LA DEMOSTRACIÓN GEOMÉTRICA DE LA LEY DE MERTON: UN PRETEXTO PARA EL ESTUDIO DE ÁREA BAJO LA CURVA

MAUREEN ELIANA CASTAÑEDA CORTÉS

SEÚL SÁENZ BRAVO

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

ESPECIALIZACIÓN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

BOGOTÁ, D.C.

2012

LA DEMOSTRACIÓN GEOMÉTRICA DE LA LEY DE MERTON: UN PRETEXTO PARA EL ESTUDIO DE ÁREA BAJO LA CURVA

MAUREEN ELIANA CASTAÑEDA CORTÉS 2012182011

SEUL SAENZ BRAVO 2012182038

Trabajo de grado presentado como requisito para optar al título de

Especialista en Educación Matemática

Asesor

ORLANDO AYA CORREDOR

Magister en Docencia de las Matemáticas

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

ESPECIALIZACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

BOGOTÁ, D.C.

2012

Para todos los efectos, declaro que el presente trabajo es original y de mi total autoría; en aquellos casos en los cuales he requerido del trabajo de otros autores o investigadores, he dado los respectivos créditos.

1. Información General

Tipo de documento	Trabajo de Grado
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Titulo del documento	La demostración geométrica de la Ley de Merton: un pretexto para el estudio de área bajo la curva
Autor(es)	CASTAÑEDA CORTÉS, Maureen Eliana; SÁENZ BRAVO, Seúl.
Director	AYA CORREDOR, Orlando.
Publicación	Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional, 2012, 110 p.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional
Palabras Claves	DEMOSTRACIÓN GEOMÉTRICA, LEY DE MERTON, ANÁLISIS FENOMENOLÓGICO, FENÓMENOS FÍSICOS, MOVIMIENTO, TRABAJO, ÁREA BAJO LA CURVA.

2. Descripción

El trabajo presenta la propuesta de una secuencia didáctica que permite relacionar fenómenos físicos con el cálculo de áreas bajo la curva, en particular la demostración geometría que Oresme realizó de la ley de Merton o teorema de la velocidad media, que brinda la oportunidad de analizar la estrecha relación existente entre los conceptos matemáticos y procesos de cálculo de áreas bajo la curva, como lo son las sumatorias de Riemann, y los conceptos de otras ciencias como en este caso, con un fenómeno físico (movimiento y trabajo). La propuesta se encuentra justificada desde hechos históricos que desarrollaron el cálculo de áreas bajo curvas y a la ley de Merton; al mismo tiempo desde la didáctica de las matemáticas, con la teoría del análisis fenomenológico debido a que éste permite una conexión entre fenómenos físicos que involucran magnitudes físicas como velocidad y trabajo con el cálculo de áreas bajo la curva.

3. Fuentes

Se tomaron 21 referencias afines a la temática que sustenta la propuesta didáctica, tanto desde los referentes teóricos disciplinares, históricos y del análisis fenomenológico, siendo las siguientes las más relevantes:

Boyer, C. (1999). Historia de la Matemática. Ed. Alianza editorial, Madrid.

Cantoral, R. y Farfán R. (2004).Desarrollo conceptual del cálculo. Ed: Thomson Learning, Inc. México.

Kline, M. (1972 a.). El pensamiento matemático desde la antigüedad hasta nuestros días I. Ed. Alianza editorial, Madrid.

Kline, M. (1972 b.). El pensamiento matemático desde la antigüedad hasta nuestros días III. Ed. Alianza editorial, Madrid.

Puig, L. (1997). Análisis fenomenológico. En L. Rico (Coord.) La educación matemática en la enseñanza secundaria (pp. 61-94). Barcelona: Horsori / ICE.

Rico, L., Lupiañez, J., Marín, A. y Cañadas, M., (s.f.). Análisis Fenomenológico. Departamento didáctica de la matemática, Universidad de Granada. Recuperado el 10 de julio de 2012 en http://www.ugr.es/~mconsu/Ficheros/Matematicas10_11Present26oct.pdf.

Riestra, J. (2004). El estudio de la variación en la edad media y su relación con el concepto de límite. Revista Miscelánea Matemática, Nº 39, pp. 49-60.

4. Contenidos

El objetivo del trabajo es presentar el diseño de una secuencia didáctica que permita establecer una relación fenomenológica entre la estructura del objeto matemático área bajo curva, con algunos fenómenos físicos analizados desde un proceso afín al realizado en la demostración geométrica de la ley de Merton formalizada por Oresme. Los objetivos específicos se muestran en el primer capítulo del presente escrito.

En el capítulo 2. se expone el Marco Teórico en el cual está sustentada la propuesta y se encuentra dividido en dos partes; en la primera, se hace un recorrido histórico sobre los primeros conceptos que se concibieron respecto al área bajo la curva y como estos influyeron en el planteamiento de las sumatorias de Riemann, además el desarrollo de la ley de Merton, en particular, el trabajo de Oresme en la demostración de esta. La segunda parte, corresponde al sustento didáctico de la propuesta, en este se exponen los elementos que justifican el uso del análisis fenomenológico, junto con una descripción de los fenómenos físicos que permiten realizar la conexión, donde el cálculo de áreas bajo la curva, es el medio de organización de los fenómenos del movimiento y trabajo, proporcionando el abordaje del concepto y la estructura descrita en el marco histórico.

El capítulo 3, presenta la estructura de la secuencia didáctica, que está compuesta por cuatro fases: Análisis Dimensional, El método de Oresme, Cambio Uniforme y Uniformemente Disforme y Cambio Disformemente Disforme; las cuales se corresponden con el proceso planteado en el análisis fenomenológico. En cada fase se escribe el propósito de la actividad, logro a desarrollar, metodología sugerida al profesor y las potenciales respuestas esperadas en los estudiantes. Antecediendo a la presentación de las fases se encuentran las consideraciones previas que el docente debería tener en cuenta para hacer un uso adecuado y potencializado de la propuesta.

5. Metodología

Para el desarrollo del presente trabajo, se tuvo en cuenta varios elementos que permitieran la consecución de los objetivos que se propusieron para el mismo. Dentro de estos se pueden destacar los siguientes: documentación, análisis y diseño. En el primer elemento se recopilo la información necesaria que sirvió como soporte de los referentes disciplinares que sustentan la secuencia; entre estos se encuentran el desarrollo del área bajo la curva, la demostración de la ley de Merton y los algunos fenómenos físicos. En el segundo, se busco establecer una conexión entre la disciplina y la didáctica, que permitiera emplear el objeto matemático área bajo la curva aplicada al análisis de situaciones particulares de otra ciencia como la física, y para ello la didáctica de las matemáticas tiene como uno de sus componentes al análisis fenomenológico, para efectos de este trabajo se hace una análisis de tipo genético. Para el último elemento se procedió a diseñar una serie de actividades, donde fue necesario incorporar nuevos elementos teóricos, como el caso de un análisis dimensional y nuevos elementos tecnológicos para ayudar al desarrollo de pertinente de cada actividad, para ello se empleó el software libre GeoGebra 4.0.

6. Conclusiones

La demostración geométrica planteada por Oresme de la Ley de Merton, efectivamente da una idea de cómo abordar el cálculo de algunas magnitudes físicas, aunque la asociación que se debe hacer de esta con el planteamiento de una suma de Riemann no es evidente. Si arroja elementos fundamentales que también intervienen en las sumatorias, como la construcción de rectángulos, el uso de puntos medios de la base de los rectángulos, y las particiones; en tanto, aunque no evidencia todos los elementos, si permite una conexión entre los fenómenos y el cálculo de áreas bajo la curva. Y aunque la matemática y la física son dos ciencias que tienen enfoques diferentes y a lo largo de la historia se han venido consolidando una a la par de la otra; el uso de un análisis fenomenológico, permitió hacer una relación entre los fenómenos físicos y el área bajo la curva como objeto de organización, pero si bien, no proporciona todos los elementos teóricos para establecer esta relación si favorece en la organización de las múltiples relaciones existentes entre estas dos ciencias.

La secuencia didáctica se fundamenta en la necesidad de generar diversas alternativas para el estudio de conceptos matemáticos, vinculándolos a situaciones cotidianas que son vistas con los lentes de otras ramas del conocimiento, en busca de un fortalecimiento en la adquisición de los saberes que estudian cada una de las ciencias, en ocasiones por separado; pero igualmente no es solo una propuesta para la clase de matemática, en física puede ser empleada para dar muestra de la funcionalidad y riqueza que tienen estas dos ciencias y más cuando se pueden complementar una con la otra. En particular se considera extensivo el proceso de las actividades; ya que independiente a no tener un tiempo determinado para aplicarlas, si se gasta más de 4 sesiones, pero aún más extensivo resulta la asociación entre estas ciencias.

Elaborado por:	CASTAÑEDA CORTÉS, Maureen Eliana; SÁENZ BRAVO, Seúl.
Revisado por:	AYA CORREDOR, Orlando.

Fecha de elaboración del Resumen:	14	10	2012

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN

La forma, en que un concepto se ha desarrollado históricamente, está relacionado con la manera en que éste se forma en la mente de los estudiantes; no obstante en los procesos de enseñanza se ha encontrado que *"para la gran mayoría de los estudiantes de Matemáticas, los conceptos que se enseñan están carentes de historia, y el hecho de que en la instrucción no aparece generalmente el proceso de creación matemática y que no se afrontan problemas de épocas pasadas, favorece ese pensamiento"* (Lupiañez, 2002, p. 60); así pues, conocer la manera cómo se construyeron los conceptos matemáticos a lo largo de la historia resulta de vital importancia, ya que con ello es posible reconocer el qué, el cómo y el para qué de los mismos; además ofrece diversos elementos, que al emplearlos de la mejor manera, pueden llegar a ser llamativos para los estudiantes cuando se haga la presentación de un concepto en el aula.

Un ejemplo de lo descrito anteriormente se puede dar con el concepto de área bajo la curva, el cual usualmente se presenta de manera formal como un procedimiento asociado al cálculo de la integral definida de una función positivo definida, pero que tuvo sus orígenes conceptuales en Grecia varios siglos atrás, al querer dar una explicación de la cuadratura del círculo o de una determinada figura, y desde entonces ha ido evolucionando en el método de exhaución de Arquímedes, las sumatorias de Riemann, para llegar a la integral definida. Además de ello, su progreso ha sido paralelo y mediado por sus aplicaciones a diversas situaciones.

Aunque la demostración geométricamente de la Ley de Merton hecha por Oresme a mediados del siglo XIV, no se presenta como uno de los antecedentes a la formación del concepto de área bajo la curva, su trabajo sí abre la posibilidad de aplicar el concepto a situaciones relacionadas con fenómenos físicos; lo cuál genera la posibilidad de vincular conceptos matemáticos, geométricos, y del cálculo en la modelación de los fenómenos naturales, para así también llegar a una explicación de las magnitudes físicas.

Bajo este panorama, el presente escrito muestra la elaboración de la propuesta de una secuencia didáctica, que establece una relación fenomenológica entre la estructura del objeto matemático área bajo curva, con algunos fenómenos físicos particulares (Movimiento y trabajo), que son analizados desde un proceso afín al realizado en la demostración de la ley de Merton formalizada por Oresme.

El desarrollo de la propuesta se centra en varios aspectos que resultan relevantes para la misma; de una parte la descripción histórica sobre los primeros conceptos que se concibieron respecto al área bajo la curva y como estos influyeron en el planteamiento de las sumatorias de Riemann; el desarrollo de la ley de Merton, en particular, cómo Oresme interviene en la demostración de esta (aspecto presentado en el Capítulo 2). Un segundo aspecto está constituido por el soporte didáctico de la propuesta, en particular se hace uso de la teoría del análisis fenomenológico.

En el Capítulo 3. se muestran los elementos que justifican el uso de este enfoque, seguido de elementos propios de la física como lo son las magnitudes físicas, el análisis dimensional y los fenómenos que permiten realizar la conexión con el concepto, pero donde el concepto y la estructura descrita en el marco histórico (áreas bajo la curva), es el medio de organización de los fenómenos asociados al movimiento y el trabajo (teorema trabajo- energía). Finalmente en este capítulo se hace un análisis fenomenológico de tipo genético, que pretende poner en evidencia la relación organizacional del concepto (área bajo la curva) con los fenómenos físicos (movimiento y trabajo).

Por último, en el Capitulo 4, se presenta la secuencia de actividades propuesta, la cual está compuesta por cuatro fases: Análisis Dimensional, El método de Oresme, Cambio Uniforme y Uniformemente Disforme, y Cambio Disformemente Disforme; estas corresponden al proceso que se plantea en el análisis fenomenológico presentado en el capítulo 3. En cada fase se escribe el propósito de la actividad, logro a desarrollar, la metodología sugerida al profesor y las potenciales respuestas esperadas en los estudiantes.

Antecediendo a las fases se encuentran las consideraciones previas que el docente debería tener en cuenta para hacer uso adecuado y potencializar la propuesta. Para el desarrollo de estas actividades se construyeron dos applets con el software libre Geogebra 4.0, los dos archivos se llaman “Fase 2” y “Fase 4”, su nombre corresponde a la fase donde se propone su uso; el propósito es que mediante la manipulación se pueda establecer conjeturas y conclusiones que permitan avanzar en el proceso de explicación y en el planteamiento conceptual de la suma de Riemann.

JUSTIFICACIÓN

Para muchos docentes, la didáctica se constituye en una herramienta que pretende cubrir un ideal: encontrar una manera sencilla pero efectiva para dar a conocer un concepto matemático o físico. Pero la didáctica va más allá de eso pues esta rama reconoce que los conceptos son presentados de manera usual siguiendo una serie de procedimientos, algoritmos u operaciones que pueden limitar su conceptualización convirtiéndolos en cuestiones de difícil entendimiento tanto para estudiantes como para los docentes, incluso, en muchos casos se tornan en cuestiones sin sentido. Situaciones como esta se encuentran ligadas a diversos factores que solo pueden reconocerse cuando se centra la atención didáctica en el propio concepto, procurando analizarlo, comprenderlo y aplicarlo en diversos contextos que a su vez permitan vislumbrar alternativas diferentes para ser abordado en el contexto de la educación matemática. En tanto, la preparación y elaboración de diversos materiales que apoyen la labor docente requiere de componentes fundamentales para logar que un conocimiento científico o disciplinar se conviertan en un objeto de aprendizaje por parte de los estudiantes.

Indudablemente los conceptos del cálculo (límite, continuidad, derivada, integral, etc.) requieren de mecanismos de enseñanza que incentiven el aprendizaje de los mismos. Por ello, este trabajo propone un material de apoyo didáctico para acercar a los estudiantes al estudio del área bajo la curva a través de la relación que este concepto tiene con algunos fenómenos físicos. En consecuencia se plantea una secuencia de actividades basada en la resolución de problemas de movimiento y trabajo (teorema trabajo- energía), donde se hace uso del método que empleó Oresme para la demostración de la ley de Merton.

Lo que sustenta el hecho de que con el uso del método de Oresme, se pueda hacer un acercamiento al cálculo de áreas bajo curvas, es la relación del cómo abordar el cálculo de algunas magnitudes físicas y el cómo en la demostración de Oresme se evidencian conceptualmente varios elementos para el planteamiento de una suma de Riemann (como los rectángulos y los puntos medios de la base de los rectángulos). Si bien no evidencia todos los elementos conceptuales de una suma de Riemann, si permite una conexión entre los fenómenos y el cálculo de áreas bajo la curva; por tanto, mediante el desarrollo del secuencia de actividades, se pretende encontrar nuevos elementos metodológicos que permitan hacer una aproximación desde la noción de sumas finitas al objeto área bajo la curva de una función positiva definida en un intervalo dado, a lo que en los textos de cálculo escolar se conoce como sumas de Riemann.

Por tanto, la pertinencia de esta secuencia didáctica se fundamenta en la necesidad de generar diversas alternativas para el estudio de conceptos matemáticos, vinculándolos a situaciones cotidianas que son vistas con los lentes de otras ramas del conocimiento, en busca de lograr un fortalecimiento en la adquisición de los saberes que estudian cada una de las ciencias y que en ocasiones son vistas por separado; al mismo tiempo busca una resiginificación del concepto matemático área bajo la curva a través del análisis de algunos fenómenos físicos.

1. OBJETIVOS

1.1. OBJETIVO GENERAL.

- Diseñar una secuencia didáctica que permita establecer una relación fenomenológica entre la estructura del objeto matemático área bajo curva, con algunos fenómenos físicos analizados desde un proceso afín al realizado en la demostración geométrica de la ley de Merton formalizada por Oresme.

1.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Desarrollar un marco teórico donde se exponga el recorrido histórico del proceso conceptual del área bajo la curva en particular los antecedentes al planteamiento de las sumatorias de Riemann; además de la demostración geométrica que de la ley Merton realizó Nicolás Oresme.

- Llevar a cabo un análisis fenomenológico, de tipo genético de los fenómenos físicos para los cuales el concepto de área bajo la curva es medio de organización.

- Construir una secuencia didáctica que permita el cálculo de áreas bajo la curva (por áreas de figuras conocidas hasta el método de las sumas de Riemann), a partir de la descripción de situaciones propias de los fenómenos físicos de movimiento y trabajo.

2. MARCO TEÓRICO

El contenido en el cual se encuentra sustentada la propuesta; se divide en dos partes: por una lado el marco histórico, donde se describe algunos aportes realizados por matemáticos y físicos al desarrollo del cálculo de áreas bajo curvas y a la ley de Merton; y de otra el marco didáctico, en el que se describe, justifica y hace un análisis fenomenológico que permite una conexión entre magnitudes como la velocidad y el trabajo con el cálculo de áreas bajo la curva.

2.1. MARCO HISTÓRICO

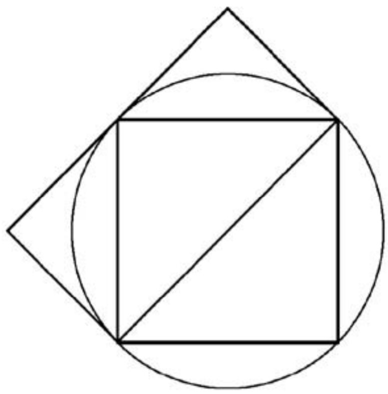
2.1.1. EL CÁLCULO DEL ÁREA BAJO LA CURVA A TRAVÉS DE LA HISTORIA

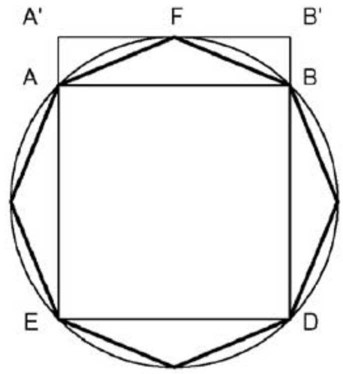
Mediante la abstracción y el uso de la lógica, las matemáticas han evolucionado basándose en las cuentas, el cálculo y las mediciones. Está ciencia se ha desarrollado, no de manera lineal sino con continuas interrupciones. De hecho los problemas típicos que dieron origen al Cálculo Infinitesimal, comenzaron a plantearse en la época clásica de Grecia (siglo III a.C.), pero se encontraron métodos de resolución sólo hasta en el siglo XVII, los cuales posiblemente están sustentados en el Renacimiento donde las innovaciones matemáticas interactuaron con los nuevos descubrimientos científicos, hecho que llevó a la formalización del cálculo diferencial e integral que se presenta en algunas obras como las de Isaac Newton (1642-1727) y Gottfried Leibniz (1646-1716).

El uso de cantidades infinitesimales fue cada vez más común para solucionar problemas de cálculo de tangentes y esto daría origen al cálculo diferencial; de otra parte el proceso para evaluar áreas y volúmenes daría paso al cálculo integral (Boyer, 1999, p. 442). A continuación, y dado el propósito del presente trabajo, se describirán los procesos matemáticos que llevaron a conceptualizar la integral definida como el límite de una suma de áreas de rectángulos.

Los griegos, tenían un desarrollo limitado de los conceptos numéricos y no podían medir de manera exacta el área o volumen de algunas figuras y cuerpos geométricos, por tanto tenían que "calcular" directamente con las figuras, que se trataban como magnitudes; es decir, que se tomaba la medida sobre el objeto tangible y se comparaba con una unidad de referencia o patrón de la misma naturaleza de lo que se quería medir. Por su parte, para estudiar la cuadratura o curvatura de una figura, Eudoxo (408 – 355 a.C.), Euclides (325 - 265 a.C.) y Arquímedes (287 -212 a.C.) debían encontrar su razón con otra figura previamente conocida. De este modo ellos desarrollaron una sofisticada teoría de las magnitudes y las proporciones, sobresaliendo los trabajos de Eudoxo (González, 2008, p.118), quien con la *Teoría de la Proporción*, y el *Método de Exhaución* ofrece un procedimiento para determinar el área de figuras curvilíneas a través de polígonos que aproximen progresivamente el área al de la figura dada; proceso realizado de la siguiente manera:

> *"Es fácil ver que, inscribiendo un cuadrado en un círculo, la diferencia entre ambos es menor que la mitad del área del círculo, ya que el cuadrado inscrito es la mitad del cuadrado circunscrito, el cual es mayor que el círculo.*





Ahora, sobre cada lado del cuadrado se construye un triángulo isósceles obtenido al bisecar el arco cuya cuerda es el lado del cuadrado, lo que proporciona un octágono regular inscrito en el círculo. Se puede ver que la diferencia entre cada segmento circular (determinado por el lado del cuadrado y el círculo) y el triángulo isósceles descrito anteriormente que determinados lados del octágono, es menor que la mitad del segmento circular. La operación de bisección se puede reiterar de forma que se obtiene en cada proceso un polígono regular inscrito en el círculo y con doble número de lados que el precedente.

Partiendo de un círculo se continúa el proceso anterior. Se resta reiteradamente a una cantidad otra cantidad superior a su mitad (primero, al círculo se le resta el cuadrado inscrito, en segundo lugar, a los segmentos circulares resultantes se les restan los triángulos isósceles que determinan el octógono, y así sucesivamente); aplicando el Principio de Eudoxo, alcanzaremos un polígono inscrito, cuya diferencia con el círculo "es tan pequeña como se quiera".

De esta manera, se obtiene el "Lema de exhaución del círculo", que simbólicamente se expresa en la forma:

Dado un círculo C y un número $\varepsilon>0$*, se puede encontrar un polígono regular* P *inscrito en C de tal modo que:*$a(C) - a(P) < \varepsilon$.

En efecto: se inscribe el cuadrado $P_0 = ABDE$ *en el círculo C. Sea*$R_0 = a(C) - a(P_0)$.

Duplicando el número de lados, como se ha explicado, se obtiene un octágono regular P_1*inscrito en C. Al continuar el proceso de duplicación se obtiene una sucesión de polígonos inscritos en el círculo:*

$\{P_0, P_1, P_2, \dots, P_n, \dots\}$, *Donde el polígono* P_n *tiene* 2^{n+2} *lados.*

Sea $R_n = a(C) - a(P_n)$. *Se ha de comprobar que:* $R_{n+1} < \frac{1}{2}R_n$ *o su equivalente:* $R_n - R_{n+1} > \frac{1}{2}R_n$

Se tiene: $R_0 - R_1 = a(P_1) - a(P_2) = 4a(\Delta ABF)$ *así*

$$R_0 - R_1 = 2a\,(\square ABB'A') > 2a(arco\ AFB) = \frac{1}{2}[a(C) - a(P_0)] > \frac{1}{2}R_0$$

y en general: $R_n - R_{n+1} = a(P_{n+1}) - a(P_n) > \frac{1}{2}[a(C) - a(P_n)] = \frac{1}{2}R_n$

donde $a(C) - a(P_n)$ *es la suma de las áreas de los* 2^{n+1} *segmentos circulares determinados sobre el círculo por los lados del polígono inscrito* P_n *".*(González,2008, pp.119 - 120)

Este método fue fundamental para la resolución de los problemas infinitesimales de cuadraturas y curvaturas, que indirectamente usa el cálculo de un límite. Euclides y Arquímedes aplicaron el *Método de Exhaución* en gran parte de sus obras (la cuadratura de la parábola, la esfera y el cilindro, la medida del círculo, las espirales, conoides y esferoides,…). En particular Arquímedes en su libro *la cuadratura de la parábola,* demuestra que el área del segmento de parábola es igual a $\frac{4}{3}$ del área de un triángulo con igual base y altura (Cantoral y Farfán, 2004, p. 29); lo primero que hace es demostrar que el segmento parabólico se puede aproximar mediante un polígono tan cercano al mismo como se quiera (cuya diferencia sea menor que un grano de arena), para ello usa el método de exhaución inscribiendo triángulos; en la Figura 1 se puede ver que al segmento de parábola PQq, se le inscribe un primer triángulo ΔQPq, cuya altura es igual a dos veces la longitud de su base.

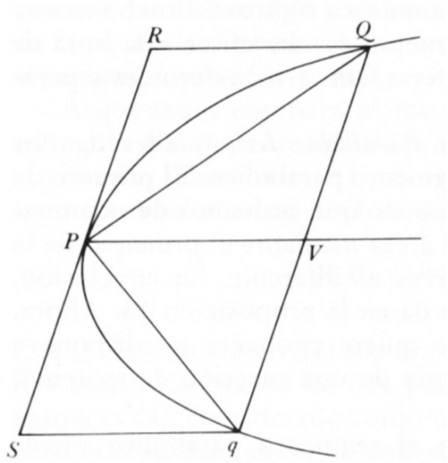


Figura 1. Primer triángulo inscrito.

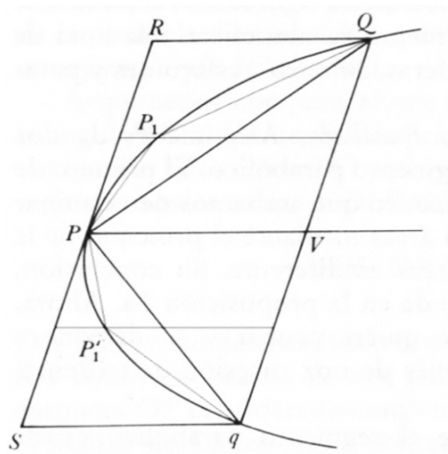


Figura 2. Más triángulos inscritos.

Luego se empiezan a inscribir más triángulos, Figura 2., y demuestra que el $\Delta PP'q$ tiene las mismas propiedades que el ΔPP_1Q, y además, que la suma de sus áreas es $\frac{1}{4}$ del ΔPQq; para ello emplea el hecho de que si se continua inscribiendo triángulos, se tiene que el área del segmento parabólico se puede aproximar por: $\Delta PQq + \frac{1}{4}\Delta PQq + \frac{1}{16}\Delta PQq + \frac{1}{64}\Delta PQq + \cdots$.

Arquímedes demuestra que: siendo A_1 el área del ΔPQq, y teniendo n términos de una progresión geométrica cuya razón es $\frac{1}{4}$, se tiene

$$A_1 + A_2 + \cdots + \frac{1}{3}A_n = \frac{4}{3}A_1 \tag{4}$$

Lo siguiente que hace Arquímedes es comprobar que el área A del segmento parabólico no puede ser ni mayor ni menor que $\frac{4}{3}A_1$.

"Su demostración consiste simplemente en que si el área A es mayor que $\frac{4}{3}A_1$ obtendría un conjunto (finito) de triángulos cuya suma S diferiría del área del segmento en una cantidad mayor que cualquier magnitud dada, por lo que la suma S sería mayor que $\frac{4}{23}A_1$, así,

$$A > S > \frac{4}{3}A_1$$

Pero por (4), si S contiene m términos, entonces

$$S + \frac{1}{3}A_m = \frac{4}{3}A_1$$

o bien $S < \frac{4}{3}A_1$

lo que es contradictorio.

Análogamente, supongamos que el área A del segmento parabólico es menor que $\frac{4}{3}A_1$. Entonces $\frac{4}{3}A_1 - A$ es un número positivo. Como los triángulos trazados por Arquímedes son cada vez más pequeños, podemos obtener una sucesión de triángulos inscritos tales que

$$\frac{4}{3}A_1 - A > A_m \quad (5)$$

Donde A_m es el término m-ésimo de la sucesión y representa geométricamente la suma de 2^{m-1} triángulos. Pero como consecuencia de (4):

$$A_1 + A_2 + \cdots + A_m + \frac{1}{3}A_m = \frac{4}{3}A_1 \quad (6)$$

Entonces

$$\frac{4}{3}A_1 - (A_1 + A_2 + \cdots + A_m) = \frac{4}{3}A_m$$

o bien

$$\frac{4}{3}A_1 - (A_1 + A_2 + \cdots + A_m) < A_m \quad (7)$$

Se sigue de (5) y (7) que

$$A_1 + A_2 + \cdots + A_m > A \quad (8)$$

Pero toda suma formada por triángulos inscritos siempre es menor que el área del segmento. Luego (8) es imposible.

Evidentemente, Arquímedes había sumado una progresión infinita, ya que cuando n tiende a infinito en (4), A_n tiende a cero, y la suma de la progresión infinita es $\frac{4}{3}A_1$.” (Kline, 1972, pp. 157-160)

Para poder ampliar el método de exhaución a cualquier tipo de región, fue necesario esperar a que el desarrollo de técnicas algebraicas, de la simbología y las coordenadas cartesianas se diera, lo cual tardo aproximadamente 18 siglos; en particular se volvió a ver cuando se habla de la integral, iniciando con en el trabajo de Leibniz quien ve el área y el volumen como una suma de rectángulos o cilindros, y no como la concibió Newton invirtiendo la diferenciación, Louis Cauchy (1789-1857) y Joseph Fourier (1768-1830) se guiaron por la idea de Leibniz y en específico Fourier logra una definición precisa para la integral definida de una función f como el límite de una suma:

“Si el intervalo $[x, X]$ se subdivide por los valores de x: $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, con\ x_n = X$, entonces la integral es

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_1)(x_i - x_{i-1}),$$

donde ξ_i es cualquier valor de x en $[x_{i-1}, x_i]$. La definición presupone que $f(x)$ es continua sobre $[x_0, X]$ y que la longitud del subintervalo más grande tiende a cero. Cauchy muestra que la integral existe, no importa como se toman los x_i y ξ_i…

Cauchy define entonces

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)dx$$

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_{x}^{x+h} f(x)dx$$

Y usando el teorema de valor medio para las integrales, Cauchy prueba que

$$F'(x) = f(x)$$

Este es el teorema fundamental del cálculo, y la presentación que hace Cauchy es la primera demostración de él. Entonces después de demostrar que todas las primitivas de una $f(x)$ dada difieren en una constante, define la integral indefinida como

$$\int f(x)dx = \int_a^x f(x)dx + C$$

y señala que

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)\text{”}$$

(Kline, 1972, pp. 1263-1264)

El objeto matemático integral fue retomado más adelante por Bernhard Riemann (1826-1866) quien considero más condiciones para el estudio de área bajo la curva, pero donde se seguía cumpliendo la fórmula de la integral de Fourier, la definición original de las sumas según Riemann es:

“Sea $[a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervalo cerrado y acotado y sea $f: [a, b] \to \mathbb{R}$una función. Se dice que $f$es integrable Riemann en $[a, b]$ si existe $A \in \mathbb{R}$ que satisface lo siguiente:

Para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $P = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ es una partición de$[a, b]$,$\{c_0, c_1, \dots, c_n\} \in [a, b]$ son tales que $c_i \in [t_{i-1}, t_i]$y$\|p\| < \delta$; entonces

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(c_i)(t_i, t_{i-1}) - A\right| < \varepsilon$$

Al número Aque aparece en esta definición se le llama integral de Riemann de f sobre$[a, b]$, a las sumas que aparecen en esta definición se le llaman sumas de Riemann .La integral de Riemann de f sobre el intervalo $[a, b]$se denotará por:

$$(R)\int_a^b f(x)dx$$

ó simplemente por

$$\int_a^b f(x)dx$$

si no existe posibilidad de confusión”.(Leal, 2009, p. 6)

2.1.2. ORESME Y LA DEMOSTRACIÓN A LA LEY DE MERTON

Al remitirse a la historia es posible encontrar que lo que ahora es evidente y en ocasiones obvio, no siempre fue así; detrás de lo que se da por elaborado, está el resultado de una constante evolución que ha permitido establecer una serie de elementos que hoy en día se encuentran al alcance de nuestro conocimiento. Un ejemplo claro, y que para la presente propuesta revierte gran importancia, es el desarrollo que se presentó entre los siglos XIII y XIV, donde se retomó algunos estudios que datan de las antiguas escuelas griegas y que, por ese entonces, aún generaban inquietud a los intelectuales: la cuantificación de los fenómenos físicos y en particular el movimiento. Este estudio a la postre generaría un cambio conceptual que era necesario para poder comprender la ciencia del renacimiento y aún la de nuestros días.

Retomando los estudios realizados por algunos de los pitagóricos, Platón (428 – 347a.C.) y Arquímedes abordan un proceso de matematización de los fenómenos naturales en términos de aquellos que podían ser explicados por la astronomía, y otros, planteados por Aristóteles(384 – 322a.C.) sobre la cuantificación del movimiento, los intelectuales de varias universidades de la edad media, como la de París y de Oxford, realizan aportes significativos a los problemas planteados, siendo uno de los más importante el formulado por Gerard de Bruselas sobre el movimiento, en donde se busca salir de la explicación aristotélica del movimiento para dar los primeros pasos hacia lo que hoy en día se conoce como dinámica y cinemática(Nieto, s.f., p. 2).

En el segundo cuarto de siglo XIV, un grupo destacado de matemáticos y lógicos asociados con el Merton College de la universidad de Oxford y auto proclamados como los calculadores, realizan la diferenciación de la cinemática y la dinámica, proporcionando los elementos conceptuales necesarios para el estudio de movimiento de forma descriptiva desde una nueva perspectiva, introduciendo términos como velocidad y velocidad media, a los que era posible asignar una magnitud; también hacen por primera vez claridad en cuanto a las características del movimiento uniforme y el uniformemente acelerado.

Es de indicar que el origen de los estudios mencionados anteriormente se debe a la a aparición de diversos libros donde se abordaba el tema denominado, por ese entonces, como "*La latitud de las formas*", en el cual el concepto de forma y latitud eran entendidos así:

> *"Con el término forma se refieren a cualquier cualidad o característica que admita variación y la noción de intensidad. Estas incluyen la temperatura, la velocidad, luminosidad, tristeza, etc., con lo cual se aprecia que tan libremente especulaban estos filósofos medievales.*
>
> *La latitud de una forma se refiere al grado con el cual la cualidad es poseída por un objeto o sujeto y se hablaba como objeto de estudio del **intensio** y **remisio** de la forma, esto es, del crecimiento o decrecimiento de la intensidad de la cualidad en cuestión"* (Riestra, 2004, p.53).

Lo anterior hace pensar que estas cualidades estaban a libre disposición de quien hacia el estudio, lo que implica la posibilidad de inclusión de cualidades como: la velocidad, la temperatura, luminosidad entre otras.

El trabajo realizado por los antiguos filósofos medievales no se limitó únicamente al estudio de las dos cualidades uniformes y deformes sino que incluyeron diversas combinaciones con el fin de hacer un estudio más amplio de las cualidades como la latitud uniformemente deforme, para referirse a una intensidad que no cambia de manera uniforme. Haciendo una descripción con más detalle de lo que encontraron los calculadores de Oxford con respecto al movimiento, es posible mencionar las siguientes interpretaciones realizadas por ellos frente a la descripción de los mismos:

- ***Cambio uniforme:***(movimiento uniforme): Se origina cuando se recorren iguales distancias en iguales intervalos sucesivos de tiempo.

- ***Cambio disforme:*** (movimiento acelerado): cuando se recorren espacios desiguales en iguales intervalos de tiempo.

- ***Cambio uniformemente disforme*** (uniformemente acelerado): movimiento en el que es posible tener un aumento igual de velocidad en cualquier intervalo de tiempo igual.

- ***Cambio disformemente disforme***: Aumentos distintos de velocidad en tiempos iguales.

La anterior clasificación es complementada y articulada con un concepto que resulto esencial para la descripción, al saber que la ***Velocidad instantánea,*** permite conocer la velocidad de un móvil que se desplaza sobre una trayectoria cuando el intervalo de tiempo es infinitamente pequeño, siendo entonces el espacio recorrido también muy pequeño, representando un punto de la trayectoria.

Sin embargo la interpretación más interesante de las hechas por los calculadores, es aquella, conocida como *la Ley de Merton* o *teorema de la velocidad media.* Esta ley fórmula lo siguiente: "*El efecto de una forma que varía uniformemente o de una que es* *uniforme en cada una de dos mitades (iguales) es el mismo de otra que es uniforme con una intensidad promedio de la mínima a la máxima*" (Boyer, 1959, p. 75).

Expresado en términos del movimiento "Un cuerpo que tiene movimiento uniformemente acelerado y que cubre cierta distancia en un tiempo dado, cubriría la misma distancia si se moviera por el mismo espacio de tiempo con una velocidad uniforme igual a la velocidad promedio". (Nieto, s.f., p. 8). (Este es el enunciado de una ley básica de la cinemática que hoy se emplea). La importancia que toma lo descrito anteriormente como ley, y que se debe observar realmente como una postulación de tipo empírico, pues no se le había dado una explicación formal a la misma, radica en la manera como se relacionan los dos tipos de movimiento al poder establecer el espacio que se recorre en el primero en términos del espacio recorrido por el segundo. Es de mencionar que los trabajos formulados por los calculadores de Oxford fueron promulgados verbalmente sin recurrir a una representación gráfica de los mismos, lo cual permite hacer una exploración de los elementos que se omitieron en ese momento, pero que son necesarios para poder entender el concepto como un cálculo de área bajo la curva tal como se presenta en la actualidad.

Formulaciones como la anterior trascendieron a otras universidades dada la importancia que éstas tenían para solucionar el problema cuantificar los fenómenos naturales y llegó hasta la universidad de París y en particular hasta Nicolás Oresme (1323 – 1382) y es a él a quien se debe la comprobación geométrica formal de la ley de Merton.

Oresme en su libro "*De las configuraciones de las cualidades",* hace la demostración del teorema de la velocidad media empleando una representación gráfica desde la geometría que permite una segunda forma de cuantificar los fenómenos naturales. Para poder llegar a esto introduce dos nuevos conceptos que relaciona hábilmente y le permite introducir un primer sistema coordenado. Los conceptos empleados son *longitudes* y *latitudes*; estos elementos contribuyeron a la intención de poder cuantificar los fenómenos naturales ya que de esta manera era posible relacionar dos magnitudes de cualquier tipo, refutando lo que había planteado Aristóteles y en general los griegos al manifestar la imposibilidad de relacionar dos cantidades que no fueran de la misma naturaleza.

Antes de pasar a la interpretación geométrica del teorema de la velocidad media, es oportuno mostrar en qué consistió el método empleado por Oresme y en dónde radica su importancia. Él traza una línea horizontal para representar una de las magnitudes a trabajar a la que llamo ***longitud***, y trazo un segmento perpendicular a esta que denominó ***latitud***. Esta última es la que indica la manera como esta "cambiando" la magnitud.

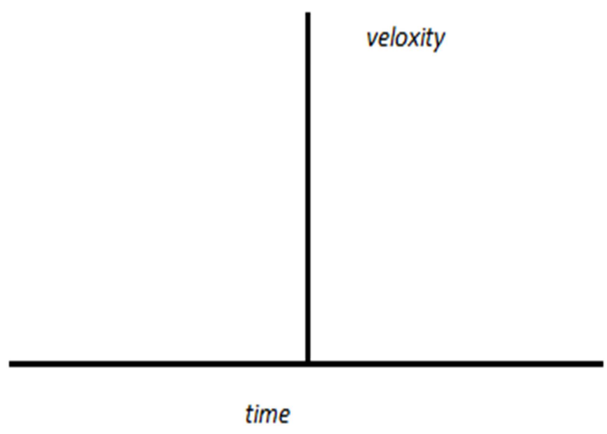


Figura 3. Representación de Magnitudes según Oresme. (Nieto, s.f., p. 7)

Partiendo de esta idea resultaba posible establecer algunos patrones según el tipo de movimiento que se quería describir, si el movimiento era uniforme los segmentos paralelos de las latitudes eran todos de igual medida formando un rectángulo. Si por el contrario el movimiento era acelerado los segmentos paralelos cambian de tamaño, pero de forma tal que va creciendo de manera proporcional el siguiente con respecto al anterior hasta formar un triángulo o un trapecio; pero, si el movimiento es variado en su totalidad, las líneas paralelas también resultan serlo, de tal suerte que las figuras resultantes podrían ser desde un semicírculo o una figura totalmente irregular. Para cada una de las representaciones Oresme empleó un nombre. A la figura (a) la denomino *uniforme*, a la (b) *uniformemente disforme* y a la (c) *disformemente disforme*.

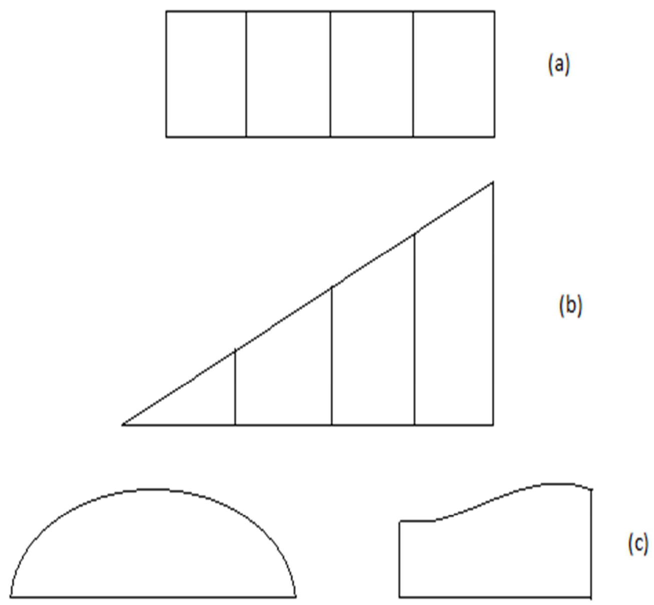


Figura 4. Patrones de los tipos de movimiento

Partiendo de lo propuesto por Oresme, el camino hacia la demostración que él da al teorema de la velocidad media puede ser reconstruido. Para tal efecto se dibuja un triángulo y un rectángulo, como en la figura 5.

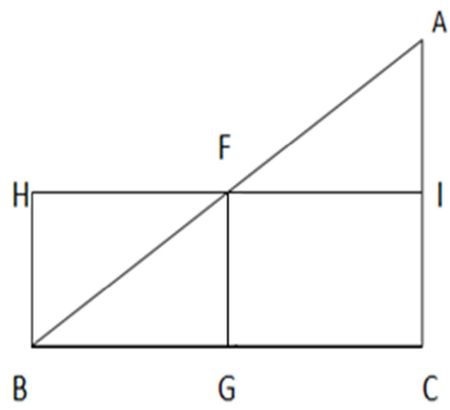


Figura 5. Dibujo demostración del teorema del valor medio.

El movimiento uniformemente acelerado se representa por el $\Delta\ BAC$ y su velocidad media por el segmento FG. El movimiento uniforme lo representamos con el rectángulo $BCIH$ cuya altura es FG.

La ley de Merton indica que la distancia recorrida en un movimiento (el representado por el triángulo) es igual a la distancia recorrida del otro (el representado por el rectángulo $BCIH$). Para Oresme la distancia recorrida es el área de las figuras, demostrando entonces que el área del triángulo BAC es la misma que la del rectángulo $BCIH$. Lo cual es evidente ya que el triángulo BHF tiene la misma área que la del triángulo FAI.

Al apreciar con detenimiento el trabajo realizado por Oresme, se puede observar que el planteamiento solo aplica para el movimiento uniformemente acelerado, pero Richard Suiseth (1340-1354) (conocido con el apodo de "Calculator"), puso en evidencia el uso que del concepto de infinito, puesto que lo que Oresme describe como una cualidad que durante la primera mitad posee una determinada intensidad, hacia la segunda mitad cuenta con el doble, para la tercera mitad cuenta con el triple y así sucesivamente; Suiseth lo asemeja a la suma geométrica de una serie infinita. Para lograr una mejor comprensión de esto, observemos la figura 6.

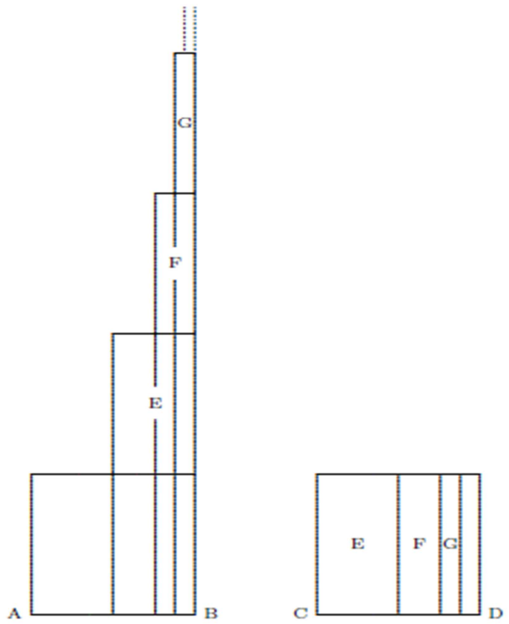


Figura 6. Representación de suma de rectángulos infinitos.

"Para la anterior figura Oresme comenta que: a pesar de que la intensidad se vuelve infinita la cualidad total solo es cuatro veces (…). Viendo la figura se aprecia que el exceso sobre el rectángulo AB ha sido acomodado en el rectángulo CD (siendo la longitud de AB iguala a la de CD); resultando tal exceso de igual área que el rectángulo de base AB" (Oresme 1968, p.413, citadoen Riestra, 2004 pp. 56-57).

Si se tiene en cuenta que tanto Suiseth como Oresme, abordaron el problema antes descrito (uno de forma teórica y otro de manera geométrica),en lo que ambos coinciden es en realizar un proceso donde la cualidad se haga infinita mientras que la cantidad permanezca finita, es decir, que aunque el proceso de dividir el área se haga infinitamente, su medida no va a dejar de ser finita. Oresme llega a que esta suma es igual a dos y para evidenciar de algún modo formal y matemáticamente este hecho, se expondrá el método para resolver la siguiente serie, siguiendo el proceso de Oresme que es descomponer cada una de sus partes y que Suiseth logra probar:

> *"Esto se traduce en sumar la serie:*
>
> $$\sum_{n=1}^{\infty} n2^{-n} = \frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}+\frac{5}{32}+\cdots$$
>
> *Y el equivalente a la estrategia de solución que vimos corresponde a descomponerla como se muestra y sumar por separado:*
>
> $$\begin{array}{r} \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots=1 \\ \frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots=\frac{1}{2} \\ \ddots \qquad\qquad \vdots \quad \vdots \\ \frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots=\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2^n}+\cdots=\frac{1}{2^{n-1}} \\ \ddots \qquad \vdots \end{array}$$
>
> *Resultando la suma igual a 2"* (Riestra, 2004, p. 57).

Observando el mecanismo de solución, lo que se hace es sumar primero una unidad de cada una de las fracciones de la serie, donde se obtiene como resultado 1; luego se suman las segundas unidades de las fracciones, pero como $\frac{1}{2}$ no tiene mas unidades en que descomponerse la suma arranca en la segunda unidad de los cuartos, teniendo como resultado $\frac{1}{2}$; para las terceras unidades, ya los cuartos no tiene mas unidades en que descomponerse, entonces la suma arranca desde la tercera unidad de los octavos; así de manera análoga para cada una de las partes, convirtiéndose en una descomposición de sumas infinitas. Luego se suman todos los valores de cada una de sumatorias parciales y se obtiene como resultado 2, lo que evidencia que la cantidad sigue siendo finita independientemente que para obtenerla se realizó un proceso infinito.

> *"…consistentemente con lo obtenido por Oresme. Este problema es abordado por Oresme en general, es decir, para cualquier cualidad que tenga la configuración de la figura 6. Una vez encontrada su cantidad, Oresme particulariza en varios contextos. Uno de estos es el del movimiento en el cual AB representa el tiempo de duración y las ordenadas la intensidad de la velocidad. Es en esta instancia que Oresme a partir de la relación entre las áreas concluye la misma para los espacios recorridos: el espacio recorrido por el móvil será entonces cuatro veces el espacio recorrido en la primera mitad del intervalo de tiempo"* (Riestra, 2004, p. 57).

Resulta pertinente aclarar que aun cuando en la obra de Oresme nunca se dice explícitamente que el área representa el espacio recorrido este resultado es de evidentemente conclusión.

2.2. MARCO DIDÁCTICO

El proyecto de una secuencia de actividades para el aprendizaje de las matemáticas, se estructura bajo una metodología guiada por algunos factores que influyen en la enseñanza. A continuación, se describe un componente del análisis didáctico de las matemáticas que para la pertinencia de esta propuesta es considerado como herramienta de organización de su enseñanza, se trata del *análisis fenomenológico*. Iniciando por exponer los elementos que justifican el uso de éste tipo de análisis en esta propuesta, seguido de una descripción de los fenómenos físicos que permitirán en el último apartado realizar una conexión donde el concepto y la estructura descrita en el marco histórico del cálculo de áreas bajo la curva, sea el medio de organización de dichos fenómenos.

2.2.1. ¿POR QUÉ EL USO DE UN ANÁLISIS FENOMENOLÓGICO?

Al comienzo de cualquier aprendizaje, los estudiantes captan los objetos mentales cuando los utilizan en actividades con sentido, en tanto esto se convierte en la oportunidad de analizar la estrecha relación existente entre los conceptos matemáticos y los conceptos de otras ciencias; como para el caso de esta propuesta, con fenómenos físicos.

Debido a la intervención necesaria de conceptos matemáticos en la solución de situaciones aplicativas, el análisis didáctico de las matemáticas tiene como uno de sus componentes organizacionales de la enseñanza en los sistemas educativos al *análisis fenomenológico*, el cual Luis Puig (1997, p. 63) define como: *"El análisis fenomenológico de un concepto o de una estructura matemática consiste entonces en describir cuáles son* *los fenómenos para los que es el medio de organización y qué relación tiene el concepto o la estructura con esos fenómenos".* Dicho análisis comienza por delimitar situaciones y contextos donde tienen uso determinados conceptos matemáticos, para así establecer su funcionalidad dentro de la solución de situaciones; esta funcionalidad se muestra cuando se establece la relación entre una subestructura y los fenómenos; resultando ser de gran importancia para las matemáticas escolares y las aplicadas en un ejercicio profesional; ya que los fenómenos proporcionan sentido a los conceptos y estructuras matemáticas.

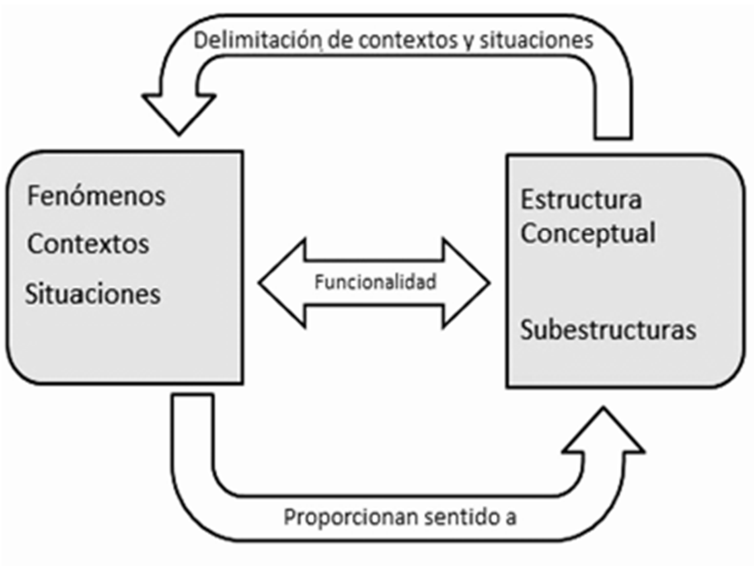


Figura 7. Sistema de Análisis Fenomenológico, propuesto por los autores, diseñado bajo el enfoque de Luis Puig.

Antes de entrar a realizar la delimitación, es necesario hacer claridad y diferencia en la forma como los términos fenómeno, contexto y situación son entendidas en el marco de este enfoque.

Fenómeno: "*como una manera de hablar de lo que es objeto de nuestra experiencia matemática"* (Puig, 1997, p. 64), es decir aquellas experiencias que pueden estar dadas por hechos estadísticos, físicos, geométricos, artísticos, etc.

Contexto: "*es un marco en el cual ciertos aspectos de la estructura conceptual atienden unas funciones, responden a unas determinadas necesidades como instrumentos de conocimiento"* (Rico, Lupiañez, Marín, y Cañadas, s.f., p.7), para el caso de las matemáticas se puede pensar en los contextos que encierran los pensamientos matemáticos establecidos por el Ministerio de Educación Nacional (2006, pp. 57-69).

Situación: "*viene dada por una referencia al mundo (natural, cultural y social) en la cual se sitúan las tareas y cuestiones matemáticas que se proponen a los estudiantes y sobre las que se centra su trabajo*" (Rico, y cols., s.f., p. 7), las situaciones pueden ser de tipo personal, del entorno, educativas, laborales o científicas, estas permiten además localizar un problema y delimitar fenómenos para así ubicar la situación problema.

Adicionalmente es necesario distinguir, tal cual lo hizo Hans Freudenthal (1983, citado en Puig, 1997, p. 64) los tipos de fenomenología, ya que sin importar cuál de ellas se aplique en el presente trabajo se deben tener en cuenta cada una de ellas para realizar una correcta elección de fenómenos, estas se clasifican en:

Fenomenología Pura: trata los fenómenos que están organizados en las matemáticas en el momento y considerando su uso actual; a los conceptos y estructuras matemáticas los trata como productos cognitivos, en tanto da a conocer las matemáticas y sus aplicaciones.

Fenomenología Histórica: trata los fenómenos para cuya organización se creó el concepto en cuestión y como se extendió a otros fenómenos, lo cual favorece la enseñanza de los conceptos y estructuras matemáticas, ya que se afrontan problemas de épocas pasadas y se observa el proceso de creación de las matemáticas.

Fenomenología Didáctica: consiste en los fenómenos presentes en el mundo de los alumnos y los que se proponen en las secuencias de enseñanza, aquí los conceptos y estructuras son tratados como procesos cognitivos, por tanto es indispensable conocer el proceso de enseñanza-aprendizaje del sistema educativo.

Fenomenología Genética: para este último caso los conceptos se consideran con respecto al desarrollo cognitivo de los aprendices, teniendo en cuenta que es necesario que estos se sustenten en las fenomenologías anteriores para así dar un resultado más apropiado al análisis.

Ahora bien, si se piensa en el tratamiento del concepto o estructura que atañe al cálculo de áreas bajo curvas; en su fenomenología pura es claro que este proceso es objeto para darle respuesta a otro concepto, la integral definida, y que se ha extendido hacia campos de la física como: velocidad, posición, trabajo, impulso, y todos aquellos donde intervienen magnitudes que se pueden hallar con un proceso de antidiferenciación. Si se busca en su fenomenología histórica, este se creó con el fin de calcular áreas de figuras no conocidas, iniciando desde la del círculo, pasando por segmentos de parábola hasta lograr su extensión a superficies delimitadas por curvas, tal cual se evidenció en el apartado 2.1.1. de este trabajo. En el apartado 2.1.2. se muestra como Oresme hizo uso del concepto de área para demostrar geométricamente la ley de Merton, poniendo en evidencia el uso de conceptos matemáticos para la explicación de fenómenos físicos.

La fenomenología didáctica pone en indiscutible participación los productos que muchos docentes llevan al aula: métodos, secuencias, situaciones, contextos cotidianos o científicos; para que los estudiantes conozcan aplicaciones de las matemáticas. En el caso del cálculo de áreas bajo la curva se conocen muchas propuestas de enseñanza, unas donde la fenomenología se desarrolla de tipo pura y otras donde ya se vinculan problemas cotidianos a los estudiantes o científicos, y es así que los estudiantes realizan procesos cognitivos en pro del aprendizaje de los objetos matemáticos. La última fenomenología, y en donde se encuentra situada esta propuesta, es la genética; se basa en el desarrollo de conocimiento por parte de los estudiantes, en particular se pretende desarrollar la estructura del concepto de área bajo la curva haciendo uso de fenómenos físicos.

A continuación, se formaliza una sustentación desde el análisis dimensional, del por qué es posible hacer el estudio del el objeto área bajo la curva a partir un fenómeno físico; luego se especifican los contextos, fenómenos y situaciones que se usaran, sin embargo estas serán más explícitas en los próximos dos apartados y en el apartado destinado a las actividades. Como ya se mencionó, los fenómenos están sujetos a eventos físicos como los son el movimiento y el trabajo; los contextos están referenciados por los pensamientos enunciados en el MEN (2006, pp.57-69), específicamente se pretende dar contextos métricos o de medidas, ya que se está calculando áreas de superficies; y espaciales en el sentido que son estos los que nos permiten introducir eventos físicos. Por último las situaciones estarán enmarcadas en entornos conocidos o de sistemas simples para no caer en problemas donde los enunciados ofrezcan dificultades para ser comprendidos.

2.2.2. MAGNITUDES FÍSICAS Y ANÁLISIS DIMENSIONAL.

Como paso previo al estudio de los fenómenos físicos que se tendrán en cuenta durante el diseño de la propuesta, es preciso hacer algunas aclaraciones respecto a la importancia que tienen las magnitudes físicas, pues es allí donde cobra sentido interpretativo en un contexto específico el estudio que se hace desde la física como ciencia y su diferencia con las matemáticas. Lo anterior se puede explicar por la esencia que tiene la física basada en dos aspectos particulares, la observación y la medición; en ellas la física ha formulado principios y leyes que pretenden explicar fenómenos naturales. Es en este contexto donde resultan pertinentes los conceptos de *Magnitud física y Análisis Dimensional,* con el fin de comprender el por qué es posible hacer el estudio de un fenómeno físico particular, desde el objeto área bajo la curva.

Magnitud Física: Es la singularidad de un sistema físico[1], dicho de otra manera,

> *"atributo observable y medible de un fenómeno, de un cuerpo o de una sustancia. Cada propiedad se puede distinguir por su naturaleza y se puede expresar como el producto de una unidad de esa misma naturaleza por un valor numérico (medida) de tal manera que: Magnitud física =Valor numérico x unidad". (Laboratorio de física –E.T.S.I.T. -2006).*

Lo anterior permite afirmar que a través de las magnitudes físicas es posible realizar una caracterización de los sistemas físicos a la vez que ofrece una herramienta para acceder a una explicación de los mismos.

Análisis Dimensional: Es el lenguaje con el cual se puede explicar los fenómenos físicos, para Lara, Cerpa, Rodríguez y Núñez (s.f. p. 37) el *análisis dimensional y la gramática de la física son una misma cosa.* En otro sentido Aranzeta (2005, p. 115) lo presenta como "*una valiosa herramienta para ingenieros y científicos ya que permite investigar las relaciones entre variables que intervienen en un sistema físico".* Así, se debe entender el análisis

[1] Se debe entender por sistema físico como una muestra de objetos o entidades materiales susceptibles a ser medidas, de las cuales se puede hacer una generalización de las posibles interacciones que se puedan dar entre los mismos.

dimensional como el idioma que le da sentido a los sistemas físicos, cuando sobre él interactúan diversas variables que se relacionan entre sí. Una dimensión será entonces la expresión de una cantidad por medio de la cual se da una característica particular de las magnitudes físicas.

A continuación se presenta una descripción de las magnitudes fundamentales y la manera cómo, de la relación de ellas, se desprenden otras que se denominan derivadas. Las magnitudes fundamentales agrupadas en el Sistema Internacional de Medidas (S.I) son:

Magnitud Fundamental	***Unidad Básica***	***Símbolo***	***Ecuación dimensional***[2]
Longitud	Metro	m	L
Masa	Kilogramo	kg	M
Tiempo	Segundo	s	T
Temperatura	Kelvin	K	Θ
Cantidad de sustancia	Mol	mol	N
Intensidad de la corriente eléctrica	Amperio	A	I
Intensidad luminosa	Candela	cd	J

Tabla 1. Magnitudes Fundamentales en (S.I)

En la física escolar se emplean con mayor frecuencia las tres primeras: longitud para medir las distancias o desplazamientos, la masa para medir la inercia de los cuerpos y el tiempo como patrón de referencia y comparación de duración de eventos. Al relacionarlas es posible construir las magnitudes derivadas tal y como se puede apreciar en la Tabla 2.

[2] Es aquella por medio de la cual se puede expresar la relación que se puede dar entre las magnitudes derivadas y las fundamentales.

Magnitud Derivada	***Símbolo***	***Ecuación Dimensional.***
Área	A	L^2
Volumen	V	L^3
Velocidad lineal[3]	$\boldsymbol{v}$	LT^{-1}
Aceleración lineal	$\boldsymbol{a}$	LT^{-2}
Velocidad angular	ω	T^{-1}
Aceleración angular	α	T^{-2}
Fuerza	$\boldsymbol{F}$	MLT^{-2}
Trabajo	W	ML^2T^{-2}
Energía	E	ML^2T^{-2}
Peso	$\boldsymbol{w}$	MLT^{-2}
Momentum lineal	$\boldsymbol{p}$	MLT^{-1}
Presión	P	$ML^{-1}T^{-2}$
Densidad	ρ	ML^{-3}
Peso especifico	δ	$ML^{-2}T^{-2}$
Capacidad calorífica	Cc	$ML^2T^{-2}\theta^{-1}$
Calor especifico	Ce	$L^2T^{-2}\theta^{-1}$
Carga eléctrica	Q	IT
Intensidad del campo eléctrico	E	$MLT^{-3}I^{-1}$
Potencial eléctrico	V	$ML^2T^{-3}I^{-1}$
Resistencia eléctrica	R	$ML^2T^{-3}I^{-2}$

Tabla2. Magnitudes derivadas en (S.I).

[3] Las magnitudes que aparecen en negrita, son magnitudes vectoriales.

Las magnitudes derivadas surgen al operar las fundamentales entre sí mismas o con las además. Por ejemplo fuerza, cuyas unidades en el (S.I) son $\left(\frac{Kgm}{s^2}\right)$. Resultan del producto de las unidades de masa y de longitud divididas entre las de tiempo al cuadrado.

En las actividades que se sugieren para la presente propuesta, se han escogido fenómenos donde es posible encontrar elementos que dimensionalmente cobran significado para la física; aun teniendo claro que para la matemática el objeto área bajo la curva se pueda establecer para cualquier tipo de curva, solo se tendrá en cuenta aquellas curvas donde al aplicar el objeto matemático área bajo la curva, arroje una unidad de medida que dimensionalmente tenga interpretación física.

En conclusión lo que se busca, con las actividades que se proponen para la presente propuesta, en las cuales se empleará el objeto área bajo la curva, es encontrar magnitudes fundamentales o derivadas al operar (multiplicar) las magnitudes representadas en el diagrama de coordenadas cartesianas.

Específicamente las magnitudes tomadas son:

I. Longitud (para determinar la distancia que recorre un cuerpo), y que se obtiene al multiplicar la velocidad por el tiempo (gráfico de velocidad–tiempo) de los movimientos.
II. Velocidad, que se obtiene al multiplicar la aceleración por el tiempo (gráfico aceleración- tiempo) en los movimientos.
III. Trabajo o Energía, que se obtiene al multiplicar la fuerza por el desplazamiento (gráfico fuerza-desplazamiento).

2.2.3. LOS FENÓMENOS

2.2.3.1. EL MOVIMIENTO

Desde las civilizaciones Sumerias y Egipcias pasando por los griegos hasta llegar a Galileo Galilei (1564-1642), se ha querido dar una explicación al fenómeno del movimiento, tomando como referente algunos elementos del entorno cotidiano como por ejemplo los animales, las estrellas, el viento entre otros y relacionándolos con conceptos como la rapidez, posición, desplazamiento e incluso el tiempo. Cada una de estas civilizaciones ha hecho su respectivo aporte hasta llegar a lo que hoy se conoce como *cinemática.*

En este sentido, (Serway y Beichner, 2002) la definen como la rama de la física que se encarga de explicar las características del movimiento sin considerar quien o que lo produce. Lo anterior se puede entender como el estudio de la trayectoria en función del tiempo únicamente. Entre los movimientos que estudia la física se encuentran: el traslacional, el rotacional y el vibratorio. Para el primer caso se puede considerar un peatón que se mueve a lo largo de una calle; el giro que hace la Tierra a diario sobre su eje es un buen ejemplo para el segundo caso y el movimiento que hace de un extremo a otro, desde su posición de equilibrio un péndulo puede ser considerado como vibratorio o más específicamente como oscilatorio.

Para el caso particular de esta propuesta se tendrá en cuenta el movimiento traslacional en una dimensión por ser considerado como el punto de partida para el estudio de la cinemática. Partiendo de esto se hace necesario realizar la descripción de algunos elementos que se consideran en la cinemática y que resultan útiles para la comprensión del fenómeno como lo son: sistema de referencia, posición, distancia desplazamiento, rapidez, velocidad instantánea y aceleración[4] los cuales son presentados a continuación:

Sistemas de Referencia: Es el espacio donde se da inicio al estudio del movimiento. En este sentido (SED-Bogotá, 2012 p. 40). Lo concibe como *"el conjunto de valores que permiten definir inequívocamente la posición de cualquier punto de un espacio euclídeo o más generalmente variedad diferenciable (...) Un sistema de referencia, viene dado por punto y un sistema de coordenadas"*. Para tal fin se emplean sistemas coordenados en los que se incluyen: cartesianos, polares, cilíndricos, esféricos entre otros.

Posición: Se puede concebir como el lugar que ocupa un cuerpo en un espacio determinado. Se representa por la letra x y si se mide con respecto al marco de referencia, se expresa en términos de longitud, es decir, en metros; denotado por (m) en el Sistema internacional de Medidas (S.I.).

Distancia: Magnitud de carácter escalar con la que se logra establecer el recorrido que hace un móvil en términos de longitud. Se mide en metros (m)(S.I) y se representa con la letra $x \ o \ y$, dependiendo de como se tome el sistema de referencia.

Desplazamiento: Se define como el cambio de posición de un cuerpo o partícula que está en movimiento, se representa con Δx. Matemáticamente se define como:

$$\Delta x = x_f - x_i$$

Donde x_f es la posición final y x_i es la posición inicial.

[4]Las definiciones que se presentan al igual que las de MRU Y MRUV, se describen siguiendo algunas ideas expresadas por (Serway y Beichner, 2002, pp. 24, 26, 27, 30, 35, 36)

Rapidez: Es una cantidad de carácter escalar, se define como el cociente entre la distancia total recorrida por un cuerpo o partícula y el tiempo total que se emplea en recorrer dicha distancia.

$$v = \frac{x}{t}.$$

Donde v es la rapidez y t es el tiempo. Este cociente se expresa en unidades de (m/s) en (S.I)

Velocidad Instantánea: Es la relación que existe entre el desplazamiento y el intervalo de tiempo que se emplea para realizar dicho desplazamiento. Matemáticamente se define así:

$$\bar{v}_x = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Esta relación se expresa en unidades de (m/s)en (S.I) y está sujeta a la dirección del desplazamiento por ser una cantidad vectorial.

Aceleración: Es la relación entre la velocidad y el tiempo. Se presenta cuando un cuerpo o partícula cambia la velocidad un en un intervalo de tiempo determinado; la aceleración puede ser constante cuando los cambios de velocidad se hace en los mismo intervalos de tiempo o variable cuando no se cumple lo anterior. Matemáticamente se define como:

$$a = \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} = \frac{v_{xf} - v_{xi}}{t_f - t_i}$$

Se mide en unidades de (m/s^2) en (S.I).

Con estos elementos definidos es posible comenzar a revisar los diferentes tipos de movimientos que se analizan desde la cinemática y que harán parte del estudio que se pone en consideración en el presente trabajo.

TIPOS DE MOVIMIENTO EN UNA DIMENSIÓN

Desde la cinemática se estudian básicamente tres tipos de movimientos rectilíneos: el uniforme, el uniformemente acelerado y el variado; cada uno de ellos presenta diversas característica tanto en su descripción analítica como en su representación gráfica. A continuación se hace una breve descripción, la formulación matemática y la representación gráfica de los mismos.

Movimiento Rectilíneo Uniforme (MRU): Se denomina de esta manera debido a que el cuerpo o partícula que describe este movimiento, recorre siempre distancias iguales en intervalos iguales de tiempo lo que implica que su rapidez será la misma y su aceleración nula. Matemáticamente relaciona la posición, la rapidez y el tiempo a través de la expresión

$$x_f = \bar{v}t \pm x_i.$$

La forma de la misma se asemeja a la ecuación de una recta, lo cual hace prever cómo será la representación gráfica.

Para poder revisar las representaciones gráficas de los movimientos es necesario mencionar que la variable independiente será el tiempo y como variable dependiente se tendrán la posición, la velocidad ó la aceleración, es decir, que cada una de las anteriores estará en función del tiempo.

A continuación se presenta el gráfico de posición versus tiempo ($x_{vs}t$) para el movimiento rectilíneo uniforme. Y como se mencionó la representación obedece a una recta.

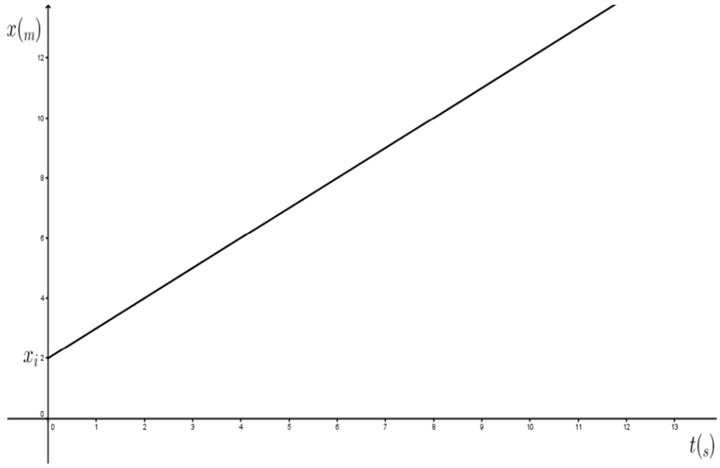


Figura 8. Gráfico de Posición – Tiempo para MRU.

El gráfico de velocidad versus tiempo ($v_{\ vs}\ t$) para el movimiento rectilíneo uniforme tiene por lo tanto la siguiente representación:

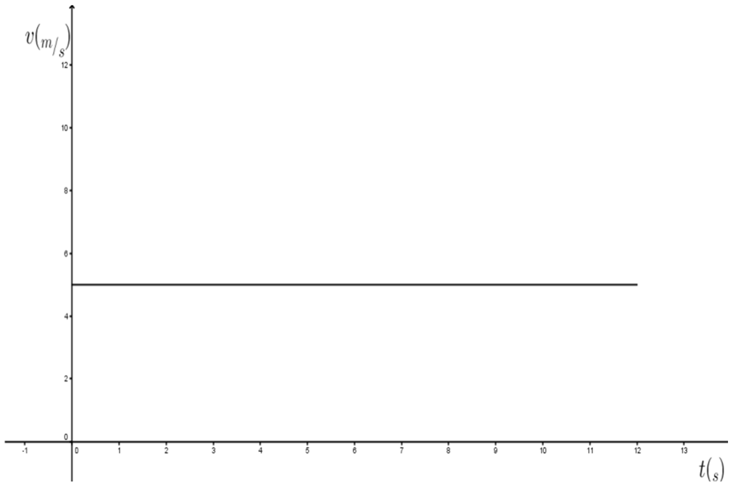


Figura 9. Gráfico de Velocidad - Tiempo para MRU.

Como se están recorriendo las mismas distancias en el mismo intervalo de tiempo, la velocidad no varía en ningún momento. Se considera innecesario para los fines de esta propuesta, considerar el gráfico de aceleración - tiempo para el MRU, debido a que la aceleración en este movimiento es nula.

Movimiento Rectilíneo Uniformemente Acelerado (MRUA): Se denomina de esta forma debido a que el cuerpo o la partícula que describe este movimiento cambia su velocidad en idéntica proporción en intervalos iguales de tiempo, haciendo que la aceleración sea la misma en cualquier instante, es decir, que ésta sea constante. Que exista una aceleración constante originada por al cambio de velocidad hace que las distancias que se recorren cambien en diversas proporciones, en particular la dependencia entre distancia recorrida y tiempo es de tipo cuadrático. La expresión matemática que describe la velocidad en cualquier instante para el MRUA, es:

$$v_f = at \pm v_i$$

Donde v_f es la velocidad final, a es la aceleración, t el tiempo y v_i la velocidad inicial. La forma matemática de la expresión se corresponde nuevamente a la de una recta.

Adicional a la expresión antes descrita, es necesario recurrir a otra que permita encontrar de manera explícita las distancias que se recorren en un tiempo dado cuando se realiza un movimiento de este tipo. Dicha expresión se obtiene de la velocidad promedio y la ecuación de MRU de la siguiente manera:

$$\bar{v} = \frac{v_i + v_f}{2} \text{ Velocidad promedio} \quad (1)$$

$$x_f - x_i = \bar{v}_x \cdot t \quad (2)$$

Igualando (1) y (2) se tiene

$$x_f - x_i = \bar{v}_x \cdot t = \frac{1}{2}\left(v_i + v_f\right) \cdot t$$

Para a constante, se tiene que el desplazamiento está en función de la velocidad y el tiempo.

$$x_f - x_i = \frac{1}{2}(v_i + v_i + at) \cdot t$$

$$x_f - x_i = \left(v_i t + \frac{at^2}{2}\right)$$

$$x_f - x_i = v_i t + \frac{1}{2}at^2$$

Como se ve la distancia que recorre el móvil está en función del tiempo, la expresión matemática se asemeja a una ecuación de segundo grado, por lo tanto el gráfico que se espera al representar $x_{vs}\, t$ debe ser una parte de una parábola. Se presenta a continuación el gráfico de posición versus tiempo ($x_{\text{vs}}\, t$).

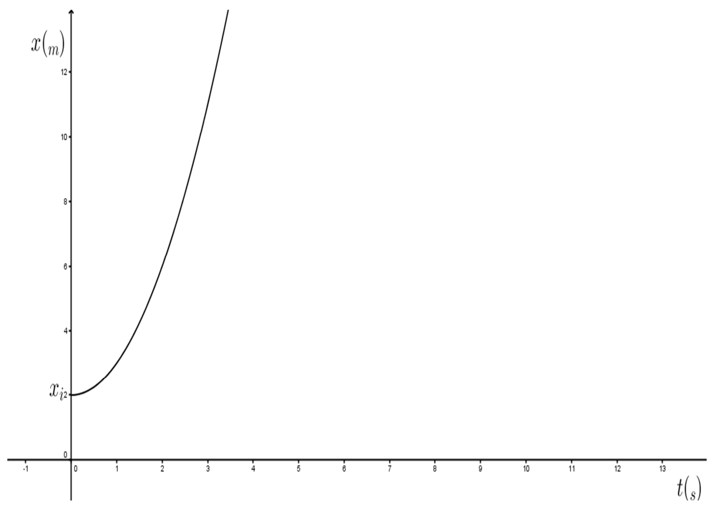


Figura 10. Gráfico de Posición – Tiempo para MRUA.

La representación gráfica de la velocidad versus tiempo ($v_{\text{vs}}\ t$) para el MRUA, dada las características del movimiento, se presenta a continuación.

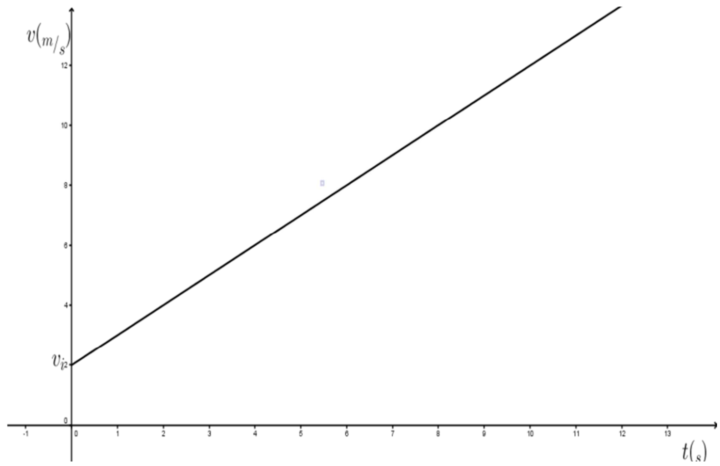


Figura 11. Gráfico Velocidad – Tiempo para MRUA.

El gráfico obedece a una recta, como se había mencionado debido a la caracterización que de ella se puede hacer desde la expresión matemática.

Como se está caracterizando un movimiento rectilíneo uniforme con aceleración constante, la gráfica que se obtiene corresponde a una recta paralela al eje t.

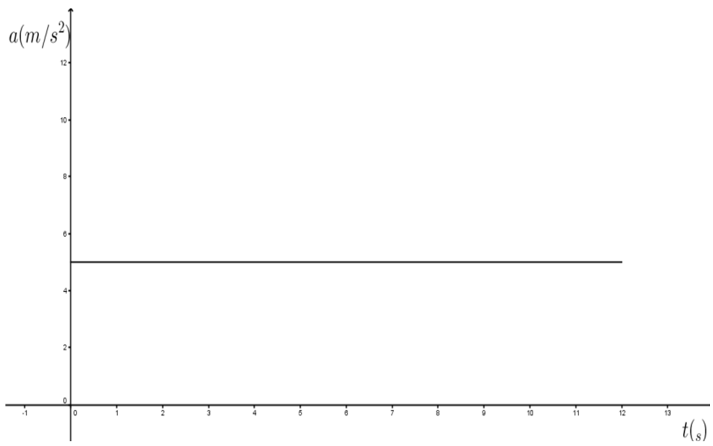


Figura 12. Gráfico Aceleración – Tiempo para un MRUA.

Movimiento Rectilíneo Variado. (MRV) Es el más frecuente dentro del movimiento mecánico de las partículas. Según Manzano (s.f., p.2) este tipo de movimiento se presenta cuando los espacios recorridos por el móvil no son proporcionales a los tiempos. En este sentido MRU y MRUA pasan a ser casos particulares.

A continuación se presentan las representaciones gráficas que se pueden obtener en cada uno de los casos posibles.

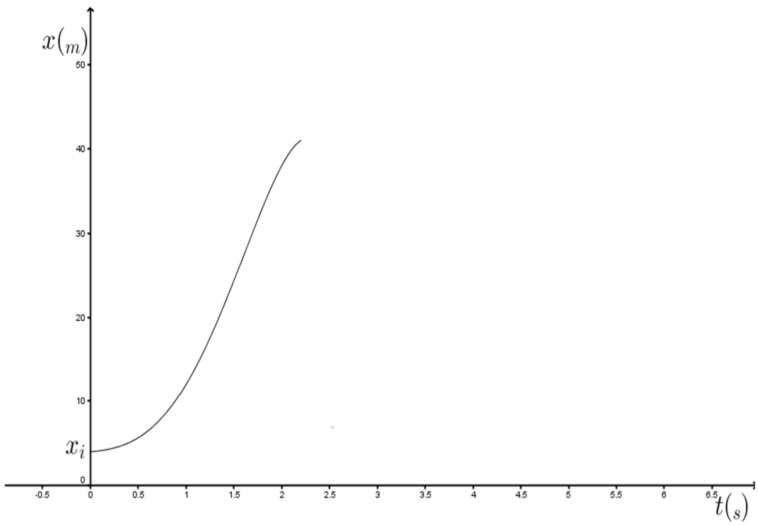


Figura 13. Gráfico Posición – Tiempo para MRV.

La posición cambia en cada intervalo de tiempo, lo que se puede observar en la figura 13.

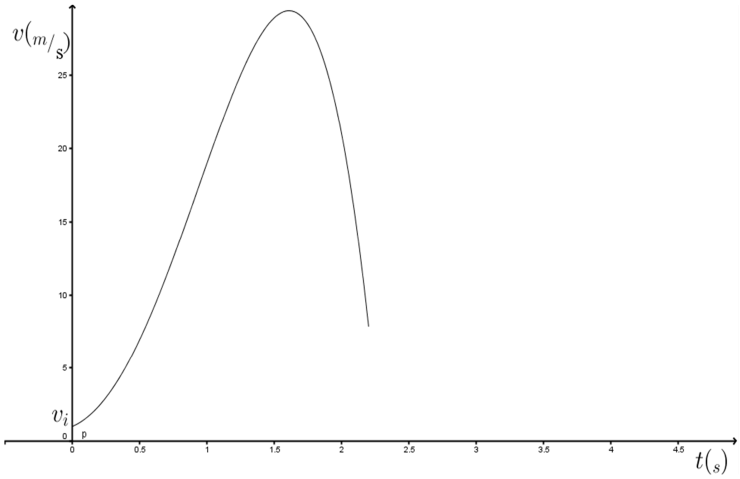


Figura 14. Gráfico Velocidad – Tiempo para MRV.

Como se esperaba, también es una representación que cambia continuamente en cada intervalo de tiempo.

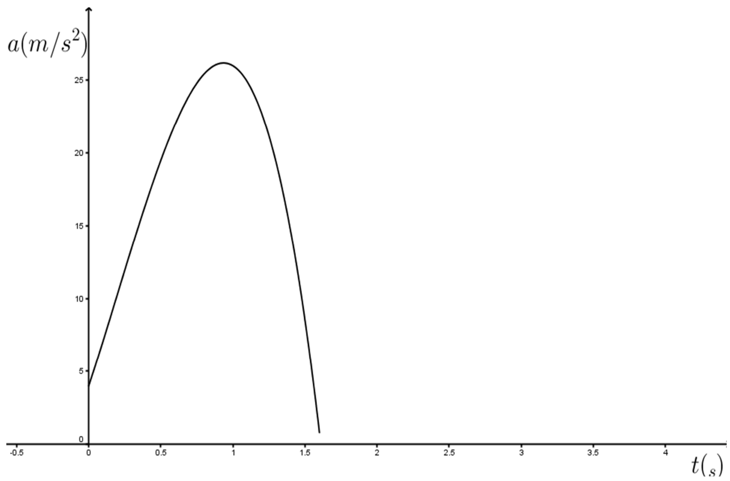


Figura 15. Gráfico Aceleración – Tiempo para MRV.

Al cambiar constantemente la velocidad, se da por hecho que la aceleración también lo hace por tal motivo la representación es como se aprecia en la figura 15.

Los gráficos en los cuales se puede emplear el objeto área bajo la curva son aquellos donde el producto de las magnitudes involucradas proporciona una nueva magnitud. Luego desde el análisis dimensional, solo es posible encontrarlos en los gráficos de velocidad – tiempo y aceleración- tiempo para los tres tipos de movimiento que se describieron anteriormente, ya que el producto de las magnitudes, es decir, el área bajo la curva, nos permite conocer la distancia recorrida y el cambio de velocidad respectivamente.

Lo anterior es posible si se tiene en cuenta que desde la matemática, la velocidad y la aceleración de un objeto se obtiene al derivar la función que describe la posición, con respecto al tiempo una y dos veces respectivamente. Por lo tanto, al ser una derivada, con la velocidad y la aceleración se puede encontrar el desplazamiento y la velocidad si se invierte el proceso, es decir, si se encuentra la antiderivada con unas condiciones iniciales dadas ó se hace la integral de las función correspondiente en un intervalo de tiempo dado, lo que equivale a determinar el área bajo una curva determinada en un intervalo.

Por lo tanto es posible llegar hacer una generalización que permita emplear el objeto área bajo la curva a algunos conceptos físicos en donde el gráfico de dos magnitudes relacionadas en los mismos facilite la obtención de otras y extenderlo más allá de la cinemática.

2.2.3.2. EL TRABAJO (Teorema Trabajo-Energía)

El concepto de trabajo proporciona una conexión entre la fuerza y la energía por tal motivo, se presenta previo al desarrollo del concepto de energía mecánica y al principio de conservación.

Partiendo de lo que exponen Serway y Faughn (2001, p.90), el trabajo, denotado por W, realizado por una fuerza constante, se define como "*El producto de la componente de la fuerza a lo largo de la dirección del desplazamiento por la magnitud del desplazamiento*" (Serway y Faughn, 2001, p. 90). Teniendo como punto de partida esta definición, es necesario hacer claridad en el concepto de fuerza, antes de presentar la expresión matemática que caracteriza al trabajo.

Fuerza (F): Es la acción capaz de modificar el estado de reposo o de movimiento de los cuerpos, es una cantidad de carácter vectorial. Newton la describió en la segunda ley que lleva su nombre, como el producto de la masa y la aceleración; de donde las unidades en las que se mide son $(kg \cdot m/s^2)$ (S.I) de las que se obtiene una nueva unidad de medida conocida como *Newton*(N)(S.I). Matemáticamente se expresa como:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

El trabajo depende de la fuerza aplicada $\vec{F}$ y el desplazamiento Δx, se mide en *Julios,*(Nm)(S.I). No todas las fuerzas realizan trabajo, sólo las fuerzas que están en la misma dirección del desplazamiento, es decir, las fuerzas perpendiculares al desplazamiento no realizan trabajo, por tal motivo matemáticamente se expresa:

$$W = Fcos\theta \, \Delta x$$

Donde θ es el ángulo que forman el vector fuerza y el vector desplazamiento. Es preciso indicar que el trabajo es una cantidad escalar toda vez que esta definición es equivalente a la del producto escalar de dos vectores. El trabajo puede ser realizado por cualquier tipo de fuerza, sea esta constante o variable en el tiempo o en relación con la posición.

Ahora se va a considerar la representación gráfica de las variables que intervienen en el concepto de trabajo para establecer un análisis a través del objeto área bajo la curva, con ese propósito se van a considerar tres situaciones: trabajo realizado por una fuerza constate, por una fuerza variable y por una fuerza continuamente variable. Es de mencionar que los en todos los casos se representará la fuerza como una función del desplazamiento (Fuerza- Desplazamiento).

Trabajo realizado por una fuerza constate (TFC): Es la situación más sencilla que se presenta en el estudio del concepto. En esta, la fuerza que actúa sobre el cuerpo no sufre ningún tipo de cambio, es decir, se mantiene constante mientras se realiza el desplazamiento. La representación gráfica se presenta en la Figura 16:

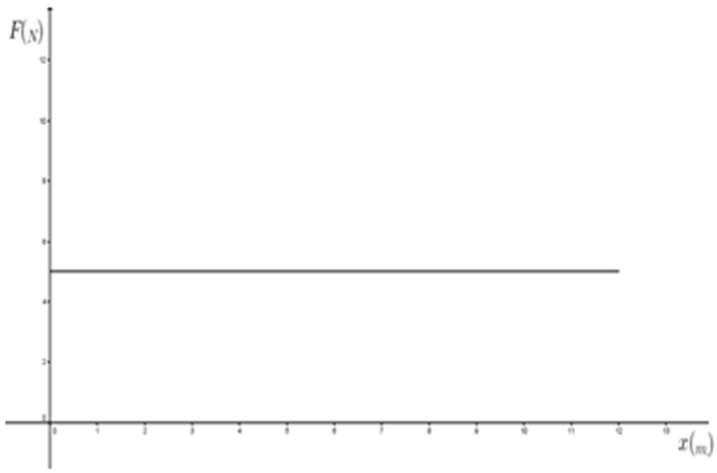


Figura 16. Gráfico Fuerza – Desplazamiento para TFC.

Al ser la fuerza constante durante el desplazamiento, la gráfica es una recta paralela al eje x.

Trabajo realizado por una fuerza variable (TFV): En este caso, la fuerza que realiza el trabajo cambia durante el desplazamiento, aumentando o disminuyendo de magnitud. En este caso se va a asumir que el cambio que realiza en la fuerza es uniforme. La representación gráfica se presenta en la Figura 17.

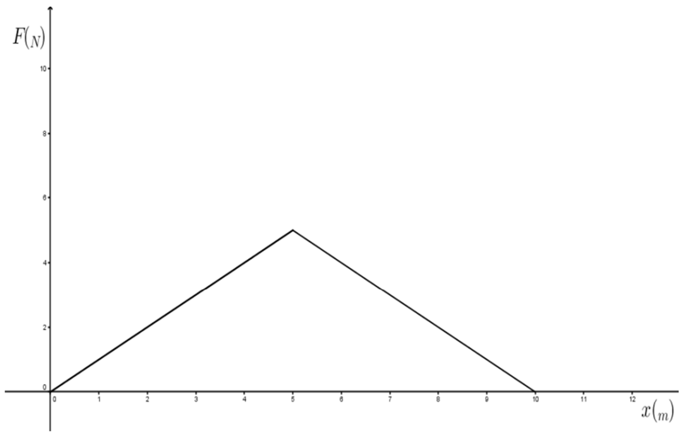


Figura 17. Gráfico Fuerza – Desplazamiento para TFV.

Trabajo realizado por una fuerza continuamente variable (TFCV) Es este caso la magnitud de la fuerza cambia de manera no uniforme durante todo el desplazamiento, lo que hace que el trabajo realizado no se pueda determinar con la expresión mencionada con anterioridad. La representación gráfica puede tomar la siguiente forma.

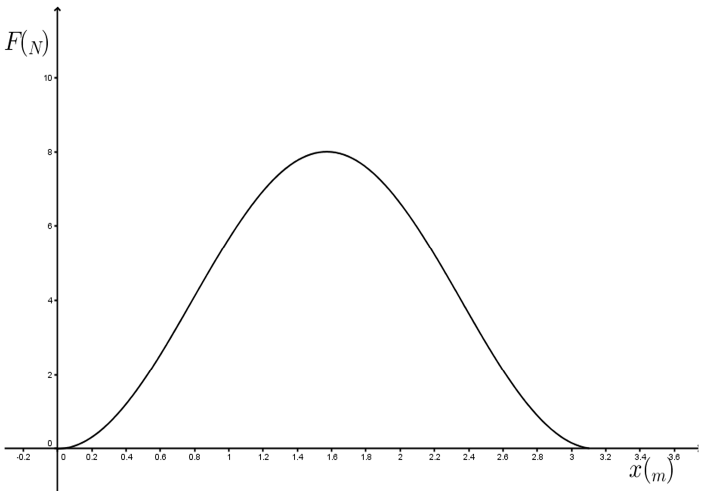


Figura 18. Gráfica Fuerza – Desplazamiento para TFCV.

Luego de hacer la descripción del concepto trabajo y relacionar el mismo con el propósito de la presente propuesta es posible concluir que el trabajo es una magnitud que se puede analizar desde el objeto área bajo la curva cuando se expresa en función del desplazamiento, ya que en cada de las situaciones presentadas anteriormente, el producto de las magnitudes involucradas arrojan una nueva magnitud, en este caso el trabajo realizado por la fuerza, que físicamente es la energía transferida por la fuerza para generar un movimiento, es decir, una transferencia de energía cinética o de energía potencial si se quiere plantear únicamente en términos de la energía mecánica.

En el caso del cálculo de TFCV, se debe tomar pequeños desplazamientos Δx_i y multiplicarlos por la fuerza, es decir, $F_i \cdot \Delta x_i$, lo que proporciona el área de pequeños rectángulos, que al sumarlos desde un punto inicial x_0 hasta otro x_f final, proporcionarían al trabajo realizado por la fuerza, ahora bien, si los desplazamientos se aproximan a cero la suma se haría infinita, la cual se puede calcular con una integral definida o lo que es lo mismo, el área bajo la curva.

2.2.4. EL ANÁLISIS FENOMENOLÓGICO

El contexto en el que se desenvolverá esta propuesta, está influenciado por el desarrollo de los tipos de pensamiento en matemáticas; particularizando y sin omitir los otros, el contexto espacial es uno de los dos a trabajar, entendiendo éste como:

> *" "… el conjunto de los procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y se manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones, y sus diversas traducciones o representaciones materiales" contempla las actuaciones del sujeto en todas sus dimensiones y*

relaciones espaciales para interactuar de diversas maneras con los objetos situados en el espacio, desarrollar variadas representaciones y, a través de la coordinación entre ellas, hacer acercamientos conceptuales que favorezcan la creación y manipulación de nuevas representaciones mentales. Esto requiere del estudio de conceptos y propiedades de los objetos en el espacio físico y de los conceptos y propiedades del espacio geométrico en relación con los movimientos del propio cuerpo y las coordinaciones entre ellos y con los distintos órganos de los sentidos."(MEN, 2006, p.61)

Según esta definición es claro que en la didáctica de las matemáticas son importantes los eventos físicos asociados al movimiento, es por ello que para esta propuesta se estudian los fenómenos físicos asociados con las magnitudes descritas. De aquí se desprende el uso de conceptos como área y distancia; de elementos geométricos como ubicación en el plano cartesiano y la manipulación de figuras geométricas.

El otro pensamiento es el métrico o el de medición, el cual se corresponde con "*la comprensión general que tiene una persona sobre las magnitudes y las cantidades, su medición y el uso flexible de los sistemas métricos o de medidas en diferentes situaciones"* (MEN, 2006, p.63). Es importante hacer referencia que para efectos de esta propuesta se enfatiza en la medición desde dos aspectos, por una parte el manejo de la medición de superficies que va más allá del uso de figuras geométricas convencionales, y de otra parte frente a la importancia de las unidades empleadas en la medición para darle una interpretación física al resultado de un producto de magnitudes.

Teniendo claro cuáles son los contextos y fenómenos, quedan por analizar las situaciones las cuales serán mostradas en el desarrollo de las actividades. En ellas se establecerá la funcionalidad entre los fenómenos y la estructura matemática; para ello se usarán las gráficas expuestas en el apartado anterior clasificándolas en tres grupos de acuerdo al método que será usado para el cálculo del área.

Grupo 1. *Cambio uniforme,* determinación de áreas por rectángulos: En este caso se incluirán los gráficos de funciones constantes y de funciones lineales, ya que solo en estos casos es posible hallar el área bajo la curva a través de figuras geométricas conocidas.

En la Figura 19. gráfico de velocidad-tiempo para un MRU, el área bajo la curva se puede calcular midiendo la superficie de un rectángulo, donde por las coordenadas se conoce su base y altura, también se pueden incluir gráficos aceleración – tiempo para MRUA y TFC, ya que estos también se representan gráficamente como una función constante.

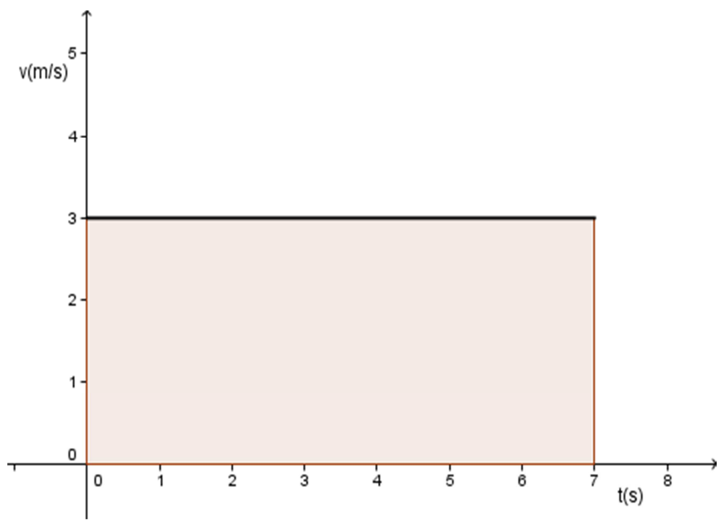


Figura 19. Área bajo segmento de recta paralelo al eje x.

Para el caso de las funciones lineales, inicialmente se puede pensar que el área se puede determinar a través del cálculo de la superficie acotada por el triángulo rectángulo que se forma por la recta y el eje x y la recta $x = x_f$; sin embargo se procurará inducir otro método atendiendo al proceso geométrico que realizó Oresme (apartado 2.1.2.), es decir determinando el punto medio del segmento de recta, y por ese punto construir un rectángulo como se ve en la figura 20., de esta manera se asegura que el área de la región triangular A es congruente el área de la región triangular B y por lo tanto el área de la región rectangular resulta congruente con el área de la región triangular que se consideró inicialmente.

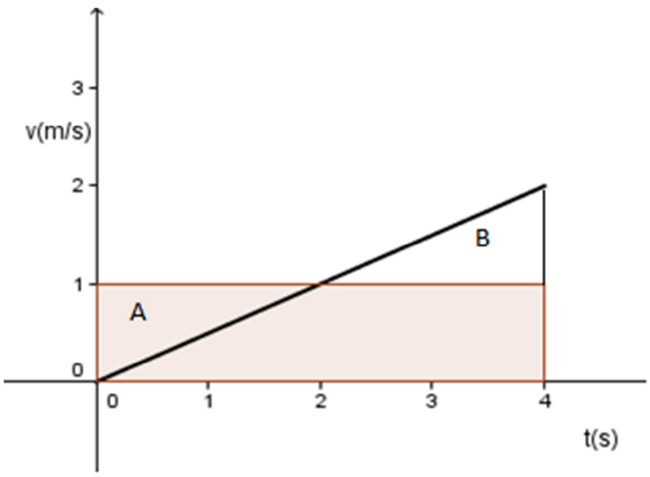


Figura 20. Área bajo segmento de recta.

Grupo 2. *Cambio uniformemente disforme,* determinación de áreas por más de una figura o por un rectángulo: En este caso se incluirán los gráficos de funciones afines y los gráficos de funciones que siendo continuas (aun cuando no es una condición necesaria) están definidas por segmentos de rectas; aunque estas se podrían analizar en el grupo anterior, se separan de manera intencionada con el fin de asociar varios tipos de procesos para hallar el área bajo la curva. Un primer método es subdividir la superficie en dos o más superficies de figuras de área conocida (Figura 21, 22 Y 23).

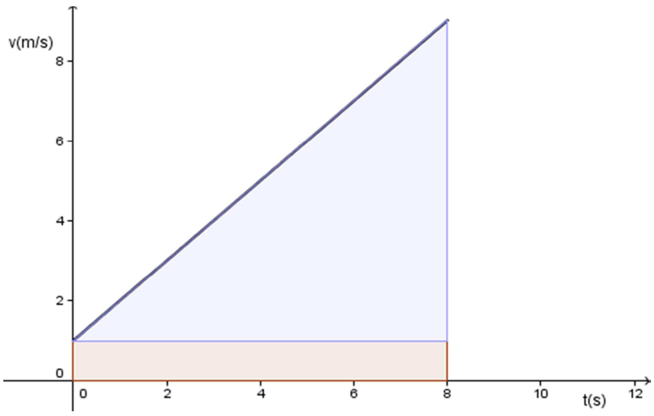


Figura 21. Superficie subdividida en la de un rectángulo y un triángulo.

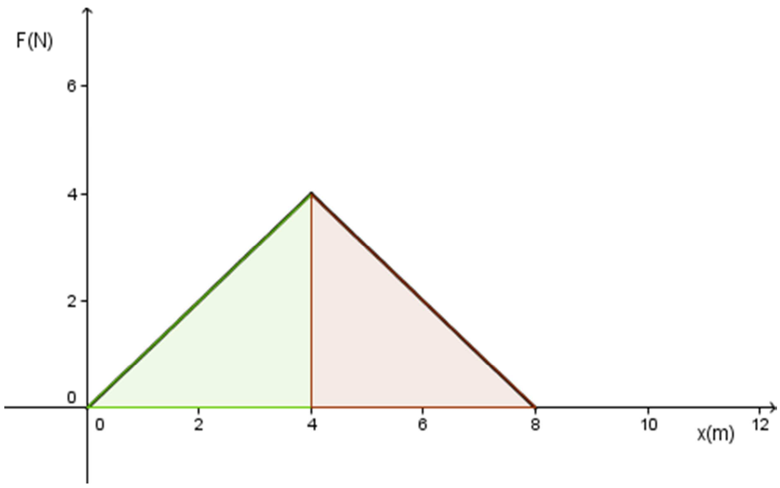


Figura 22. Superficie subdividida en la de dos triángulos.

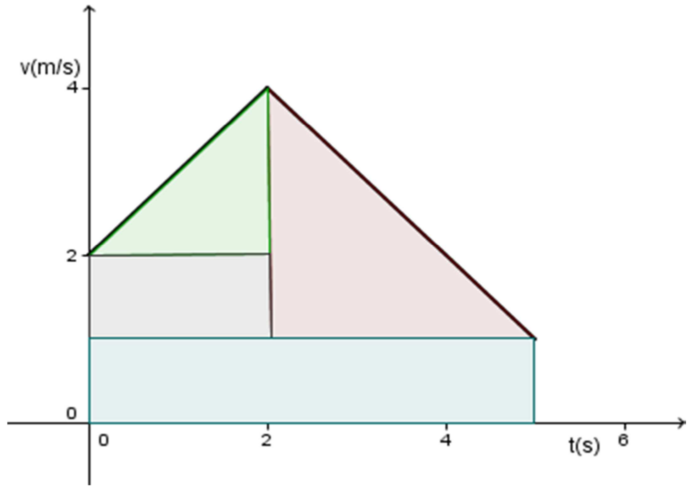


Figura 23. Superficie total subdividida en varias superficies.

El segundo método es siguiendo la idea de Oresme de hallar los puntos medios de los segmentos y construir rectángulos de tal modo que las regiones triangulares de área A cubren el espacio de las regiones triangulares de área B, dada la congruencia entre ellas (Figura 24, 25 y 26).

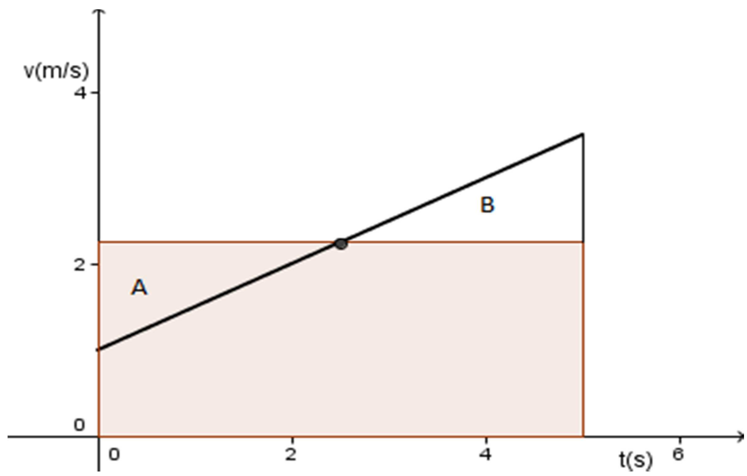


Figura 24. Área bajo funciones afines.

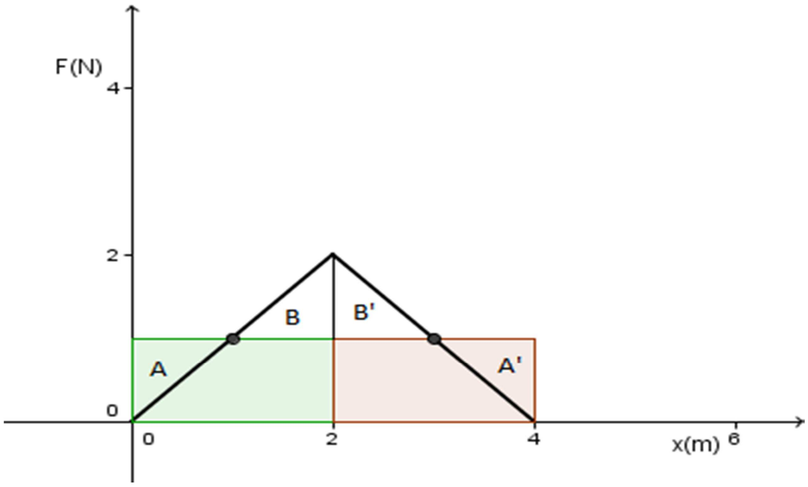


Figura 25. Área bajo segmentos de rectas que se intersecan entre sí y con el eje x.

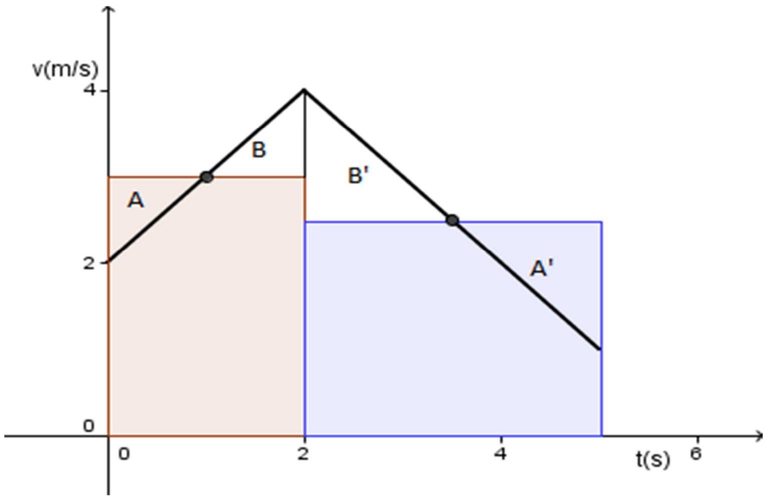


Figura 26. Área bajo segmentos de rectas que se intersecan entre sí.

Grupo 3. *Cambio disformemente disforme*, determinación de Áreas por medio de rectángulo infinitos: En este grupo se incluyen los gráficos de MRV y TFCV, que son representados por segmentos de curvas no lineales o afines. Dado que para las curvas de formas no conocidas o reducibles a superficies de figuras geométricas conocidas solo se puede inicialmente obtener una aproximación, dividiendo la superficie en figuras conocidas como triángulos y rectángulos, entonces surge la necesidad de incorporar a esta propuesta el proceso hecho por Riemann en sus sumatorias (apartado 2.1.1), pensando de nuevo en la idea general que las porciones de superficie de A, sustituyen a las de B como se presenta en las figuras 27 y 28.

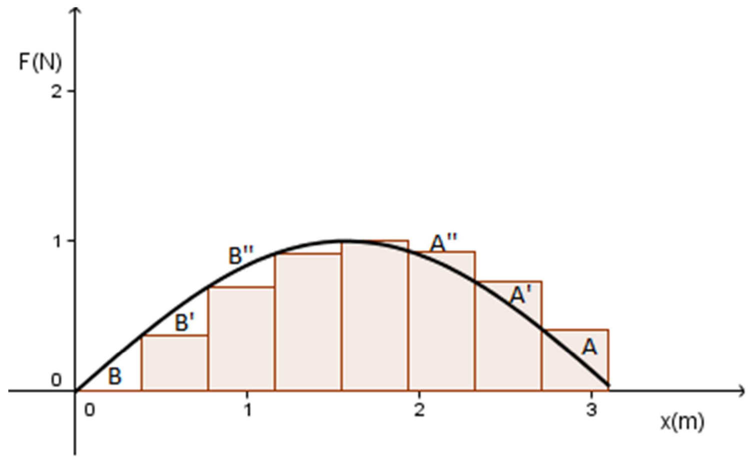


Figura 27. Área bajo la curva 1.

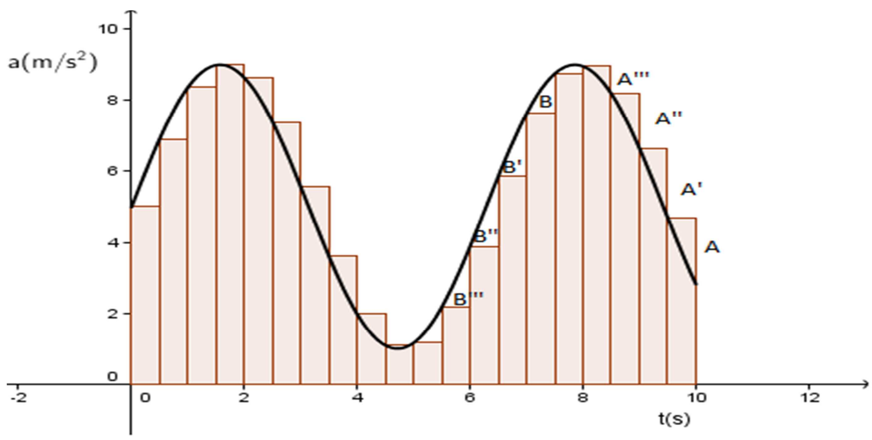


Figura 28. Área bajo la curva 2.

Pero resulta evidente que en este caso solo se va a tener una aproximación relativa, ya que si se comparan los porciones de área como A''' y B''' sus superficies no son, en general, necesariamente iguales. Lo anterior puede llevar a proponer el uso de infinitos rectángulos, así como el poder determinar áreas que no estén ni por exceso ni por defecto, es decir, inducir el proceso de buscar puntos intermedios dentro de cada una de la s particiones como puede ser, particularmente, hacer uso del punto medio de cada subintervalo, y así poder en últimas usar el proceso conceptual de las sumas de Riemann y tener una mejor aproximación como se ve en la figura 29.

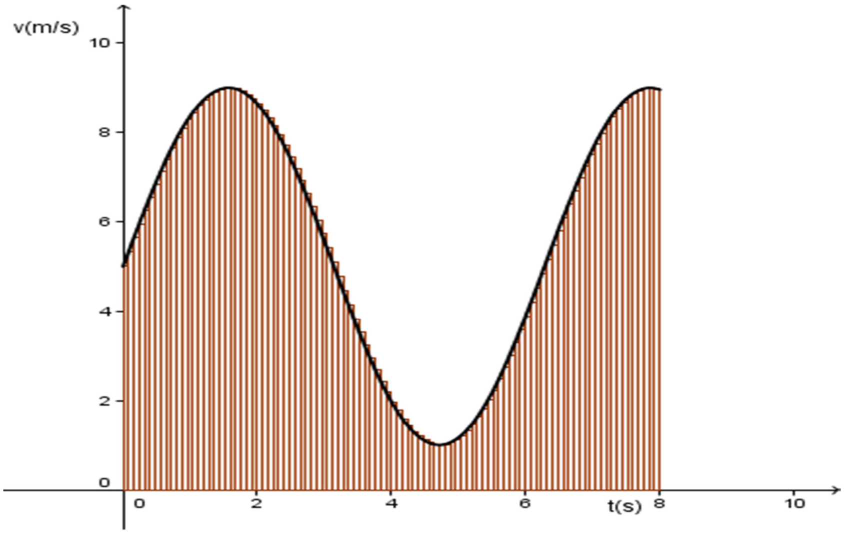


Figura 29. Área por sumas finitas de Riemann.

Como ya se ha mostrado la funcionalidad que tiene el cálculo de áreas bajo la curva como medio de organización de los fenómenos de movimiento y trabajo, que podría ser extendida a otros fenómenos, como el impulso o la fuerza debida a una presión ejercida sobre una unidad de área; se da por terminado el análisis fenomenológico de tipo genético.

3. SECUENCIA DIDÁCTICA

La propuesta está dividida en 4 fases que son: Análisis Dimensional, El método de Oresme, Cambio Uniforme y Uniformemente Disforme y Cambio Disformemente Disforme; estas se corresponden con el proceso que se planteó en el apartado del análisis fenomenológico. Adicionalmente en cada fase se contemplan cinco elementos: propósito de la actividad, logro a desarrollar, metodología, la actividad en sí y las respuestas esperadas, a continuación se presenta una descripción de las mismas.

Propósitos de la actividad: corresponde a los pasos que se han de desarrollar para llegar al empleo significativo de las sumatorias de Reimman, a partir de la idea planteada por Oresme.

Logros a desarrollar: estos representan el desarrollo de procesos cognitivos asociados a los pensamientos espacial y métrico planteados como contextos en el análisis fenomenológico (apartado 2.2.3).

Metodologías: estas se fórmula con el fin de potencializar el desarrollo de los pensamientos y procesos, además para constituirse en una potencial guía para los docentes que implementen la actividad.

Las actividades: estas se presentan tal y como se propone que le sean dadas al estudiante, o lo que se podría denominar *"guía para el estudiante"*, en ellas se incluyen los applets realizados con el software Geogebra 4.0. que tiene la ventaja de ser de uso libre.

Las respuestas esperadas: en esta parte se indica lo que se presume que el estudiante responda a cada pregunta o lo que se conjetura durante la actividad.

Antecediendo a las fases se establece un apartado de consideraciones previas; en éstas, de acuerdo con los estándares de competencias, se especifican los conocimientos previos que el estudiante debe tener para la realización de la propuesta, se tienen en cuenta los saberes requeridos tanto en matemáticas como en física.

3.1. CONSIDERACIONES PREVIAS

A continuación se presentan (según los estándares matemática y física) los conocimientos previos que deben considerarse para el proceso de implementación de la propuesta; inicialmente se exponen los de matemáticas clasificados según el pensamiento en que se desarrollan, seguido a estos los de ciencias naturales en particular aquellos que conciernen al entorno físico. En cursiva se presentan los estándares tal cual están propuestos en el MEN, (2006, p.p. 84-89) y MEN, (2004, p.p. 18-23) y lo que no aparece en cursiva corresponde a lo que se va a tomar en particular del estándar para la presente propuesta.

Para cada estándar existe un objeto o acción particular que permitirá el desarrollo de esta propuesta; y se debe resaltar que estos conocimientos previos resultan importantes para poder eventualmente detectar las razones por las cuales el estudiante incurre potencialmente en un error, como lo resalta Gómez (2000, p.p. 267-277), al afirmar que en muchas ocasiones los errores de los estudiantes son consecuencia, en la mayoría de los casos, de un conocimiento previo.

ESTÁNDARES BÁSICOS DE COMPETENCIAS EN MATEMÁTICAS

PENSAMIENTO MÉTRICO Y SISTEMAS DE MEDIDAS

- *Generalizo procedimientos de cálculo válidos para encontrar el área de regiones planas y el volumen de sólidos.* Conocimiento de fórmulas generales para hallar área de figuras planas.

- *Formulo y resuelvo problemas en contextos de medidas relativas y de variaciones en las medidas.* Resolución de planteamientos de ejercicios geométricos que requieren del uso o de variaciones de medidas.

- *Formulo y resuelvo problemas en situaciones aditivas y multiplicativas, en diferentes contextos y dominios numéricos.* Realización de operaciones correctas en los conjuntos numéricos.

- *Formulo y resuelvo problemas cuya solución requiere de la potenciación o radicación.* Uso de las leyes de la potenciación y radicación, para simplificar expresiones algebraicas.

- *Justifico la pertinencia de un cálculo exacto o aproximado en la solución de un problema y lo razonable o no de las respuestas obtenidas.* Justificación adecuada y razonable de la solución dada a los ejercicios.

PENSAMIENTO ESPACIAL Y SISTEMAS GEOMÉTRICOS

- *Uso representaciones geométricas para resolver y formular problemas en las matemáticas y en otras disciplinas.* Uso de los conceptos y representaciones de inscrito y circunscrito para realizar representaciones de problemas geométricos.

- *Aplico y justifico criterios de congruencias y semejanza entre triángulos en la resolución y formulación de problemas.* Uso de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos para plantear y resolver problemas.

PENSAMIENTO VARIACIONAL Y SISTEMAS ALGEBRAICOS Y ANALÍTICOS

- *Modelo situaciones de variación con funciones polinómicas.* Uso de las funciones polinómicas para modelar situaciones que implican variaciones.

- *Uso procesos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas.* Uso del lenguaje y de los procesos matemáticos para poder comprobar conjeturas.

- *Utilizo las técnicas de aproximación en procesos infinitos numéricos.* Uso de las técnicas de aproximación en procesos numéricos infinitos.

<u>ESTÁNDARES BÁSICOS DE COMPETENCIAS EN CIENCIAS</u>

ENTORNO FÍSICO

- *Comunico e indago los resultados, utilizando gráficas, tablas, ecuaciones aritméticas y algebraicas.* Uso del lenguaje escrito u oral para expresar lo que se observa en diversas situaciones físicas que se pueden representar en diferentes tipos de representación.

- *Utilizo las matemáticas para modelar, analizar y presentar datos y modelos en forma de ecuaciones, funciones y conversiones.* Uso de las matemáticas como herramienta de organización y explicación de resultados a fenómenos físicos.

- *Verifico relaciones entre distancia recorrida, velocidad y fuerza involucrada en diversos tipos de movimiento.* Identificar las magnitudes que intervienen en el fenómeno físico y relaciones que entre estas se puedan dar.

- *Modelo matemáticamente el movimiento de objetos cotidianosa partir de las fuerzas que actúan sobre ellos.* Uso adecuado de las variables matemáticas que se emplean en la caracterización del movimiento, tanto en la descripción formal como en el análisis dimensional.

- *Realizo mediciones con instrumentos adecuados a las características de los objetos de estudio y los expreso en unidades correspondientes.* Identifica las magnitudes físicas como sustento de los diferentes fenómenos físicos.

- *Establezco relaciones entre las diferentes fuerzas que actúan sobre los cuerpos en reposo o en movimiento rectilíneo uniforme y establezco condiciones para conservar la energía mecánica.* Identifica las características de las fuerzas que realizan trabajo sobre un sistema físico.

3.2. FASES DE LA SECUENCIA

3.2.1. FASE 1. ANÁLISIS DIMENSIONAL

PROPÓSITO

- Identificar mediante el análisis dimensional los fenómenos físicos donde el área bajo la curva cobra un significado para la física.

LOGRO A DESARROLLAR

- Comprende que el producto de magnitudes físicas puede dar otra magnitud que para la física es significativa y que para la matemática puede ser representada como el área.

METODOLOGÍA

En esta fase se pretende que los estudiantes se acerquen al tema en particular al área bajo la curva como la representación de una magnitud física. El docente debe tener en cuenta que esta fase se hace indispensable para el desarrollo de la secuencia, particularmente cuando los estudiantes no reconocen por qué es posible representar una magnitud física por medio del área. En la actividad se le propone al estudiante contestar 10 preguntas haciendo uso de sus conocimientos en física y matemática (tener en cuenta los conocimientos previos enunciados en el capítulo 3.1.), para estas el docente solo puede intervenir, de ser necesario, aclarando o definiendo que es una magnitud física y a que se refiere cuando se habla de dimensión y análisis dimensional. Para el punto 5, si se llegara a presentar confusión en cómo llenar la tabla, el docente podrá dar un ejemplo diferente a aquellos que aparecen en la tabla.

En la actividad el estudiante usará las fórmulas de área que se le pueden validar a medida que el pregunte, esto con el fin de minimizar errores en la aplicación de éstas. Finalmente el estudiante es cuestionado con el fin de darle validez y consistencia a sus respuestas y argumentos; el propósito es interrogar al estudiante con el fin de llegar a las siguientes fases y que en ellas se conteste evocando lo que hizo en esta primera fase.

En esta fase se lleva al estudiante específicamente a identificar que la *distancia que recorre un cuerpo* se obtiene al multiplicar la velocidad por el tiempo*, la velocidad* se consigue al multiplicar la aceleración por el tiempo y *el trabajo* al multiplicar la fuerza por el desplazamiento.

ACTIVIDAD 1. ANÁLISIS DIMENSIONAL

1. ¿Qué entiende por área de una figura?

____

____

____

2. Desde la física,   ¿qué expresa la medida de una superficie en una figura?

____

____

____

3. Halle el área de las siguientes figuras de tres formas diferentes, midiendo con una regla las longitudes de los lados de las figuras. Para cada caso describa los pasos que realizó para hallar las áreas e identifique las magnitudes físicas que uso y

enuncia los resultados obtenidos. Resuelva el ejercicio al respaldo o en una hoja anexa

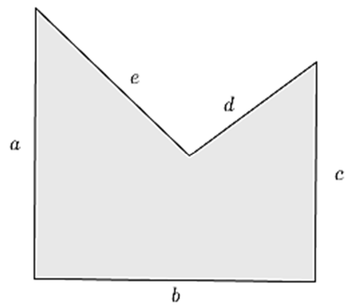


Figura A

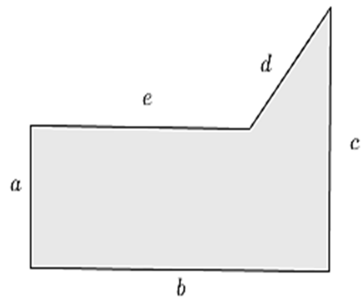


Figura B

4. Si los valores de $(a, b, c, d\ y\ e)$ no se emplean como magnitudes convencionales de longitud (múltiplos o submúltiplos del metro (m), sino, con otro tipo de magnitud física (velocidad, tiempo aceleración, fuerza y desplazamiento), ¿cambian los resultados obtenidos, si cambian, la manera en que varía es en el valor numérico o en las unidades de la magnitud física? Justifique la respuesta.

____

____

____

____

____

RECUERDE QUE

Para el estudio de los fenómenos naturales, la física emplea magnitudes físicas con las cuales se puede hacer su caracterización a través de leyes o principios, a fin de dar una explicación a los mismos. Las magnitudes fundamentales en cinemática y dinámica son el metro, la masa y el tiempo y sus dimensiones longitud $[L]$, masa $[M]$ y tiempo $[T]$ respectivamente; al relacionarlas entre sí y haciendo análisis dimensional, surgen las magnitudes derivadas como: velocidad (v), aceleración (a), fuerza (F), trabajo (W) y energía (E).

5. Complete la siguiente tabla señalando en cada caso las magnitudes fundamentales que se relacionan para formar las magnitudes derivadas y su análisis dimensional

Magnitud Derivada	**Magnitud(es) Fundamental(es) Involucrada(s)**	**Análisis Dimensional**
Velocidad (v)		
Aceleración (a)		
Fuerza (F)		
Trabajo (W)		
Energía (E)		

6. ¿Cuáles operaciones matemáticas se deben realizar con las magnitudes fundamentales para encontrar las magnitudes derivadas?

Magnitud Derivada	**Operación Matemática**
Velocidad (v)	
Aceleración (a)	
Fuerza (F)	
Trabajo (W)	
Energía (E)	

7. ¿Cuál de las operaciones matemáticas anteriormente indicadas resultan equivalentes a la que se emplea para determinar un área? ¿Cuál es el análisis dimensional de las magnitudes físicas derivadas que se asocian al proceso para determinar un área?

____

____

____

8. Suponga que debe calcular el área de una figura plana, por ejemplo un rectángulo, pero la base se mide empleando la magnitud fundamental tiempo dada en segundos (s) y la altura se mide en la magnitud derivada velocidad dada en metros (m) sobre segundos (s) ¿El área del rectángulo representa dimensionalmente alguna una magnitud física fundamental o derivada? Indique cuál.

____

____

____

9. Suponga ahora que debe calcular el área de otra figura plana, por ejemplo un triángulo, pero la base se mide empleando la magnitud fundamental tiempo dada en segundos (s) y la altura se mide en la magnitud derivada aceleración dada en metros sobre segundo al cuadrado $\left(\frac{m}{s^2}\right)$, ¿Dimensionalmente el área del triángulo representa alguna magnitud física? Sea sí o no la respuesta justifique para cualquier caso, de ser afirmativo indique cuál magnitud física

____

____

____

10. Teniendo en cuenta lo anterior, ¿Es posible hacer uso del cálculo de áreas en la descripción de fenómenos físicos, cuando dimensionalmente el área cobre sentido para la física? Justifique la respuesta.

____

____

____

____

RESPUESTAS ESPERADAS

1. *¿Qué entiende por área de una figura?*

Para esta pregunta se espera que el estudiante tenga una noción clara sobre el concepto por el cual se le está indagando, aunque muy seguramente se relacionará con el concepto de superficie.

2. *Desde la física, ¿qué expresa la medida de una superficie en una figura?*

Se espera que el estudiante reconozca que el área de una superficie en física es general la relación del producto entre la magnitud física representada por la longitud de la base y la magnitud física representada por la longitud de la altura.

3. *Halle el área de las siguientes figuras de tres formas diferentes, midiendo con una regla las longitudes de los lados de las figuras. Para cada caso describa los pasos que realizó para hallar las áreas e identifique las magnitudes físicas que uso y enuncia los resultados obtenidos. Resuelva el ejercicio al respaldo o en una hoja anexa*

Se pretende que el estudiante antes de hacer la medición, encuentre la manera de dividir las figuras en superficies de figuras conocidas, triángulos, rectángulos, etc., para que de esta manera pueda medir de una forma más simple el área. También se espera que las magnitudes que emplee estén asociadas a la longitud como submúltiplos del metro, toda vez que se le indica que mida con regla. Se busca que llegue a la conclusión de que independientemente del proceso que se emplee el resultado del área debe ser similar

4. *Si los valores de (a, b, c, d y e) no se emplean como magnitudes convencionales de longitud (múltiplos o submúltiplos del metro (m), sino, con otro tipo de magnitud física (velocidad, tiempo aceleración, fuerza o desplazamiento), ¿cambian los resultados obtenidos, si cambian, la manera en que varía es en el valor numérico o en las unidades de la magnitud física? Justifique la respuesta.*

Se espera que el estudiante indique que efectivamente habrá un cambio en las unidades de la magnitud física, pero no en los valores numéricos, es decir, que al operar habiendo medido con otras magnitudes cambia el significado físico más no los valores que se habían encontrado previamente.

5. *Complete la siguiente tabla señalando en cada caso las magnitudes fundamentales que se relacionan para formar las magnitudes derivadas y su análisis dimensional*

Se pretende que el estudiante conozca las magnitudes que para la física son fundamentales, que al relacionarlas entre sí permiten obtener otras magnitudes, es decir, que se puede establecer un análisis dimensional entre ellas. La tabla es:

Magnitud Derivada	**Magnitud(es) Fundamental(es) involucrada(s)**	**Análisis Dimensional**
Velocidad $(\boldsymbol{v})$	Metro, segundo	[velocidad]= $\frac{[desplazamiento]}{[tiempo]} = LT^{-1}$
Aceleración $(\boldsymbol{a})$	Metro, segundo	[Aceleración]= $\frac{[velocidad\ ]}{[tiempo]} = LT^{-2}$
Fuerza $(\boldsymbol{F})$	Kilogramo, Metro, segundo	[Fuerza]= $[masa][aceleración] = MLT^{-2}$
Trabajo $(\boldsymbol{W})$	Kilogramo, Metro, segundo	[Trabajo] = $[fuerza][distancia] = ML^2T^{-2}$
Energía $(\boldsymbol{E})$	Kilogramo, Metro, segundo	[Energía] = $[fuerza][distancia] = ML^2T^{-2}$

6. *¿Cuáles operaciones matemáticas se deben realizar con las magnitudes fundamentales para encontrar las magnitudes derivadas?*

Magnitud Derivada	Operación Matemática
Velocidad (v)	Cociente
Aceleración (a)	Cociente
Fuerza (F)	Producto
Trabajo (W)	Producto
Energía (E)	Producto

Se espera que el estudiante interprete el análisis dimensional que empleo en la tabla anterior e indique que son operaciones básicas como productos, cocientes y potencias entre las magnitudes fundamentales.

7. *¿Cuál de las operaciones matemáticas anteriormente indicadas resultan equivalentes a la que se emplea para determinar un área? ¿Cuál es el análisis dimensional de las magnitudes físicas derivadas que se asocian al proceso para determinar un área?*

En esta pregunta se quiere que el estudiante pueda relacionar las operaciones que previamente indicó, con las que se emplean para determinar el área de una figura. Se espera que solo señalen las tres últimas, es decir donde se hace un producto entre magnitudes.

8. *Suponga que debe calcular el área de una figura plana, por ejemplo un rectángulo, pero la base se mide empleando la magnitud fundamental tiempo dada en segundos* (s) *y la altura se mide en la magnitud derivada velocidad dada en metros* (m) *sobre segundos* (s) *¿El área del rectángulo representa dimensionalmente alguna una magnitud física fundamental o derivada? Indique cuál.*

Se espera que el estudiante realice el producto entre las magnitudes físicas, haga el análisis dimensional y diga que dimensionalmente el resultado representa una longitud, es decir, la magnitud fundamental metro. Basado en la información suministrada por el docente y comparándola con la tabla que había diligenciado en el numeral 5.

9. *Suponga ahora que debe calcular el área de otra figura plana, por ejemplo un triángulo, pero la base se mide empleando la magnitud fundamental tiempo dada*

en segundos (s) y la altura se mide en la magnitud derivada aceleración dada en metros sobre segundo al cuadrado $\left(\frac{m}{s^2}\right)$, ¿Dimensionalmente el área del triángulo representa alguna magnitud física? Sea sí o no la respuesta justifique para cualquier caso, de ser afirmativo indique cuál magnitud física.

Al igual que en el anterior numeral, se espera que emplee el algoritmo del producto, realice el análisis dimensional e indiquen que dimensionalmente si representa algo para la física y que esto es igual a velocidad, cuyas dimensiones son: [velocidad]= $[aceleración][tiempo] = LT^{-1}$

10. *Teniendo en cuenta lo anterior, ¿Es posible hacer uso del cálculo de áreas en la descripción de fenómenos físicos, cuando dimensionalmente el área cobre sentido para la física? Justifique la respuesta.*

Se espera que el estudiante indique que efectivamente se puede hacer uso del cálculo de áreas, pero solo cuando al hacer producto su resultado tiene sentido para la física. Lo que implica realizar un análisis dimensional y obtener una nueva magnitud física, como ocurrió en el numeral 8 y 9.

3.2.2. FASE 2. EL MÉTODO DE ORESME

PROPÓSITO DE LA FASE

- Encontrar áreas bajo la curva para funciones afines, y reconocer el método de Oresme como facilitador de cálculo de magnitudes físicas en algún fenómeno.

LOGRO A DESARROLLAR

- Explora y usa el método de Oresme, para plantear el cálculo de magnitudes físicas como distancia recorrida y velocidad, haciendo el cálculo de áreas bajo funciones constantes y lineales.

METODOLOGÍA

Como en la fase 1, los estudiantes posiblemente encontraron las magnitudes físicas que se pueden determinar por medio del área, esta actividad se relacionará con gráficos de velocidad-tiempo y aceleración-tiempo. La primera situación será usada con el fin de inducir que el área a usar es la acotada por la recta , el eje x y la rectas $t = t_0$ y $t = t_f$ que en últimas están limitando el tiempo para el cual se quiere saber la distancia recorrida. Para las preguntas de esta primera situación, se sugiere que el docente aplique esta fase de manera individual y que no intervenga en los procedimientos realizados por los estudiantes, en cambio puede, si quiere, hacer una socialización de las respuestas obtenidas por algunos estudiantes ya que sería conveniente compartir aquellas que se alejan de manera extrema de lo esperado y unas que sean correctas dentro de cierto margen, pues con ello podrá propiciar mejores respuestas o respuestas más acordes a lo esperado en las siguientes situaciones propuestas.

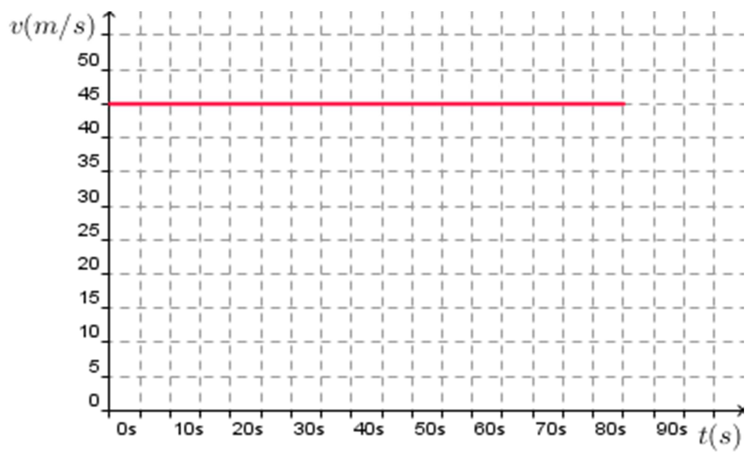
La segunda situación, por ser un segmento de recta modelada por una función lineal, permite introducir el método usado por Oresme para hacer la demostración geométrica de la Ley de Merton. Aunque inicialmente se les permite a los estudiantes calcular el área como ellos deseen, esto se hace con el fin de que más adelante comparen con otros resultados y cuestionen sus métodos planteados contrastándolos con el de Oresme. Al igual que en la situación anterior, se siguiere la no intervención del docente, puede mejor intervenir como moderador de cualquier debate que se dé durante el desarrollo de estos puntos. El punto cuarto está enfocado a dar indicios de elementos o características relevantes tanto para conceptualizar, como para aplicar el método de Oresme, en esta parte no se considera pertinente compartir ideas, ya que solo se espera obtener apreciaciones intuitivas.

En el punto 7, que es la última situación, se le pide al docente hacer énfasis en que los estudiantes lo solucionen de manera individual y sin compartir, lo anterior con el fin de que al revisarlo se pueda tener una valoración de la efectividad de la propuesta en cuanto a la inducción del uso del método de Oresme.

ACTIVIDAD 2. EL MÉTODO DE ORESME

Resuelve las siguientes actividades, respondiendo a lo solicitado

1. Durante uno de los premios de la serie NASCAR, un observador percibe que uno de los autos mantiene siempre la misma rapidez promedio en cada uno de los giros que realiza. Si la velocidad del auto es de $45\ m/s$ y cada giro tarda $35\ s$. El gráfico rapidez- tiempo que representa este movimiento es:



a) Según los resultados de la fase 1. si se realiza el producto de velocidad por tiempo la magnitud física resultante es:____

b) ¿Es cierto, qué en el siguiente gráfico, la magnitud del área del rectángulo de color azul representa la distancia recorrida en dos giros? justifique su respuesta

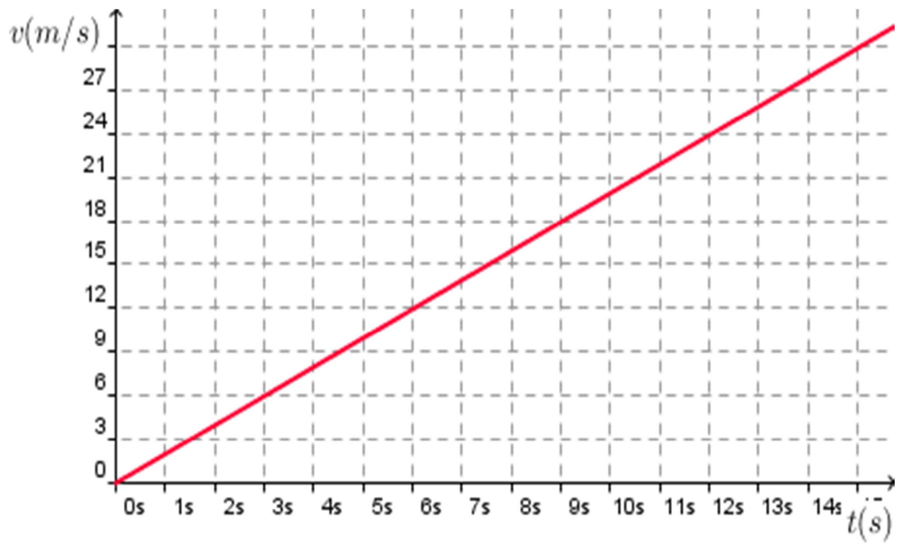
____

____

c) Determine la distancia recorrida por el auto en el primer giro. ¿Cuáles son las unidades en que esta medida?*(en el siguiente espacio escriba el proceso realizado para calcularla)*

d) Determine la distancia recorrida en 9 giros.*(en el siguiente espacio escriba el proceso realizado para calcularla)*

2. Un atleta inicia la competencia desde el reposo, acelera constantemente durante $3s$ hasta que su velocidad es de $6\,m/s$, $3s$ segundos más tarde su velocidad es $12\,m/s$; al acabo de $9s$ y manteniendo las condiciones de la partida, registra una velocidad final de $18\,m/s$. El siguiente gráfico velocidad-tiempo representa el movimiento realizado por el atleta.

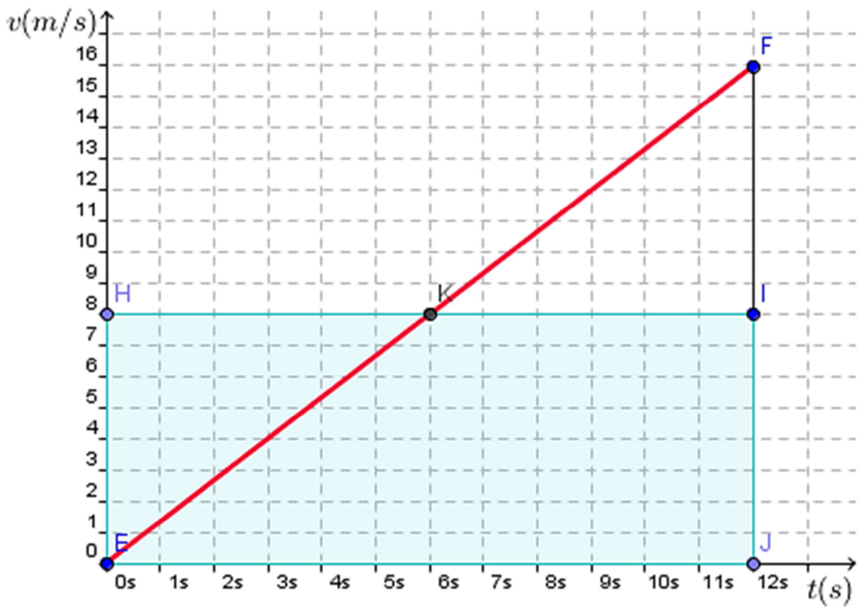


a) Determine de tres maneras distintas la distancia recorrida por el atleta durante los primeros 9 segundos. (*Realice los procedimientos al respaldo de la hoja o en una hoja anexa)*

b) Si la distancia recorrida, fue determinada en alguno de los procesos del punto a) por medio del cálculo del área del triángulo rectángulo que se forma con el segmento de recta y el eje horizontal; escoja la respuesta o una que corresponda a este procedimiento y justifique por qué es correcto calcularla de esta manera; si su cálculo fue de otro modo hágalo por medio del área y justifique a favor o en contra de este proceso. (*Realice los procedimientos al respaldo de la hoja o en una hoja anexa).*

c) Si la competencia tenía una distancia de 100 metros. ¿cuánto tiempo tardo en recorrerla y con qué velocidad llegó a la meta?(*Realice los procedimientos al respaldo de la hoja o en una hoja anexa)*

El matemático Nicolás Oresme, explicó la *ley de Merton* demostrando que en un gráfico de velocidad-tiempo, la distancia recorrida es el área de la figura que se forma con el segmento de recta que representa el movimiento y el eje x, mostrando entonces que el área determinada por el triángulo EJF es la misma que la determinada por el rectángulo $EJIH$.



Lo anterior es posible, porque Oresme encuentra el punto K, de tal modo que las áreas determinadas por los triángulos EHK e IFK son iguales y por tanto la superficie del triángulo EHK sustituye la del triángulo IFK.

3. Verifique realizando los cálculos de las áreas, que el método para calcular la distancia recorrida usada por Oresme y expuesto en el recuadro anterior, es correcto? (*Realice los procedimientos al respaldo de la hoja o en una hoja anexa)*

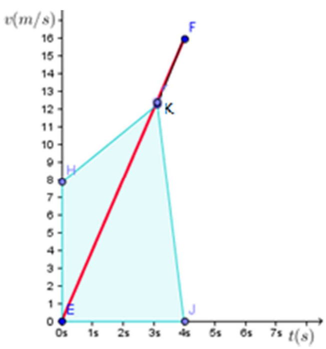
____

____

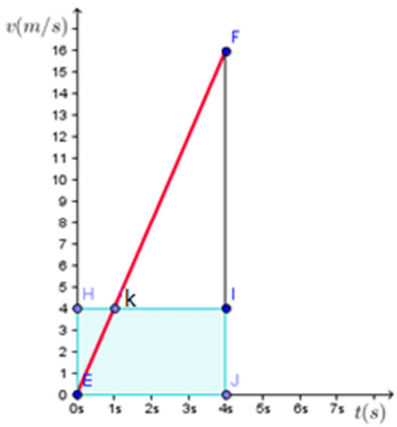
____

4. De los siguientes gráficos, señale cuál, o cuáles de ellos corresponde al método usado por Oresme

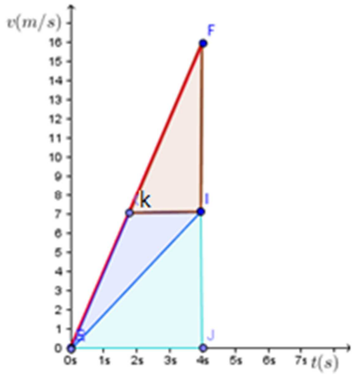
a)



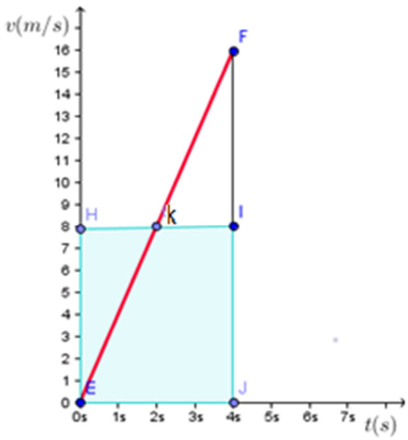
b)



c)



d)



¿Por qué?, justifica la respuesta

____

____

____

5. ¿Qué características debe tener ese punto K?

____

____

____

6. *¿Por qué los triángulos EHK e IFK son iguales?*

____

____

____

7. Durante el recorrido en un bus articulado que acelera uniformemente, un estudiante de física que viaja en el supone que en $t_1 = 10\,s$ la aceleración es de $18\,m/s^2$, 30 segundos más tarde, hace una nueva suposición indicando que la aceleración luego de ese lapso es de $42\,m/s^2$. (*Las siguientes preguntas respóndalas al respaldo de la hoja o en caso alguno utilizar una hoja anexa).*

a) Realice la gráfica aceleración- tiempo que representa este movimiento.

b) Según los resultados de la fase 1. si se realiza el producto de aceleración por tiempo la magnitud física resultante es:___________________________________

c) Calcule el cambio de la velocidad del bus articulado en el intervalo dado por t_1 y los $30\,s$ posteriores, siguiendo la idea Oresme. Haga un dibujo sobre la gráfica indicando quien es el punto K y cuál es el rectángulo que sustituye el área de la figura que representa la velocidad.

RESPUESTAS ESPERADAS

1. *Durante uno de los premios de la serie NASCAR, un observador percibe que uno de los autos mantiene siempre la misma rapidez promedio en cada uno de los giros que realiza. Si la velocidad del auto es de* $45\,m/s$ *y cada giro tarda* $35\,s.$ *El gráfico rapidez- tiempo que representa este movimiento es:*

a) *Según los resultados de la fase 1. si se realiza el producto de velocidad por tiempo la magnitud física resultante es:* Distancia recorrida dada en metros o longitud

b) *¿Es cierto, qué en el siguiente gráfico, la magnitud del área del rectángulo de color azul representa la distancia recorrida en dos giros? justifique su respuesta*

Si, por que el producto del tiempo y la velocidad es la distancia recorrida y para hallar el área de la figura se debe hacer este mismo producto, dando como resultado el mismo valor numérico.

c) *Determine la distancia recorrida por el auto en el primer giro. ¿Cuál es las unidad en que esta medida?*

La distancia total recorrida es $35\,s * 45\frac{m}{s} = \ 1.575\,m,$ la unidad en que está medida es metros.

d) *Determine la distancia recorrida en 9 giros.*

La distancia total recorrida en 9 giros es $9\left(35\,s * 45\frac{m}{s}\right) = \ 14.175\,m,$ la unidad en que está medida es metros.

2. *Un atleta inicia la competencia desde el reposo, acelera constantemente durante* $3s$ *hasta que su velocidad es de* $6\, m/s$, $3\, s$ *segundos más tarde su velocidad es* $12\, m/s$*; al acabo de* $9s$ *y manteniendo las condiciones de la partida, registra una velocidad final de* $18\, m/s$*. El siguiente gráfico velocidad-tiempo representa el movimiento realizado por el atleta.*

a) *Determine de tres maneras distintas la distancia recorrida por el atleta durante los primeros 9 segundos. (Realice los procedimientos al respaldo de la hoja o en una hoja anexa)*

Se espera que los estudiantes dividan de tres maneras diferentes la superficie, y que para las tres formas el resultado obtenido sea de: $162\, m$

b) *Si la distancia recorrida, fue determinada en alguno de los procesos del punto a) por medio del cálculo del área del triángulo rectángulo que se forma con el segmento de recta y el eje horizontal; escoja la respuesta o una que corresponda a este procedimiento y justifique por qué es correcto calcularla de esta manera; si su cálculo fue de otro modo hágalo por medio del área y justifique a favor o en contra de este proceso.*

En este punto se espera que si los estudiantes no lo hicieron por área, ahora tenga que calcular por este medio y decir si es correcta o no, en tanto es una pregunta abierta; sin embargo se espera que las justificaciones presenten un buen nivel argumentativo y se espera que si lo consideran correcto afirmen que por el área también se puede y que da $162\, m$.

c) *Si la competencia tenía una distancia de 100 metros. ¿cuánto tiempo tardo en recorrerla y con qué velocidad llegó a la meta?*

En esta pregunta se espera que usen el área del triángulo buscando que les de 100 m, para así poder establecer la altura y la base del triángulo, y con la longitud de la base saber cuánto tiempo se demoró. Es posible que este punto no sea del todo solucionado porque todo dependerá de cómo estén calculando el área.

3. *Verifique realizando los cálculos de las áreas, que el método para calcular la distancia recorrida usada por Oresme y expuesto en el recuadro anterior, es correcto?* (*Realice los procedimientos al respaldo de la hoja o en una hoja anexa)*

Se espera que comprueben el método de dos maneras, la primera calculando el área del rectángulo y la de triángulo y digan que son iguales. La segunda es que hallen el área de los triángulos pequeños y verifiquen que uno si puede sustituir al otro por el hecho de ser congruentes.

4. *De los siguientes gráficos, señale cuál de ellos corresponde al método usado por Oresme*

El gráfico correcto es el d), y se espera que la justificación sea porque los triángulos EHK e IFK tienen la misma área o posiblemente la justificación esté relacionada con el hecho de estar hallando el área por medio de un rectángulo.

5. *¿Qué características debe tener ese punto$K$?*

El punto K, puede ser caracterizado de varias maneras pero en particular se espera que digan que esta sobre la recta que representa el movimiento y que corresponde al punto medio de uno de los segmentos HI o EF.

6. *¿Por qué los triángulos EHK e IFK son iguales?*

Porque tienen la misma área o porque sus bases y alturas son congruentes entre sí

7. *Durante el recorrido en un bus articulado que acelera uniformemente, un estudiante de física que viaja en el supone que en* $t_1 = 10s$ *la aceleración es de* $18\ m/s^2$ *, 30 segundos más tarde, hace una nueva suposición indicando que la aceleración luego de ese lapso es de* $42\ m/s^2$

a) Realice *la gráfica aceleración- tiempo que representa este movimiento.*

Se espera que el estudiante grafique correctamente la recta o el segmento correspondiente a la información suministrada.

b) *Según los resultados de la fase 1. si se realiza el producto de aceleración por tiempo la magnitud física resultante es*: velocidad

c) Calcule el cambio de la velocidad del bus articulado entre el intervalo t_1 *y los 30s posteriores, siguiendo la idea Oresme. Haga un dibujo sobre la gráfica indicando quien es el punto* K *y cuál es el rectángulo que sustituye el área de la figura que representa la velocidad.*

Aunque el gráfico puede no estar correcto se espera que el punto K este en la mitad del intervalo y que el rectángulo pase por ese punto K, además se espera el cambio de la velocidad sea $240m/s$.

3.2.3. FASE 3. CAMBIO UNIFORME Y UNIFORMEMENTE DISFORME

PROPÓSITO DE LA FASE

- Identificar y hallar longitudes (base del rectángulo y altura del rectángulo) necesarias para aplicar el método de Oresme.

LOGRO A DESARROLLAR

- Identifica y halla las longitudes de la base y altura de los rectángulos que se van a usar para aplicar el método de Oresme.

METODOLOGÍA

Esta fase de la propuesta, tiene dos propósitos, el primero es usar gráficos de más de dos segmentos de recta, con el fin de inducir a la división de intervalos ya que las gráficas no siempre corresponden a rectas, y el segundo propósito consiste en lograr generalizaciones respecto a los datos que se deben tener en cuenta para aplicar el método de Oresme (altura, base y ubicación del punto K). Se sugiere al docente aplicar esta actividad en parejas, con el fin de generar cuestionamientos entre los integrantes que permita elaborar mejores conjeturas y generalizaciones en el proceso de búsqueda de los resultados.

La primera situación esta propuesta con el fin de inducir al estudiante en el proceso de encontrar datos importantes para poder usar el método de Oresme, en particular los resultados que se esperan varían de acuerdo con la situación, el docente puede intervenir de manera indirecta formulando cuestionamientos que permitan evidenciar un error ya sea conceptual o procedimental , , esto con el fin de crear mayores cuestionamientos sobre lo que cada uno de los estudiantes está planteando.

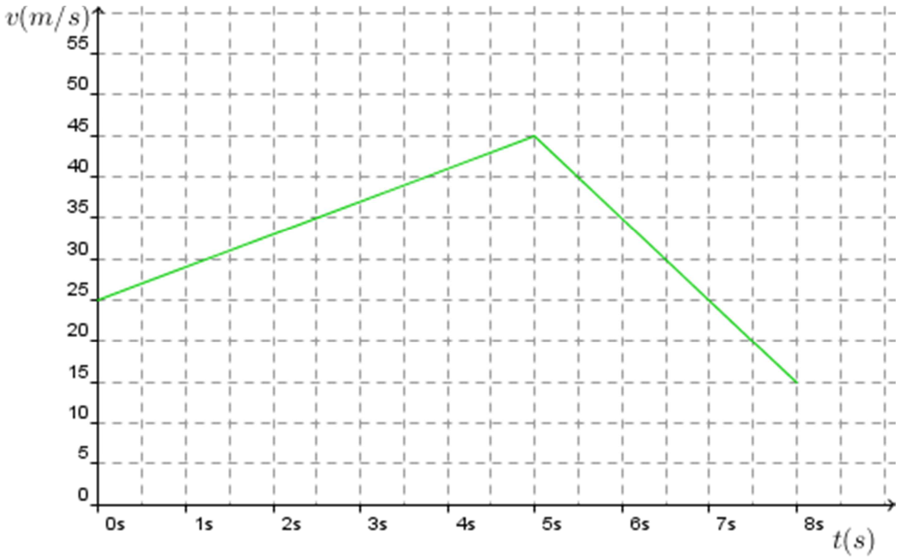
Para la segunda situación es importante que el docente prepare previamente un espacio físico donde los estudiantes cuenten con: por lo menos un computador por grupo, y en ellos contar con el software libre Geogebra 4.0; este se puede descargar de la página www.geogebra.org y como único requerimiento es contar con la plataforma Java. Adicionalmente se debe instalar el Apple llamado Fase 3, para poder hacer uso de este se debe contar con acceso a internet ya que el archivo es .html; este se encuentra en los anexos de la presente propuesta.

El docente debe asegurarse que los estudiantes lean antes la situación propuesta así como las instrucciones de uso del programa (estas instrucciones las puede complementar o ir direccionando durante el desarrollo de la actividad) lo que permitirá que los estudiantes no dispersen su atención en el entorno del software y se centren en trabajar lo solicitado. Para responder las preguntas de esta situación se propone que se permita un intervalo de tiempo durante el cual el estudiante explore el Applet y de ser necesario intervenga para dar instrucciones sobre el uso adecuado del mismo.

La tercera actividad, trae otro fenómeno físico que es el trabajo y vincula un elemento que eventualmente puede traer confusiones ya que se emplea una expresión algebraica que modela la función trabajo realizado por la partícula como una función del desplazamiento x. La actividad en este momento debe realizarse inicialmente sin el apoyo del computador y se propone que en una hoja anexa los estudiantes hagan el gráfico que representa el fenómeno físico, en particular se espera que el estudiante pueda conjeturar que la longitud de la altura de un rectángulo específico se puede determinar evaluando el valor medio de la base del rectángulo en cuestión y luego si proceder a hacer el producto de estas magnitudes para obtener el trabajo realizado en ese intervalo.

ACTIVIDAD 3. CAMBIO UNIFORME Y UNIFORMEMENTE DISFORME

1. En $t = 0s$ un vehículo viaja con un velocidad inicial de $25\,m/s$, aumenta su velocidad de manera uniforme durante 5 segundos hasta alcanzar los $45\,m/s$; posteriormente frena por un lapso de $3s$ hasta que su velocidad se reduce a $15\,m/s$. El siguiente es el gráfico velocidad-tiempo para esta situación. .

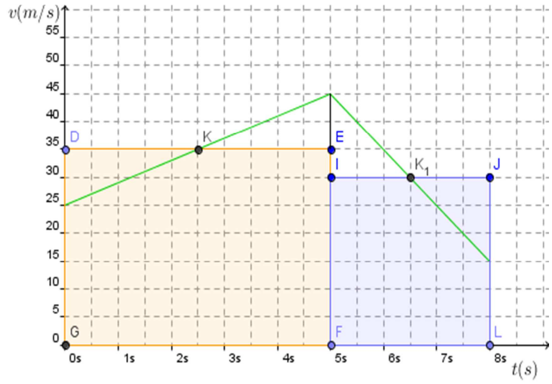


a) Determine de dos maneras diferentes la distancia total recorrida. (*Realice los procedimientos al respaldo de la hoja o en una hoja anexa).*

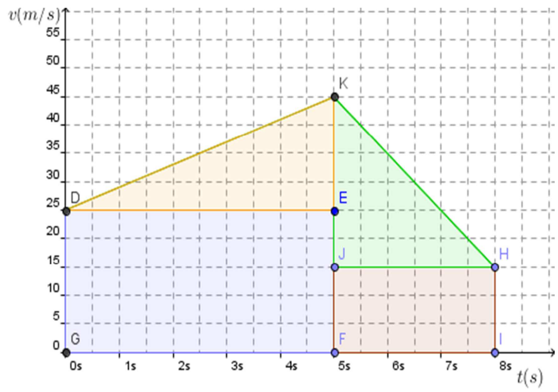
b) En alguno de los siguientes gráficos se está representando el método empleado por Oresme, que puede emplearse para resolver el ejercicio anterior. ¿En cuál? Justifica en el espacio después de las gráficas por que la escogida sí representa el método, y las razones de por qué las otras no.

i.

iii.



ii.



iv.

c) Determine la distancia total recorrida usando el gráfico escogido en el punto anterior y en el cual se emplea el método de Oresme. Al finalizar el cálculo compare la respuesta obtenida con la del ejercicio 1 y de una opinión respecto a los resultados. (*Realice los procedimientos al respaldo de la hoja o en una hoja anexa y las preguntas que se puedan responder en esta hoja por favor hacerlo).*

d) Cuál es la longitud de la altura y la base del rectángulo que representa la distancia recorrida durante los primeros 5 segundos:

Base: ________________ Altura: ______________

e) Cuál es la longitud de la altura y la base del rectángulo que representa la distancia recorrida durante entre los 5 y 8 segundos:

Base: ________________ Altura: ______________

f) ¿Para determinar la altura de los rectángulos, es útil usar los puntos K_1 y K_2 o estos puntos solo sirven para saber donde los triángulos se hacen iguales? Justifique su respuesta

____

____

____

____

El siguiente ejercicio se realizará con ayuda de una herramienta tecnológica, y el software Geogebra. Leer con atención la siguiente situación. Para responder las preguntas deben seguir las instrucciones del docente.

2. Un móvil parte desde el reposo, acelera constantemente durante $6{,}5\ s$ hasta que su velocidad es de $25\ m/s$, mantiene esa misma velocidad durante $4\ s$ y posteriormente desacelera durante $8{,}5\ s$ disminuyendo la velocidad a $5\ m/s$; posteriormente se mantiene con esa misma velocidad por $2\ s$ mas y finalmente acelera durante $6\ s$ hasta que la velocidad es de $25\ m/s$.

a) ¿Cuál es la distancia que recorre el móvil en el primer intervalo?

____

b) ¿Cuál es la distancia total recorrida durante los $27\ s$?

____

c) ¿por qué en el intervalo 2 no hay triángulos?

____

____

d) Para cualquiera de los intervalos la longitud de la base de los rectángulos está dada por: ____

e) ¿Cómo se puede determinar la altura en el intervalo 3 si no se tuviera el programa?, de dos ideas y explica una de ellas.

____

____

____

____

f) Seleccione una de las siguientes parejas de palabras para completar la presente afirmación: Los puntos K siempre dividen a los segmentos paralelos a la base de los rectángulos en dos partes ___________________, por tanto los K son los puntos medios de ____________________.

i. Diferentes – Las Bases

ii. Iguales – Las Bases

iii. Diferentes – Altura

iv. Iguales – Alturas

3. Una fuerza aplicada varía con la posición x según la expresión $F = 2x + 1$, la fuerza tiene siempre la dirección del sentido positivo del eje x. F se mide en Newtons y x en metros (*Realice los procedimientos al respaldo de la hoja o en una hoja anexa y las preguntas que se puedan responder en esta hoja por favor hacerlo).*

a) Según los resultados de la fase 1. si se realiza el producto de fuerza por desplazamiento la magnitud física resultante es:________________________

b) Realice la gráfica fuerza – desplazamiento que representa este fenómeno físico.

c) Dibuje sobre la gráfica el rectángulo que permite hallar el trabajo hecho durante los primeros 5 m.

d) Para el rectángulo dibujado diga: dónde está ubicado el punto K_i ¿cuál es la longitud de la altura y la base del rectángulo que representa el trabajo realizado durante los primeros 5 m?:

K:_____________Base:________________ Altura:______________

e) ¿Cuál es el trabajo realizado durante los primeros 5 m?

f) Para efectuar el cálculo del trabajo realizado durante $p \quad los\, primeros\, metros$: ¿dónde debe estar ubicado el punto K? ¿Cuál será la longitud de la altura y la base del rectángulo que representa el trabajo realizado durante esos los p $primeros\ metros$? *(Sugerencia: realice el dibujo del rectángulo poniendo n en cualquier lugar del eje x y deje indicado las longitudes (bases y altura) y el K en relación con n).*

K:_____________Base:________________ Altura:______________

g) ¿Cuál es el trabajo realizado durante los $p\ primeros\ \ metros$? (*deje indicada el área de rectángulo que representa el trabajo realizado).*

____

RESPUESTAS ESPERADAS

1. *En $t = 0s$ un vehículo viaja con un velocidad inicial de $25\, m/s$, aumenta su velocidad durante 5 segundos hasta alcanzar los $45\, m/s$, posteriormente frena por un lapso de $3s$ hasta que su velocidad se reduce a $15\, m/s$. El siguiente gráfico velocidad-tiempo representa el movimiento realizado por el vehículo.*

   a) *Determine de dos formas la distancia total recorrida.*

Se espera que los estudiantes dividan de dos maneras diferentes la superficie, y que para las dos formas el resultado obtenido sea de: $265\ m$

b) *En alguno de los siguientes gráficos se está representando el método realizado por Oresme, para resolver el ejercicio anterior. ¿En cuál? Justifica en el espacio después de las graficas por que la escogida si es, y por qué las otras no.*

La elección correcta es el gráfico iii. Y se espera que la justificación sea porque los triángulos a comparar tienen igual área.

c) *Determina la distancia total recorrida usando el gráfico escogido en el punto anterior y en el cual se emplea el método de Oresme. Al finalizar el cálculo compara la respuesta obtenida con la del ejercicio 1 y da una opinión respecto a los resultados.*

Se espera que la opinión sea: que de las dos formas el resultado obtenido sea de: $265\ m$

d) *Cuál es la longitud de la altura y la base del rectángulo que representa la distancia recorrida durante los primeros 5 segundos:*

Base: $5\ s$ Altura: $35\ m/s$

e) *Cuál es la longitud de la altura y la base del rectángulo que representa la distancia recorrida durante el segundo 5 y el 8*:

Base: $3\ s$ Altura: $30 m/s$

f) *Para determinar la altura de los rectángulos, es útil usar los puntos K_1 y K_2 o estos puntos solo sirven para saber donde los triángulos se hacen iguales. Justifique su respuesta*

Se espera que los estudiantes digan que si, ya que el K le permite ver cuál es la altura del rectángulo, mirando el valor de coordenada en y que tiene el punto K

2. *Un móvil parte desde el reposo, acelera constantemente durante* $6{,}5\ s$ *hasta que su velocidad es de* $25\ m/s$*, mantiene esa misma velocidad durante* $4\ s$ *y posteriormente desacelera durante* $8{,}5\ s$ *disminuyendo la velocidad a* $5\ m/s$*, se mantiene con esa misma velocidad por* $2\ s$ *y luego nuevamente acelera durante* $6\ s$ *hasta que la velocidad es de* $25\ m/s$*.*

a) *¿Cuál es la distancia que recorre el móvil en el primer intervalo?*

Se espera que por medio del applet y después de ubicar el punto K, indique la distancia recorrida es: $81.2\ m$

b) *¿Cuál es la distancia total recorrida durante los* $27\ s$*?*

Se espera que por medio del applet y después de ubicar los puntos *K*, y sumar cada distancia recorrida en los intervalos; indique la distancia recorrida es: $408{,}76\ m$

c) *¿por qué en el intervalo 2 no hay triángulos?*

Se espera que diga que por que la recta es constante o paralela al eje x

d) *Para cualquiera de los intervalos la longitud de la base de los rectángulos está dada por:* la diferencia o distancia entre los extremos

e) *Cómo se puede determinar la altura en el intervalo 3 si no se tuviera el programa, de dos ideas y explica una de ellas.*

Se espera que el estudiante diga, que sabiendo donde queda *K*, o colocando *K* en la mitad se mire el valor de la coordenada y ahí se obtiene la altura

f) Seleccione una de las siguientes parejas de palabras para completar la presente afirmación. Los puntos K siempre dividen a los segmentos paralelos a la base de los rectángulos en dos partes __________________, por tanto los K son los puntos medios de ___________________.

Se espera que seleccionen ii. Iguales – Las Bases

3. Una fuerza aplicada varía con la posición x según la expresión $F = 2x + 1$, la fuerza tiene siempre la dirección del sentido positivo del eje x. F se mide en Newtons y x en metros.

a) *Según los resultados de la fase 1. si se realiza el producto de fuerza por desplazamiento la magnitud física resultante es*: el trabajo realizado

b) *Realice la gráfica fuerza –desplazamiento que representa este fenómeno físico*. Se espera que la gráfica sea la correcta: una recta

c) *Dibuje sobre la gráfica el rectángulo que permite hallar el trabajo hecho durante los primeros 5 m.*

Se quiere que el estudiante ubique el punto K en la mitad del intervalo y que el rectángulo tenga de base $5m$ y altura 6 N

d) *Para el rectángulo dibujado diga: dónde está ubicado el punto K y cuál es la longitud de la altura y la base del rectángulo que representa el trabajo realizado durante los primeros 5 m:*

K:__(2,5, 6) ___Base:____$5m$_____ Altura:_____$6N$____

e) *¿Cuál es el trabajo realizado durante los $5m$?*

30 Nm

f) *Para efectuar el cálculo del trabajo realizado durante* $los\, p$ $primeros\ metros$: *¿dónde debe estar ubicado el punto K? ¿Cuál será la longitud de la altura y la base del rectángulo que representa el trabajo realizado durante esos los* p $primeros\ metros$*?*

K: *p/2 en la mitad o* $\left(\frac{p}{2}, f\left(\frac{p}{2}\right)\right)$ Base: p Altura: $f\left(\frac{p}{2}\right)$

g) ¿Cuál es el trabajo realizado durante los $p\ \ primeros\ \ metros$? (*deje indicada el área de rectángulo que representa el trabajo realizado).*

Se espera el planteamiento del área del rectángulo, es decir $p * f(p/2)$

3.2.4. FASE 4. CAMBIO DISFORMEMENTE

PROPÓSITO DE LA FASE

- Encontrar magnitudes físicas representadas por áreas bajo curvas, y hacer uso del método de Oresme para plantear una suma finita de rectángulos, permitiendo así plantear una suma de Reimann.

LOGROS A DESARROLLAR

- Planteen el cálculo del área bajo la curva como suma finita de rectángulos.

METODOLOGÍA

Esta actividad es la culminación de todo lo hecho anteriormente, en tanto se le pide al docente que la aplique de aparejas y que disponga de una sala con un computador por grupo, y los computadores tengan instalado el software libre Geogebra 4.0 y que todos los computadores tengan el applet anexo a este trabajo llamado Fase 4.

La primera situación junto con sus preguntas se propone con el fin de que los estudiantes propongan métodos de solución con rectángulos para determinar la distancia recorrida, en tanto el docente no debe intervenir.

Para el 2 punto que es donde se inicia a usar al applet, se pide que antes de iniciar a resolver las preguntas se les indique a los estudiantes visualmente (de ser necesario adquiera un video beam con el fin de que los estudiantes tengan una imagen de lo que el docente esta haciendo en el computador) como se pone un rectángulo y como se mueve el punto K; posteriormente que se asegure de que contesten estas dos preguntas.

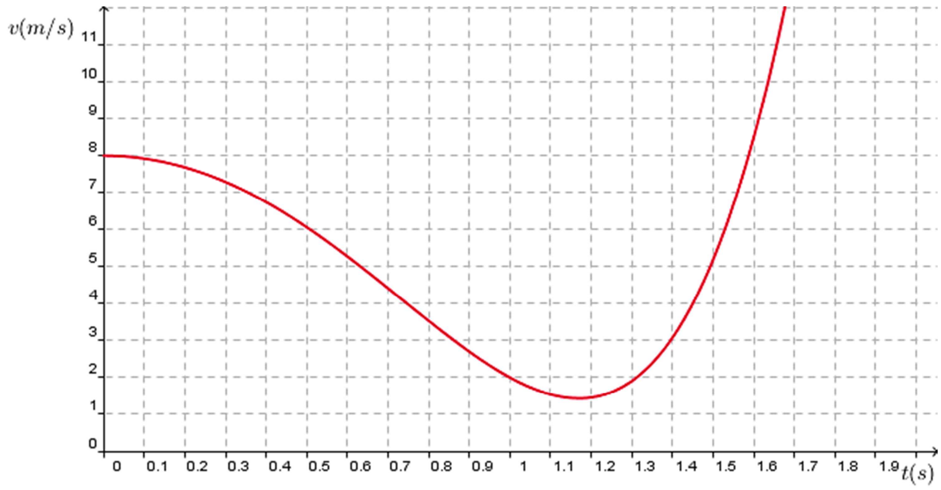
En el punto 3, se les indica que muevan del lugar que hallaron el punto K (con el deslizador) y que suban el número de rectángulos a 2, luego si pueden mover de nuevo el K para hallar la ubicación pretendida, así podrán contestar las preguntas de este punto.

En los dos puntos anteriores se espera que el docente intervenga, de manera tal que el estudiante cuestiones lo que está haciendo y las justificaciones que da a las preguntas.

Para los puntos 3 y 4, deje que el estudiante explore con el applet subiendo y bajando el numero de rectángulos así como moviendo los puntos K. El último punto deben hacerlo los estudiantes sin ayuda del docente.

ACTIVIDAD 4. CAMBIO DISFORMEMENTE

1. Durante una valida del campeonato *GP* de motociclismo, el movimiento descrito por la moto número 5 se registró en una gráfica de velocidad-tiempo de la siguiente manera:



a) Determine de dos maneras distintas la distancia recorrida por la motocicleta durante el primer segundo. (*Realice los procedimientos al respaldo de la hoja o en una hoja anexa)*

b) Es posible hallar la distancia recorrida, por medio de un rectángulo como lo realizo Oresme. Justifique su respuesta. Y de ser posible indique ¿dónde está ubicado el punto K? ¿cuál es la longitud de la altura y la base del rectángulo que representa la distancia recorrida durante el primer segundo?:

____

____

____

____

c) ¿Es seguro que las áreas comparadas una vez se ubica el punto K son iguales? Justifique su respuesta

____

____

____

Para las siguientes preguntas se hace uso de una herramienta tecnológica y el software geogebra. Para responder las preguntas deben seguir las instrucciones del docente.

2. Área calculada por medio de un rectángulo:

a) Moviendo el punto K como lo indica el docente, ¿Cuál es la mejor ubicación de K para asegurar que las áreas comparadas son iguales? De encontrar la ubicación de K ¿cuál es la base, altura del rectángulo y la distancia recorrida?

____

____

____

____

____

b) ¿Por qué las áreas no son iguales?

____

____

____

3. Área calculada por medio de dos rectángulos:

   a) Moviendo los puntos K y K_1 como lo indica el docente, ¿Cuál es la mejor ubicación de estos para asegurar que las áreas comparadas en cada rectángulo son iguales? De encontrar la ubicación de los K indique: ¿cuál es la base, altura de los rectángulos y la distancia total recorrida?

____

____

____

____

____

   b) Es seguro decir, que las áreas a comparar en el rectángulo mas grade son iguales. Justifique su respuesta.

____

____

____

   c) Se tiene mejor aproximación al área con un rectángulo o con dos. Justifique su respuesta.

____

____

____

   d) Es posible que al hacer más rectángulos se tenga una aproximación mejor. Justifique su respuesta.

____

____

____

4. Área calculada por tres o más rectángulos:

a) ¿Con qué cantidad de rectángulos se tiene mayor aproximación al área?

____

b) ¿cuál es la mejor ubicación de los K?

____

c) Según el numero de rectángulos que dio en el punto a) y dejando el K en la mejor ubicación, ¿cuál sería la base y la altura de cada rectángulo? Haga una lista. (*Realice los procedimientos al respaldo de la hoja o en una hoja anexa y las preguntas que se puedan responder en esta hoja por favor hacerlo).*

d) Escriba F o V, según corresponda:(*si requiere de procedimientos realice los al respaldo de la hoja o en una hoja anexa y las preguntas que se puedan responder en esta hoja por favor hacerlo).*

i. Para determinar la distancia total recorrida se suma el área de todos los rectángulos. F ( ) V ( ).

ii. Si se hacen más de 10 rectángulos la aproximación es mejor. F ( ) V( )

iii. Para determinar la longitud de la base de los rectángulos, se divide la cantidad de segundos para lo cuales se quiere saber la distancia recorrida, por el número de rectángulos que se están haciendo. F ( ) V( )

iv. Los puntos K siempre están en la mitad del segmento paralelo a la base. F ( ) V( )

v. La altura de los rectángulos es el valor de la función (que indica el movimiento) en el punto donde está ubicado K (en la mitad de la base del rectángulo) F ( ) V( )

vi. La distancia total recorrida en el primer segundo, calculada con 5 rectángulos es:

$$0.2 * f(0.1) + 0.2 * f(0.3) + 0.2 * f(0.5) + 0.2 * f(0.7) + 0.2 * f(0.9)$$

F ( ) V( )

vii. Lo anterior es igual a tener

$$\frac{1}{5} * f\left(\frac{1}{10}\right) + \frac{1}{5} * f\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{5}\right) + \frac{1}{5} * f\left(\frac{1}{10} + \frac{2}{5}\right) + \frac{1}{5} * f\left(\frac{1}{10} + \frac{3}{5}\right) + \frac{1}{5} * f\left(\frac{1}{10} + \frac{4}{5}\right)$$

F ( ) V( )

viii. Si ya no se desea hacer para el primer segundo, sino para $q\ segundos$ y para n número de rectángulos, la distancia total recorrida es:

$$\frac{q}{n} * f\left(\frac{q}{2n}\right) + \frac{q}{n} * f\left(\frac{q}{2n} + \frac{q}{n}\right) + \frac{q}{5} * f\left(\frac{q}{2n} + \frac{2q}{n}\right) + \cdots + \frac{q}{5} * f\left(\frac{q}{2n} + \frac{(n-2)q}{n}\right) + \frac{q}{n} * f\left(\frac{q}{2n} + \frac{(n-1)q}{n}\right)$$

F ( ) V( )

5. Si el inciso viii. Fue verdadero, use la fórmula para determinar la distancia recorrida en la siguiente situación (utilice los rectángulos que quiera):

Un auto viaja con una velocidad de $v(t) = 2t - 3t^2 + t^3 + 2$, realice la gráfica, y determine la distancia recorrida durante los primeros 3 segundos.(*Realice los procedimientos al respaldo de la hoja o en una hoja anexa y las preguntas que se puedan responder en esta hoja por favor hacerlo).*

RESPUESTAS ESPERADAS

1. *En una carrera de motocicletas, el medidor de velocidad en la moto número 5 registra el movimiento en una gráfica de velocidad-tiempo de la siguiente manera:*

   a) *Determine de dos maneras distintas la distancia recorrida por la motocicleta durante el primer segundo. (Realice los procedimientos al respaldo de la hoja o en una hoja anexa)*

   Se espera que el estudiante empiece a dividir el área bajo la curva el superficies de figuras conocidas, intentando hacer una aproximación al área, luego que halle el área de esas figuras; peor que intuya que le falta por que quedan espacios sin contar.

   b) *Es posible hallar la distancia recorrida, por medio de un rectángulo como lo realizo Oresme. Justifique su respuesta. Y de ser posible indique dónde está ubicado el punto K y cuál es la longitud de la altura y la base del rectángulo que representa la distancia recorrida durante el primer segundo:*

   El estudiante puede decir que si o que no, en el caso de un si se espera que coloque el punto K en la mitad del intervalo y suponga que las áreas a comparar son iguales como en las anteriores fases. En el caso de ser un no, la justificación puede estar dada por que el área de las superficies a comparar no son iguales, o por que intente inscribir un rectángulo y se dé cuenta que este no es equivalente al valor de la superficie.

   c) *¿Es seguro que las áreas comparadas una vez se ubica el punto K son iguales? Justifique su respuesta*

   Esta pregunta se hace con el fin de cuestionar a los estudiantes que afirmaron que las áreas a comparar son iguales. Luego se espera que digan que si o que no, y que las justificaciones dependan de los argumentos que tienen a su defensa.

2. *Área calculada por medio de un rectángulo:*

a) *Moviendo el punto K como lo indica el docente, ¿Cuál es la mejor ubicación de K para asegurar que las áreas comparadas son iguales? De encontrar la ubicación de K ¿cuál es la base, altura del rectángulo y la distancia recorrida?*

El estudiante puede encontrar o no la ubicación de K; en el caso que no, se espera que la justificación sea por que las áreas no son iguales. Y si encuentra la ubicación de K se espera que diga que la mejor ubicación de K es en al mitad de 1 o del intervalo, y que la altura es 6, la base 1 y por tanto la distancia recorrida sea 6 m

b) *¿Por qué las áreas no son iguales?*

Esta pregunta se propone con el fin que el estudiante se detenga a mirar por que esta validando o no, la pregunta anterior

3. *Área calculada por medio de dos rectángulos:*

a) Moviendo los puntos K y K_1 como lo indica el docente, ¿Cuál es la mejor ubicación de estos para asegurar que las áreas comparadas en cada rectángulo son iguales? De encontrar la ubicación de los K indique: ¿cuál es la base, altura de los rectángulos y la distancia total recorrida?

Se espera que diga que la mejor ubicación es cuando queda en la mitad del lado del rectángulo, además que se fije que los dos puntos quedan en la mitad; además que indique que las dos bases de los rectángulos miden lo mismo 0.5 s y que la altura del rectángulo mas grande es 7.52 m y del pequeño 4 m.

b) *Es seguro decir, que las áreas a comparar en el rectángulo mas grade son iguales. Justifique su respuesta.*

Se espera que diga que no, ya que para este rectángulo la diferencia entre las áreas a comparar es más notoria, que para el rectángulo 2.

c) *Se tiene mejor aproximación al área con un rectángulo o con dos. Justifique su respuesta.*

Se espera que diga que con dos, las razones pueden ser por que queda menos espacio por comparar o por que la comparación se hace más fácil.

d) *Es posible que al hacer más rectángulos se tenga una aproximación mejor. Justifique su respuesta.*

La conclusión seria que si y las razones pueden ser las mismas del al anterior pregunta

4. *Área calculada por tres o mas rectángulos:*

e) *¿Con qué cantidad de rectángulos se tiene mayor aproximación al área?*

La expectativa es que diga que con 10 rectángulos

f) *¿cuál es la mejor ubicación de los K?*

En la mitad de los lados de los rectángulos

g) *Según el numero de rectángulos que dio en el punto a) y dejando el K en la mejor ubicación, ¿cuál seria la base y la altura de cada rectángulo? Haga una lista.*

Rectángulo 1: $b = 0.1s;\ h = 7.98\,m/s$

Rectángulo 2: $b = 0.1s;\ h = 7.82m/s$

Rectángulo 3: $b = 0.1s;\ h = 7.51m/s$

Rectángulo 4: $b = 0.1s;\ h = 7.04m/s$

Rectángulo 5: $b = 0.1s;\ h = 6.42m/s$

Rectángulo 6: $b = 0.1s;\ h = 5.69m/s$

Rectángulo 7: $b = 0.1s;\ h = 4.86m/s$

Rectángulo 8: $b = 0.1s;\ h = 3.98m/s$

Rectángulo 9: $b = 0.1s;\ h = 3.12m/s$

Rectángulo 10: $b = 0.1s;\ h = 2.33m/s$

h) *Escriba F o V, según corresponda:*

Se espera que todas las ponga V y que para validar haga uso del programa o de cálculos.

5. *Si el inciso viii. Fue verdadero, use la formula para determinar la distancia recorrida en la siguiente situación (utilice los rectángulos que quiera):*

Un auto viaja con una velocidad de $v(t) = 2t - 3t^2 + t^3 + 2$, realice la gráfica, y determine la distancia recorrida durante los primeros 3 segundos.

Se espera que use la formula

$$\frac{q}{n} * f\left(\frac{q}{2n}\right) + \frac{q}{n} * f\left(\frac{q}{2n} + \frac{q}{n}\right) + \frac{q}{5} * f\left(\frac{q}{2n} + \frac{2q}{n}\right) + \cdots + \frac{q}{5} * f\left(\frac{q}{2n} + \frac{(n-2)q}{n}\right) + \frac{q}{n} * f\left(\frac{q}{2n} + \frac{(n-1)q}{n}\right)$$

Y que ponga como mínimo 10 rectángulos ya que sabe que con esta cantidad puede tener una mejor aproximación.

4. CONCLUSIONES

- La demostración geométrica planteada por Oresme de la Ley de Merton, efectivamente da una idea de cómo abordar el cálculo de algunas magnitudes físicas, aunque la asociación que se debe hacer de esta con el planteamiento de una suma de Riemann no es muy evidente, si arroja elementos fundamentales que también intervienen la las sumatorias, como los rectángulos y los puntos medios de la base de los rectángulos; en tanto, aunque no evidencia todos los elementos si permite una conexión entre los fenómenos y el cálculo de áreas bajo la curva.

- Hacer un rastreo minucioso persiguiendo los orígenes que tuvieron los diferentes conceptos matemáticos, además de brindar la posibilidad de conocer todos los antecedentes y por menores que precedieron la consecución de los mismos, proporciona una herramienta que muchas veces no se tiene en cuenta a la hora de presentarlos en el aula de clase; ya que permite mostrar a los estudiantes que los elementos que se abordan desde una ciencia y en particular la matemática, han surgido de diversas hipótesis, procesos, supuestos e innumerables intentos fallidos desarrollados a lo largo de la historia y que hoy en día se tienen a la mano para ser conceptualizados por ellos durante su formación académica.

  En el caso particular del concepto área bajo la curva, se pudo apreciar que antes de establecerse tal como hoy en día se conoce, se hicieron aportes significativos desde la época de los griegos para determinar la cuadratura de las figuras entre ellas el círculo. Posteriormente, Nicolás Oresme hizo la demostración de la ley de Merton o velocidad media a partir del cálculo de las áreas que se obtiene al representar un movimiento uniforme y uno disforme sobre un mismo plano. Aunque esta demostración no sea considerada como un antecedente al concepto de área bajo la curva se incluye como punto de partida para el desarrollo de la propuesta.

- Bajo la teoría del análisis fenomenológico, la secuencia encuentra en la fenomenología genética la funcionalidad que tiene el cálculo de áreas bajo la curva como medio de organización de los fenómenos de movimiento y trabajo. Se hizo necesario incluir un elemento que no se había considerado pero que resultó transcendental para la consecución de la misma; se trata del análisis dimensional, el cual sirvió como hilo conector entre el reconocimiento de un cálculo de área bajo la curva y los fenómenos físicos analizados.

  La trascendencia que tuvo el análisis dimensional sobre la propuesta, radica en el significado físico - matemático que se le pudo dar a los gráficos de velocidad – tiempo, aceleración – tiempo y fuerza – distancia, permitiendo desde el producto de magnitudes la reacción de área bajo la curva.

- La secuencia didáctica se fundamenta en la necesidad de generar diversas alternativas para el estudio de conceptos matemáticos, vinculándolos a situaciones cotidianas que son vistas con los lentes de otras ramas del conocimiento, en busca de un fortalecimiento en la adquisición de los saberes que estudian cada una de las ciencias, en ocasiones por separado; pero igualmente no es solo una propuesta para la clase de matemática, en física puede ser empleada para dar muestra de la funcionalidad y riqueza que tienen estas dos ciencias y mas cuando se pueden complementar una con la otra. En particular se considera extensivo el proceso de las actividades; ya que independiente a no tener un tiempo determinado para aplicarlas, si se gasta más de 4 sesiones, pero aun mas extensivo resulta la asociación entre estas ciencias.

- La matemática y la física son dos ciencias que tienen enfoques diferentes y a lo largo de la historia se han venido consolidando una a la par de la otra, lo cual ha permitido dar la explicación a las diferentes interrogantes que la humanidad ha planteado desde tiempos remotos. En el desarrollo que han tenido estas dos ciencias una ha requerido de la otra; en el caso de la física, ha empleado la matemática para modelar las leyes, principios y teorías que se han planteado para dar la explicación de lo que se denomina fenómenos naturales y en el caso de la matemática ha necesitado un medio donde se apliquen las estructuras, teoremas y algoritmos que ha formulado, el cual se lo ha brindado la física, en gran cantidad.

  Pero muy a pesar de lo que se describió anteriormente, luego de la realización de la presente propuesta, se hizo evidente la dificultad que existe para entrelazar dos mundos diametralmente distintos, pero que se requieren entre sí para complementarse. Al pretender entonces usar una en favor de la otra resulto ser una tarea bastante dispendiosa, pues, muy a pesar de emplearse la matemática como el lenguaje para comprender la física, existen algunos limitantes que solo se pueden explicar desde la concepción de la física como ciencia. Esto hizo que para el desarrollo de la presente propuesta se requiriera de un manejo minucioso, que permitiera hacer un uso adecuado de la herramienta matemática sin que se perdiera la intencionalidad que se persigue desde la física cuando se analizan fenómenos físicos.

5. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Aranzeta, G. (2005). *Introducción a la metodología experimental*. Ed. Limusa, México. p.115.

Boyer, C. (1999). *Historia de la Matemática*. Ed. Alianza editorial, Madrid.

Cantoral, R. y Farfán R. (2004). *Desarrollo conceptual del cálculo*. Ed: Thomson Learning, Inc. México.

Gómez, P. (2000). *Reseñas y Resúmenes: Los Organizadores Del Currículo De Matemáticas*. Revista EMA, vol.5, Nº3, pp. 267-277

González, P. (2008). *La solución de Eudoxo a la crisis de los inconmensurables: la teoría de la proporción y el método de exhaución*. Revista SIGMA, Nº 33, pp. 101-129.ISSN: 1131-7787.

Kline, M. (1972 a.). *El pensamiento matemático desde la antigüedad hasta nuestros días I.* Ed. Alianza editorial, Madrid.

Kline, M. (1972 b.). *El pensamiento matemático desde la antigüedad hasta nuestros días III.* Ed. Alianza editorial, Madrid.

Laboratorio de física –E.T.S.I.T. (2006.). *Introducción a la teoría de errores. R*ecuperado el 3 de septiembre de 2012 en: http://www.laser.uvigo.es/docencia/Teleco/pdf/Terror06.pdf.

Lara, A., Cerpa, G., Rodríguez H., Núñez, H. (s.f.). *Física para Bachillerato Cinemática*. Ed. Prentice Hall. p.37.

Leal, S. (2009).*Definiendo la integral de Riemann sin utilizar suma de Riemann.* Trabajo de grado, Universidad central de Venezuela. Recuperado el 27 de abril de 2012 en http://www.matematica.ciens.ucv.ve/labfg/tesis/sleal/tesissleal.pdf.

Lupiañez, J. (2002).*Reflexiones didácticas sobre la Historia de la Matemática*. Revista SUMA, Nº 40, pp. 59-63.ICE Universidad de Zaragoza/ISSN: 1130-488X.

Manzano, P. (s.f.).*Modulo1. Cinemática*. Argentina. Recuperado el 23 de julio de 2012 enwww.donboscobaires.com.ar/acad/sec/fisica/.../modulo1cinematica.doc.

Ministerio de Educación Nacional. (2004). Estándares Básicos de competencias en ciencias Naturales y Ciencias sociales. Colombia. Recuperado el 12 de julio de 2004 http// www.mineducacion.gov.co /MEN_Estandares_En_Ciencias.pdf.>

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares básicos de competencias en matemáticas.* Colombia. Recuperado el 8 de abril de 2010 en http://www.mineducacion.gov.co/cvn/1665/article-116042.html.

Nieto, M. (s.f.).*Cuantificación y representación matemática del movimiento*. Recuperado el 20 de abril de 2012 en http://historiadelaciencia-mnieto.uniandes.edu.co/pdf/CUANTIFICACIONYREPRESENTACION.pdf.

Puig, L. (1997). *Análisis fenomenológico*. En L. Rico (Coord.) La educación matemática en la enseñanza secundaria (pp. 61-94). Barcelona: Horsori / ICE.

Rico, L., Lupiañez, J., Marín, A. y Cañadas, M., (s.f.). *Análisis Fenomenológico*. Departamento didáctica de la matemática, Universidad de Granada. Recuperado el 10 de julio de 2012 en http://www.ugr.es/~mconsu/Ficheros/Matematicas10_11Present26oct.pdf.

Riestra, J. (2004). *El estudio de la variación en la edad media y su relación con el concepto de límite*. Revista Miscelánea Matemática, Nº 39, pp. 49-60.

Secretaria de Educación de Bogotá, (2012).*Intensificación Horaria 11*. Bogotá D.C: Equipo Pedagógico.

Serway, R. y Beichner, R., (2002). *Física para Ciencias e Ingeniería.* 5° Ed. México D.F: McGraw Hill.

Serway, R. y Faughn, J., (2001). *Física.*5°. Ed. México D.F: Pearson Prenice Hall.