indicaran las medidas de las diagonales y el ángulo formado entre ellas. Una vez hecha esta acción activaron la función arrastre para desplazar los vértices del cuadrado y les pedí que reportaran las características que observaban en las diagonales. La primera característica que surgió fue la congruencia entre las diagonales; en ese instante pedí a los estudiantes que reportaran en una hoja las características de la forma “si es un cuadrado entonces sus diagonales son...”. De esta actividad surgieron las siguientes características:

- Si el cuadrilátero $ABDC$ es un cuadrado, entonces sus diagonales son congruentes.
- Si el cuadrilátero $ABDC$ es un cuadrado, entonces sus diagonales forman un ángulo de 90° . En esta característica pregunté a los estudiantes sobre el nombre que reciben dos rectas que forman un ángulo de 90° , la respuesta de ellos fue perpendicular. Así que esta característica la reescribí así: Si el cuadrilátero $ABDC$ es un cuadrado entonces sus diagonales son perpendiculares.

En la siguiente imagen se muestra la construcción de las diagonales



Para la tercera condición de las diagonales pedí a los estudiantes que midieran los \overline{EA} , \overline{EB} , \overline{EC} y \overline{EB} , con esto identificaron que se intersecan en su punto medio. Comenté que esta condición se llama bisecarse entre sí. Por tanto, la tercera característica se formuló como:

- Si el cuadrilátero $ABDC$ es un cuadrado entonces sus diagonales se bisecan entre sí.

Como el tiempo de la clase estaba por finalizar, se finaliza la sesión con la institucionalización de las siguientes propiedades del cuadrado usando la forma condicional si.. entonces....

- **Si el cuadrilátero $ABDC$ es un cuadrado entonces sus lados son congruentes y sus ángulos miden 90° .**
- **Si el cuadrilátero $ABDC$ es un cuadrado entonces sus diagonales son congruentes, perpendiculares y se bisecan entre sí.**

De esta manera se dio por finalizada la implementación de las actividades propuestas en la planeación. La actividad de las diagonales no fue posible terminarla debido a que el tiempo de la sesión no fue suficiente para realizarla. Esta no se podía realizar en otro espacio dado que los estudiantes ya se encontraban en semana de nivelaciones y muchos de ellos ya no asistían más a la institución.

En consecuencia y a pesar de los inconvenientes de espacio y tiempo se lograron los objetivos propuestos. Esto debido a que los estudiantes lograron con ayuda del software determinar las características que debe cumplir un cuadrilátero para ser cuadrado. Además, exploraron las propiedades relacionadas con la perpendicularidad y congruencia entre lados y ángulos en un cuadrado.

Finalmente, como docente reconocí la importancia de la gestión en la planeación de una secuencia de actividades y, más aun que las decisiones que se toman en

el desarrollo de las mismas pueden influenciar de manera positiva en la medida que estas se orienten bajo los objetivos o finalidad de la actividad.