

# EN BÚSQUEDA DE LA ARGUMENTACIÓN: UNA MIRADA A LA CLASE DE GEOMETRÍA

ASTRID CAROLINA HERNÁNDEZ RODRÍGUEZ  
LAURA LIZETH VELÁSQUEZ JIMÉNEZ

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título  
de  
Licenciada en matemáticas

Asesor  
Camilo Sua Flórez  
Profesor Dpto. de Matemáticas

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL  
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA  
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS  
Bogotá, D.C

2019

 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL	<b>FORMATO</b>	
	<b>RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE</b>	
Código: FOR020GIB	Versión: 01	
Fecha de Aprobación: 10-10-2012	Página 1 de 4	

<b>1. Información General</b>	
<b>Tipo de documento</b>	Trabajo de Grado
<b>Acceso al documento</b>	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
<b>Título del documento</b>	En búsqueda de la argumentación: una mirada a la clase de geometría
<b>Autor(es)</b>	Hernández Rodríguez, Astrid Carolina; Velásquez Jiménez, Laura Lizeth
<b>Director</b>	Sua Flórez, Jeison Camilo
<b>Publicación</b>	Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional, 2019. 188 p.
<b>Unidad Patrocinante</b>	Grupo de Investigación Enseñanza y Aprendizaje de la Geometría, Instituto Pedagógico Nacional IPN, Universidad Pedagógica Nacional
<b>Palabras Claves</b>	ARGUMENTACIÓN; NIVELES DE DISCURSO; AUTENTICIDAD; GEOMETRÍA; ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA.

<b>2. Descripción</b>
<p>En este trabajo de grado se presenta la caracterización cuatro clases de geometría, analizadas a la luz de tres grandes focos: los esquemas de argumentación que presentan los estudiantes en su discurso, analizados bajo la teoría de Harel y Sowder (1998); las acciones que detonan dichos esquemas ya sean del profesor o de sus compañeros, apoyadas en la teoría de Kaur (2013), y la autenticidad de dichos esquemas, a partir de la teoría de Goffman (1981, citado en Götz Krummheuer, 2015, p. 7). En esta vía se han realizado algunos ejercicios analíticos que permiten reconocer la naturaleza del discurso y la argumentación, así como la relación entre ellos. Buscamos con ello reconocer si realmente en una clase de geometría circulan ideas argumentadas auténticas sobre los objetos matemáticos involucrados, como lo sugieren algunos referentes teóricos al aspecto.</p>

<b>3. Fuentes</b>
<p>Chico, J. (2018). Impacto de la interacción en grupo en la producción de la lengua del álgebra en clase de matemáticas. <i>AIEM - Avances de Investigación En Educación Matemática</i>, 14, 31–47.</p> <p>Flores, C., Gómez, A., &amp; Flores, H. (2010). Esquemas de argumentación en actividades de Geometría Dinámica. <i>Acta Scientiae</i>, 12(2), 22–42.</p> <p>Flores, H. (2007). Esquemas de argumentación en profesores de matemáticas del bachillerato. <i>Educación Matemática</i>, 19(1), 63–98.</p> <p>Harel, G., &amp; Sowder, L. (1998). Students' Proof Schemes: Results from Exploratory Studies. <i>CBMS Issues in Mathematics Education</i>, 7, 234–284.</p> <p>Harel, G., &amp; Sowder, L. (2007). Toward Comprehensive Perspectives on the Learning and Teaching of Proof. <i>Assessing Teachers' Mathematical Knowledge. What Knowledge Matters and What Evidence Counts</i>, 6179(619), 111–155.</p> <p>Inglis, M., &amp; Mejía, J. (2005). La fuerza de la aserción y el poder persuasivo en la argumentación en matemáticas. <i>EMA</i>, 10(2 y 3), 328–353. Retrieved from <a href="http://www.fayetteville-blog.com/2011/04/05/online-dating-leads-to-extortion-case-fraud-plea/">http://www.fayetteville-blog.com/2011/04/05/online-dating-leads-to-extortion-case-fraud-plea/</a></p> <p>Jiménez, A., &amp; Pineda, L. (2013). Comunicación y Argumentación en clase de matemáticas. <i>Educación y Ciencia</i>, 16, 101–116.</p>

	<b>FORMATO</b>	
	<b>RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE</b>	
Código: FOR020GIB	Versión: 01	
Fecha de Aprobación: 10-10-2012	Página 2 de 4	

- Kaur, B. (2013). Participation of students in content-learning classroom discourse: A study of two grade 8 mathematics classes in Singapore. *Student Voice in Mathematics Classrooms Around the World*, 65–88. <https://doi.org/10.1007/978-94-6209-350-8>
- Krummheuer, G. (2007). Argumentation and participation in the primary mathematics classroom Two episodes and related theoretical abductions. *Journal of Mathematical Behavior*, 26, 60–82. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2007.02.001>
- Krummheuer, G. (2015). Methods for Reconstructing Processes of Argumentation and Participation in Primary Mathematics Classroom Interaction. *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education*, 51–74. <https://doi.org/10.1007/978-94-017-9181-6>
- Krummheuer, & Götz. (1995). The Ethnography of argumentation. In P. Cobb & H. Bauersfeld (Eds.), *The emergence of Mathematical Meaning* (pp. 229–269). Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- Marmolejo, E., & Moreno, G. (2011). Argumentar-Conjeturar: Introducción a la demostración. *Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa*, 2(2), 509–516.
- MEN. (1998). Lineamientos Curriculares: Matemáticas. *Serie Lineamientos Curriculares*, 103.
- MEN. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas* (Ministerio). Bogotá, Colombia. <https://doi.org/958-691-290-6>
- Navarro Martínez, B., & Rigo Lemini, M. (2017). Análisis de procesos didácticos para lograr convencimiento en un conocimiento matemático bien fundamentado. *Investigación En Educación Matemática XXI*, 335–345.
- Roig, A., Llinares, S., & Penalva, M. del C. (2010). Aprendiendo sobre la comunicación matemática. Características de las estructuras argumentativas de estudiantes para profesores de matemáticas en un entorno On-Line. *Universidad de Alicante. Departamento de Innovación y Formación Didáctica*, 23(2010), 533–543. Retrieved from <http://hdl.handle.net/10045/16586>
- Sfard, A. (2008). *Aprendizaje de las matemáticas escolares desde un enfoque comunicacional* (Pimera). Universidad del valle.
- Valdivé, C. (2013). Estrategias implementadas por los matemáticos cuando demuestran: estudio de caso. *Educare*, 17(2), 4–26.

#### 4. Contenidos

Este documento consta de seis capítulos. Inicialmente se presenta la introducción, en el que se describe brevemente los aspectos relevantes del trabajo de grado. En el primer capítulo se encuentra el planteamiento del problema, en particular se hace énfasis en lo que sugieren los autores y los referentes curriculares nacionales en torno a cómo deberían ser las clases de geometría y sus aportes para la formación de los estudiantes, en contraste con algunas observaciones realizadas en nuestra práctica inicial como maestras en formación. Además, se presentan los antecedentes, de tal manera que se describe una contextualización de trabajos anteriores en los que se menciona algún estudio que se relacione con los tres focos presentados en torno al discurso en las clases de matemáticas: la argumentación, las acciones que promueven estos argumentos y la autenticidad en las participaciones. En el capítulo dos se muestra el marco teórico consolidado a partir de la lectura de los antecedentes, centrado en los tres focos de discusión mencionados. Para el capítulo tres se tiene el apartado correspondiente a la metodología en el que se especifica: el tipo de estudio, cómo se hizo la recopilación de referentes teóricos, cuál fue el contexto bajo el cual se enmarcó la población a analizar, cómo se organizó la información para el análisis de datos y las convenciones que se utilizaron en el análisis. En cuanto al capítulo cuatro se expone el análisis de cuatro episodios, uno por cada clase analizada. El capítulo cinco, describe los resultados obtenidos a partir del análisis de las clases, con base a cuatro preguntas formuladas a partir de asuntos de interés observados durante el análisis. El capítulo cinco consta de las conclusiones que dan

	<b>FORMATO</b>	
	<b>RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE</b>	
Código: FOR020GIB	Versión: 01	
Fecha de Aprobación: 10-10-2012	Página 3 de 4	

cuenta de un resumen los resultados encontrados y el capítulo seis presenta las conclusiones generales. Finalmente, se exhibe las referencias bibliográficas y el análisis completo de las cuatro clases de geometría.

### 5. Metodología

Este estudio se deriva del proyecto "Voces de los estudiantes en la clase de geometría" realizado por el equipo de investigación Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría ( $\mathcal{A} \cdot \mathcal{G}$ ) de la Universidad Pedagógica Nacional. Aun cuando el proyecto de investigación ya contaba con una revisión de literatura sobre aspectos metodológicos, conceptuales y algunos antecedentes, emprendimos una búsqueda adicional de referentes, en atención a los aspectos que configuran el marco teórico, así como antecedentes investigativos relacionados con nuestro asunto de interés. Luego, tomamos las transcripciones de cuatro clases de geometría, dos del grado sexto del colegio Instituto Pedagógico Nacional (IPN) y dos del grado séptimo del Colegio Calasanz, ambos ubicados en Bogotá, que nos fueron provistas por el grupo de investigación ( $\mathcal{A} \cdot \mathcal{G}$ ). Estas transcripciones fueron fragmentadas por episodios en atención al aspecto del objeto matemático que en cada una se involucraba. Cada clase permitió identificar en promedio siete episodios; en cada uno, las intervenciones de los miembros de la clase fueron analizadas en función a los referentes conceptuales abordados en este documento. Este análisis se realizó expresión por expresión, de cada una se estableció si había o no presencia de esquemas de argumentación según la teoría de Harel y Sowder (1998), posteriormente se determinó si dichos argumentos eran auténticos o eran un parafraseo o una repetición de alguna idea de un estudiante dicho con anterioridad basados en los tipos de participación propuestos por de Goffman (1981, citado en Götz Krummheller, 2015, p. 7) y finalmente se comprobó el nivel de discurso de aquellos esquemas tanto originales como no originales, a partir de la teoría de (Kaur, 2013). La información anterior se organizó en tablas, de tan manera que se pudiesen construir gráficos estadísticos que permitiera visualizar mejor los resultados obtenidos. Con el análisis de cada episodio se pretendía buscar alguna relación entre el momento de la clase y los tres focos mencionados con anterioridad.

### 6. Conclusiones

Primeramente, se concluye que en clases donde los profesores promueven la participación de los estudiantes, los esquemas de argumentación con mayor relevancia son el Empírico Perceptual y el de Convicción Externa Autoritario; como participaciones auténticas, en menor grado se encuentran los esquemas Analítico-Axiomáticos. Por otro lado, los estudiantes inicialmente recurren a los esquemas de argumentación de Convicción Externa Autoritario o Empírico Perceptual, cuando se inician en el estudio de algún concepto geométrico, no obstante, cuando se profundiza en el tema sobresale el esquema Analítico Axiomático. Ahora bien, el esquema de argumentación Empírico Perceptual tiende a originarse en actividades que impliquen la discusión en torno a propiedades de objetos geométricos, mientras que el esquema de Convicción Externa Autoritario se presenta cuando se hace un primer abordaje sobre los conceptos. También se encontró que la mayor cantidad de los esquemas presentados se dio en el momento de la socialización. En cuanto a la autenticidad de los esquemas de argumentación, se encontró que en su mayoría fueron presentados por *autores*, seguidos de *portavoces* y la participación de tipo *fantasma* es casi nula en el desarrollo de las clases. Finalmente, se tiene que al analizar los esquemas de argumentación auténticos bajo la mirada de los niveles de discurso que los promueven, se encontró que el Nivel 2, fue el nivel más predominante para promover esquemas de argumentación, este consiste en el caso de un integrante de la clase quien fórmula una pregunta abierta, en la que permiten que los demás miembros de la clase comenten sobre el trabajo de los demás y las respuestas obtenidas proporcionan información adicional al discurso; por lo que se puede concluir que en este nivel se favorece un ambiente

	<b>FORMATO</b>	
	<b>RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE</b>	
Código: FOR020GIB	Versión: 01	
Fecha de Aprobación: 10-10-2012	Página 4 de 4	

donde se promueve cualquier tipo de esquemas de argumentación, en particular el esquemas Empírico perceptual, el Analítico Axiomático y el de Convicción Externa Autoritario.

<b>Elaborado por:</b>	Astrid Carolina Hernández Rodríguez- Laura Lizeth Velásquez Jiménez
<b>Revisado por:</b>	Camilo Sua Flórez

<b>Fecha de elaboración del Resumen:</b>	05	06	2019
--	----	----	------

Nota de aceptación:

---

---

---

---

---

---

---

Firma del asesor

---

Firma de jurado

---

Firma de jurado

Bogotá, D.C., Julio de 2019



UNIVERSIDAD PEDAGOGICA  
NACIONAL  
*Educadora de educadores*

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS  
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

## ACTA DE EVALUACIÓN DE TRABAJO DE GRADO

Presentados y **aprobados** el documento escrito y la sustentación del Trabajo de Grado, en el tipo Monografía, titulado: “**En búsqueda de la argumentación: una mirada a la clase de geometría**”, elaborado por las estudiantes:

**Astrid Carolina Hernández Rodríguez** código 2015140041 y cédula 1016100560

**Laura Lizeth Velásquez Jiménez** código 2015140080 y cédula 1030583780

Como requisito parcial para optar al título de **Licenciado en Matemáticas**, el jurado evaluador asigna **43** puntos al mismo.

Sugerencia de Distinción: Ninguna  Meritoria  Laureada

En constancia se firma a los 05 días del mes de julio de 2019.

Director del Trabajo: Profesor

  
CAMILLO SUA FLÓREZ

Jurado:

Profesor

  
OSCAR JAVIER MOLINA JAIME

*A mi mamá Hilda María, por todo su esfuerzo y sacrificio, quien me permite cumplir este anhelado sueño. Espero compensar todo lo que has hecho por mí.*

*Carolina*

*A mi hijo Juan Andrés y mi esposo, quienes me inspiran y me motivan cada día.*

*Laura*



# AGRADECIMIENTOS

Agradezco a Dios por guiar mi camino, por llenarme de sabiduría y fortaleza para afrontar cada obstáculo que se ha presentado. A mi mamá y mi hermano por acompañarme en esta etapa de mi vida, por su paciencia y amor incondicional. A mis padrinos quienes han contribuido de manera significativa a forjar el tipo de persona que soy hoy en día. A mis primas Martha y Rosa, por ser mi ejemplo que seguir y por la confianza que han depositado en mí. A Sergio por todo el apoyo y amor que me ha brindado, hoy puedo decir que se dio todo por un sueño.

Al profe Camilo, por su dedicación en este trabajo. A la Universidad Pedagógica Nacional por darme la oportunidad de vivir una de las mejores etapas de mi vida, donde crecí y me forjé como persona y profesional. En si agradezco a todos mis profesores que me han transmitido pasión por esta carrera. A mis amigas Laura, Karen, Paola, Natalia y Francy por su valiosa amistad y momentos compartidos. Sin duda alguna todos ustedes han dejado huella en mí.

Carolina Hernández R

Quiero expresar mi gratitud a Dios, quien con su infinita sabiduría guio mis pasos para llegar donde estoy. Agradezco también a mi esposo, a mi hijo y a mi mamá, por su apoyo incondicional para que este sueño se hiciera realidad. A mi compañera de trabajo de grado, con quien mano a mano luchamos por este proyecto investigativo y de igual manera agradezco a mi asesor que con su paciencia nos orientó para obtener de nosotras los mejores resultados.

Por último, agradezco a la Universidad Pedagógica Nacional y a mis profesores, que con sus enseñanzas hicieron de mí una mejor persona y quienes me brindaron las herramientas para ser una mejor profesional. Menciono además a mis amigas con quienes compartí las mejores experiencias en esta linda etapa de la universidad.

Laura Velásquez

# TABLA DE CONTENIDO

Introducción.....	1
1. Planteamiento del problema .....	2
1.1. Justificación .....	2
1.1.1. Objetivos.....	4
1.2. Antecedentes .....	4
1.2.1. Argumentación .....	5
1.2.2. Discurso .....	7
1.2.3. Discurso y argumentos .....	8
2. Marco teórico.....	11
2.1. Esquemas de Argumentación.....	11
2.1.1. Esquema de Argumentación de Convicción Externa. ....	12
2.1.2. Esquema de Argumentación Empírica .....	13
2.1.3. Esquema de Argumentación Analítica .....	14
2.2. Niveles de discurso en una clase de matemáticas.....	16
2.3. Autenticidad en la participación .....	17
3. Metodología.....	19
3.1. Tipo de estudio.....	19
3.2. Revisión documental.....	19
3.2.1. Recopilación de Antecedentes.....	19
3.2.2. Recopilación del Marco Teórico .....	20
3.2.3. Contexto .....	20
3.3. Acopio de datos .....	22
3.4. Análisis de la información .....	22
3.5. Convenciones.....	23
4. Análisis .....	26
4.1. Instituto Pedagógico Nacional .....	27
4.1.1. Clase: 10 de mayo de 2018.....	27
4.1.2. Clase: 24 de mayo de 2018.....	35
4.2. Colegio Calasanz .....	39

4.2.1.	Clase: 12 de mayo de 2018.....	40
4.2.2.	Clase: 18 de mayo de 2018.....	44
5.	Discusión y resultados .....	51
5.1.	¿Qué esquemas de argumentación se evidencian en el transcurso de la clase?.....	51
5.2.	¿Qué tan auténticos son los esquemas de argumentación que se presentan en la clase? 59	
5.3.	¿Qué acciones discursivas promueven los esquemas de argumentación? .....	67
5.4.	¿Cómo difieren estos resultados de un colegio a otro? .....	70
6.	Conclusiones.....	74
	Referencias .....	78
	Anexos .....	80
	Colegio Instituto pedagógico nacional (IPN) .....	80
	Clase: 10 de mayo de 2018.....	80
	Clase: 24 de mayo de 2018.....	104
	Colegio Calasanz .....	141
	Clase: 11 de mayo de 2018.....	141
	Clase: 18 de mayo de 2018.....	170

## TABLA DE DIAGRAMAS

Diagrama 1 Esquema de argumentación por convicción externa.....	12
Diagrama 2 Esquema de argumentación empírica .....	13
Diagrama 3 Esquema de argumentación analítico .....	14
Diagrama 4 Esquemas de argumentación clase 1 IPN .....	52
Diagrama 5 Esquemas de argumentación clase 1IPN .....	53
Diagrama 6 Esquemas de argumentación clase 2 IPN .....	54
Diagrama 7 Esquemas de argumentación clase 2 IPN .....	55
Diagrama 8 Esquemas de argumentación clase 1 Calasanz .....	56
Diagrama 9. Esquemas de argumentación clase 1 Calasanz .....	57
Diagrama 10 Esquemas de argumentación clase 2 Calasanz .....	58
Diagrama 11. Esquemas de argumentación clase 2 Calasanz .....	59
Diagrama 12 Esquemas de argumentación según la originalidad. Clase 1 IPN.....	60
Diagrama 13. Esquemas de argumentación según la originalidad por episodios. Clase 1 IPN .....	61
Diagrama 14 Esquemas de argumentación según la originalidad. Clase 2 IPN.....	62
Diagrama 15. Esquemas de argumentación según la originalidad por episodios. Clase 2 IPN .....	63
Diagrama 16 Esquemas de argumentación según la originalidad. Clase 1 Calasanz.....	64
Diagrama 17. Esquemas de argumentación según la originalidad por episodios. Clase 1 Calasanz.....	65
Diagrama 18 Esquemas de argumentación según la originalidad. Clase 2 Calasanz.....	66
Diagrama 19. Esquemas de argumentación según la originalidad por episodios. Clase 2 del Calasanz.....	67
Diagrama 20 Esquemas de argumentación según la originalidad y el nivel de discurso. Clase 1 IPN.....	67
Diagrama 21 Esquemas de argumentación según la originalidad y el nivel de discurso. Clase 2 IPN.....	68
Diagrama 22 Esquemas de argumentación según la originalidad y el nivel de discurso. Clase 1 Calasanz.....	69
Diagrama 23 Esquemas de argumentación según la originalidad y el nivel de discurso. Clase 2 Calasanz.....	70
Diagrama 24 Esquemas de argumentación IPN vs Calasanz .....	71
Diagrama 25 Originalidad de los argumentos IPN vs Calasanz.....	72

Diagrama 26 Niveles de discurso que promueven los esquemas de argumentación IPN vs Calasanz.....	73
--	----

## TABLA DE IMÁGENES

Imagen 1. Triángulo rectángulo en su representación canónica.....	13
Imagen 2. Triángulo rectángulo en posición no canónica .....	13
Imagen 3. Ejemplos de rombos para determinar propiedades .....	14
Imagen 4. Transformación realizada a un triángulo para probar el teorema 180.....	15
Imagen 5. Construcción robusta de triángulo isósceles.....	15
Imagen 6. Condiciones para la construcción de una figura .....	28
Imagen 7. Construcción inicial de la representación de Danna.....	29
Imagen 8. Construcción de la figura de Danna que cumple las condiciones .....	30
Imagen 9. Ademán de Gabriela para representar que dos segmentos se intersecan.....	32
Imagen 10. Representación de la construcción de Danna en el tablero .....	34
Imagen 11. Réplica del paso 1 de la construcción de Camila. ....	35
Imagen 12. Réplica del paso 2 de la construcción de Camila. ....	35
Imagen 13. Réplica del paso 2 de la construcción de Camila. ....	35
Imagen 14. Figuras proyectadas en el tablero .....	40
Imagen 15. Intervención del Johan en el tablero .....	42
Imagen 16. Representación de un triángulo en el tablero por el profesor .....	45
Imagen 17. Representación del triángulo mencionado en el enunciado.....	45
Imagen 18. Ejemplo propuesto por el profesor .....	47
Imagen 19. Pentágonos irregulares.....	48
Imagen 20. Respuesta de la estudiante .....	48
Imagen 21. Respuesta de Camila para el primer lado .....	48
Imagen 22. Respuesta de Camila para el segundo lado.....	48
Imagen 23. Respuesta de Camila para el tercer lado.....	48
Imagen 24. Ejercicio propuesto por el profesor para lados homólogos .....	49
Imagen 25. Respuesta de la estudiante .....	49
Imagen 26. Verificación del procedimiento .....	50
Imagen 27. Condiciones para la construcción de una figura.....	82
Imagen 28. Ejemplo para diferenciar segmento y recta .....	83
Imagen 29. Construcción de figura que cumple las condiciones .....	84
Imagen 30. Movimiento de la figura para que cumpla una de las condiciones.....	85

Imagen 31. Construcción de Danna que cumple dicha condición.....	85
Imagen 32. Construcción de Juanita.....	86
Imagen 33. Ejemplo de polígono y no polígono .....	88
Imagen 34. Construcción de los cinco puntos para el ejemplo .....	89
Imagen 35. Construcción de los segmentos sobre los cinco puntos.....	90
Imagen 36. Modificación de la construcción .....	91
Imagen 37. Construcción de Gabriela .....	93
Imagen 38. Representación de Gabriela.....	94
Imagen 39. Construcción inicial de la representación de Danna.....	95
Imagen 40. Construcción de la figura de Danna que cumple las condiciones .....	96
Imagen 41. Ademan de Gabriela para representar que dos segmentos se intersecan.....	98
Imagen 42. Representación de la construcción de Dana en el tablero .....	100
Imagen 43. Construcción de Gabriela .....	101
Imagen 44. Replica de la construcción de Gabriela .....	101
Imagen 45. Representación de Santiago para un no polígono.....	102
Imagen 46. Modificación de la construcción de Santiago por parte de Ariadna.....	103
Imagen 47. Réplica de la primera construcción de Joseph.....	113
Imagen 48. Réplica de la construcción de Joseph sin cuadrícula.....	114
Imagen 49. Construcción inicial de Jerónimo .....	115
Imagen 50. Construcción de jerónimo luego de mover los vértices.....	115
Imagen 51. Construcción de Gabriela .....	117
Imagen 52. Construcción de María Fernanda.....	118
Imagen 53. Construcción de Catalina.....	119
Imagen 54. Procedimiento de Catalina.....	120
Imagen 55. Construcción de Valentina y Juanita. ....	121
Imagen 56. Toma de las medidas del triángulo de Juanita y Valentina .....	122
Imagen 57. Construcción de Camila proyectada a todo el salón.....	123
Imagen 58. Primer paso de la construcción de Camila.....	124
Imagen 59. Construcción terminada de Camila.....	125
Imagen 60. Réplica del paso 1 de la construcción de Camila .....	126
Imagen 61. Réplica del paso 2 de la construcción de Camila .....	126
Imagen 62. Réplica del paso 2 de la construcción de Camila .....	126
Imagen 63. Construcción de Ariadna .....	130
Imagen 64. Construcción del triángulo equilátero de Ariadna.....	132

Imagen 65. Arrastre de la construcción de Ariadna .....	132
Imagen 66. Segunda construcción de Ariadna .....	133
Imagen 67. Tercera construcción de Ariadna.....	133
Imagen 68. Construcción de las circunferencias para el triángulo equilátero .....	134
Imagen 69. Pasos de la construcción de Isabella y Camila .....	135
Imagen 70. Construcción de triángulo equilátero.....	136
Imagen 71. Construcción de Sara .....	136
Imagen 72. Construcción de Jerónimo .....	138
Imagen 73. Representación de Catalina .....	139
Imagen 74. Catalina toma de las medidas de los lados del triángulo .....	139
Imagen 75. Construcción inicial de Juanita y Valentina .....	140
Imagen 76. Construcción luego del arrastre .....	140
Imagen 77. Segunda representación de Catalina .....	140
Imagen 78. Replica de la construcción de Valentina.....	141
Imagen 79. Replica de la construcción de Juanita.....	141
Imagen 80. Definición de figuras semejantes presentada en la guía del profesor.....	142
Imagen 81. Ejemplos de guía sobre semejanza .....	143
Imagen 82. Ejemplo de la guía que se proyecta .....	144
Imagen 83. Intervención de Miguel en el tablero.....	145
Imagen 84.. Figuras proyectadas en el tablero .....	147
Imagen 85. Intervención del estudiante en el tablero .....	148
Imagen 86. Explicación de Santiago .....	151
Imagen 87. Explicación de Santiago .....	151
Imagen 88. Cuadriláteros proyectados en el tablero.....	153
Imagen 89. Explicación de Juan David en el tablero .....	158
Imagen 90. Explicación del profesor en el tablero .....	158
Imagen 91. Verificación aritmética de las razones entre las longitudes de los segmentos	160
Imagen 92. Ejemplo propuesto por el profesor .....	162
Imagen 93. Ejemplo propuesto por el profesor .....	165
Imagen 94. Representación del profesor de un triángulo .....	171
Imagen 95. Representación del triángulo propuesto en el enunciando .....	171
Imagen 96. Pentágonos irregulares.....	174
Imagen 97. Respuesta de la estudiante .....	174
Imagen 98. Respuesta de Sofía para el primer lado .....	174



Imagen 99. Respuesta de Sofía para el segundo lado.....	174
Imagen 100. Respuesta de Sofía para el tercer lado .....	174
Imagen 101. Ejercicio propuesto por el profesor para identificar los segmentos homólogos de una figura. ....	175
Imagen 102. Respuesta de la estudiante. ....	175
Imagen 103. Verificación del procedimiento .....	176
Imagen 104. Respuesta de Miguel para el primer ítem de la actividad.....	178
Imagen 105. Respuesta de Sofía para el primer ítem de la actividad.....	179
Imagen 106. Respuesta de Diego para el primer ítem de la actividad.....	179
Imagen 107. Respuesta dada por Diego a la pregunta dos de la actividad.....	180
Imagen 108. Respuesta dada por Miguel a la pregunta dos de la actividad .....	180
Imagen 109. Respuesta dada por Valeria a la pregunta dos de la actividad.....	180
Imagen 110. Respuesta dada por Juan Pablo al ítem 3 de la actividad .....	181
Imagen 111. Respuesta de Miguel para la pregunta 4 de la actividad.....	182
Imagen 112. Respuesta de Sofía para la pregunta 4 de la actividad .....	182
Imagen 113. Ejemplos propuestos por Miguel para el ítem 5 de la actividad.....	184
Imagen 114. Ejemplos propuestos por Miguel para el ítem 5 de la actividad.....	184
Imagen 115. Respuesta dada por Sofía al punto 5 de la actividad.....	184
Imagen 116. Ejemplo de Juan José de figuras semejantes .....	186
Imagen 117. Ejemplo de Juan José de figuras semejantes .....	186
Imagen 118. Ejemplo de Juan Sebastián de figuras semejantes.....	187

## ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. Niveles de Discurso.....	16
Tabla 2. Clasificación de las participaciones según Goffman (1981).....	18
Tabla 3. Convenciones de los esquemas de argumentación.....	24
Tabla 4. Convenciones de los Niveles de Discurso.....	24
Tabla 5. Convenciones de los momentos de la clase.....	24
Tabla 6. Episodios de la clase 1 del IPN.....	26
Tabla 7. Episodios de la clase 2 del IPN.....	26
Tabla 8. Episodios de la clase 1 del Calasanz.....	27
Tabla 9. Episodios de la clase 2 del Calasanz.....	27

# INTRODUCCIÓN

El siguiente trabajo presenta la caracterización cuatro clases de geometría, dos de ellas de grado sexto del colegio Instituto Pedagógico Nacional y dos clases del grado séptimo del Colegio Calasanz, analizadas a la luz de tres grandes focos: los esquemas de argumentación que presentan los estudiantes en su discurso sobre los temas de la clase de geometría, analizados bajo la teoría de Harel y Sowder (1998); las acciones que detonan dichos esquemas ya sean del profesor o de los estudiantes, que más adelante llamaremos niveles de discurso, apoyadas en la teoría de Kaur (2013), y la autenticidad de dichos esquemas, a partir de la teoría de Goffman (1981, citado en Götz Krummheuer, 2015, p. 7). De tal ejercicio esperamos hacer una comparación entre lo que se supone deberían ser las clases de geometría, según los referentes curriculares nacionales y otros autores, en contraste con las clases reales. A través de este documento se espera que los profesores en formación y ejercicio reflexionen sobre su gestión en el aula, de tal manera que puedan reconsiderar si las acciones allí ejecutadas promueven las habilidades argumentativas esperadas en los estudiantes. Por lo tanto, esperamos que este estudio brinde luces a los profesores para que de manera decidida favorezcan en los estudiantes una actitud crítica y reflexiva, permitiéndoles apropiarse de su proceso de aprendizaje a través de un papel activo y participativo.

En la primera parte del documento se presenta el planteamiento del problema, en particular se hace énfasis en lo que sugieren los autores y los referentes curriculares nacionales en torno a cómo deberían ser las clases de geometría y sus aportes para la formación de los estudiantes, en contraste con algunas observaciones realizadas en nuestra práctica inicial como maestras en formación. Luego se presenta una contextualización de trabajos anteriores, en los que se mencionan estudios relacionados con los tres focos presentados anteriormente en torno al discurso en las clases de matemáticas. En seguida se mostrará al lector un marco teórico que permite realizar el análisis que pretendemos hacer. Posteriormente se presenta un capítulo donde se realiza un recuento de cómo se ha elaborado el trabajo de grado, a saber: el tipo de estudio desarrollado, cómo se hizo la recopilación de referentes teóricos, cuál fue el contexto de la población objeto de estudio, cómo se organizó la información para el análisis de datos y las categorías de análisis contempladas para ello. Posteriormente mostramos el apartado que corresponde al análisis, presentando una estructura general de las clases. Teniendo en cuenta que las clases que fueron elegidas eran similares en su metodología, codificamos los momentos de la clase según la actividad que se estaba realizando.

Con ello y con las categorías establecidas anteriormente se presenta el análisis de cuatro episodios, uno por cada clase analizada, mostrando de esta manera los criterios con los que se clasificó cada una de las expresiones. El análisis completo de las cuatro clases se encuentra en los anexos de documento. Para finalizar se presenta un capítulo destinado a la discusión de los resultados obtenidos. Para esto, se plantearon cuatro preguntas que iban surgiendo a partir de las relaciones que encontrábamos al momento de hacer el análisis. Para abordar cada pregunta se organizó la información en gráficos estadísticos que permitieron facilitar la lectura de los resultados, intentando describir la situación bajo la cual estos se presentaron. Por último, se presentan las conclusiones en las que se resumen los resultados encontrados.

# 1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

## 1.1. JUSTIFICACIÓN

Recientemente se han considerado las participaciones orales de los estudiantes como elemento fundamental para la construcción del aprendizaje de las matemáticas. Sfard (2008), por ejemplo, afirma que las matemáticas se conceptualizan a través del discurso, de tal manera que cuando se investiga sobre el aprendizaje se debe conocer como modifican los estudiantes sus acciones discursivas. Ella también manifiesta que son las participaciones un medio para evidenciar el proceso de construcción de conocimiento. Por otro lado, Romberg (1991, citado en MEN, 1998, p. 74) también hace énfasis en que la comunicación es el medio por el cual los nuevos conocimientos se interiorizan y que esta permite a todos los miembros de la clase expresar sus ideas y escuchar las de otros, respecto al aspecto del conocimiento que se esté tratando.

En la normatividad colombiana se propone que los estudiantes deben dejar de interactuar con estructuras impropias, es decir, responder a preguntas del profesor, en las que no se profundiza sobre el porqué de dichas respuestas. Además, se debe cambiar la evaluación de los conocimientos, en la que normalmente se limita a respuestas cortas, correctas o incorrectas; ya que el trabajo entre el profesor y los estudiantes debe complementarse a través de una guía, escucha, discusión y cuestionamiento. En los Lineamientos Curriculares en Matemáticas (1998) se sugiere también que las clases se deben distinguir por promover las conversaciones sobre las matemáticas, de tal manera que se debe maximizar la comunicación entre los estudiantes y minimizar la cantidad de tiempo en que los profesores dominan la discusión. El ambiente escolar se debe caracterizar por fomentar la comunicación como una práctica natural, donde la discusión de ideas es valorada por todos (MEN, 1998).

Además de la importancia del discurso, también es fundamental preparar a los estudiantes para atender a las demandas que la sociedad impone, incluyendo entre estas la capacidad de ser críticos y reflexivos, (Flores, Gómez, & Flores, 2010). Para estos mismos autores es posible alcanzar estas capacidades a partir de la argumentación matemática. Particularmente la normatividad colombiana considera que el conocimiento matemático sirve como argumento de justificación para tomar decisiones, entre ellas, aquellas que afectan a la comunidad. Los Lineamientos Curriculares en Matemáticas (1998) proponen que, para tomar decisiones o para atender una determinada situación, el estudiante debe utilizar formas de argumentación en su vida cotidiana.

La Geometría es considerada como una herramienta que permite interpretar y entender el mundo espacial, por tanto, es una fuente de modelación en la que es posible fomentar la argumentación y promover las interacciones en torno a modelos y figuras sobre los cuales es posible discutir (MEN, 1998, p. 17). La argumentación en la clase y las discusiones que puedan surgir alrededor de estas se logran a partir del uso de “argumentos geométricos para resolver y formular problemas en contextos matemáticos” (p. 88), así como a través de la

validación o rechazo de conjeturas, lo cual favorecen acciones como probar, refutar, dar o pedir razones (MEN, 2006).

Tanto la argumentación como el discurso están estrechamente relacionados, como lo indican los Lineamientos Curriculares en Matemáticas (1998) a través de la “discusión los estudiantes aprenden a comunicar sus puntos de vista y a escuchar las argumentaciones de los otros, validan formas de representación y construyen socialmente el conocimiento” (p. 23). Así mismo Jiménez y Pineda (2013) consideran que la interacción social y el lenguaje juegan un papel fundamental en la relación entre la argumentación y la comprensión. Mientras que Krummheuer (1995) considera que la participación es un fenómeno social, en el que las personas ajustan el discurso, que incluye las interpretaciones o intenciones verbales, para presentar un argumento sobre sus acciones, y de esta manera se impacta fuertemente en su aprendizaje

Lo que se ha mencionado hasta ahora permitiría reconocer un rol protagónico por parte de los estudiantes, uno en el que ellos se involucren en la clase y asuman una posición no exclusivamente de receptor, pues lo que se espera que hagan los estudiantes pone en manifiesto unas altas demandas que deben asumir, motivo por el cual se espera que su rol sea más activo, esta idea es además sustentada por Kaur (2013). Aunque se han hecho esfuerzos por cambiar el enfoque de la enseñanza de las matemáticas en el nivel escolar, desde nuestra experiencia en la práctica, aún es posible observar que las clases de matemáticas se caracterizan por ser dirigidas por un profesor quien imparte el conocimiento, muchas veces de forma algorítmica, mientras que los estudiantes juegan un rol pasivo en el que las posibilidades de participación son limitadas. Jiménez y Pineda (2013) reafirman esta idea mencionando que las clases, durante mucho tiempo, se han visto influenciadas por tendencias en las que el conocimiento matemático se promueve como una verdad invariante y absoluta, donde el estudiante es receptor de la información brindada por el docente. Según estos autores, estas prácticas no promueven una comprensión de conceptos abstractos.

Como se mencionó con anterioridad, la participación es un aspecto fundamental en la clase y a su vez favorece el desarrollo de habilidades argumentativas en los estudiantes, promueven la construcción del aprendizaje y a su vez desarrollan valores requeridos por la sociedad. Aunque se ha visto que la clase de geometría es una vía para generar un ambiente propicio que fomenta el proceso de la comunicación, en la realidad estas clases no la promueven, dado que generalmente es el profesor quien domina el discurso y pocas veces deja que los estudiantes se apropien de las actividades participativas. Al no dejar espacio para las acciones discursivas, no es posible identificar la presencia de argumentos matemáticos por parte de los estudiantes, mucho menos considerar la circulación de ideas originales, por lo que dichas clases no propiciarían el fomento de habilidades críticas y reflexivas. Es por eso, que pretendemos mirar cómo son algunas clases de geometría, identificando con ello patrones que nos permitan reconocer la naturaleza de los intercambios comunicativos que tienen lugar en estos espacios, haciendo especial énfasis en la argumentación matemática y en su originalidad.

Bajo esta problemática y con el fin de identificar qué tan distantes están las clases de geometría con respecto a lo que debería ocurrir en estas, nos cuestionamos por ¿cuál es la naturaleza de los argumentos y las participaciones de los estudiantes en la clase de geometría en el nivel escolar? Para dar respuesta a esta pregunta, en este trabajo de grado pretendemos caracterizar algunas clases de geometría de dos colegios de Bogotá, enfocándonos en la naturaleza de las

participaciones, su originalidad en cuanto a su semántica y su sintaxis, y los tipos de argumentos que tienen presencia en estas participaciones.

### 1.1.1. OBJETIVOS

Consideramos los siguientes objetivos como orientadores para el estudio que en este documento se presenta.

#### *General*

Identificar posibles relaciones entre la naturaleza de los argumentos observados, la originalidad de las ideas de los estudiantes y la acciones que promueven estos elementos, al observar algunas clases de geometría.

#### *Específicos*

- Caracterizar las participaciones observadas a cargo de los estudiantes.
- Identificar los tipos de argumentos que se puedan reconocer en estas participaciones.
- Reconocer el tipo de participación según la originalidad en los argumentos presentados.
- Determinar los niveles de discurso inmersos en la clase de geometría, que promueven argumentos.

## 1.2. ANTECEDENTES

Para reconocer en dónde se ubica nuestro estudio en el campo investigativo, se realiza una revisión bibliográfica de lo que se ha realizado a la fecha sobre los aspectos involucrados en este documento, a saber: la argumentación y el discurso de los estudiantes en la clase de geometría. A continuación, se presentan algunas investigaciones realizadas sobre los aspectos mencionados, resaltando de cada estudio sus objetivos, metodología empleada y resultados obtenidos. El anterior ejercicio nos permitió identificar algunos marcos de referencia en los que se sustentan estas investigaciones, así como el acopio y tratamiento de la información. Vale la pena advertir que ninguna de las investigaciones revisadas es por completo similar al estudio que este documento reporta, dado que no contemplan al tiempo todos los asuntos que queremos analizar. Se clasificaron los antecedentes a partir de su contenido, agrupando por una parte, aquellas investigaciones que solo mencionaban la argumentación, por otra parte, se agrupaban aquellas investigaciones referentes al discurso, estas incluyen estudios basados en el tipo de participación según la originalidad o según los niveles de discurso, mientras que en el último apartado se recogen aquellas investigaciones que relacionan los dos aspectos anteriores.

### 1.2.1. ARGUMENTACIÓN

Harel y Sowder (1998) presentan un informe sobre su investigación enfocada en los esquemas de argumentación. Estos son derivados de una secuencia de experimentos de enseñanza en clases de matemáticas universitarias. Posteriormente, Harel y Sowder (2007), con base en estudios preseleccionados tanto a nivel escolar como universitario, examinan los tipos de argumentos, ya sean informales o aquellos que se consideran matemáticos, analizados a la luz de unos esquemas de argumentación establecidos por estos autores, de los cuales se hará mención en el marco teórico de este documento (Harel y Sowder, 1998). Ellos presentan además una perspectiva sobre cómo los factores matemáticos, histórico-epistemológicos, cognitivos, sociológicos e instructivos, influyen en la argumentación. Como resultado de su estudio los autores concluyen que en estudiantes de cualquier nivel escolar hay ausencia de esquemas de argumentación, en otros casos los argumentos se basan en las apariencias de los dibujos o imágenes mentales y, en su gran mayoría, a los estudiantes se les dificulta reconocer el papel de los contraejemplos suficientes para refutar una conjetura, así como la redacción de diferentes tipos de argumentos.

Por otra parte, Flores (2007) presenta un estudio donde reporta un experimento de enseñanza realizado con profesores de bachillerato, en el que se analizaron las prácticas argumentativas, los esquemas de argumentación a la luz de la teoría de Harel y Sowder (1998) y la influencia de la geometría dinámica en estos. Esta investigación tenía como fin resolver preguntas como: ¿cuáles son las características de las prácticas argumentativas de los profesores frente a un proceso de validación matemática? y ¿qué papel desempeña la herramienta tecnológica en el proceso de validación cuando el profesor tiene que utilizarla para realizar construcciones? Este experimento consistió en un curso de 48 horas impartido a 14 profesores de matemáticas de bachillerato tecnológico, en torno a actividades que requerían en su mayoría la resolución de problemas. Como resultado, este autor presenta una caracterización de las prácticas argumentativas de los profesores y su respectivo esquema de argumentación, que al compararlas describe una serie de conclusiones que relacionan el pensamiento crítico y /o deductivo, frente a las prácticas argumentativas de los profesores.

Posteriormente Flores (2010) realiza otro experimento de enseñanza con el objetivo de encontrar qué esquemas de argumentación utilizan los estudiantes de licenciatura y profesores en ejercicio y cómo el desarrollo de determinadas actividades conlleva al uso de esquemas analíticos. El experimento inició con una exposición por parte del instructor sobre los esquemas de argumentación, luego se plantearon cuatro actividades de construcción con geometría dinámica en las que debían hacer evidentes los esquemas de argumentación, para ser desarrolladas por pequeños grupos de trabajo. Como resultado determinaron que es posible promover el uso de esquemas analíticos y el uso de razonamiento deductivo con estudiantes de bachillerato, si se formulan actividades abiertas que impliquen la explicación de la veracidad de los resultados.

Marmolejo y Moreno (2011) afirman que se debe potenciar la argumentación para la producción de conjeturas y que es una actividad fundamental para la construcción del conocimiento matemático. Por ello estos autores deciden estudiar la relación entre argumentar y demostrar, aclarando que argumentar se entiende como el acto de convencer con base a la pertinencia de los razonamientos plausibles, mientras que demostrar es un proceso en el que se deducen

enunciados o proposiciones a partir de otras que le preceden, con base en reglas bien determinadas y aceptadas por la comunidad matemática. En la tesis, estos autores afirman que conjeturar es el proceso de inflexión entre argumentar y demostrar, de tal manera que la relación entre argumentar, conjeturar y demostrar, la consideran una unidad cognitiva. Esta unidad, según Boero (1999, citado en Marmolejo y Moreno, 2011, p. 509), transcurre en dos etapas, la primera corresponde a la producción de la conjetura mediante la exploración, discutir las conjeturas elaboradas y la sistematización de los enunciados construidos; la segunda etapa corresponde a la construcción de la prueba que se realiza por medio de exploraciones y el encadenamiento reiterado de argumentos (Boero, citado en Marmolejo y Moreno, 2011, p. 509). Para testar su hipótesis se analizan diálogos de una clase de geometría de un curso de bachillerato, donde a partir de un problema propuesto, los estudiantes exploraban y producían conjeturas que conllevaban a una propiedad geométrica. A partir del análisis de la clase se corrobora la hipótesis y se recomienda mirar la matemática como una actividad social y cultural, donde el conocimiento se construye por medio de la experimentación y argumentación de conjeturas.

Inglis y Mejía (2005) estudian cómo la argumentación matemática toma lugar importante en la forma en que los estudiantes califican sus conclusiones y se sienten persuadidos por argumentos matemáticos, basándose para ello en la teoría de Toulmin (1958). Se hace uso de todos los componentes de esta teoría, dado que para estos autores el estudio de la argumentación se ha restringido a analizar los argumentos como una actividad para eliminar toda duda en torno a una conjetura. La investigación se realizó con dos grupos diferentes, estudiantes de pregrado e investigadores en el área de matemáticas, a quienes se les propuso una tarea donde debían hacer uso de la internet y luego discutir sobre la fiabilidad de los resultados encontrados en este medio. Posteriormente se les solicitó leer el argumento de Gowers (2006, citado en Inglis y Mejía, 2005, p. 341) y, con base en él, manifestar hasta qué punto se sentían persuadidos, usando como referencia una escala Likert. Los autores concluyen que para estudiar las prácticas argumentativas se debe tener en cuenta todos los componentes de un argumento, en particular el calificativo modal. Además, se plantean 4 niveles para evaluar qué tan persuadida se siente una persona por un argumento determinado.

Martínez y Rigo (2017) realizan un microanálisis en el que relacionan el convencimiento que experimenta un estudiante sobre una respuesta y cómo adecuan esta respuesta para que tenga una aceptación sólida. Además, identifican los procesos de convencimiento que un estudiante llega a experimentar bajo un conocimiento bien establecido. Este estudio se llevó a cabo en un diplomado a distancia, que tenía como objetivo fortalecer la formación de asesores que enseñan álgebra en adultos. Para analizar las participaciones de los estudiantes se utilizó el Modelo de Toulmin, basado en una afirmación, datos, garantías, un soporte y calificadores. En este microanálisis se llega a la conclusión que en las interacciones se observa una gran cantidad de argumentos basados o no en razones matemáticas. Por otro lado, es posible reconocer distintos procesos que puede desarrollar un profesor a lo largo de una interacción, en los que el estudiante puede llegar a experimentar un convencimiento frente al conocimiento.

Finalmente, Valdivé (2013) estudia el papel de la definición en la demostración y analiza los esquemas de pruebas, según la teoría de Harel y Sowder (1998), en doctores en ciencias matemáticas. La investigación tenía dos propósitos, el primero es analizar los esquemas de prueba exhibidos por estos doctores y el segundo es describir las estrategias que implementan



cuando encaran una demostración. Este estudio fue cualitativo y de campo, se hicieron entrevistas clínicas a estos doctores y luego se les propuso demostrar dos enunciados de matemáticas avanzadas, posteriormente se procedió a estudiar sus esquemas de prueba al realizar esta actividad. Se evidencia que los sujetos involucrados poseen un esquema Analítico Axiomático, entre los resultados se destaca la importancia del dominio de las definiciones y el contexto al momento de realizar una demostración.

Los autores reportados con anterioridad resaltan la importancia de la argumentación en la construcción del conocimiento matemático y nos presentan dos enfoques distintos, uno en torno a la teoría de Harel y Sowder (1998) y otro con base en la teoría de Toulmin. Aquellos autores que adoptan la teoría de Harel y Sowder (1998) sirven como referente para realizar los análisis de las participaciones argumentadas de los estudiantes, de tal manera que muchas de las situaciones presentadas en sus investigaciones, para clasificar los argumentos según el esquema propuesto, nos sirvieron como ejemplo para realizar nuestro propio análisis. Por otro lado, se observa que la mayoría de los antecedentes sobre la argumentación, se sustentan en la teoría de Toulmin, asunto que amplió nuestro conocimiento frente esta temática y nos permitió decidir aquella que más se ajusta al objetivo de nuestro trabajo de grado.

Encontramos relevante, a partir de la lectura de los antecedentes, que el avance en grados escolares no necesariamente implica un esquema de argumentación más complejo, e incluso es posible que, en ocasiones, haya ausencia de esquemas de argumentación. Sin embargo, en el estudio de los esquemas de argumentación realizado con doctores, se evidenció que el esquema analítico axiomático predomina en sus prácticas demostrativas. Esto es coherente ya que han tenido una formación que les han permitido desarrollar un pensamiento deductivo robusto. Eso no significa que, en la escuela, los estudiantes no puedan presentar este esquema de argumentación, ya que pueden justificar través de un encadenamiento lógico con base en su sistema teórico acordado en el aula de clase. También fue posible reconocer que la teoría de Harel y Sowder (1998) puede ser modificada según lo requiera el estudio, de forma similar como procedió Flores, en el que amplió los esquemas de argumentación incluyendo el Fático.

### 1.2.2. DISCURSO

Al realizar nuestro estudio encontramos dos autores que enfocan su investigación en el discurso, sin tener en cuenta en ello aspectos como la argumentación, estos son Kaur (2013) y Chico (2018). Ambos autores realizan experimentos de enseñanza en el que clasifican el discurso según categorías o niveles, para analizar la interacción entre docente-estudiante y estudiante-estudiantes, en el aula de clase. A continuación, se presenta una breve descripción de cada investigación.

Kaur (2013), basado en otros autores, expone dos funciones del discurso, la primera con propósitos de aprendizaje de contenido y la segunda con fines sociales. En su trabajo se centra en la primera función, haciendo una investigación con el objetivo de dar respuesta a preguntas relacionadas con la frecuencia en que los estudiantes participan en la clase y las características de tales participaciones, además de analizar la orientación que les da el docente a estas intervenciones. El estudio fue realizado en Singapur, con tres profesores de matemáticas

reconocidos por su experiencia y porque evidencian buenos resultados académicos por parte de sus estudiantes. Los datos se registraron con tres cámaras, una de ellas se centraba en las acciones del maestro, otra en un grupo de estudiantes o grupo de enfoque, y la última realizaba una captura de toda la clase. A partir de esta información se hicieron transcripciones de 10 sesiones de las clases. Las transcripciones se dividieron en episodios según dos criterios: el primero es que los estudiantes tuvieran la oportunidad de participar en público y dialogar con los maestros, el segundo cuando los estudiantes iniciaban una charla pública. Estos fueron analizados de acuerdo con la adaptación que realizó Stein (2007, citado en Kaur, 2013, p. 67) para el nivel del discurso. Se encontró que el discurso de aprendizaje de contenido es dominado por el profesor, los estudiantes toman una postura de escucha activa y la mayor interacción entre el profesor y los estudiantes se relaciona con la evaluación del profesor sobre el progreso de los estudiantes.

Chico (2018) estudió el impacto de la interacción en la producción de discursos matemáticos en un grupo. Esta autora analizó las discusiones en un grupo en torno a la resolución de cinco problemas de generalización con estudiantes entre 15 y 16 años. En su estudio presenta tres segmentos transcritos de las discusiones, indagando sobre la naturaleza de la interacción entre estudiantes y cómo esta interviene en la producción de la lengua matemática. El estudio se realizó con estudiantes de grado noveno de Barcelona. Chico (2018) se apoya en las ideas de Goffman (1981, citado en Chico, 2018, p. 33) para establecer sus propios códigos de interacción (iniciar, compartir, solicitar, rechazar) y con base en estos códigos analiza los episodios. Los resultados señalan el efecto mediador de la interacción en los cambios de discurso sobre el pensamiento algebraico en el proceso de generalización.

Los autores mencionados con anterioridad aportan diversos ejemplos donde analizan las interacciones reportadas en varias transcripciones, para lo cual se dividen las clases en episodios teniendo en cuenta criterios determinados que, particularmente para nuestro trabajo de grado, ofrecen una manera para intervenir los datos registrados que podemos utilizar. Parte de los estudios realizados por estos autores nos aportan una idea sobre cómo generar nuestros propios códigos que se ajusten al análisis de las diferentes interacciones que se dan en el aula de clase. Notamos que es posible que haya niveles de discurso que no se ajusten a algún tipo de expresión que promueva el discurso, tal y como lo menciona Kaur (2013), sin embargo, es posible modificar estos niveles que se ajusten a las necesidades del trabajo que se está desarrollando.

### 1.2.3. DISCURSO Y ARGUMENTOS

Para finalizar la búsqueda literaria se encontraron dos documentos que se enfocan, tanto en los argumentos como en el discurso. Por un lado Roig, Llinares y Penalva (2010) realizaron una investigación con el objetivo de analizar la estructura argumentativa en una discusión online entre estudiantes para profesores, cuando analizan aspectos de la comunicación matemática. Este estudio se realizó con 29 estudiantes que cursaban la asignatura Didáctica de las Matemáticas donde se empleaba una metodología *b-learning*. El análisis de las actividades online se centró en el desarrollo de la capacidad de identificar características del discurso y la comunicación matemática, en particular el patrón del discurso y el patrón extractivo, también se hizo un análisis de los argumentos usando la teoría Toulmin, centrándose

en cómo los estudiantes establecen relaciones entre las conclusiones, datos y cómo se usaban las garantías. Se identificaron tres características en los argumentos generados por los estudiantes que nos permiten mostrar la relación entre la interacción, la negociación de los significados y la construcción del conocimiento.

Krummheuer (2007) presenta un artículo bajo el supuesto de que el aprendizaje de las matemáticas depende de la participación de los estudiantes y de sus procesos de argumentación. Estos procesos son analizados a la luz de la teoría de Toulmin y Goffman. Para este estudio el equipo de investigación analizó dos situaciones en una misma aula de primer grado. En la primera situación se registró un trabajo por grupos y en la segunda una socialización sobre la tarea trabajada. Como conclusión presentan un marco para aquellos aspectos de la formación docente que se enfocan en la comprensión y el desempeño, no solo como actividades que se ejecutan después de una lección, sino como actividades integrales que guían la misma lección.

Luego Krummheuer (2015) se basa en las mismas lecciones de la investigación anterior, para presentar dos métodos para analizar los procesos de interacción en clases de matemáticas: el análisis de la argumentación con base en la teoría de Toulmin y el análisis de la participación según la descomposición del papel del hablante que presenta Goffman. Cuando los investigadores analizaron las partes de la secuencia del video observaron que las formas para resolver los problemas se convierten en vías para explicar y justificar, además les surgió la pregunta sobre cuán inventivos e independientes eran las soluciones presentadas. Esto llevó a la búsqueda de procedimientos que permitan analizar la argumentación realizada en los participantes y clasificarlas según la originalidad de sus aportaciones en una serie de presentaciones. Como resultado se obtiene una comparación del análisis de dos escenas de clase, resaltando las diferencias entre los procesos de argumentación y cómo estas se relacionan con los grados de autonomía propuestos por Goffman.

La búsqueda de estas referencias bibliográficas nos permite ver que sí hay estudios que involucren los mismos asuntos que queremos analizar en nuestro estudio, por tanto, se convierten en antecedentes directos que ofrecen elementos útiles para corroborar o controvertir los resultados. De la revisión de estos antecedentes podemos decir que, aunque es importante mirar el tipo de argumentos también debemos considerar aspectos como la originalidad y el contenido de las ideas de los estudiantes. Puesto que en las clases podemos tener una gran cantidad de participaciones por parte de los estudiantes, pero sus aportes pueden apuntar a la misma idea, sin embargo, lo que se esperaría es encontrar diversos puntos de vista que enriquezcan los diálogos. Para hacer este tipo de análisis fue interesante mirar el estudio de Krummheuer (2015) ya que muestra un ejemplo de cómo hacer este análisis, de tal manera que a partir de una idea principal se analiza la originalidad en la semántica y en la sintaxis, que le permitió establecer los tipos de participaciones que se evidencian en el aula de clase.

Para finalizar este capítulo, resaltamos que la información recopilada a través de los antecedentes nos permitió analizar los argumentos, el discurso y una relación entre ambos aspectos. Toulmin es un autor relevante por su aporte al estudio de la argumentación, mientras que, a nivel de discurso, Goffman hizo aportes sobresalientes. La mayoría de los autores que mencionamos en los antecedentes se basan en las teorías de Toulmin y Goffman, además presentan experimentos de enseñanza que sirven como ejemplos para nuestro análisis, sin embargo,

luego de una búsqueda exhaustiva, no se encontraron autores que analicen los argumentos y el nivel de discurso, teniendo en cuenta que las ideas expresadas fuesen originales.

## 2. MARCO TEÓRICO

En este capítulo se presentan los referentes teóricos en los que se enmarca este documento, a saber: esquemas de argumentación, niveles de discurso y la autenticidad de las participaciones que se dan en el aula, particularmente en clase de geometría.

### 2.1. ESQUEMAS DE ARGUMENTACIÓN

Escogemos la propuesta de Harel y Sowder (1998) por la posibilidad que nos brinda para caracterizar los argumentos que se evidencian en las intervenciones de los estudiantes durante la clase. Flores (2007), haciendo eco a estos autores, define los esquemas de argumentación como todo aquello que utiliza una persona para convencer a otra y a sí misma sobre la verdad o falsedad de algún hecho matemático. De acuerdo a Flores (2007) esto puede darse en dos contextos: (i) el contexto científico, en el que la validación y la formalización de los resultados se basan en el encadenamiento lógico de premisas, que constituyen una demostración; y (ii) el contexto institucional, en el que la demostración es considerada como un proceso deductivo que permite la validación de conjeturas matemáticas en aras de desarrollar un pensamiento crítico y reflexivo en los estudiantes. Para nuestro estudio haremos énfasis en el contexto institucional, teniendo en cuenta que nuestra población de análisis es con estudiantes de bachillerato. Comprender la propuesta de Harel y Sowder conlleva a precisar el significado de algunos términos relacionados empleados por estos autores:

- *Conjetura vs hechos*. Mientras que la conjetura es una aserción en la que no hay certeza de la verdad, un hecho se presenta cuando se tiene certeza sobre la verdad de este.
- *Prueba*. Consiste en el proceso que realiza una persona para remover dudas sobre la aserción.
- *Averiguar vs persuadir*. Averiguar hace alusión a remover dudas personales, mientras que persuadir se entiende como el proceso a través del cual se remueven dudas de otros.

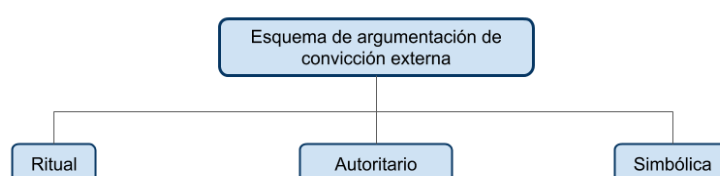
La propuesta de Harel y Sowder (1998) es resultado de un estudio psicológico, realizado con 128 estudiantes de carreras de matemáticas e ingeniería, durante clases de álgebra lineal, matemáticas discretas, geometría y análisis real, a través del cual se querían conocer las concepciones de argumentación de los estudiantes. El estudio realizado permitió a los autores describir 16 subcategorías, agrupadas en tres esquemas de argumentación (o simplemente esquemas) denominados: convicción externa, empíricos y analíticos. Estos esquemas están basados en numerosos resultados de análisis cualitativos y fueron verificados a partir de entrevistas a estudiantes de matemáticas de diferentes instituciones. Los autores no consideraron ninguna de estas categorías como casos aislados, sino que cada uno corresponde a un fenómeno evidenciado reiteradamente en varios experimentos empíricos de enseñanza.

Teniendo en cuenta que la población con la que se realiza nuestra investigación se enmarca en un ámbito escolar de bachillerato y que la población de la teoría de Harel y Sowder corresponde a estudiantes de carreras afines a las matemáticas, es posible que se encuentren argumentos que no se ajusten a los esquemas propuestos y posiblemente se vea la necesidad

de crear otros esquemas que se adapten mejor al contexto. Aprovechando que Harel y Sowder (1998) afirman que su teoría no es definitiva y por tanto está abierta a la ampliación que tenga lugar a partir de otras investigaciones.

Las subcategorías propuestas por Harel y Sowder (1998) representan un escenario cognitivo, es decir una habilidad intelectual en el desarrollo del estudiante. Estas subcategorías no son mutuamente excluyentes, pues es posible encontrar más de una en un conjunto de acciones realizadas por un mismo estudiante. A continuación, se presentan estas categorías, en consonancia por las ideas expuestas por Harel y Sowder (1998).

### 2.1.1. ESQUEMA DE ARGUMENTACIÓN DE CONVICCIÓN EXTERNA.



*Diagrama 1 Esquema de argumentación por convicción externa*

Esta categoría incluye esquemas sustentados en agentes externos. Se reconocen en esta categoría tres subcategorías:

- **Autoritario:** un esquema autoritario se caracteriza por sustentar declaraciones en agentes externos como libros o personas sobre los que su veracidad no se cuestiona. Considere como ejemplo el caso en el que un estudiante argumenta que todo triángulo equilátero es isósceles, porque así lo dijo el profesor en la clase pasada o esto está consignado en alguna página del libro.
- **Ritual:** un esquema ritual se caracteriza por validar declaraciones a partir del formato en el que estos se presenten. Es posible que este tipo de prácticas se originen por el énfasis que da el instructor para que los estudiantes presten atención en la forma de redacción más que en la comprensión de los contenidos. Un ejemplo de esto tiene lugar cuando en repetidas oportunidades el profesor presenta ejemplos de demostraciones geométricas con un formato a dos columnas y algún estudiante, al realizar su propia demostración, confía en que esta es válida ya que cumple con el formato en que se presenta la demostración, más no por su contenido.
- **Simbólico:** un esquema simbólico se caracteriza por sustentar declaraciones en el uso de símbolos, de los cuales no se tiene consciencia o no se tiene en cuenta su significado, por lo menos en un sentido amplio. Por ejemplo, un estudiante puede afirmar que  $M$  es punto medio del  $\overline{AB}$ , afirmando que  $\overline{AM} = \overline{MB}$  sin reconocer que la relación que está declarando se da entre conjuntos de puntos y no entre sus longitudes, como debería ser.

### 2.1.2. ESQUEMA DE ARGUMENTACIÓN EMPÍRICA

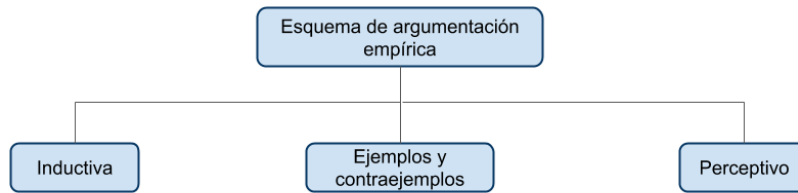


Diagrama 2 Esquema de argumentación empírica

Esta categoría incluye esquemas sustentados en la percepción del de una persona. Se reconocen en esta categoría tres subcategorías:

- Perceptual: un esquema perceptual se caracteriza por sustentar declaraciones en imágenes mentales prototípicas que no necesariamente exhiben un pensamiento deductivo. Un ejemplo de ese esquema ocurre cuando un estudiante ha visto repetidas veces un triángulo rectángulo como se muestra en la Imagen 1 y al presentarle un triángulo como el de la Imagen 2, este ya no es percibido como rectángulo, pues no se presenta en su forma canónica.

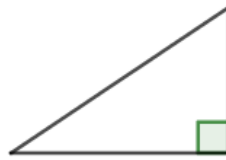


Imagen 1. Triángulo rectángulo en su representación canónica

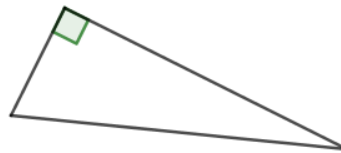


Imagen 2. Triángulo rectángulo en posición no canónica

- Inductivo: un esquema inductivo se caracteriza por involucrar algunos ejemplos como sustento de alguna declaración. Por ejemplo, un estudiante se puede apoyar en los rombos presentados en la Imagen 3 para llegar a establecer como generalidad que en todos los rombos sus diagonales se bisecan y son perpendiculares.

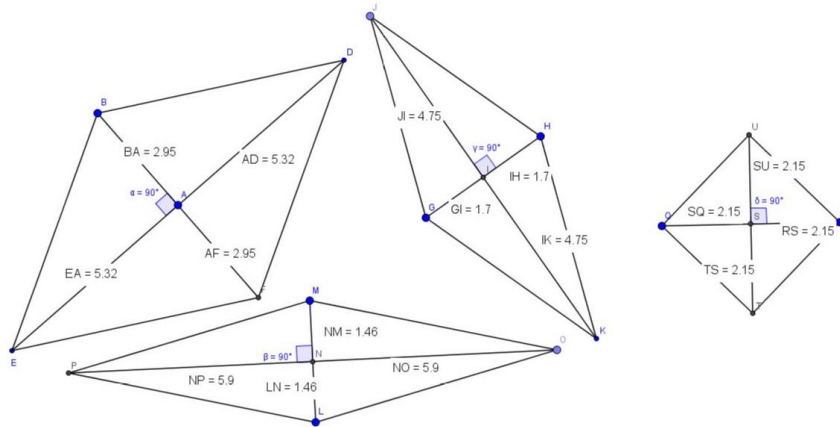


Imagen 3. Ejemplos de rombos para determinar propiedades

- Ejemplo y contraejemplo: un esquema de ejemplo y contraejemplo se caracteriza por sustentar la validez de una conjetura a partir de las inferencias que se hacen al observar múltiples casos donde se cumple una condición y casos donde no. Por ejemplo, considere en caso en que un profesor que muestra varios ejemplos donde la altura de un triángulo está contenida en el interior del este y enseguida les muestra casos donde las alturas de los triángulos no pertenecen a su interior. Los estudiantes evidencian que la altura de un triángulo puede ser un segmento que está en su interior, exterior o incluso ser uno de los lados del triángulo.

### 2.1.3. ESQUEMA DE ARGUMENTACIÓN ANALÍTICA

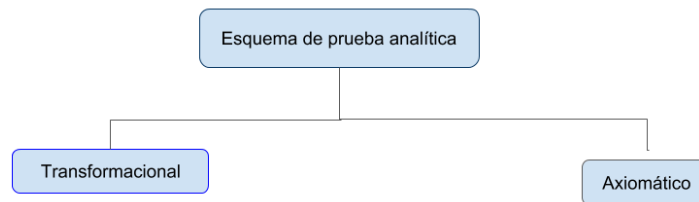


Diagrama 3 Esquema de argumentación analítica

La tercera y última categoría corresponde a los esquemas de argumentación analíticos. En esta categoría se encuentran los esquemas en los que las personas involucran deducciones lógicas para afirmar, refutar y validar conjeturas. Esta categoría contempla dos subcategorías:

- Transformacional: un esquema de argumentación transformacional es aquel en el que los objetos involucrados sufren transformaciones con un fin específico. Estas transformaciones incluyen una anticipación de los resultados que se obtendrán a través de dichas transformaciones. Como ejemplo puede considerarse un estudiante que afirma que los ángulos de un triángulo no pueden ser todos rectos, ya que al tener dos ángulos rectos no es posible que estos se intersequen en el tercer vértice, como se observa en la Imagen 4. Cabe aclarar que el estudiante en este caso no se apoya en un sistema teórico que defina paralelismo o perpendicularidad para dar su justificación.



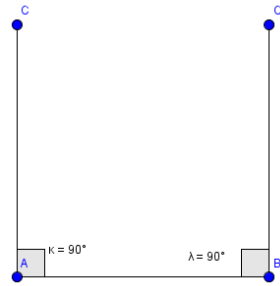


Imagen 4. Transformación realizada a un triángulo para probar el teorema 180

- Axiomático: un esquema de argumentación axiomático se caracteriza por presentar justificaciones apoyadas en una cadena lógica deductiva; es decir, los resultados son consecuencias de deducciones lógicas, donde se hace uso de un sistema axiomático de referencia establecido previamente. A modo de ejemplo, un estudiante debe construir un triángulo isósceles en geometría dinámica, de tal manera que bajo arrastre se debe garantizar invariabilidad en los atributos de este. El estudiante hace uso de una circunferencia, afirmando que, si toma dos puntos de la circunferencia y determina un triángulo a partir de estos puntos y su centro, este será isósceles, pues los segmentos determinados por el centro y cualquier punto de la circunferencia tendrán la misma longitud, según la definición de circunferencia (Imagen 5).

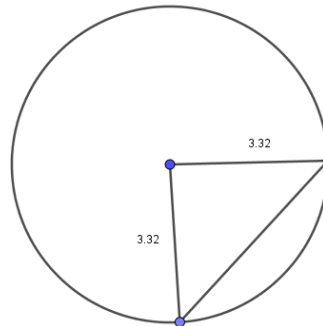


Imagen 5. Construcción robusta de triángulo isósceles

Es importante aclarar que muchos de los esquemas de argumentación presentados pueden tener rasgos de un esquema Empírico-Perceptual o Convicción Externa-Autoritario cuando se emplea software de geometría dinámica. Puesto que, esta herramienta permite que un individuo se sustente en las representaciones graficas que están manipulando o que sea el software en sí mismo la autoridad en la recae el sustento de la expresión. Sin embargo, es relevante mencionar las expresiones se clasifican en un determinado esquemas por el trasfondo de la intención que el individuo desee.

## 2.2. NIVELES DE DISCURSO EN UNA CLASE DE MATEMÁTICAS

Una de las intenciones de nuestro trabajo de grado, además de caracterizar los argumentos en las participaciones de los estudiantes, es la de analizar las interacciones entre profesor y estudiantes con el fin de determinar relaciones entre las acciones que promueven el discurso y su desarrollo, respecto a los tipos de argumentos que se presentan en este discurso. Con esta intención tomamos como referencia la propuesta de Kaur (2013), donde se exponen niveles de discurso que permiten evaluar y describir el proceso que atraviesa una clase cuando el discurso se introduce.

Consideramos el estudio del discurso como un aspecto significativo para el aprendizaje de las matemáticas. Anghileri (2006, citado por Kaur, 2013, p. 86), afirma que cuando los estudiantes se apropian de acciones como mostrar, contar o explicar ideas, mejoran su comprensión de contenidos matemáticos. Kaur (2013) también asegura que si el docente actúa como facilitador y el discurso se centra en el estudiante, se generan acciones significativas, donde los estudiantes podrán explicar sus razonamientos con justificaciones y los profesores podrán hacer preguntas inquisitivas que permitan la negociación de significados. La propuesta de Kaur (2013) recoge las ideas de Stein (2007), quien se apoya en Hufferd-Ackles, Fuson y Sherin (2004), para elaborar un marco de referencia en que presentan cuatro niveles de discurso y su respectiva su caracterización, como se observa en la Tabla 1. Aunque Kaur (2013) caracteriza el discurso, no hace explícita su definición; sin embargo de Stein (2013) se infiere que el discurso es una interacción pública entre docente y estudiantes.

Algunos estudios realizados por Kaur (2013) dejaron ver que algunas situaciones no se podían enmarcar en alguno de los niveles propuestos inicialmente por él. Particularmente se presentaron episodios que no hacían parte del nivel 1 pero tampoco alcanzaban el nivel 2, por lo que fue necesario crear un nivel adicional (1+). En la siguiente tabla de muestra la complementación de Kaur (2013) a la versión de Stain (2007), con la cual nosotros nos apoyaremos para nuestra investigación.

Niveles de discurso	Características de discurso
0	El profesor hace preguntas directas y valida las respuestas y/o realiza explicación sobre las ideas matemáticas en caso de considerarlo necesario. Los estudiantes toman un rol pasivo e intervienen dando respuestas sucintas a las preguntas que realiza el profesor.
1	El profesor hace preguntas directas a los estudiantes y el resto de ellos escuchan, además retoma las intervenciones de los estudiantes complementándolas. El profesor puede preguntarle a un estudiante con el fin de ayudarlo a otro la manera de proceder ante un problema.
1+	El profesor hace preguntas abiertas con la finalidad de fomentar el pensamiento de los estudiantes y les hace preguntas para que ellos comenten sobre los trabajos de los demás. Los estudiantes brindan respuestas cortas a las preguntas que se les hacen.
2	El profesor hace preguntas abiertas con la finalidad de fomentar el pensamiento de los estudiantes y les hace preguntas para que ellos comenten sobre los trabajos de los demás. Los estudiantes responden voluntariamente y proporcionan información adicional.
3	El profesor fomenta la discusión, animando a los estudiantes a hacer preguntas entre ellos para aclarar sus ideas y concepciones sobre algún tema. Las ideas del grupo de estudiantes se complementan. Los estudiantes explican su razonamiento y escuchan las intervenciones de los demás.

Tabla 1. Niveles de Discurso

Aunque Kaur (2013) afirma que el discurso es dominado por el profesor y que es decisión de él involucrar a los estudiantes en el diálogo, aspecto reflejado en la naturaleza de su propuesta, consideramos que el discurso también puede ser propiciado por algún estudiante, lo que nos lleva a considerar una extensión de la propuesta original de Kaur.

### 2.3. AUTENTICIDAD EN LA PARTICIPACIÓN

Para hacer un análisis de la participación de los estudiantes tomamos la teoría de Goffman (1981, citado en Götz Krummheuer, 2015, p. 7) quien hace una clasificación de las declaraciones, según la originalidad y responsabilidad de quien las presente. Nos acogemos a la definición que presenta Krummheuer (2015) de participación, vista como aquellas expresiones de los hablantes. Goffman descompone una expresión a partir de las siguientes funciones:

- Sintaxis: hace referencia a la forma en que se combinan y se ordenan las palabras y expresiones dentro del discurso, dicho de otro modo, función de formulación.
- Semántica: tienen que ver con la contribución relacionada con el contenido, dicho de otro modo, función del contenido.

A continuación, se presentan las categorías que define este autor en su estudio:

- Autor: en este caso una persona es completamente responsable de la sintaxis y semántica de su participación, es decir, la persona expresa su propia idea con sus propias palabras. Por ejemplo, considere el caso de un estudiante que afirma, a partir de la exploración con geometría dinámica sin haber visto la definición, que un paralelogramo tiene dos pares de lados congruentes. Bajo esta afirmación, se considera que el estudiante es original en su idea, ya que no se ve permeado por alguna definición o comentario previo, además se observa que usa sus palabras, ya que, al decir dos pares de lados, no está aclarando si adyacentes u opuestos, lo que hace evidente su falta de precisión al momento de dar su declaración.
- Trasmisor: se da cuando la persona no es responsable ni de la sintaxis ni de la semántica de su expresión, es decir, que en su participación no hay originalidad en las ideas, ni en las palabras que usa. Un ejemplo de esta función es el caso en el que un estudiante, en un debate, reafirma la idea de algún compañero repitiendo su argumento, tan cual como lo escuchó.
- “Fantasma”: es el caso en que una persona es responsable de la semántica, pero no de la sintaxis de la expresión, es decir, si un estudiante formula una idea propia con apoyo de una expresión conformada a partir de participaciones anteriores. Considere, el caso en que un estudiante que luego de haber escuchado las características de un triángulo equilátero, hace una exploración de una construcción con geometría dinámica y observa que hay un polígono de tres lados congruentes, con esta información el estudiante afirma que el polígono es un triángulo equilátero. Se observa que la idea es del estudiante en tanto que hizo un reconocimiento de los atributos de la figura y con base en esta información la caracterizó, pero utilizó las palabras que otra persona para afirmar que es un triángulo equilátero.

- Portavoz: se da cuando una persona parafrasea alguna idea de otra persona, por tanto, no es responsable de la semántica, pero sí de la sintaxis de la participación. Por ejemplo, considere el caso de un estudiante que comenta que los cuadrados tienen todos los lados congruentes, después de haber escuchado la afirmación de otro estudiante quien afirma que los cuadrados son rectángulos en el que sus lados son igual longitud. El portavoz es el segundo estudiante ya que toma las ideas del primer estudiante y las parafrasea.

De manera sintética, la siguiente tabla agrupa las ideas presentadas hasta ahora.

	<b>Responsabilidad del contenido de una declaración</b>	<b>Responsabilidad de la formulación de una declaración</b>
Autor	+	+
Trasmisor	-	-
“Fantasma”	+	-
Portavoz	-	+

*Tabla 2. Clasificación de las participaciones según Goffman (1981)*

### 3. METODOLOGÍA

A continuación, se hace un recuento de las acciones llevadas a cabo para realizar este documento y se comentan las técnicas utilizadas, tanto para la recopilación de los referentes teórico, así como para la obtención de los datos, comentando cómo fue su tratamiento para realizar el respectivo análisis.

#### 3.1. TIPO DE ESTUDIO

Como estrategia investigativa tomamos los datos del proyecto *Voces de los Estudiantes en la Clase de Geometría*, llevado a cabo por el grupo de investigación Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría ( $\mathcal{A} \cdot \mathcal{G}$ ) durante el año 2018. Ellos describieron su estudio a partir de un enfoque fenomenológico, de tal manera que era posible interpretar, juzgar e interpretar las voces de los estudiantes en las clases de geometría. De la misma manera nosotras en este estudio pretendemos analizar las participaciones de los estudiantes que presenten esquemas de argumentación auténticos y aquellas expresiones que promueven este tipo de participaciones.

En el proyecto *Voces de los Estudiantes en la Clase de Geometría*, la estrategia metodológica usada fue *classroom based research* (Kelly y Lesh (2000)). En esta estrategia, los investigadores usan situaciones de clases reales con el fin de buscar patrones, sin que estas clases se vean afectadas por la presencia de estos investigadores, intentando en lo posible que los resultados no se vean permeados por la misma investigación. Con base en lo anterior se puede considerar que nuestra investigación utiliza una metodología similar ya que, al usar las mismas grabaciones para nuestra investigación, se transmite la estrategia investigativa.

#### 3.2. REVISIÓN DOCUMENTAL

En este apartado se presenta la metodología llevada a cabo para la recopilación de antecedentes y para la adaptación del marco teórico que se utilizó para este trabajo de grado. Además, se especifica el contexto sobre el cual se basó esta la investigación.

##### 3.2.1. RECOPIACIÓN DE ANTECEDENTES.

Para la búsqueda de antecedentes investigativos consultamos documentos en las siguientes bases de datos: Servicios del Sistema nacional de Biblioteca (SINAB), Sistema de Investigación de la Universidad Nacional (SIUN), Funes, Scielo y Google Académico. Se utilizaron

palabras claves como argumentación, tipos de discurso y participaciones; pero dada la variedad de documentos que aparecen en torno a otras áreas no propias de las matemáticas, se filtró la información incluyendo palabras relacionadas con la matemática y geometría. Cuando Bases de datos como Funes no permitía la visualización de algunos documentos, se realizó la solicitud vía correo electrónico.

Posteriormente, luego de una lectura de los documentos, se organizó la información en tablas, donde se describía el objetivo principal de la investigación y un pequeño resumen de los temas que trataban y luego de ello se discutió cuáles eran realmente los antecedentes de nuestro estudio. Después de este filtro se creó una nueva tabla en donde se describía brevemente la investigación o estudio, el resumen de los aspectos metodológicos, los principales resultados del estudio y cuál era el aporte de estos a nuestro trabajo de grado. Esto con el fin de organizar la información y facilitar la escritura de los antecedentes reportados en uno de los capítulos anteriores. Toda la documentación fue registrada a través del gestor bibliográfico Mendeley, con el fin de facilitar la edición de citas y referencias, acopio de información, revisión de comentarios, entre otros.

### 3.2.2. RECOPIACIÓN DEL MARCO TEÓRICO

Para la búsqueda de documentación y posterior elaboración del marco conceptual contamos con la ayuda de nuestro asesor, quien nos sugirió algunos documentos que habían sido previamente consultados en el marco del proyecto *Voces de los Estudiantes en la Clase de Geometría*, al cual se adscribe este trabajo de grado. Los documentos fueron leídos exhaustivamente y se realizaron las respectivas traducciones de aquellos que se encontraban en inglés. Particularmente, para estudiar los argumentos de los estudiantes, se revisó la propuesta de Toulmin (2007), Marmolejo (2011) y Harel y Sowder (1998), pero teniendo en cuenta que Harel y Sowder (1998) se ajustaba más a la clasificación que buscamos, lo tomamos como documento base, pues nos permite clasificar las participaciones argumentadas de una forma holística, para posteriormente establecer una correspondencia entre el tipo de argumento y el momento de la clase en el que este se presente. También se leyeron documentos referentes al discurso, particularmente sobre aquellos que permiten tipificar el las participaciones y la originalidad de estas, por lo que se tomó como referente la propuesta de Kaur (2013) para el primer aspecto y la de Krummheuer (2007) para el segundo. De la misma manera que con los antecedentes investigativos, la información se subió al gestor bibliográfico Mendeley.

### 3.2.3. CONTEXTO

Este trabajo de grado se enmarca en el proyecto *Voces de los estudiantes en la clase de geometría* que adelantó el grupo de investigación Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría ( $\mathcal{A} \cdot \mathcal{G}$ ) durante el año 2018. Este proyecto tenía como objetivo caracterizar patrones discursivos en la clase de geometría, con énfasis en la explicación y la argumentación, y establecer la posible contribución de la voz de los estudiantes en la construcción colectiva de conocimiento. Para la toma de datos, el equipo realizó grabaciones de varias clases de geometría en

distintas instituciones educativas, con el fin de reconstruir las participaciones de los estudiantes y hacer una posible interpretación sobre contenido matemático presente en la discusión, además de rastrear el efecto que estas participaciones pueden tener en las ideas de otros estudiantes y el aporte que pueden hacer en la producción de conocimiento. Dado el carácter del proyecto de investigación y su relación con el estudio del discurso en el aprendizaje de las matemáticas, en especial de la geometría, se tomaron las transcripciones realizadas por el equipo y parte del marco referencial, ya que presentan un enfoque similar al de nuestro trabajo de grado.

Se involucraron dos colegios de Bogotá, el Instituto Pedagógico Nacional (IPN) y el Colegio Calasanz y la Institución Educativa Municipal Silveria Espinosa de Rendón (IEMSER) ubicada en Facatativá. En las tres instituciones se reflejan contextos distintos, lo que permite obtener una variedad de datos que proveen la información necesaria para hacer un análisis

En el colegio Calasanz, por ejemplo, se observó que la clase era muy participativa, ya que la metodología llevada a cabo por el profesor consistía en proponer una actividad sobre la cual se pudiera discutir, para ello planteaba inicialmente unas preguntas sobre el tema propuesto y luego socializaba las respuestas. Pocas veces el profesor pedía a los estudiantes comentar sobre la intervención de alguno de sus compañeros, sin embargo ellos, en su mayoría, participaban sin que se les diera la palabra. En las clases que se analizaron se observó una tendencia del profesor a proyectar imágenes de objetos geométricos y con base en estos en estas formular la actividad. No se evidenció cultura del silencio, es decir, un ambiente de disciplina que permite escuchar al otro, sin embargo, se pueden observar algunos estudiantes que sobresalían entre sus compañeros por su alta participación.

En cuanto al IPN, se tuvo la oportunidad de grabar en tres grados diferentes: sexto, octavo y noveno. En cuanto a los dos primeros, las clases eran gestionadas por un mismo profesor, por tanto, el ambiente escolar es muy parecido en ambos contextos. El uso de una sala especial alejada de los demás salones favoreció la toma de registros por el poco ruido externo que se presentó durante las clases. En dicha sala se tenían tabletas que se conectaban a una pantalla, de tal manera que era posible proyectar lo realizado en las tabletas a los demás miembros del salón. Así como en el Colegio Calasanz, durante la clase no se evidenció cultura del silencio, el profesor hacía esfuerzos por involucrar la mayoría estudiantes en las distintas discusiones que surgían, sin embargo, es posible distinguir algunos estudiantes por ser más participativos que los demás. La metodología llevada a cabo por el profesor consistía en proponer una tarea y los estudiantes, luego de trabajar, hacían aportes y discutían sobre ella, aunque por algunas participaciones era posible que se desviara el objetivo de la tarea e incluso de la misma clase.

La clase de noveno del IPN era gestionada por otro profesor, la metodología era distinta. Solo fue posible realizar la grabación de una clase y no fue posible observar alguna socialización sobre los trabajos, además los espacios de diálogo entre el profesor y los estudiantes era mínimo. Por esta razón no se tendrán la cuenta las transcripciones de este curso, ya que a diferencia de los cursos anteriores o del Colegio Calasanz, no se aporta información suficiente que permita hacer un análisis amplio. En cuanto al IEMSER, se grabaron las clases en un grado quinto y dado que nuestro estudio se enfocaba en el nivel de bachillerato, tampoco se tuvieron en cuenta estas transcripciones para hacer el análisis.

### 3.3. ACOPIO DE DATOS

Para el recopilar los datos se utilizaron las transcripciones de las clases de geometría tomadas por el grupo de investigación durante el primer semestre del año 2018. En total se contó con trece transcripciones registradas de clases de geometría en los grados mencionados. Para estos registros se contó con tres cámaras de video, una que grababa al profesor, las otras dos graban desde dos perspectivas el curso en general y en ocasiones se hacía un acercamiento hacia algunos estudiantes para captar momentos específicos de la clase.

La metodología que debían utilizar los profesores para la clase era la que normalmente se llevaba a cabo, por lo que no se solicitaron planeaciones especiales que pudieran interferir con el trato que comúnmente da el profesor a las participaciones de los estudiantes. La intención era realizar las grabaciones de tantas clases como fuese necesario para obtener el desarrollo de toda una temática, por lo que por curso la cantidad de grabaciones podían variar, dependiendo del tiempo que el docente destinara para dar tratamiento a los mismos.

### 3.4. ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN

Para realizar el análisis de la información, se tomaron las transcripciones de cuatro clases, dos de un curso de grado sexto del IPN y dos de un curso de grado séptimo del Calasanz. El criterio para elegir estas clases fue su similitud, en tanto que en ambos casos los profesores en algún momento de la clase realizaban un repaso, proponían una tarea para ser trabajada de forma individual o en pequeños grupos y luego se hacía una socialización de dicha actividad. En los dos colegios los profesores hacían el repaso a partir de preguntas que los estudiantes debían responder y la información se institucionalizaba a partir de la socialización de algún tema que haya surgido en la clase o que el profesor haya propuesto.

Luego de la selección de las clases se procedió a fragmentarlas por episodios, cada episodio se obtenía de acuerdo con el tema en particular que se estuviese tratando, ya sean subtemas abordados por el profesor para desarrollar el contenido principal de la clase o temas alternos que surgieran en el transcurso de la clase. Además, fue posible identificar si estos episodios hacían parte de un repaso, un trabajo individual o una socialización.

Después de la fragmentación por episodios se dio paso al análisis de cada una de las expresiones. Inicialmente se identificaron aquellas en las que se presentaron esquemas de argumentación, teniendo en cuenta en este punto la propuesta de Harel y Sowder (1998). Posteriormente se dio paso al análisis de las expresiones según el nivel de discurso propuesto por Kaur (2013) y finalmente se clasificaron las expresiones según la originalidad en la sintaxis y en la semántica, con lo que se concluyó si la expresión venía de un *autor*, un *portavoz*, un *transmisor* o un *fantasma*, acorde a la propuesta de Goffman (1981, citado en Götz Krummheuer, 2015, p. 7). Sin embargo, al realizar el análisis de los esquemas de argumentación, nos encontramos con esquemas que no eran posible clasificarlos en ninguna de las categorías formuladas por Harel y Sowder (1998), con lo que nos remitimos a Flores (2007) quien propuso, además de los esquemas anteriores, el Esquema Fáctico, que se ajustaba a los esquemas que nos faltaba por clasificar. A continuación, se presenta dicha definición:



- Esquema Fáctico: Se presenta cuando se hace un recuento de lo que se hizo o se repiten los hechos evidentes de una situación a manera de explicación o justificación de algún resultado. A menudo la persona expone una serie de pasos como si fueran un algoritmo (Flores, 2007). Por ejemplo, considere el caso de un estudiante que construye una circunferencia y ubica tres puntos, uno en el centro y los otros dos en la circunferencia, posteriormente traza los segmentos que corresponden a los lados de un triángulo, con base en este procedimiento el estudiante afirma que el triángulo resultante es isósceles.

Además de este esquema, también vimos necesario formular un nuevo nivel de discurso, puesto que algunas de las interacciones analizadas vinculaban características de dos niveles de discurso distintos, en particular tenía características del nivel 3 y del nivel 2 simultáneamente. Con lo que planteamos el nivel de discurso 2+ bajo la siguiente definición:

- 2+: Se da cuando una persona fomenta la discusión, animando a los miembros de la clase a hacer preguntas entre ellos para aclarar sus ideas y concepciones sobre algún tema. Se responde voluntariamente y se proporciona información adicional, sin que haya una discusión entre ellos.

Con esta información procedimos la formulación de cuatro preguntas claves que nos sirvieron como foco para realizar el análisis de los datos. Con la primera pregunta se analizaba en total cuántos y de qué tipo eran los esquemas de argumentación presentados en toda la clase, con la segunda pregunta separábamos aquellos esquemas que eran originales en su semántica, por ser de *autores* y *fantasmas*, de los que no por ser *transmisores* y *portavoz*, con la tercera pregunta determinábamos el nivel de discurso que detonaba dichos argumentos y, por último, con la cuarta pregunta, relacionábamos los resultados presentados en ambos colegios. Toda esta información se presentó a través de gráficas estadísticas, lo que permitiría visualizar mejor los resultados para su análisis. A partir de esto se presentaron las respectivas conclusiones.

Se decidió omitir los episodios, en ambos colegios, donde los estudiantes realizaban un trabajo por grupo, dado que no fue posible grabar todos los grupos de trabajo durante este momento de la clase; en el caso de IPN se obtuvo la transcripción de pequeños diálogos en los que la investigadora pasaba a realizar preguntas puntuales frente a la actividad que los estudiantes estaban desarrollando en cada uno de los grupos, mientras que en el Colegio Calasanz se tomó el registro continuo de un solo grupo. De tal manera que, para hacer la comparación de ambos colegios, no sería conveniente analizar solo la del Colegio Calasanz y omitir la del IPN, por lo que se pierde objetividad.

### 3.5. CONVENCIONES

Para organizar mejor la información se decidió emplear las siguientes convenciones que permiten presentar una clasificación de una forma más consistente y así facilitar la lectura de la investigación. Es decir que para los esquemas de argumentación de ahora en adelante se manejarán las siguientes etiquetas:

Esquema de argumentación	Etiqueta
--------------------------	----------

Convicción Externa-Autoritario	CE-A
Convicción Externa-Ritual	CE-A
Convicción Externa-Simbólico	CE-A
Empírico-Perceptual	E-P
Empírico-Inductivo	E-I
Empírico- Ejemplo y contraejemplo	E-EYC
Empírico- Fáctico	E-F
Analítico- Transformacional	A-T
Analítico- Axiomático	A-A

Tabla 3. Convenciones de los esquemas de argumentación

En cuanto a los niveles de discurso se utilizará la siguiente notación:

Niveles de discurso	Etiqueta
<b>0:</b> Se hace preguntas directas y se valida las respuestas y/o realiza explicación sobre las ideas matemáticas en caso de considerarlo necesario. Los demás integrantes de la clase toman un rol pasivo e intervienen dando respuestas sucintas a las preguntas realizadas.	N0
<b>1:</b> Se hacen preguntas directas, el resto de los integrantes de la clase escuchan, además se retoman las intervenciones de los demás y así complementarlas.	N1
<b>1+:</b> Se hacen preguntas abiertas con la finalidad de fomentar el pensamiento de los miembros de la clase, también se hacen preguntas con la finalidad de comentar sobre el trabajo de los demás. Se brindan respuestas cortas a las preguntas que se plantean.	N1+
<b>2:</b> Se hacen preguntas abiertas con la finalidad de fomentar el pensamiento de los miembros de la clase, también se hacen preguntas con la finalidad de comentar sobre los trabajos de los demás. Se responde voluntariamente y se proporciona información adicional.	N2
<b>2+:</b> Se fomenta la discusión, animando a los miembros de la clase a hacer preguntas entre ellos para aclarar sus ideas y concepciones sobre algún tema. Se responde voluntariamente y se proporciona información adicional, sin que haya una discusión entre ellos.	N2+
<b>3:</b> Se fomenta la discusión, animando a los miembros de la clase a hacer preguntas entre ellos para aclarar sus ideas y concepciones sobre algún tema. Las ideas del grupo se complementan. Se explican los razonamientos y escuchan las intervenciones de los demás.	N3

Tabla 4. Convenciones de los Niveles de Discurso

Para la clasificación de las expresiones según la autenticidad no se manejarán etiquetas, sin embargo, al hacer referencia a estas categorías las palabras serán presentadas en letra cursiva. También se consideró pertinente manejar etiquetas para los momentos de la clase, de tal manera que al presentar la información en las gráficas estadísticas fuese posible determinar en qué momento de la clase surgía determinado tipo de esquemas de argumentación.

Momento de la clase	Etiqueta
Repaso de los temas vistos con anterioridad	(R)
Socialización de las situaciones propuestos	(S)
Realización de tarea individual	(TI)
Espacio para desarrollar la tarea en pequeños grupos	(TG)

Tabla 5. Convenciones de los momentos de la clase

Además de las etiquetas, para realizar las transcripciones fue necesario describir cuando, en una expresión de un estudiante, se presentaban silencios más o menos pausados o había alguna interrupción. Por lo que, en el análisis, al leer la expresión del estudiante será posible observar convenciones como: (...) o (... ...) o (... ...), para representar dichos silencios

o () para hacer notas aclaratorias que ayuden a dar una idea del contexto en el que está ocurriendo una frase textual.

## 4. ANÁLISIS

Para caracterizar ambas clases del IPN, notamos que las clases orientadas por el profesor constan de tres momentos: el primero se da al iniciar la clase en la que hace un repaso de algunos temas vistos con anterioridad, a partir de las participaciones de los estudiantes. Este repaso se puede distinguir en la primera clase en los episodios 1 y 2, mientras que en la segunda clase se distingue este momento en los episodios 1, 2 y 3. El segundo momento se da cuando el profesor plantea una tarea que debe ser desarrollada en pequeños grupos y deja un espacio para que los estudiantes intercambien ideas entre ellos. Este espacio de la clase se encuentra en el episodio 3 para la clase 1 y en el episodio 4 y 8 para la clase 2. Finalmente se plantea un espacio para la socialización de la actividad o para la discusión de ideas alternas que puedan surgir a partir de la socialización. Este momento se la clase se puede observar en el episodio 4, 5, 6, 7 y 8, de la clase 1 y en el episodio 5, 6 y 7 en la clase 2. Las Tabla s 6 y 7 presentan la estructura de de las clases de IPN, tomando en cuanta la descripción previa:

Clase 1		
Episodio	Etiqueta	Momento de la clase
EP 1 y EP 2	R	Repaso de temas vistos con anterioridad
EP 3	TG	Espacio para desarrollar la tarea en pequeños grupos
EP 4, EP 5, EP 6, EP 7, EP 8	S	Socialización de la actividad

*Tabla 6. Episodios de la clase 1 del IPN*

Clase 2		
Episodio	Etiqueta	Momento de la clase
EP 1, EP 2 y EP 3	R	Repaso de temas vistos con anterioridad
EP 4 y EP 8	TG	Espacio para desarrollar la tarea en pequeños grupos
EP 5, EP 6 y EP 7	S	Socialización de la actividad

*Tabla 7. Episodios de la clase 2 del IPN*

En cuanto al Calasanz, la caracterización en la clase 1 consiste de 7 episodios. En el episodio 1 el profesor hace un repaso de la relación geométrica que se ha venido estudiando a lo largo de clases pasadas. En los episodios 2, 3, 4 y 5, el profesor propone una tarea para que sea discutido entre todos los miembros de salón. Por último, en el episodio 6 y 7, el profesor realiza la institucionalización de los objetos que han aparecido a lo largo de la discusión anterior, por medio de un ejemplo y con apoyo de las participaciones de los estudiantes. En cuanto a la clase 2. En el episodio 1 y 2 el profesor propone un trabajo para solucionar una tarea, inicialmente se hace de forma individual. En los episodios 3, 4 y 5, se socializan las respuestas en grupos pequeños de trabajo, en particular se hizo un seguimiento a uno de los grupos. Y finalmente en el episodio 6, se hace la discusión de las respuestas de cada grupo ante todo los miembros del salón, este espacio también se utiliza para resolver algunas inquietudes de dos estudiantes. Las Tablas 8 y 9 presentan la estructura de las clases del Colegio Calasanz, tomando en cuanta la descripción previa:

Clase 1
---------

Episodio	Etiqueta	Momento de la clase
EP 1	R	Repaso de temas vistos con anterioridad
EP 2, EP 3, EP 4, EP 5, EP 6 y EP 7	S	Socialización de las situaciones propuestos

Tabla 8. Episodios de la clase 1 del Calasanz

Clase 2		
Episodio	Etiqueta	Momento de la clase
EP 1 y EP 2	TI	Realización de tarea individual
EP 3, EP 4 y EP 5	TG	Espacio para desarrollar la tarea en pequeños grupos
EP 6	S	Socialización de la tarea

Tabla 9. Episodios de la clase 2 del Calasanz

Por motivos de extensión, el análisis completo de los resultados se presentará en la sección de anexos, sin embargo, se mostrará un ejemplo de un episodio de cada una de las clases con lo que pretendemos ilustrar el análisis realizado.

#### 4.1. INSTITUTO PEDAGÓGICO NACIONAL

En el IPN las clases son caracterizadas por abordar los contenidos a partir de la comunicación entre todos los miembros del salón, por lo que, en general, las clases fueron muy participativas. En profesor caracterizaba sus clases por realizar un repaso de los temas vistos en clases anteriores, con base en ello formulaba unos talleres que implicaban el uso de dichos contenidos y finalmente una socialización en la que se discutían los resultados de la actividad. A continuación, se presentan dos fragmentos de dos clases distintas, llevadas a cabo en el mismo curso y con el mismo profesor, de tal manera que son analizadas a la luz de los referentes teóricos mencionado con anterioridad.

##### 4.1.1. CLASE: 10 DE MAYO DE 2018

Durante esta clase los estudiantes hacen un análisis sobre las propiedades de los polígonos haciendo uso del software GeoGebra instalado en Tabletas digitales. Es la primera vez que los estudiantes utilizan esta aplicación, por ende, una parte de la clase es destinada para la explicación del uso de las tabletas y del software.

En la clase anterior se había tratado la definición de polígono, que fue construida a partir de las características que los estudiantes determinaban en un conjunto de polígonos y uno de no polígonos. Al iniciar esta clase el profesor hace un repaso de la definición que los estudiantes dieron sobre polígono y posterior a esto plantea una tarea en la que debían construir una figura que cumpliera ciertas condiciones (Imagen 6). Aunque en ningún momento se dijo que las condiciones propuestas en la tarea llevaban a la obtención de un polígono, algunos estudiantes intuyeron esto. De esta manera surge una discusión en la que los estudiantes intentaban construir una figura que cumpliera las condiciones dadas en la tarea y que no fuera polígono. Dichas condiciones son presentadas a continuación:

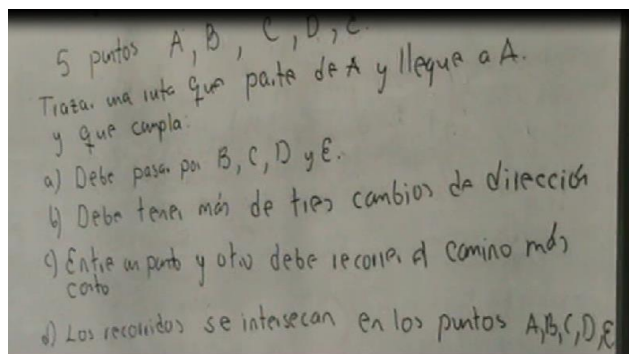


Imagen 6. Condiciones para la construcción de una figura

### Episodio 5

En este episodio, luego de que Gabriela mencionara que la distancia más corta entre dos puntos es una recta, Ariadna afirmó que la figura que se pedía en la tarea no podía contener curvas, no por la condición dada sino porque no era un polígono, como si estuviera infiriendo que las condiciones presentadas en la tarea sugirieran la existencia de uno. Según la respuesta de Ariadna “no porque si fuera una línea curva no sería polígono”, presentada en el episodio anterior, el profesor inicia este episodio cuestionando:

¿Y necesitamos que sea polígono?

Con esta expresión se tiene una pregunta abierta en la que se tienen varias respuestas monosilábicas, algunos estudiantes responden sí y otros no, solo Gabriela y Tomás proporcionan información adicional, teniendo así un N2 en el discurso.

Gabriela: Ahí no dice. (Señala el tablero en donde están consignadas las reglas)

Tomás: No dice que sea polígono pero esas reglas nos llevan a eso.

La expresión de Tomás presenta un esquema de argumentación, sustentado en que las reglas propuestas en la tarea conducen a que la figura construida sea un polígono, por lo que se evidencia un Esquema de Convicción Externa Autoritario, por otro lado Gabriela no presenta esquema de argumentación. Sin embargo, estos comentarios llevan al profesor a plantear una pregunta directa en la implícitamente se pide información adicional sobre las ideas presentadas:

¿Sí? ¿Lo obligan?

Gabriela presenta como respuesta un esquema de argumentación en el que afirma que las reglas formuladas en la tarea conducen a que la figura sea un polígono, ya que desde su punto de vista puntualmente la condición que entre dos puntos haya la mínima distancia, formulada en la actividad, también es una condición para que la figura sea polígono, así que es de tipo CE-A, basada en la autoridad de la tarea, además Gabriela es autora de la idea por puntualizar en esta condición. Por la pregunta formulada y por la respuesta de Gabriela, se puede determinar que hay un N2 en el discurso.

Gabriela: Profe, se supone que entre un punto y otro debe recorrer el camino más corto significa que las líneas deben ser rectas; es decir que, desde mi punto de vista, yo entiendo eso lo hace un polígono, de esa manera.

El profesor se dirige a Alan y le pregunta si está de acuerdo con Gabriela, a lo que Alan responde afirmativamente sin profundizar en la idea. De esta manera, se pasa a un N1 en el discurso. El profesor pide a Alan argumentar su afirmación, pero el estudiante comenta que no sabe, por lo que a pesar de que la pregunta es abierta, la respuesta no proporciona información adicional, pasando a un N1+ en el discurso. Para aclarar esta pregunta el profesor plantea la siguiente tarea:

Por acá hay una discusión (...). Será que alguien me puede dibujar, en su Tablet, ahora sí, a ver, si alguien, una figura que cumpla esas condiciones, pero que no sea polígono.

Aunque no hay explícitamente una pregunta, el profesor sí sugiere profundizar sobre la posibilidad de la existencia de una figura de este tipo. Aunque la expresión sugiere una pregunta abierta, el estudiante sin presentar un argumento afirma que no se puede, por lo que se tiene un N1+ en el discurso. El profesor pide a los estudiantes tratar de encontrar este tipo de figura, a lo que Tomás responde:

Sí, si hay, es el triángulo ese.

La idea anterior es de la *autoría* de Tomás, ya que nadie había mencionado algún ejemplo hasta el momento. Los estudiantes empiezan a trabajar en las tabletas intentando obtener este tipo de figura. Dana es la primera estudiante en presentar una propuesta. Inicialmente construye 5 puntos (Imagen 7).



Imagen 7. Construcción inicial de la representación de Danna

El profesor con un N1+, formula una pregunta abierta de la que no se obtiene mayor respuesta:

Dana, ¿qué estás haciendo? Cuéntanos. (...) Estás arrastrando, pero no nos estás diciendo nada. (...) Yo tengo una pregunta, ¿por qué moviste esos puntos y los dejaste así?

Valentina con una expresión de *autoría* comenta sobre el paso siguiente, tal vez haciendo referencia a que se deben construir los segmentos:

Pero tienes que unirlos.



Imagen 8. Construcción de la figura de Danna que cumple las condiciones

El profesor presenta una pregunta cerrada, tratando que los estudiantes opinen sobre la figura de Dana (Imagen 8):

Podrías decir (...). ¡Ah! No mire. Bueno, primera pregunta. ¿Este es un polígono?

La respuesta es monosilábica, diciendo que sí, por lo que se tiene un N1 en el discurso. Luego pregunta al grupo si todos están de acuerdo, pero no se obtienen respuestas. Tomás formula una pregunta de su *autoría* con un N1+ en el discurso:

¿Por qué no es un polígono? Es la pregunta.

Sin embargo, el profesor retoma la pregunta cambiando la sintaxis, de tal forma que es *portavoz* de Tomás:

La pregunta es que estoy diciendo, ¿este es un polígono?

Aunque los estudiantes con anterioridad habían dicho que sí, en este caso responden que no. Tomás nuevamente pregunta con un N2 en el discurso pidiendo una justificación sobre el por qué la figura no es un polígono:

¿Por qué no?

Santiago presenta un argumento en el que responde la pregunta de Tomás:

Porque se interseca dos veces en el mismo punto.

En este caso se presenta un argumento A-A, ya que con sus propias palabras Santiago estaría intentando hacer alusión a la condición de la definición de polígono: “sus líneas se intersecan, pero no salen del punto de donde se intersecan”. El profesor plantea una pregunta directa: “¿por qué?”, a lo que algunos estudiantes responden que sí, con lo que se concluye que esta pregunta está en un N0 del discurso. Santiago propone otra justificación sobre por qué no es un polígono:

Porque se cruzan en el mismo punto (Cruza los brazos haciendo una X).

En esta intervención se puede considerar un esquema A-A, dado que, aunque es con otras palabras, el estudiante intenta afirmar que las rectas no se salen del punto donde se intersecan, siendo *portavoz* de la definición de polígono. Gabriela es *trasmisora* de la idea de Santiago, repitiendo lo que su compañero dijo. El profesor, por tanto, pregunta con un N1 en el discurso:

¿Y no se pueden intersecar dos veces en el mismo punto?



A lo que varios de los estudiantes responden que no. Solo Santiago con una respuesta de su *autoría* dice sin presentar un argumento:

Pues sí, pero no así

El profesor es *portavoz* de la pregunta que había formulado con anterioridad, cuestionando si la figura proyectada es un polígono y en este caso hay estudiantes que dicen que no y otros dicen que no saben. El profesor pregunta de nuevo a Nicolás, quien previamente había respondido que no, pidiendo una justificación, pero Nicolás responde con las mismas palabras y la misma idea de Santiago:

Porque se interseca dos veces en el mismo punto.

En este caso Nicolás es *trasmisor* de la idea de Santiago. El profesor, entonces pregunta si la figura es un ejemplo de no polígono y las respuestas de los estudiantes siguen manifestando duda, algunos dicen que no y otros dicen que no saben. El profesor interviene con un N1 en el discurso:

Dana hizo un buen ejemplo. Porque miren. Aquí decimos que no es un polígono, pero (...) y cumple todas las características. ¿Todos de acuerdo?

La mayoría de los estudiantes responde que sí. Pero aun algunos estudiantes no tienen claridad sobre por qué no es polígono. Cristian responde haciendo una representación de una cruz con los brazos. Se evidencia con las expresiones de los estudiantes, luego de la intervención de Santiago, que varios de ellos se dejaron convencer por sus ideas, de tal manera que cuando les preguntaban por el polígono, ellos eran *portavoces* o trasmisores de esta idea. Ana Sofía presenta una nueva justificación:

Porque hay más de dos segmentos que se juntan en uno.

En esta respuesta se presenta un esquema A-A sustentada en la definición propuesta de polígono, pero expresada con sus propias palabras, por lo que Ana Sofía es *portavoz*. El profesor con un esquema N1, pregunta ¿Cuáles? A lo que la estudiante responde sin proporcionar información adicional que en B. Luego, varios estudiantes empiezan a mencionar que se intersecan, por lo que el profesor pregunta:

Profesor: ¿Se intersecan quiénes?

Nicolás: De B a A y de D a B.

Gabi: No. Es que cuando estamos viendo ahora. C y E se conectan, pero a través de B que digamos es un vértice. y desde A igualmente. No sería un polígono porque se intersecan en B.

Aunque Nicolás no proporciona más información, Gabi sí presenta una respuesta en la que evidencia un esquema de argumentación, por lo que la intervención del profesor se clasifica como un N2 en el discurso. Gabi en este caso se basa en un esquema A-A, sustentada en lo que considera es un polígono, mas no por su percepción visual. Otra respuesta es la de Gabriel, también de su *autoría*:

Lo que pasa es que se forma una línea recta de E y C que por el medio tiene B. (...) No, C, B y E. Esa de ahí. (...) Y como no tiene ningún grado de inclinación en ninguno de los dos lados se forma una línea recta, que por lo menos tenga a B.

En esta intervención se tiene un esquema CE-A sustentado en las condiciones que debía cumplir la figura propuesta en la tarea, más no en la de polígono. Vale la pena aclarar que en ningún momento la figura planteada en la tarea debía implicar que fuera un polígono y la característica sobre los cambios de dirección, es una de las propuestas de la tarea. El profesor pregunta a los estudiantes si están de acuerdo con Gabriel, así que Gabriela responde diciendo:

Sí (Habla mientras alza la mano). A ver (...) me parece, (...) pues ahí dice (señala el tablero donde están las características de un polígono) que ahí dice. Se supone que un polígono sabemos que se interseca, pero no pasa esto (Imagen 9). Entonces, si (...), entonces el polígono sería A, B, C. Ahí, después a A, se pasa la línea recta, se va para más afuera, digamos, y eso no puede pasar.



Imagen 9. Ademán de Gabriela para representar que dos segmentos se intersecan

De esta manera la estudiante hace una afirmación de su *autoría*, sin presentar esquema de argumentación. El profesor indaga si todos están de acuerdo, a lo que Tomás dice que sí se puede, mientras que Ariadna dice que no. Dana, por su parte presenta un esquema A-A con su respuesta:

Porque se intersecan más de una vez.

Pero cabe resaltar que la idea no es de su *autoría*, pues ya se había formulado con anterioridad, siendo *trasmisora*. El profesor centra la pregunta en los segmentos que se intersecan con un N2 en el discurso.

¿Cuántas veces se intersecan? Por ejemplo, miremos acá (Señala la figura que representó Dana). Este punto B, ¿cuánta ve (...) este se interseca con cuántos segmentos?

Aunque la pregunta es directa y varios estudiantes responden cuatro, Dana proporciona información adicional, nombrando los segmentos:

Porque de D a E y de E a B. De B a C, a A y de A a B.

Con esta expresión Dana afirma que son cuatro segmentos que se intersecan en B y se sustenta en la representación del tablero, nombrando cada uno de los segmentos, por lo que se tiene un esquema E-P y la expresión es de su *autoría*. El profesor nuevamente pregunta por los segmentos que se intersecan, pero a diferencia de Dana, Gabi responde:

Dos (...) CE y DA (pasa al tablero digital y señala los segmentos).

Esta respuesta también es de su *autoría* ya que presenta una idea diferente a la de Dana, pero también se evidencia un esquema E-P. El profesor pregunta a varios niños por los segmentos que se intersecan, tal vez tratando de incluirlos en el diálogo, a lo que ellos responden como

*trasmisores* de Gabi y Dana a partir del nombramiento de los segmentos. El profesor, por tanto, pregunta:

(...) Pero hay algo que falta ¿Qué faltará? Si no falta nada ese es un polígono y nos toca meterlo en las figuras que sí son polígonos.

Gabriela y Nicolás dicen que no es un polígono, Cristián argumenta expresando que no es un polígono porque “se cruzan” las líneas. Aunque hay un esquema A-A, esta idea ya había surgido, siendo Cristian *portavoz*. Cabe resalta que, aunque varios estudiantes afirman que no es un polígono, no todos los estudiantes los consideran así, por lo que el profesor en repetidas ocasiones pregunta si es o no un polígono. Gabi también es *portavoz* con la siguiente intervención:

No es un polígono porque los polígonos se caracterizan (...) Porque no se unen, no se intersecan en un punto. Estas figuras se intersecan en B, entonces estoy segura que no es un polígono.

El profesor trata de cerrar la discusión son base en ideas que surgieron la clase anterior:

Se acuerdan qué decíamos, miren, por cada segmento ¿cuántos segmentos pueden intersecar a ese segmento?

Con lo que presenta un N1 en el discurso, ya que la pregunta es directa y la respuesta de los estudiantes “dos” no proporciona información adicional. Con este mismo nivel de discurso, el profesor pregunta ¿en dónde? y varios estudiantes dicen “en B”. El profesor, pide mirar el problema de la clase y pregunta si cumple con todos los requisitos:

(...) Está cumpliendo, pero ¿faltará algo? ¿Qué falta? (...) ¿Qué pasaba con el problema? ¿Si pasa por todos los requisitos? (...) ¿Sí? Miren, pasa por D (...) Digamos que empecé por A. Tenía que pasar ¿por dónde?

La pregunta formulada es abierta y Ana Sofía plantea una respuesta diferente, de la cual es *autora*, por lo que se tiene un N2 en el discurso.

Ana Sofía: No hay ningún segmento que los una.

Gabriela por otro lado, sustentada en las condiciones en el tablero, presenta un esquema CE-A. De esta manera comenta:

(Alza la mano mientras habla). Lo que pasa profe (...) podríamos ver que no empezó en A. Empezó en A y tenía que volver a A.

El profesor agradece a Gabriela y comenta que ahí está el problema. A partir de esta idea, el profesor presenta la siguiente explicación de su *autoría*:

(...) Lo que Dana trata de hacer es lo siguiente. Voy a dibujarlo acá mientras Dana (toma un marcador y se pasa al tablero). Lo que Dana trata de hacer es lo siguiente. Miren. Algo así. (Imagen 10). Voy a dibujarlo acá.



Imagen 10. Representación de la construcción de Dana en el tablero

Gabriela alza la mano y aporta su idea sobre la construcción:

¡Profe! (Levanta la mano). Allá (señala lo que representa Gabi en la Tablet) si se cumple porque comenzó en A y llegó a A otra vez.

Con lo que sustenta la validez de la representación porque sí cumple con esta condición, haciendo observable un esquema CE-A, ya que se sustenta en una de las condiciones propuestas en la tarea. Sin embargo, el profesor la cuestiona con un N1 en el discurso, pues proporciona una pregunta abierta de la cual no se obtuvo respuesta.

¿Será que sí se cumple? Vamos a ver ¿Dónde quedarían?

El profesor pide prestar atención a la construcción de Dana y le pide hacer trazar el recorrido de la representación:

Primero empiezo en A, en el centro, después subo a B, después paso a C y paso a (...) se interseca con A (...).

Vale la pena recordar que Dana es *autora* de la representación. Con base en lo dicho por Dana el profesor pregunta con un N2 en el discurso:

Y eso. Pregunto ¿Y eso tiene que pasar? ¿Si se puede pasar o puede pasar?

A lo que Gabriela responde:

No, en un polígono no porque se supone que no se sale del punto en donde se intersecan.

De tal manera que se tiene un esquema A-A, sustentada en la definición de polígono. Pero esta vez es *trasmisora*, pues presenta parte de la definición tal como la establecieron la clase anterior. El profesor además aclara como *portavoz* de Dana:

Bien. Pero yo quisiera que prestáramos atención al problema. Miren. Dice: tiene que pasar por B, C, D, bueno, tienen que partir de A y llegar a A. Partiste de A, pasaste a B, a C y ahora quieres pasar a D.

A lo que finalmente varios estudiantes, utilizando la sintaxis de la condición del tablero, dan su propia idea, siendo *fantasmas* de la expresión.

Ariadna: Pero pasa por A.

Tomás: Tiene que terminar en A.

Con estas respuestas la mayoría de los estudiantes tuvieron en común la idea de que la figura no es un polígono.

#### 4.1.2. CLASE: 24 DE MAYO DE 2018

Para esta clase los estudiantes utilizan el software GeoGebra. Al iniciar esta sesión el profesor pregunta por la definición de equidistancia y colinealidad, además pregunta por la actividad de la clase anterior, en la que debían determinar la figura que se formaba por varios puntos equidistantes a un mismo punto, también pregunta por la definición de triángulo isósceles y triángulo equilátero. Con base en este repaso, el profesor propone construir un triángulo isósceles y un triángulo equilátero que fueran invariantes bajo arrastre. Luego de la construcción del triángulo isósceles se presentó la socialización de las producciones, pero para la construcción de triángulo equilátero, no hubo socialización por cuestiones de tiempo.

#### **Episodio 6**

Este episodio corresponde a la socialización en torno a la construcción de Camila del triángulo isósceles, ya que, aunque la mayoría de los estudiantes concuerda con que sí es válida, Gabriela no está de acuerdo. A partir de esta diferencia de ideas, el profesor propone que los estudiantes tomen una postura y justifiquen por qué. En síntesis la construcción de Camila consiste en realizar  $\odot A, AB$ , luego construir  $\odot B, BC$ , con  $C \neq A$  (Imagen 11), y construir un punto  $D = \odot A, AB \cap \odot B, BC$  (Imagen 12) y finalmente realizar los segmentos que corresponden a los lados del triángulo,  $\overline{AB}, \overline{BD}, \overline{AD}$  (Imagen 13).

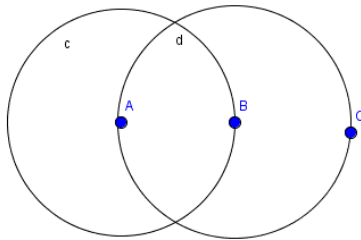


Imagen 11. Réplica del paso 1 de la construcción de Camila.

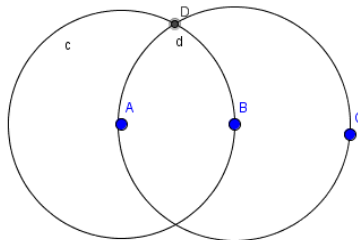


Imagen 12. Réplica del paso 2 de la construcción de Camila.

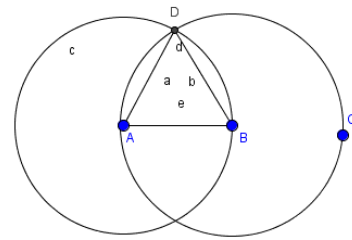


Imagen 13. Réplica del paso 2 de la construcción de Camila.

La discusión da inicio con la siguiente expresión del profesor:

Profesor: (...) No sé si ustedes tienen alguna pregunta que hacer a Camila. (Gabriela levanta la mano). Están de acuerdo con que esa construcción nos sirve para (...)

Podemos observar que esta expresión se puede clasificar como N0 del discurso, ya que la pregunta es directa y se esperaría una respuesta monosilábica de los estudiantes. En esta intervención no se observa algún tipo de argumento. Gabriela, una estudiante del salón comenta que no está de acuerdo. Así que el profesor pregunta nuevamente.

Profesor: ¿Están de acuerdo con que esa construcción sirve? Gabriela, dice que no.

En este caso la pregunta del profesor es directa, retoma la idea de Gabriela y solicita a los estudiantes complementarla. Además, pide profundizar en la idea, por lo que se pasó de un N0 a un N1 en el discurso. Gabriela nuevamente responde que no, así que Tomás, un compañero se dirige a ella refutando su opinión con la siguiente pregunta:

¿Por qué no si siempre queda la misma medida?

En esta expresión se observa un N1 en el discurso, ya que la pregunta de Tomás es abierta y las respuestas que se derivan de esta pregunta no evocan información adicional. Nótese que en este caso el discurso fue originado por un estudiante, por lo que la responsabilidad de modificar los niveles de discurso, no solo recaen en el profesor en este episodio. Además, en su pregunta también hay presencia de un A-A. Esto por cuanto observamos que Tomás se basa en la definición de triángulo isósceles para justificar que la construcción de Camila es válida, por cumplir la propiedad de que dos de los lados del triángulo tienen la misma longitud. Ante la pregunta de Tomás el profesor plantea la siguiente discusión:

A ver vamos a escucharnos. A ver, que Camila se va a defender o ustedes la van a apoyar, o apoyan a la postura que tenga Gabriela.

En este caso se observa que el profesor anima una discusión entre estudiantes, pidiéndoles dar sus ideas y que se escuchen entre ellos mismos, para que reaccionen frente a las ideas expuestas, por lo que se observa un N3 en el discurso. Como respuesta a esta intervención Gabriela comenta lo siguiente:

Me parece que es muy innecesario el otro círculo, porque si lo necesitara sería para hacer un triángulo equilátero.

Consideramos que este es un argumento que puede verse desde dos interpretaciones. La primera es que Gabriela ve la construcción desde su forma canónica, ya sea porque previamente había visto una construcción de triángulo equilátero similar a la presentada por Camila o porque el triángulo isósceles presentado parece un triángulo equilátero desde su forma prototípica; desde esta perspectiva el esquema de argumento es E-P. La segunda es que Gabriela hubiese visto que, con las dos circunferencias se obtienen todos los lados del triángulo congruentes, por ser radios de dos circunferencias y de esta manera anticipa que la construcción también es la de un triángulo equilátero, dicha anticipación corresponde a una transformación que la estudiante hace a la construcción para que cumpla con la definición de triángulo equilátero, viente necesaria la utilización de la segunda circunferencia; por tanto, el esquema de argumento sería A-T. En esta expresión no se promueve el discurso, por lo que no se categoriza en algún nivel. El profesor retoma la idea de Gabriela diciendo:

Profesor: (...) Bueno acá hay una posición. (Se dirige a Camila) ¿Tú qué dices con respecto a eso? ¿Tú necesitas ese (circunferencia) o no?

Esta expresión se categoriza en el N1+ del discurso, porque la pregunta del profesor es abierta y condiciona a los estudiantes a que expliquen su razonamiento, comentando sobre la idea Gabriela. Las respuestas a estas preguntas son cortas. Camila responde al profesor diciendo “Pues digamos que yo pienso por lado y lado. Pero digamos, o sea, para empezar sí lo necesitaba.”. Cabe resaltar que en esta expresión no se observa nivel de discurso o argumento por lo que no será analizada. Ante esta idea el profesor pregunta nuevamente:

Profesor: ¿Y ahí para qué te sirve ese otro círculo?

Alán: Pues para colocar el círculo.

El profesor realiza una pregunta abierta en la que pretende que los estudiantes expliquen la necesidad de colocar la segunda circunferencia. Como Alán responde voluntariamente y trae

información adicional, esta expresión se clasifica en el N2 de discurso. Posteriormente Camila reafirma la idea de Alán. Aunque aparentemente Alán ofrece un argumento, no es clara su idea, pues no tiene sentido pensar que una segunda circunferencia es necesaria para colocar la primera, por tanto, esta expresión no será analizada, pues no es inteligible. Santiago levanta la mano, por lo que el profesor se dirige a él diciendo:

Profesor: A ver tú vas a defender a cuál postura.

Esta expresión se encuentra en el N1 del discurso, pues la pregunta es cerrada y se observa que las respuestas fueron cortas. Sin embargo, las ideas derivadas de la pregunta se retoman posteriormente. Tanto Santiago como Tomás afirman que apoyan la postura de Camila, así que el profesor pregunta:

A la de Camila. ¿Por qué?

El ¿por qué? en la expresión del profesor permite determinar que esta pregunta es abierta, donde pide a los estudiantes un fundamento sobre su postura, por lo que, es un N2 en el discurso. Las respuestas bridas por los estudiantes posteriormente fueron amplias en su explicación. Santiago argumenta diciendo:

A ver. En el trabajito no decía que, que no se pudieran usar cualquier herramienta y pues cualquier herramienta ella en este caso usó dos círculos.

En este argumento Santiago se basa en la autoridad del enunciado de la tarea, intentando convencer a algunos de sus compañeros que, en la actividad no hay restricciones en el uso de las herramientas, siempre y cuando cumpla con el objetivo. Es por lo que esta intervención se clasifica en un esquema de argumentación por CE-A. Si se analiza la participación podemos observar que la expresión es original tanto en su semántica como en su sintaxis es por esto por lo que Santiago es *autor* en su idea. Gabriela inmediatamente refuta diciendo:

Pero solamente utilizó las herramientas y en un comienzo lo hizo equilátero.

Este argumento se basa en la primera imagen presentada de la construcción de Camila, antes del arrastre, donde se evidencia un triángulo equilátero en su forma prototípica. Es posible que el rechazo de Gabriela ante la construcción de Camila se deba a que ella considera que un triángulo equilátero es distinto de un isósceles. Por lo que se evidencia un esquema de argumentación E-P, dado que se apoya en la primera imagen presentada en la construcción sin considerar el arrastre, de tal manera que no logra observar perceptualmente un triángulo isósceles en este punto de la representación. Así que Santiago contesta a Gabriela:

Pero, pero ahí también lo hizo isósceles.

En esta expresión también es posible considerar dos esquemas de argumentación distintos que dependen de la interpretación que se le dé. Si el estudiante afirma que un triángulo equilátero también es isósceles, está haciendo una transformación de dicha figura por tanto sería un esquema de argumentación A-T. Pero si, además de esto, el estudiante considera que la construcción es válida a partir de la observación de la medida de los lados, entonces está haciendo uso de un esquema de argumentación A-A, pues hace uso de la teoría, particularmente la definición de triángulo isósceles y circunferencia, vistas previamente. Sin embargo, si se tiene en cuenta la frase por sí sola, no es posible garantizar este último esquema. El profesor reelabora la idea de Gabriela, formulando la siguiente pregunta:

Es que la discusión que Gabriela quiere decir es, (...), ¿será necesario tener ese círculo?

Esta expresión está en el N2 de discurso pues, aunque la pregunta del profesor no es claramente abierta o cerrada, la respuesta que da el estudiante atiende a una pregunta abierta. De tal manera que el estudiante da una explicación amplia con información adicional, como se observa en la respuesta de Tomás “Puede que no, sí se puede hacer con un círculo, pero igualmente ella lo quería hacer con dos círculos”. Se aclara que la expresión de Tomás no corresponde a un argumento ni promueve el discurso, por lo que no se clasifica. El profesor pregunta nuevamente:

(...) Bueno, pero, o sea tú la necesitas, ¿es necesario? O sea ¿no se puede hacer sin ese círculo?

Se observa que la pregunta es abierta y las respuestas brindadas por los estudiantes posteriormente fueron amplias, por tanto, se clasifica en el N2. Santiago responde a la pregunta diciendo:

Pues es que profe mira, lo que pasa es que ahí debe quedar un, un triángulo isósceles, no dice que no se pueden tener dos círculos que formen el triángulo isósceles.

Este argumento se basa en la autoridad del enunciado de la tarea, por lo que se clasifica como un Esquema de CE-A. Luego de escuchar a Santiago el profesor trata de integrar a otros estudiantes a la discusión.

Profesor: A ver voy a escuchar al otro o a algunos que no han hablado (María José levanta la mano)

En este caso se tiene un N2+, ya que, aunque el profesor fomenta una discusión, no se evidencia que los estudiantes discutan entre ellos mismos obteniendo una respuesta como la del N3. Hay intención del profesor por involucrar a todos los estudiantes en la discusión. Dado que las respuestas no aportaron información adicional y que no permitieron que María José participara en la discusión, el profesor interviene:

(...) (Se dirige a María José) ¿Tú qué crees?

La expresión está en un N2 de discurso pues la pregunta es abierta y se dirige particularmente a María José, para que ella comente sobre la idea de Gabriela, pero la respuesta que ella da es corta.

María José: Sí, porque se puede hacer de diferentes formas.

En la expresión de María José se observa un se esquema de argumentación CE-A, dado que sintetiza varias ideas presentadas con anterioridad, en la que se expone la validez de utilizar diferentes métodos para realizar la construcción del triángulo isósceles. Sin embargo, es un buen ejemplo para analizar la participación, dado que se basó en la idea de sus compañeros para expresarse, pero utilizó sus propias palabras, por tanto, es considerada como un tipo de participación *portavoz*. Sara levanta la mano y el profesor le da la palabra.

Profesor: A ver Sara.

Aunque en esta expresión el profesor le da la palabra a Sara, se espera que ella de respuesta a la pregunta formulada con anterioridad en la discusión. Como esta pregunta es abierta se



observa que la respuesta es corta y no trae información adicional, se clasifica como un N1+. La respuesta que Sara da es la siguiente:

Para mí, pues es que tú no diste reglas.

Sara al igual que Santiago, le asigna la responsabilidad de su argumento al profesor, por lo que se respalda en su autoridad para reafirmar la validez de la construcción de Camila, por lo tanto, su expresión también corresponde a un esquema de argumentación por CE-A. Este es otro ejemplo de participación *fantasma*, ya que se retoma la idea de sus compañeros para respaldar la construcción de Camila, pero con sus propias palabras. El profesor da la palabra a un estudiante más.

Profesor: ¿O sea que para esa construcción es necesario eso (la circunferencia)? (Ariadna levanta la mano) A ver, ¿qué dice Ariadna?

Esta pregunta es abierta y se obtiene una respuesta corta del estudiante, por lo que es N1+. Sin embargo, Joseph participa interrumpiendo a Ariadna:

No es necesario [las dos circunferencias] porque yo lo puedo hacer con uno solo.

Se considera en esta expresión un esquema de argumentación A-T, ya que el estudiante visualiza que si se quita la segunda circunferencia se sigue cumpliendo la condición, para que la figura sea un triángulo isósceles. Para cerrar la discusión el profesor pregunta a Camila:

¿Qué pasará si yo llegase a quitar ese (...), a ver te pregunto a ti (Camila), si yo llegase a quitar ese círculo que tienes ahí está ahí?

Se observa que la pregunta formulada por el profesor es cerrada, sin embargo, retoma las intervenciones anteriores, por tanto, es un N1. Camila quita la circunferencia y responde “nada, ya quedó isósceles”, como Camila se basa en la construcción expuesta, se puede considerar que es una respuesta corta y no es posible evidenciar esquema de argumentación o nivel discurso.

## 4.2. COLEGIO CALASANZ

En este colegio las clases son muy participativas, el profesor indaga sobre los conocimientos de los estudiantes a partir de preguntas y los estudiantes responden de forma deliberada y autónoma. En este caso el profesor permite que las expresiones circulen ampliamente durante el discurso, por lo que deja hondar a los estudiantes en sus ideas y así formular cualquier tipo de conclusión así no concuerde con el objetivo principal de la clase. A continuación, se presentan dos fragmentos de dos clases distintas llevadas a cabo en el curso séptimo, de tal manera que las expresiones mencionadas son analizadas con base en el marco teórico formulado para este trabajo de grado.

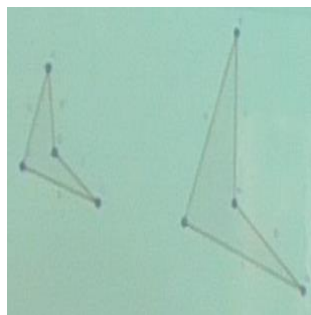
#### 4.2.1. CLASE: 12 DE MAYO DE 2018

Esta clase giró en torno al tema de la semejanza entre polígonos, el profesor en clases pasadas había proporcionado a los estudiantes una guía de trabajo sobre semejanza, los estudiantes tenían como tarea leer las dos primeras páginas. El profesor sondeó la interpretación que se le dio a la guía, con base en ello propuso varios ejemplos durante la clase y por medio de las participaciones de los estudiantes, se iba determinando si los ejemplos propuestos eran figuras semejantes. Durante la clase también se generó una discusión en torno a la diferencia entre segmentos correspondientes y homólogos. Al finalizar la clase, el profesor establece que los segmentos homólogos se mencionan cuando las figuras son semejantes y el término segmentos correspondientes se emplea cuando en las figuras no se tiene certeza de que sean semejantes.

La guía se dividía en cuatro secciones: la definición de semejanza, criterios de semejanza para triángulos, la definición de homotecia y aplicaciones de la semejanza. En cada sección se establecían algunos ejercicios.

##### ***Episodio 2***

Después de socializar las dos propiedades de las figuras semejantes, el profesor proyecta en el tablero dos cuadriláteros, que a primera vista parecen semejantes, como tal en las figuras no se observan la longitud de los segmentos y ni la amplitud de los ángulos. El profesor les pregunta a los estudiantes si los dos cuadriláteros son figuras semejantes (Imagen 14), y con ello se inició una discusión en torno a las propiedades que se deben cumplir y cómo garantizarlas.



*Imagen 14. Figuras proyectadas en el tablero*

Profesor: Resulta que Juan José nos dio dos características. (...) Si yo atiendo a esas dos características que dice Juan José, ¿yo podría decir que estas dos figuras son semejantes?

Juan Nicolás: Pues... no sé...

La expresión del profesor se puede clasificar como N1 en el nivel del discurso, dado que la pregunta es directa, retoma las ideas anteriores brindadas por los estudiantes y las respuestas que se le dan a la pregunta son cortas y concretas. También evidenciamos que la participación del profesor se cataloga como *portavoz*, él es original en su sintaxis, pero el contenido de la idea ya había sido expresado por los estudiantes anteriormente. Nicolás afirma que las figuras sí son semejantes y el profesor interviene:

Profesor: ¿Sí o no?

Juan Nicolás: Creo que sí.

La pregunta del profesor es directa y la respuesta dada por Juan Nicolás es concreta, por lo cual se clasifica esta expresión como N0 en el nivel de discurso. Posteriormente se dan las siguientes intervenciones:

Profesor: ¿Por qué?

Juan Nicolás: Porque... son iguales... (...)

Profesor: ¿Qué son iguales?

Juan Nicolás: La figura pequeña... pues...

Observamos que las preguntas realizadas por el profesor son abiertas, con la finalidad complementar las ideas de Juan Nicolás y las respuestas dadas por este estudiante son cortas, por tanto, ambas expresiones se clasifican en N1+ del discurso. El profesor interviene nuevamente:

Profesor: La figura pequeña... pues...

Juan Nicolás: Pues no en tamaño sino en forma, y los ángulos.

La expresión del profesor se cataloga como N2 en el nivel del discurso, ya que realiza una pregunta abierta, la respuesta de Juan Nicolás evoca información adicional, en este caso hace alusión a la forma y el tamaño de las figuras; la participación de Nicolás se clasifica como *autor*, dado que su idea es original tanto en su sintaxis como en su semántica. Por último, evidenciamos que en las respuestas de Juan Nicolás se presenta esquema de argumentación E-P, puesto que él afirma que las figuras son semejantes dado que la forma y los ángulos de las figuras son iguales, esta idea la sustenta a partir de la imagen que se está proyectando. El profesor retoma las ideas del estudiante y expresa:

O sea, pilas... que aquí hay una palabra que menciona Juan Nicolás, que es la forma. Él dice son iguales en su forma, pero no en su tamaño.

La participación del profesor se clasifica como *portavoz*, dado que retoma las ideas de Juan Nicolás, pero es original en la forma en como formula su declaración. Luego otro estudiante interviene:

Johan: Es que los ángulos son iguales en las dos figuras.

La participación de Johan se cataloga como *portavoz*, se basa en la idea de Juan Nicolás sobre los ángulos iguales, pero con pequeñas modificaciones. El profesor tiene la intención de que los estudiantes sean más específicos con los ángulos que son iguales en las figuras y para ello pregunta:

Profesor: ¿Cuáles ángulos son iguales?

Johan: El que está en la prime, en la figura pequeña eee... hay uno abierto y tres cerrados.

Observamos que la pregunta del profesor es directa, retoma las ideas de Johan, y la respuesta dada por el estudiante es corta, por tanto, la clasificamos en N1 en el nivel de discurso. El profesor le solicita a Johan que pase al tablero y señale los ángulos que son iguales, Johan pasa y expresa:

Este ángulo... es igual a este solo que el tamaño de la figura pues cambia (Imagen 15).

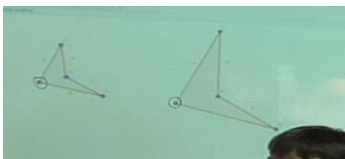


Imagen 15. Intervención del Johan en el tablero

En las intervenciones de Johan evidenciamos un esquema de argumentación E-P, ya que el estudiante se basa en la representación visual para afirmar que los ángulos son congruentes, pues no tiene en cuenta alguna medida para sustentar su respuesta sino su percepción, y así sustenta que en ambas figuras el ángulo es de la misma abertura, aun así el tamaño de la figura cambia. Dado que el estudiante afirma que los ángulos de las figuras son iguales, porque en cada figura hay “*un ángulo abierto y tres cerrados*”, también expresa que los ángulos son iguales pero que las figuras cambian, esta afirmación se sustenta a partir de la imagen que se está proyectando en el tablero. El profesor interviene:

Profesor: Listo. Espérate un momentico. (...) Mmm... Santiago ¿esos dos ángulos son iguales?

Santiago: Eeee... (...) Pues, yo aquí mirándolo, yo diría que sí.

La pregunta del profesor se clasifica como N1 en el nivel del discurso, puesto que retoma la idea de Johan, con el objetivo que los demás estudiantes comenten acerca de ella, además la pregunta es directa y la pregunta dada por Santiago es corta. El profesor en busca de la justificación de la afirmación de Santiago pregunta:

Profesor: ¿Por qué?

Camila: Porque son la misma figura

Santiago: Porque digamos que, aunque la línea se alargue más en la otra figura, el ángulo siempre va a ser el mismo y, desde aquí, a ojo, se ve que sí es el mismo.

La expresión del profesor se cataloga como N2 en el nivel del discurso, puesto que la pregunta es abierta y la respuesta dada por Santiago es voluntaria y evoca información adicional, en este caso “el alargue de los segmentos”. La participación de Camila se clasifica como *portavoz*, dado que retoma la idea de que son la misma figura, pero cambia su sintaxis. En las expresiones de Camila y Santiago se observa esquema de argumentación E-P, dado que se sustentan a partir de la imagen que están observando. Posteriormente Santiago comenta que se debe usar un transportador para verificar que los ángulos sean congruentes, en ese momento una estudiante manifiesta que GeoGebra tiene una herramienta que permite medir la amplitud de los ángulos, el profesor interviene:

Hay una herramienta en GeoGebra que me deja mirar los ángulos, ¿cierto? (...) Pero, entonces, ¿yo podría asegurar sin la herramienta que los ángulos son iguales?

Varios estudiantes responden que no, por tanto, la expresión del profesor se cataloga como N1+ en el nivel del discurso, la pregunta es directa y las respuestas concretas. El profesor interviene:

Profesor: Entonces, espérate un segundito. Si yo no puedo asegurar (...) que los ángulos son iguales, ¿podría asegurar que las figuras son semejantes?

Diego: Haciendo lo que dice aquí... queeee... midiendo las longitudes (...) y viendo la razón de ellas, entonces eeeee... el que está acá... (ademán con los brazos) de la figura pequeña.

El profesor reorienta la pregunta que había formulado anteriormente con la intención de que los estudiantes profundicen en sus respuestas, y en efecto las respuestas dadas por Diego es amplia y trae consigo información adicional, por tanto, se clasifica esta expresión como N2 en el discurso. Por otro lado, la intervención de Diego evidencia esquema de argumento CE-A, él afirma que es posible determinar que las dos figuras son semejantes sin haber garantizado que los ángulos sean congruentes, solo basta con verificar la propiedad de las razones de los segmentos de las figuras, sustentándose en lo planteado por guía. Luego, el profesor le da la palabra a otro estudiante que deseaba participar, el estudiante se dirige al tablero y expresa:

Johan: Pues... yo lo que entiendo es que cuando... sin la necesidad de... la herramienta, o sea no debes hacer el cálculo, digamos, tú ya sabes que esta arista (repisa en la figura más pequeña uno de los lados), tú ya sabes que acá, por decirlo así, está duplicada (repisa un lado de la otra figura) entre un número, y para eso sirve la homotecia.

En la expresión del estudiante se observa esquema de argumentación E-P: dado que afirma que se pueden corroborar que dos figuras sean semejantes, sin hacer uso de herramientas, solo basta observar que la longitud de los segmentos se duplica, como la hace la homotecia, y eso lo sustenta a partir de la imagen que proyecta. También la participación de este estudiante se cataloga como *autor*, dado que es original en su sintaxis y semántica, pues hasta el momento no se había mencionado la palabra homotecia. El profesor responde a la idea de Johan con un “ok” y pregunta nuevamente:

Profesor: ¿Y ahí podemos saber si tienen el mismo ángulo? (... ..)

Juan José: Sí, porque la figura.

Profesor: Cómo haces tú para saber si tienen el mismo ángulo, así, ¿así como está?

Las intervenciones del profesor se clasifican como *transmisor*, puesto que, retoma sus preguntas acerca del cómo garantizar que los ángulos de las figuras sean congruentes. En seguida de la pregunta responden dos estudiantes.

Juan José: Para que le quede exacta, se debió haber usado la homotecia.

Sofía: Pero, no sabes si es exacta o no.

Observando las respuestas podemos afirmar que las preguntas anteriores del docente se clasifican en N2 del nivel del discurso, tanto que, las preguntas son abiertas y la respuesta de Juan José es voluntaria y trae consigo información adicional, además su participación se cataloga como *portavoz*, dado que apoya en la idea de Johan sobre el uso de la homotecia, pero la forma de organizar sus ideas cambia. En la intervención de Juan José se identifica esquema de argumentación A-T dado que afirma que, sí es posible validar que los ángulos correspondientes de las figuras presentadas con congruentes al emplear la homotecia, es decir que el estudiante está anticipando el resultado de aplicar esta transformación.

#### 4.2.2. CLASE: 18 DE MAYO DE 2018

En esta clase el profesor plantea cinco preguntas para que los estudiantes las respondan individualmente en sus cuadernos, apoyados en las consultas realizadas previamente, apuntes y la guía de trabajo sobre semejanza dada con anterioridad. Las preguntas propuestas fueron:

1. Establezca las características o aspectos necesarios para asegurar que dos figuras son semejantes.
2. ¿Qué entiende por lados correspondientes entre polígonos?
3. ¿Qué entiende por razones entre longitudes de lados correspondientes?
4. ¿Qué entiende por figuras a escala?
5. Realice tres ejemplos de figuras a escala y justifique porque lo son.

El profesor dio 20 minutos de la clase para que los estudiantes para que respondieran las preguntas, posteriormente el profesor organiza a los estudiantes en grupos de seis con la finalidad de que socialicen sus respuestas y llegaran a un acuerdo de cuál de ellas era la más adecuada.

#### ***Episodio 1***

El profesor da las indicaciones sobre cómo será la temática para la clase, les explica a los estudiantes que en una primera parte de la clase deberán responder de manera individual las preguntas y luego se conformarán grupos de seis estudiantes, donde se socializarán las respuestas y establecerán cuál de ellas es más completa. En este episodio también se presenta la conversación entre una estudiante y el profesor, acerca de una duda presentada por ella.

El profesor escribe las preguntas en el tablero y les indica a los estudiantes el modo de trabajo de la clase para este día. Sofía, una estudiante, se acerca al profesor y le pregunta sobre el segundo problema de la guía de semejanza; Sofía enuncia el problema: “Los lados de un triángulo miden 36 m, 42 m. y 54 m, respectivamente. Si en un triángulo semejante a este, el lado homólogo del primero mide 24 m., hallar los otros dos lados de este triángulo”, Sofía menciona que dividió las longitudes de los lados homólogos para encontrar la razón y luego intentó dividir nuevamente para determinar la longitud de los segmentos faltantes, pero como tal no sabe cómo con ese resultado hallar la longitud de los segmentos faltantes. Ella le pregunta al profesor:

Sofía: ¿Uno como encuentra ese número?

Sofía le menciona al profesor que “ningún número me da eso”, el profesor le aclara a la estudiante que el número tiene que dar exacto, y procede a preguntarle:

Profesor: ¿Qué significa que eso dé exacto?

Sofía: Pues que tienen la razón igual.

Profesor: Es que la razón es igual. Venga para acá.

La expresión del profesor se clasifica como N1 en el nivel de discurso, dado que la pregunta es directa y la respuesta dada por la estudiante concreta. Tanto la primera intervención de

Sofía y del profesor se cataloga como *autor*, dado que es original en su semántica y sintaxis, la última participación del profesor se establece como *transmisor*, pues repite tal cual la intervención de Sofía. El profesor hace la figura del triángulo mencionado en la guía (Imagen 16) y pregunta las longitudes de los segmentos a Sofía.

Profesor: Un triángulo cuál es. Este mide treinta y seis, el otro 42 y ¿el otro mide cuánto?



Imagen 16. Representación de un triángulo en el tablero por el profesor

Sofía: Cincuenta y cuatro.

Como se observa, la primera pregunta realizada por Sofía dio paso a una discusión sobre el procedimiento que se debe emplear para determinar las longitudes de los segmentos faltantes del segundo triángulo, por tanto, la expresión “¿Uno como encuentra ese número?” presenta nivel de discurso N2. Por otro lado, el profesor le pregunta a Sofía por la longitud del segmento del triángulo y ella responde el valor concreto, en consecuencia, la expresión del profesor se clasifica como N0 en el nivel de discurso, es una pregunta con objetivo de validar un dato del problema. El profesor procede a dibujar el segundo triángulo mencionado en el problema (Imagen 17), el profesor pregunta:

Profesor: Este mide veinticuatro. (Dibuja otro triángulo al lado, intentando que se vean de la misma forma.) Y ¿por qué es este? ¿Por qué este lado y no esté? (Apunta sucesivamente, a los otros dos lados del segundo triángulo.) ¿Por qué a este lado le ponemos veinticuatro y no a este? ¿Qué dice ahí? ¿Qué dice el enunciado?

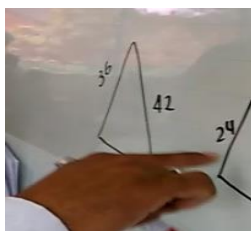


Imagen 17. Representación del triángulo mencionado en el enunciado.

Sofía: Si un triángulo es semejante a este lado, el lado homólogo del primero

Se clasifica la expresión del profesor como N1 en el nivel de discurso, teniendo en cuenta que la pregunta es directa, le solicita a la estudiante comentar que dice en el enunciado y la respuesta dada por Sofía es concreta. La participación de Sofía se cataloga como *transmisor*, dado que menciona tal cual el enunciado de la guía. En vista que Sofía hace alusión al lado homólogo el profesor pregunta:

Profesor: Y, ¿qué es el lado homólogo? ¿Qué es el lado homólogo?

Sofía: Pues el lado que le corresponde. (Apunta a el lado que mide 36 en el primer triángulo y al lado que mide 24 en el segundo.)

En este caso observamos que ambas preguntas del profesor son abiertas y la respuesta dada por Sofía evoca información adicional, en este caso el estudiante menciona “el lado que le corresponde”, por lo cual se clasifica esta expresión como N2 en el nivel de discurso. Para seguir indagando el profesor pregunta:

Profesor: Ah bueno. Entonces, ¿por qué este no o este o este?

Sofía: No.

El nivel de discurso que se presenta en la pregunta del profesor es N1+, teniendo en cuenta que la pregunta es abierta pero la respuesta de la estudiante es monosilábica. El profesor quiere que Sofía justifique por qué escoge ese lado y no otro. El profesor le hace preguntas con el fin de orientarla como se muestra:

Profesor: Es que dice el lado homólogo de ¿quién?

Sofía: Del primero.

Profesor: Y, ¿quién es el primero?

Sofía: Pues depende cómo lo mira.

Las dos intervenciones del profesor se establecen como N1 en el nivel de discurso, visto que ambas preguntas son directas y las respuestas dadas por las estudiantes son concretas. El profesor le comenta a Sofía que revise la información de la guía, para que se percate cual es la longitud del primer lado homólogo, Sofía responde de “*treinta y seis*”, como tal el profesor le planteó una pregunta a Sofía, pero la sugerencia permite dar una respuesta concreta y corta, por tanto, se clasifica como N1 en el nivel del discurso esta expresión. El profesor retoma la idea que se ha venido presentado y pregunta:

Profesor: O sea, los lados miden treinta y seis, cuarenta y dos y cincuenta y cuatro. ¿Quién es el primero?

Sofía: Treinta y seis.

Evidenciamos que la pregunta realizada por el profesor es directa, tiene el fin de validar la información del problema que se ha venido abordando y la respuesta dada por la estudiante es concreta, por esta razón se clasifica esta expresión en N0 en el nivel del discurso. La participación de Sofía y el profesor se determina como *transmisor*, dado que el profesor ya había mencionado anteriormente las longitudes de los segmentos del triángulo y anteriormente le había preguntado a Sofía la medida del primer segmento y por su parte ella había mencionado que esta longitud es 36. El profesor le solicita a la estudiante que indique cuál es el lado homólogo al segmento que mide 36, como se muestra.

Profesor: ¿Cuál es el lado homólogo a este lado que mide treinta y seis?

Sofía: Este (recorre el segmento del primer triángulo que sí le corresponde con su esfera).

En vista de lo anterior la expresión del profesor se clasifica N1 en el nivel del discurso, dado que la pregunta es directa y la respuesta dada por la estudiante es concreta. El profesor vuelve a preguntar.



Profesor: Eso. Y ¿yo por qué sé que es este y no es este?

Sofía: Porque este lado (recorre con el esfero el lado que mide treinta y seis en el primer triángulo) le corresponde a este lado (recorre el segmento que mide veinticuatro en el segundo triángulo).

La participación del profesor se clasifica como *transmisor*, dado que esta pregunta ya la había planteado previamente, es decir que su sintaxis y semántica en este caso ya no es auténtica. La expresión también se cataloga como N1+ en el nivel de discurso, en vista que la pregunta es abierta y la respuesta dada se concreta. El profesor quiere que Sofía identifique los lados correspondientes a partir de propiedades geométricas y no de posición, por ello decide dibujar un triángulo que parezca semejante al primero.

Profesor: ¿Qué pasa si le dibujo la figura, dibujo esta figura en una dirección distinta? (Imagen 18) (Encuentra difícil representarla en otra posición y que mantenga la misma forma.) Supongamos que es una manera de... pero si esta figura la dibujo como (dibuja otro triángulo).

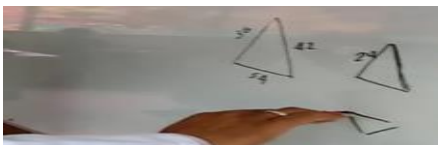


Imagen 18. Ejemplo propuesto por el profesor

Sofía: También va a ser ese.

En la expresión del profesor analizamos que la pregunta planteada es abierta, tiene la intención de profundizar en la idea de Sofía, la respuesta dada por este estudiante es corta, por tanto, es N1+ en el nivel del discurso. El profesor realiza una nueva pregunta se dan las siguientes participaciones:

Profesor: ¿Yo cómo sé cuál es el lado homólogo?

Sofía: Porque esta línea está torcida hacia allá (muestra el lado izquierdo).

Evidenciamos en la intervención de Sofía esquema de argumentación E-P dado que afirma cual segmento homologó a uno dado sustento a partir de la figura que dibujada en el tablero. La expresión del profesor se clasifica como N2, dado que la pregunta es abierta y la respuesta dada es amplia y proporciona información adicional. El profesor quiere que la respuesta de Sofía sea más precisa por eso sigue realizando preguntas directas a las cuales la estudiante da respuestas cortas, por tanto, se clasifican como N0 en el nivel de discurso. En vista de que no funcionó la ilustración del tercer triángulo el profesor decide dibujar dos pentágonos irregulares, y en posiciones diferentes, selecciona un segmento y le pregunta a la estudiante cual es el segmento homólogo a ese, como se observa a continuación.

Profesor: Quedó un poquito (no se entiende) la cosa. Y yo digo que estas dos figuras son semejantes. Y yo tengo este lado (Imagen 19), ¿sí? Este digamos segmento AB. ¿Yo cómo sé cuál es el lado homólogo a este? (Imagen 20)

Sofía: Este (apunta a un lado de la primera figura).

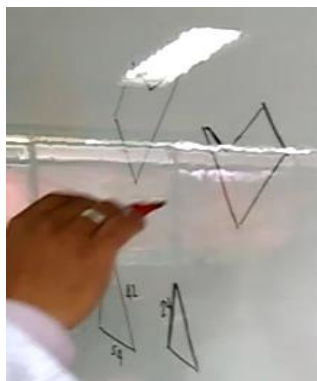


Imagen 19. Pentágonos irregulares

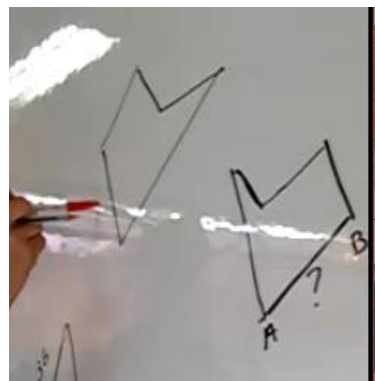


Imagen 20. Respuesta de la estudiante

La pregunta de profesor es directa y la respuesta de la estudiante concreta, en consecuencia, se clasifica la expresión del profesor como N1 en el nivel del discurso. Tanto la participación del profesor como la de la estudiante se definen como *autoras*. El profesor replantea la pregunta con el fin de profundizar más en la idea que se está desarrollando, se presenta las siguientes intervenciones:

Profesor: ¿Este sería el lado homólogo a este? (Recorre con el marcador el lado que Sofía indicó en la primera figura y el lado AB de la segunda.) ¿Será?

Sofía: Sí. Porque mire. Esta es una punta (indica el vértice del ángulo muy agudo de la segunda figura). Y aquí podemos sacar la punta (señala la misma situación en la primera figura). (Imagen 21) Y esta es la línea (apunta al lado más corto adyacente al lado corto que determina al ángulo agudo en la primera figura) (Imagen 22) que se conecta como tal para dar esta parte de la punta en la figura (apunta al segmento más corto, en la otra figura, que determina ese ángulo agudo). (Imagen 23)

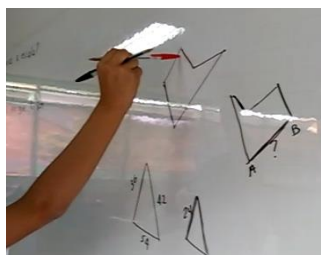


Imagen 21. Respuesta de Camila para el primer lado

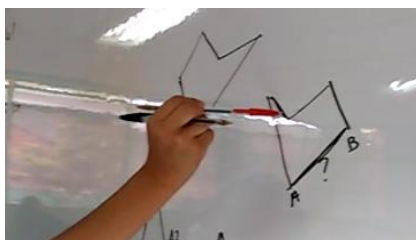


Imagen 22. Respuesta de Camila para el segundo lado



Imagen 23. Respuesta de Camila para el tercer lado

Analizamos en la expresión de Sofía un esquema de argumentación E-P, puesto que para argumentar cuál es el lado homólogo en la nueva figura, la estudiante se apoya en la forma del dibujo del tablero, además repasa cada segmento para convencer al profesor por qué ese segmento es homólogo. Así la respuesta dada a la pregunta del profesor evoca información adicional y en consecuencia se clasifica la expresión del profesor como N2 en el nivel del discurso, además su participación se establece como *portavoz* dado que expresa de manera una pregunta que ya había planteado. Luego, el profesor le solicita identificar cada par de lados correspondientes de las figuras.

Profesor: ¿Cuál sería el lado homólogo a este? (Apunta al lado corto adyacente al que acaban de señalar, en la primera figura.) (Imagen 24)



*Imagen 24. Ejercicio propuesto por el profesor para lados homólogos*

Sofía: (Apunta al lado correspondiente en la segunda figura.) (Imagen 25)



*Imagen 25. Respuesta de la estudiante*

La pregunta realizada por profesor es directa y la respuesta dada por Sofía es concreta, por tanto, se clasifica como N1 en el nivel del discurso. El profesor hace preguntas clasificadas en este nivel del discurso hasta que la estudiante identifica todos los pares de segmentos correspondientes. Para concretar las ideas de lo que se ha venido haciendo el profesor pregunta:

Bien, podría ser. Entonces, si tú ves las figuras, ¿qué es lo que le hace reconocer a uno el lado homólogo de manera visual?

En la expresión del profesor observamos que la pregunta es abierta y tiene la finalidad de que Sofía a partir de identificar cada par de segmentos correspondientes consolide alguna generalidad, pero como tal la estudiante no da alguna respuesta, aun así, se clasifica esta expresión como N1+ en el nivel del discurso. Retomando la inquietud de Sofía ante el problema el profesor le vuelve a preguntar qué procedimiento había realizado ella.

Profesor: Entonces, ¿qué fue lo que hiciste con el treinta y seis y con el veinticuatro?

Sofía: Dividí este [el 36] por este [el 24.] Primero puse esto: A, B, C (indica los tres vértices del primer triángulo.) A prima, B prima, C prima (indica los vértices correspondientes en el segundo triángulo). Entonces divide AC entre A prima C prima y eso daba uno punto cinco. (Imagen 26)

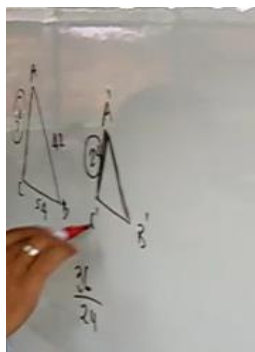


Imagen 26. Verificación del procedimiento

En la intervención del profesor se analiza nivel en el discurso N1, puesto que la pregunta planteada es directa y la respuesta de Sofía, aunque es amplia menciona el procedimiento que desde el principio le comentó al profesor, así que también su participación se clasifica como *portavoz* de sus mismas ideas. El profesor escribe los resultados en el tablero y sigue cuestionando a Sofía del procedimiento que realizó, como se observa a continuación:

Profesor: ¿Cuarenta y dos? Entonces, tú lo que haces es cuarenta y dos ¿lo divides entre quién? (Escribe en el tablero 42 y la raya de división)

Sofía: Un número que necesito, (con el esfero, en el denominador, hace la forma de un signo de interrogación.) (..) Para que me dé uno punto cinco. Pero ninguno me daba. El más cerca que me daba era bueno no me acuerdo.

Observamos que la pregunta del profesor es directa, al igual que la anterior, y tiene a intención de averiguar el procedimiento ejecutado por la estudiante, ella responde ampliamente, y vuelve a mencionar su dificultad de como con la razón puede terminar las medidas de los demás segmentos faltantes. El profesor pregunta:

Profesor: ¿Tú te acuerdas cuándo resolvimos ecuaciones el año pasado?

Sofía: Sí

Profesor: ¿Qué hacemos para despejar esto?

Sofía: Pasa al otro lado a acá.

Las preguntas planteadas por el profesor son directas y las respuestas dadas por la estudiante son cortas, así se clasifican estas expresiones como N0 en el nivel del discurso. El profesor realiza 5 preguntas clasificadas N0, con el fin orientar a la estudiante a resolver la ecuación.

## 5. DISCUSIÓN Y RESULTADOS

A partir del análisis reportado en el anterior capítulo encontramos algunos asuntos que nos llevaron a plantear cuatro grandes focos de discusión, todo esto en atención al objetivo de este documento. El primer foco hace referencia a los argumentos evidenciados en las expresiones a lo largo de la clase, a cargo de los miembros de esta. En este punto se acude a la propuesta de Harel y Sowder (1998) y Flores (2007). También consideramos de interés determinar la autenticidad de los argumentos observados, de tal manera que proveen ideas nuevas para la discusión. Es en este aspecto donde se vincula la propuesta de Goffman (1981, citado en Götz Krummheuer, 2015, p. 7). Además de los aspectos anteriores, se ve necesario estudiar qué acciones, apoyadas en los niveles de discurso, o qué tipo de preguntas promueven argumentos auténticos, por lo que el análisis anterior se enlaza ahora con la teoría de Kaur (2013), ya que, en concordancia con lo que afirma Casden (2001, citado en Kaur 2013) es el profesor el responsable de controlar el discurso que ocurre durante la clase, por lo que puede afectar tanto negativamente como positivamente, con el fin de mejorar los propósitos de la educación. Finalmente, se hará una comparación de los aspectos mencionados con anterioridad en las dos instituciones educativas involucradas. Para abordar estos focos de discusión, se han planteado las siguientes preguntas:

### 5.1. ¿QUÉ ESQUEMAS DE ARGUMENTACIÓN SE EVIDENCIAN EN EL TRANCURSO DE LA CLASE?

A continuación, se presentará la totalidad de esquemas de argumentación identificados en el transcurso de una clase, exceptuando los momentos en los que el trabajo se dio de forma grupal. Lo anterior tiene la finalidad de observar qué esquemas predominan en cada momento de la clase. Inicialmente se presentan los esquemas de argumentación correspondientes a la clase 1 del IPN (Diagrama 4):

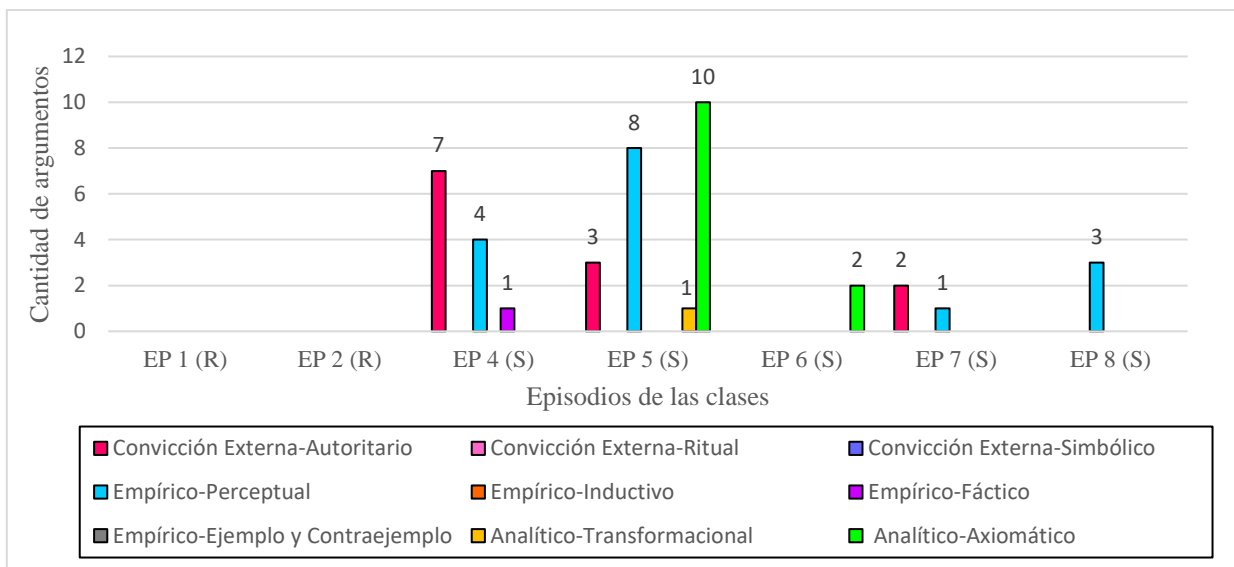


Diagrama 4 Esquemas de argumentación clase 1 IPN

Como se observa en el gráfico, la mayor cantidad de esquemas de argumentación se dan en los episodios 4 y 5. En el episodio 4, los estudiantes discuten sobre las construcciones expuestas por algunos de sus compañeros, de tal manera que tratan de concluir si dichas representaciones cumplen o no con las condiciones dadas en la tarea propuesta por el profesor. En el episodio 5 los estudiantes discuten si estas condiciones llevan a que la representación sea un polígono, según la definición dada en la clase anterior. Se puede ver entonces que en el episodio 4 la mayor cantidad de esquemas de argumentación presentados son de tipo Convicción Externa Autoritario, pues se basan en las reglas propuestas en la tarea, mientras que en el episodio 5 los esquemas son de tipo Analítico Axiomático, pues se apoyan en la definición de polígono dada por el profesor. Ambos episodios corresponden al momento de la socialización, por lo que se puede pensar que durante la clase este es un espacio propicio para promover esquemas de argumentación.

En una menor cantidad se observan esquemas de argumentación en los episodios 6, 7 y 8, donde también se socializan ideas. Cada episodio corresponde a la presentación de una construcción diferente, en la que los estudiantes tratan de presentar una figura que cumpla las condiciones propuestas por el profesor en la tarea y no sea polígono, con lo que los estudiantes apoyan o refutan las construcciones de sus compañeros. En el episodio 6 solo se observan esquemas de argumentación Analítico Axiomático, mientras que en el episodio 7 se tiene la misma cantidad de esquemas de argumentación Analítico Axiomático y Empírico Inductivo, en menor cantidad se tienen esquemas Empírico Perceptual. Para el episodio 8, solo se tienen esquemas Empírico-Perceptuales. Es posible que el esquema Analítico Axiomático haya tenido lugar como consecuencia de que los estudiantes se apoyaran en la definición de polígono para validar o refutar alguna construcción de sus compañeros. En cuanto al esquema Empírico perceptual pudo haberse presentado dado que en todo momento los estudiantes se basaban en las representaciones visuales. Para finalizar, el esquema Empírico Inductivo puede que se haya presentado por la metodología del profesor, en la que propuso varios ejemplos donde, después de analizar algunas características, los estudiantes pudieran concluir sobre varios ejemplos presentados por sus compañeros.

Finalmente, en los episodios 1 y 2 no se evidencian esquemas de argumentación, cabe resaltar que en el episodio 1 el profesor hace un repaso de los temas vistos con anterioridad, mientras que en el episodio 2 el profesor explica el funcionamiento del software GeoGebra para realizar las construcciones.

Es posible distinguir entonces que la mayor cantidad de esquemas de argumentación que se presentan son E-P con un 38 %, seguido de los esquemas Analítico Axiomático y Convicción Externa Autoritario, ambos con un 29%. Los esquemas que menos se observaron corresponden a los Empírico Fáctico y Analítico Transformacional, cada uno con un solo esquema, lo que corresponde al 2%. No se obtuvieron esquemas Empírico Ejemplo y Contraejemplo, Empírico Inductivo, Convicción Externa Ritual ni Convicción Externa Simbólico. En total se identificaron 41 esquemas de argumentación, de tal manera que el 100% de los argumentos se prestó en la parte de la clase que corresponde a la socialización, organizados de la siguiente manera (Diagrama 5):

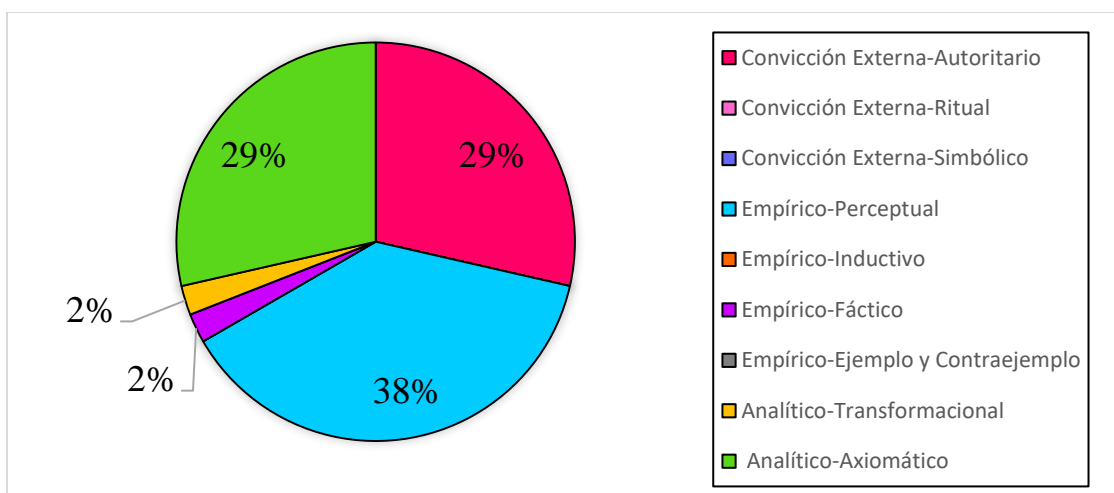


Diagrama 5 Esquemas de argumentación clase IPN

Teniendo en cuenta que en la primera parte de la clase los estudiantes debían apoyarse en las características propuestas por la tarea, que aún no hacen parte del sistema teórico para validar las construcciones de sus compañeros, se da el ambiente para que el sustento de los argumentos recaiga en la autoridad del enunciado de la tarea, siendo en esta situación relevante el esquema de Convicción Externa Autoritario. Mientras que, en la segunda parte, los estudiantes ya debían usar su sistema teórico para afirmar si las características eran o no las de un polígono, por lo que el argumento se apoya en el sistema teórico, dando lugar a los esquemas Analíticos Axiomáticos. Además, ya que en la mayor parte de la clase el trabajo giró en torno a figuras que se proyectaban, de tal manera que se podía analizar si cumplía con algunas condiciones o no, es considerable pensar que la mayor cantidad de esquemas de argumentación presentados fueran Empírico Perceptuales.

En cuanto a la clase 2 del IPN, el Diagrama 6 presenta la aparición de esquemas de argumentos.

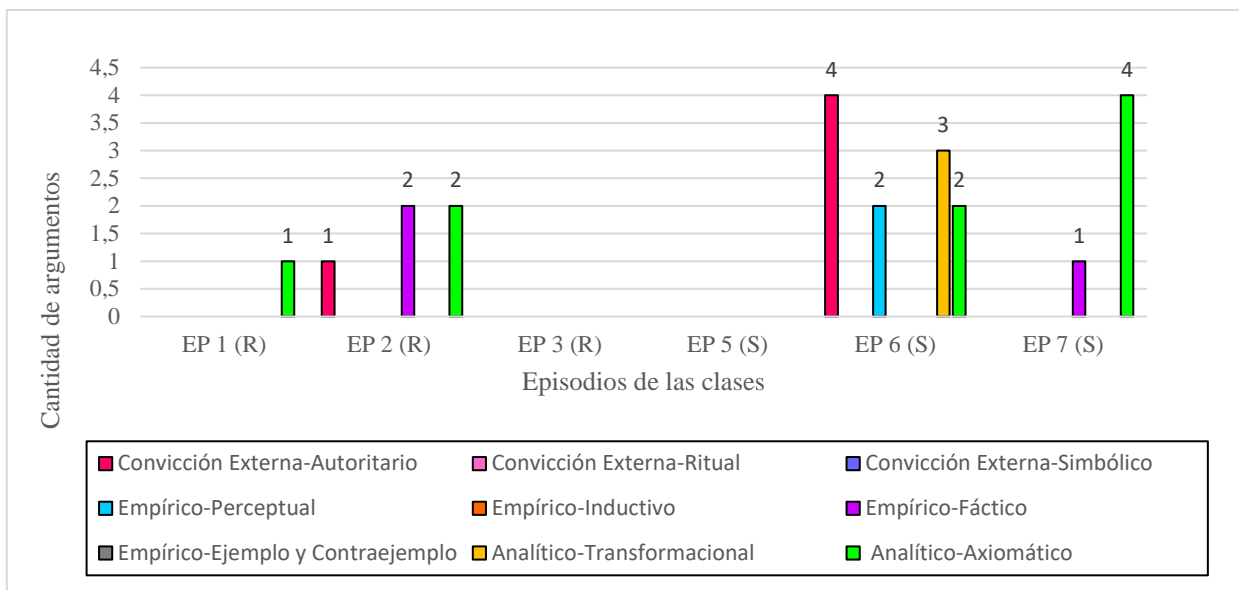


Diagrama 6 Esquemas de argumentación clase 2 IPN

Se observa en este caso que la mayor cantidad de argumentos se presentan en los episodios 2, 6 y 7. En el episodio 2, a pesar de ser un repaso sobre la actividad que se realizó en la clase anterior, los estudiantes tenían la oportunidad de participar, de hecho, eran ellos quienes proponían las ideas, de tal manera que varios estudiantes además de recordar en qué consistía la tarea, afirmaban que de ella se obtenía una circunferencia dando su respectiva justificación. En los episodios 6 y 7, los estudiantes discuten en torno a dos construcciones distintas de un triángulo isósceles que debía ser invariante en el arrastre, de tal manera que en el episodio 6 se obtuvieron 2 esquemas Empírico Perceptual, 3 Analítico Transformacional, 2 Analítico Axiomático y 4 de Convicción Externa Autoritario. Mientras que en el episodio 7 se tiene un esquema Empírico Fáctico y 4 Analítico Axiomático. En cuanto a los episodios 1, 3 y 5, no se evidencian esquemas de argumentación, aclarándose que el episodio 1 corresponde a un repaso de la clase anterior, mientras que en el episodio 3, se tiene un repaso de una definición vista con anterioridad. En el episodio 5, aunque también hay una socialización en gran grupo, son pocas las discusiones que se presentan, en la mayor parte de este episodio una estudiante expone su construcción, sin presentar alguna justificación. En toda la clase es posible distinguir 21 esquemas de argumentación, en su mayoría Analítico Axiomático con un 41%, seguido de los esquemas Convicción Externa Autoritario con un 23%, Analítico Transformacional con un 14%, Empírico Fáctico con 13% y Empírico Perceptual con un 9%. No se evidenciaron esquemas de argumentación Convicción Externa Ritual, Convicción Externa Simbólica, Empírico Inductivo o Empírico Ejemplo y Contraejemplo, tal como se muestra a continuación:



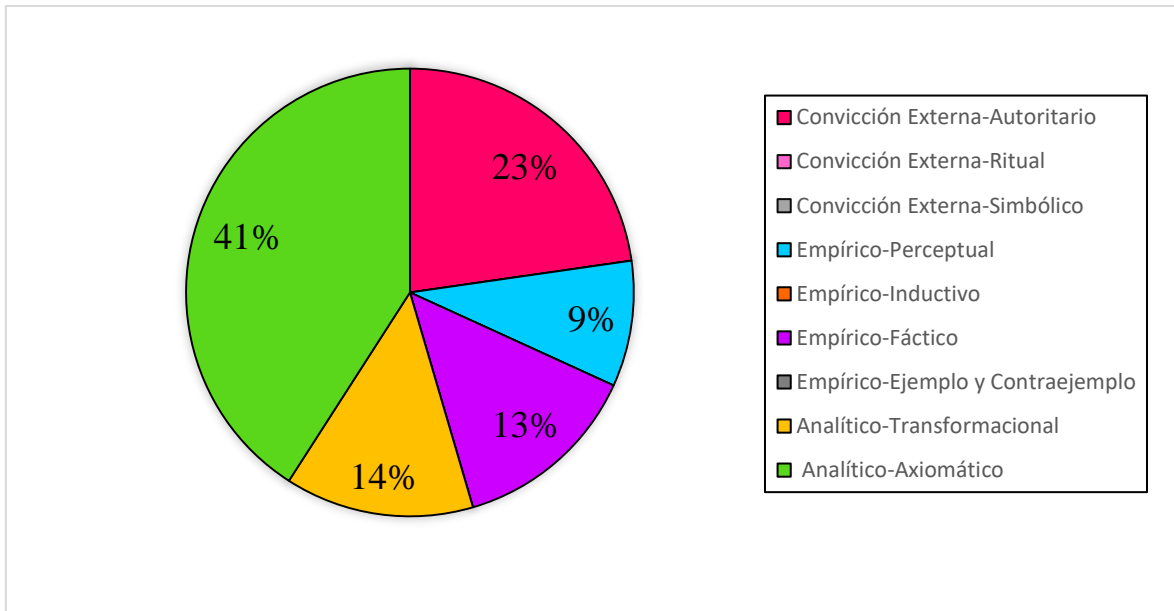


Diagrama 7 Esquemas de argumentación clase 2 IPN

En el Diagrama 7 vemos que la mayor cantidad esquemas de argumentación son Analítico Axiomáticos, posiblemente porque en la mayor parte de la clase los estudiantes debían verificar si las construcciones presentadas por sus compañeros eran las de un triángulo isósceles, por lo que los estudiantes se basaban en la definición para apoyar o refutar dichas representaciones. También se puede mencionar que una buena parte de la clase se destinó a validar las representaciones de estos triángulos, por lo que hubo un momento en el que una estudiante presentó su construcción de triángulo isósceles con pasos adicionales, con base en ello se generó una discusión en torno a la validez de la construcción y varios de los argumentos presentados para apoyar la construcción, se sustentaban en el cumplimiento del objetivo de la tarea sin importar el cómo se llegó a él, quizás por tal motivo sobresalió el esquema de Convicción Externa Autoritario. Por último, el argumento Empírico Perceptual no se presentó de igual medida que la clase anterior, dado que los estudiantes debían usar herramientas para verificar las propiedades del triángulo isósceles, no solo apoyados en sus imágenes prototípicas.

Respecto al Colegio Calasanz, lo que sigue es la presencia de esquemas de argumentación en la primera clase analizada.

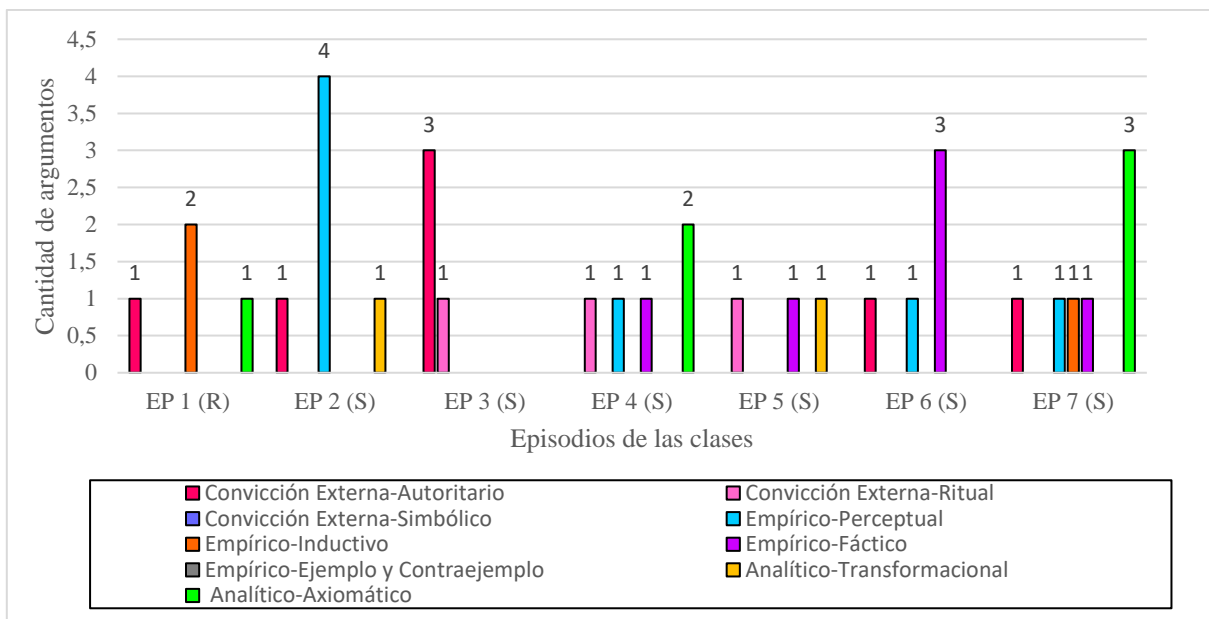


Diagrama 8 Esquemas de argumentación clase 1 Calasanz

En el Diagrama 8 se destaca el episodio 7, el cual corresponde a la socialización de un ejemplo de dos triángulos semejantes, de tal manera que los estudiantes discutían cuando se nombraban los segmentos como semejantes o como homólogos. En particular se distinguen 3 argumentos de tipo Analítico Axiomático, lo que significa que los estudiantes están vinculando elementos teóricos en sus expresiones. En este episodio el profesor solicita a los estudiantes buscar en un diccionario o en internet el significado de la palabra correspondiente, puesto que durante la clase se han empleado los términos segmentos correspondientes y homólogos sin tener clara la diferencia entre estos. El profesor brinda una definición de correspondencia, así como ejemplos de esto. A partir de ello los estudiantes empiezan a argumentar en qué casos se pueden emplear el término “segmentos correspondientes” y en cuáles no, apoyados en la definición informal que da a entender el profesor. Los esquemas Convicción Externa Autoritario, Empírico Perceptual, Empírico Inductivo, y Empírico Fáctico también se presentaron en este episodio, cada uno con una frecuencia de 1. Dada la preponderancia del esquema Analítico Axiomático presentado en este episodio, favorecido por la naturaleza de la discusión en la que el profesor trabaja en torno a la definición de segmentos correspondientes, es pertinente pensar que, en contraste con este esquema, los demás tuviesen poca frecuencia.

El episodio 2, también correspondiente a la socialización, le sigue al episodio 7 con menos presencia de argumentos. En este episodio, el profesor proyecta en el tablero dos cuadriláteros que a primera vista parecen semejantes, pero en las figuras no se observa la longitud de los segmentos y ni la amplitud de los ángulos. El profesor les pregunta a los estudiantes si los dos cuadriláteros son figuras semejantes y con ello se inicia una discusión en torno a las condiciones que se deben cumplir para determinar que se cumpla dicha propiedad. Algunos estudiantes afirman que las figuras son semejantes a partir de las características que se observan en las figuras proyectadas en el tablero, por ello se presentan argumentos de tipo Empírico Perceptual de manera mayoritaria. Por otro lado, el episodio en donde menos se presenciaron esquemas de argumentación es el quinto. Lo anterior podría deberse a que el foco

de este episodio fue la explicación que proporcionó un estudiante sobre un método para determinar si dos figuras eran semejantes, sin hacer uso de las condiciones de la definición.

En general se presentaron 34 argumentos, observamos que el 88,2% del total de ellos se presenta en el momento de la socialización, el 11,8% en el momento del repaso de las actividades anteriores. Se evidencia que los esquemas de argumentación que predomina son Empírico Perceptual y Convicción Externa Autoritario, ambos con el 20%, y el que menos es Analítico Transformacional con un 6%, los esquemas Empírico Ejemplo y Contraejemplo y Empírico Simbólico, no se presentaron en el transcurso de esta clase. Se puede concluir que el 72,7% de los esquemas se evidenció en la parte de la clase que corresponde a la socialización, mientras que el 27,3% de los esquemas se presentaron en la parte del repaso. En el siguiente grafico (Diagrama 9) se consolida la cantidad de argumentos de cada esquema que se presentaron en la clase 1.

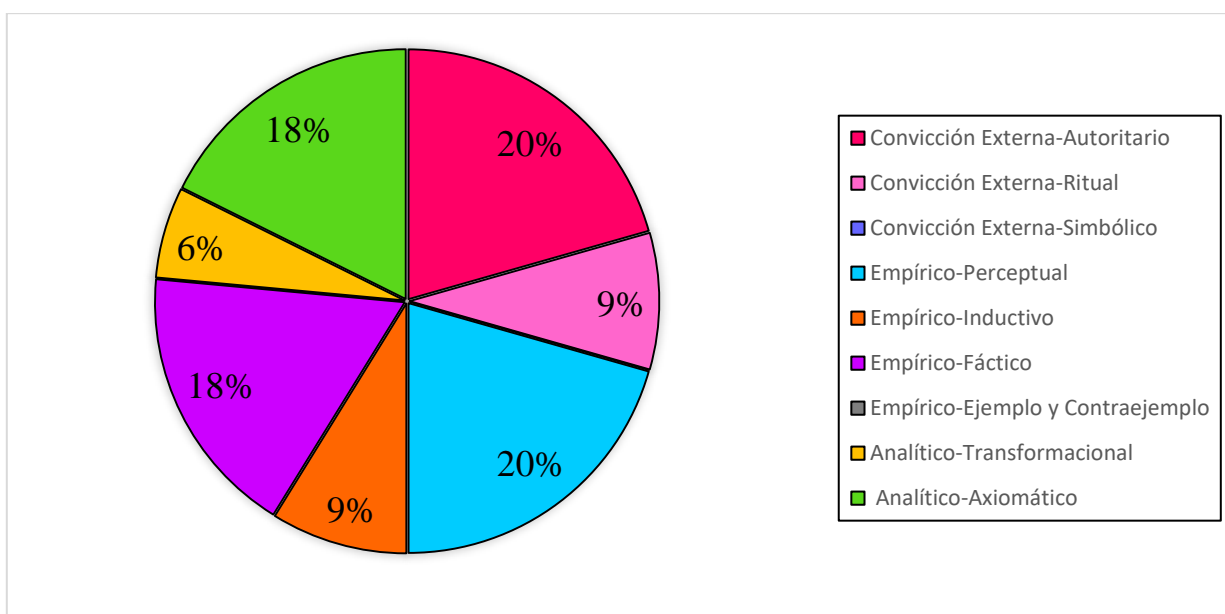


Diagrama 9. Esquemas de argumentación clase 1 Calasanz

Como la mayor parte de la clase consistió en que los estudiantes debían determinar si dos figuras proyectadas era semejantes o no, los estudiantes inicialmente se basaban en la percepción visual de los elementos de las figuras, en particular en la longitud de los segmentos y la amplitud de los ángulos argumentar su postura, por lo que, inicialmente los estudiantes se basaban en la percepción visual. Observamos que la aparición de este esquema se da en ejercicios donde los estudiantes tienen que validar alguna propiedad en una representación gráfica.

También se destaca el esquema de Convicción Externa Autoritario, pues los estudiantes se sustentaban en partes de la guía y de ideas intuitivas de lo que entendían de homotecia, definición que estaba en una guía pero que aún no se había presentado. Por último, cabe resaltar el esquema Fáctico, que surge a partir del planteamiento de una propuesta de un estudiante para determinar en qué casos dos figuras son semejantes sin hacer uso de las condiciones establecidas en la definición, donde los estudiantes justifican una respuesta sobre razones con base en el procedimiento de los estudiantes. Este esquema surge a partir del recuento que

hacen dos estudiantes y el profesor de un procedimiento aritmético para determinar que las longitudes de segmentos tienen la misma razón y así garantizar que los segmentos son correspondientes. Por ello observamos que el esquema Empírico fáctico puede darse cuando al determinar cierta propiedad geométrica se hace uso de un procedimiento para garantizar alguna propiedad.

Para la clase 2 del Colegio Calasanz se tiene el siguiente gráfico (Diagrama 10) que clasifica los esquemas de argumentación en el transcurso de la clase:

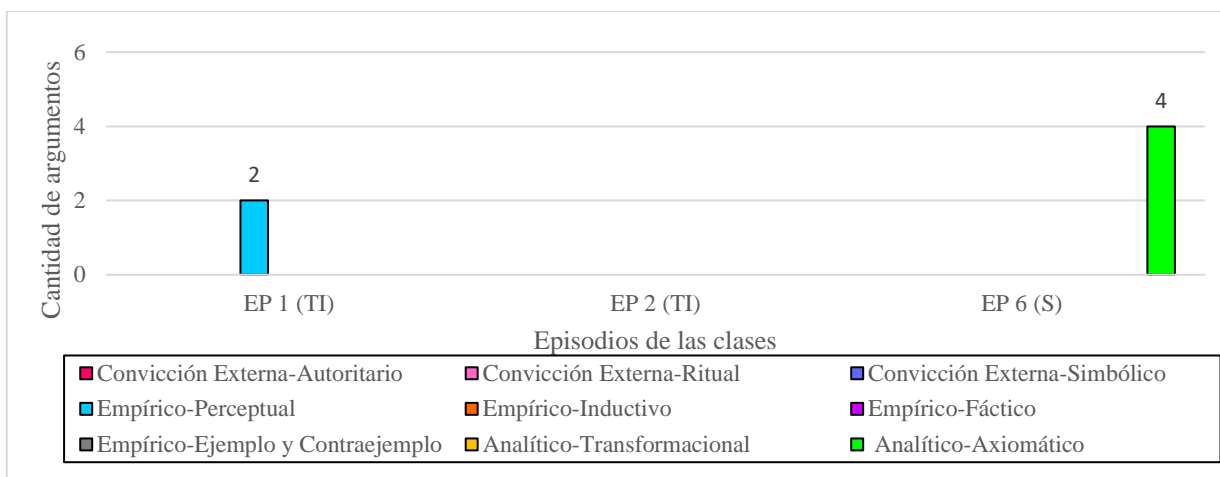


Diagrama 10 Esquemas de argumentación clase 2 Calasanz

Como se había mencionado anteriormente, los episodios de la clase que corresponden al trabajo grupal no se tuvieron en cuenta en este análisis. Por tanto, en esta clase solo se tuvieron en cuenta los episodios 1, 2 y 6. El episodio 1 fue el que menos esquemas dejó ver, dado que en este momento el profesor explicó la metodología a seguir para desarrollar la actividad planeada. Luego de ello, el profesor interactúa con una estudiante que presenta inquietudes en la forma de abordar una de las preguntas, en este momento tuvieron lugar 2 argumentos de tipo Empírico Perceptual.

El episodio donde más se evidenciaron argumentos fue el 6, con 4 argumentos tipo Analítico Axiomático. Este corresponde a la socialización de las preguntas propuestas por parte de un integrante de cada grupo de trabajo. Como se evidencia en los gráficos, solo se presentaron los esquemas de argumentación Empírico Perceptual y Analítico Axiomático, quizás esto se deba a que los estudiantes ya tenían conocimientos previos sobre los conceptos abordados en las preguntas y se remitían a elementos conceptuales como la definición de figuras semejantes, lados correspondientes y homólogos, escalas, razones, entre otras, para responderlas. Se observa ausencia de esquemas en el episodio 2, que corresponde al trabajo individual, dado que antes de discutir las preguntas en los grupos de trabajo, cada estudiante debía responderlas por su cuenta.

En general en toda la clase se presentaron 8 argumentos, 2 de ellos se excluyen porque surgen en el trabajo grupal, es decir que solo 6 de ellos se tienen en cuenta para el análisis. Se observa que el 66,6% de los argumentos se presentan en la socialización, el otro 33,3% de los argumentos se da la parte introductoria de la actividad. En cuanto al tipo de esquema el

75% son de tipo Analítico Axiomático y el 25% son de tipo Empírico Perceptual. A continuación, se presenta el gráfico donde se muestra la cantidad de argumentos que se evidenciaron en la clase 2 (Diagrama 11).

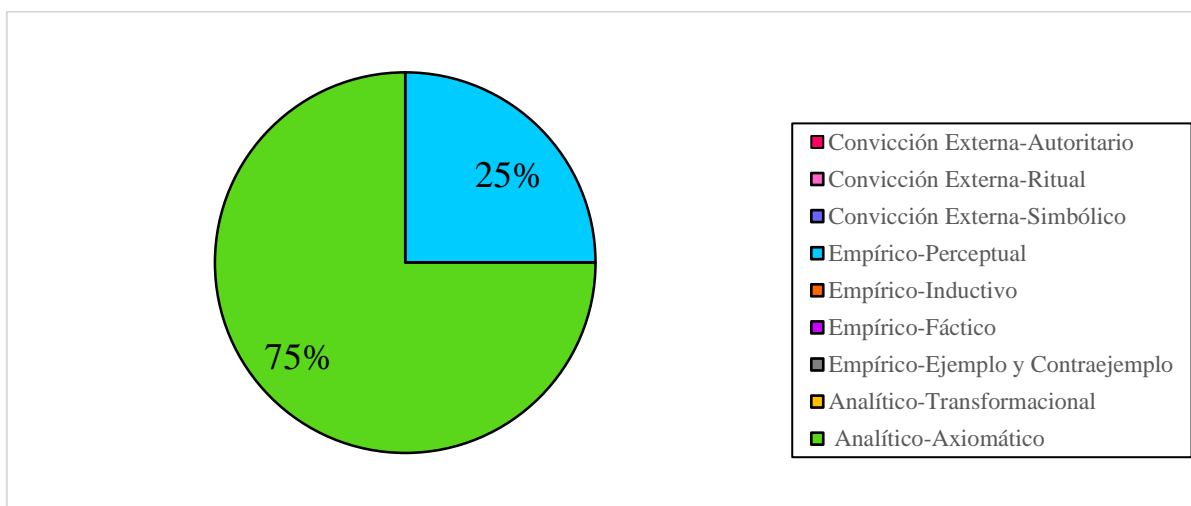


Diagrama 11. Esquemas de argumentación clase 2 Calasanz

En general, como la actividad de la clase consistía en responder unas preguntas donde vinculaban conceptos previos y para esto los estudiantes podían utilizar conceptos del sistema teórico, es considerable pensar que la mayor parte de los argumentos sean Analítico Axiomáticos, dado que se apoyan en sus apuntes, definiciones y ejemplos establecidos en la guía previa y de sus conocimientos adquiridos en el transcurso de las clases anteriores. Es decir que en esta clase se puso en juego conceptos propios de la clase, lo cual guarda relación con el esquema Analítico Axiomático. El esquema Empírico Perceptual se presentó en un momento de diálogo entre el profesor y una estudiante que tenía dudas sobre los lados correspondientes, para explicarle a la estudiante el profesor construyó varias figuras y con base en las representaciones observadas, la estudiante daba sustento a los argumentos; con lo que nuevamente observamos protagonismo del esquema Empírico Perceptual cuando hay representaciones gráficas en tela de juicio.

## 5.2. ¿QUÉ TAN AUTÉNTICOS SON LOS ESQUEMAS DE ARGUMENTACIÓN QUE SE PRESENTAN EN LA CLASE?

A pesar de reconocer los esquemas de argumentación presentes en las clases observadas, también es necesario determinar cuántos de ellos son ideas originales y cuántos son un parafraseo o una repetición de ideas anteriores. Lo anterior atiende al hecho de que son las ideas originales las que generalmente aportan al desarrollo de ideas nuevas en la clase. A continuación se muestran los esquemas presentados durante toda la clase, clasificados según la autenticidad propuesta por Goffman (1981, citado en Götz Krummheuer, 2015, p. 7). Inicialmente se realiza una clasificación para la clase 1 del IPN (Diagrama 12):

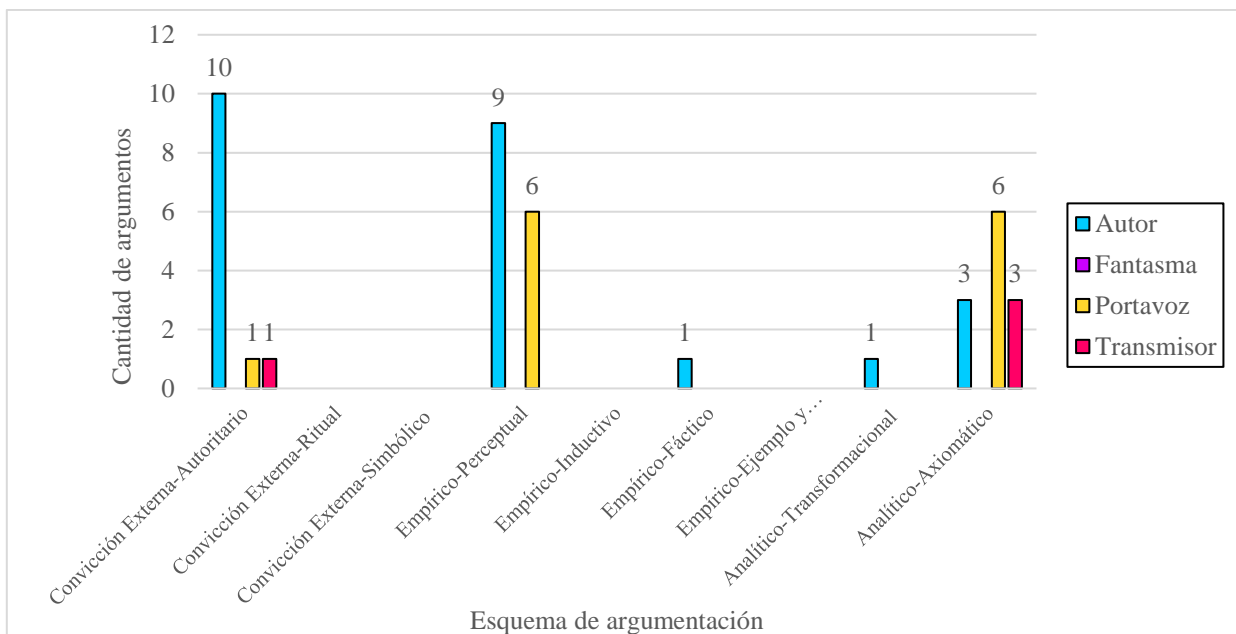


Diagrama 12 Esquemas de argumentación según la originalidad. Clase 1 IPN

A partir del gráfico anterior es posible observar que la mayor cantidad de esquemas de argumentación son auténticos, por ser de la *autoría* del estudiante. Además, es posible determinar que de estos esquemas auténticos la mayoría son de Convicción Externa Autoritario, con un total de 10 esquemas, seguido de los esquemas Empírico Perceptual con 9 y en una menor cantidad son los Analítico Axiomático con 3. Estos resultados se pueden interpretar como consecuencia de que los estudiantes están en un proceso a través del cual inician un reconocimiento de la necesidad de vincular un sistema teórico como marco para proveer garantías que permitan sustentar aserciones durante un proceso de argumentación. Podría pensarse, que más sencillo sustentarse en agentes externos, como el enunciado de una tarea, el profesor o un compañero; o sustentarse en las propiedades observables a partir de la percepción visual de un objeto geométrico; que apoyarse en el uso de un sistema teórico que apenas se están empezando a estudiar y aun no lo han interiorizado. Por lo que cobra sentido pensar que la mayor cantidad de esquemas de argumentación originales sean los de tipo Convicción externa autoritario, seguido de las Empírico perceptuales y finalmente los analítico Axiomáticos.

Luego se tienen aquellos esquemas expresados por *portavoces*, de tal manera que en su mayoría son Empírico Perceptual y Analítico Axiomático, ambos con una frecuencia de 6, y uno de Convicción Externa Autoritario. Finalmente, de los esquemas expresados por *transmisores* se tienen 3 de tipo Analítico Axiomático y uno de Convicción externa Autoritario. En cuanto a estos resultados puede pensarse que, dada la dinámica de la clase en la que los estudiantes participan, hay cierta predisposición a que vean la necesidad de dar su opinión, además es posible que los argumentos Analítico-Axiomáticos sean más convincentes para ellos, por lo que los estudiantes tratan de utilizar un argumento de este mismo tipo. Sin embargo, al no tener nuevas ideas, hacen modificaciones mínimas a las intervenciones que los hayan convencido e incluso las dejan iguales, dando lugar a participaciones de tipo *portavoz* y *transmisor*.

Si se corrobora esta información con la presentada en la pregunta anterior, es posible concluir que, aunque inicialmente la mayor cantidad de esquemas de argumentación son los Analítico Axiomático, muchos de ellos presentan un nivel de autenticidad de tipo *portavoz* o *transmisor*. De tal forma que, aunque se pensaba que la mayoría de los estudiantes hacen uso de elementos teóricos para sustentar sus ideas, realmente el esquema que cobra relevancia es el Convicción Externa Autoritario. Sin embargo, es posible reconocer que la mayoría de los esquemas argumentación son originales, con un 58,5% de la totalidad de los esquemas presentados, en menor medida se tienen esquemas de *portavoces* con un 31,7%, mientras que son muy pocos los esquemas expresados a partir de *transmisores* con un 9,8%. Cobra sentido pensar que la mayoría de los estudiantes son *autores*, ya que el ambiente de la clase favorece la participación de los estudiantes, por lo que para ellos es más sencillo aportar ideas propias deliberadas y sin presiones sociales; en un segundo lugar se encuentran los *portavoces* quienes se apoyan en los autores para tomar alguna postura; y finalmente, los *transmisores* quienes, con la intención de participar, repiten algo dicho previamente. En cuanto a los fantasmas, puede que no se presenten frecuentemente, por lo que los estudiantes para presentar sus ideas tienen a expresarlas a su manera y no están atentos a la sintaxis usada por otro compañero que se haya comunicado asertivamente.

La siguiente representación (Diagrama 13) muestran la autenticidad de los esquemas de argumentación por los episodios de la clase 1 del IPN:

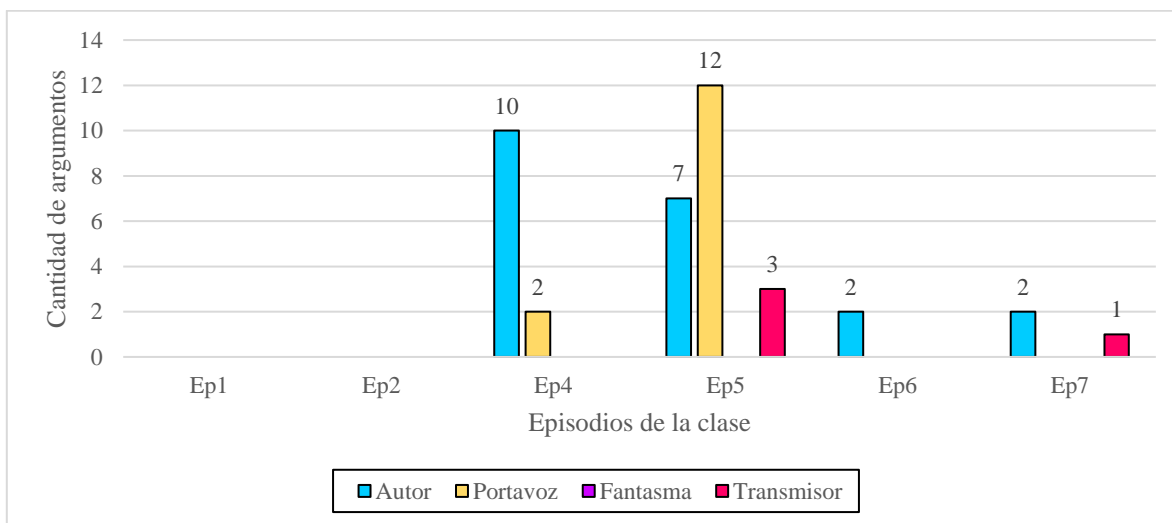


Diagrama 13. Esquemas de argumentación según la originalidad por episodios. Clase 1 IPN

Como se observa, la mayor cantidad de esquemas de argumentación se presentaron en los episodios 4 y 5, en el episodio 4 la mayoría de ellos son de autores, mientras que en el 5 muchos de esquemas pasaron a ser de portavoces. Eso tal vez se deba a que en el episodio 5 los estudiantes ya tenían como apoyo las ideas del episodio 4. Para los episodios 6 y 7 no se tienen tantos esquemas como en los anteriores, por lo que los pocos se condicionan a ser de autores o transmisores, en particular los transmisores actúan como replicadores de los argumentos de los autores en estos dos episodios.

Para la clase 2 del IPN se organizan los esquemas de argumentación según la originalidad en el siguiente gráfico (Diagrama 14):

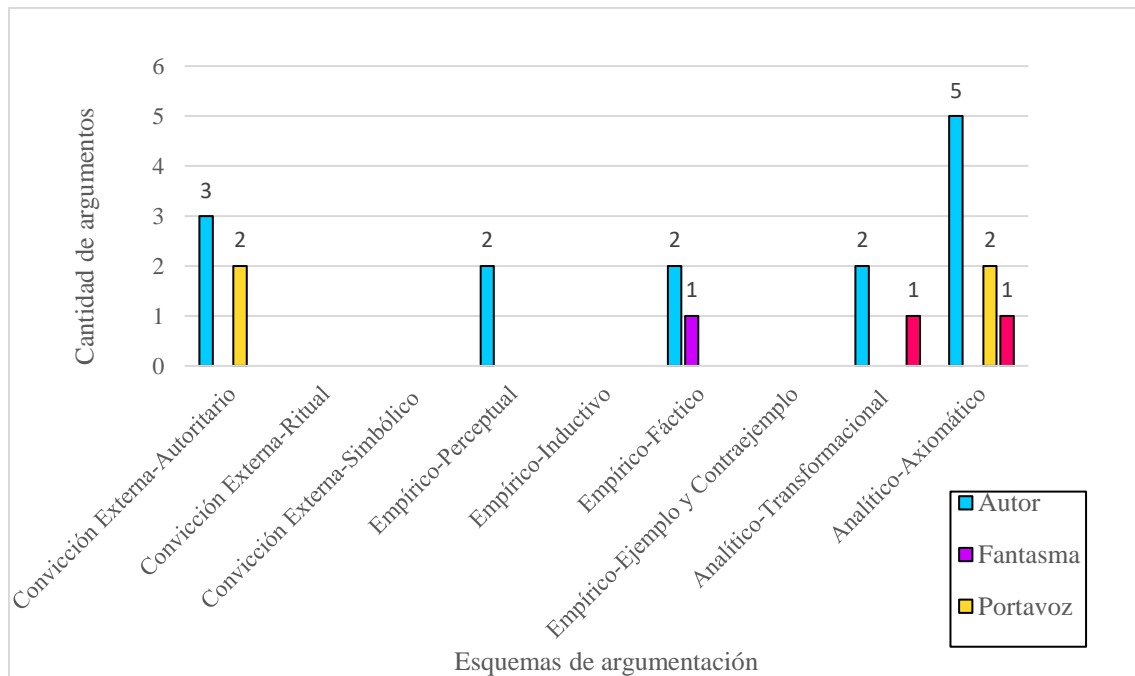


Diagrama 14 Esquemas de argumentación según la originalidad. Clase 2 IPN

A partir lo anterior, es posible concluir que al igual que en la clase 1, la mayor cantidad de esquemas de argumentación son expresados por *autores*. De ellos la mayoría son Analítico Axiomáticos con 5 esquemas, luego se tienen los de Convicción Externa Autoritario con 4 esquemas y en igual medida se tienen esquemas Empírico Perceptual, Empírico Fáctico y Analítico Transformacional con 2 esquemas cada uno. Este resultado puede derivarse de que los estudiantes han utilizado en clases pasadas la definición de triángulo isósceles, por lo que la han incorporado como sustento de sus argumentos, siendo esta la forma más convincente y por ende la más utilizada, obteniendo así varios argumentos auténticos Analítico-Axiomáticos, a diferencia de la clase analizada anteriormente en la que apenas estaban comprendiendo la definición de polígono. Por otro lado, observamos que en esta clase aun sobresale el esquema de Convicción Externa Autoritario, posiblemente por las mismas razones con las que se presentó en la clase analizada con anterioridad, es decir que es más sencillo sustentarse en un agente externo. En cuanto al esquema Empírico perceptual, se ve en menor cantidad dado que durante esta clase hubo menos variedad de representaciones visuales que estudiar. Por los demás esquemas no podemos afirmar alguna consecuencia sobre por qué tienen lugar ya que la frecuencia no es relevante para afirmar alguna conclusión.

Luego se tienen los esquemas de argumentación expresados por *portavoces*, de los cuales se tienen 2 de Convicción Externa Autoritario y 2 de Analítico Axiomático. Finalmente, con menor frecuencia se tienen el esquema Empírico Fáctico presentado con una originalidad de *fantasma*. Observamos que en la participación de *portavoz* también sobresalen los esquemas de Convicción Externa Autoritario y Analítico Axiomático, quizás esto se debe a que, como estos esquemas fueron los más frecuentes en toda la clase, eran los más comunes al momento de parafrasearlos.



Al igual que en la clase 1, se tiene que la mayor cantidad de argumentos eran Analítico Axiomáticos, sin embargo, algunas de estas ideas no son originales, siendo expresadas por *portavoces* y *transmisores*. También se observa el caso de los esquemas por Convicción Externa Autoritario donde de los 5 esquemas solo 3 de ellos son de *autores* mientras que 2 son de *portavoces*. A continuación, se muestra la gráfica (Diagrama 15) que describe toda la clase según la autenticidad presentada por episodios:

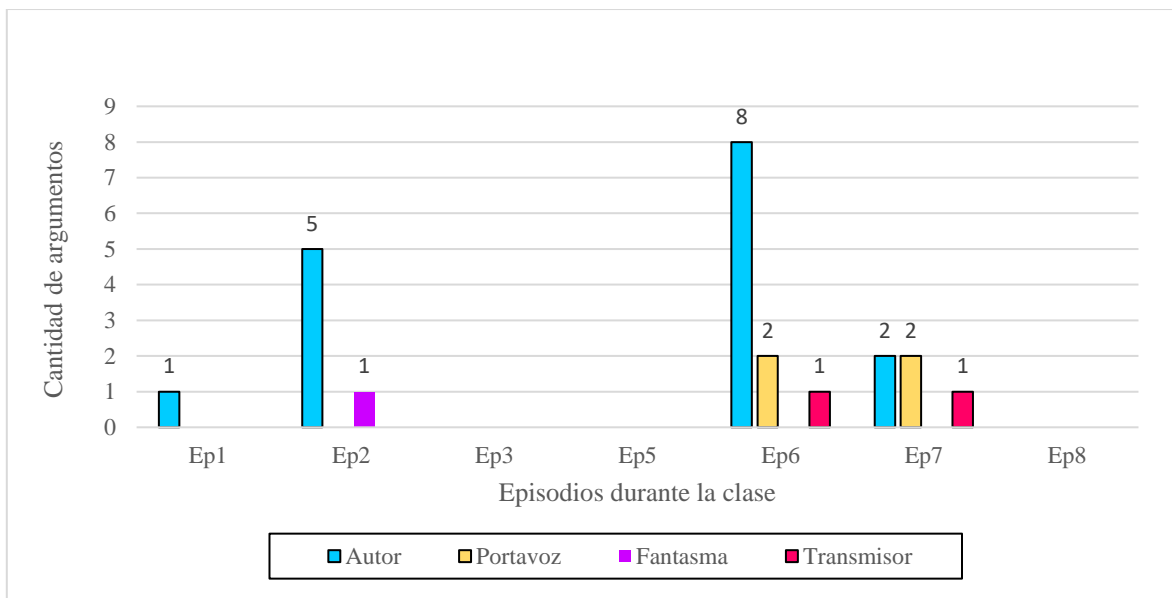


Diagrama 15. Esquemas de argumentación según la originalidad por episodios. Clase 2 IPN

En general se tiene que el 66,6% de la totalidad de los esquemas son de la *autoría* del estudiante, mientras que el 19% son de *portavoces*, el 9,6% son de *transmisores*, finalmente el 4,8% son de *fantasmas*. Nuevamente se concluye que, en un inicio de la clase, se tienen varios argumentos de autores, especialmente en los momentos de discusión, pero finalizando la clase se reduce la frecuencia de los argumentos y varios de ellos pasan a del de tipo *portavoz* y *transmisor*. Seguramente esto se da porque los estudiantes se basan en ideas convincentes y originales para dar su postura y como están en proceso de aprendizaje muchos de estos sustentos son la mínima modificación de ideas anteriores.

Para la clasificación de los datos del Colegio Calasanz se obtuvieron los siguientes resultados (Diagrama 16):

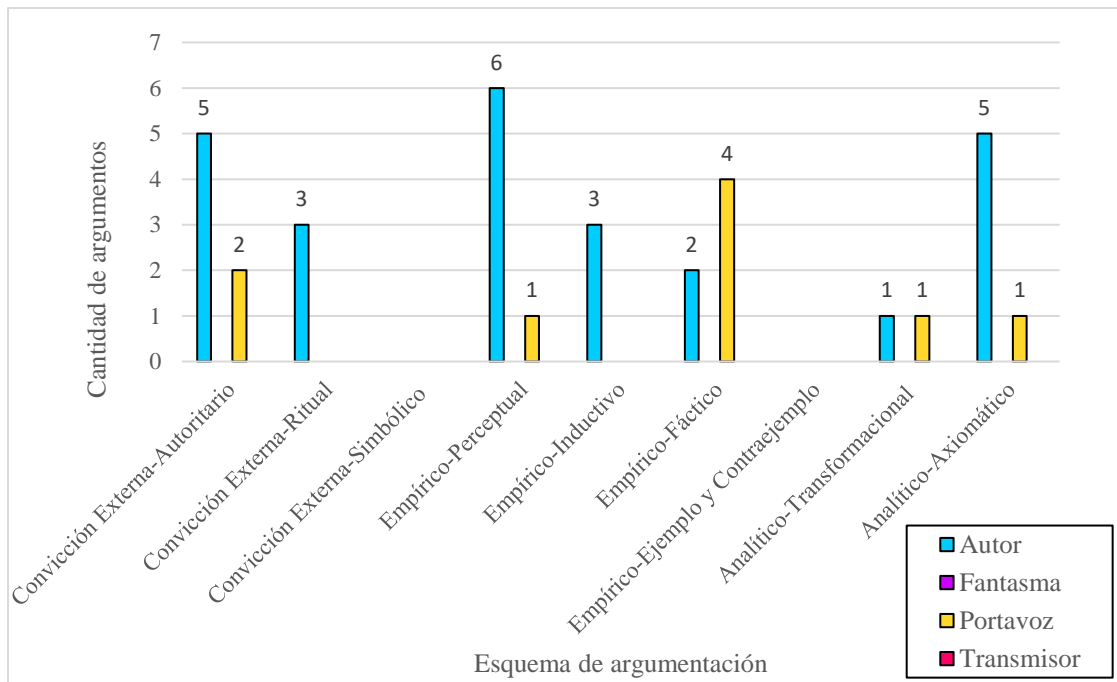


Diagrama 16 Esquemas de argumentación según la originalidad. Clase 1 Calasanz

En cuanto a la primera clase de Calasanz se concluye que la originalidad de los esquemas de argumentación se divide en dos tipos, *autor* y *portavoz*. Anteriormente en total se tenían 7 esquemas de argumentación Convicción Externa Autoritario, de ellos 5 son *autores*, lo que corresponde 71,4%, es decir que son originales tanto en semántica como en sintaxis. En el esquema Empírico Perceptual se tenía un total de 7 argumentos, de ellos 6 son de tipo *autor*, es decir 85,7% del total de argumentos de esta categoría. En el esquema Analítico Axiomático se tenía un total de 6 argumentos, de ellos 5 son de tipo *autor*, lo que corresponde al 83,3% del total de este tipo de esquema. Con lo anterior evidencia que la mayoría de los estudiantes en sus intervenciones son auténticos en las ideas que comunican, cuando tienen que sustentarse en representación visuales, como resultado de que gran parte de la clase consistió en analizar figuras y de ellas determinar propiedades, siendo esta una situación más propicia para esquemas de Empírico Perceptuales originales, pues cada estudiante se preocupa por identificar por sí mismo dichas propiedades en la figura, en segundo lugar se tienen los casos en que los estudiantes afirmaban que se cumplían las condiciones de la figura sustentados en las condiciones de la guía o de definición de semejanza, dando lugar a la presencia de esquemas de Convicción Externa Autoritario y Analítico Axiomático ambos de tipo *autor*, mientras que los portavoces se presentan, en menor cantidad, como un parafraseo de las ideas de los autores, posiblemente por la necesidad que ven en la clase de presentar alguna postura.

Sin embargo, en el esquema Empírico Fáctico pasa todo lo contrario, al inicio se tenían 6 argumentos, de ellos solo 2 son de tipo *autor*, lo que corresponde al 33,3% de la totalidad de argumentos de esta categoría, es decir que la mayoría de los estudiantes que presentan argumentos sustentados en un algoritmo son de tipo *portavoz*, con el 66,7%. Esto sucede, ya que este esquema se basa en un algoritmo, que al utilizarlo posteriormente para argumentar implica que haya una coincidencia en la repetición de los pasos de dicho algoritmo. Por lo que cuando un estudiante argumenta con base en algún algoritmo presentado por otro compañero tiene altas posibilidades de ser *portavoz*.

En general evidenciamos que predominan los argumentos auténticos con el 73,5 % de argumentos que se presentaron durante la clase, en seguida de los argumentos que son un parafraseo de ideas anteriores con un 26,5%. En esta clase no tienen lugar las categorías de *fantasma* y *transmisor*. Posiblemente, por la metodología de la clase donde es frecuente que se consoliden los conceptos geométricos a partir de las participaciones de los estudiantes, la mayoría de ellas son voluntarias y auténticas, siendo por tanto *autores*. La presencia de *portavoces* se da como consecuencia de la necesidad de participar, pero al no tener ideas nuevas se parafrasean aquellas presentadas por los *autores*. En cuanto a los *transmisores* no son comunes, tal vez porque los estudiantes no le encuentran sentido a repetir lo que otra persona menciona, y los *fantasmas* son el tipo de participación más compleja, por lo que no es común que un estudiante diga sus ideas a partir de lo que otro dijo, teniendo en cuenta que pueden no estar atentos a la forma de las palabras usadas por sus compañeros y por ello dan sus ideas con su propia sintaxis.

A continuación, se muestra el resultado de la cantidad de esquemas de argumentación auténticos que se presentan en el transcurso de la clase del Colegio Calasanz:

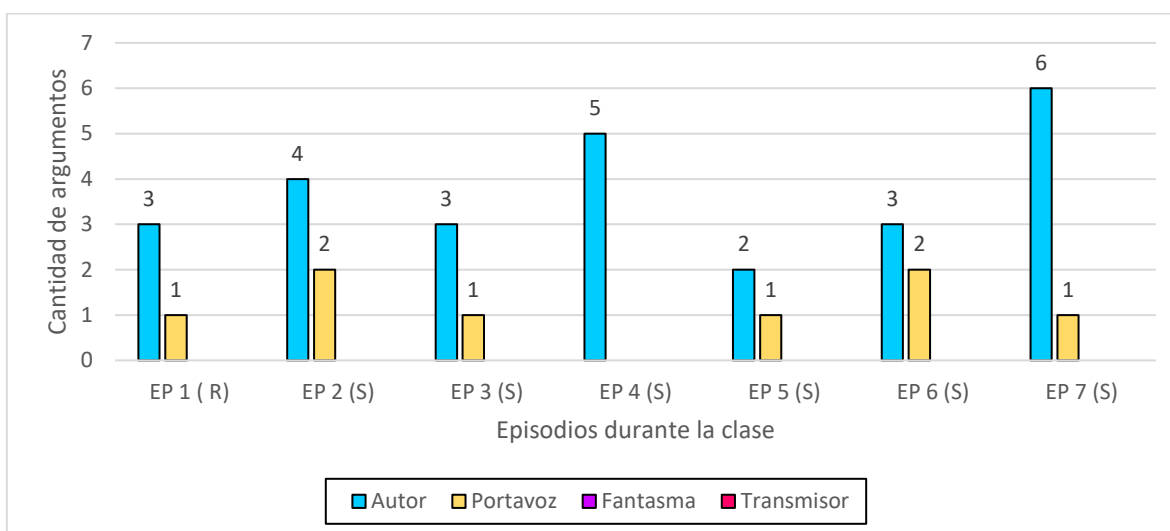


Diagrama 17. Esquemas de argumentación según la originalidad por episodios. Clase 1 Calasanz

Como se puede observar en el Diagrama 17, durante toda la clase hubo esquemas de argumentación auténticos, y por cada episodio en menor cantidad vemos los portavoces. No es posible concluir con exactitud si hay un momento clave en la clase que justifique que haya más autores, ya que la metodología en todos los casos consistía en una socialización en torno a figuras y se manejaron los mismos conceptos, por tanto, no se puede determinar que haya una tendencia que nos asegure que alguna situación promueve argumentaciones de tipo autor. El caso del episodio 6 puede ser una coincidencia ya que la frecuencia de los argumentos no es relevante. Para la clase 2 del Calasanz, se obtuvieron los siguientes resultados en torno a la originalidad de los esquemas de argumentación:

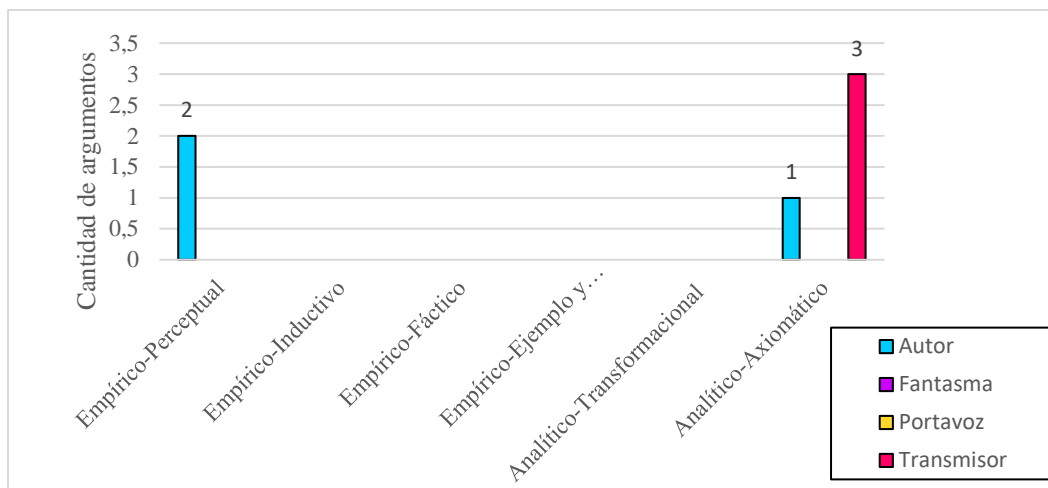


Diagrama 18 Esquemas de argumentación según la originalidad. Clase 2 Calasanz

Como se observa en la gráfica (Diagrama 18), solo se presentaron los esquemas Empírico Perceptual y Analítico Axiomático. La totalidad de los esquemas Empírico Perceptual son auténticos y se evidenciaron cuando el profesor interactuaba con una estudiante, realizando en el tablero algunas figuras geométricas para dar claridad a la inquietud que ella presentaba, en este diálogo se presentan dos ideas argumentadas auténticas. Por otro lado, de los 4 argumentos de tipo Analítico Axiomáticos solo uno de ellos es *autor*, que corresponde al 25% de la totalidad de los argumentos de esta categoría, el 75% restante corresponde a argumentos de tipo *transmisor*; este tipo de argumentos se dan en el episodio 6 de la clase donde los estudiantes realizaron la socialización de las repuestas de las preguntas planteadas por el profesor, la mayoría de ellos pasaba a leer tal cual de sus cuadernos. En general el 50% de los argumentos son de tipo *autor* y el otro 50% de tipo *transmisor*. Aunque se pensaba que en el último episodio de la clase todos los estudiantes hacían uso de elementos teóricos, realmente estaban repitiendo las ideas de otros.

Los resultados obtenidos se deben a que, dada la metodología que utilizó el profesor en esta clase, donde los estudiantes pasaban a leer las conclusiones abordadas en el trabajo grupal, la participación fue de tipo transmisor, es así como la mayoría de los esquemas Analítico-Axiomáticos fueron una repetición de las ideas formuladas en el trabajo grupal, que se presentaron al final de la clase. El caso aislado de un esquema Analítico Axiomático auténtico se presentó cuando un integrante del grupo al que se le hizo seguimiento cambió la conclusión a la que se llegó en el grupo y presentó una idea nueva, siendo el autor. El esquema Empírico Perceptual se presentó al principio de la clase, cuando una estudiante mantuvo una conversación con el profesor en torno a una representación gráfica y, como la charla era privada, no pudo haberse basado en las ideas de sus compañeros, por tanto, sus argumentos eran auténticos. Lo anterior se consolida en el siguiente diagrama (Diagrama 19):

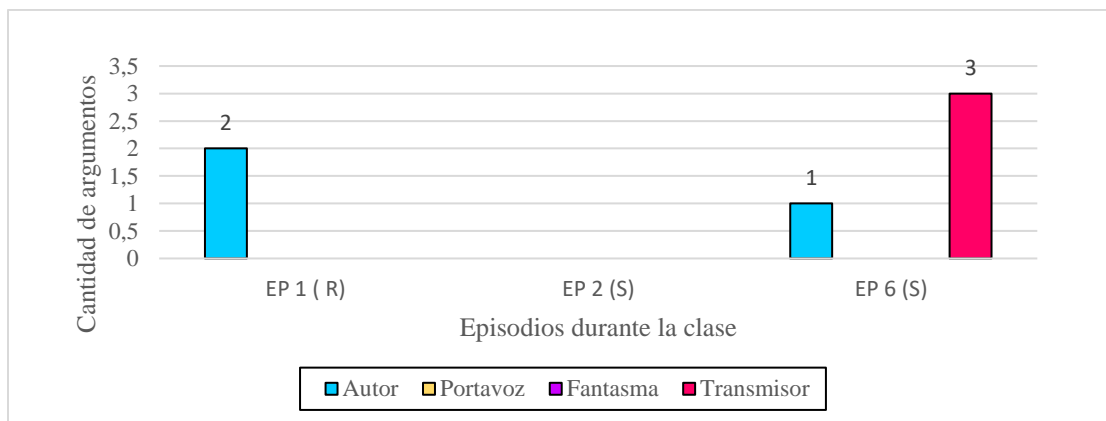


Diagrama 19. Esquemas de argumentación según la originalidad por episodios. Clase 2 del Calasanz

### 5.3. ¿QUÉ ACCIONES DISCURSIVAS PROMUEVEN LOS ESQUEMAS DE ARGUMENTACIÓN?

Procedemos ahora a analizar los niveles de discurso que promueven los esquemas de argumentación. En la clase 1 del IPN, por ejemplo, se observa el siguiente diagrama que clasifica los tipos de esquemas de argumentación por autenticidad y el nivel de discurso del que estos emanan.

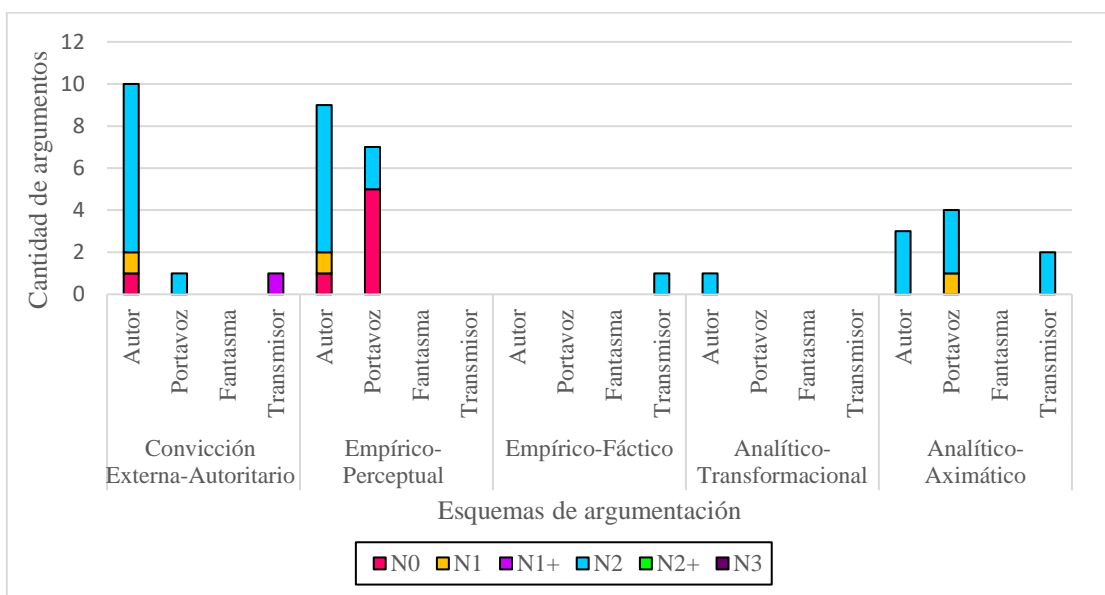


Diagrama 20 Esquemas de argumentación según la originalidad y el nivel de discurso. Clase 1 IPN

La anterior representación (Diagrama 20) permite señalar que la mayoría de los argumentos identificados provienen de un Nivel 2 de discurso, donde el profesor hace preguntas abiertas, en las que propone a los estudiantes comentar sobre el trabajo de los demás. Se evidencia que el esquema predominante por su autenticidad para la primera clase es el de Convicción Externa Autoritario, de tal manera que un 83,3% de este tipo de esquema fue promovido por un

Nivel 2 en el discurso, solo un 8,3% fue promovido por un Nivel 0 en el discurso y el 8,3% restante por un Nivel 1 en el discurso. De forma similar, se tiene el esquema Empírico Perceptual donde el 60% de los esquemas que son auténticos son promovidos por un Nivel 2 en el discurso, mientras que los esquemas de este tipo expresados por *portavoces* son favorecidos por un Nivel 0 en el discurso. En cuanto a los esquemas Empírico Fático, Analítico Transformación y Analítico Axiomático, aunque tienen menos frecuencia, también son dados a partir de un Nivel 2 en el discurso. Además, se puede observar que el nivel de discurso que menos relevancia tiene es en Nivel 1+ en el discurso y no tiene presencia el nivel 2+ en el discurso y el Nivel 3. A partir de lo anterior, se puede concluir que la mayoría de los esquemas argumentación expresados por *autores*, se ven promovidos por un Nivel 2 en el discurso, mientras que en el Nivel 0, donde se formulan preguntas cerradas y las respuestas brindadas son cortas, y en el Nivel 1, en el que las preguntas son cortas, pero se retomamos ideas anteriores y las respuestas son sucintas, se tienen más propensión a que la participación presente en los esquemas de argumentación sean de tipo *portavoz* y *fantasma*.

A continuación, se presenta esta misma clasificación para la clase 2 del IPN (Diagrama 21):

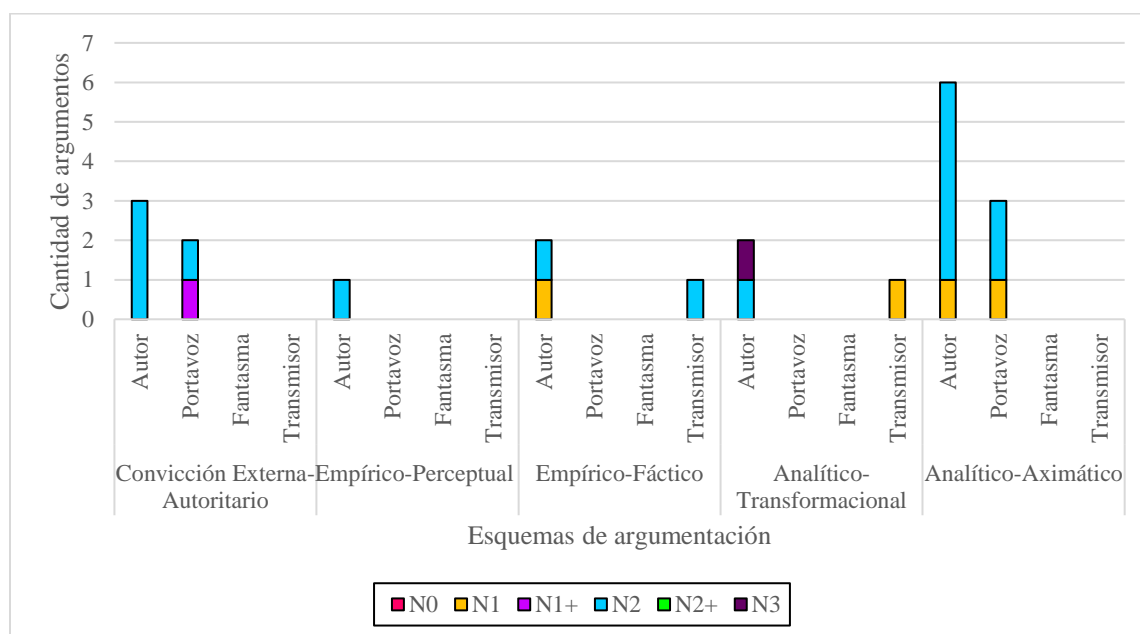


Diagrama 21 Esquemas de argumentación según la originalidad y el nivel de discurso. Clase 2 IPN

En esta clase hay más variedad de niveles de discurso que promueven los esquemas de argumentación. Sin embargo, se mantiene el Nivel 2 del discurso como el nivel que más propicia los esquemas de argumentación que son auténticos. En el caso de los esquemas Convicción Externa Autoritario, 4 de los 5 esquemas en total, son promovidos por un Nivel 2 en el discurso, lo que corresponde a un 80%, y solo uno de los esquemas fue promovido por un Nivel 1+ en el discurso.

En cuanto a los esquemas Empírico-Perceptuales, todos fueron auténticos y también promovidos por un Nivel 2 en el discurso. En el esquema Empírico Fático, 2 de los 3 esquemas fueron promovidos por un Nivel 2 en el discurso, es decir un 66,6%. Para el esquema Analítico Transformacional, se tienen tres esquemas que surgen a partir de 3 niveles distintos, uno fue dado a partir de un Nivel 2, otro en un Nivel 1 y el último en un Nivel 3 en el discurso,

siendo esta la única oportunidad en toda la clase que tuvo presencia este tipo de discurso. Finalmente se tiene el esquema Analítico Axiomático, de tal manera que de los 9 esquemas en total 7 fueron presentados en un Nivel 2 del discurso, lo que corresponde a un 77,7 % y el 22,2% restante se dio en un Nivel 1 del discurso. A la vez se puede mencionar que, si solo se tiene en cuenta aquellos esquemas Analítico Axiomático auténticos, 5 de los 6 que hubo fueron promovidos por un Nivel 2 en el discurso. Observamos nuevamente que cuando se hacen preguntas abiertas donde se les pide a los miembros de la clase opinar sobre el trabajo de los demás, se generan esquemas de argumentación auténticos, mientras que, en el caso de los demás niveles de discurso, hay más probabilidades de que los esquemas de argumentación evidenciados sean de tipo *portavoz* y *trasmisor*, sin decir que esto sea una obligación. Por lo que se infiere que al potenciar en la clase preguntas abiertas se favorecen ideas nuevas en los esquemas de argumentación. Para el Colegio Calasanz se observan los siguientes datos:

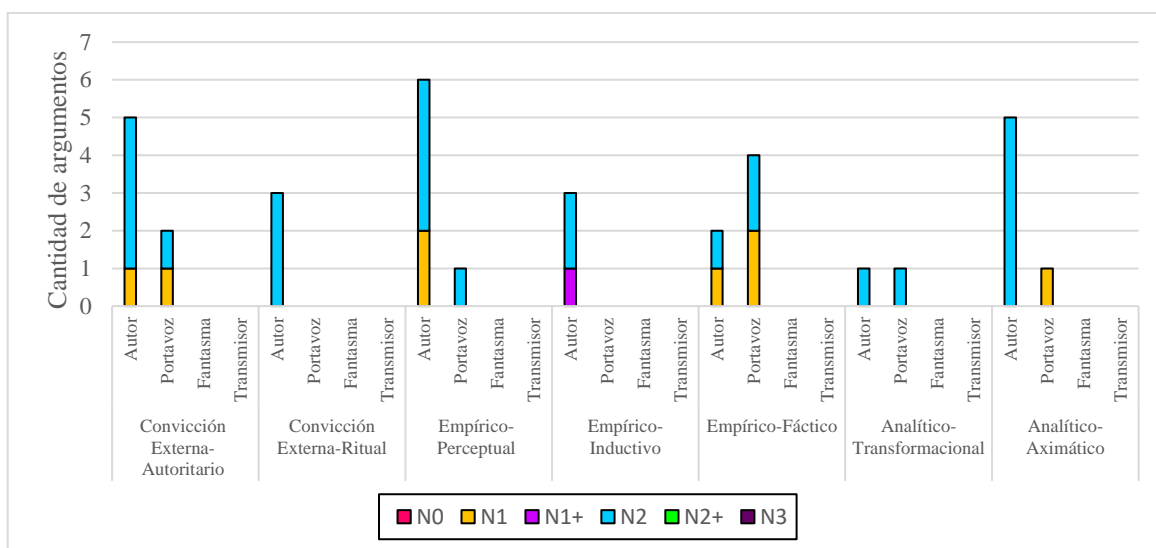


Diagrama 22 Esquemas de argumentación según la originalidad y el nivel de discurso. Clase 1 Calasanz

A partir del Diagrama 22 se encuentra que los niveles de discurso que evocan a la presencia de esquemas de argumentación son Nivel 1, Nivel 1+ y Nivel 2, pero de ellos se destaca el Nivel 2, dado que el 74% de los esquemas presentados se fomentan este nivel, donde la mayoría de ellos son de la *autoría* de los estudiantes, resaltando los esquemas de tipo Analítico Axiomático con 5 esquemas y Convicción Externa Autoritario y Empírico perceptual ambos con 4 esquemas. Recordemos que en este nivel se hacen preguntas abiertas con la intención de fomentar el pensamiento de los miembros de clase y comentar sobre el trabajo de los demás, las respuestas son participaciones voluntarias que proporciona información adicional, en algunos casos estas respuestas dan lugar a esquemas de argumentación. Le sigue el Nivel 1 con un 23% del total de los esquemas de argumentación presentados, la mayoría son de tipo Convicción Externa Autoritario, Empírico perceptual, Empírico Fáctico y Analítico Axiomático, además de este nivel de discurso se tiene que del total de esquemas presentados la mitad son fomentados por *autores* y la mitad por *portavoces*. Por último, observamos que el Nivel 1+ en el discurso promueve el 3% de los esquemas de argumentación, todos de tipo Empírico inductivo y auténticos. Aunque en esta clase hubo variedad de esquemas de argumentación, se reitera que el nivel 2 es el que predomina al momento de presentar esquemas de argumentación auténticos, ya que la naturaleza participativa de la clase permite expresar

ideas voluntariamente, comentando sobre el trabajo de sus compañeros y el profesor trata de hacer preguntas abiertas que les den la oportunidad a los estudiantes de expresarse libremente.

Para la clase 2 de Colegio Calasanz se distingue el siguiente nivel de discurso:

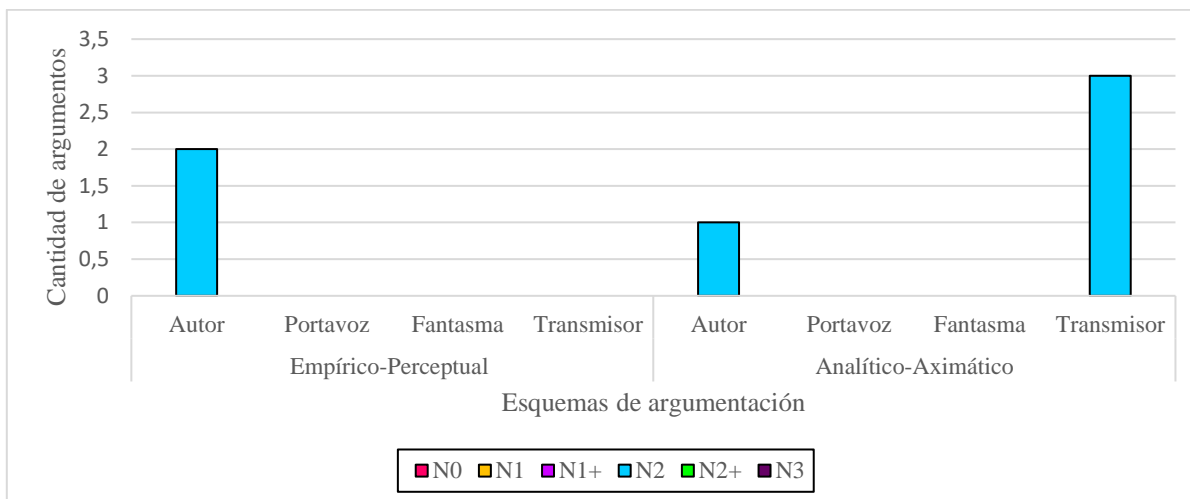


Diagrama 23 Esquemas de argumentación según la originalidad y el nivel de discurso. Clase 2 Calasanz

Con la gráfica anterior (Diagrama 23) se observa que en la segunda clase del Colegio Calasanz todas las preguntas que promovieron la presencia de argumentos se clasifican en el Nivel 2 de discurso, puesto que todas las expresiones tenían la intención del profundizar en las ideas abordadas en los grupos de trabajo y en los conocimientos previos de los estudiantes al momento de resolver sus inquietudes, en cada una de estas preguntas los estudiantes respondían voluntariamente y presentaban información adicional que argumentaba alguna idea. En general observamos que, para todas las clases, luego del nivel 2 sigue el nivel 1 por su frecuencia, esto posiblemente se debe a que en ambos colegios los profesores manifestaron preguntas abiertas y las pocas preguntas que eran cerradas pedían implícitamente al estudiante opinar sobre una idea que circundaba la discusión.

#### 5.4. ¿CÓMO DIFIEREN ESTOS RESULTADOS DE UN COLEGIO A OTRO?

Consideramos importante hacer esta comparación, ya que al tener varios escenarios para caracterizar las clases de geometría nos puede dar una visión más objetiva de los que realmente ocurre en dichos espacios. Poder compáralas nos permite determinar que tanto pueden distar los tipos de esquemas de argumentación, la originalidad en dichas participaciones y los niveles de discurso para dos contextos distintos, en este caso, ambos colegios. Nos centramos primero en los esquemas de argumentación que se evidencian en ambos colegios. Inicialmente se puede observar que en las dos clases del IPN el profesor gestiona la clase de forma similar, razón por la cual en ambas clases fue posible evidenciar los mismos cinco tipos de esquemas: Convicción Externa Autoritario, Empírico Perceptual, Empírico Fático, Analítico Transformacional y Analítico Axiomático. Además, también se tiene que



en ambas clases los esquemas sobresalientes entre los cinco anteriores son: Convicción Externa Autoritario, Empírico Perceptual y Analítico Axiomático. Mientras que, en el Colegio Calasanz, aunque el profesor gestiona ambas clases de forma similar, los resultados distan, por ejemplo, en la primera clase se presentan siete esquemas de argumentación, de los cuales se evidencian: Convicción Externa Autoritario, Empírico Perceptual, Empírico Fático y Analítico Axiomático; a diferencia de la segunda clase, en la que, solo se observan dos esquemas de argumentación, el Analítico Axiomático con mayor relevancia y el Empírico Perceptual.

Se puede concluir que en el colegio IPN hay mayor cantidad de esquemas de argumentación que en el Colegio Calasanz. En la siguiente gráfica se muestra que, en ambas clases, los esquemas que sobresalen son el de Convicción Externa Autoritaria, el Empírico perceptual y el Analítico Axiomático y son más predominantes en el IPN. Mientras que los esquemas Convicción externa Ritual y Empírico Inductivo solo se evidencian en el Colegio Calasanz. Quizás uno de los motivos por el cual se evidenciaron más argumentos en el IPN que en el Colegio Calasanz, se debe a que en una de las clases del colegio IPN el profesor planteó una discusión en la que solicitaba a los estudiantes tomar postura sobre una idea, de tal manera que se dieran los argumentos convincentes para apoyarla o refutarla; caso contrario al Colegio Calasanz en el que, en una de las clases se planteó un trabajo por grupos donde debían responder unas preguntas, luego de esto los estudiantes pasaron a leer ante todo el salón las respuestas, aunque este espacio parecería de socialización, realmente no se presentaron situaciones sobre las cuales discutir, dado que cuando pasaba el estudiante a exponer sus ideas, los demás se limitaban a escucharlas.

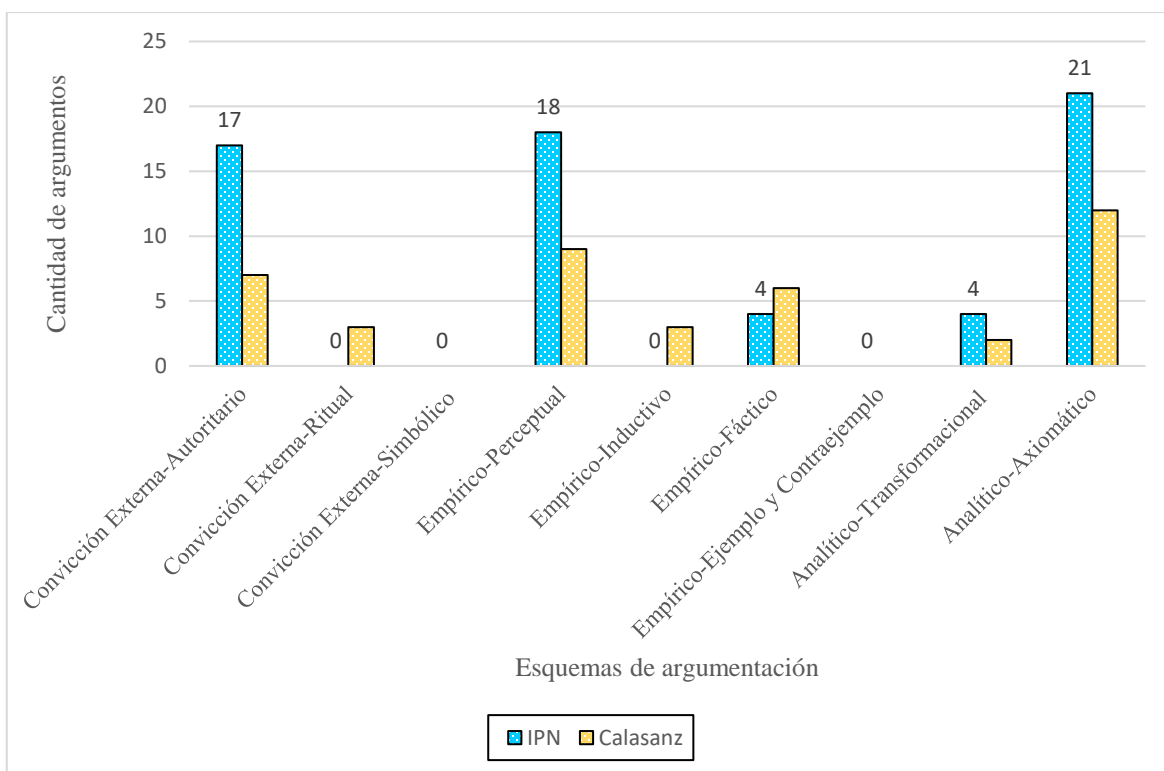


Diagrama 24 Esquemas de argumentación IPN vs Calasanz

Al relacionar la autenticidad de los esquemas de argumentación en ambos colegios (Diagrama 24), es notable que en el colegio IPN hubo más variedad de tipos de participación, según su originalidad en la semántica y en la sintaxis. En la clase 1 y 2 por ejemplo hay *autores*, *portavoces* y *transmisores*, aunque en la clase 2 solo se dio una participación de tipo *fantasma*. A diferencia del Colegio Calasanz donde en la primera clase solo se evidencian *autores* y *portavoces*, mientras que en la segunda solo hay *autores* y *transmisores*. En ninguno de los dos casos se da la participación de tipo *fantasma*. Es posible que en el IPN hubiese más variedad de participaciones de tipo *autor* y en general más variedad de tipo de participaciones, ya que se presentaron más esquemas de argumentación, en comparación con el Colegio Calasanz. Lo anterior se dio como consecuencia de que el profesor propició más situaciones de discusión y considerando el rol de participación de los estudiantes, tiene sentido que en el IPN se presentaran mayor cantidad de participaciones de tipo *autor*.

Si se comparan las clases de participación según la originalidad en ambos colegios, se observa que en todos los casos hay más *autores*, *portavoces* y *transmisores* en el IPN que en el Calasanz, incluso en el IPN hay una participación de tipo *fantasma*, como se muestra a continuación:

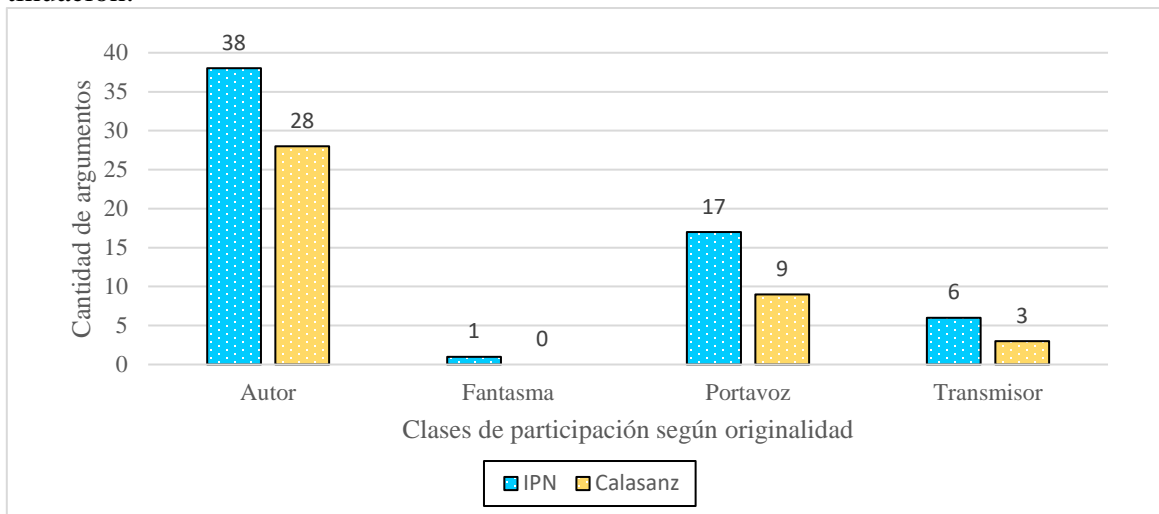


Diagrama 25 Originalidad de los argumentos IPN vs Calasanz

En cuanto a los niveles de discurso se tienen el Diagrama 25, se observa que el colegio IPN, hay mayor variedad de niveles de discurso, por ejemplo, en la primera clase, se tienen todos los niveles de discurso exceptuando el Nivel 2+ y el Nivel 3, mientras que en la segunda clase solo falta el Nivel 0 y el Nivel 2+. Ahora bien, en la primera clase del Colegio Calasanz prevalecen Nivel el 2 y Nivel 1, mientras que en la segunda solo se tiene un Nivel 2 en el discurso. También se evidencia que en ambos colegios el Nivel 2+ no denota ningún tipo de esquema de argumentación. En consecuencia, la metodología empleada por los profesores en sus clases es coherente con la cantidad de expresiones que manifestaban un Nivel 2 en el discurso, de igual manera se puede pensar que en el IPN se presentaron más variedad de niveles de discurso por el mismo tipo de actividades que propuso el profesor en las clases.

Si compramos ambas clases notamos que en el colegio IPN hay presencia de los niveles 0 y 3, que promueven los esquemas de argumentación, en cambio que en el Calasanz no se evidencia este tipo de niveles. En cuanto al Nivel 1, en ambos colegios se dan casi en una misma proporción y el Nivel 2 se observa más en el IPN que en el Calasanz (Diagrama 26).

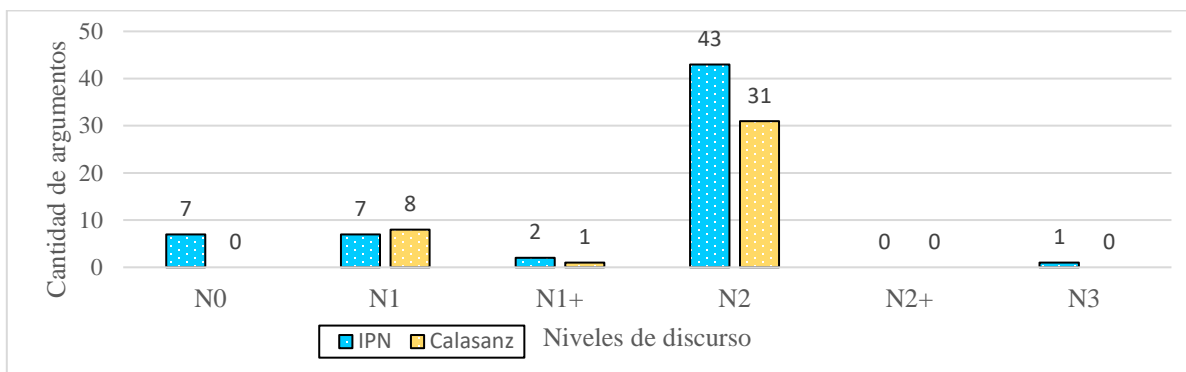


Diagrama 26 Niveles de discurso que promueven los esquemas de argumentación IPN vs Calasanz

Respecto a los dos colegios, es importante mencionar que, a pesar de observar gran variedad de esquemas de argumentación en las cuatro clases, son muy pocos si se compara con la totalidad de las expresiones de los estudiantes. Pues hay que tener en cuenta que por las cuatro transcripciones hay un promedio de 1800 expresiones en comparación con las 104 expresiones en las que se evidenciaron esquemas de argumentación, con lo que aproximadamente se tiene un 5,8% de esquemas de argumentación entre un total de participaciones. Se debe tener en cuenta que ninguna de las cuatro clases fue presentada por el profesor de forma magistral y, por lo que se observa de las transcripciones, en todo momento el profesor procuraba una participación de los estudiantes, teniendo más un rol de guía que de orador.

## 6. CONCLUSIONES

A continuación, presentamos algunas conclusiones encontradas a partir del análisis y la discusión realizada. En una primera parte enunciaremos sintéticamente los resultados encontrados referentes a los tres focos de discusión planeados: los esquemas de argumentación, el tipo de participaciones según la originalidad y los niveles de discurso que promueven estos esquemas; luego se menciona la correspondencia de los resultados obtenidos con los referentes curriculares nacional y finalmente se plantean algunas preguntas de reflexión docente entorno a las temáticas abordadas.

En cuanto a los esquemas de argumentación encontramos que aquellos que predominan en las clases de geometría en ambos colegios son: el Empírico Perceptual, el Analítico Axiomático y el de Convicción Externa Autoritario, en menor frecuencia se observan los esquemas Analítico Transformacional, Empírico Inductivo, Empírico Fáctico, Empírico Ritual y no hubo evidencia de los esquemas Empírico Simbólico y Empírico Ejemplo y Contraejemplo. Quizás el esquema Empírico Simbólico no se presentó por la edad de los estudiantes, en donde su paso por la simbología empleada en el formalismo geométrico no es tan elaborado, mientras que el esquema Empírico Ejemplo y Contraejemplo tal vez es ausente por el tipo de tareas propuestas en las cuatro clases. Cabe aclarar que el tipo de datos obtenidos no nos permite identificar qué tipo de tareas promueven este tipo de esquemas.

Se puede afirmar que cuando se inicia un nuevo contenido en la clase de geometría no se presentan con tanta frecuencia esquemas de tipo Analítico Axiomático, pues los estudiantes aún están interiorizando el concepto abordado en la clase, en cambio utilizan el esquema de Convicción Externa Autoritario o Empírico Perceptual, dependiendo de la forma en que el profesor gestione su clase. Cuando ya se tiene una claridad sobre el tema, es más fácil que los estudiantes tiendan a usar el esquema Analítico Axiomático, tal vez por ser más convincente para ellos.

En un segundo lugar, al analizar los tipos de participaciones según la originalidad, encontramos que los estudiantes pueden ser más originales en esquemas de Convicción Externa Autoritarios y Empírico Perceptuales que en los Analítico Axiomáticos, esto puede deberse a que es más sencillo sustentarse en agentes externos o en las propiedades observables de una representación visual de un objeto geométrico, que apoyarse en el uso de los conceptos que apenas se están empezando a estudiar.

Los esquemas Empírico Perceptual tienden a originarse en actividades que impliquen la discusión en torno a propiedades de objetos geométricos. El esquema de Convicción Externa Autoritario se destacó de alguna manera cuando se hacía un primer abordaje sobre los conceptos, principalmente cuando el profesor utilizaba guías o presentaba características de objetos que aún no estaban vinculados al conjunto de ideas geométricas aceptadas en la clase. Por último, en cuanto al esquema Empírico Fáctico, se puede decir que por su naturaleza promueve participaciones de tipo portavoz, porque al tomar un algoritmo dado previamente como sustento, tienen a parafrasearse los pasos del procedimiento original.

La mayor cantidad de los esquemas presentados se dio en el momento de la socialización, donde los estudiantes discutían en torno a alguna representación, algún ejercicio o alguna

idea propuesta por algún miembro del salón. Por lo que se considera pertinente promover ambientes en las clases de geometría donde los estudiantes tengan el espacio para participar, preferiblemente donde se dé la oportunidad de debatir sobre alguna situación referente a la clase. Esto concuerda con los NCTM (citados en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas, 1998), donde se sugiere que:

“las clases deberían caracterizarse por las conversaciones sobre las matemáticas entre los estudiantes y entre éstos y el profesor. Para que los profesores maximicen la comunicación con y entre los estudiantes, deberían minimizar la cantidad de tiempo que ellos mismos dominan las discusiones en el salón de clase” (p. 74).

Se observa además que, aunque los repases pueden ser espacios de la clase donde los estudiantes expongan sus ideas, puede que este no sea un momento propicio para fomentar esquemas de argumentación, sin afirmar que estos momentos no son importantes durante la clase. Esto se concluye si se tiene en cuenta que generalmente, durante los repases, el profesor hace preguntas puntuales intentando contextualizar a los estudiantes sobre la temática se venía abordando, siendo poco probable que se genere una discusión en este momento de la clase, ya que se cuestiona sobre algún conocimiento más no le sugieren al estudiante tomar postura frente a algún tema a discutir. Esto también se corrobora si se observan los resultados de las cuatro clases, donde el momento de repaso se da al iniciar la clase y casi no hay esquemas de argumentación.

Sobre la autenticidad de los esquemas de argumentación se puede concluir que en ambos colegios la mayoría de los esquemas de argumentación fueron presentados por *autores*, seguidos de *portavoces* y en menor cantidad por *transmisores*, solo hubo un esquema expresado por un *fantasma*. En un primer análisis se pensaría que el esquema predominante es el Analítico Axiomático, lo que sería algo positivo, pues la mayoría de los estudiantes argumentan usando un encadenamiento lógico vinculando elementos de su bagaje conceptual, sin embargo, al analizar el tipo de participación según la originalidad, se determina que algunos de ellos no son más que un parafraseo o una repetición de alguna idea que sí fue original. Por lo que al final salen a relucir esquemas como los Convicción Externa Autoritario o los Empírico Perceptual, en la que su participación es auténtica. La categoría Empírico perceptual sale a relucir dado que muchos de estos esquemas, se presentaron a partir de alguna discusión sobre un objeto geométrico que era proyectado y podía ser visualizado por todos los miembros de salón. Mientras que las de Convicción Externa Autoritario se dieron a partir de algunas actividades que implicaban el uso de condiciones dadas por el profesor.

En cuanto a la gestión de las clases por parte de los profesores, donde se fomentan ambientes de socialización, los estudiantes se comunican de forma deliberada y sin presiones sociales, razón por la cual se cree que la mayoría de las participaciones son de tipo autor. En un segundo lugar se tienen los *portavoces* quienes se apoyan en los autores para tomar alguna postura. Luego, los *transmisores* quienes, con la intención de participar, repiten algo dicho previamente. Finalmente, sobre los fantasmas, puede que no se presenten tan frecuentemente por lo que los estudiantes para presentar sus ideas tienen a expresarlas a su manera y no están atentos a la sintaxis usada por otro compañero que se haya comunicado asertivamente. Krummheuer (2015), concluye de su estudio que los estudiantes que tiene estatus de *Autor*, no están en situación de aprender algo nuevo, mientras que los *Portavoces* y *Fantasmas* están en proceso de aprendizaje y los *Transmisores* están en una fase inicial. A pesar de ello, en esta investigación consideramos que los estudiantes que se han clasificado como *Autores*,

reportan un esquema de argumentación auténtico siguen en procesos de aprendizaje solo que las ideas aportadas son nuevas y enriquecen el discurso.

Al analizar los esquemas de argumentación auténticos bajo la mirada de los niveles de discurso que los promueven, se encontró que el Nivel 2 fue el nivel más predominante para promover esquemas de argumentación, aunque hubo casos donde también se encontró un Nivel 0, Nivel 1, Nivel 1+ y un Nivel 3. Por lo que se puede concluir que al hacer preguntas abiertas donde se fomente la discusión sobre los trabajos de los demás, de tal manera que los estudiantes respondan voluntariamente, se favorece un ambiente donde se promueven los esquemas de argumentación que sean originales. A diferencia del estudio realizado por Kaur (2013) quien, a partir de los datos recolectados en las clases de Singapur, concluyó que el profesor era el quien domina el discurso, predominando los niveles 0, 1 y 1+.

Con lo anterior, observamos que las clases de ambos profesores se caracterizaron por permitir la participación de los estudiantes, haciendo preguntas que permitan la comunicación de ideas sobre los objetos geométricos involucrados, esto se puede corroborar si se tienen en cuenta que el nivel de discurso predominante fue el 2 (en el que las preguntas que promueven el discurso son abiertas, con la finalidad de que los estudiantes comenten sobre el trabajo de sus compañeros). Por lo que se puede considerar que las cuatro clases se ajustaban a lo que sugieren los referentes curriculares nacionales sobre la forma en que el profesor debe gestionar sus clases, ya que los profesores maximizaban la cantidad de tiempo que en los estudiantes discutían, y minimizaban el tiempo en el que dominaban la discusión.

Los lineamientos afirman que la geometría constituye una importante fuente de modelación, permitiendo fomentar las diversas formas de argumentación (MEN, 1998, p. 17). Situación que en efecto se evidenció en las cuatro clases analizadas ya que hubo variedad de argumentos, tal vez no con la frecuencia que se esperaría como se mencionó anteriormente, sin embargo, algunos de estos argumentos no provenían de participaciones auténticas, siendo estos, producto de una idea inicial. A partir de esto, vale la preguntarnos como maestros en ejercicio y en formación, si el hecho de que nuestras clases se vean privilegiadas por discusiones entre todos los miembros del salón implica que se presenten aquellos argumentos que vayan en vía a la demostración matemática, tal como lo sugieren los Estándares Básicos en Competencias Matemáticas. Por otro lado, surgen inquietudes que nos permitan reflexionar sobre: ¿cómo cambia el objetivo de la clase si se presentan más cantidad de participaciones que evidencien esquemas de argumentación que sean de tipo *portavoz*, *transmisor* y *fantasma*, que aquellas que son de tipo autor?, ¿Realmente este tipo de participaciones son las que buscamos en nuestras clases, o lo que esperamos es abordar los contenidos con una variedad de ideas nuevas? Vale la pena aclarar que no estamos considerando que este tipo de participaciones (*portavoz*, *fantasma* y *transmisor*) no aportan al proceso de aprendizaje de los estudiantes, más bien se plantean estas preguntas con el fin de reflexionar que tipo de participaciones favorecen al cumplimiento de los objetivos proyectados.

En general, este trabajo hace un aporte a la educación matemática, en tanto que consideramos que no es suficiente analizar la cantidad de expresiones en las que se evidencia un argumento en las clases de geometría, si no que además de tener variedad de participaciones es importante reconocer en ellas argumentos que traigan ideas auténticas que aporten al desarrollo de la clase, así las discusiones no se centran en una sola idea. Es precisamente considerar la autenticidad en la participación los genera un aporte diferente de nuestro trabajo de grado,

además es posible considerar que en este Nivel de Discurso los esquemas predominantes son los de Convicción externa Autoritario, Empírico perceptual y Analítico Axiomático, condiciones que no hemos visto que se hayan reportado previamente

## REFERENCIAS

- Chico, J. (2018). Impacto de la interacción en grupo en la producción de la lengua del álgebra en clase de matemáticas. *AIEM - Avances de Investigación En Educación Matemática*, 14, 31–47.
- Flores, C., Gómez, A., & Flores, H. (2010). Esquemas de argumentación en actividades de Geometría Dinámica. *Acta Scientiae*, 12(2), 22–42.
- Flores, H. (2007). Esquemas de argumentación en profesores de matemáticas del bachillerato. *Educación Matemática*, 19(1), 63–98.
- Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students' Proof Schemes: Results from Exploratory Studies. *CBMS Issues in Mathematics Education*, 7, 234–284.
- Harel, G., & Sowder, L. (2007). Toward Comprehensive Perspectives on the Learning and Teaching of Proof. *Assessing Teachers' Mathematical Knowledge. What Knowledge Matters and What Evidence Counts*, 6179(619), 111–155.
- Inglis, M., & Mejía, J. (2005). La fuerza de la aserción y el poder persuasivo en la argumentación en matemáticas. *EMA*, 10(2 y 3), 328–353. Retrieved from <http://www.fayetteville-blog.com/2011/04/05/online-dating-leads-to-extortion-case-fraud-plea/>
- Jiménez, A., & Pineda, L. (2013). Comunicación y Argumentación en clase de matemáticas. *Educación y Ciencia*, 16, 101–116.
- Kaur, B. (2013). Participation of students in content-learning classroom discourse: A study of two grade 8 mathematics classes in Singapore. *Student Voice in Mathematics Classrooms Around the World*, 65–88. <https://doi.org/10.1007/978-94-6209-350-8>
- Krummheuer, G. (2007). Argumentation and participation in the primary mathematics classroom Two episodes and related theoretical abductions. *Journal of Mathematical Behavior*, 26, 60–82. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2007.02.001>
- Krummheuer, G. (2015). Methods for Reconstructing Processes of Argumentation and Participation in Primary Mathematics Classroom Interaction. *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education*, 51–74. <https://doi.org/10.1007/978-94-017-9181-6>
- Krummheuer, & Götz. (1995). The Ethnography of argumentation. In P. Cobb & H. Bauersfeld (Eds.), *The emergence of Mathematical Meaning* (pp. 229–269). Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- Marmolejo, E., & Moreno, G. (2011). Argumentar-Conjeturar: Introducción a la demostración. *Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa*, 2(2), 509–516.
- MEN. (1998). Lineamientos Curriculares:Matemáticas. *Serie Lineamientos Curriculares*, 103.



- MEN. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas* (Ministerio). Bogotá, Colombia. <https://doi.org/958-691-290-6>
- Navarro Martinez, B., & Rigo Lemini, M. (2017). Análisis de procesos didácticos para lograr convencimiento en un conocimiento matemático bien fundamentado. *Investigación En Educación Matemática XXI*, 335–345.
- Roig, A., Llinares, S., & Penalva, M. del C. (2010). Aprendiendo sobre la comunicación matemática. Características de las estructuras argumentativas de estudiantes para profesores de matemáticas en un entorno On-Line. *Universidad de Alicante. Departamento de Innovación y Formación Didáctica*, 23(2010), 533–543. Retrieved from <http://hdl.handle.net/10045/16586>
- Sfard, A. (2008). *Aprendizaje de las matemáticas escolares desde un enfoque comunicacional* (Pimera). Universidad del valle.
- Valdivé, C. (2013). Estrategias implementadas por los matemáticos cuando demuestran: estudio de caso. *Educare*, 17(2), 4–26.

# ANEXOS

A continuación, se presenta el análisis completo de las cuatro clases, las dos de IPN y las dos del Calasanz.

## COLEGIO INSTITUTO PEDAGÓGICO NACIONAL (IPN)

CLASE: 10 DE MAYO DE 2018

Durante esta clase los estudiantes hacen un análisis sobre las propiedades de los polígonos haciendo uso del software GeoGebra a través de unas tabletas. Es la primera vez que los estudiantes utilizan esta aplicación, por ende, una parte de la clase es destinada para la explicación del uso de las tabletas y del software.

En la clase anterior los estudiantes habían visto la definición de polígonos. Esta fue construida a partir de las características que los estudiantes determinaban en un conjunto de polígonos y uno de no polígonos. Al iniciar esta clase el profesor hace un repaso de la definición que los estudiantes dieron sobre polígono y posterior a esto plantea una tarea en la que debían construir una figura que cumpliera algunas condiciones. Aunque en ningún momento se dijo que las condiciones propuestas en la tarea llevaban a la obtención de un polígono, algunos estudiantes intuyeron esto. De esta manera surge una discusión en la que los estudiantes intentaban construir una figura que cumpliera las condiciones dadas en la tarea y que no fuera polígono. A partir de esto surgen algunas discusiones y con la ayuda de algunos ejemplos se llega a la conclusión de que la figura que cumple dichas condiciones sí es un polígono.

### *Episodio 1*

Al iniciar la clase el profesor hace un repaso sobre lo que se vio en la clase anterior. Él inicia preguntándole a Santiago:

(...) ¿Nos podrías comentar qué fue lo que hicimos la clase pasada? (...) ¿Qué te acuerdas?

Con esta pregunta se puede evidenciar un nivel de discurso N1+, ya que es abierta, En la se puede evidenciar un interés por parte del profesor a que el estudiante retome las actividades realizadas la clase anterior, en cuanto a la respuesta, se observa una expresión corta en la que no profundiza sobre la actividad. Sin embargo, al tener en cuenta la respuesta del estudiante, se puede determinar que él no profundiza en la tarea.

Santiago: Hicimos actividad de polígonos.

Esta expresión se puede considerar de la *autoría* del estudiante, pues nadie había hecho previamente algún comentario respecto al tema, tampoco se basó en los apuntes de su cuaderno. Con base en esta respuesta, el profesor formula una nueva pregunta, intentando que los estudiantes hagan una mejor descripción de la actividad de la clase anterior.

Ok. Vimos los polígonos. Joseph, ¿tú te acuerdas qué era un polígono?

En este caso los estudiantes no aportan mayor respuesta, solo Joseph afirma que, aunque no se acuerda, sí lo tiene copiado en el cuaderno. Por lo que, con esta pregunta, se identifica un N2 en el discurso, pues es una pregunta abierta en la que pide una profundización sobre la definición de polígonos. Gabriela quien lee sus apuntes, aporta información adicional leyendo de sus apuntes:

Figura que tiene tres o más lados y sus líneas (...) y sus líneas se intersecan, pero no salen del punto de donde se intersecan. No tienen rayas o líneas en su interior. No tienen nada en su interior. Su número de lados es indefinido, es decir no hay número.

Como esta respuesta fue leída literalmente del cuaderno, no se considera una idea original, ni en la sintaxis ni en la semántica, siendo Gabriela trasmisora de definición de polígono presentada en clases anteriores. El profesor recuerda que la idea del repaso es que se haga sin mirar el cuaderno. Así que Nicolás con sus propias palabras, a través de varias intervenciones, da la definición de polígono:

Es una figura porque (...). Es una figura geométrica, con tres o más lados, que no puede tener nada en su interior.

Con esta intervención, se evidencia autenticidad en la forma de la expresión, pero el contenido sí se puede relacionar con la definición que Gabriela leyó del cuaderno anteriormente, por lo que Nicolás es *portavoz*. Finalmente, Cristian, quien también es *portavoz*, complementa la idea de Nicolás:

Y que cada segmento casi siempre se une con otro en sus extremos.

En las expresiones de los estudiantes que participaron, no se observa algún esquema de argumentación.

## ***Episodio 2***

El profesor explica el funcionamiento del software GeoGebra y de las tabletas. Luego plantea la tarea de construir una figura geométrica que cumple algunas condiciones particulares utilizando GeoGebra.

Profesor: Entonces, ¿cuál era el problema?

Los estudiantes presentan dos respuestas distintas.

Joseph: ¿Que tocaba dibujar las características de los polígonos?

Alán: El problema era cómo diferenciar entre los polígonos y los no polígonos.

Por el tipo de pregunta y las respuestas de los estudiantes, se puede determinar un N2 en el discurso. Dado que el profesor plantea una pregunta con la finalidad de retomar el problema de la clase anterior, los estudiantes responden asertivamente, evocando información sobre la actividad. En ambos casos los estudiantes son *autora*, ya que, aunque las ideas son similares, no son iguales, siendo originales en el contenido. Teniendo en cuenta las intervenciones anteriores, el profesor plantea una pregunta directa:

Esperen. Esperen. El problema era el de los cinco puntos. (...) (...) bueno, me estaban contando era lo de polígono y no polígono. Pero ¿se acuerdan de los cinco puntos?

Aunque el profesor retoma la idea de Alán, la pregunta es auténtica, puesto que, aunque el profesor había preguntado por el problema de la clase anteriores, es la primera vez que menciona los cinco puntos, por lo que la expresión es de la *autoría* del profesor. En cuanto a las respuestas de los estudiantes, son acordes a la pregunta, proporcionan nueva información relacionando los cinco puntos que menciona el profesor con las distancias que deben haber entre ellos, así que el discurso es N2.

Gabi: Uno, era que teníamos que mirar para ver las distancias más cortas para ir de A a A.

Nicolás: Era como (...) encontrar la forma más rápida como (...) para unir cinco puntos. (Con el dedo índice forma en el aire una figura cerrada).

Las respuestas de los estudiantes son de su *autoría*, en especial si se tiene en cuenta que utilizan sus propias palabras para describir algunos ítems que caracterizaban la tarea de la clase anterior. El profesor, luego de las dos respuestas, escribe la actividad en el tablero.

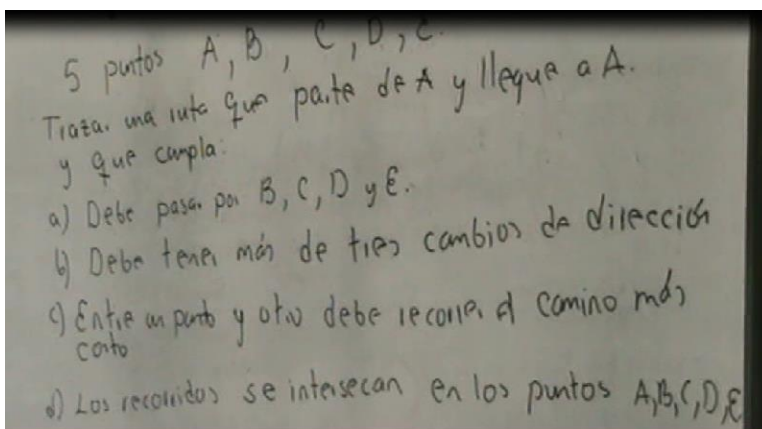


Imagen 27. Condiciones para la construcción de una figura

Él explica además cómo construir los cinco puntos con GeoGebra, haciendo énfasis en los nombres que les asigna la aplicación. Posteriormente, el profesor formula varias preguntas en un N1 del discurso, ya que, aunque están relacionadas con la actividad, son directas, así como las respuestas son puntuales.

Profesor: Bien. ¿Luego qué hago? (...) ¿si voy a hacer este problema? (...) ¿qué necesito hacer?

Estudiantes: Unirlos.

Profesor: Unirlos ¿Unirlos con qué?

Estudiantes: Con líneas.

Estudiantes: Con rectas.

Dada la diferencia entre las respuestas de los estudiantes, el profesor profundiza un poco en la idea, nuevamente con un N1 en el discurso.

¿Con rectas o con segmentos? ¿Qué necesito?

Nicolás responde “segmentos”. A partir de esta respuesta el profesor pide una justificación y las respuestas obtenidas por parte de Nicolás y Gabi proporcionan nueva información, por lo que se presenta un N2 en el discurso.

Profesor: ¿Por qué con segmentos?

Nicolás: Que los segmentos son las líneas más pequeñas.

Gabi: Y tienen una longitud determinada.

Tanto Gabi como Nicolás presentan ideas originales en su forma y contenido, siendo *autora* de las expresiones. El profesor, tal vez intentando incluir más estudiantes en la conversación, pregunta con un N1 en el discurso:

A ver, me están diciendo que es un segmento. Listo, yo les creo. Pero mi pregunta es si utilizamos rectas o segmento, ¿qué creen ustedes? ¿Qué me dice Matiz? ¿Tú que crees que vamos a utilizar para mirar la (...) para trazar la ruta (...) ¿qué necesitamos? ¿rectas o segmentos? Porque unos dijeron rectas y otros segmentos.

Esta intervención, aunque es original en la sintaxis, trae consigo la idea de una pregunta que él había formulado con anterioridad, siendo *portavoz* de su propia expresión. Matiz responde “segmentos”, sin profundizar en la idea. El profesor pregunta nuevamente:

¿Todos de acuerdo con segmentos o necesito las rectas?

De tal manera que es trasmisor de su propia expresión y, aunque Santiago cambia la respuesta a “Rectas”, se sigue presentando un N1 en el discurso. El profesor termina el diálogo haciendo referencia a que se necesitan segmentos. Posteriormente el profesor explica cómo utilizar la herramienta “segmento” y “rectas”:

La primera [segmento]. (...) Aparece algo así (Se dirige al tablero y dibuja un segmento).  
Bueno, allá está [recta]. Aparece algo así ¿cierto? (...) (Dibuja una recta en el tablero).  
¿Cuál creen ustedes que es segmento?

Por la respuesta de los estudiantes en la que señalan la representación del segmento y dicen



Imagen 28. Ejemplo para diferenciar segmento y recta

“ese”, se puede afirmar que la pregunta está en un N1 en el discurso. Así que el profesor hace una pregunta abierta, haciendo referencia a la segunda herramienta:

Esta. ¿Y esta para qué sería?

Varios estudiantes responden “recta”, siendo esta una respuesta corta en la que no profundizan en la utilidad de la recta, aunque la intención del profesor era profundizar en dicho objeto geométrico, por lo que se considera un N1+ en el discurso. Para finalizar, el profesor plantea la tarea de hacer un polígono que cumpla con las características escritas en el tablero y socializar con los estudiantes del grupo para determinar si está bien o no.

(...) Entonces, ya sabemos que el problema tiene que cumplir esas cuatro opciones, mírenlas allá (señala al tablero). Van a discutir con sus compañeros a ver si su polígono es el que mejor quedó construido, de acuerdo con esas cuatro opciones, ¿listo? Trabajen un momento y ahora volvemos otra vez.

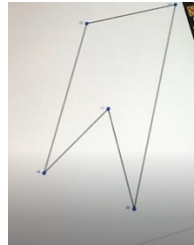
### ***Episodio 3***

A continuación, se presentan los diálogos de la investigadora con algunos grupos respecto a la tarea que están realizando.

#### ***Grupo 1***

La investigadora se acerca al grupo de Gabriela y formula una pregunta directa, de la que se obtiene una respuesta monosilábica, por lo que se tiene un N1 en el discurso.

Investigadora: Gabriela, (...) ¿Están de acuerdo con que esa figura cumple las condiciones que dice allá en el tablero?



*Imagen 29. Construcción de figura que cumple las condiciones*

Estudiantes: Sí

Dada la respuesta de las estudiantes, la investigadora pide profundizar formulando una pregunta abierta acerca de las condiciones que cumple el polígono representado en la tableta, con un N2 en el discurso:

¿Por qué? ¿Qué condiciones cumple?

Danna responde, proporcionando información adicional, de lo que se obtiene un N2 en el discurso. Además, se evidencia un esquema CE-A, pues se sustenta en las condiciones que debe cumplir la figura y que fueron planteadas con anterioridad por el profesor. Por último, se puede afirmar que esta idea es de la *autoría* de la estudiante.

Danna: Cumple con las condiciones de que cada punto se une con cada letra, con cada polígono y forma una figura.

A lo que Gabi refuta,

Gabi: Pero yo digo que hay como un error porque en esa condición dice que tiene que tener un recorrido muy corto y ahí los puntos están muy largos. Es que esa condición no la comprendía muy bien, por eso no sé si está bien.

Con esta expresión se pueden determinar dos objetivos por parte de la estudiante. En uno de ellos Gabi pretende mostrar una figura que cree cumple con las condiciones del problema y en el otro intenta convencer a sus compañeros de que una de las condiciones dadas por el profesor presenta un error. Por lo que, en esta intervención, se presentan dos esquemas de

argumentación simultáneamente, uno es CE-A si se tiene en cuenta que la estudiante considera que su representación cumple condiciones propuestas en el tablero. El otro es E-P, en tanto que Gabi se sustenta en la condición que pide la distancia más corta entre dos puntos para convencer a sus compañeros de un error en dichas condiciones. La investigadora interviene con un comentario de su *autoría*, formulando una pregunta:

Los puntos son lo que nos dan inicialmente. Entonces la trayectoria que hagas depende de dónde estén esos puntos. (...) Entonces ya ubicados y quietos los puntos, ¿cómo haces para hacer el camino más corto?

Esta pregunta es abierta y Gabi responde proporcionando información adicional, por lo que se tiene un N2 en el discurso:

Digamos que me digan el camino más corto de A a E. Entonces personalmente yo podría hacer esto, ¿no?

La investigadora pide borrar la construcción, a lo que Gabi accede y realiza una nueva construcción, de tal manera que construye los puntos y luego los arrastra para acercarlos (Imagen 30).



Imagen 30. Movimiento de la figura para que cumpla una de las condiciones

La investigadora al ver la acción de la estudiante interviene con una expresión de su *autoría* diciendo:

¡Ah! Pero es que estás moviendo los puntos. Y no se vale porque los puntos son como quedaron al principio. (...) Y comparen con la que hizo Dana, ¿estará bien?

A partir de la pregunta abierta formulada por la investigadora, hay varias respuestas que proporcionan nueva información en torno al trabajo de Danna (Imagen 31), lo que caracteriza el discurso en un N2.

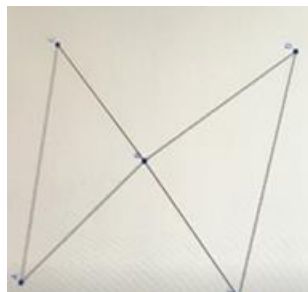


Imagen 31. Construcción de Danna que cumple dicha condición

Gabi responde con un esquema CE-A, sustentada en que cumple las condiciones propuestas por el profesor. Sin embargo, la investigadora cuestiona el recorrido que traza la línea, formulando con una pregunta abierta, pero de ella se obtiene una respuesta por parte de Danna donde no se obtiene información adicional:

Salgo de A, a B (va señalando los puntos con el dedo). Y de B a D y de D a E y de E a B y de B a C y luego a A.

Con base en la respuesta, la investigadora formula la siguiente pregunta:

¿Por qué vuelves a pasar otra vez por B?

Con esta expresión la investigadora pide una justificación sobre el trazo de la figura en la que pasa dos veces por un mismo punto. La respuesta brindada por Gabi se basa en un E-P:

Eso parece (...) ¿Cómo es que se llama? Esto (señala B) parece un vértice en común. Ya que lo pienso. Porque A y D se comunican a través de B. Y también C y E.

Se clasifica en este esquema este esquema, debido a que Gabi se apoya en la representación de Danna, para explicar el papel que cumple el punto B en la construcción. La investigadora interviene formulando una nueva pregunta que permita a la estudiante sustentar mejor una de las condiciones propuestas en la tarea:

Estás pasando varias veces a través de B entonces ese no es el camino más corto ¿no? Porque tienes que ir a A y recorrer todos los puntos y volver a A ¿El camino más corto implica pasar varias veces por el mismo punto?

Con la expresión anterior se formula una pregunta abierta y la respuesta de Dana permite identificar un N2 en el discurso, si se tiene en cuenta la nueva información respecto a un nuevo recorrido.

O también podía ser de B a D y de D a E y otra vez se repite B pero, E a B y de E a C y de C a A.

La estudiante nuevamente es *autora* de la idea. La investigadora propone ahora que las estudiantes identifiquen diferencias y similitudes entre las construcciones que realizaron todas las estudiantes del grupo.

(...) ¿pongámoslos los tres (las tres figuras) ¿en qué se parecen y en qué se diferencian?

Así que Juanita, la única que no ha mostrado su construcción, la presenta:



Imagen 32. Construcción de Juanita

Danna presenta una diferencia entre las construcciones, lo que clasifica la pregunta de la profesora en un N2 del discurso.



Danna: La diferencia es de que (...) su forma es diferente. En común todos tienen como lados iguales (...) Y tienen una parte de su camino muy larga.

La investigadora cambia el nivel de discurso a un N1 cuestionando:

¿Y todos cumplen que pasan por todos los puntos?

A lo que Gabi responde que sí. La investigadora por tanto pregunta:

¿Y todos cumplen que tienen que tener más de tres cambios de dirección?

Juanita responde proporcionando información sobre el cambio de dirección (una de las características planteadas por el profesor en la tarea), lo que determina una N2 en el discurso:

Pues el mío sólo tiene dos cambios de dirección.

Con base en la respuesta, la investigadora formula la siguiente pregunta, cambiando a un N1 en el discurso:

¿Entonces está bien? Muestra los cambios de dirección.

Juanita interviene comentando el recorrido de la línea a través de los puntos:

(Va señalando los puntos mientras habla). De A a B, de B a C, de C a D

Y Gabi corrige explicando cómo son los cambios de dirección sin presentar algún esquema de argumentación:

No, pero cambios de dirección. O sea, vertical, horizontal y así.

La profesora cuestiona con otras palabras el cambio de dirección, siendo *portavoz* de su idea y con un N1 en el discurso, pues en la respuesta no presenta nueva información, más allá de una descripción de los cambios de dirección.

Investigadora: ¿Cuántos cambios de dirección tienes tú?

Gabi: ¿El mío? Uno, dos, tres, cuatro (los señala con el dedo). Y para verlos no necesitaba comenzar desde la A. Podía comenzar en la E y terminar en la A.

La investigadora fomenta una discusión sobre las construcciones de cada una, pero las estudiantes dan sus propias ideas sin que propiamente se presente una discusión, por lo que se tiene un N2+ en el discurso:

Investigadora: Yo quiero que comparen estos dos [las figuras de Gabi y Juanita] con este [la de Dana] ¿Qué es lo distinto?

En las respuestas, a pesar de no haber una discusión, sí hay esquemas de argumentación.

Gabi: Es que nosotras tenemos, como digamos, algo diferente. Porque ese, parecen dos figuras juntas.

Juanita: Yo sé, yo sé. En este [el de Dana] estas rectas se cruzan y en los demás no tienen eso.

Ambas expresiones dejan ver un esquema E-P, afirmando que las construcciones son distintas a partir de lo que observan, aunque las ideas son distintas, por lo que son *autoras*. La investigadora señala la figura de Juanita y Gabriela, y pregunta con un N1 en el discurso:

¿Estás dos qué figuras son? (...) ¿Cómo se llaman?

Las estudiantes responden polígonos. Pero al señalar la figura de Dana, las estudiantes presentan duda, expresando respuestas cortas. Gabi responde que no y Dana dice que más o menos. Para finalizar, la investigadora pide a Dana concretar su idea y, aunque la pregunta es directa, la respuesta de la estudiante presenta un esquema de argumentación, por lo que se obtiene un N2 en el discurso.

Investigadora: ¿Sí o no? Porque en geometría es o no es.

Dana: Digamos que no podríamos decir que bien. Porque dicen que los polígonos como tal, por decirlo así, no tienen contenido. Digamos que no tiene como un fin. Y ese tiene un punto que se crucen.

El esquema de argumentación de Dana se puede considerar A-A ya que se sustenta en la definición de polígono para convencer a sus compañeras que su figura es un polígono, así se haya apoyado en la representación gráfica, utiliza condiciones de la teoría formulada en clases anteriores.

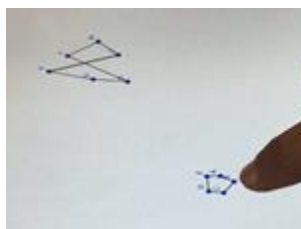
### *Grupo 2*

La investigadora se acerca a una estudiante y pregunta sobre la tarea:

¿Qué hiciste?

Dado que la pregunta es abierta y que el estudiante responde con un contraejemplo, se puede afirmar que hay un N2 en el discurso.

Estudiante: Ese es un ejemplo de no polígono y acá hice uno de polígono.



*Imagen 33. Ejemplo de polígono y no polígono*

Con base en las construcciones presentadas, la investigadora formula una pregunta abierta a través de la cual pide justificar las representaciones, por lo que se mantiene el nivel de discurso.

Investigadora: Y el de allá, el primero, ¿por qué dices que es un no polígono?

Estudiante: porque se cruzan entre sí.

El estudiante para responder utiliza un esquema E-P. Si se tiene en cuenta la definición de polígono dada en clase o las condiciones presentadas por el profesor en el tablero, no hay evidencia de que los polígonos no puedan cumplir con esta característica, más allá de lo que el estudiante considera que es un polígono a partir de alguna imagen prototípica. Al finalizar, la investigadora pregunta con un N1 en el discurso:

Y ¿cuál de las dos figuras es la que resuelve el problema?

El estudiante señala la figura de abajo y afirma:

Esta (señala el polígono) porque dijeron que pintáramos un polígono.

Cabe aclarar que en la actividad no se pedía dibujar un polígono, sino trazar una figura que cumpliera las condiciones que presentaba el tablero, por lo que la expresión del estudiante es de su *autoría*.

#### ***Episodio 4***

Posterior al trabajo grupal el profesor propone una socialización. Para ello pide a unos estudiantes pasar al frente y presentar su construcción a los demás miembros del salón. Se proyectan las construcciones realizadas de las tabletas en el tablero inteligente.

Inicialmente Santiago pasa al frente y proyecta en el tablero la construcción de cinco puntos. Luego los mueve para que no sean colineales, así que el profesor plantea la siguiente pregunta:

¿Por qué estás acomodándola? (...)

Esta pregunta está en un N2 del discurso ya que pide una justificación sobre la construcción que realizó. Santiago responde:

Porque ahí dice en el tablero.

Con esta intervención se evidencia un esquema CE-A, ya que el estudiante se sustenta en la autoridad de la tarea para explicar la forma de realizar su construcción. El profesor, por tanto, formula una nueva pregunta con base en el arrastre de la construcción, manteniendo el mismo nivel de discurso.

O sea, que hay que acomodarlas ¿o a alguien se le ocurre que no hay que acomodarlas?

Tomás interviene, dejando ver un esquema de argumentación:

Pues obvio, sí porque esa es la figura de él.

El esquema empleado es CE-A, afirmando que es válido que Santiago acomode su propia construcción, por ser él quien la realizó y por tanto él es la autoridad en su representación. Gabriel responde:

Porque si no acomodamos los puntos, las líneas no van a tener la dirección (representa con la mano una dirección).

Es este caso se tiene un esquema A-A, sustentando en una de las condiciones dadas por el profesor en la tarea. Luego de las justificaciones presentadas, el profesor pide poner tres de los cinco puntos colineales de la siguiente manera:



*Imagen 34. Construcción de los cinco puntos para el ejemplo*

Con esta representación, el profesor plantea un N1 en el discurso a partir de una pregunta directa.

Entonces, ¿qué dice Santiago, si se puede dejar ahí? (...) ¿Y los otros puntos pueden quedar ahí? Bueno ¿y qué va a hacer ahora?

Santiago responde acorde con los pasos de la actividad:

Hacer el polígono (...) pues completarlo (...) con los puntos.



Imagen 35. Construcción de los segmentos sobre los cinco puntos

Hasta el momento todas las intervenciones de Santiago han sido de su *autoría*, más teniendo en cuenta que se dialoga sobre su construcción. El profesor entonces presenta una pregunta directa, donde la respuesta es monosilábica, con un N0 en el discurso:

¿Y le sale polígono?

Santiago dice que sí. Con esta respuesta el profesor plantea una pregunta directa en la que pide profundizar sobre la construcción de Santiago, por lo que se pasa a un N1 en el discurso.

Sí. Bueno, (Espera que Santiago acabe la construcción). Y ya. Esa es la construcción ¿Cumple todas las características? O alguien dice, no, no cumple todas.

Las respuestas brindadas por los estudiantes son cortas “Sí cumple todas”. El profesor por tanto formula una pregunta larga para obtener más información de los estudiantes:

¿Todas? ¿Las tres? A mí (...) ¿No les parecen que estos pareciera que están como en el mismo segmento? ¿O no?

Aunque la mayoría de las respuestas fueron monosilábicas, Gabriela y Gabriel aportan respuestas en las que se presenta información adicional.

Gabriela: Sí, pero profe. Se supone que tiene que tener más de tres cambios de dirección y ahí tiene.

Gabriel: Pues es que yo no diría que es la misma porque, digamos, aunque sea un poco difícil notarlo tiene un leve grado de inclinación (...). por lo que terminaría ser una línea diferente. Tendría que ser completamente recta para ser una sola.

Gabriela, por un lado, utiliza un esquema CE-A, sustentada en las condiciones presentadas por el profesor en la tarea, mientras que Gabriel utiliza un esquema E-P, basado en lo que se proyecta en el tablero inteligente de la construcción de Santiago, para determinar que no hay cambios de dirección entre A y D. Ambos estudiantes son *autores* en su idea. El profesor pide realizar un cambio en la construcción, de tal manera que los tres puntos parezcan colineales:



Imagen 36. Modificación de la construcción

Con base en la respuesta, formula una nueva pregunta:

¿Ustedes creen que se cumplen las condiciones del problema? ¿Qué dirían ustedes?

Esta pregunta es de N2 en el discurso ya que es abierta y Paula presenta una respuesta de su *autoría*:

Pues ahí tiene los cinco puntos que están diciendo ahí.

Con esta expresión se evidencia un esquema de argumentación CE-A ya que se sustenta en las condiciones propuestas en la tarea. El profesor nuevamente pregunta:

Esperen, esperen ¿Cuántos hay? ¿Nos los puedes mencionar?

Con esta pregunta se evidencia un N1 en el discurso ya que se basa en la figura para que la estudiante mencione cuales son los cambios de dirección. Paula responde acorde a la pregunta, apoyada en una expresión verbal y gestual:

El de acá, el de acá, el de allá. (Representa con la mano cada cambio de dirección)

Luego el profesor formula una pregunta cerrada en la que Paula responde concretamente, dando el número de condiciones que cumple la figura. Debido que no se profundiza en esta respuesta se clasifica la expresión del profesor como un N0 en el discurso, como se muestra a continuación:

Profesor: ¿Cuántos hay?

Paula: tres.

Nuevamente el profesor plantea una pregunta que pretende profundizar en la información que están dando los estudiantes sobre la propuesta de la construcción:

¿Cumple la condición? ¿Qué dicen acá? ¿Sí cumple la condición?

Por el tipo de respuesta, se puede considerar que el discurso está en un N2:

Santiago: Sí, porque tiene que tener tres o más cambios de dirección.

En este caso, el sustento del estudiante a partir de la condición formulada en la tarea permite evidenciar un esquema CE-A por parte del estudiante. El profesor formula una pregunta en un N1 del discurso, para verificar si todos están de acuerdo con el argumento de Santiago, sin embargo, Ariadna responde:

No, no. Tienen que ser más (...) más de tres.

Con esta intervención, la estudiante niega la idea de Santiago, haciendo una aclaración que también se apoya en la condición de la tarea. Mientras Santiago afirma que son tres o más

cambios de dirección, Ariadna especifica que si son exactamente tres no se cumple, pues la tarea planteada por el profesor indicaba que se debían tener más de tres cambios de dirección. El profesor por tanto es *portavoz* de una pregunta anterior en la que cuestionaba si el polígono proyectado en el tablero cumple la condición:

¿Entonces acá me sirve?

Con lo que se obtiene un N0 en el discurso, más si se considera la respuesta de los estudiantes al decir que no. Con base en esto el profesor formula una pregunta abierta:

No, cierto. (...). ¿Quién dice que la condición (c. Debe tener más de tres cambios de dirección) qué debería yo hacer para garantizarla? Para garantizar que es mi camino más corto.

Santiago con una expresión de su *autoría*, dice:

(Mira el tablero) Apequeñarlo.

Como la respuesta fue corta a una pregunta que pretendía profundizar en la información sobre la condición, se puede afirmar que hay un N1+ en el discurso. El profesor con un N1 en el discurso pregunta por la definición de *apequeñar*, sin tener respuesta de los estudiantes. El profesor cuestiona nuevamente la condición c) con otras palabras, siendo *portavoz* de la pregunta anterior:

(...) Santiago, entonces ¿qué harías tú? (...) (...) A ver (...) ¿Ustedes que dicen? (...) ¿Qué pasó?

Con esta pregunta abierta se obtuvieron dos respuestas, cada una con información adicional, lo que se considera un N2 en el discurso.

Santiago: (Arrastra los puntos hasta que la figura queda pequeñita)

Gabriela: (Alza la mano y habla al tiempo). Por ejemplo, si yo tengo un punto acá (representa un punto en el aire) y otro punto acá (representan otro punto en el aire), el camino más corto que yo puedo hacer es el recto (Representa un segmento con extremos los puntos). Porque si yo no lo hago recto quedaría más largo (representa una curva). No se necesita achiquitarlo porque (...) no cambia (...)

Santiago con su gesto, hace referencia a que el camino más corto entre dos puntos es aquel que tiene menor longitud, sin tener en cuenta que los puntos no deberían moverse, de tal manera que arrastra los puntos para cumplir esta condición. Mientras que Gabriela responde con un esquema E-P, afirmando que la longitud de una curva entre dos puntos es mayor que la longitud del segmento que está entre esos mismos dos puntos, a partir de lo que ve. Teniendo en cuenta la idea de Gabriela, el profesor pide poner atención a lo dicho por la estudiante:

(...) Gabriela ¿nos podrías decir entonces cuál es tu idea aquí con la Tablet? Miremos lo que hace Gabriela acá en el tablero. Todos vamos a ponerle atención. Allá. A ver.



Imagen 37. Construcción de Gabriela

Gabriela profundiza más en su idea:

Entonces, es que se supone que para achiquitar los caminos ahí ya no se puede hacer más (muestra la figura) a menos que corras exactamente los puntos, porque el camino corto entre un punto y otro es la línea recta. Porque si yo le hago cosas más curvas o más hacia allá, el camino va a ser mucho más largo.

Nuevamente Gabriela expresa un esquema E-P, ya que es *portavoz* de la idea que dio con anterioridad. El profesor pregunta a los demás estudiantes si están de acuerdo con la idea Gabriela, esta expresión generó una pequeña discusión entre Santiago, Ariadna y Nicolás, quienes exponían sus razonamientos y se escuchaban entre sí. Por lo que la intervención del profesor, aunque es sutil, promueve la interacción entre los estudiantes, clasificándose como un N3 en el discurso. Como se observa a continuación:

Salomé: No (...) Porque no explica a uno cómo hacerlo más pequeño pues tiene que tener.

Ariadna: (Tenía la mano levantada). Yo no estoy de acuerdo porque si los pones rectos pues no tendría cambios de dirección.

Salomé presenta un esquema E-F, afirmando que el argumento no tiene validez, sustentada en que Gabriela no presenta un procedimiento, mientras que Ariadna se sustenta en que no cumple la condición de los cambios de dirección, por lo que en una recta no se pueden tener cambios de dirección, evidenciando con ello un esquema CE-A. Nicolás, con una idea de su *autoría*, contradice a Ariadna diciendo:

sí pueden ser rectos y tener cambios de dirección

El profesor, por su parte, formula una pregunta abierta con un N1+ en el discurso, ya que las respuestas no proporcionan más información.

Profesor: Bueno, ¿y cómo sería eso?

Santiago: Pero no sería un polígono (...) no sería un polígono.

En la idea de Santiago no se observa un nivel de argumentación. El profesor por ende pide profundizar en una explicación sobre la afirmación de Santiago, pero no hay respuestas que den alguna información respectiva.

Santiago: Sí tiene más cambios de dirección que una línea recta.

A lo que Cristian con un N2 en el discurso pregunta:

¿No sería un polígono cuando qué?

Santiago responde, con una idea de su *autoría*:

Digamos, cuando hay una línea recta y (Señala con el dedo una recta vertical).

El profesor centra nuevamente la discusión sobre la idea de Gabriela, como *portavoz* de la pregunta formulada con anterioridad:

Pero digamos, en este caso (Señala el tablero). Gabriela, en este caso no más. Mirémoslo ¿Acá podríamos nosotros (...) ¿Tú idea cuál es? ¿Qué lo volvamos cómo? ¿Cómo logramos ese camino corto?

Por lo que Gabriela es también *portavoz*, esta vez apoyada en el uso de la tableta que se proyecta en el tablero, por tanto, sigue utilizando un esquema E-P, de la siguiente manera:

De acá, (muestra la figura en la Tablet) (...) se supone que (...) que se puede cambiar la distancia entre dos puntos.

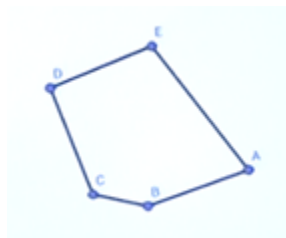


Imagen 38. Representación de Gabriela

Yo lo que estoy diciendo es que (...) la distancia más corta, por ejemplo, en este caso la posibilidad de mover los puntos pues se da, pero, la real como idea (...) que yo tengo es que el camino más corto entre dos puntos no es una línea curva o lo que sea, porque se demora mucho más sino la línea recta, lo más recto que hay entre dos puntos.

El profesor pregunta nuevamente al grupo si están de acuerdo con Gabriela, a lo que la mayoría de los estudiantes responde afirmativamente. Luego cuestiona si en la figura puede haber curvas, y Ariadna con un esquema de argumentación E-P responde:

No porque si fuera una línea curva no sería polígono.

Sustentada en la imagen prototípica que tiene de polígono, más si se tiene en cuenta que en la definición de polígono formulada con anterioridad, no se mencionan curvas entre dos puntos.

### **Episodio 5**

Luego de que Gabriela mencionara que la distancia más corta entre dos puntos es una recta, Ariadna afirmó que la figura que se pedía en la tarea no podía contener curvas, no por la condición dada sino porque no era un polígono, como si estuviera infiriendo que las condiciones presentadas en la tarea sugirieran la existencia de uno. Según la respuesta de Ariadna “No porque si fuera una línea curva no sería polígono”, el profesor cuestiona:

¿Y necesitamos que sea polígono?

Con esta expresión se tiene una pregunta abierta en la que se tienen varias respuestas monosilábicas, algunos estudiantes responden sí y otros no, solo Gabriela y Tomás proporcionan información adicional, teniendo así un N2 en el discurso.

Gabriela: Ahí no dice. (Señala el tablero en donde están consignadas las reglas)

Tomás: No dice que sea polígono pero esas reglas nos llevan a eso.



Aunque pareciera que Tomás presenta un esquema de argumentación, se observa que el estudiante hace una afirmación, más no presenta un sustento, es decir que no está argumentando con base en algo está viendo o en alguna definición propuesta en la teoría, por lo que se concluye que, al igual que Gabriela, no presenta esquema de argumentación. Sin embargo, estos comentarios llevan al profesor a plantear una pregunta directa en la implícitamente se pide información adicional sobre las ideas presentadas:

¿Sí? ¿Lo obligan?

Gabriela presenta como respuesta una afirmación. Por la pregunta formulada y por la respuesta de Gabriela, se puede determinar que hay un N2 en el discurso.

Profe, se supone que entre un punto y otro debe recorrer el camino más corto significa que las líneas deben ser rectas; es decir que, desde mi punto de vista, yo entiendo eso lo hace un polígono, de esa manera.

El profesor se dirige a Alan y le pregunta si está de acuerdo con Gabriela, a lo que Alan responde afirmativamente sin profundizar en la idea. De esta manera, se pasa a un N1 en el discurso. El profesor pide a Alan argumentar su afirmación, pero el estudiante comenta que no sabe, por lo que a pesar de que la pregunta es abierta, la respuesta no proporciona información adicional, pasando a un N1+ en el discurso. Para aclarar esta pregunta el profesor plantea la siguiente tarea:

Por acá hay una discusión (...). Será que alguien me puede dibujar, en su Tablet, ahora sí, a ver, si alguien, una figura que cumpla esas condiciones, pero que no sea polígono.

Aunque no hay explícitamente una pregunta, el profesor sí sugiere profundizar sobre la posibilidad de la existencia de una figura de este tipo. Aunque la expresión sugiere una pregunta abierta, el estudiante sin presentar un argumento afirma que no se puede, por lo que se tiene un N1+ en el discurso. El profesor pide a los estudiantes tratar de encontrar este tipo de figura, a lo que Tomás responde:

Sí, si hay, es el triángulo ese.

La idea anterior es de la *autoría* de Tomás, ya que nadie había mencionado algún ejemplo hasta el momento. Los estudiantes empiezan a trabajar en las tableta intentando obtener este tipo de figura. Dana es la primera estudiante en presentar una propuesta. Inicialmente construye 5 puntos.



Imagen 39. Construcción inicial de la representación de Dana

El profesor con un N1+, formula una pregunta abierta de la que no se obtiene mayor respuesta.

Dana, ¿qué estás haciendo? Cuéntanos. (...) Estás arrastrando, pero no nos estás diciendo nada. (...) Yo tengo una pregunta, ¿por qué moviste esos puntos y los dejaste así?

Valentina con una expresión de *autoría* comenta sobre el paso siguiente, tal vez haciendo referencia a que se deben construir los segmentos:

Pero tienes que unirlos.



Imagen 40. Construcción de la figura de Dana que cumple las condiciones

El profesor presenta una pregunta cerrada, tratando que los estudiantes opinen sobre la figura de Dana:

Podrías decir (...). ¡Ah! No mire. Bueno, primera pregunta. ¿Este es un polígono?

La respuesta es monosilábica, diciendo que sí, por lo que se tiene un N1 en el discurso. Luego pregunta al grupo si todos están de acuerdo, pero no se obtienen respuestas. Tomás formula una pregunta de su *autoría* con un N1+ en el discurso:

¿Por qué no es un polígono? Es la pregunta.

Sin embargo, el profesor retoma la pregunta cambiando la sintaxis, de tal forma que es *portavoz* de Tomás:

La pregunta es que estoy diciendo, ¿este es un polígono?

Por tanto, el nivel de discurso se mantiene. Aunque los estudiantes con anterioridad habían dicho que sí, en este caso responden que no. Tomás nuevamente pregunta con un N2 en el discurso pidiendo una justificación sobre el por qué la figura no es un polígono:

¿Por qué no?

Santiago presenta un argumento en el que responde la pregunta de Tomás:

Porque se interseca dos veces en el mismo punto.

En este caso se presenta un argumento A-A, ya que con sus propias palabras Santiago estaría intentando hacer alusión a la condición de la definición de polígono: “sus líneas se intersecan, pero no salen del punto de donde se intersecan”. El profesor plantea una pregunta directa: “¿por qué?”, a lo que algunos estudiantes responden que sí, con lo que se concluye que la pregunta está en un N0 del discurso. Santiago propone otra justificación sobre por qué no es un polígono:

Porque se cruzan en el mismo punto (Cruza los brazos haciendo una X).

En esta intervención sí se puede considerar un esquema A-A, dado que, aunque es con otras palabras, el estudiante intenta afirmar que las rectas no se salen del punto donde se intersecan, siendo *portavoz* de la definición de polígono. Gabriela es trasmisora de la idea de Santiago,

repitiendo lo que su compañero dijo. El profesor, por tanto, pregunta con un N1 en el discurso:

¿Y no se pueden intersecar dos veces en el mismo punto?

A lo que varios de los estudiantes responden que no. Solo Santiago con una respuesta de su *autoría* dice sin presentar un argumento:

Pues sí, pero no así

El profesor es *portavoz* de la pregunta que había formulado con anterioridad, cuestionando si la figura proyectada es un polígono y en este caso hay estudiantes que dicen que no y otros dicen que no saben. El profesor pregunta de nuevo a Nicolás, quien previamente había respondido que no, pidiendo una justificación, pero Nicolás responde con las mismas palabras y la misma idea de Santiago:

Porque se interseca dos veces en el mismo punto.

En este caso Nicolás es trasmisor de la idea de Santiago. El profesor, entonces pregunta si la figura es un ejemplo de no polígono y las respuestas de los estudiantes siguen manifestando duda, algunos dicen que no y otros dicen que no saben. El profesor interviene con un N1 en el discurso:

Dana hizo un buen ejemplo. Porque miren. Aquí decimos que no es un polígono, pero (...) y cumple todas las características. ¿Todos de acuerdo?

La mayoría de los estudiantes responde que sí. Pero aun algunos estudiantes no tienen claridad sobre por qué no es polígono. Cristian responde haciendo una representación de una cruz con los brazos. Se evidencia con las expresiones de los estudiantes, luego de la intervención de Santiago, que varios de ellos se dejaron convencer por sus ideas, de tal manera que cuando les preguntaban por el polígono, ellos eran *portavoces* o transmisores de esta idea. Ana Sofía presenta una nueva justificación:

Porque hay más de dos segmentos que se juntan en uno.

En esta respuesta se presenta un esquema A-A sustentada en la definición propuesta de polígono, pero expresada con sus propias palabras, por lo que Ana Sofía es *portavoz*. El profesor con un esquema N1, pregunta ¿Cuáles? A lo que la estudiante responde sin proporcionar información adicional que en B. Luego, varios estudiantes empiezan a mencionar que se intersecan, por lo que el profesor pregunta:

Profesor: ¿Se intersecan quiénes?

Nicolás: De B a A y de D a B.

Gabi: No. Es que cuando estamos viendo ahora. C y E se conectan, pero a través de B que digamos es un vértice. y desde A igualmente. No sería un polígono porque se intersecan en B.

Aunque Nicolás no proporciona más información, Gabi sí presenta una respuesta en la que evidencia un esquema de argumentación, por lo que la intervención del profesor se clasifica como un N2 en el discurso. Gabi en este caso se basa en un esquema A-A, sustentada en lo

que considera es un polígono, mas no por su percepción visual. Otra respuesta es la de Gabriel, también de su *autoría*:

Lo que pasa es que se forma una línea recta de E y C que por el medio tiene B. (...) No, C, B y E. Esa de ahí. (...) Y como no tiene ningún grado de inclinación en ninguno de los dos lados se forma una línea recta, que por lo menos tenga a B.

En esta intervención se tiene un esquema CE-A sustentado en las condiciones que debía cumplir la figura propuesta en la tarea, más no en la de polígono. Vale la pena, nuevamente aclarar, que en ningún momento la figura planteada en la tarea debía implicar que fuera un polígono y la característica sobre los cambios de dirección, es una de las propuestas de la tarea. El profesor pregunta a los estudiantes si están de acuerdo con Gabriel, así que Gabriela responde diciendo:

Sí (Habla mientras alza la mano). A ver (...) me parece, (...) pues ahí dice (señala el tablero donde están las características de un polígono) que ahí dice. Se supone que un polígono sabemos que se interseca, pero no pasa esto (Imagen 41). Entonces, si (...), entonces el polígono sería A, B, C. Ahí, después a A, se pasa la línea recta, se va para más afuera, digamos, y eso no puede pasar.



Imagen 41. Ademan de Gabriela para representar que dos segmentos se intersecan

De esta manera la estudiante hace una afirmación de su *autoría*, sin presentar esquema de argumentación. El profesor indaga si todos están de acuerdo, a lo que Tomás dice que sí se puede, mientras que Ariadna dice que no. Dana, por su parte presenta un esquema A-A con su respuesta:

Porque se intersecan más de una vez.

Pero cabe resaltar que la idea no es de su *autoría*, pues ya se había formulado con anterioridad, siendo transmisora. El profesor centra la pregunta en los segmentos que se intersecan con un N2 en el discurso.

¿Cuántas veces se intersecan? Por ejemplo, miremos acá (Señala la figura que representó Dana). Este punto B, ¿cuánta ve (...) este se interseca con cuántos segmentos?

Aunque la pregunta es directa y varios estudiantes responden cuatro, Dana proporciona información adicional, nombrando los segmentos:

Porque de D a E y de E a B. De B a C, a A y de A a B.

Con esta expresión Dana afirma que son cuatro segmentos que se intersecan en B y se sustenta en la representación del tablero, nombrando cada uno de los segmentos, por lo que se tiene un esquema E-P y la expresión es de su *autoría*. El profesor nuevamente pregunta por los segmentos que se intersecan, pero a diferencia de Dana, Gabi responde:

Dos (...) CE y DA (pasa al tablero digital y señala los segmentos).

Esta respuesta también es de su *autoría* ya que presenta una idea diferente a la de Dana, pero también se evidencia un esquema E-P. El profesor pregunta a varios niños por los segmentos que se intersecan, tal vez tratando de incluirlos en el diálogo, a lo que ellos responden como transmisores de Gabi y Dana a partir del nombramiento de los segmentos. El profesor, por tanto, pregunta:

(...) Pero hay algo que falta ¿Qué faltará? Si no falta nada ese es un polígono y nos toca meterlo en las figuras que sí son polígonos.

Gabriela y Nicolás dicen que no es un polígono, Cristián argumenta expresando que no es un polígono porque “se cruzan” las líneas. Aunque hay un esquema A-A, esta idea ya había surgido, siendo Cristian *portavoz*. Cabe resalta que, aunque varios estudiantes afirman que no es un polígono, no todos los estudiantes los consideran así, por lo que el profesor en repetidas ocasiones pregunta si es o no un polígono. Gabi también es *portavoz* con la siguiente intervención:

No es un polígono porque los polígonos se caracterizan (...) Porque no se unen, no se intersecan en un punto. Estas figuras se intersecan en B, entonces estoy segura que no es un polígono.

El profesor trata de cerrar la discusión son base en ideas que surgieron la clase anterior:

Se acuerdan qué decíamos, miren, por cada segmento ¿cuántos segmentos pueden intersecar a ese segmento?

Con lo que presenta un N1 en el discurso, ya que la pregunta es directa y la respuesta de los estudiantes “dos” no proporciona información adicional. Con este mismo nivel de discurso, el profesor pregunta ¿en dónde? y varios estudiantes dicen “en B”. El profesor, pide mirar el problema de la clase y pregunta si cumple con todos los requisitos:

(...) Está cumpliendo, pero ¿faltará algo? ¿Qué falta? (...) ¿Qué pasaba con el problema? ¿Si pasa por todos los requisitos? (...) ¿Sí? Miren, pasa por D (...) Digamos que empecé por A. Tenía que pasar ¿por dónde?

La pregunta formulada es abierta y Ana Sofía plantea una respuesta diferente, de la cual es *autora*, por lo que se tiene un N2 en el discurso.

Ana Sofía: No hay ningún segmento que los una.

Gabriela por otro lado, sustentada en las condiciones en el tablero, presenta un esquema CE-A. De esta manera comenta:

(Alza la mano mientras habla). Lo que pasa profe (...) podríamos ver que no empezó en A. Empezó en A y tenía que volver a A.

El profesor agradece a Gabriela y comenta que ahí está el problema. A partir de esta idea, el profesor presenta la siguiente explicación de su *autoría*:

(...) Lo que Dana trata de hacer es lo siguiente. Voy a dibujarlo acá mientras Dana (toma un marcador y se pasa al tablero). Lo que Dana trata de hacer es lo siguiente. Miren. Algo así. (Imagen 42). Voy a dibujarlo acá.



Imagen 42. Representación de la construcción de Dana en el tablero

Gabriela alza la mano y aporta su idea sobre la construcción:

¡Profe! (Levanta la mano). Allá (señala lo que representa Gabi en la Tablet) si se cumple porque comenzó en A y llegó a A otra vez.

Con lo que sustenta la validez de la representación porque sí cumple con esta condición, haciendo evidente un esquema CE-A. Sin embargo, el profesor la cuestiona con un N1 en el discurso, pues proporciona una pregunta abierta de la cual no se obtuvo respuesta.

¿Será que sí se cumple? Vamos a ver ¿Dónde quedarían?

El profesor pide prestar atención a la construcción de Dana y le pide hacer trazar el recorrido de la representación:

Primero empiezo en A, en el centro, después subo a B, después paso a C y paso a (...) se interseca con A (...).

Vale la pena recordar que Dana es *autora* de la representación. Con base en lo dicho por Dana el profesor pregunta con un N2 en el discurso:

Y eso. Pregunto ¿Y eso tiene que pasar? ¿Si se puede pasar o puede pasar?

A lo que Gabriela responde:

No, en un polígono no porque se supone que no se sale del punto en donde se intersecan.

De tal manera que se tiene un esquema A-A, sustentada en la definición de polígono. Pero esta vez es trasmisora, pues presenta parte de la definición tal como la establecieron la clase anterior. El profesor además aclara como *portavoz* de Dana:

Bien. Pero yo quisiera que prestáramos atención al problema. Miren. Dice: tiene que pasar por B, C, D, bueno, tienen que partir de A y llegar a A. Partiste de A, pasaste a B, a C y ahora quieres pasar a D.

A lo que finalmente varios estudiantes, utilizando la sintaxis de la condición del tablero, dan su propia idea, siendo *fantasmas* de la expresión.

Ariadna: Pero pasa por A.

Tomás: Tiene que terminar en A.

Con estas respuestas la mayoría de los estudiantes concordó que no es un polígono.

### ***Episodio 6***

Luego de aclarar que la figura de Ariadna no cumple las condiciones del tablero y tampoco es un polígono, el profesor pregunta por más ejemplos, con lo que se discute sobre la idea de Gabriela. El profesor pregunta a Gabriela cuál es su construcción:

(...) Bueno, Cuéntanos qué estás haciendo.

Gabriela responde explicando su representación, por lo que se tiene un N2 en el discurso.



Imagen 43. Construcción de Gabriela

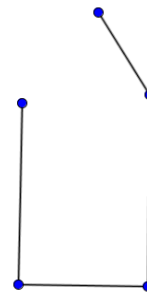


Imagen 44. Replica de la construcción de Gabriela

Se supone que un polígono no tiene, no puede tener ninguna línea ni nada adentro. Y ahí no dice que tiene que ser así [como un polígono]. Se puede hacer una vuelta y volver así, con una línea (le muestra la tableta al profesor).

A partir de esta respuesta, Gabriela presenta un esquema A-A, en el que trata de construir una figura que sea polígono según la definición, pero que incumpla una de las condiciones dadas en la tarea. El profesor, pide a Gabriela profundizar en su idea, es *portavoz* de la pregunta anterior, refiriéndose a Gabriela y preguntándole:

Cuéntanos cuál es tu idea.

Gabriela responde con una expresión de su *autoría*:

(borra los segmentos y solo deja 5 puntos que podrían ser vértices de un pentágono) Se supone que un polígono no tiene que tener nada adentro, entonces estoy mirando la manera de poder volver a A sin tener que (...) con una línea por dentro.

El profesor pide a los estudiantes fijarse en el recorrido de la representación y luego formula una pregunta abierta con un N2 en el discurso:

¡Ah! bueno. Listo. Todos vayan mirando allá e imaginando qué pueden hacer. Partimos de A, B, C, D E y quiere llegar a A dando una vuelta de tal manera que no haya polígono. Esperemos a ver si ya la tienen en su cabeza. (...) ¿Qué pasó?

Ariadna afirma con una idea de su *autoría*:

De D pasó a A y no pasó por E primero.

El profesor pregunta a todos si están de acuerdo, a lo que Gabriela responde que sí, notando que su construcción no aplica. Tomás finalmente interviene diciendo:

Porque empieza en B (...) Tiene que empezar en A.

Se tiene un esquema A-A, justificando que la construcción no es válida por no cumplir una de las condiciones. Además, es E-P basado en lo que observa de la representación.

### ***Episodio 7***

Luego de que Gabriela presentara su representación Santiago da la propuesta de una construcción que cumple con las condiciones, pero no es un polígono. El profesor inicia preguntando con un N1 en el discurso:

(...) Santiago. Cuéntanos qué vas a hacer.

A lo que el estudiante muestra una representación de su *autoría* y afirma:

Un no polígono.



Imagen 45. Representación de Santiago para un no polígono

Con base en la construcción el profesor formula una pregunta con un N2 en el discurso:

¿Cumple con todas las condiciones? (...) ¿Ustedes que dicen?

Algunos estudiantes levantan la mano. Entre ellos Sara quien comenta:

No porque tiene (hace un gesto con el dedo representando una curva).

El esquema de argumentación presentado en esta expresión es E-P, basado en la imagen que se está proyectando. El profesor pide complementar la idea con un N1+ en el discurso:

¿Y qué pasa con esa curvita?

A lo que los estudiantes dicen que no se puede. Sara, complementa su idea diciendo que la figura es un no polígono, pero un estudiante con un esquema de argumentación responde:

No, porque él está haciendo un no polígono.

Esta expresión se clasifica como un esquema CE-A, puesto que se sustenta en la autoridad del estudiante para determinar que la construcción de Santiago es válida. El profesor pide prestar atención y le da la palabra a Gabriela:

Yo creo que no sirve porque una condición dice que entre un punto y otro debe recorrer el camino más corto y como ya dijimos, el camino más corto siempre es una línea recta.

Con esta respuesta se tiene una idea de la *autoría* de la estudiante, en la que presenta un esquema CE-A, sustentada en las características que debe cumplir la figura de la tarea. Varios estudiantes manifiestan estar de acuerdo con Gabriela.

### ***Episodio 8***

Ya al final de la clase, Ariadna toma la construcción de Santiago que está proyectada el tablero digital y empieza a hacer modificaciones. El profesor pregunta a Ariadna, con un N1 en el discurso:

A ver ¿qué estás haciendo? Cuéntanos.



Ariadna con una idea de su *autoría* comenta:

Estoy tratando de achiquitar la curva para que sea más corta.



Imagen 46. Modificación de la construcción de Santiago por parte de Ariadna

Tomás refuta la idea de Ariadna diciendo:

¡No! Porque (...) el tamaño no importa porque igual sigue siendo una línea curva.

El estudiante utiliza un esquema E-P, sustentado en lo que observa de la curva, de tal manera que el tamaño no va a afectar que sea o no polígono. Cristian con un N1 en el discurso comenta:

¿Y qué pasa?

Ariadna responde también con una idea de su *autoría*:

Que puede ser más corta que una línea recta.

El profesor pide la opinión de Camila sobre el trabajo de Ariadna por lo que se tiene un N2 en el discurso. Más si se tiene en cuenta que la respuesta de Camila y luego la de Nicolás proporcionan información adicional.

Camila: Yo, de pronto, para mí se podría hacer una más corta que no necesariamente tiene que ser recta. Pero, pues, como

Nicolás: Para mí tampoco es válido porque dependiendo también siguen siendo las mismas líneas.

En el caso de Camila se tiene una idea de su *autoría*, pero no presenta algún esquema de argumentación, mientras que Nicolás sí parece basarse en un esquema E-P, afirmando según la imagen prototípica de curva, no importa que tan pequeña sea, sigue siendo curva. El profesor pregunta nuevamente la opinión a los demás estudiantes y Gabriela responde:

Si la distancia entre dos puntos es así (representa dos puntos con los dedos índices) y siempre va a ser así (representa el segmento entre los puntos) si hago una curva (representa una curva entre los puntos) y después la alargo (representa el segmento entre los puntos), siempre va a ser más corta. Porque, por ejemplo, obviamente si yo corro los puntos (representa dos puntos más separados) para hacerla con recta obviamente va a ser más larga, pero si están los puntos en donde yo los pongo para hacerla con curva, siempre la curva va a ser más larga. El punto más corto entre dos puntos forma una línea recta.

Con esta idea se tiene un esquema E-P, en el que la estudiante intuye que independiente de lo lejos que estén dos puntos siempre la distancia más corta va a ser una recta. El profesor pregunta con un N0 en el discurso si todo están de acuerdo, a los que varios estudiantes dicen que sí. Al finalizar la clase, el profesor a modo de conclusión pregunta:

Bien, entonces nadie encontró (...) con esas condiciones ¿siempre me va a dar polígono?

El profesor tal vez esperaba que a partir de los ejemplos presentados, los estudiantes usaran un razonamiento inductivo, de tal manera que a partir de varios ejemplos donde la representación cumple con las características del tablero, se encuentre la generalidad de que la representación también sería un polígono. Algunos estudiantes responden sí a la pregunta, tal vez utilizando el tipo de razonamiento esperado, sin embargo, su la respuesta monosilábica de los estudiantes no profundiza en algún esquema de argumentación.

CLASE: 24 DE MAYO DE 2018

Para esta clase los estudiantes nuevamente utilizan el software GeoGebra. Para iniciar esta sesión el profesor pregunta por la definición de equidistancia y colinealidad, además pregunta por la actividad de la clase anterior, en la que debían determinar la figura que se formada por varios puntos equidistantes a un mismo punto, también pregunta por la definición de triángulo isósceles y triángulo equilátero. Con base en este repaso, el profesor propone construir un triángulo isósceles y un triángulo equilátero que fueran invariantes bajo arrastre. Luego de la construcción del triángulo isósceles se presentó la socialización de las producciones, pero para la construcción de triángulo equilátero, no hubo socialización por cuestiones de tiempo.

### *Episodio 1*

El profesor inicia la sesión haciendo un repaso sobre lo visto la clase anterior. Los estudiantes por su parte deben participar sin acudir a sus apuntes y el profesor tampoco proporciona alguna ayuda visual. El profesor pregunta:

(...) Necesito que Joseph nos cuente qué fue lo que hicimos la clase pasada, (...) ¿qué fue lo que hicimos?, ¿qué te acuerdas qué hicimos?

En la pregunta del profesor dirigida a Joseph se observa un N1+ en el discurso, ya que la pregunta del profesor es abierta pues le está pidiendo que cuente lo que recuerda que hizo. Inicialmente, el estudiante responde que no se acuerda de nada, pero dada la insistencia del profesor para que comente algo él responde:

Copiamos la definición de equidistancia y de ¿colineadad? ¡Colinealidad!

Se observa en esta respuesta una expresión complementemente auténtica, pues nadie le había mencionado estos dos términos, por lo que su idea es original en el contenido, y el error en la palabra colinealidad, muestra que también es original en la forma en que presentó su idea. Por lo que el estudiante es *autor*. Con base en la respuesta de Joseph, el profesor pregunta al grupo:

¡Ah! Bueno. ¿Quién me podría recordar que es eso de colinealidad? Sin mirar el cuaderno. Así, a ver ¿qué es? (Carlos y Tomás levantan la mano).

En este caso se observa un N2 en el discurso, pues nuevamente el profesor hace una pregunta en la que recibe varias respuestas que proporcionan información adicional. Joseph por ejemplo responde:

Alineados perfectamente

En esta expresión se evidencia una idea de la *autoría* de Joseph, tanto en la semántica como en la sintaxis, pues no hay evidencia de haber usado estas palabras previamente en el discurso y el contenido es completamente auténtico. Ante esta respuesta el profesor pregunta:

¿Quiénes?

Para esta expresión, aunque es de una palabra, se puede decir que el profesor le pide al estudiante que provea más información con una pregunta directa, es por eso por lo que se clasifica como N1 en el discurso. Joseph aclara diciendo que:

Los puntos en un segmento. (Mueve horizontalmente la mano de adelante hacia atrás).

Con esta expresión complementa la idea anterior, pero incluyendo el objeto geométrico al cual hace referencia, por tanto, Joseph sigue siendo *autor*. Otra de las respuestas que obtuvo el profesor cuando preguntó sobre la colinealidad es la de Gabriela:

Dos o más puntos son colineales, si pertenecen a la misma recta.

En este caso se evidencia una expresión de la *autoría* de Gabriela, más si se tiene en cuenta que no revisó sus apuntes. Así con base en esa respuesta y lo dicho por Joseph el profesor le pregunta a Gabriela:

Y, ¿qué piensas con lo que dijo Joseph? ¿Si estaría acorde con lo que tu acabas de decir?  
¿Tiene concordancia o le faltaba algo?

El profesor muestra en esta expresión un N1+ en el discurso, pues retoma la idea anterior de Joseph y pide a Gabriela que comente sobre el trabajo de su compañero, pero ella no proporciona información adicional, solo pregunta si debe opinar sobre la idea de que los puntos debían estar alineados perfectamente. El profesor pide a Joseph repetir lo que dijo:

Que están alineados perfectamente. Un segmento está alineado con unos puntos (...) ¡Una recta! ¡Una recta!

Esta expresión es un ejemplo de originalidad de *portavoz*, ya que presenta la misma idea de que están alineados, pero cambia el formato introduciendo términos como segmento y recta. El profesor le pide a Joseph que hable más fuerte, pero en su respuesta Joseph cambia la idea que venía expresando:

Que los puntos están a la misma distancia de cada uno de ellos (habla en un tono bajo).

Aunque Joseph trata de ser *portavoz*, con la expresión anterior cambia lo que dice en su forma y en su contenido al introducir la palabra distancia, por lo que es una idea distinta de la cual él es *autor*. El profesor pide aclarar la idea:

¿Eso qué quiere decir?

Con esta pregunta se observa un N2 en el discurso ya que la pregunta es abierta y Nicolás responde voluntariamente diciendo:

(Levanta la mano) Que todos los puntos están a la misma distancia de si (...).

Esta expresión presenta con otras palabras la idea de Joseph cuando dice que los puntos están a la misma distancia de cada uno de ellos, por lo que Nicolas es un *portavoz* de Joseph. El profesor centra nuevamente la conversación a la definición de colinealidad diciendo:

Sí, pero, eh, cuando están a la misma distancia, ¿Estamos hablando de colinealidad o de la otra?

Esta pregunta es clasificada en N0 por ser directa y la respuesta recibida por parte de Gabi “colinealidad” es corta. El profesor nuevamente pregunta a Joseph si la idea que estaba tratando de dar era sobre colinealidad, pues, aunque había hablado de que los puntos estaban alineados perfectamente, también había hablado sobre la distancia. Él, con tono de duda, responde que sí. Con base en esta intervención, el profesor pregunta a Sara si está de acuerdo y aunque varios de sus compañeros dicen que sí, ella comenta:

No porque (...) estamos hablando de (...) equi (...).

Varios estudiantes la interrumpieron con tono de desespero, entonces el profesor interviene sin dejarla terminar su idea, sin embargo, se evidencia una intención de la estudiante por afirmar que no está de acuerdo con que la definición de la que están hablando es la de colinealidad, sino la de equidistancia. Bajo esta idea se presenta un esquema de argumentación A-A, pues la estudiante reconoció la definición de equidistancia para aclarar que las características que se estaban exponiendo no correspondían a la definición de colinealidad, que era por la que el profesor estaba preguntando. Luego de que el profesor llamara la atención de los estudiantes dijo:

Estamos hablando de colinealidad que fue uno de los ejercicios que hicimos. Entonces Gabriela por acá nos decía que era: Tres o más puntos son colineales ¿sí?

Esta es una pregunta directa por tanto es N0 en el discurso y la respuesta de Gabriela fue concreta:

Pertenecían a la misma recta.

Esta expresión la presenta Gabriela siendo transmisora de una idea que ella había dado con anterioridad, pues ella ya había presentado la definición de colinealidad, utilizando las mismas palabras. Ya aclarando la definición de colinealidad el profesor pregunta por la de equidistancia:

¿Cuál era la otra [definición] que estábamos haciendo la clase pasada?

Como el profesor está retomando una idea vista la clase pasada, pero hace una pregunta cerrada, se considera que la expresión está en un N1 del discurso. Dado que no hubo mayores repuestas, el profesor dijo:

Equidistancia ¿Qué era eso de equidistancia? ¿Quién nos quiere comentar? Salomé, por ejemplo.

En este caso la pregunta es abierta pues pide información adicional y los estudiantes participan voluntariamente por lo que la expresión está en un N2 del discurso, como se observa en la expresión de Jerónimo:

(Sin solicitar la palabra) Que, que (...) Tiene la misma distancia.

Esta expresión es original de Jerónimo, pues antes de ella no se había dado una definición de equidistancia, por lo que él es *autor*. Ante esta respuesta el profesor pregunta a otro estudiante:

(Mira al grupo de Tomás) ¿Qué dicen ustedes?

Con esta pregunta el profesor tiene la intención de que los estudiantes opinen sobre la definición de equidistancia, algo que ya había hecho con anterioridad, por lo que no es original en el contenido, pero sí en la forma en la que pregunta, así que el profesor es *portavoz* de su propia idea. Ahora bien, la pregunta es abierta y Tomás da información adicional, por lo que la pregunta está en un N2 del discurso. Tomás por tanto responde:

(Lee) Dos o más parejas de puntos son equidistantes (...).

Dado que el estudiante leyó, no se considera que la expresión anterior es original así que, si Tomás hubiera terminado la idea sería un trasmisor de la definición. Sin embargo, el profesor lo interrumpe diciéndole que la intención de la tarea era que no miraran el cuaderno y que la pregunta formulada era sobre lo que había dicho Salomé, así que finalmente preguntó al grupo si estaba de acuerdo con ella, a lo que la mayoría de los estudiantes respondió que sí.

### ***Episodio 2***

Luego de estudiar las definiciones de equidistancia y colinealidad el profesor preguntó por la última actividad realizada en la clase. En torno a ella se generó el siguiente diálogo, el cual inicia con una pregunta abierta:

Y (...) eh, hicimos un último ejercicio, y ¿qué vimos ahí en ese ejercicio?

Nicolás responde voluntariamente, por lo que la pregunta anterior es N2 en el discurso:

(Levanta la mano mientras responde). El ejercicio se trataba de que teníamos que trazar desde el punto A (describe con el dedo dos puntos al aire) una serie de equidistantes puntos (...) nueve puntos más (señala al aire más puntos).

Dado que es el primer estudiante en participar y no se basó en los apuntes de la clase anterior, Nicolás es *autor*. Con base en esta respuesta, el profesor pide a los estudiantes profundizar en lo que se acabó de decir, por lo que formula la siguiente pregunta en un N2 del discurso:

Y ¿qué hablábamos de eso?, ¿qué nos daba o porqué hacíamos ese ejercicio?

Nicolás voluntariamente de nuevo responde:

Pues porque el resultado nos debe dar una circunferencia (señala dos puntos al aire). Porque (...) desde la circunferencia se tiene la misma distancia. (Con el dedo señala un punto a aire [el centro] y a partir de él describe líneas hacia afuera [como si fueran los radios de esa circunferencia "imaginaria"]).

Según la respuesta de Nicolás se evidencia un esquema A-A, específicamente cuando afirma que el resultado del ejercicio es una circunferencia y se sustenta en la definición, cuando dice "porque (...) desde la circunferencia se tiene la misma distancia". Cabe aclarar que entre paréntesis hay algún comentario inaudible, pero se podría intuir que hace referencia al centro de la circunferencia. A partir de la respuesta de Nicolás el profesor le pregunta a otro estudiante:

Eso es cierto, ¿Alan?

Esta pregunta es directa, pero implícitamente está retomando la idea de Nicolás, por lo que la expresión es N1 en el discurso. A pesar de que la pregunta iba dirigida a Alan, Jerónimo responde:

(Habla sin que le den la palabra) Sí, si es cierto porque yo lo hice.

Con la idea anterior, evidenciamos un esquema E-F, dando que el estudiante se basa en el procedimiento realizado la clase anterior para reafirmar la idea de Nicolás. Varios estudiantes hablan al mismo tiempo, así que el profesor les llama la atención y posteriormente pide a Nicolás que retome su idea:

Que al final al resultado de la actividad teníamos que hacer una circunferencia, y pues, desde el punto A poníamos los demás (...) los nueve puntos más. Y pues, ahí se tenía la misma distancia (Señala un punto al aire con el dedo de la mano izquierda [como si fuera el centro de la circunferencia] y con la mano derecha dibuja una circunferencia alrededor de este punto).

Con esta expresión, Nicolás es trasmisor de su propia idea y por tanto nuevamente se corrobora un esquema A-A. El profesor nuevamente se dirige a Alan preguntándole si eso es cierto:

¿Eso fue los que hicimos?

Con esta forma de pregunta se afirma que hay originalidad en la sintaxis, pero no en la semántica ya que antes se había referido a este estudiante para que opinara sobre la idea de Nicolás, por lo que el profesor es *portavoz* de su propia idea. Alán responde inseguro que sí, así que un compañero, Cristian pregunta:

(Se dirige a Alan) ¿Y porque sí?

Este es un ejemplo de una expresión donde es un estudiante quien propicia el discurso. De la pregunta formulada se obtiene una respuesta que proporciona información adicional, por tanto, Cristian presenta un N2 en el discurso. Alan entonces responde:

Porque pues así, eso (...) o sea, eso fue lo que tú nos dijiste que hiciéramos.

Esta respuesta deja ver un esquema CE-A, ya que el estudiante se sustenta en la autoridad del profesor, para apoyar la idea de Nicolás. El profesor ante esta respuesta pregunta con tono de ironía:

¿Yo te dije que hiciéramos (...)?

Como la pregunta esta formulada con las palabras de Alan, pero de ella se infiere que el profesor cuestiona al estudiante presentando una idea diferente, se considera esta expresión con una originalidad de *fantasma*. Alán responde que sí, así que el profesor nuevamente proporciona una pregunta con un N2 en el discurso, en la que solicita información adicional y Alan responde:

Tú nos dijiste que hiciéramos una línea con nueve punticos o sea (...) (hace una línea al aire con el dedo).

De esta repuesta se observa un esquema CE-A, que complementa la idea anterior propuesta por Alán en la que se apoya en la *autoridad* del profesor. Solo que, en esta respuesta, el estudiante hace referencia a una línea y no a una circunferencia, como lo que se venía tratando. Paula, interrumpe a Alan diciendo:

Equidistante, una línea equidistante con nueve punticos. O sea, tú nos dijiste que hiciéramos una línea que entre la separación de los puntos este iguales, o sea que no haya un punto más cerca del otro y sin ninguna ayuda.

Esta respuesta es de completa *autoría* de la estudiante ya que no se apoya en ideas del cuaderno y complementa las ideas anteriores haciendo referencia a la separación de los puntos. Además, cabe resaltar que la introducción de Alan sobre una línea hizo que la estudiante confundiera la tarea planteada por el profesor. Por tanto, Paula es *autora* de la idea. El profesor cae en cuenta de ese error, así que centra nuevamente la discusión en la tarea que estaba repasando:

Eh, sí. Lo que pasa es que se fueron al otro problema, ese lo habíamos hecho para (...). Es que acá Nicolás había dicho algo que habíamos hecho y ninguno me está diciendo. ¿Qué habíamos encontrado? ¿Te acuerdas Paula?

La expresión anterior fue formulada en un N2 del discurso, ya que la pregunta es abierta y la respuesta que se obtiene por parte de Paula da información adicional:

Eh (...) sí espérame vuelvo a la está (...) vuelvo a (...) pues yo me acuerdo que tú nos dijiste, nos mandaste a hacer una figura que empiece en A y termine en A ¿no?

Nuevamente observamos una respuesta de la *autoría* de Paula, así que el profesor se dirige a los estudiantes:

¿Están de acuerdo que ese era el problema?

La expresión está en un N1 del discurso, ya que la pregunta es directa y Paula responde concretamente:

¡Que pase por todos los puntos!

Con esta repuesta el profesor afirma que están mezclando las clases y se dirige a Jerónimo para indicarle que cuente sobre qué era la tarea. Como la pregunta del profesor es abierta y se ofrece una respuesta con información adicional, se puede decir que está en un N2 del discurso. Jerónimo por tanto responde:

Pues lo que yo hice fue, que cogí una circunferencia, porque había una opción que era un circulito (traza una circunferencia con el dedo en la mesa), hice el círculo y todos tienen que estar equidistantes a A ¿sí?, pero no equidistante entre ellos, solo entre A. Entonces yo podía poner todos pegados en el círculo y estar a la misma distancia de A.

Se evidencia en Jerónimo un esquema E-F, ya que se basa en el procedimiento para argumentar sobre la tarea. Hay que recordar que anteriormente Jerónimo se había apoyado en que así había hecho la tarea para concordar con la idea de Nicolás. Se infiere además que, a diferencia de Nicolás que realizó los puntos que equidistarán y luego trazó la figura, Jerónimo realizó primero la circunferencia y luego verificó la equidistancia, lo que lo hace *autor* de la expresión. El profesor se dirige Gabi, para que aporte a la conversación:

(...) entonces ustedes tenían que hacer una circunferencia y mirar los puntos ¿o qué tenían que hacer? ¿Ese era el problema?

Como se espera que la respuesta aporte información adicional y en efecto se obtiene, se considera que la pregunta está en un N2 del discurso. Gabi responde que no, negando que la tarea era como lo había dicho Jerónimo, además aporta:

Pues el problema no era que teníamos que hacer una figura, si no hallar la manera en que A fuera como un punto que (...), ay es que no sé cómo. (...) yo dije que todos los puntos tenían que estar de A en la misma recta a la misma...

Se observa una expresión que, según la forma es original de Gabi, más si se considera la dificultad para hacerse entender, sin embargo, tiene en cuenta la idea de recta que fue propuesta con anterioridad por Alan, así se puede decir que no es una expresión original en la semántica. Por lo que Gabi es *portavoz* de la idea de Alan. Dana interrumpe diciendo:

De la medida.

Dana es *portavoz* de Gabi, ya que hace referencia a la medida, mientras que Gabi había mencionado la distancia. El profesor le pide a Gabi que hable más fuerte, pero ella comenta que está enferma de la voz, así que el profesor le pide a Dana que complemente la idea de Gabi, por lo que Dana dice:

El problema era que A (...) ah, ¿qué? (mira a Gabi dubitativamente y Gabi le susurra).  
(...) Tenían que partir del punto de A.

Dana trata de ser *portavoz* de Gabi, pero como la idea de Gabi no es clara, el profesor se dirige a Dana diciendo:

Bueno, no escuches a Gabi, sino que cuéntenos lo que hicieron (...).

El profesor es *portavoz* de su propia idea, pues ya previamente se había observado en él la intención de incluir más estudiantes en el diálogo, pero la pregunta que formula es de forma distinta. Dana por tanto responde:

Que es problema era de que, el punto A y los demás puntos tenían que tener la misma distancia. Nosotros lo que hicimos fue que todos. (...) Nosotros lo que hicimos fue imponer a A en el centro de una circunferencia.

Como esta respuesta no fue influenciada por otro estudiante, ni siquiera de Gabi, Dana es *autora*. El profesor pregunta nuevamente si ese es el problema, así que Gabriela levanta la mano y responde:

El problema era poner como diez puntos que tuvieran la misma distancia entre A. No entre ellos sino solamente con A, entonces lo que ellas hicieron y la solución fue poner una circunferencia, porque (...) ¿radios es se llama? (...) Del centro al extremo siempre van a ser de la misma medida, de cualquier punto de afuera hasta el centro.

En esta respuesta se observa un esquema A-A, ya que la estudiante comenta cuál fue la tarea y afirma que la solución es una circunferencia sustentada a partir de su definición. Luego de esta respuesta el profesor dice:

¿Qué dice Tomas, está de acuerdo?



Con esta expresión se evidencia un N2+ en el discurso, ya que plantea una discusión, pero como el estudiante no estaba prestando atención dio una respuesta corta negando con la cabeza. El profesor fórmula una pregunta similar a Cristian, siendo el *portavoz* de su propia idea, es decir, cuestionar a los demás estudiantes frente a lo dicho por Gabriela. Por lo que Cristian responde:

Sí profe, es que se puede empezar desde cualquier punto.

La respuesta del estudiante es de su *autoría*. El profesor, por tanto, responde:

No sé qué quieres de (...) no sé lo que los demás piensan. ¿Sí era el problema?

La pregunta trata de fomentar una discusión sobre lo que acabó de decir Cristian, pero como varios estudiantes responden que sí, sin profundizar en la idea, se observa una N2+ en el discurso. El profesor cierra el repaso diciendo:

O sea que vimos (...) vimos que esos puntos (...), cierto, voy a mirar acá. (Escribe en el tablero varios puntos que determinan una circunferencia) esos puntos que estaban por acá, que ustedes llegaban y dibujaban ¿formaban qué? ¿Qué objetos veían ustedes ahí?

La pregunta del profesor sugiere una respuesta corta. En efecto los estudiantes, dijeron que una circunferencia sin proporcionar más información. Por lo que la pregunta se considera que esta en un N0 del discurso. Luego el profesor comenta:

Y la circunferencia, ¿es útil para qué?

Nuevamente se hace una pregunta directa en un N0 del discurso, donde Jerónimo responde sin proporcionar información adicional:

Para que tuvieran la misma distancia de A todos los puntos. Ese era el problema.

### ***Episodio 3***

Luego de realizar el repaso sobre la figura que se forma a partir de varios puntos equidistantes a un mismo punto y de recordar la definición de circunferencia, el profesor propone la primera tarea de la clase. El profesor da inicio comentándole a los estudiantes que esta forma de estudiar los puntos equidistantes les iba a ser útil para algo. Hace una pausa y luego pregunta:

El primer polinomio que habíamos estudiado cuál era. ¿Cuál era el polinomio que tenía (...)? (realmente hace referencia al polígono. Así que luego de caer en cuenta de su error hace la respectiva corrección).

A partir de análisis de la pregunta es posible afirmar que el profesor presenta un N1 del discurso, ya que tiene en cuenta conceptos vistos con anterioridad y a partir de esto formula una pregunta directa, en la que, en efecto, un estudiante responde que es el triángulo. El profesor retoma esta respuesta y con base en ella propone la tarea y formula una pregunta:

(...) Entonces hoy vamos a hacer con la tablet en GeoGebra la construcción de dos triángulos, en particular uno de ellos quiero que (...) Quiero que recordemos de qué se trataba el siguiente (...) A ver si yo digo triángulo isósceles ¿ustedes que se acuerdan?

Esta pregunta está en un N2 en el discurso ya que es abierta y a partir de ella se obtienen dos repuestas, una de Nicolás y otra de Tomás. En cuanto a la respuesta de Nicolás, el estudiante dice:

Que es el que tiene dos lados de la misma distancia, uno que no ¿más largo?

Esta expresión se puede decir que es de la *autoría* de ese estudiante ya que no había mirado previamente el cuaderno y nadie durante la clase había hecho referencia a una idea similar. Con base en esta repuesta el profesor pregunta con un N1+ en el discurso:

(Se dirige al grupo) ¿Qué dicen ustedes, están de acuerdo? (Señala a Valentina) ¿Qué dice allá Valentina? (Murmillos) ¿Si estás de acuerdo con él, sí es la definición?

Esta expresión se considera en el nivel de discurso mencionado, ya que el profesor retoma la idea de Nicolás y le pide información adicional, específicamente cuando pregunta al grupo “¿qué dicen ustedes?”. Pero la respuesta monosilábica de Valentina “Sí señor” no permite avanzar en el discurso. De nuevo el profesor le pregunta a la estudiante con un N1 en el discurso:

¿Cuál es la definición?

Pues Valentina responde que “No sabe”. Por otro lado, sobre la respuesta de Tomás a la pregunta del profesor sobre la definición de triángulo isósceles, el estudiante dice:

Que tiene dos lados iguales y uno mal.

Con esta frase se observa originalidad en la intervención, en especial por la expresión “y uno mal”, haciendo referencia al lado de un triángulo isósceles cuya medida sea diferente a la medida de los otros dos lados. Pero en la semántica se observa una idea similar a la de Nicolás, en tanto que distingue un lado del triángulo de los otros dos. Por tanto, el estudiante es *portavoz*. El profesor interviene inmediatamente dirigiéndose a Tomás:

¿Y uno mal? ¿Eso dice? O sea, anoto acá la definición (señala el tablero), dos lados iguales y uno mal. A ver necesito copiar una definición y Sara me la va a decir, a ver díganme, voy a copiar allá (en el tablero), a ver. Triángulo (...)

Aunque no se observa claramente una pregunta, el profesor con esta expresión sí sugiere a los estudiantes completar la definición, lo que presupone una respuesta puntual. Sara por tanto responde “Isósceles”, lo que manifiesta una respuesta concreta que permite clasificar la pregunta del profesor como un N1 en el discurso. El profesor por tanto complementa la pregunta anterior también en un N1 del discurso diciendo:

Bueno yo voy a mirar aquí a ver que me da y ustedes me dicen si están de acuerdo o no ¿listo? (...). A ver un triángulo es isósceles si tiene (...) (Copia en el tablero) Dos lados (...)

De ahí se obtienen dos respuestas.

Cristian: Igual

Nicolás: de la misma distancia

En cuanto a la respuesta de Cristian, ya que es el primero en hablar, se observa una expresión de su *autoría*. Mientras que la expresión de Nicolás, aunque tiene palabras distintas, se puede

pensar que trae consigo la misma idea de Cristian, más aún si se tiene en cuenta que los estudiantes apenas están iniciando en el discurso matemático. Por tanto, Nicolás es *portavoz* de Cristian. A partir de este diálogo el profesor dice:

(Señala el grupo de Joseph) Por acá me dicen, de la misma distancia. (Se refiere el grupo de Cristian:) Por acá me dicen, iguales.

Se observa que las expresiones del profesor se basan en las mismas palabras de las respuestas de Cristian y de Nicolás, pero con una intención distinta, por tanto, el profesor tiene una autenticidad de *fantasma*. Ante esta intervención Cristian cambia su respuesta siendo transmisor de Nicolás:

Iguales no, de la misma distancia

Paula inmediatamente expresa esta misma idea con otras palabras:

De la misma longitud.

Por lo que ella también es *portavoz*. El profesor nuevamente actúa como *fantasma* usando las palabras de Paula para cuestionar a sus estudiantes, con un N1 en el discurso por ser una pregunta directa que retoma ideas previas, pero de la cual, no obtiene respuesta:

¿Sí? ¿O era de la misma longitud?

El profesor termina de copiar la definición en el tablero “un triángulo es isósceles si tiene dos lados de la misma longitud” y con base ella, pide a los estudiantes construir un triángulo isósceles con la condición de que al arrastrarla el triángulo siempre sea isósceles, además debe escribir el procedimiento de la construcción en su cuaderno y justificar por qué siempre es isósceles.

#### ***Episodio 4***

Luego de que el profesor propusiera la tarea de construir un triángulo isósceles que fuera invariante en el arrastre, los estudiantes empezaron a trabajar. A continuación, se presentan los diálogos de la investigadora, quien pasaba por las diferentes mesas de trabajo y hablaba con algunos estudiantes.

#### ***Grupo 1***

Los estudiantes de este grupo fueron los primeros en confirmar que habían terminado. Ante esto, la investigadora se les acercó para preguntarles:

(...) ¿ya acabaron? ¿Tan rápido? ¿Cómo lo hicieron?

Joseph, un miembro del grupo muestra la imagen de un triángulo que parece isósceles, sin mencionar palabra alguna (Imagen 47).

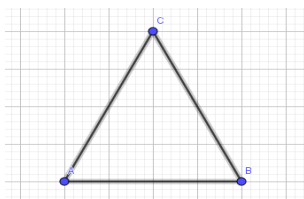


Imagen 47. Réplica de la primera construcción de Joseph

Dado que la pregunta de la investigadora es abierta, pues pide una explicación del procedimiento, la respuesta de estudiante es puntual mostrando su construcción sin profundizar en la explicación, por lo que se presenta un N1+ en el discurso. Como la construcción basa sus medidas en la cuadrícula, la investigadora comenta:

Con cuadrícula. Ya saben que no se puede ¿cierto?

En este caso se observa una pregunta directa, que trae consigo una objeción sobre la construcción. Mientras que el estudiante da una respuesta corta “A bueno entonces no”. Lo que implica un nivel de discurso N0. Ante el comentario de la investigadora, el estudiante quita la cuadrícula presentando la siguiente imagen:

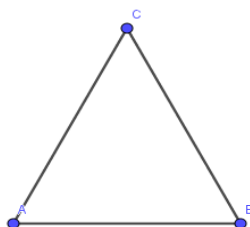


Imagen 48. Réplica de la construcción de Joseph sin cuadrícula

Al mostrar ambas representaciones, aunque el estudiante no verbaliza su idea si la presenta de manera gestual, siendo en ambos casos *autor* de la expresión. La investigadora, tal vez para que el estudiante tenga en cuenta la invarianza en el arrastre, le pregunta:

Si tú lo mueves, ¿sigue siendo isósceles?

El estudiante responde que sí, por lo que la pregunta es N0 en el discurso. La investigadora le pide a Joseph mover un punto del triángulo y el estudiante. Entonces que la investigadora pregunta:

¿Ahí es isósceles? ¿Será que dos de los lados son iguales?

Aunque la investigadora ya había preguntado si el triángulo era isósceles, es la primera vez que pregunta por la propiedad de que dos lados sean de igual longitud, por lo que es de su *autoría*. Sin embargo, esta en un N0 del discurso pues la pregunta sigue siendo directa y la respuesta de Joseph, aunque con duda, es monosilábica “¿Sí?”. La investigadora pide profundizar en la respuesta:

¿Por qué?

Mientras que Joseph responde:

Porque parece igual.

Aunque ambas expresiones son cortas, la pregunta de la investigadora es abierta y la respuesta trae consigo un E-P, afirmando que dos lados del triángulo son de igual longitud apoyado en su percepción visual. La investigadora explica al estudiante cómo utilizar la herramienta para medir del software y luego de tomar las medidas pregunta, siendo trasmisora de su propia idea:

¿Dos de esos son iguales?

A lo que el estudiante responde que no. Por lo que la expresión de la investigadora está en un N0 del discurso. Posterior al dialogo con Joseph, Jerónimo se dirige a la investigadora y le comenta que ya ha terminado mostrándole su construcción (Imagen 8), así que la investigadora le pregunta:

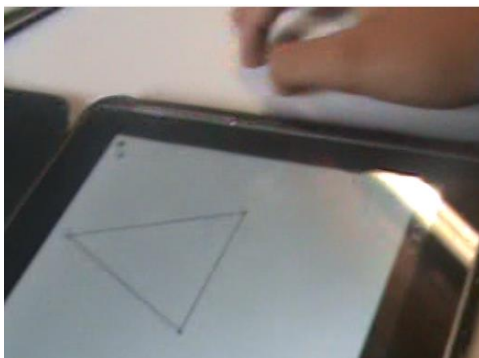


Imagen 49. Construcción inicial de Jerónimo

¿Cómo lo hiciste? ¿Con cuadrícula? (Se observa un triángulo similar a la de Joseph, sin construcciones auxiliares).

La primera pregunta le sugiere al estudiante una explicación sobre el procedimiento, sin embargo, la respuesta de Jerónimo no cumple con el objetivo de la investigadora, por lo que está en un N1+ del discurso. Cabe resaltar que la pregunta de la investigadora sobre la cuadrícula trae consigo una idea de la conversación con Joseph, por lo que la investigadora es *portavoz* de su propia pregunta. La respuesta de Jerónimo es:

Con el dedo.

Esta intervención se debe tener en cuenta ya que la pantalla de la Tablet con la que realizaron la construcción es táctil. La investigadora se vuelve *transmisora* de una sugerencia similar a la que le había hecho a Joseph, diciéndole a Jerónimo:

Muévelo, mueve un punto.

El estudiante accede (Imagen 50).

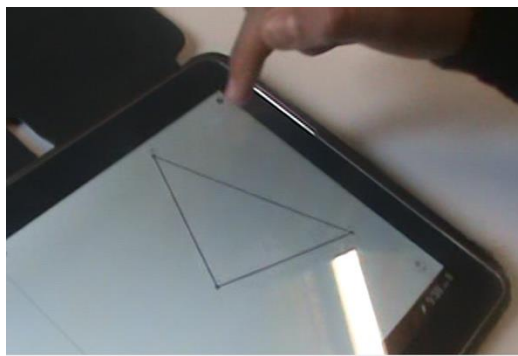


Imagen 50. Construcción de jerónimo luego de mover los vértices

La investigadora pregunta:

¿Ahí siguen siendo iguales?

Como ella ya había preguntado con anterioridad sobre la propiedad de que dos lados del triángulo fuesen de igual medida, pero, con otras palabras, entonces la investigadora es *portavoz* de esa pregunta, con un N0 del discurso por la respuesta insegura de Jerónimo en la que no profundiza en la idea:

Creo que sí.

La investigadora, aunque hace una pregunta corta y directa, implícitamente retoma la idea anterior lo que hace que el estudiante proporcione información adicional:

Si porque mira este (señala uno de los segmentos) son iguales, son iguales (mueve el dedo hacia arriba y hacia abajo sobre el triángulo, sin señalar exactamente los segmentos congruentes).

En este caso se observa un E-P en Jerónimo, pues a partir de lo que observa al hacer el arrastre le justifica a la investigadora que ambos segmentos siguen siendo iguales, con una expresión de su completa *autoría*. A partir de esta respuesta la investigadora explica al estudiante cómo utilizar la herramienta para medir del software y luego, siendo *transmisora* de la misma pregunta sobre la que se venía trabajando, dice al estudiante:

¿Son iguales?

Dado que la respuesta es que sí, la expresión anterior está en un N0 del discurso. Cabe resaltar que las medidas de los lados del triángulo que muestra el software no son iguales, así que, con una pregunta directa pero basada en la idea que se venía trabajando, se dirige al estudiante en un N1 del discurso:

¿Cuál con cuál?

Y el estudiante como *autor* de su respuesta, dice:

Todos con todos. (Habla en tono fuerte) (...)

Luego de esta intervención, la investigadora le pregunta al estudiante si está seguro de la idea que está expresando, a lo que él responde que sí, con lo que se tiene un N0 en el discurso. Tal vez intentado que el estudiante caiga en cuenta de su error, la investigadora lee las medidas que se pueden leer de la tableta para indicarle a Jerónimo que no son iguales y, aunque la expresión no es una pregunta explícita, cuestiona al estudiante, lo que lo lleva a argumentar por qué sí hay dos lados congruentes en su construcción, de tal maneja que se refleja un N2 en el discurso.

Investigadora: Este vale 44,7 y este 44,6.

Jerónimo: (Toma la medida del segmento AB) Yo mido de aquí a aquí y (selecciona los puntos B y A) luego de aquí a aquí y (selecciona los puntos A y B) luego de aquí a aquí y ya todos, tengo tres iguales.

Con esta intervención se observa un E-F, en tanto que se sustenta en el algoritmo que realiza para obtener las longitudes de los segmentos y así afirmar que los tres lados del triángulo son

de igual medida. La investigadora, que continua en un N2 del discurso cuestiona la justificación de Jerónimo, retomando información previa. Jerónimo por su parte trae información adicional con la que aclara su idea.

Investigadora: O sea, ¿ese es igual con ese mismo?

Jerónimo: Exacto. Entonces tres veces por el mismo y ya tengo como los tres lados. Entonces ya terminé.

La expresión de Jerónimo es auténtica en su sintaxis y semántica, siendo *autor* de la expresión. Joseph con tono desesperado comenta que no es posible, así que la investigadora se dirige a él diciéndole con un N0 del discurso:

¿No se puede?, Tú habías hecho una construcción ahorita.

A lo Joseph responde de forma concreta:

Pues sí, pero (...) pero (...)

Así que la investigadora da una pista para resolver el problema, tal vez haciendo referencia a la definición de circunferencia:

¿Qué, qué han visto antes que te sirviera? ¿Qué vieron antes?

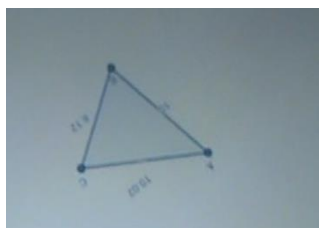
Los estudiantes respondieron que la cuadrícula. Como esta respuesta fue concreta y no profundizaba en la información esperada por la investigadora, se considera que la pregunta promovió un N1+ en el discurso.

### *Grupo 2*

La investigadora se acerca al grupo y comenta:

¿Qué estás haciendo? (...) O sea, ¿de qué forma?

Esta pregunta es abierta, pidiéndole a la estudiante comentar sobre su construcción. La respuesta de Gabriela proporciona información adicional sobre cómo está explorando su construcción para que cumpla la propiedad de que dos lados sean congruentes, por lo que hay un N2 en el discurso. La estudiante muestra la siguiente imagen al tiempo que comenta:



*Imagen 51. Construcción de Gabriela*

Estoy midiendo con esta cosita de acá y la función de mirar y poner (...) Esta, la de ángulos y medidas. Entonces puedo medir cuánto va (...) cuál es la distancia. Entonces estoy intentando que estos dos (señala dos lados del triángulo) queden iguales. ¡Pero es muy difícil!

La investigadora interviene diciendo:

¿Cierto? Y como es tan difícil por qué no lo tratas de hacer de otra forma.

Aunque luego de la pregunta se dirige a otros estudiantes y la respuesta de Gabriela no es inmediata, parece la pregunta le sugiere a la estudiante explorar otra forma de realizar la construcción. La respuesta de Gabriela posteriormente permite evidenciar una construcción de triángulo isósceles que fuera invariante en el arrastre, e incluso presenta una justificación. La investigadora se dirige a María Fernanda y le pregunta:

¿Y tú qué hiciste? ¿Así también?

Aunque esta pregunta es abierta, pidiéndole a la estudiante que comente su construcción, la respuesta de la estudiante “Normal” no aporta información adicional, por lo que está en un N1+ del discurso. La investigadora cambia su nivel de discurso a 2 pidiendo con las mismas palabras que la estudiante utilizó profundizar el tema:

Investigadora: ¿Normal?

María Fernanda: Normal, pero sé que es isósceles porque tiene dos lados que son iguales (señala dos lados del triángulo), este y este (Imagen 52). (el segmento interno al triángulo no hace parte de su construcción, se creó cuando estaba señalando los lados del triángulo)



Imagen 52. Construcción de María Fernanda

Dado que la investigadora utiliza las mismas palabras que María Fernanda, pero su intención es distinta, se considera que la autenticidad de la pregunta es de *fantasma*. Por otro lado, se observa en la estudiante un E-P, pues la estudiante no hace alguna verificación de las medidas con alguna herramienta, sino a partir de lo que está percibiendo. Esto se corrobora cuando la investigadora cuestiona con un N2 en el discurso:

¿Y cómo sabes que son iguales?

A lo que María Fernanda comenta con una expresión de su *autoría*:

(Con tono de certeza) Pues porque se ven iguales.

La investigadora se dirige a los demás miembros del grupo con una pregunta abierta:

¿Alguno ha hecho algo diferente?

Con esto, la investigadora pide información sobre construcciones diferentes a la presentada. Diana y María José responden dado la siguiente información.

Diana: No pues yo también he hecho un triángulo.

María José: Es que no sé (...) Pues yo sé que es un triángulo isósceles [la figura que realizó] porque dos lados tienen la misma medida, pero este (señalando un lado) tiene que ser más largo.



Dado que ambas proporcionan información adicional, la pregunta de la investigadora está en un N2 del discurso. Particularmente, María José presenta dos esquemas de argumentación, uno es A-A en tanto que afirma que el triángulo es isósceles sustentada en la definición, y el otro es E-P, pues también considera que el triángulo es isósceles porque se asemeja a su forma prototípica en el que uno de sus lados se ve distinto a los otros dos. Luego de las conversaciones entre María Fernanda, María José y Diana; Gabriela, con tono expresivo, interrumpe el diálogo afirmando que ya había terminado, así que la investigadora como *transmisora* de la pregunta, dice que cómo lo hizo, a lo que la estudiante responde:

(...) Cogí un círculo, como se supone que del centro al extremo del círculo siempre está a la misma distancia, cogí un círculo e hice un triángulo con base al círculo, como el radio siempre va a ser igual desde cualquier parte del círculo hacia adentro, entonces ¡quedaron iguales!

El argumento de la estudiante deja ver un esquema A-A, sustentada en la definición de circunferencia para afirmar que el triángulo siempre es isósceles a pesar del arrastre.

### *Grupo 3*

La investigadora se acerca a Catalina y le pregunta:

Cuéntame, ¿cómo estas tratando de hacer ese triángulo?

A lo que ella responde:

Pues ahorita me acabo de dar cuenta de que me quedó mal.

De la pregunta realizada por la investigadora se evidencia que ella le pide a la estudiante comentar sobre la construcción, la respuesta que recibe es corta, afirmando que su construcción no es correcta, por lo que hay un N1+, en el discurso, además muestra su representación (Imagen 53)



*Imagen 53. Construcción de Catalina*

La investigadora pide profundizar en la respuesta y dada la respuesta de la estudiante es posible observar un N2 en el discurso:

Investigadora: ¿Sí? ¿Y por qué crees que te quedó mal?

Catalina: Porque es que no tenía los lados de la misma longitud.

Catalina es *autora* de su argumento, además sustenta que su construcción es incorrecta ya que no cumple con la definición de triángulo isósceles, por lo que hay un esquema A-A. La investigadora hace una pausa esperando que las estudiantes del grupo exploren un poco más y luego formula las siguientes preguntas:

Investigadora: Listo mis niñas, ¿ya construyeron ahí el triángulo?

Juanita: Sí

Investigadora: y ¿cuáles crees que son los lados que tienen la misma longitud?

Juanita: (Señala los lados más largos del triángulo) Este y este.

La conversación anterior presenta un claro ejemplo de una conversación en un N0 del discurso, ya que las preguntas son directas y de ellas se obtuvo respuestas concretas por parte de Juanita. Así que la investigadora modifica su nivel de discurso a 2, pues pide información adicional sobre la construcción:

¿Y cómo lo construyeron?

Valentina, una estudiante que trabaja en la misma tableta de Juanita, procede a dar una respuesta donde presenta las herramientas utilizadas. Además expone un esquema A-A, que se sustenta en la definición de triángulo isósceles a partir de la medida que tomaron con la cuadrícula.

Valentina: Pues tuvimos que poner la cuadrícula para poder saber si nos había quedado bien o no (...)

Juanita: Sí y luego unimos los puntos.

Posteriormente las estudiantes utilizan una regla sobre la tableta para comprobar la medida, lo que corrobora que las estudiantes se basan en la propiedad de que dos lados sean congruentes para determinar la validez del triángulo. En ese momento Catalina comenta haber terminado, por lo que la investigadora pregunta:

¿Ya terminaste el tuyo? Sí, y ahora sí ese (la construcción) si es isósceles ¿seguro?

A lo que Catalina responde que sí, evidenciando un N0 en el discurso si se considera la respuesta monosilábica. La investigadora nuevamente cuestiona la forma en que se realizó la construcción, pero con otras palabras siendo *portavoz* una pregunta anterior:

¿Y cómo lo hiciste?

Con esta intervención, la investigadora pide información adicional que permita argumentar sobre su afirmación, es decir que su triángulo es isósceles. En efecto la estudiante responde con un procedimiento.

Pues (...) acá como en las letras (señala el botón Punto en GeoGebra), empecé a poner acá los puntos. Y con las rectas (señala el botón segmento) con esta que van a los dos punticos, que es un segmento, pues los empecé a juntar (Imagen 54)

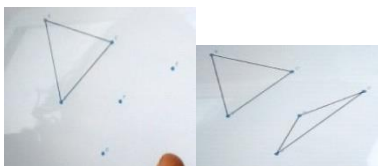


Imagen 54. Procedimiento de Catalina

A partir de esta intervención Catalina presenta un E-F, basado en la explicación del algoritmo que empleó para construir el triángulo isósceles. La investigadora, por tanto, formula dos preguntas en un N0 del discurso, indagando si los triángulos presentados son isósceles, a lo

que Catalina responde en ambas ocasiones que sí. Luego de esta conversación, Juanita nuevamente afirma que ahora sí terminaron y muestran su construcción (Imagen 55), así que la investigadora cuestiona si ese triángulo fijo es isósceles y Valentina responde afirmativamente. En este dialogo se presenta un N0 en el discurso y, tanto en las preguntas como en las respuestas, la investigadora y las estudiantes son *portavoces*, pues la conversación es similar la anterior solo que, con otras palabras. En ese momento llega el profesor a revisar las construcciones y observa que no son invariantes bajo arrastre, así que comenta que ningún triángulo cumple la condición de la tarea.

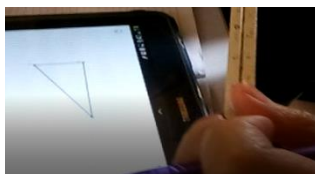


Imagen 55. Construcción de Valentina y Juanita.

Ya que el profesor modificó la construcción de Valentina y Juanita al arrástrala, ellas nuevamente movieron los vértices hasta presentar un triángulo similar al anterior, así que la investigadora pregunta si ese nuevo triángulo sí cumple, a lo que Valentina responde que sí. Dada la respuesta monosilábica, se tiene un N0 en el discurso. La investigadora propone una pregunta abierta que le permita a las estudiantes comparar ambas construcciones:

¿Y el otro por qué no?

A lo que Valentina responde con un esquema A-A que se sustenta en que, a partir de la medida de dos lados del triángulo se obtienen un triángulo isósceles:

Pues tenía como (...) No es que no fuera, sino que es que así es más fácil de medir y el otro sí no.

Las estudiantes observan que sus compañeros usan la herramienta para medir del software y dejan la regla a un lado y utilizan esta herramienta para medir. Luego de un tiempo la investigadora interviene diciendo:

Saben cuál es el punto niñas. Que si el profe llega y les mueve el punto ya va a dejar de ser isósceles y el truco es que tienen que ser siempre isósceles así se mueva cualquier punto (...) O sea ustedes están aquí tratando de cuadrar para que siempre tengan la misma medida, es decir que tengan los mismos numeritos, pero cuando llamen al profe, el profe los va a mover.

Con esta intervención, aunque no hay formalmente una pregunta, si se encamina a que las estudiantes revisen su construcción. Valentina responde, tal vez considerando que los números no interesan pues cuando venga el profesor simplemente se quitan. Con lo que se obtiene un N2 en el discurso:

Sí pero ya no va con esto (señalando los números que representan la medida de un lado del triángulo) y va a tener la misma medida (Imagen 56)



Imagen 56. Toma de las medidas del triángulo de Juanita y Valentina

La pregunta de la investigadora está en un N2 del discurso. La investigadora en este mismo nivel de discurso cuestiona y con esto sugiere explorar otra manera de proceder ante la tarea.

Y, ¿de qué manera podemos construir algo para que esos punticos, esa medida siempre se mantenga?

Catalina busca otras estrategias, proporcionando con esta respuesta nueva información. De esta manera indica que un posible método puede ser usando la herramienta polígono:

Voy a tomar esta que se llama polígono. Primero voy a poner estos tres puntos. A ver (...). No funcionó.

La investigadora entonces hace una pregunta abierta sugiriéndole a las estudiantes retomar información previa que les ayude con la construcción.

Investigadora: Y de lo que ya vieron, ¿están seguras? (...) Nada, nada les nombra de pronto dos lados iguales, de igual longitud.

Pero la respuesta es corta ya que las estudiantes no profundizan sobre qué de lo que copiaron les podría servir, obteniendo un N1+ en el discurso. Aun así, Catalina entre lo que revisa de sus apuntes lee la definición de circunferencia, pero al notar que sus compañeras siguen usando la herramienta para medir del software, deja su cuaderno de lado y continua la exploración. La investigadora entonces le pregunta por el motivo que la llevó a leer la definición de circunferencia:

(Señala el cuaderno) Y tú aquí, ¿por qué miraste esta definición?

Como la pregunta es abierta y sugiere una justificación, pero la respuesta de Catalina no profundiza en la idea, se tiene un N1+, en el discurso.

Catalina: A pues, porque algunas cosas (...) digamos, o sea, me ayudaron un poquito y ya más o menos, pero tengo la cuadrícula y ya lo podemos ver.

### ***Episodio 5***

Luego del trabajo por grupos el profesor procede a socializar la actividad. Para esto pide a Camila que explique ante el grupo su construcción:

Camila, ven para acá y nos cuentas que hiciste. (...) Todos le vamos a prestar atención (...), porque voy a hacer preguntas pilas, ¿listo? A ver Camila, ¿qué fue lo que hicieron ustedes? (...) ¿Qué hiciste tú, Camila?

Camila pasa al frente y comienza a hacer la construcción en el tablero sin verbalizar su idea, sin embargo, Tomás la apoya explicando los pasos a todo el salón. Como las respuestas proporcionan información sobre un método de construcción, se tiene un nivel N2 en el discurso. Tomás por tanto dice:

Hice un punto de A. Un círculo (...) Toma un círculo.

Esta expresión es de la *autoría* de Tomás ya que son sus palabras y presenta su propia idea. Sin embargo, el profesor llama varias veces su atención para que deje a Camila explicar la construcción. Camila al terminar su construcción (Imagen 16) dice:

Ahí lo que hicimos fue una circunferencia con A, después hice una circunferencia y ahí pues, o sea (...) [Se debe tener en cuenta que la circunferencia con centro en B, no es de radio AB, sino radio BC, de tal manera que la construcción puede arrastrarse y el triángulo no siempre es equilátero]

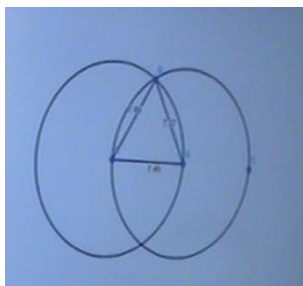


Imagen 57. Construcción de Camila proyectada a todo el salón

Camila es *autora* de la expresión en tanto que termina la idea de Tomás usando sus propias palabras. El profesor hace una pregunta directa sobre la construcción:

Pero ¿cuál fue la primera circunferencia que hiciste?

Como la pregunta se basa en la construcción que se presentó y la respuesta es concreta, se tiene un N1 en el discurso. De tal manera que Tomás dice:

La del punto A.

El profesor se dirige a Camila y le pide que en la medida de que haga la construcción cuente de qué trata. Además, dice:

Cuéntanos, porque tú me dices (...) yo ahí me perdí (...). (Se dirige al grupo) y yo no sé si les pasó a ustedes también.

Aunque esta expresión no presenta preguntas literales, si sugieren al estudiante profundizar en la idea, presentando un N2 en el discurso. En efecto Tomás responde complementando la información:

Es que el primer punto lo hacías en el punto medio de A (Describe una circunferencia con sus dedos). (...) ¡O sea en el centro! En el centro del círculo [corrige su idea].

El profesor no presta atención a la expresión de Tomás y pide a Camila profundizar en la explicación de su construcción:

A ver, pero explícanos. (...), a ver.

Así que Camila verbaliza la construcción que realizó en GeoGebra, por lo que el discurso, continua en un N2. Camila es *autora* de la siguiente expresión en tanto que presenta su idea completa y con sus palabras:

Empecé con el punto de referencia que es A y de ahí hice una circunferencia. Después hice otra circunferencia. (Imagen 58).

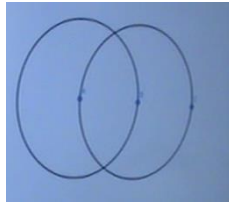


Imagen 58. Primer paso de la construcción de Camila

En profesor por tanto formula una pregunta es cerrada, pero retoma la idea que se venía presentando acerca de la circunferencia. La respuesta que da Camila es monosilábica, por lo que hay un N1 en el discurso.

Profesor: Ah ¿pusiste dos circunferencias al azar?

Camila: Sí

El profesor continúa cuestionando sobre los demás pasos de la construcción, dando paso a un N2 en el discurso:

A ver cuéntanos.

Sin embargo, Tomás responde por ella, siendo *autor* de este paso de la construcción:

Y hizo (...) E hizo un punto en la intersección. (Camila coloca el punto D como intersección de dos circunferencias)

El profesor llama de nueva la atención de Tomás para que deje a Camila explicar su construcción. Por la respuesta de Camila se mantiene un N2 en el discurso.

Profesor: (...) Entonces ustedes le van a prestar mucha atención a Camila. ¿Camila ese punto de dónde salió? [Se refiere al punto D, intersección entre ambas circunferencias]

Camila es *portavoz* de la respuesta que ya había dado Tomás:

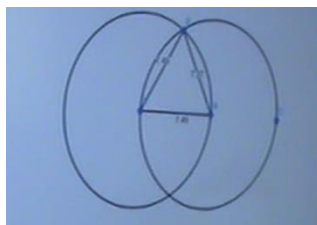
Esa sería la intersección de las dos circunferencias.

El profesor dice al grupo que él necesita que todos se convenzan de la construcción, así que inmediatamente Gabriela levanta la mano y dice que a ella le parece incorrecto, sin embargo, el profesor no la deja terminar y pregunta por el último paso de la construcción en un N2 en el discurso:

Espere, espere, espere porque ella no ha terminado. (Se dirige a Camila) Y ahora qué hizo ahí.

Camila siendo *autora* del último paso toma las medidas de los lados de triángulo, al tiempo que comenta:

Pues uní A con B, B con D y D con A (Imagen 59)



*Imagen 59. Construcción terminada de Camila*

Luego arrastra la construcción y en efecto el triángulo permanece isósceles. El profesor se basa en la construcción y con un N1 en el discurso pregunta:

La embarró, no. (Pregunta a Camila) Cuáles son, cuéntanos ahí, ¿cuáles son los lados de la misma longitud?

Pues se debe tener en cuenta que la pregunta es cerrada así que se obtienen respuestas puntuales.

Tomás: Ahí dice 7.5 y 7.5

El profesor por tanto formula una pregunta directa retomando la construcción de Camila, de la cual no se obtienen mayores respuestas, más allá de murmullos (aceptando la validez de la construcción), por lo que está en un N1 del discurso.

Profesor: Sí vez que sí funciona, ¿todos de acuerdo con que esta funciona?

El profesor formula una última pregunta en la que pide una justificación sobre la validez de su construcción:

Podrías justificar por qué ese triángulo siempre es isósceles con su construcción.

Pero, ni Camila ni Tomás saben por qué funciona, de tal manera que la pregunta anterior está en un N1+ en el discurso.

### ***Episodio 6***

Este episodio corresponde a la discusión en torno a la construcción de Camila, ya que, aunque la mayoría de los estudiantes concuerda en que sí es válida, Gabriela no está de acuerdo. A partir de esta diferencia de ideas, el profesor propone que los estudiantes tomen una postura y justifiquen por qué. En síntesis la construcción de Camila consiste en realizar  $\odot A, AB$ , luego construir  $\odot B, BC$ , con  $C \neq A$  (Imagen 60), y construir un punto  $D = \odot A, AB \cap \odot B, BC$  (Imagen 61) y finalmente realizar los segmentos que corresponden a los lados del triángulo,  $\overline{AB}, \overline{BD}, \overline{AD}$  (Imagen 62)

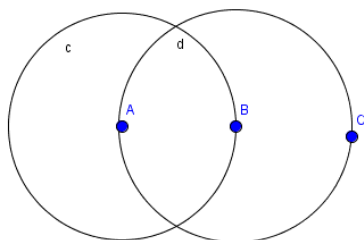


Imagen 60. Réplica del paso 1 de la construcción de Camila

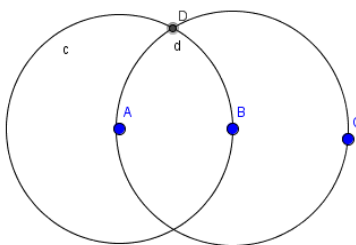


Imagen 61. Réplica del paso 2 de la construcción de Camila

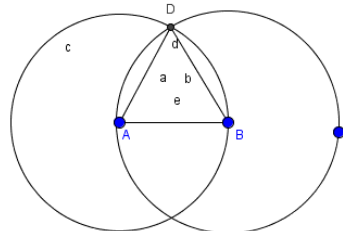


Imagen 62. Réplica del paso 2 de la construcción de Camila

La discusión da inicio con la siguiente expresión del profesor:

Profesor: (...) No sé si ustedes tienen alguna pregunta que hacer a Camila. (Gabriela levanta la mano). Están de acuerdo con que esa construcción nos sirve para (...)

Podemos observar que esta expresión se puede clasificar como N0 del discurso, ya que la pregunta es directa y se esperaría una respuesta monosilábica de los estudiantes. En esta intervención no se observa algún tipo de argumento. Gabriela, una estudiante del salón comenta que no está de acuerdo. Así que el profesor pregunta nuevamente.

Profesor: ¿Están de acuerdo con que esa construcción sirve? Gabriela, dice que no.

En este caso la pregunta del profesor es directa, retoma la idea de Gabriela y solicita a los estudiantes complementarla. Además, pide profundizar en la idea, por lo que se pasó de un N0 a un N1 en el discurso. Gabriela nuevamente responde que no, así que Tomás, un compañero se dirige a ella refutando su opinión con la siguiente pregunta:

¿Por qué no si siempre queda la misma medida?

En esta expresión se observa un N1 en el discurso, ya que la pregunta de Tomás es abierta y las respuestas que se derivan de esta pregunta no evocan información adicional. Nótese que en este caso el discurso fue originado por un estudiante, por lo que la responsabilidad de modificar los niveles de discurso, no solo recaen en el profesor en este episodio. Además, en su pregunta también hay presencia de un A-A. Observamos que Tomás se basa en la definición de triángulo isósceles para justificar que la construcción de Camila es válida, por cumplir la propiedad de que dos de los lados del triángulo tienen la misma longitud. Ante la pregunta de Tomás el profesor plantea la siguiente discusión:

A ver vamos a escucharnos. A ver, que Camila se va a defender o ustedes la van a apoyar, o apoyan a la postura que tenga Gabriela.

En este caso se observa que el profesor anima una discusión entre estudiantes, pidiéndoles dar sus ideas y que se escuchen entre ellos mismos, para que reaccionen frente a las ideas expuestas, por lo que se observa un N3 en el discurso. Como respuesta a esta intervención Gabriela comenta lo siguiente:

Me parece que es muy innecesario el otro círculo, porque si lo necesitara sería para hacer un triángulo equilátero.



Consideramos que este es un argumento que puede verse desde dos interpretaciones. La primera es que Gabriela ve la construcción desde su forma canónica, ya sea porque previamente había visto una construcción de triángulo equilátero similar a la presentada por Camila o porque el triángulo isósceles presentado parece un triángulo equilátero desde su forma prototípica; desde esta perspectiva el esquema de argumento es E-P. La segunda es que Gabriela hubiese visto que, con las dos circunferencias se obtienen todos los lados del triángulo congruentes, por ser radios de dos circunferencias y de esta manera anticipa que la construcción también es la de un triángulo equilátero; por tanto, el esquema de argumento sería A-T. En esta expresión no se promueve el discurso, por lo que no se categoriza en algún nivel. El profesor retoma la idea de Gabriela diciendo:

Profesor: (...) Bueno acá hay una posición. (Se dirige a Camila) ¿Tú qué dices con respecto a eso? ¿Tú necesitas ese (circunferencia) o no?

Esta expresión se categoriza en el N1+ del discurso, porque la pregunta del profesor es abierta y condiciona a los estudiantes a que expliquen su razonamiento, comentando sobre la idea Gabriela. Las respuestas a estas preguntas son cortas. Camila responde al profesor diciendo “Pues digamos que yo pienso por lado y lado. Pero digamos, o sea, para empezar sí lo necesitaba.”. Cabe resaltar que en esta expresión no se observa nivel de discurso o argumento por lo que no será analizada. Ante esta idea el profesor pregunta nuevamente:

Profesor: ¿Y ahí para qué te sirve ese otro círculo?

Alán: Pues para colocar el círculo.

El profesor realiza una pregunta abierta en la que pretende que los estudiantes expliquen la necesidad de colocar la segunda circunferencia. Como Alán responde voluntariamente y trae información adicional, esta expresión se clasifica en el N2 de discurso. Posteriormente Camila reafirma la idea de Alán. Aunque aparentemente Alán ofrece un argumento, no es clara su idea, pues no tiene sentido pensar que una segunda circunferencia es necesaria para colocar la primera, por tanto, esta expresión no será analizada, pues no es inteligible. Santiago levanta la mano, por lo que el profesor se dirige a él diciendo:

Profesor: A ver tú vas a defender a cuál postura.

Esta expresión se encuentra en el N1 del discurso, pues la pregunta es cerrada y se observa que las respuestas fueron cortas. Sin embargo, las ideas derivadas de la pregunta se retoman posteriormente. Tanto Santiago como Tomás afirman que apoyan la postura de Camila, así que el profesor pregunta:

A la de Camila. ¿Por qué?

El ¿por qué? en la expresión del profesor permite determinar que esta pregunta es abierta, donde pide a los estudiantes un fundamento sobre su postura, por lo que, es un N2 en el discurso. Las respuestas brindadas por los estudiantes posteriormente fueron amplias en su explicación. Santiago argumenta diciendo:

A ver. En el trabajito no decía que, que no se pudieran usar cualquier herramienta y pues cualquier herramienta ella en este caso usó dos círculos.

En este argumento Santiago se basa en la autoridad del enunciado de la tarea, intentando convencer a algunos de sus compañeros que, en la actividad no hay restricciones en el uso de

las herramientas, siempre y cuando cumpla con el objetivo. Es por lo que esta intervención se clasifica en un esquema de argumentación por CE-A. Si se analiza la participación podemos observar que la expresión es original tanto en su semántica como en su sintaxis es por esto por lo que Santiago es *autor* en su idea. Gabriela inmediatamente refuta diciendo:

Pero solamente utilizó las herramientas y en un comienzo lo hizo equilátero.

Este argumento se basa en la primera imagen presentada de la construcción de Camila, antes del arrastre, donde se evidencia un triángulo equilátero en su forma prototípica. Es posible que el rechazo de Gabriela ante la construcción de Camila se deba a que ella considera que un triángulo equilátero es distinto de un isósceles. Por lo que se evidencia un esquema de argumentación E-P. Así que Santiago contesta a Gabriela:

Pero, pero ahí también lo hizo isósceles.

En esta expresión también es posible considerar dos esquemas de argumentación distintos que dependen de la interpretación que se le dé. Si el estudiante afirma que un triángulo equilátero también es isósceles, está haciendo una transformación de dicha figura por tanto sería un esquema de argumentación A-T. Pero si, además de esto, el estudiante considera que la construcción es válida a partir de la observación de la medida de los lados, entonces está haciendo uso de un esquema de argumentación A-A, pues hace uso de la teoría, particularmente la definición de triángulo isósceles y circunferencia, vistas previamente. Sin embargo, si se tiene en cuenta la frase por sí sola, no es posible garantizar este último esquema. El profesor reelabora la idea de Gabriela, formulando la siguiente pregunta:

Es que la discusión que Gabriela quiere decir es, (...), ¿será necesario tener ese círculo?

Esta expresión está en el N2 de discurso pues, aunque la pregunta del profesor no es claramente abierta o cerrada, la respuesta que da el estudiante atiende a una pregunta abierta. De tal manera que el estudiante da una explicación amplia con información adicional, como se observa en la respuesta de Tomás “Puede que no, sí se puede hacer con un círculo, pero igualmente ella lo quería hacer con dos círculos”. Se aclara que la expresión de Tomás no corresponde a un argumento ni promueve el discurso, por lo que no se clasifica. El profesor pregunta nuevamente:

(...) Bueno, pero, o sea tú la necesitas, ¿es necesario? O sea ¿no se puede hacer sin ese círculo?

Se observa que la pregunta es abierta y las respuestas brindadas por los estudiantes posteriormente fueron amplias, por tanto, se clasifica en el N2. Santiago responde a la pregunta diciendo:

Pues es que profe mira, lo que pasa es que ahí debe quedar un, un triángulo isósceles, no dice que no se pueden tener dos círculos que formen el triángulo isósceles.

Este argumento se basa en la autoridad del enunciado de la tarea, por lo que se clasifica como un Esquema de CE-A. Luego de escuchar a Santiago el profesor trata de integrar a otros estudiantes a la discusión.

Profesor: A ver voy a escuchar al otro o a algunos que no han hablado (María José levanta la mano)

En este caso se tiene un N2+, ya que, aunque el profesor fomenta una discusión, no se evidencia que los estudiantes discutan entre ellos mismos obteniendo una respuesta como la del N3. Hay intención del profesor por involucrar a todos los estudiantes en la discusión. Dado que las respuestas no aportaron información adicional y que no permitieron que María José participara en la discusión, el profesor interviene:

(...) (Se dirige a María José) ¿Tú qué crees?

La expresión está en un N2 de discurso pues la pregunta es abierta y se dirige particularmente a María José, para que ella comente sobre la idea de Gabriela, pero la respuesta que ella da es corta.

María José: Sí, porque se puede hacer de diferentes formas.

En la expresión de María José se observa un se esquema de argumentación CE-A, dado que sintetiza varias ideas presentadas con anterioridad, en la que se expone la validez de utilizar diferentes métodos para realizar la construcción del triángulo isósceles. Sin embargo, es un buen ejemplo para analizar la participación, dado que se basó en la idea de sus compañeros para expresarse, pero utilizó sus propias palabras, por tanto, es considerada como un tipo de participación *portavoz*. Sara levanta la mano y el profesor le da la palabra.

Profesor: A ver Sara.

Aunque en esta expresión el profesor le da la palabra a Sara, se espera que ella de respuesta a la pregunta formulada con anterioridad en la discusión. Como esta pregunta es abierta se observa que la respuesta es corta y no trae información adicional, se clasifica como un N1+. La respuesta que Sara da es la siguiente:

Para mí, pues es que tú no diste reglas.

Sara al igual que Santiago, le asigna la responsabilidad de su argumento al profesor, por lo que se respalda en su autoridad para reafirmar la validez de la construcción de Camila, por lo tanto, su expresión también corresponde a un esquema de argumentación por CE-A. Este es otro ejemplo de participación *fantasma*, ya que se retoma la idea de sus compañeros para respaldar la construcción de Camila, pero con sus propias palabras. El profesor da la palabra a un estudiante más.

Profesor: ¿O sea que para esa construcción es necesario eso (la circunferencia)? (Ariadna levanta la mano) A ver, ¿qué dice Ariadna?

Esta pregunta es abierta y se obtiene una respuesta corta del estudiante, por lo que es N1+. Sin embargo, Joseph participa interrumpiendo a Ariadna:

No es necesario [las dos circunferencias] porque yo lo puedo hacer con uno solo.

Se considera en esta expresión un esquema de argumentación A-T, ya que el estudiante visualiza que si se quita la segunda circunferencia se sigue cumpliendo la condición, para que la figura sea un triángulo isósceles. Para cerrar la discusión el profesor pregunta a Camila:

¿Qué pasará si yo llegase a quitar ese (...), a ver te pregunto a ti (Camila), si yo llegase a quitar ese círculo que tienes ahí está ahí?

Se observa que la pregunta formulada por el profesor es cerrada, sin embargo, retoma las intervenciones anteriores, por tanto, es un N1. Camila quita la circunferencia y responde “nada, ya quedó isósceles”, como Camila se basa en la construcción expuesta, se puede considerar que es una respuesta corta y no es posible evidenciar esquema de argumentación o nivel discurso.

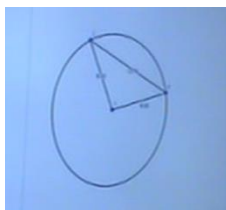
### ***Episodio 7***

Luego de analizar la construcción de Camila, el profesor pide a Ariadna que muestre su construcción:

Cuéntanos de qué se trata esta construcción.

Dado que a pregunta es abierta y en efecto Ariadna responde a lo que el profesor pedía se tiene una N2 en el discurso. Ariadna comenta al tiempo que realiza su construcción:

Bueno entonces, hacemos una circunferencia y pues dos puntos encima, en el borde de la circunferencia (hace una circunferencia con el dedo en el aire, luego dibuja los puntos en la Tablet) y después los hicimos juntar [los segmentos] y ahora podemos (...) (Hace gestos tratando de encontrar las palabras para expresarse), podemos moverlos y siempre estos dos [los lados congruentes del triángulo isósceles] van a quedar con la misma medida (Ariadna mueve la circunferencia para observar que siempre se cumple esta propiedad).



*Imagen 63. Construcción de Ariadna*

Con esta respuesta se tiene un E-F, ya que se sustenta en el procedimiento que realizaron para verificar que el triángulo isósceles es invariante en el arrastre. Además, es la primera en expresar públicamente este tipo de construcción y, si se tiene en cuenta la dificultad que tuvo para expresarse, se puede decir que ella es *autora*. Luego Tomás es quien promueve el discurso preguntando:

(Dirigiéndose a Ariadna) ¿Y por qué?

De la cual se obtienen dos respuestas, la de Alan que es corta y la de Ariadna que incluso presenta un esquema A-A, así que la pregunta está en un N2 en el discurso.

Alan: Porque sí (...)

Ariadna: Porque del radio siempre hay (...). Porque del radio al borde de la circunferencia siempre va a tener la misma medida.

La afirmación Ariadna se sustenta en la definición de circunferencia para verificar que la construcción es invariante con el arrastre y de nuevo es *autora* de la idea. El profesor por tanto formula una pregunta en la que pide a los estudiantes comentar sobre la veracidad de la explicación de Ariadna:

¿Eso es cierto?

Pero no hay una discusión frente al tema, por lo que hay un N1 en el discurso. Así que formula la siguiente pregunta directa:

¿Qué nos permite decir eso? (...) a ver eso que acaba de decir tu compañera (...)

De la cual se esperaría que la respuesta haga referencia a las definiciones, sin embargo, Tomás comenta que no ha entendido, así que el profesor le pide a Ariadna repetir su explicación de tal manera que ella es *portavoz* de su propio argumento:

El radio del centro de círculo al borde siempre va a haber la misma medida.

El profesor repite su pregunta, siendo *portavoz*:

Y eso, ¿quién lo dice? (...) eso que acabó de decir a qué alude, ¿a qué (...)?

Así que un estudiante responde tratando de explicar que en la circunferencia todos los radios son congruentes. Como el estudiante es original tanto en su idea como en sus palabras, se considera *autor* de la expresión:

Pues el círculo lo cogen y así ¡pa! (Hace un gesto con el brazo de arriba abajo, como si dividiera en dos), va a medir igual. Cuando lo parte por la mitad va a hacer eso, entonces si tú lo divides entre dos lados.

Como el profesor no ha obtenido la respuesta que espera, repite la pregunta siendo *portavoz* de la idea viene formulando. Por el tipo de respuesta que da Jerónimo, el discurso está en un N1.

Profesor: Pero por qué, qué nos pide (...), qué dice (...), que ella dice que del centro a cualquier punto de la circunferencia (...).

Jerónimo: (interrumpe al profesor) Va a ser la misma medida.

El profesor cuestiona con una pregunta abierta:

¿Por qué?

Así que Jerónimo responde con un esquema A-A a partir de la definición de circunferencia:

Porque, el círculo tiene la circunferencia a la misma medida del centro.

Dado que la respuesta se basa en lo dicho por Ariadna con anterioridad, pero, con otras palabras, Jerónimo es *portavoz* de la expresión y el discurso que promovió el profesor con la pregunta es N1. El profesor repite una pregunta, siendo *transmisor* de la idea:

¿Eso es cierto?

A lo que la mayoría de las estudiantes responde que sí, por lo que el discurso pasa a N1. El profesor les dice a los estudiantes que: “para escribir la justificación ¿qué es lo que deben afirmar? A lo que Tomás con un esquema A-A y siendo *portavoz* de lo dicho por Ariadna y Jerónimo, responde:

Que del centro al borde del círculo siempre hay la misma medida (...) Porque siempre tiene que haber la misma distancia.

El profesor por último cuestiona con un N1 en el discurso y cómo *portavoz* de la pregunta que viene formulando:

(Se dirige a Tomás) Pero falta (...), pero usaste qué, una qué.

Así que Camila responde como *autora* de la expresión, por ser la primera en contestar acertadamente lo que el profesor espera:

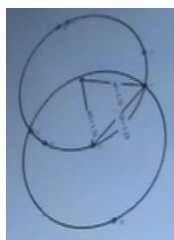
Las definiciones.

### ***Episodio 8***

Luego de socializar las construcciones sobre el triángulo isósceles el profesor plantea una última tarea: construir un triángulo equilátero también invariante bajo arrastre. Primero pregunta por la definición de triángulo equilátero, a lo que un estudiante, sin leer el cuaderno y sin que nadie hubiera mencionado antes una idea similar, responde “el que tiene todos sus lados iguales”, siendo *autor*. Posterior a la definición, se da inicio al trabajo por grupos.

### ***Grupo 1***

La investigadora se acerca al grupo de Ariadna, así que ella muestra su construcción.



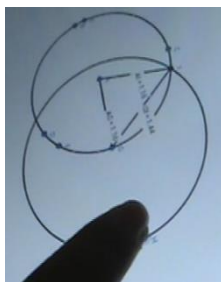
*Imagen 64. Construcción del triángulo equilátero de Ariadna*

Así que la investigadora le pregunta:

Ariadna. ¿Cómo hiciste la construcción?

Dado que la pregunta es abierta y, en efecto, la estudiante responde aportando información sobre cómo hizo su construcción, se evidencia un N2 en el discurso. Ariadna como *autora* de la expresión y de la construcción, comenta:

Pues puse dos circunferencias y las (...) (Ariadna arrastra la construcción) (Imagen 65)



*Imagen 65. Arrastre de la construcción de Ariadna*

Ya que al arrastrar la construcción ambas circunferencias no presentan el mismo radio, se obtiene un triángulo isósceles. La investigadora que está al tanto dice:

Pero mira que ahí sigue siendo (...)

Esta expresión, sin que necesariamente implique una pregunta, le propone a la estudiante profundizar en la situación, pero ella no aporta más información, solo responde “Eh, pues (...)”, por lo que el discurso pasó a ser N1+. La investigadora le insinúa a la estudiante que, aunque tiene la idea, es mejor hacer otra construcción. Ariadna por tanto borra lo realizado, he inicia nuevamente. Primero construye una  $\odot A, AB$ , pero la segunda es una  $\odot B, BC$ , aunque pareciera que  $AB = BC$  (Imagen 66), al no colocar  $C$  en el centro  $\odot A, AB$ , no quedan fijos los radios, lo que permite que al arrastrar los radios cambien de medida.

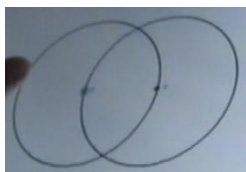


Imagen 66. Segunda construcción de Ariadna

Al notar esto, la investigadora es *portavoz* de una pregunta que le había formulado a la estudiante con anterioridad:

Ahí, ¿qué estas tratando de hacer?

A lo que Ariadna como *autora* de la expresión comenta:

Que sea del mismo lado. (Señala ambas circunferencias).

Tan vez al decir lado realmente está haciendo referencia al radio, lo que corrobora su *autoría* en la respuesta. Como es una respuesta concreta a una pregunta abierta, el discurso se mantiene en N1+. En este mismo nivel de discurso la investigadora comenta:

Y entonces porque no la haces con esa misma [el radio]. Por qué mira que al arrastrarlo se va a mover.

De tal manera que, aunque implícitamente es una pregunta directa, retoma la construcción que venían tratando y la respuesta de la estudiante es corta: “Ah, sí”, por lo que el discurso pasó a un N1. Luego hace una nueva construcción (Imagen 67).

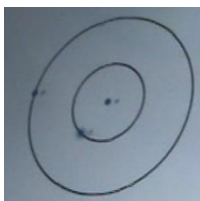


Imagen 67. Tercera construcción de Ariadna

Se observa con esta imagen, que la estudiante trató de hacer la segunda circunferencia sobre la primera, así que la investigadora comenta:

¿Del punto A? ¿o sea el centro cuál sería?

Ariadna con tono de duda comenta:

¿A?

El tono de duda en la participación de Ariadna implica que es *autora* en lo que dice y se evidencia una continuidad en el nivel de discurso. La estudiante quita la segunda circunferencia y empieza una nueva construcción, similar a las primeras que realizó, sin tener en cuenta que ambos radios fueran iguales, la investigadora por ende pregunta:

¿Hasta qué punto?

A lo que Ariadna responde:

Hasta A.

Con esta expresión se mantiene un N1 en el discurso, así que la investigadora plantea una pregunta que le sugiere a la estudiante profundizar en el tema, pero la respuesta sigue siendo corta, en esta transmite su respuesta anterior, así que el discurso pasa a un N1+.

Investigadora: ¿Y por qué no la haces hasta A?

Ariadna: ¡Hasta A! (Imagen 68)

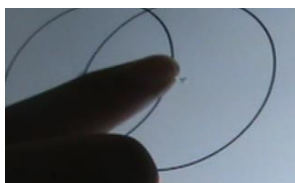


Imagen 68. Construcción de las circunferencias para el triángulo equilátero

La investigadora indaga sobre el siguiente paso y la estudiante, como *autora*, comenta que debe hacer un punto en la intersección de ambas circunferencias y realizar los segmentos correspondientes a los lados del triángulo. La investigadora luego formula una pregunta cerrada en la que cuestiona sobre la igualdad en las medidas de los segmentos “¿Y sí son congruentes (...)?””, a lo que la estudiante responde “¡Ya!””, afirmando haber terminado. Posteriormente la investigadora pide verificar que son congruentes “¿Y cómo lo ves?””, a lo que la estudiante responde “con este”, señalando la herramienta para medir del software. En ambas preguntas la investigadora utiliza un N1 en el discurso, teniendo en cuenta que las respuestas son concretas. Luego de verificar la construcción, la investigadora pide una justificación de la construcción:

¿Y cómo justificarías? Te acuerdas, que este [la construcción del triángulo isósceles] lo justificaron por lo de las circunferencias, eh, tiene radios ya ahora este cómo.

Así que la estudiante con base en la definición de circunferencia responde:

Bueno, de B a A que es (...) (Señala B, el centro de una circunferencia y A que pertenece a la circunferencia). Entonces pues del radio al borde (...), Del radio al borde de la circunferencia siempre hay y pues también este es el centro (señala el punto A). (...) Y pues este (señala el punto D, intersección de ambas circunferencias) también pertenece a los dos, que también está a la misma distancia.

Cabe resaltar la originalidad en la sintaxis de la respuesta, especialmente por el lenguaje matemático que Ariadna trata de presentar, además es auténtica en su contenido pues nadie había mencionado con anterioridad cómo utilizar la definición de circunferencia de esta manera para construir el triángulo equilátero, por lo que Ariadna es *autora* de su intervención.



Además, se considera que la estudiante maneja un esquema A-A al basarse en la definición de circunferencia para establecer la congruencia entre los lados del triángulo. Para finalizar, la investigadora indaga sobre la congruencia de dos lados:

Pero cómo sabes que este y este son congruentes (señala el segmento AD y BD), este. DA y DB.

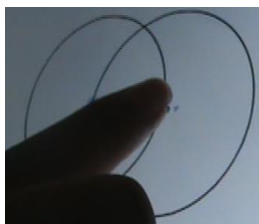
Así que con el mismo esquema A-A, que se sustenta en la definición de circunferencia, Ariadna responde:

Porque mira D esta justo en el centro, donde se intersecan los (...) las circunferencias (hace circunferencias con su mano), entonces D hace parte de la circunferencia DA y también de DB, entonces ese (punto D), también está a la misma distancia. Del radio al borde.

Lo que permite mantener un N2 en el discurso.

### *Grupo 2*

La investigadora se acerca a Isabella y a Camila. Isabella comienza a construir una  $\odot A, AB$  y luego otra con centro en  $\odot B, BD$ . Luego Camila le indica a Isabella que mueva el punto  $D$  hasta que se observe que  $A$  está contenido en la circunferencia con  $\odot B, BD$ , tenga en cuenta que  $D$  y  $A$  no son los mismos puntos. (Imagen 69).



*Imagen 69. Pasos de la construcción de Isabella y Camila*

La investigadora pregunta sobre el paso a seguir de la construcción:

¿Y ahora?

Isabella responde de forma concreta colocando el punto de intersección entre ambas circunferencias, al mismo tiempo que dice:

Ahora uno (...) Voy a poner uno acá (Coloca el punto de intersección D entre las dos circunferencias).

Por lo que, a través de la pregunta, hubo un N1+ en el discurso. La investigadora cambia su nivel de discurso a N1 del discurso al formular la pregunta “¿Y sí son congruentes? (...) [refiriéndose a los lados del triángulo]”, a lo que Isabella responde “Ya” y muestra la construcción (Imagen 70).

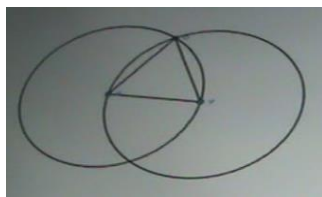


Imagen 70. Construcción de triángulo equilátero

Ya que las estudiantes trabajaron al margen de otros grupos, ambas se consideran *autora* s. Luego la investigadora con un N1 en el discurso pregunta ¿cómo se verifica que los lados sean congruentes?, a lo que Isabella responde que con el botón de distancia y longitud. Luego de tomar las medidas la investigadora con un N2 en el discurso pregunta:

¿Y cómo sabes que es cierto? ¿Cómo lo justificarías? Te acuerdas que este lo justificaron, pues por lo de la circunfe(...) eh, porque tiene radios, y ahora este cómo (...).

Isabella, quien está en un grupo aparte que el anterior, responde con un esquema A-A, con base en la definición de circunferencia.

Del radio (señalando el centro en B de una circunferencia) al borde, siempre hay (la misma distancia) y también pues este es el centro de la circunferencia (señalando el centro en A) ¿sí? Y pues este (señala el punto D) es parte del radio también de los dos, entonces también está a la misma distancia.

Vale la pena aclarar que Isabella y Camila no se encontraban cerca del grupo anterior, por lo que la idea es original de ellas, de la misma manera las palabras que Isabella utiliza son distintas a las de Ariadna, por lo que es *autora* de la justificación.

### Grupo 3

El profesor se acerca a Sara para revisar su construcción, así que ella muestra la Tablet (Imagen 71) y comenta:

De B a A es la mitad (...), el radio entonces pues, A también es (...), el borde. Entonces pues tienen la misma distancia y también A es el centro de esta circunferencia y B es el borde y D es parte del borde de las dos circunferencias.



Imagen 71. Construcción de Sara

Con lo anterior se observa un esquema A-A, similar al que presenta Ariadna e Isabella, sustentada en la definición de circunferencia y original en la semántica y sintaxis, así que también es *autora*. A partir de la respuesta, el profesor pide profundizar en el punto D como parte de la construcción, por lo que Sara responde proporcionando información adicional, en este caso que D es la intersección entre ambas circunferencias, presentando un N2 en el discurso.

Profesor: Cómo así, ¿D es el borde? No entiendo.

Sara: O sea es parte (...), ósea el punto está en el borde de esta circunferencia y también de esta. (Señala ambas circunferencias) (...)

El profesor formula una nueva pregunta con un N2 en el discurso, en la que pide una justificación sobre la garantía de que los tres lados sean congruentes. La estudiante responde apoyándose en la definición de circunferencia.

Profesor: Ah y ¿qué te garantiza que todos sean iguales?

Sara: Porque A es el centro de este (señala una de las circunferencias) y B es el centro de este (señala la otra circunferencia) (...). B también es el borde de este (señala la circunferencia con centro en A) y A también es el borde de este (señala la circunferencia con centro en B) y este del borde de los dos (señala el punto D, intersección de ambas circunferencias), porque está en la parte que se intersecan A y B, los dos círculos.

Con esta última expresión se corrobora nuevamente un esquema A-A de su *autoría*. Posterior a la explicación el profesor hace preguntas en un N0 de discurso donde pregunta si todos están de acuerdo o si ya escribieron la respuesta en el cuaderno, a lo que las estudiantes del grupo responden de forma monosilábica.

#### Grupo 4

La investigadora se acerca a Santiago y le pregunta sobre la construcción:

¿Cómo lo pensaste, lo del punto A? Tú ahorita lo pusiste que fueran (...).

El estudiante se sustenta en la definición de triángulo equilátero para su construcción, presentando un esquema A-A:

El círculo tiene que tener el mismo tamaño que el otro, para poder tener el triángulo (...)  
A ver espérate a ver (...)

Ya que la pregunta fue abierta, en la que se sugiere explicar un paso de la construcción correspondiente al punto A y Santiago responde proporcionando información sobre cómo cree que debe ser la construcción, se tiene un N2 en el discurso, aunque no propiamente esté respondiendo la pregunta de la investigadora. En este mismo nivel de discurso la investigadora pregunta al estudiante cómo serían los pasos de la construcción, a lo que el estudiante responde proporcionando nueva información.

Investigadora: Aja y entonces cómo lo harías, la construcción.

Santiago: Un punto, listo. (Construye  $\odot A, AB$ )

La investigadora interviene con un N1+ en el discurso:

Ahora una circunferencia, para que tenga el mismo radio, tú me dijiste que tenga. (El estudiante traza otra  $\odot B, BC$ ) (...). Aja. Y ahora, ¿dónde debe terminar?

Se tiene este nivel ya que la pregunta es abierta, e indaga sobre la forma en que se deben ubicar ambas circunferencias para que tengan el mismo radio, mientras que la respuesta del estudiante es con una acción de GeoGebra, por lo que es corta. Santiago presenta la misma dificultad de Ariadna, en la que ambas circunferencias no tienen el mismo radio, por ende, la investigadora habla con el estudiante sugiriéndole pasos para realizar correctamente la construcción de una forma similar a la que se refirió con Ariadna. Al terminar la investigadora pregunta:

Listo, ahora, ¿por qué es un triángulo equilátero?

A lo que Santiago responde:

Porque los dos círculos, el radio de los dos círculos es de la misma distancia, por lo tanto, cuando tú haces el triángulo, el triángulo queda de la misma distancia y un triángulo equilátero es que todos sus lados son iguales.

Con base en la pregunta de la investigadora y la respuesta de Santiago se tiene un N2 en el discurso y nuevamente se tiene un esquema A-A, donde se basa en la definición de circunferencia para garantizar la invariabilidad en el arrastre. También es *autor* en la mayoría de las frases del diálogo, pues su trabajo fue externo a grupos anteriores.

#### *Grupo 5*

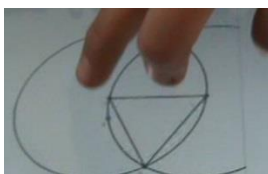
La investigadora al notar que Maria José había terminado y le pregunta por la justificación que copiaron en el cuaderno, a lo que la estudiante da una respuesta de su *autoría*:

Sí. Mira, hicimos una circunferencia en que A es el borde de B y B es el borde de A, y D está el borde de ambas y del borde al centro siempre hay la misma distancia.

Con esta expresión es posible observar dos tipos de esquemas. Uno E-F en tanto que describe el procedimiento y uno A-A, ya que se sustenta en la definición de circunferencia para garantizar la congruencia de los lados del triángulo equilátero.

#### *Grupo 6*

La investigadora se acerca a Jerónimo y se observa la siguiente construcción:



*Imagen 72. Construcción de Jerónimo*

Sin que la investigadora pregunte, el estudiante afirma:

Todos los lados son iguales. Mire. (Jerónimo arrastra uno de los puntos de triángulo y en efecto permanece equilátero). Y sigue estando igual.

Esta expresión es de la *autoría* de Jerónimo, así que la investigadora profundiza con un N2 en el discurso:

¿Y por qué pasaría esto?

A lo que el estudiante responde:

Porque la circunferencia hace que (...) que qué, que mmm, la circunferencia hace que tenga lo mismo ósea que uno lo mueva mucho, ósea que uno lo mueva (...) la circunferencia hace que (...).

Aunque el estudiante intuye una relación entre la circunferencia y los lados del triángulo, hasta el momento no hay evidencia de que el estudiante relaciona la definición de circunferencia, por lo que no hay garantía de un esquema de argumentación. La investigadora pide profundizar en la respuesta:

Pero tú cómo verificas que estos dos, este con este sean congruentes (Refiriéndose a los segmentos AD y CD. D intersección entre ambas circunferencias)

Así que el estudiante responde:

(Interrumpe a David) No, no, no mira ya acá tiene la respuesta, ahí está porque cuando los medimos da lo mismo.

Dada la respuesta de Jerónimo y la pregunta de la investigadora se tiene un N2 en el discurso, en el que el estudiante presenta un esquema A-A, justificando que su triángulo es equilátero porque cumple con la definición, sin embargo, cuando se le indaga sobre la invarianza en el arrastre, el estudiante no da mayor respuesta, con lo que se presupone que el discurso de Jerónimo es de su *autoría*.

### Grupo 7

La investigadora se acerca a Catalina. Su construcción es la de un triángulo, en donde la estudiante trata de arrastrar los puntos para que perceptualmente los lados sean congruentes, pero afirma que no es posible. Para esto toma como herramienta de medida la cuadrícula del software:

Entonces digamos mira, si por ejemplo yo voy a poner el B y el C alineados (arrastra los vértices del triángulo hasta que visualmente los segmentos AB y AC parezcan congruentes). Sin embargo, el A, digamos este de acá abajo (señala un punto debajo del triángulo con el dedo) nunca podrá tener la medida de estos dos (señala los puntos B y C)

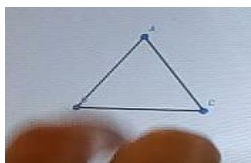


Imagen 73. Representación de Catalina

Entonces por ejemplo acá voy a ver en la cuadrícula, ¿ves no quedan del mismo lado?

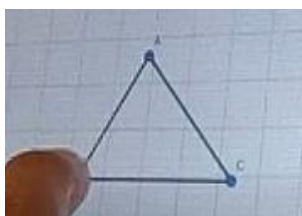


Imagen 74. Catalina toma de las medidas de los lados del triángulo

Ya que la mayoría de los estudiantes estaban usando la circunferencia como construcción auxiliar, mientras que Catalina continúa apoyándose en la percepción visual para realizar el triángulo, se conociera que la estudiante es *autora*. La investigadora se acerca a las estudiantes que están sentadas al lado de Catalina, Juanita y Valentina quienes se expresan con frustración, y les pregunta:

¿Qué pasó, cuéntenme?

A lo que las estudiantes presentan su construcción (Imagen 75) y comentan que si mueven una de las circunferencias se les desarma (Imagen 76).



Imagen 75. Construcción inicial de Juanita y Valentina

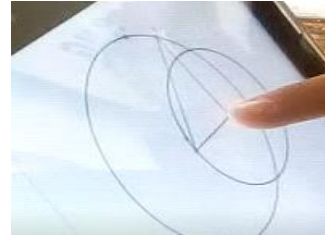


Imagen 76. Construcción luego del arrastre

En ninguna de las respuestas se presentó algún esquema de argumentación. Luego de un momento de exploración muestra su construcción en la que primero construye el triángulo y luego trata de ajustar la circunferencia (Imagen 77), pero afirma que este método no funciona.

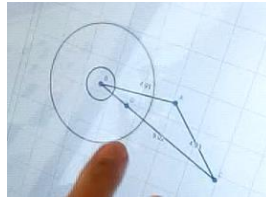


Imagen 77. Segunda representación de Catalina

En ese momento llega el profesor y las estudiantes muestran su construcción inicial y le comentan al profesor que si mueven una de las circunferencias se les desarma, a lo que el profesor luego de observar la construcción comenta:

Ósea que la circunferencia me sirve para qué. Ósea para qué utilizar circunferencias.

Con esta pregunta abierta, Valentina presenta una justificación de su *autoría*, de tal manera que se tienen un N2 en el discurso:

Para que de la misma medida.

Con esta respuesta se tiene un esquema A-A, sustentada en la definición de circunferencia para garantizar la congruencia de los lados de un triángulo. Sin embargo, el profesor pide profundizar, cuestionando sobre la diferencia entre esta construcción y la de Camila, por lo que se mantiene el nivel de discurso:

Y bueno, por qué hacer este así que se corten, por qué hacerlas y no así cómo hacían las otras del triángulo isósceles, la que hizo Camila, ¿se acuerdan? (El profesor señala ambas circunferencias).

Sin embargo, Valentina continúa respondiendo con base en una circunferencia con un esquema A-A:

Pues no porque ahí siempre que uno hace un círculo le saca una línea y esa línea se supone que está midiendo lo mismo.

El profesor da la instrucción de que las estudiantes intenten seguir lo que dicen en la Tablet, por lo que ellas hacen dos circunferencias una  $\odot A, AB$  y la otra  $\odot A, BC$ , por lo que el profesor con un N2 en el discurso pregunta:

Ah puede ser cualquiera. ¿Sí ósea que puede ser que este (la circunferencia) sea más chiquito que el otro? O tienen que tener algo, (Se dirige a Catalina) ¿tú qué dices?

Así que Valentina responde:

El círculo tiene que tener el mismo tamaño que el otro, para poder tener el triángulo (...)  
A ver espérate a ver (...)

Aunque pareciera que la estudiante trata de presentar una justificación a partir de la definición de circunferencia, la expresión no es completa por lo que no se puede aseverar un esquema de argumentación. El profesor pide a las estudiantes explorar para que ambas circunferencias tengan el mismo radio, así que las estudiantes borran sus construcciones e inician unas nuevas en las que garantizan que ambos radios son congruentes. Sin embargo, en la construcción de Valentina el punto de intersección no quedó bien ajustado, mientras que la de Juanita sí. Al finalizar la clase las estudiantes coinciden en que el color del punto tiene que ver, pues en un caso es azul (Imagen 78) y en el otro es gris (Imagen 79).

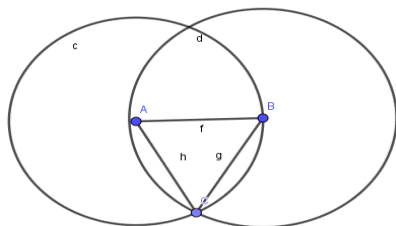


Imagen 78. Replica de la construcción de Valentina

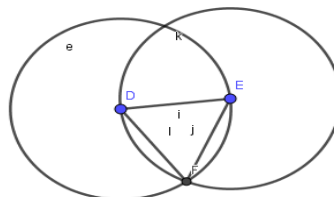


Imagen 79. Replica de la construcción de Juanita

En los diálogos finales no se observaron esquemas de argumentación o niveles de discurso que hayan propuesto las estudiantes, en medio de su conversación. Pero las expresiones fueron de su *autoría*, pues no se basaron en la sintaxis o semántica de una idea anterior.

## COLEGIO CALASANZ

CLASE: 11 DE MAYO DE 2018

La clase giró en torno al tema de la semejanza entre polígonos, el profesor en clases pasadas había proporcionado a los estudiantes una guía de trabajo sobre semejanza, los estudiantes tenían como tarea leer las dos primeras páginas. El profesor sondeó la interpretación que se le dio a la guía, con base en ello propuso varios ejemplos durante la clase y por medio de las participaciones de los estudiantes se iba determinando si los ejemplos propuestos eran figuras semejantes. Durante la clase también se generó una discusión en torno a la diferencia entre segmentos correspondientes y homólogos. AL finalizar la clase, el profesor establece que los segmentos homólogos se mencionan cuando los triángulos son semejantes y el término segmentos correspondientes se emplea cuando en las figuras no se tiene certeza de que sean semejantes.

La guía se dividía en cuatro secciones: la definición de semejanza, criterios de semejanza para triángulos, la definición de homotecia y aplicaciones de la semejanza. En cada sección se establecían algunos ejercicios.

### ***Episodio 1***

Este episodio se centró en la discusión de las características que definen la semejanza de polígonos; la definición se presentó en una guía que el profesor les facilitó a los estudiantes en clases pasadas. El profesor inicia la clase proyectando la definición de figuras semejantes que se encuentra en la primera página de la guía (Imagen 80) y solicita a los estudiantes que comenten de qué trata la guía.

#### **I. SEMEJANZA DE FIGURAS PLANAS.**

**Definición:** dos polígonos convexos son semejantes si y solamente si, existe una correspondencia biunívoca entre sus vértices, tal que:

- Los ángulos correspondientes tienen igual medida.
- Las razones entre las longitudes de los lados correspondientes son iguales.

*Imagen 80. Definición de figuras semejantes presentada en la guía del profesor*

Profesor: ¿quién nos quiere contar más o menos de qué se trataba el asunto. (Da la palabra a Diego, quien la pidió con la mano) Diego...

Diego: Pues, en la primera parte, explicaba como qué era semejanza, unos ejemplos y también había unos ejercicios. Pues semejanza era que... eran dos figuras que tienen todos sus... son dos figuras que tienen sus ángulos iguales (ademán con el índice para representar un ángulo) y... (ademán con las manos indicando un segmento) sus... segmentos son...

La pregunta que realiza el profesor es abierta y la participación de los estudiantes es voluntaria, además observamos que la respuesta de Diego es amplia y presenta información adicional acorde a la interpretación que le dio a la guía, por tanto, se clasifica esta expresión como N2 en el nivel de discurso. En la respuesta de Diego observamos que es original en su sintaxis y semántica, dado que intenta explicar con sus propias palabras lo que entendió acerca de la definición, por ello, la participación de este estudiante se clasifica como *autor*. Posteriormente el profesor interviene:

Profesor: Ok. ¿Quién le ayuda a Diego? De los que leyeron. (... ..)

Santiago A: Que lo que hicimos en GeoGebra, de pronto era semejanza porque estamos agrandando el ángulo (ademanos con las manos) y su imagen queda con las mismas...

La pregunta del profesor, al igual que la anterior, es abierta y las participaciones son voluntarias, brindando información adicional, por lo que se clasifica la expresión del profesor como N2 en el discurso. Santiago A, hace mención de las actividades realizadas en clases anteriores con GeoGebra, intentando establecer relación entre la definición presentada y las actividades. Anteriormente no se había mencionado algo acerca de eso, por tanto, la expresión es auténtica, clasificando la participación del estudiante como *autor*. Para dar claridad a la intervención que realizó Santiago A el profesor expresa:

O sea, lo que hicimos con GeoGebra tal vez era semejanza porque lo que hicimos fue...



Instantáneamente Santiago A, responde:

Ah... con las mismas...

La pregunta del profesor es directa y tiene la finalidad de retomar las intervenciones anteriores de los estudiantes, para que los demás comenten al respecto, sin embargo, la respuesta fue corta, por tanto, la denominamos N1 en el nivel de discurso. Santiago se involucra en la conversación y comenta:

Pues eran como dos figuras, ese pedacito ahí decía que tienen que tener el mismo ángulo, todos los ángulos y..., es que la ficha utiliza... las razones de las..., de todos los segmentos que la conforman tenían que ser las mismas. Y, lo que decía Diego, presentaba unos ejemplos y unos problemas.

La expresión de este estudiante es original en su sintaxis, pero su contenido retoma las ideas de su compañero Diego, quien desde un principio de la clase menciona que la medida de los ángulos debe ser la misma. Santiago en su misma expresión alude que está respaldando lo afirmado por su compañero, por esto se clasifica la intervención de Santiago como *portavoz*. En seguida el profesor proyecta en el tablero los ejemplos que se presentan en la guía sobre semejanza (Imagen 81) y expresa:

Ejemplo

1. Determinar si las figuras dadas son o no semejantes:

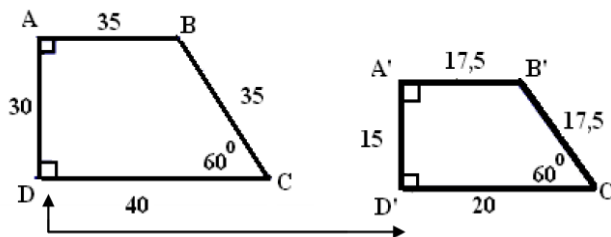
ABCD y A'B'C'D' son trapezios semejantes ya que: los ángulos interiores correspondientes tienen igual medida y las razones entre sus lados homólogos son iguales.

$$\frac{AB}{A'B'} = 2$$

$$\frac{BC}{B'C'} = 2$$

$$\frac{CD}{C'D'} = 2$$

$$\frac{DA}{D'A'} = 2$$



Ángulos correspondientes iguales

Calcular el perímetro ABCD y A'B'C'D', ¿en qué razón se encuentran?

Imagen 81. Ejemplos de guía sobre semejanza

Profesor: Presentaba este ejemplo, que está acá. ¿Cierto? Uhm. ¿Quién más hizo la lectura? (Da la palabra a Juan José, quien la ha pedido con la mano) Juan José, ¿tú qué entendiste?

La expresión del profesor se clasifica como N2, dado que, la pregunta del profesor es abierta y pretende retomar las ideas presentadas en la guía, las participaciones que surgieron de esta pregunta evocan información adicional, como la que expresó Juan José:

Yo entendí que, entonces, como esos son lados, por decirlo así, homólogos, entonces se tiene que dividir el treinta entre diecisiete coma cinco, el treinta...

La intervención de Juan José es auténtica, dado que es el primero que nombra la palabra “homólogos” haciendo referencia a la longitud de los segmentos que tienen una razón, por tanto, el estudiante es *autor*.

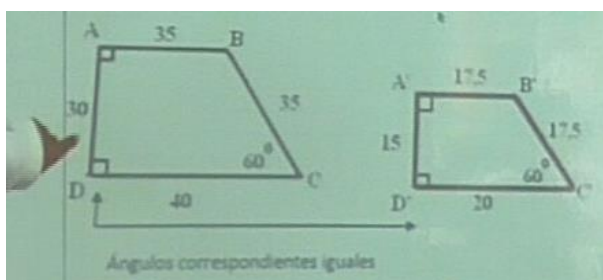


Imagen 82. Ejemplo de la guía que se proyecta

El profesor apunta al lado que mide 30 en la figura de la izquierda (Imagen 82) y le pregunta ¿este treinta?, Juan José el responde “Sí” y profesor vuelve a preguntar:

Profesor: ¿Dividido entre quién?

Juan José: Ah, no. Treinta entre quince, perdón.

En este caso la pregunta del profesor es directa y la respuesta que da Juan José es corta, por tanto, se clasifica como N1 en el nivel de discurso. Sin embargo, esta pregunta da paso a que Juan José de un argumento.

Treinta y cinco entre diecisiete coma cinco, y así. Y todo eso nos tiene que dar el mismo número para que se cumpla la segunda regla que aparece ahí (señala hacia la proyección en el tablero).

La expresión del estudiante presenta un esquema de argumentación A-A, dado que comenta que la razón entre los segmentos correspondientes de las figuras debe ser la misma para que cumpla la propiedad y su sustento es la definición de la guía que hace parte del sistema teórico. Juan José vuelve a retomar sus propias ideas, pero su sintaxis cambia y se convierte en *portavoz* de sus intervenciones. Posteriormente el profesor pregunta:

Y, ¿cuál es la segunda regla?

Juan José responde:

Eh, que tiene, que la razón de sus... lados tiene

La pregunta realizada por el profesor es directa y la respuesta es concreta, así se sitúa en N0 del nivel de discurso. El profesor pregunta nuevamente para seguir con la discusión sobre las características que deben cumplir las figuras semejantes.

¿Cuántas reglas encontraron, los que hicieron la lectura sobre semejanza?

Miguel responde:

O sea, para que sean semejantes, la primera es, que tus ángulos sean iguales en las dos figuras.

Al igual que la pregunta anterior es directa y la respuesta obtenida es concreta, estableciéndose en N1 en el nivel del discurso, por otro lado, la intervención de Miguel presenta un

esquema de argumentación CE-A, dado que se sustenta en la guía para afirma que la primera condición que deben cumplir las figuras semejantes es que sus ángulos sean congruentes, a la vez es *portavoz* de su misma idea, dado que al principio había mencionado esta condición, pero lo expresa de manera diferente. Para dar claridad de los ángulos a los cuales se está haciendo referencia los estudiantes, el profesor pregunta:

¿Cuáles ángulos?

Miguel responde:

Pues los ángulos de las figuras

La pregunta es directa y la respuesta obtenida corta y concreta, clasificando esta expresión como N0 del discurso. El profesor quiere que los estudiantes sean específicos al referirse de los ángulos, por eso vuelve a preguntar:

Pero ¿cuáles ángulos?

Miguel pasa al tablero, y señala en la primera figura el ángulo cuya medida es de  $60^\circ$  y el que se le opone, y ateniendo a los comentarios de sus compañeros decide encerrar los ángulos correspondientes (Imagen 83).

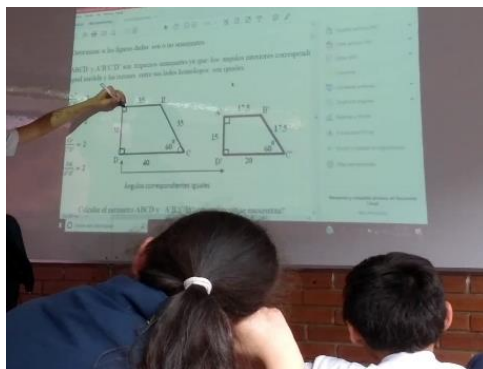


Imagen 83. Intervención de Miguel en el tablero

La pregunta que realiza el profesor es directa, retomando el tema de los ángulos de las figuras semejantes, pretendiendo hacer claridad sobre los ángulos a los cuales se están refiriendo los estudiantes, la respuesta y reacción de Miguel es concreta, por ello esta pregunta se clasifica como N1 del nivel del discurso. Sin embargo, al parecer la respuesta no evoca la palabra que el profesor quiere para hacer mención de los ángulos, por eso interviene:

Sí... pero no entiendo qué pasa con esos cuatro ángulos

Miguel y Juan José responden que al ser semejantes los ángulos deben tener la misma amplitud, el profesor valida con “ok”, y Miguel vuelve a intervenir.

Y otra semejanza que encontré es que... o sea, como que las longitudes de... bueno, de los segmentos tienen que ser... tienen que tener como una relación, como que uno podría ser múltiplo del otro. Digamos que el quince, si lo multiplicas por dos da treinta, entonces hay una relación que es como el doble, tiene que haber una relación entre esas dos... entre los dos tamaños de las...

La expresión del profesor se clasifica como N2 en el discurso, dado que la expresión es una pregunta abierta, y la respuesta que da Miguel es amplia y trae información adicional, en este caso la relación del doble; también evidenciamos que el profesor es *portavoz* en su misma intervención, dado que anteriormente había formulado pregunta dirigida a los ángulos de las figuras, pero en esta expresión cambia su sintaxis. Por otro lado, la intervención de Miguel presenta esquema de argumentación E-I, el estudiante se apoya en la longitud de los segmentos para argumentar que entre ellos podría existir una relación, en este caso que las longitudes de los segmentos sean múltiplos del otro, además su intervención es auténtica, por tanto, el estudiante es *autor*. El profesor interviene:

Profesor: Listo. Valeria, ¿tú hiciste la lectura?

Valeria: No.

La pregunta del profesor es directa y la respuesta obtenida es monosilábica, por tanto, se clasifica como N0 del nivel del discurso. Para contextualizar a Valeria el profesor interviene:

Profesor: De lo que acaban de decir tus compañeros, ¿logras entender alguna cosa? (...) Algunos dijeron que habían leído la definición y que había un ejemplo. Pero, Juan José nos dijo que había dos características, que ya las contaron. (Se dirige a Juan José) Repita las dos características para que Valeria se entere.

Juan José: Que los ángulos son... los ángulos son... los ángulos. Las razones entre sus lados también tienen que ser iguales, como yo había dicho antes.

La intervención del profesor se clasifica en N1+ del discurso dado que la pregunta es abierta y tiene como finalidad de orientar a la estudiante en el tema de discusión. La participación de Juan José se clasifica como *portavoz*, dado que repite lo que ya había mencionado antes, con pequeñas modificaciones en su sintaxis, él mismo lo expresa “*como ya había dicho antes*”. El profesor escribe en el tablero las características mencionadas. Santiago interviene:

O sea, mira, por ejemplo, ahí, veinte, cuarenta, quince, treinta, y esta mitad... Siempre es la mitad.

La participación de Diego puede tener dos interpretaciones, la primera es que el estudiante sea *autor*, dado que la forma que se expresa es única y por su cuenta haya observado la relación de la mitad de las longitudes de los segmentos, o sea *portavoz* al modificar las ideas expuestas por Miguel, de la relación del doble y la modificó a su relación inversa, la mitad. Como tal no tenemos evidencia clara para distinguir si es *autor* o *portavoz*; esta intervención también presenta esquema de argumentación E-I, dado que el estudiante afirma que “*siempre es la mitad*”, sustentado en los ejemplos presentados.

## ***Episodio 2***

Después de socializar las dos propiedades de las figuras semejantes, el profesor proyecta en el tablero dos cuadriláteros, que a primera vista parecen semejantes, pero en las figuras no se observan la longitud de los segmentos y ni la amplitud de los ángulos. El profesor les pregunta a los estudiantes si los dos cuadriláteros son figuras semejantes, y con ello se inició una discusión en torno a las propiedades que se deben cumplir y cómo garantizarlas.

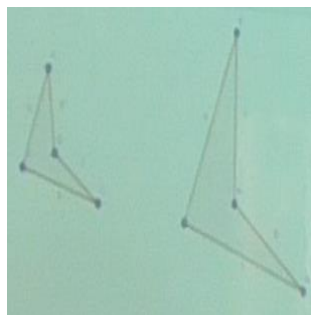


Imagen 84.. Figuras proyectadas en el tablero

Profesor: Resulta que Juan José nos dio dos características. (...) Si yo atiendo a esas dos características que dice Juan José, ¿yo podría decir que estas dos figuras son semejantes?

Juan Nicolás: Pues... no sé...

La expresión del profesor se puede clasificar como N1 en el nivel del discurso, dado que la pregunta es directa, retoma las ideas anteriores brindadas por los estudiantes y las respuestas que se le dan a la pregunta son cortas y concretas. También evidenciamos que la participación del profesor se cataloga como *portavoz*, él es original en su sintaxis, pero el contenido ya había sido expresado por los estudiantes anteriormente. Nicolás afirma que las figuras sí son semejantes y el profesor interviene:

Profesor: ¿Sí o no?

Juan Nicolás: Creo que sí.

La pregunta del profesor es directa y la respuesta dada por Juan Nicolás es concreta, por lo cual se clasifica esta expresión como N0 en el nivel de discurso. Posteriormente se dan las siguientes intervenciones:

Profesor: ¿Por qué?

Juan Nicolás: Porque... son iguales... (...)

Profesor: ¿Qué son iguales?

Juan Nicolás: La figura pequeña... pues...

Observamos que las preguntas realizadas por el profesor son abiertas, con la finalidad complementar las ideas de Juan Nicolás y las respuestas dadas por este estudiante son cortas, por tanto, ambas expresiones se clasifican en N1+ del discurso. El profesor interviene nuevamente:

Profesor: La figura pequeña... pues...

Juan Nicolás: Pues no en tamaño sino en forma, y los ángulos.

La expresión del profesor se cataloga como N2 en el nivel del discurso, ya que el profesor realiza una pregunta abierta, la respuesta de Juan Nicolás evoca información adicional, en este caso hace alusión a la forma y el tamaño de las figuras; la participación de Nicolás se clasifica como *autor*, dado que su idea es original tanto en su sintaxis como en su semántica.

Por último, evidenciamos que en las respuestas de Juan Nicolás se presenta esquema de argumentación E-P, puesto que él afirma que las figuras son semejantes dado que la forma y ángulos de las figuras son iguales, esta idea la sustenta a partir de la imagen que se está proyectando. El profesor retoma las ideas del estudiante y expresa:

O sea, pilas... que aquí hay una palabra que menciona Juan Nicolás, que es la forma. Él dice son iguales en su forma, pero no en su tamaño.

La participación del profesor se clasifica como *portavoz*, dado que retoma las ideas de Juan Nicolás, pero es original en la forma en como formula su declaración. Luego otro estudiante interviene:

Johan: Es que los ángulos son iguales en las dos figuras.

La participación de Johan se cataloga como *portavoz*, se basa en la idea de Juan Nicolás sobre los ángulos iguales, pero con pequeñas modificaciones. El profesor tiene la intención de que los estudiantes sean más específicos con los ángulos que son iguales en las figuras y para ello pregunta:

Profesor: ¿Cuáles ángulos son iguales?

Johan: El que está en la prime, en la figura pequeña eee... hay uno abierto y tres cerrados.

Observamos que la pregunta del profesor es directa, retoma las ideas de Johan, y la respuesta dada por el estudiante es corta, por tanto, la clasificamos en N1 en el nivel de discurso. El profesor le solicita a Johan que pase al tablero y señale los ángulos que son iguales, Johan pasa y expresa:

Este ángulo... es igual a este solo que el tamaño de la figura pues cambia.



Imagen 85. Intervención del estudiante en el tablero

En las intervenciones de Johan evidenciamos esquema de argumentación E-P, dado que el estudiante afirma que los ángulos de las figuras son iguales, porque en cada figura hay “*un ángulo abierto y tres cerrados*”, también expresa que los ángulos son iguales pero que las figuras cambian, esta afirmación se sustenta a partir de la imagen que se está proyectando en el tablero. El profesor interviene:

Profesor: Listo. Espérate un momentico. (...) Mmm... Santiago ¿esos dos ángulos son iguales?

Santiago: Eeee... (...) Pues, yo aquí mirándolo, yo diría que sí.

La pregunta del profesor se clasifica como N1 en el nivel del discurso, puesto que retoma la idea de Johan, con el objetivo que los demás estudiantes comenten acerca de ella, además la pregunta es directa y la pregunta dada por Santiago es corta. El profesor en busca de la justificación de la afirmación de Santiago pregunta:

Profesor: ¿Por qué?

Camila: Porque son la misma figura

Santiago: Porque digamos que, aunque la línea se alargue más en la otra figura, el ángulo siempre va a ser el mismo y, desde aquí, a ojo, se ve que sí es el mismo.

La expresión del profesor se cataloga como N2 en el nivel del discurso, puesto que la pregunta es abierta y la respuesta dada por Santiago es voluntaria y evoca información adicional, en este caso “el alargue de los segmentos”. La participación de Camila se clasifica como *portavoz*, dado que retoma la idea de que son la misma figura, pero cambia en su sintaxis. En las expresiones de Camila y Santiago se observa esquema de argumentación E-P, dado que se sustentan en la imagen que están observando. Posteriormente Santiago comenta que se debe usar un transportador para verificar que los ángulos sean iguales, en ese momento una estudiante manifiesta que GeoGebra tiene una herramienta que permite medir la amplitud de los ángulos, el profesor interviene:

Hay una herramienta en GeoGebra que me deja mirar los ángulos, ¿cierto? (...) Pero, entonces, ¿yo podría asegurar sin la herramienta que los ángulos son iguales?

Varios estudiantes responden que no, por tanto, la expresión del profesor se cataloga como N1+ en el nivel del discurso, la pregunta es directa y las respuestas concretas. El profesor interviene:

Profesor: Entonces, espérate un segundito. Si yo no puedo asegurar (...) que los ángulos son iguales, ¿podría asegurar que las figuras son semejantes?

Diego: Haciendo lo que dice aquí... queeee... midiendo las longitudes (...) y viendo la razón de ellas, entonces eeeee... el que está acá... (ademán con los brazos) de la figura pequeña.

El profesor reorienta la pregunta que había formulado anteriormente con la intención de que los estudiantes profundicen en sus respuestas, y en efecto las respuestas dada por Diego es amplia y trae consigo información adicional, por tanto, se clasifica esta expresión como N2 en el discurso. Por otro lado, la intervención de Diego evidencia esquema de argumento CE-A, él afirma que es posible determinar que las dos figuras son semejantes sin haber garantizado que los ángulos sean congruentes, solo basta con verificar la propiedad de las razones de los segmentos de las figuras, sustentándose en la guía. Luego, el profesor le da la palabra a otro estudiante que deseaba participar, el estudiante se dirige al tablero y expresa:

Johan: Pues... yo lo que entiendo es que cuando... sin la necesidad de... la herramienta, o sea no debes hacer el cálculo, digamos, tú ya sabes que esta arista (repisa en la figura más pequeña uno de los lados), tú ya sabes que acá, por decirlo así, está duplicada (repisa un lado de la otra figura) entre un número, y para eso sirve la homotecia.

En la expresión del estudiante se observa esquema de argumentación E-P: dado que afirma que se pueden corroborar que dos figuras sean semejantes, sin hacer uso de herramientas, solo basta observar que la longitud de los segmentos se duplica, como la hace la homotecia, y eso lo sustenta a partir de la imagen que proyecta. También la participación de este estudiante se cataloga como *autor*, dado que es original en su sintaxis y semántica, pues hasta el momento no se había mencionado la palabra homotecia. El profesor responde a la idea de Johan con un “ok” y pregunta nuevamente:

Profesor: ¿Y ahí podemos saber si tienen el mismo ángulo? (... ..)

Juan José: Sí, porque la figura.

Profesor: Cómo haces tú para saber si tienen el mismo ángulo, así, ¿así como está?

Las intervenciones del profesor se clasifican como *transmisor*, puesto que, retoma sus preguntas acerca del cómo garantizar que los ángulos de las figuras sean congruentes. En seguida de la pregunta responden dos estudiantes.

Juan José: Para que le quede exacta, se debió haber usado la homotecia.

Sofía: Pero, no sabes si es exacta o no.

Observando las respuestas podemos afirmar que las preguntas anteriores del docente se clasifican en N2 del nivel del discurso, tanto que, las preguntas son abiertas y la respuesta de Juan José es voluntaria y trae consigo información adicional, además su participación se cataloga como *portavoz*, dado que apoya en la idea de Johan sobre el uso de la homotecia, pero la forma de organizar sus ideas cambia. En la intervención de Juan José se idéntica esquema de argumentación A-T dado que afirma que, sí es posible validar que los ángulos correspondientes de las figuras presentadas con congruentes al emplear la homotecia, es decir que el estudiante está anticipando el resultado de aplicar esta transformación.

### ***Episodio 3***

Se sigue con la discusión para determinar si los cuadriláteros proyectados en tablero por el profesor son semejantes. Un estudiante propone un procedimiento para determinar si los cuadriláteros son semejantes sin emplear las dos propiedades que se establecen en la definición de figuras semejantes. Alrededor de este procedimiento surge algunas discusiones. El inicia con las siguientes intervenciones:

Profesor: ¿Cómo aseguramos que las dos figuras son semejantes? Es decir, ¿qué es lo que tenemos que asegurar?

Juan José: Con esas dos propiedades.

La pregunta que plantea el profesor es abierta, el estudiante brinda una respuesta corta, por tanto, se clasifica esta expresión del profesor como N1+ en el nivel del discurso. El profesor complementa la idea de Juan José, de la siguiente manera:

Listo. Con las dos propiedades dice Juan José. Que los ángulos sean iguales y que las razones entre los lados también sean iguales. (Da la palabra a Sofía, quien la ha pedido con la mano) Sofía...

La estudiante responde:

Pero si uno no tiene un compás a la mano, ¿cómo hace?

La intervención del profesor da paso a que Sofía plantee una pregunta abierta a la cual Santiago responde voluntariamente y proporciona información adicional, en este caso menciona un procedimiento para determinar si las dos figuras son semejantes, por tanto, la expresión de Sofía se clasifica como un N2, en el nivel de discurso. Además, su intervención es auténtica en sintaxis y semántica, clasificando su participación como *autora*. El profesor interviene:



Pero ¿si uno no tiene un compás a la mano? (... ..) Santiago...

Observamos que el profesor enuncia tal cual la pregunta de Sofía, por lo que su expresión se clasifica como *transmisor* de la idea de Sofía. Enseguida Santiago interviene:

Me parece que, leyendo la guía por ahí, me pareció ver que... digamos, si tú trazas una línea desde la parte superior de la figura ya agrandada hasta la misma de la chiquita

El profesor le da un marcador y le solicita a Santiago que pase al tablero a explicar mejor su idea, también les pide a los estudiantes que ponga atención a la explicación de Santiago, el cual enuncia:

No sé si me acuerdo bien, pero en la guía, él hacía una línea como desde acá y otra desde acá o algo así (ha trazado dos líneas, a cada una de las cuales pertenece un vértice de la figura grande y el correspondiente de la figura pequeña; en ambos casos ha extendido un poco las líneas de manera que se evidencie la intersección de ellas), y luego cuando se juntaban aquí (marca el punto de intersección) entonces la figura como que se... se agrandaba de acá a acá (desplaza la mano extendida como barriendo la región angular determinada por las líneas trazadas).

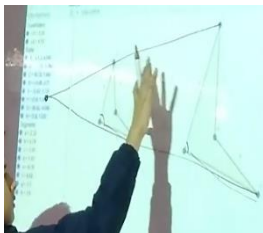


Imagen 86. Explicación de Santiago

En esta expresión evidenciamos esquema de argumentación CE-A, el estudiante afirma que, si es posible determinar que dos figuras sean semejantes, sin utilizar la medida de los segmentos y la amplitud de sus ángulos, sustentado en un procedimiento que observó en la guía. En este caso la autoridad es la guía donde se menciona el procedimiento. El profesor interviene y se dan las siguientes interacciones:

Profesor: Y... mira el otro punto.

Santiago: ¿Cuál otro punto?

Profesor: El punto D (señala en la figura más pequeña)

Santiago: ¡Ah! Creo que ahí, este sería como que así. (Traza la línea a la que pertenecen la intersección de las otras dos, y los vértices D y H) Y digamos este ángulo (hace dos marcas, que trazadas parecen una sola, para referirse a los ángulos determinados por las líneas), tal vez, algo tendría que ver. (... ..) No me acuerdo de más. (Vuelve a su puesto)



Imagen 87. Explicación de Santiago

El docente pregunta por el otro punto, Santiago profundiza en su explicación, proporcionado información adicional, por tanto, la expresión del profesor se clasifica como N2 en el nivel del discurso. Las participaciones de Santiago son auténticas en su semántica y sintaxis, en consecuencia, es *autor*. En seguida el profesor interviene:

Bueno, listo. ¿Cuál es la idea de Santiago acá? Él está diciendo que utilicemos el proceso inverso que utilizamos la clase anterior. ¿Cuál es el proceso inverso? Que... yo trazo un segmento o una línea que cruce por estos dos puntos [A y E] (con el dedo sobre la representación que hizo Santiago repisa el trazo de la recta AE), y lo extiendo, porque lo que hizo Santiago aquí fue extenderlo. (... ..) Juan Nicolás gracias por poner atención. Y hago lo mismo con este punto y este punto [C y G], con este y con este [D y H]. Y los trazo. ¿Qué debe pasar cuando yo trazo esas líneas?

Como evidenciamos el profesor retoma la explicación dada por Santiago, por tanto, es *portavoz*, la pregunta que hace al final de su intervención es abierta y observamos en las siguientes respuestas que proporciona información adicional, de manera que la pregunta del profesor se clasifica como N2 en el discurso. A continuación, se presentan algunas de las respuestas dadas por los estudiantes a la pregunta del profesor. ¿Qué debe pasar cuando yo trazo esas líneas?

Estudiante 1: Que todos queden en un mismo

Estudiante 2: Que se alineen.

María José: Que ambos puntos queden en la misma línea.

Profesor: ¿Ambos puntos? ¿Cuáles ambos puntos?

María José: Digamos que los dos de arriba tienen que quedar en la misma línea.

Evidenciamos que tanto el estudiante 1 y 2 y María José son *autora* en sus participaciones, todos expresan cosas diferentes, la segunda participación de María José se clasifica como *portavoz*, dado que cambia la forma de expresarse, pero es la misma idea inicial. El profesor interviene.

Estos dos... (señala los puntos A y E) deben 2 en la misma línea... ¿Es posible que estos dos estén en líneas diferentes?

Algunos estudiantes responden que sí y otros que no, por lo cual, la expresión del profesor se clasifica como N1 en el nivel de discurso, dado que la pregunta es directa y las respuestas de los estudiantes fueron monosilábicas. El profesor replantea su pregunta y Santiago responde de la siguiente manera:

Profesor: lo que está diciendo María José es que estos dos puntos tienen que quedar en la misma línea. (... ..) ¿Es posible que eso no pase? Es decir, si yo quisiera unir esos dos puntos, ¿es posible que haya una línea que no pase por ellos dos?

Santiago: Profe, me parece que es como que el mismo punto de las dos figuras tiene que estar en la misma línea. Entonces, digamos, creo que sería por eso que el punto, el de la esquina derecha no...

En la expresión del profesor observamos que cambia la sintaxis de su pregunta, pero en sí tiene la misma intención, preguntarles a los estudiantes si posible que dos vértices correspondientes de los cuadriláteros pertenezcan a distintas rectas, en consecuencia la participación

del profesor se clasifica como *portavoz*. Por otro lado, el nivel de discurso en el que se cataloga esta expresión es N2, dado que se retoma las ideas de María José con la finalidad de que los estudiantes comente sobre esta idea, además la respuesta de Santiago es voluntaria y evoca información adicional. El profesor decide nombrar los puntos que determinan los cuadriláteros, de tal manera que sean visibles para todos los estudiantes y Santiago pueda expresar su idea claramente. (Imagen 88).

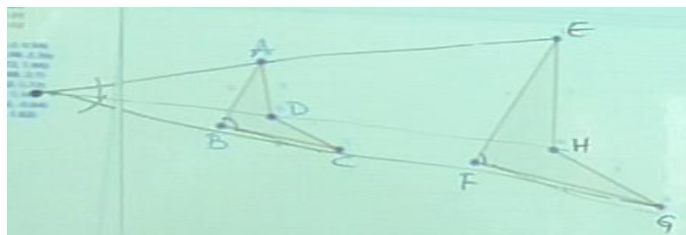


Imagen 88. Cuadriláteros proyectados en el tablero

Santiago sigue expresándose, pero ahora haciendo alusión al punto de las figuras por su nombre específico, se dan la siguiente interacción entre él y el profesor.

Santiago: Entonces, digamos, el C y el G es el mismo punto de la figura solo que (...) Entonces, yo diría que esos dos tendrían que estar en la misma línea. (...) Eeee...

Profesor: Tienen que estar en la misma línea.

Santiago: Digamos el B y el F también, el A y el E, el D y el H. (... ..) Y la otra cosa es que... me parece que esa figura, o sea, no... habrías usado homotecia porque, aquí hablando con Juan Pablo, debería aparecer A prima o B prima, entonces no serían semejantes.

Analizamos en la expresión de Santiago esquema de argumentación CE-R; los estudiantes han venido afirmando que se debe hacer un procedimiento similar al que ha trabajado con homotecias para determinar si las figuras son semejantes. En este caso particular Santiago afirma que no se ha utilizado homotecia porque los puntos no están nombrados con “primas” como los han nombrado al usar homotecias en clases anteriores. Así el estudiante se está apoyando en el formato en el que se nombra los puntos en las figuras donde se aplica una homotecia, sin tener en cuenta las características de esta transformación, para asegurar que en este caso no se utilizó homotecia. La participación de Santiago es original tanto en su semántica como en su sintaxis, de modo que se clasifica como *autor*. Ante la idea de Santiago el profesor interviene:

¿Será necesario que el nombre sea A prima y B prima para que sean semejantes?

La expresión del profesor se clasifica como N2 en el nivel de discurso, teniendo en cuenta que, la pregunta es abierta, retoma la idea de Santiago para que los demás estudiantes comenten algo al respecto y la siguiente respuesta evoca información adicional.

Santiago: O sea, lo decimos es porque GeoGebra hace eso.

Profesor: ¿Es una condición?

Santiago: No, pero como GeoGebra lo hace...

Observamos que en la primera respuesta de Santiago es auténtico tanto en su sintaxis como en su semántica, por lo cual, su participación se clasifica como *autor*. En la segunda repuesta expresa lo mismo, pero cambia su sintaxis, así la segunda participación se clasifica como *portavoz*. En ambas expresiones se evidencia un esquema de argumentación CE-A, el estudiante afirma que los puntos de las figuras semejantes se deben nombrar el signo prima (‘), porque GeoGebra lo realiza, en ambas expresiones la autoridad es GeoGebra. El profesor interviene, retoma las ideas que se ha venido abordando de la siguiente manera:

Bueno, miren, voy a hacer lo siguiente. Digamos que Santiago intentó hacer una comprobación de que estas dos figuras fueran semejantes y lo hizo de la siguiente manera: trazo una línea que pase por A y por E y la extendió, lo mismo por D y por H, por G y por C. Esas líneas parecen coincidir en un punto, ¿cierto? (En el tablero, destaca el punto de intersección y lo designa con P). Llámelo como quieran ¿cierto? El punto P, si usted quiere. Parecen coincidir. Y entonces sí coinciden, por allá alguien dijo que llegan al mismo punto, si coinciden, pareciera que estas dos figuras fueran semejantes, pareciera. Puede ser o puede no ser, ¿cierto? (Da la palabra a Juana, quien la está pidiendo con la mano) Juana...

La expresión del profesor se clasifica como N1 en el nivel de discurso, dado que, retoma las ideas de Santiago, pero la pregunta es directa y como tal no obtiene repuestas por parte de los estudiantes. Luego, una estudiante comenta algo acerca del procedimiento propuesto y se generan las siguientes intervenciones:

Juana: Cuando tú quieres hacer, por ejemplo, una figura semejante sin estar la otra, ese proceso no serviría.

Profesor: ¿Cómo, cómo hija?

Juana: No serviría ese proceso cuando no tienes las dos figuras sino solo tienes una.

La primera participación de Juana se clasifica como *autor*, dado que, su idea es auténtica y es la primera vez que la menciona, observamos que en su segunda participación cambia la sintaxis, pero se mantiene la misma intención, comentar que procedimiento no sirve para hacer una figura semejante a una dada, por tanto, se clasifica como *portavoz*. El profesor cuestiona a Juana si se puede tener solo una figura para hablar de semejanza, Juana interviene y aclara su idea, se dan las siguientes participaciones:

Juana: Por eso, para hacer una figura semejante, ¿qué proceso seguir?

Profesor: Juana, si tú tienes una figura y quieres hacer otra semejante, ¿qué es lo que hay que hacer?

Juana: Esa es mi pregunta. Ese proceso no serviría porque no... O sea, no habría con qué unir (ademán con las manos) o... un punto.

Juana vuelve a cambiar la sintaxis de su idea, pero su intención es la misma que en las anteriores, por ello, su participación sigue siendo *portavoz*; observamos que el profesor repite tal cual la pregunta de Juana, por tanto, su participación es *transmisor*. Analizamos en la última expresión de Juana esquema de argumentación CE-A, la estudiante afirma que el procedimiento no sirve porque “no habría con que unir”, apoyándose en la autoridad del proceso que propuso Santiago.

#### ***Episodio 4***

Se continúa opinando acerca del procedimiento propuesto por un estudiante para verificar si dos figuras son semejantes. El profesor decide poner el tablero la longitud de los segmentos que determinan los cuadriláteros que se están proyectando, con la finalidad de que los estudiantes se apoyen en estas para definir si las figuras son o no son semejantes.

El profesor, empleando GeoGebra, encuentra las longitudes de dos segmentos y aunque no se hace una pregunta, esta acción se clasifica como N2 en el discurso, dado que tiene la intención de que los estudiantes comenten algo nuevo a partir de las longitudes; un estudiante interviene voluntariamente y proporciona información adicional, como se observa:

Juan José: Se tiene que dividir para encontrar el resultado, luego lo divides con otro lado para (no se entiende)

A partir de la respuesta de Juan José se obtiene las siguientes interacciones:

Profesor: Miren lo que está diciendo Juan José. Esto mide dos coma treinta y dos, y esto mide cuatro coma setenta y ocho (...) Si yo tengo esas dos medidas ¿ya puedo asegurar que las figuras son semejantes?

Juan José: Sí, así aseguras lo de la razón

La pregunta del profesor se clasifica como N2 en el nivel de discurso, dado que se retoma la idea de Juan José y la respuesta obtenida proporciona información adicional, en este caso se mencionan las razones; ambas participaciones son auténticas tanto en semántica y sintaxis, por lo cual se clasifican como *autora*. En la intervención de Juan José evidenciamos un esquema de argumentación A-A, el estudiante afirma que se puede garantizar que las figuras son semejantes solo si se asegura que las razones entre las longitudes de los segmentos correspondientes son iguales, sustentándose en una de las condiciones que se plantean en la definición. El profesor intercede:

Profesor: ¿Con eso yo ya sé que las figuras son semejantes?

Johan; Las figuras esas no (enfatisa la voz) son semejantes porque digamos, creo que tú no usaste la homotecia en esas dos figuras, (...) es mi opinión ¿no?

Observamos que la pregunta del profesor es directa sin embargo la respuesta dada por el estudiante es voluntaria y proporciona información adicional, en consecuencia, se cataloga como N2 en el nivel de discurso. En la expresión de Joan se evidencia esquema de argumentación CE-R, se afirma que las figuras no son semejantes porque no se usó homotecia, apoyándose en ese formato para determinar si dos figuras son semejantes. Johan sigue explicando su idea:

Entonces, o sea, yo lo que pensaría es que lo multiplicaste por dos para que las dos figuras quedaran semejantes. Entonces (...) o que pensé es que pues... dos coma treinta y dos por dos da cuatro coma sesenta y cuatro y allá da cuatro coma setenta y ocho, entonces ya no es como... una cosa, como un número entero que se haya multiplicado por el lado.

En esta expresión se identifica esquema de argumentación E-F, este estudiante se apoya en el procedimiento que se lleva a cabo en las homotecias para concluir que las figuras son semejantes. Con base en idea de Johan otro estudiante interviene:

Juan David: No necesariamente, porque uno en la homotecia ¿no puede multiplicar por un decimal?

Profesor: ¿No se puede multiplicar por un decimal?

La participación de Juan David se clasifica como *autor* dado que es original en su semántica y en su sintaxis, además presenta esquema de argumentación E-P, lo más probable es que cuando los estudiantes abordaron el tema de homotecia hacían la transformación multiplicando la longitud de los segmentos por un número natural, dándole a entender a los estudiantes que esto era la condición para aplicar una homotecia, se sustenta en esta percepción para indagar si en las homotecias se puede multiplicar por un decimal. Por otro lado, observamos que el profesor repite tal cual la pregunta de Juan David, por ello su participación se clasifica como *transmisor*. Intentando abordar esta inquietud el profesor interviene:

Profesor: No sé los que hicieron homotecia. (Da la palabra a Diego, quien la está pidiendo con la mano) Señor, Diego...

Diego: Sí se puede multiplicar por un decimal, pero en ese caso tendrías que tener..., para asegurarte mejor, tendrías que tener las medidas de todos, por ejemplo, de A a D, y de E a H, entonces E y H se divide por AD, y ahí tendría que dar lo mismo que EF dividido AB.

El profesor retoma las ideas de los estudiantes y le solicita a un grupo en particular que comenten sobre las ideas de sus compañeros, la respuesta de Diego evoca información adicional, por tanto, se clasifica la expresión como N2 en el nivel del discurso. El profesor aclara que en la homotecia se puede utilizar número decimales, en si se puede emplear cualquier número real positivo, también comenta que al dividir la longitud del  $\overline{EF}$  por la longitud del  $\overline{AB}$  se halla una razón, luego de dan siguientes intervenciones:

Profesor: (..) Es decir, vamos a comparar esta medida EF con AB (ha señalado en el tablero lo mencionado). ¿Cómo las comparamos? Hacemos la división. Cuatro coma setenta y ocho dividido por dos coma treinta y dos. ¿Cuánto dio?

Santiago: Dos coma cero seis.

Juan José: Dos punto cero seis.

Observamos que el profesor recopila las ideas de los estudiantes y realiza una pregunta directa, las respuestas brindada por los estudiantes son cortas, por consiguiente, se clasifica la expresión del profesor como N1 en el nivel de discurso. También evidenciamos como Juan José es *transmisor* de la participación de Santiago, dado que repite su idea tal cual. El profesor anota en el tablero el resultado de la división y pregunta:

Profesor: Pero, Diego, además dice que dividamos ¿quién y quién?

Diego: E y H, y A y D.

La pregunta es directa y la respuesta dada por Diego es concreta y corta, de manera que se clasifica como N1 en el nivel de discurso, el profesor vuelve a intervenir retomando las ideas Diego:

Eh... Él dice vamos a dividir este segmento con este... es decir, las longitudes. Pero, primero, miremos cuánto miden (mira la información en su computador) (...) EH (... ... ..) tres coma nueve y uno coma ochenta y siete. Este de acá mide tres coma nueve y este mide uno coma ochenta y siete (anota las medidas en las figuras del tablero). Tres coma nueve dividido uno ochenta y siete. ¿Cuánto da?

Varios estudiantes comentan el resultado “*dos como cero ocho*”. La participación del profesor es *portavoz*, dado que enuncia de manera diferente las ideas de Diego, también se clasifica como N1 en el nivel de discurso, dado que la pregunta es abierta y la respuesta dada por los estudiantes es concreta. El profesor anota el resultado en el tablero y se dirige a Diego generando la siguiente discusión:

Profesor: ¿Qué pasa con esas dos divisiones, Diego?

Diego: Eeee... Que son muy cercanas, pero no es lo mismo, entonces...

Profesor: Son muy cercanas, pero no lo mismo.

Juan José: Entonces, no son semejantes.

Diego y Juan José evocan información adicional a la discusión, la pregunta planteada por el profesor es abierta, por tanto, se cataloga como N2 en el nivel del discurso; se observa que la participación de Diego es original estableciéndose como *autor*, el profesor repite tal cual esta idea por tanto su participación se clasifica como *transmisor*. En la intervención de Juan José se identifica esquema de argumentación A-A, el estudiante afirma que las figuras no son semejantes, porque no se cumple una de las condiciones establecidas en la definición, es decir que su sustento es la definición. Enseguida un estudiante interviene:

Miguel: Entonces, para que sean semejantes, digamos, todas las longi (...), AB, BC, CD, DA y EF... bueno, lo que estaba haciendo Diego, tiene que dar el mismo número al hacer la división.

La participación de Miguel se clasifica como *portavoz*, dado que expresa de manera diferente la idea de Diego, es decir es original en su sintaxis, pero no en su semántica. El profesor realiza una pregunta y se generan las siguientes intervenciones:

Profesor: Entonces, si yo hago estas dos divisiones, ¿yo ya podría asegurar algo de las dos figuras? (... ..) Sofía...

Sofía: No son semejantes.

La expresión del profesor se cataloga N1 en el nivel de discurso, puesto que la pregunta es directa y la respuesta dada por Sofía es corta, también se clasifica la participación de Sofía como *transmisor*, dado que enuncia tal cual que las figuras “No son semejantes” como lo había expresado Juan José. Para finalizar este episodio el profesor le aclara a todos los estudiantes que las figuras no son semejantes dado que no se cumple una de condiciones de la definición.

### ***Episodio 5***

Después de determinar que los dos cuadriláteros proyectados en el tablero no son semejantes, un estudiante comenta que el procedimiento propuesto anteriormente tiene un error y crea una discusión en torno a ello y al significado de segmentos homólogos.

Juan David: Es que ese proceso de las líneas me parece que podría tener errores, por ejemplo... (se dirige al tablero). Supongamos que este punto (señala el punto E) está... mucho más arriba, supongamos que está acá (señala un punto sobre una vertical imaginaria que contiene a E) igual (ademán de trazar una línea por el nuevo punto E y por A) pasa por, puede tocar este (señala el punto A) y puede coincidir con un punto, por ejemplo, acá (señala un

punto que no estaría en la línea que conecta a D con H). (... ..) Entonces, creo que se... ese procedimiento no (no se entiende).

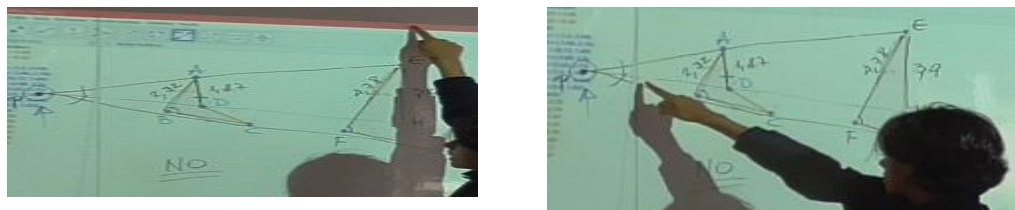


Imagen 89. Explicación de Juan David en el tablero

La participación de este estudiante se clasifica como *autor*, se evidencia el esquema de argumentación CE-R, el estudiante afirma que el procedimiento de líneas no es válido para determinar que dos figuras sean semejantes, dado que al mover un punto no siempre se obtiene la forma que caracteriza las proyecciones en una homotecia. El profesor retoma las ideas de Juan David para explicarlas nuevamente a todo el grupo de estudiantes:

Profesor: Miren lo que dice Juan David. Supongamos que E no está acá, sino por acá (marca un punto), y entonces al realizar el procedimiento de trazar la línea que pase por este [el nuevo punto E] y por este [A] (hace lo mencionado) puede que no coincida, es decir... me quedó un poquito chueco ¿no? Pero bueno, espero que me entiendan. Cuando trazo este punto [recta] por acá [E] y por acá [A] ¿cierto?, entonces es posible que al trazar la línea pues esta siga pasando por algún lado que nunca toque el punto P. Pero, la pregunta es: ¿el procedimiento estaría mal? ¿O qué sería lo que... es el procedimiento?

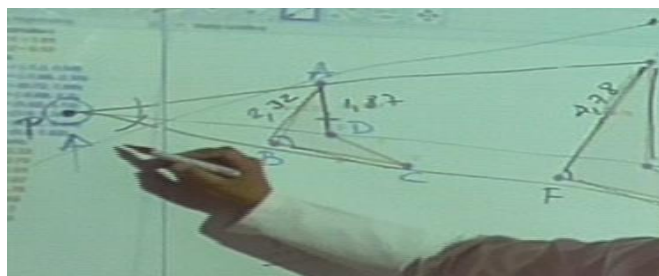


Imagen 90. Explicación del profesor en el tablero

Observamos que el profesor retoma las ideas de Juan David, pero las expresa de manera diferente, por tanto se clasifica esta participación como *portavoz*. Además se cataloga esta expresión como N2 en el nivel de discurso, dado que la pregunta planteada es abierta y enseguida observamos que la respuesta brindada por Juan José proporciona información adicional:

Es que eso que hizo Cuéllar, no es necesario hacerlo, digamos (...) hay algo que son los lados homólogos que están como... digamos en una figura que es más grande que otra, pero es la misma, entonces, el A es el mismo E, entonces son lados homólogos. Entonces... eee... tú divides las medidas de A con las de E porque

En la expresión analizamos esquema de argumentación A-T, el estudiante afirma que no hay necesidad de realizar el procedimiento de las líneas de proyección, dado que al dividir la longitud de los segmentos homólogos se puede corroborar si las dos figuras son semejantes,



anticipándose a un resultado. Es importante aclarar que el estudiante se refiere a los segmentos de las figuras como los puntos; con el fin de aclarar esa confusión en la forma de expresarse el profesor pregunta que es A, se dan las siguientes interacciones.

Profesor: Pero, espera un momentico, ¿qué es A?

Juan José: Ya lo borraste (... ..)

Profesor: (Escribe la letra A borrada de manera inadvertida) ¿Qué es A?

Juan José: El la... el lado de... (señala con el índice hacia el tablero),

Las dos preguntas planteadas por el profesor se clasifican como N1 en el nivel de discurso, puesto son directas y las respuestas dadas por Juan José son cortas. El profesor es *autor* de su pregunta al realizar por segunda vez se vuelve *transmisor* de su misma participación. Al no conseguir una respuesta acertada por parte del estudiante el profesor hace preguntas para dar claridad al asunto, se generaron las siguientes intervenciones:

Profesor: ¿A es un lado?

Miguel: No, es un punto.

Juan José: Es un punto de la figura.

La participación de Miguel se clasifica como *autor*, dado que es original tanto en su semántica como en su sintaxis, y la participación de Juan José se cataloga como *portavoz*, dado que hace modificaciones mínimas a la idea de Miguel. El profesor retoma las ideas de Juan José y le solicita que se comunique correctamente, que diga qué longitudes se deben dividir. Se da paso a una discusión con la finalidad de esclarecer el objeto geométrico al cual hacen mención los estudiantes.

Profesor: Entonces, ¿a cuál lado te estás refiriendo?

Manuel: Al segmento AD.

Juan José: Al AD o al AB.

Profesor: Entonces, ¿cuál es el lado?

Juan José: AD

Las preguntas del profesor se clasifican como N1 en el nivel de discurso, son directas y las respuestas brindadas por los estudiantes son cortas y concretas; por otro lado, observamos que la participación de Manuel se clasifica como *autor* y la de Juan José *transmisor* pues menciona tal cual la respuesta de Manuel. El profesor interviene:

Profesor: Ok, tú estás hablando del segmento AD (escribe en el tablero la notación correspondiente a lo dicho) ¿sí?

Juan José: Sí

En este caso la expresión del profesor se clasifica como N0 en el nivel de discurso, puesto que la finalidad de la pregunta es validar un resultado, la pregunta del profesor es directa y la respuesta dada por el estudiante es monosilábica. El profesor nuevamente le pide al estudiante que vuelva a decir su idea, pero con mayor precisión, el estudiante expresa:

Juan José: Que... los lados homólogos son lados de... en una misma figura..., no, en una figura que es la misma, pero de diferentes dimensiones, digamos, se tiene que dividir para ver si son semejantes las razones (...) y así

En una de la primera intervención de Juan José había mencionado que “los lados homólogos que están como... digamos en una figura que es más grande que otra, pero es la misma”, así observamos que en este caso la participación se cataloga como *portavoz*, la sintaxis de su idea cambia, pero la semántica es la misma. Esta intervención da paso a que el profesor plantee una pregunta entorno al que se entiende por lados homólogos, como se observa:

Profesor: (...) Él está usando ese asunto de lados homólogos. (...) Juana... Juan José está hablando de lados homólogos (... ...) ¿qué son los lados homólogos? ¿Tú qué entiendes por lados homólogos?

Juana: Profe, es que yo nunca he visto eso

La expresión del profesor se clasifica como N1+ en el nivel de discurso, debido a que retoma la idea de Juan José para los demás estudiantes comenten acerca de esta idea, la pregunta es abierta pero la respuesta de la estudiante es corta. Enseguida Sofía comenta que no entiende qué relación tiene los segmentos AB y EH, pero lo expresa de una manera poco comprensible, dado que expresa “*El problema es que no entendí qué semejanza tenían esos dos*”, así se da la siguiente interacción:

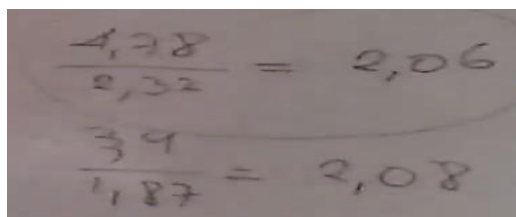
Profesor: ¿Qué semejanza tienen?

Juan José: Es la misma figura, solo que de diferente tamaño. Entonces, si esos dos lados se dividen, te va a dar, digamos, dos coma algo y digamos todos los valores, todos los lados homólogos divididos... entonces, digamos, BC y FG te tienen que dar el mismo valor y (...) y si no, las razones no son iguales sino semejantes.

Sofía: Ah, o sea que dijo que eso se llamaba lados homólogos.

La intervención del profesor se clasifica como N2 en el nivel de discurso, la pregunta es abierta y las respuestas dadas son voluntarias y evocan información adicional; la participación del profesor se cataloga como *fantasma* dado que emplea la misma sintaxis de Sofía, pero su intención es distinta, profundizar en la inquietud que tiene la estudiante. El profesor interviene:

Profesor: No, él no dijo eso. (... ...) Pónganle atención. Él dijo: para saber si las figuras son semejantes, vamos a dividir los lados homólogos. Él no dijo que esto, que está acá (en el tablero encierra en una curva lo mencionado), que fue lo que hicimos, son los lados homólogos. ¿Qué son los la, él lo que dijo fue: vamos a dividir (resalta la voz) los lados homólogos? ¿Qué son lados homólogos?



The image shows two handwritten calculations on a board. The first calculation is  $\frac{4,78}{2,32} = 2,06$ . The second calculation is  $\frac{39}{1,87} = 2,08$ . Both calculations are enclosed in a hand-drawn oval.

Imagen 91. Verificación aritmética de las razones entre las longitudes de los segmentos

Sofía: O sea, AD y EH ¿son lados homólogos?

La pregunta del profesor se clasifica como N1+ en el nivel de discurso, dado que retoma las ideas anteriores y hace una pregunta abierta “¿Qué son lados homólogos?” y la respuesta de Sofía es corta. Además, la participación se distingue por ser *portavoz* de las ideas de Juan José. El profesor cuestiona la opinión de Sofía y se dan las siguientes interacciones:

Profesor: ¿Por qué? (...) ¿Qué significará eso de homólogos?

Juana: (En voz baja) Y, ¿por qué no nos dices qué son? (... ..)

Miguel: Profe, ¿y que son los lados homólogos?

Juan David: El segmento AD mide uno coma ochenta y siete, y el segmento EH, de tres coma ochenta y nueve, ¿sí? entonces ese dividido en este nos da cierto número y digamos es dos coma seis, por ejemplo, la división de eso, digamos que es dos coma seis, y entonces, este sería el valor por el cual aplicamos la homotecia, y así comprobaríamos si (no se entiende, podría decir: son homólogos).

Santiago: Yo lo que vería es que los lados homólogos son lados que las razones entre sus lados son iguales. (...) O sea, sería la segunda... sería como... en vez de decir las razones entre los lados son iguales, se podría decir que la segunda característica es que los lados sean homólogos.

Observamos que la pregunta del profesor se clasifica como N2 en el nivel de discurso, puesto que la pregunta es abierta y las respuestas dadas por los estudiantes proporcionan información adicional. Juan David hace alusión a la relación que hay entre las razones de los segmentos como la homotecia y Santiago, comenta que los segmentos homólogos son aquellos la razón entre sus lados iguales. En cuanto a la participación observamos que Miguel es *transmisor* de la pregunta realizada por el profesor, dado que su sintaxis y semántica es la misma. Una estudiante interviene con la finalidad de entender para que se usen las divisiones, en consecuencia, se dan estos diálogos:

Valeria D: Yo no entendí muy bien... Listo, yo sí entendí que, para comprobarlo, bueno, se divide la recta, bueno, la... como se llame, AB, con la EF, bueno como sea, pero ¿qué pasa con el resultado, o sea, qué se hace con eso? O sea, uno qué....

Profesor: Es decir, la pregunta es para qué sirve eso. (Encierra entre líneas curvas los resultados de las divisiones que ha escrito en el tablero: 2,06 y 2,08).

Harold: Para saber si es semejante o no.

En este caso la estudiante presenta nivel de discurso N1, dado que plantea una pregunta directa y la respuesta dada por Harold es corta y concreta; se evidencia que la participación del profesor se clasifica como *transmisor*, dado que reformula la pregunta de la estudiante. Sin embargo, la estudiante no pudo aclarar del todo su inquietud y vuelve a preguntar:

Valeria D: Pero, tú cómo haces para saber si son semejantes o no.

Se analiza en la expresión de Valeria nivel de discurso N2, pues retoma las ideas que se han tratado en la clase y realiza una pregunta abierta, además la respuesta de Miguel es amplia y proporciona información adicional como se observa a continuación:

A lo que dijo Daza, es para qué nos servía el dos coma cero seis. Eso nos sirve para calcular si una... bueno, para comprobar si una figura es semejante porque después de haber sacado todas las divisiones de AB, EH, FG (...) es que los números de las divisiones nos

sirven para comprobar si una figura es semejante a otra ya que (...) después de hacer las divisiones de todos los segmentos AB con EF, BC con FG, DC con HG y así, pues nos tienen que dar las divisiones de esos números, bueno de esos segmentos, igual. (A 36:06)  
 Da el mismo número para saber si son semejantes.

La participación de Miguel se clasifica como *portavoz*, dado que expresa con sus propias palabras las ideas que se han presentado en la clase, también se evidencia esquema de argumentación E-F, puesto que el estudiante explica a modo de algoritmo para qué sirven los resultados de las divisiones de las longitudes de los segmentos “homólogos” recopilando el procedimiento que se ha estado abordando en la clase.

### **Episodio 6**

El profesor decide presentar ejemplos con figuras más simples, los triángulos, se dibujan en el tablero y el profesor pone algunas de las longitudes de los segmentos afirmado al grupo de estudiantes que las figuras son semejantes, preguntándoles que longitud deber tener los segmentos faltantes. También se concreta la definición de segmentos semejantes. El profesor hace un breve resumen de lo que se ha presentado en la clase, aclara que para determinar que dos figuras semejantes se deben corroborar que se cumplan las dos condiciones de la definición.

Profesor: (...) Yo tengo un triángulo ABC y voy a poner otro triángulo EFG (dibuja en el tablero dos triángulos) ¿Listo? Tengo dos triángulos dibujados aquí. Entonces... (... ..) Bueno, lo que estamos diciendo es que si yo quiero mirar si estas dos figuras son semejantes, lo primero es que dividamos las longitudes de los lados ¿cierto? Y usted puede ponerle... supongamos que esto mide nueve, y que esto aquí mide tres. Y vamos a suponer además que este aquí mide... no sé, doce, que este mide cuatro y vamos a suponer que este mide también doce. Y, entonces la pregunta acá, (... ..) si yo quisiera asegurar la primera condición de la semejanza, ¿cuánto tendría que medir este lado?



*Imagen 92. Ejemplo propuesto por el profesor*

Juan Nicolás: Cuatro

Al estudiar para pregunta planteada por el profesor y la respuesta dada por Juan Nicolás podemos afirmar que la expresión se profesor se clasifica como N1 en el nivel de discurso, puesto que la pregunta es directa y la respuesta obtenida es concreta. En la intervención del profesor también se percibe esquema de argumentación E-F, el profesor enuncia el procedimiento que se debe realizar para verificar si dos figuras son semejantes, con el fin de convencer a los estudiantes de los pasos que deben seguir. Después un estudiante afirma que para saber la longitud  $\overline{BC}$  se debe hacer las divisiones de los lados homólogos, por tanto, el profesor pregunta ¿Quién son los lados homólogos? y se dan las siguientes contribuciones:

Profesor: ¿Quiénes son los lados homólogos?

Juan José: BA

Profesor: El lado BA, ¿lo voy a dividir entre quién?

Juan José: Entre EF

Profesor: Entre EF

La primera pregunta del profesor se cataloga como N1 en el nivel de discurso, dado que es directa y la respuesta dada por Juan José es corta y concreta, la segunda pregunta se clasifica en N0 debido que tiene la intención de validar un resultado y la respuesta también es corta. Observamos que la última participación del profesor se describe como *transmisor*, dado que repítela idea de Juan José, el resto de las participaciones son *autora* dado que son originales en semántica y sintaxis. Posteriormente Juan José afirma que también se debe dividir las longitudes de  $\overline{AC}$  y  $\overline{EG}$  y el profesor interviene y se dan las siguientes interacciones:

Profesor: Y también divido, voy a escribir acá, AC, lo divido ¿con quién?

Juan José: EG

Profesor: EG

Juan José: Y ese valor que te dé, si es igual, entonces, doce dividido (...) ese valor te va a dar el número que ahí falta.

La expresión del profesor se establece como N0 en el nivel de discurso, en vista de que la pregunta es directa y la respuesta es corta, enseguida el profesor repite tal cual la respuesta dada por el estudiante, por tanto, su participación se cataloga como *transmisor*; en la última intervención de Juan José evidenciamos esquema de argumentación E-F, se sustentan en el procedimiento para afirmar que mediante él se puede terminar la longitud del segmento faltante. Después el profesor empieza a preguntar a los estudiantes las longitudes de los segmentos de los triángulos y el resultado de algunas divisiones como se observa:

Profesor: Al hacer esta división, tres entre nueve, ¿cuánto da?

Miguel: Cero coma tres periódico.

Profesor: Cero coma tres periódico, ¿cierto? Y cuatro dividido doce, ¿cuánto da?

Miguel: Cero coma tres periódico.

Analizamos que las realizadas por el profesor tiene como objetivo validar resultado, son directas y las respuestas obtenidas son cortas, en consecuencias se clasifican como N0 en el nivel del discurso. El profesor resume lo que se ha realizado

Profesor: Juan José está diciendo que, si él hace esta división, lo que hay acá dividido entre doce, ¿cuánto tendrá que dar? Cero coma tres periódico. Entonces, la pregunta es cuánto mide esto.

Varios: Cuatro, cuatro.

Al igual que intervenciones anteriores el profesor retoma las ideas de Juan José con el fin de convencer a los demás estudiantes que con el procedimiento se puede hallar la longitud del segmento faltante, de modo que el esquema de argumentación es E-F; la participación del profesor se clasifica como *portavoz*, dado que es original solo en la sintaxis. Además, se

cataloga como N1 en el nivel de discurso, puesto que la pregunta es directa y la respuesta dada por los estudiantes es concreta. Con la intención de retomar la discusión de las figuras semejantes el profesor pregunta nuevamente por las condiciones que se deben cumplir, se dan las siguientes intervenciones.

Profesor: Primera condición (... ..) Juana, la primera condición ¿cuál es?

Juana: Queeee los ángulos sean iguales

Profesor: (Sorprendido, apunta a las razones que acaba de escribir en el tablero) Bueno, la primera no, de la que estamos hablando en este momento.

Juana: Ahhh, pss, jajaja. Al dividir, los números tienen que ser iguales.

Profesor: ¿Al hacer la división entre quién?

Miguel: Entre los lados homólogos

Las expresiones del profesor se clasifican como N1 en el nivel de discurso, en vista de que las preguntas son directas y tiene la intención de completar las ideas de los estudiantes, además las respuestas brindadas son cortas. El profesor pregunta por la segunda condición y un estudiante responde como se muestra a continuación.

Profesor: Segunda condición, segunda condición. ¿Cuál es la segunda condición?

Santiago: Que los ángulos sean iguales.

La pregunta del profesor es directa y la respuesta dada por el estudiante es corta, por tanto, se clasifica en N1 en el nivel de discurso, observamos que la participación de Santiago se establece como *transmisor* dado que repite tal cual la respuesta de Juana cuando el profesor pregunta por la primera condición. Ahora el profesor quiere que los estudiantes especifiquen qué ángulos son los congruentes se dan las siguientes interacciones.

Profesor: Que los ángulos sean iguales ¿sí? Ahora, ¿cuáles ángulos? Juan José llamó lados homólogos (... ..) (Da la palabra a Miguel, quien está pidiéndola) Miguel... ¿cuáles ángulos?

Miguel: Donde está F, donde está G y donde está E.

La pregunta planteada por el profesor es directa y la respuesta de Miguel es corta y concreta, por lo cual se clasifica la expresión como N1 en el nivel de discurso. Enseguida una estudiante pide la palabra:

Sofía: Gómez (Miguel) los llamó mal, porque él dice que se están usando los lados homólogos para mirar si las figuras son semejantes, pero, ahí dice que los lados homólogos son de figuras semejantes, entonces...

En la intervención de Sofía se evidencia esquema de argumentación CE-A, la estudiante afirma que su compañero empleó de manera incorrecta el término “lados homólogos” porque este solo se usa cuando ya se tiene la seguridad de que la figuras son semejantes, sustentado en las ideas que han venido exponiendo sus compañeros. La participación de esta estudiante se cataloga como *autora*, dado es auténtica tanto en sintaxis como en semántica. A partir de la invención de Sofía el profesor hace una pregunta y se obtiene las siguientes contribuciones:

Profesor: Bueno, miren que aquí hay una cosa importante que Sofía está diciendo. No le han puesto atención a lo que está diciendo Sofía. Sofía está diciendo ¿cuándo yo puedo llamar a dos lados que sean homólogos?

Santiago: Cuando las razones entre los lados

Profesor: Si las figuras no son semejantes, ¿cómo los llamamos?

Varios: Lados, lados.

El profesor retoma la idea de Sofía para que los demás estudiantes opinen al respecto, realiza preguntas directas y se obtiene respuestas sucintas, por lo que se clasifican como N1 en el nivel de discurso. El profesor les aclara a los estudiantes que se empleará la palabra correspondiente para nombrar los lados de las figuras cuando uno no tiene la seguridad si son semejantes, da un ejemplo de lo que significa corresponder y realiza algunas preguntas para verificar si comprendió el nuevo término, como se observa a continuación:

Profesor: (...) al lado AB, ¿cuál es el lado que le corresponde en este triángulo EFG?

Santiago: EF

Profesor: El lado que le corresponde. Ahora, al segmento AC, ¿cuál es el segmento que le corresponde en el triángulo

Estudiante: EG

La primera participación del profesor se clasifica como *autora* y la segunda *portavoz*, dado que tiene la misma intención que la primera intervención, obtener el segmento correspondiente al mencionado por él. También se establecen estas expresiones en el nivel N0 del discurso, dado que las preguntas son directas y las respuestas concretas. Posteriormente el profesor propone un nuevo ejemplo para seguir explicando la diferencia entre un segmento homólogo y un correspondiente, se dan las siguientes intervenciones.

Profesor: Supongan que este lado mide tres y este lado mide cinco; y este lado mide seis y este lado mide ocho. (... ..) Sofía, la pregunta es: ¿yo puedo hablar ahí de lados correspondientes? (... ..) Porque tú dijiste: es que no podemos hablar de lados homólogos. Dijo: No hablamos de lados homólogos si las figuras no son semejantes, ¿cómo los vamos a llamar homólogos? Pero, entonces acá (señala en el tablero los triángulos con las medidas que acaba de poner), ¿podemos hablar de lados correspondientes?

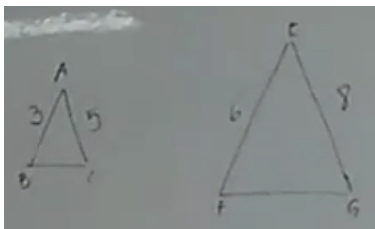


Imagen 93. Ejemplo propuesto por el profesor

Diego: Yo creería que, entre B y A, y F y E se podrían llamar lados homólogos, pero entre E y G, y A y C se llamarían lados correspondientes.

La expresión del profesor se clasifica como N2 en el nivel de discurso, puesto que retoma las ideas que se han presentado acerca de los lados homólogos y correspondientes y propone un nuevo ejemplo para seguir la discusión, plantea una pregunta abierta y la respuesta dada por

Diego proporciona información adicional. En seguida el profesor replantea su pregunta y se da el siguiente dialogo:

Profesor: ¿Entre AB y FE no los podemos llamar lados correspondientes?

Diego: No sé, creo.

Profesor: Es decir, ¿a este segmento (señala el lado de medida 3) le corresponde este (señala el lado de medida 6)?

Sofía: Sí, porque es la misma figura (no se entiende, podría ser: con distinto tamaño)

Las dos preguntas del profesor son directas y tiene la misma intención cuestionar a los estudiantes si  $\overline{AB}$  y  $\overline{FE}$  reciben el nombre de segmentos correspondientes, pero su sintaxis cambio, por tanto, la primera participación se cataloga como *autora* y la segunda como *portavoz*. Observamos que la primera expresión del profesor se clasifica como N1 en el nivel de discurso dado que la respuesta de Diego es corta y la segunda se establece en el nivel N2, dado que Sofía responde voluntariamente y evoca información adicional, en este caso hace alusión el tamaño. En la intervención de Sofía se observa un esquema de argumentación E-P, la estudiante afirma que los segmentos con longitud 3 y 6 reciben el nombre de segmentos correspondiente dado que percibe que las dos figuras tienen la misma forma. El profesor responde a la idea de Sofía con un “ok” y realiza otra pregunta.

Profesor: ¿A este lado (señala el lado de medida 5) le puede corresponder este (señala el lado de medida 8)?

Juana: Eeee... pues si son paralelas. Sí.

En este caso la pregunta del profesor es directa, pero Juana en su respuesta evoca información adicional. En este caso menciona rectas paralelas, en consecuencias se clasifica como N2 en el nivel de discurso. La participación del profesor se establece como *portavoz*, y la de Juana como *autor*, dado que es auténtica en semántica y sintaxis. El profesor pregunta:

Profesor: (...) ¿Qué significará eso de corresponder?

Juana: Que sea un lado parecido o pues...

La expresión del profesor se clasifica como N1+ en el nivel de discurso, dado que la pregunta es abierta y la respuesta de Juana es corta. Un estudiante comenta que para que dos segmentos sean correspondientes deben tener medidas diferentes el profesor retoma esta idea pregunta:

Profesor: ¿Tiene que medir diferente para que sean correspondientes?

Santiago: Profe, yo diría que los lados correspondientes son el mismo lado de la figura... original, pero en la figura transformada. (... ..) O sea, él mide... digamos hay un lado en la figura original, que es AC, ese mismo lado en la figura modificada (...) Digamos en una figura, en la figura original, digamos, AC, el mismo lado, pero en la figura modificada, que en este caso sería EG, sería el lado correspondiente.

Aunque la pregunta del profesor es directa la respuesta dada por Santiago es voluntaria, amplia y proporciona información adicional, por lo cual se clasifica esta expresión como N2 en el nivel de discurso.

### ***Episodio 7***



El profesor solicita a los estudiantes buscar en un diccionario o en internet el significado de la palabra correspondiente, con el fin de establecer la diferencia entre un segmento correspondiente y un homólogo, los estudiantes dan ideas y ejemplos de lo que puede significar la palabra correspondencia. Luego de ello un estudiante interviene retomando el problema de episodio anterior, en decir que segmentos de los triángulos son semejantes, a partir de ello se dan las siguientes intervenciones:

Miguel: Para mí, el tres y el seis sí son correspondientes, pero el cinco y el ocho, no. ¿Por qué?

Carol: Porque no es el doble.

Miguel: Es una idea que se me ocurrió, pero no sé si es correcta. Para mí correspondientes es que tengan como una relación como que el seis es múltiplo de tres. Entonces, ahí podría haber una relación... el doble.

La primera expresión de Miguel se clasifica como N2 en el nivel del discurso, dado que la pregunta planteada es abierta, retoma las ideas que se han venido discutiendo a lo largo de la clase y las respuestas dadas por Carol y el mismo Miguel son voluntarias y evocan información adicional. Se evidencia esquema de argumentación A-A y E-I en las intervenciones de Carol y Miguel respectivamente. Por un lado, Carol afirma que los segmentos con longitudes 3 y 5 no son correspondientes porque no se presenta en sus longitudes la relación del doble, apoyándose en la definición primitiva de correspondiente establecida por el docente “se corresponde con algo”; por otro lado, Miguel a partir de los ejemplos presentados en clase generaliza que los segmentos correspondientes deben tener una relación entre sus longitudes, como ser múltiplos. Estas participaciones se clasifican como *autor* dado que son originales en sintaxis y semántica. A partir de la idea de Miguel el profesor realiza la siguiente pregunta:

Profesor: ¿Tiene que ser múltiplo?

Miguel: Algo así, pero también podría ser algo así como que tengan una relación entre número y...

La pregunta del profesor se cataloga como N2 en el nivel de discurso, aunque la pregunta del profesor es directa la respuesta de Miguel es voluntaria y proporciona nueva información, en este caso que la relación se establece entre las longitudes de los segmentos correspondientes va más allá del ser múltiplo, sin embargo, esta idea ya la había mencionado anteriormente de manera distinta, en consecuencia, la participación de Miguel se clasifica como *portavoz*. Posteriormente el profesor les pregunta a los estudiantes si ya consultaron el significado de correspondiente, en vista de que los estudiantes no proporcionan información decide leer una definición del diccionario, como se muestra a continuación:

Profesor: Yo voy a leer el siguiente. Escuchen, a ver, si eso da alguna idea de algo. Dice: estar en relación una cosa con otra. (...) Estar en relación una cosa con otra.

La participación del profesor se cataloga como *transmisor* dado que lee la definición del diccionario, es decir que la semántica y sintaxis de la expresión no son originales del profesor. Enseguida de presentar la definición el profesor les comunica a los estudiantes que corresponder puede ser la relación que se da entre el número de lista con un estudiante, siguiendo esta idea el profesor pregunta ¿Qué segmento le corresponde al  $\overline{AB}$ ?, el mismo profesor se responde:

Profesor: Entonces, la pregunta acá es: Al lado AB, ¿qué lado le tocó de allá? (...) EF porque está al mismo lado.

Se evidencia en la expresión del profesor esquema de argumentación E-P, dado que afirma que  $\overline{AB}$  y  $\overline{EF}$  son correspondientes apoyándose en su percepción sustentada que los dos segmentos están al mismo lado. Con la finalidad de corroborar si los estudiantes están comprendiendo el profesor realiza la siguiente pregunta:

Profesor: Al lado AC, ¿cuál le tocó de allá?

Varios: El EG.

La participación del profesor se establece como *portavoz*, dado que plantea una pregunta con la misma intención que la anterior, conocer que segmento del segundo triángulo le corresponde a un segmento dado del primero, pero su sintaxis es diferente. La expresión del profesor se clasifica como N1 en el nivel de discurso dado que la pregunta es directa y la respuesta dada por los estudiantes es corta. El profesor realiza una pregunta a modo de concluir la discusión se dan las siguientes intervenciones:

Profesor: ¿En cuál de los dos casos podemos utilizar “correspondientes”? ¿Cuándo tenemos las dos figuras que son semejantes o cuando no lo son?

Miguel: Yo creo que en ambos porque puede que tengan una relación de que están como en el mismo lado... No sé cómo explicar.

Santiago: Profe, yo diría que sí porque... digamos... como acá dice en la guía, voy a leer el parrafito, dice: (leyendo) “dos figuras son trapecios semejantes ya que los ángulos interiores correspondientes tienen igual medida y las razones entre sus lados homólogos son iguales”. Entonces, yo diría que se puede decir que algo es correspondiente, eee... que dos lados son correspondientes y al mismo tiempo ser homólogos o que... digamos, en una figura que no sea semejante que sean correspondientes, pero no homólogos

Se clasifica como N2 en el nivel de discurso la expresión del profesor, en vista que la pregunta realiza es abierta y las repuestas de Miguel y Santiago son voluntarias, amplias y sugieren información adicional. Se identifican esquemas de argumentaciones en las respuestas dadas por los estudiantes: Miguel afirma que se puede emplear el término de segmentos correspondientes para los dos casos, cuando las figuras son y no son semejantes, dado que se puede establecer la relación “estar al mismo lado” y eso sustentado en la definición que se ha establecido del término “correspondiente”, en consecuencia presenta esquema de argumentación A-A; por otro lado, Santiago afirma que cuando se tienen dos figuras semejantes los segmentos pueden ser al mismo tiempo homólogos y correspondiente apoyándose en la autoridad de la guía, identificando esquema de argumentación CE-A. El profesor realiza un resumen de las ideas que se han desarrollado entorno a los segmentos correspondientes y homólogos, como se observa a continuación:

Profesor: Entonces... oigan, teníamos dos condiciones para la semejanza: la primera, hablamos de las razones entre los lados, iguales, –que fue la pregunta que hizo María Alejandra de qué significa ese asunto de las razones, que también lo dijo... lo preguntó Valeria, qué significa ese asunto de las razones entre los lados, y Juan José ayudó a aclararnos que las razones entre los lados se identifican a partir de las divisiones entre los lados homólogos o los lados correspondientes ¿cierto?

La participación de profesor se cataloga como *portavoz*, dado que retoma las contribuciones de los estudiantes a lo largo de clase; en esta expresión se evidencia esquema de argumentación E-F, puse se hace un recuento de lo ocurrido en la clase a modo de explicación para convencer al grupo de estudiantes de la veracidad de las ideas de sus compañeros. Luego de esta intervención del profesor Sofía lee una definición de semejanza que encontró en internet, se genera una conversación entre Sofía y el profesor acerca de lo leído, y esto da paso para que el profesor proponga un nuevo ejemplo para todo el grupo de estudiantes, dibuja en el tablero dos cuadrados de lado cuatro y el otro de lado cinco. Se generan las siguientes interacciones:

Profesor: La pregunta es: ¿esos dos cuadrados serán semejantes?

Juana: Síii.

Profesor: ¿Por qué sí?

Juana: Porque simplemente le tienes que sumar uno a cada lado. (... ..) Y eso es una relación ¿no?

La primera pregunta del profesor es directa y la respuesta obtenida es monosilábica, por tanto, se clasifica como N1 en el nivel del discurso. La segunda pregunta es abierta, tiene la intención de profundizar en la respuesta dada por Juana y en efecto la respuesta dada por la estudiante proporciona información adicional, además se presenta esquema de argumentación A-A, se afirma que los cuadrados son semejantes porque se presenta una relación entre las longitudes de sus aristas. Juana duda si la suma es una relación, el profesor hace una pregunta para orientarla.

Profesor: Pero ¿tú te acuerdas cuáles fueron las condiciones que dijo Juan José de semejanza? ¿Cuáles son?

Juana: Tienen que tener ángulos iguales y

Profesor: Y si son dos cuadrados ¿tienen ángulos iguales?

Varios: Síiii...

Ambas intervenciones el profesor se clasifican como N1 en el nivel de discurso, dado que el profesor a partir de la incertidumbre que presenta Juana el profesor retoma sus ideas y plantea preguntas directas y las respuestas a ambas preguntas son cortas. Posteriormente el profesor les solicita a los estudiantes mencionar la segunda condición que se debe cumplir para que dos figuras semejantes, un estudiante le responde que las razones entre las longitudes de los lados correspondiente son iguales, este tipo de pregunta también se establece como N1 en el nivel de discurso, en seguida el profesor interviene:

Profesor: Alguien que entienda qué es una razón. ¿Qué es una razón?

Juan David: Mira, el primer cuadrado sí tiene los ángulos iguales, pero, y... pero, el otro también... es como la de... tocaría hallar una escala que es la relación entre el primer cuadrado y el segundo cuadrado

En este caso la expresión del profesor se cataloga como N2, dado que la pregunta es abierta y la respuesta de Juan David proporciona información adicional, en este caso el estudiante habla sobre las escalas. Para finalizar el profesor les menciona a los estudiantes que hace

ocho días se había hecho alusión a 4 palabras (proporción, tamaño, escala, homotecia) y les solicita que para la próxima clase consulten el significado de estos términos.

#### CLASE: 18 DE MAYO DE 2018

El profesor plantea cinco preguntas para que los estudiantes respondan individualmente en sus cuadernos, apoyados en las consultas realizadas previamente, apuntes y la guía de trabajo sobre semejanza. Las preguntas propuestas fueron:

1. Establezca las características o aspectos necesarios para asegurar que dos figuras son semejantes.
2. ¿Qué entiende por lados correspondientes entre polígonos?
3. ¿Qué entiende por razones entre longitudes de lados correspondientes?
4. ¿Qué entiende por figuras a escala?
5. Realice tres ejemplos de figuras a escala y justifique porque lo son.

El profesor les dio 20 minutos a los estudiantes para responder estas preguntas, posteriormente le profesor organiza a los estudiantes en grupos de seis con la finalidad de que socialicen sus respuestas y llegaran a un acuerdo de cuál de ellas era la más adecuada.

#### *Episodio 1*

El profesor da las indicaciones sobre cómo será la temática para la clase, les explica que en una primera parte deberán responder de manera individual y luego se conformarán grupos de seis estudiantes, donde se socializarán las respuestas y establecerán la que consideren más completa. En este episodio también se presenta la conversación entre una estudiante y el profesor, acerca de una duda presentada por ella.

El profesor escribe las preguntas en el tablero y les indica a los estudiantes el modo de trabajo de la clase para este día. Sofía, una estudiante, se acerca al profesor y le pregunta sobre el segundo problema de la guía de semejanza; Sofía enuncia el problema: “Los lados de un triángulo miden 36 m, 42 m. y 54 m, respectivamente. Si en un triángulo semejante a este, el lado homólogo del primero mide 24 m., hallar los otros dos lados de este triángulo”, Sofía menciona que dividió las longitudes de los lados homólogos para encontrar la razón y luego intentó dividir nuevamente para determinar la longitud de los segmentos faltantes, pero como tal no sabe cómo con ese resultado hallar la longitud de los segmentos faltantes. Ella le pregunta al profesor:

Sofía: ¿Uno como encuentra ese número?

Sofía le menciona al profesor que “ningún número me da eso”, el profesor le aclara a la estudiante que el número tiene que dar exacto, y procede a preguntarle:

Profesor: ¿Qué significa que eso dé exacto?

Sofía: Pues que tienen la razón igual.

Profesor: Es que la razón es igual. Venga para acá.

La expresión del profesor se clasifica como N1 en el nivel de discurso, dado que la pregunta es directa y la respuesta dada por la estudiante concreta. Tanto la primera intervención de Sofía y del profesor se cataloga como *autor*, dado que es original en su semántica y sintaxis, la última participación del profesor se establece como *transmisor*, pues repite tal cual la intervención de Sofía. El profesor hace la figura del triángulo mencionado en la guía y pregunta las longitudes de los segmentos a Sofía.

Profesor: Un triángulo cuál es. Este mide treinta y seis, el otro 42 y ¿el otro mide cuánto?



Imagen 94. Representación del profesor de un triángulo

Sofía: Cincuenta y cuatro.

Como se observa, la primera pregunta realizada por Sofía dio paso a una discusión sobre el procedimiento que se debe emplear para determinar las longitudes de los segmentos faltantes del segundo triángulo, por tanto, la expresión “¿Uno como encuentra ese número?” presenta nivel de discurso N2. Por otro lado, el profesor le pregunta a Sofía por la longitud del segmento del triángulo y ella responde el valor concreto, en consecuencia, la expresión del profesor se clasifica como N0 en el nivel de discurso, es una pregunta con objetivo de validar un dato del problema. El profesor procede a dibujar el segundo triángulo mencionado en el problema, como se muestra en la Imagen 95, el profesor pregunta:

Profesor: Este mide veinticuatro. (Dibuja otro triángulo al lado, intentando que se vean de la misma forma.) Y ¿por qué es este? ¿Por qué este lado y no esté? (Apunta sucesivamente, a los otros dos lados del segundo triángulo.) ¿Por qué a este lado le ponemos veinticuatro y no a este? ¿Qué dice ahí? ¿Qué dice el enunciado?

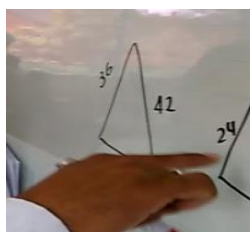


Imagen 95. Representación del triángulo propuesto en el enunciado

Sofía: Si un triángulo es semejante a este lado, el lado homólogo del primero

Se clasifica la expresión del profesor como N1 en el nivel de discurso, teniendo en cuenta que la pregunta es directa, le solicita a la estudiante comentar que dice en el enunciado y la respuesta dada por Sofía es concreta. La participación de Sofía se cataloga como *transmisor*,

dado que menciona tal cual el enunciado de la guía. En vista que Sofía hace alusión al lado homólogo el profesor pregunta:

Profesor: Y, ¿qué es el lado homólogo? ¿Qué es el lado homólogo?

Sofía: Pues el lado que le corresponde. (Apunta a el lado que mide 36 en el primer triángulo y al lado que mide 24 en el segundo.)

En este caso observamos que ambas preguntas del profesor son abiertas y la respuesta dada por Sofía evoca información adicional, en este caso el estudiante menciona “el lado que le corresponde”, por lo cual se clasifica esta expresión como N2 en el nivel de discurso. Para seguir indagando el profesor pregunta:

Profesor: Ah bueno. Entonces, ¿por qué este no o este o este?

Sofía: No.

El nivel de discurso que se presenta en la pregunta del profesor es N1+, teniendo en cuenta que la pregunta es abierta pero la respuesta de la estudiante es monosilábica. El profesor quiere que Sofía justifique por qué escoge ese lado y no otro. El profesor le hace preguntas con el fin de orientarla como se muestra:

Profesor: Es que dice el lado homólogo de ¿quién?

Sofía: Del primero.

Profesor: Y, ¿quién es el primero?

Sofía: Pues depende cómo lo mira.

Las dos intervenciones del profesor se establecen como N1 en el nivel de discurso, visto que ambas preguntas son directas y las respuestas dadas por las estudiantes son concretas. El profesor le dice a Sofía que revise la información de la guía, para que se percate cual es la longitud del primer lado homólogo, Sofía responde de “treinta y seis”, como tal el profesor le planteó una pregunta a Sofía, pero la sugerencia permite dar una respuesta concreta y corta, por tanto, se clasifica como N1 en el nivel del discurso esta expresión. El profesor retoma la idea que se ha venido presentado y pregunta:

Profesor: O sea, los lados miden treinta y seis, cuarenta y dos y cincuenta y cuatro. ¿Quién es el primero?

Sofía: Treinta y seis.

Evidenciamos que la pregunta realizada por el profesor es directa, tiene el fin de validar la información del problema que se ha venido abordando y la respuesta dada por la estudiante es concreta, por esta razón se clasifica esta expresión en N0 en el nivel del discurso. La participación de Sofía y el profesor se determina como *transmisor*, dado que el profesor ya había mencionado anteriormente las longitudes de los segmentos del triángulo y anteriormente le había preguntado a Sofía la medida del primer segmento y por su parte ella había mencionado que esta longitud es 36. El profesor le solicita a la estudiante que indique cuál es el lado homólogo al segmento que mide 36, como se muestra.

Profesor: ¿Cuál es el lado homólogo a este lado que mide treinta y seis?

Sofía: Este (recorre el segmento del primer triángulo que sí le corresponde con su esfero).

En vista de lo anterior la expresión del profesor se clasifica N1 en el nivel del discurso, dado que la pregunta es directa y la respuesta dada por la estudiante es concreta. El profesor vuelve a preguntar.

Profesor: Eso. Y ¿yo por qué sé que es este y no es este?

Sofía: Porque este lado (recorre con el esfero el lado que mide treinta y seis en el primer triángulo) le corresponde a este lado (recorre el segmento que mide veinticuatro en el segundo triángulo).

La participación del profesor se clasifica como *transmisor*, dado que esta pregunta ya la había planteado previamente, es decir que su sintaxis y semántica en este caso ya no es auténtica. La expresión también se cataloga como N1+ en el nivel de discurso, en vista que la pregunta es abierta y la respuesta dada se concreta. El profesor quiere que Sofía identifique los lados correspondientes a partir de propiedades geométricas y no de posición, por ello decide dibujar un triángulo que parezca semejante al primero.

Profesor: ¿Qué pasa si le dibujo la figura, dibujo esta figura en una dirección distinta? (Encuentra difícil representarla en otra posición y que mantenga la misma forma.) Supongamos que es una manera de... pero si esta figura la dibujo como (dibuja otro triángulo).

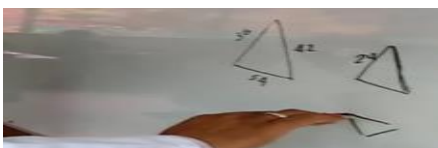


Imagen 1. Ejemplo propuesto

Sofía: También va a ser ese.

En la expresión del profesor analizamos que la pregunta planteada es abierta, tiene la intención de profundizar en la idea de Sofía, la respuesta dada por este estudiante es corta, por tanto, es N1+ en el nivel del discurso. El profesor realiza una nueva pregunta se dan las siguientes participaciones:

Profesor: ¿Yo cómo sé cuál es el lado homólogo?

Sofía: Porque esta línea está torcida hacia allá (muestra el lado izquierdo).

Evidenciamos en la intervención de Sofía esquema de argumentación E-P dado que afirma cual segmento homologó a uno dado sustento a partir de la figura que dibujada en el tablero. La expresión del profesor se clasifica como N2, dado que la pregunta es abierta y la respuesta dada es amplia y proporciona información adicional. El profesor quiere que la respuesta de Sofía sea más precisa por eso sigue realizando preguntas directas a las cuales las estudiantes dan respuestas cortas por tanto se clasifican como N0 en el nivel de discurso. En vista de que no funcionó la ilustración del tercer triángulo el profesor decide dibujar dos pentágonos irregulares, y en posiciones diferentes, selecciona un segmento y le pregunta a la estudiante cual es el segmento homólogo a ese, como se observa a continuación.

Profesor: Quedó un poquito (no se entiende) la cosa. Y yo digo que estas dos figuras son semejantes. Y yo tengo este lado, ¿sí? Este digamos segmento AB. ¿Yo cómo sé cuál es el lado homólogo a este?

Sofía: Este (apunta a un lado de la primera figura).

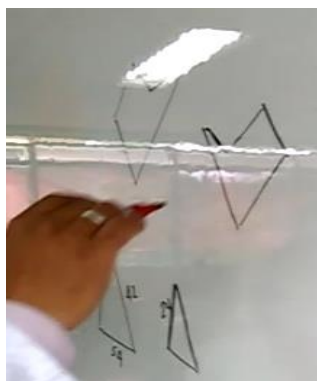


Imagen 96. Pentágonos irregulares

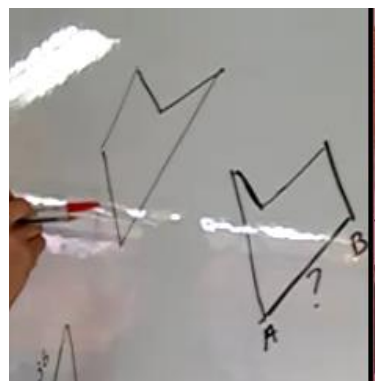


Imagen 97. Respuesta de la estudiante

La pregunta de profesor es directa y la respuesta de la estudiante concreta, en consecuencia, se clasifica la expresión del profesor como N1 en el nivel del discurso. Tanto la participación del profesor y de la estudiante se definen como *autoras*. El profesor replantea la pregunta con el fin de profundizar más en la idea que se está desarrollando, se presenta las siguientes intervenciones:

Profesor: ¿Este sería el lado homólogo a este? (Recorre con el marcador el lado que Sofía indicó en la primera figura y el lado AB de la segunda.) ¿Será?

Sofía: Sí. Porque mire. Esta es una punta (indica el vértice del ángulo muy agudo de la segunda figura). Y aquí podemos sacar la punta (señala la misma situación en la primera figura). (Imagen 98) Y esta es la línea (apunta al lado más corto adyacente al lado corto que determina al ángulo agudo en la primera figura) (Imagen 99) que se conecta como tal para dar esta parte de la punta en la figura (apunta al segmento más corto, en la otra figura, que determina ese ángulo agudo). (Imagen 100).

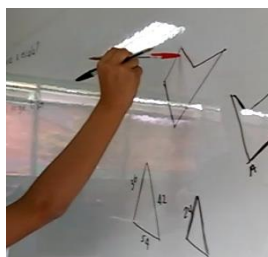


Imagen 98. Respuesta de Sofía para el primer lado



Imagen 99. Respuesta de Sofía para el segundo lado



Imagen 100. Respuesta de Sofía para el tercer lado

Analizamos en la expresión de Sofía un esquema de argumentación E-P, puesto que para argumentar cuál es el lado homólogo en la nueva figura, la estudiante se apoya en la forma del dibujo del tablero, además repasa cada segmento para convencer al profesor por qué ese segmento es homólogo. Así la respuesta dada a la pregunta del profesor evoca información adicional y en consecuencia se clasifica la expresión del profesor como N2 en el nivel del discurso, además su participación se establece como *portavoz* dado que expresa de manera una pregunta que ya había planteado. Luego, el profesor le solicita identificar cada par de lados correspondientes de las figuras.



Profesor: ¿Cuál sería el lado homólogo a este? (Apunta al lado corto adyacente al que acaban de señalar, en la primera figura.)



Imagen 101. Ejercicio propuesto por el profesor para identificar los segmentos homólogos de una figura.

Sofía: (Apunta al lado correspondiente en la segunda figura.)



Imagen 102. Respuesta de la estudiante.

La pregunta realizada por profesor es directa y la respuesta dada por Sofía es concreta, por tanto, se clasifica como N1 en el nivel del discurso. El profesor hace preguntas clasificadas en este nivel del discurso hasta que la estudiante identifica todos los pares de segmentos correspondientes. Para concretar las ideas de lo que se ha venido haciendo el profesor pregunta:

Bien, podría ser. Entonces, si tú ves las figuras, ¿qué es lo que le hace reconocer a uno el lado homólogo de manera visual?

En la expresión del profesor observamos que la pregunta es abierta y tiene la finalidad de que Sofía a partir de identificar cada par de segmentos correspondientes consolide alguna generalidad, pero como tal la estudiante no da alguna respuesta, aun así, se clasifica esta expresión como N1+ en el nivel del discurso. Retomando la inquietud de Sofía ante el problema el profesor le vuelve a preguntar qué procedimiento había realizado ella.

Profesor: Entonces, ¿qué fue lo que hiciste con el treinta y seis y con el veinticuatro?

Sofía: Dividí este [el 36] por este [el 24.] Primero puse esto: A, B, C (indica los tres vértices del primer triángulo.) A prima, B prima, C prima (indica los vértices correspondientes en el segundo triángulo). Entonces divide AC entre A prima C prima y eso daba uno punto cinco (Imagen 103).

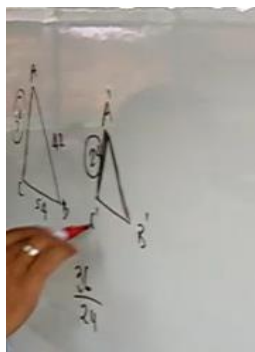


Imagen 103. Verificación del procedimiento

En la intervención del profesor se analiza nivel en el discurso N1, puesto que la pregunta planteada es directa y la respuesta de Sofía, aunque es amplia menciona el procedimiento que desde el principio le comentó al profesor, así que también su participación se clasifica como *portavoz* de sus mismas ideas. El profesor escribe los resultados en el tablero y sigue cuestionando a Sofía del procedimiento que realizó, como se observa a continuación:

Profesor: ¿Cuarenta y dos? Entonces, tú lo que haces es cuarenta y dos ¿lo divides entre quién? (Escribe en el tablero 42 y la raya de división)

Sofía: Un número que necesito, (con el esfero, en el denominador, hace la forma de un signo de interrogación.) (..) Para que me dé uno punto cinco. Pero ninguno me daba. El más cerca que me daba era bueno no me acuerdo.

Observamos que la pregunta del profesor es directa, al igual que la anterior, y tiene a intención de averiguar el procedimiento ejecutado por la estudiante, ella responde ampliamente, y vuelve a mencionar su dificultad de como con la razón puede terminar las medidas de los demás segmentos. El profesor pregunta:

Profesor: ¿Tú te acuerdas cuándo resolvimos ecuaciones el año pasado?

Sofía: Sí

Profesor: ¿Qué hacemos para despejar esto?

Sofía: Pasa al otro lado a acá.

Las preguntas planteadas por el profesor son directas y las respuestas dadas por la estudiante son cortas, así se clasifican estas expresiones como N0 en el nivel del discurso. El profesor realiza 5 preguntas clasificadas N0, con el fin orientar a la estudiante a resolver la ecuación.

### ***Episodio 2***

Una estudiante se acerca al profesor y le pregunta que son los lados correspondientes, el profesor le sugiere que se apoye en la consulta realizada, la estudiante afirma que él sabe que es correspondiente pero no sabe que es correspondiente entre polígonos, el profesor para orientarlo pregunta:

Profesor: Entonces cambie por entre figuras. ¿Qué es un polígono?

Fernanda: Yo sé que es un polígono, pero no sé qué es correspondiente. O sea que yo puedo decir el polígono es tal cosa.

Observamos que la pregunta realizada por el profesor es abierta, también que la respuesta dada por la estudiante no atiende a la pregunta del profesor, por tal se considera como una respuesta corta, así esta expresión se clasifica como N1+ en el nivel del discurso. El profesor decide cambiar la pregunta:

Profesor: La pregunta no es qué es polígono. La pregunta es ¿qué entiende por lados correspondientes entre polígonos.

Fernanda: ¿Ángulos?

La pregunta del profesor al igual que la anterior es abierta y también la respuesta brinda por Fernanda es corta y no es acorde a lo que se le estaba preguntando, en consecuencia, se cataloga la expresión del profesor como N1+ en el nivel de discurso. En cuanto a la participación del profesor se determina como *portavoz*, debido a que repite la pregunta de la actividad haciendo mínimas modificaciones en la sintaxis. La respuesta dada por la estudiante da paso a que el profesor haga la siguiente pregunta:

Profesor: Lados. ¿El lado es un ángulo?

Fernanda: No.

En este caso la pregunta es directa y la respuesta dada por Fernanda es monosilábica, por consiguiente, la expresión del profesor se cataloga como N0, en el nivel del discurso. La participación se establece como *portavoz*, puesto que retoma la respuesta dada por Fernanda anteriormente. El profesor le sugiere a la estudiante que intente explicar mediante un dibujo si se le dificulta escribir. Luego de ello el profesor se acerca a un estudiante y le pregunta si ya culminó la actividad, el estudiante aprovecha para comentarle que no ha podido responder el cuarto ítem: ¿Qué entiende por figuras a escala?, el profesor como tal no le da respuesta, si no que le pregunta:

Profesor: Pues lo que usted entiende. ¿Qué es lo que dice la pregunta?

Miguel: ¿Qué entiende?

La pregunta planteada por el profesor es directa y la respuesta que da Miguel es concreta, así la expresión se clasifica como N0 en el nivel del discurso; además la participación se establece como *transmisor*, dado que empieza a enunciar tal cual la pregunta de la actividad, así que la sintaxis y semántica no son propias de Miguel. El profesor interviene y se dan las siguientes intervenciones entre dos estudiantes y el profesor.

Profesor: Escriba lo que usted entiende. Yo entiendo por figuras a escala...

Miguel: Pero es que yo entiendo algo, pero no estoy seguro si está bien.

Juanita: Por ejemplo, si esta figura es chiquita, la otra.

La expresión del profesor complementa la pregunta formulada con anterioridad. Los estudiantes responden voluntariamente y Juan evoca información adicional, en este caso hace alusión a “*figura chiquita*”, por tanto, la intervención del profesor se clasifica como N2 en el

nivel del discurso. Miguel hace una pregunta ante la respuesta que da Juanita, se dan las siguientes participaciones:

Miguel: ¿La otra tiene que ser igual de chiquita?

Juanita: No. La otra puede ser más grande, pero tiene que.

Miguel: Pero tiene que haber una regla que me dé el otro triángulo. Ah. Okey.

Juanita: Exacto. Y esa es una figura a escala.

En este caso el que presenta nivel de discurso es Miguel y este se clasifica como N, debido a que hace una respuesta directa y la respuesta da por la estudiante es concreta y a partir de la charla que sostiene Miguel resuelve sus dudas. El profesor les solicita a los estudiantes organizarse en grupos de seis para realizar una socialización de las respuestas y establecer una que crean que es la más pertinente.

### ***Episodio 3***

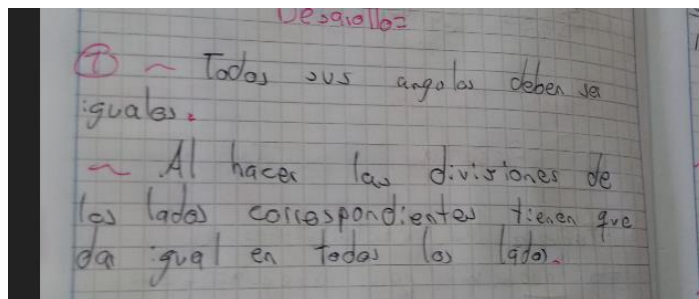
Se organizan los grupos para empezar la socialización, una de las investigadoras se acerca a uno de los grupos para hacer un seguimiento de su trabajo, en este episodio se observa la discusión entre los integrantes del grupo ante los primeros ítems de la actividad.

6. Establezca las características o aspectos necesarios para asegurar que dos figuras son semejantes.
7. ¿Qué entiende por lados correspondientes entre polígonos?

Este grupo estaba conformado por Daniela, Sofía, Valeria, Diego, Juan Pablo y Miguel. La observadora le pregunta el nombre a cada uno de los integrantes del grupo, luego de ello se da paso a la socialización mediante la pregunta que realiza Sofía.

Sofía: ¿Qué tienes tú? ¿Tú que respondiste a la primera pregunta?

Miguel: Al hacer... Que todos sus ángulos deben ser iguales y que al hacer las divisiones entre los lados correspondientes tienen que dar igual en todos sus lados. Y a eso se le llama razón.



*Imagen 104. Respuesta de Miguel para el primer ítem de la actividad*

Sofía: Pues es que eso está igual, o sea es que esa pregunta estaba en la guía. (Mira lo que ha escrito.) Sí, porque tienen ángulos correspondientes son iguales

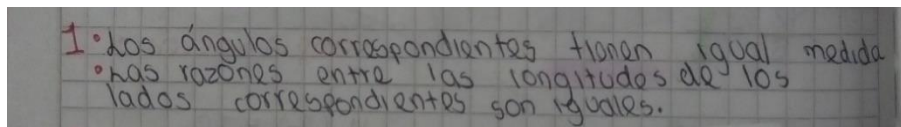


Imagen 105. Respuesta de Sofía para el primer ítem de la actividad

Evidenciamos que la expresión de Sofía presenta nivel de discurso N2, teniendo en cuenta que la pregunta planteada por Sofía es abierta y las respuestas dadas por Miguel y Sofía son voluntarias, amplias y proveen información adicional como se muestra en las imágenes 64 y 65. La participación de Sofía se determina como *transmisor* dado que pone tal cual las condiciones que se presentaba en la guía para que dos figuras sean semejantes, es decir que la semántica y sintaxis no son propias de la estudiante; la participación de Miguel se clasifica como *autor*, es auténtica en sintaxis y semántica. En vista que se debe establecer una respuesta entre todos, Miguel pregunta:

Miguel: Entonces cópienla. O sea, ¿todos están de acuerdo con lo que dije?

Sofía: Si porque todos copiamos lo mismo, pero en diferentes palabras. (Le quita la guía a Valeria. Lee lo que está en la guía.) Los ángulos correspondientes tienen igual medida y las razones entre las longitudes de los lados correspondientes son iguales.

La intención de la pregunta de Miguel es validar si todos los integrantes están de acuerdo con la respuesta dada por Sofía, la pregunta es directa y la respuesta dada por Sofía es concreta. La participación de Sofía sigue siendo *transmisor* dado que lee tal cual las condiciones que se establecen en la guía. La observadora le pregunta a Diego si le había respondido algo diferente, como se observa continuación:

Observadora: Diego, ¿tú escribiste algo más?

Diego: No. Es lo mismo

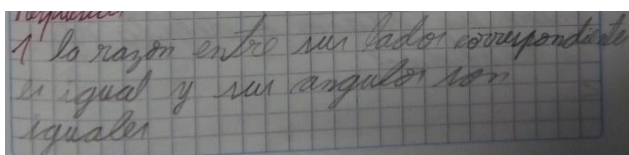


Imagen 106. Respuesta de Diego para el primer ítem de la actividad

Diego escribe: “la razón entre sus lados correspondientes es igual y sus ángulos son iguales”, por otro lado, observamos que la pregunta realizada por la observadora es directa y tiene la intención de conocer las respuestas de los demás estudiantes para el ítem uno de la actividad y además la respuesta dada por Diego es concreta, en consecuencia, la expresión de la observadora se cataloga como N1+ en el nivel de discurso. Sofía escribe en el cuaderno la respuesta que van a entregar, está contiene las condiciones que se presentan en la guía para que dos figuras sean semejantes. Miguel y Diego dan paso a la socialización al segundo ítem de la actividad.

Miguel: Vamos con la segunda pregunta.

Diego: ¿Qué entiende por lados correspondientes?

Juan Pablo: Bueno. Bueno. La segunda pregunta es: ¿qué entienden por lados correspondientes entre dos figuras?

Evidenciamos que Diego y Juan Pablo mencionan tal cual la pregunta de la segunda actividad, así la participación de estos estudiantes se clasifica como *transmisor*, a causa de que su sintaxis y semántica no son auténticas. Por otro lado, estos dos estudiantes presentan nivel de discurso N2, porque la pregunta es abierta y las respuestas dadas por los integrantes del grupo proporcionan información adicional, como se muestra a continuación.

Diego: Yo escribí que son los lados que ocupan la misma posición, pero en la otra figura.

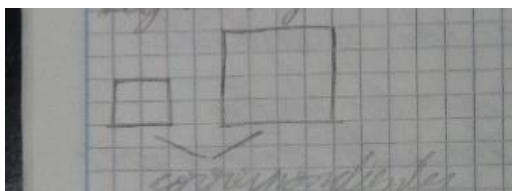


Imagen 107. Respuesta dada por Diego a la pregunta dos de la actividad

Miguel: Pues yo escribí diferente. Es que es lo mismo, pero, en otras palabras.

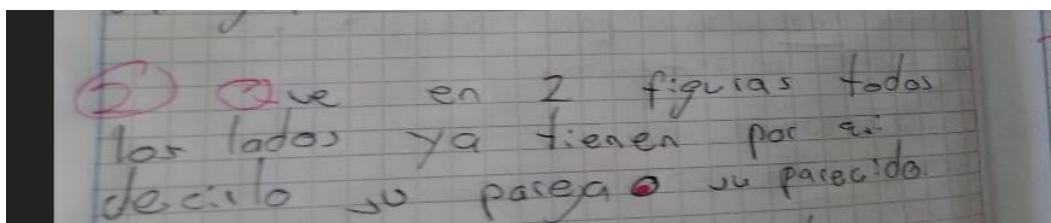


Imagen 108. Respuesta dada por Miguel a la pregunta dos de la actividad

Valeria: (Le muestra a Sofía lo que tiene escrito en el cuaderno.)

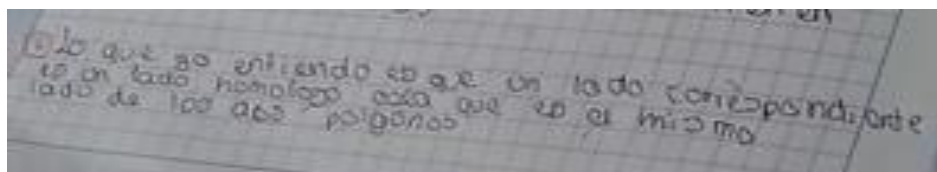


Imagen 109. Respuesta dada por Valeria a la pregunta dos de la actividad

Analizamos que Diego hace alusión que los segmentos correspondientes “ocupan la misma posición, pero en otra forma” su participación se clasifica como *autor*. Por otro lado, Miguel responde: “*Que en 2 figuras todos los lados ya tienen por así decirlo su pareja o su parecido*”, esta respuesta es original tanto en su semántica como en sus sintaxis, en consecuencia, la participación se determina como *autor*. Valeria por su parte responde “*un lado correspondiente es un lado homólogo como que es el mismo lado de dos polígonos*”, Sofía no está de acuerdo con la respuesta de Valeria, le explica que el término se segmentos homólogos solo se emplea cuando ya se asegura que la figuras son semejantes, por tanto es incorrecto decir segmentos homólogos al tratar de definir segmentos correspondientes. Finalmente, los integrantes deciden escribir la respuesta dada por Diego: “*Los lados correspondientes son los que ocupan la misma posición, pero en la otra figura*”.

#### **Episodio 4**

Se sigue haciendo seguimiento al trabajo realizado en el grupo Miguel, en este episodio se presenta la discusión entre los integrantes del grupo para establecer las respuestas de los ítems 3 y 4 de la actividad.

8. ¿Qué entiende por razones entre longitudes de lados correspondientes?
9. ¿Qué entiende por figuras a escala?

Sofía toma la palabra preguntado cual es la tercera pregunta, se dan las siguientes intervenciones.

Sofía: Solo hable una persona, ¿sí? Bueno, ¿qué dice la tres? ¿Qué entiendes por razones entre longitudes de lados correspondientes? ¿Quién empieza?

Observamos que la estudiante indica tal cual la tercera pregunta de la actividad, por tanto, su participación se determina como *transmisor*. La expresión de la estudiante se clasifica como N2 en el nivel del discurso, visto que la pregunta es abierta y tiene la finalidad de conocer las respuestas dadas por los integrantes de su grupo para decir cuál es la respuesta más “completa”. Cada una de las respuestas de los estudiantes evoca información adicional como observamos a continuación.

Velaría: Yo puse que es como la escala. O sea, la escala que uno escoge, pero para alargar la figura o achicarla

Sofía: Que las razones entre dos polígonos son iguales al realizar la división entre dos lados, los lados, perdón

Juan Pablo: Yo puse que las razones. (...) O sea, las razones es como la división o multiplicación que hace para llegar a la otra figura

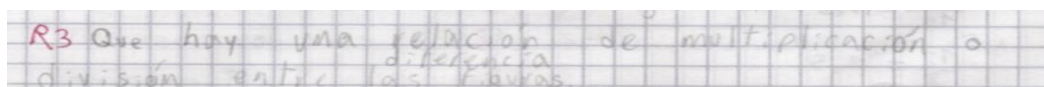


Imagen 110. Respuesta dada por Juan Pablo al ítem 3 de la actividad

Miguel: Yo puse que es la comparación de dos lados correspondientes por su cociente.

Las participaciones de estos estudiantes se determinan como autor, dado que cada uno es auténtico en semántica y sintaxis, en cada respuesta se mencionan información nueva: Valeria, hace alusión a la palabra escala, Sofía menciona algo sobre la división y Juan Pablo menciona multiplicación y división. Una estudiante cae en cuenta que esa palabra fue una de las que el docente solicitó que consultaran su definición y propone:

Sofía: O sea es poner la la... Oye, ¿esa no fue la palabra que nos pusieron a buscar? Pues entonces pongamos lo que encontró cada uno.

La pregunta de la estudiante es directa, pero a partir de ella se proporcionó información adicional a la charla, por tanto, se clasifica como N2 en el nivel del discurso. Sofía decide leer lo que encontró al hacer la consulta:

Sofía: Digamos yo tengo. Es un vínculo entre dos magnitudes que son comparadas entre sí de tal manera que ello se obtiene cuando una de las magnitudes o cantidades se divide por otra.



La participación de Sofía se clasifica como *transmisor*, pues a leer tal cual lo encontrado no es original ni la sintaxis ni la semántica. Un estudiante manifiesta que esa información se puede escribir más corta, como ellos los estaban mencionado en sus repuestas y sugiere colocar la siguiente respuesta: “Es la comparación entre dos lados correspondientes por su cociente”. Un estudiante expresa que no entiende que significa la palabra cociente, Miguel intenta explicarle como se muestra a continuación.

Miguel: Cociente, cociente. ¿Sabes qué es eso?

Miguel: El resultado de una división.

Sofía: Es el resultado de la división

Analizamos que Miguel se auto responde su pregunta, y Sofía es *transmisor a* de su idea. La expresión de Miguel presenta nivel de discurso N1+, dado que la pregunta es abierta y las respuestas dadas son concretas. Para finalizar la socialización de este ítem Sofía escribe en la hoja que se va a entregar lo siguiente: “Es el resultado de la división de los lados de dos figuras correspondientes”. Se da paso a la socialización del cuarto ítem, como se muestra a continuación:

Daniela: ¿Qué entiende por figuras a escala?

Miguel: Yo puse que es la relación del tamaño real con el de un dibujo.

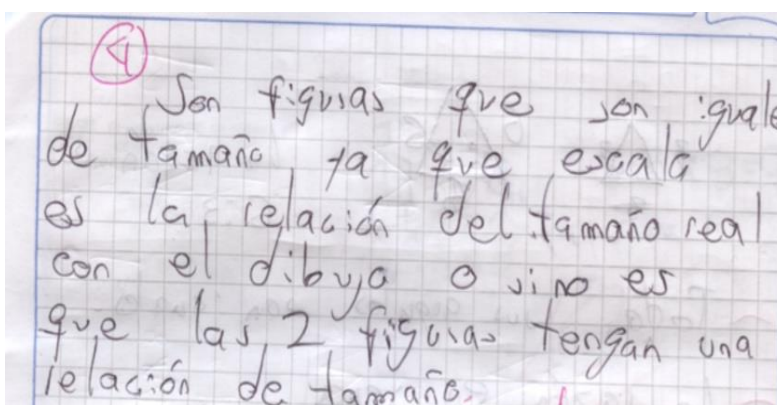


Imagen 111. Respuesta de Miguel para la pregunta 4 de la actividad

Sofía: Yo hice un dibujo. Es la relación que existe entre (...) entre las dimensiones de una figura real con las de dibujo.

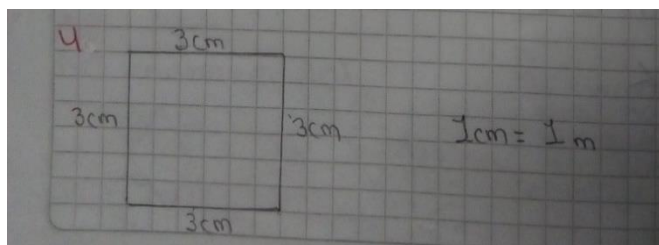


Imagen 112. Respuesta de Sofía para la pregunta 4 de la actividad



La expresión de Daniela se clasifica como N2 en el nivel del discurso, puesto que la pregunta es abierta y las respuestas dadas por sus compañeros son voluntarias y proporcionan información adicional; la participación de Daniela se define como *transmisora* dado que menciona tal cual la pregunta de la actividad. La participación de Sofía se clasifica como *autor*, dado que es la única que presenta su explicación de modo gráfico, es decir que es original tanto en su semántica como en su sintaxis, en cambio no se puede establecer como es la participación de Miguel, ya que, aunque parece una idea original del estudiante puede que se haya apoyado en las consultas realizadas en clases anteriores, y por ello no se puede establecer el tipo de participación. Sofía retoma las ideas y escribe a modo de conclusión.

Sofía: Ajá. (Escribe en la hoja que van a entregar.) Es la relación entre la realidad con un dibujo o plano. (A la vez lo va diciendo en voz alta pero pausadamente.) Pero ¿no sería es la relación entre las medidas?

Miguel: Las dimensiones

Diego: Las dimensiones, eso se supone.

La pregunta que plantea Sofía es directa y las respuestas dadas por los estudiantes con cortas, en consecuencia, se puede clasificar la expresión de Sofía como N1 en el nivel del discurso. También analizamos que Diego es *transmisor* de las ideas de Miguel. Sofía corrige lo que había escrito en la guía: “Es la relación entre las dimensiones entre la realidad con un dibujo o plano”.

### ***Episodio 5***

En este episodio se expone la socialización que hizo el grupo de Miguel ante el ítem cinco de la actividad propuesta por el profesor.

1. Realice tres ejemplos de figuras a escala y justifique porque lo son.

Luego de escribir la respuesta para el ítem cuatro, Diego les pregunta a los integrantes de su grupo qué respondieron para el último ítem de la actividad, varios mostraron los ejemplos que habían propuesto, como se observa.

Diego: ¿Qué puso para la seis?

Miguel: La cinco. Coloque los ejemplos y no más.

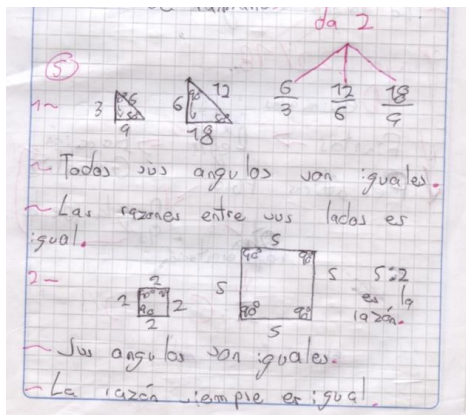


Imagen 113. Ejemplos propuestos por Miguel para el ítem 5 de la actividad

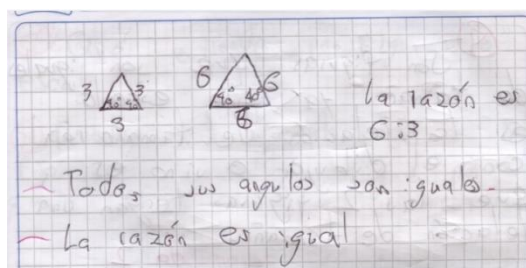


Imagen 114. Ejemplos propuestos por Miguel para el ítem 5 de la actividad

Sofía: (Muestra el ejemplo de la guía que consiste en dos trapecios semejantes.) Bueno. Vamos a hacer este. Cuando son correspondientes pues uno tiene que hacer lo mismo. Colocamos este. (Muestra en su cuaderno el dibujo que hizo de dos cuadrados.

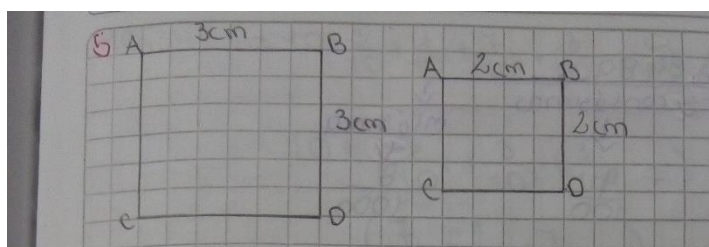


Imagen 115. Respuesta dada por Sofía al punto 5 de la actividad

La intervención de Diego presenta nivel de discurso N2, dado que la pregunta es abierta y las respuestas dadas por sus compañeros son voluntarias y proporciona información adicional; como es el caso de Miguel, quien es su cuaderno aclara cual es la razón entre las longitudes de los segmentos correspondiente en cada figura. Por su parte Sofía solo dibuja los cuadrados y especifica sus medidas. Las participaciones de los tres estudiantes se determinan como *autora*, debido que sus ideas son originales. Varios integrantes del grupo proponen que se debe poner el ejemplo de los cuadrados porque son simples y fáciles de hacer, sin embargo, Miguel no está de acuerdo y comenta: “*Es que todo el mundo hizo un cuadrado*”, se dan las siguientes interacciones en torno al tema de los cuadrados.

Juan Pablo: Siempre van a ser semejantes si pones dos cuadrados.

Miguel: Ah sí, eso sí. Porque sus ángulos son iguales y porque las razones entre sus lados son iguales.

Juan Pablo: Porque son cuadrados y los cuadrados tienen los ángulos.

Se identifica el esquema de argumentación A-A en las intervenciones de Miguel y Juan Pablo, dado afirman que todos los cuadrados son figuras semejantes, basándose en la definición de figuras semejantes y propiedades de los cuadrados abordadas en clases anteriores. La participación de Miguel se clasifica como *autor*, y la de Juan Pablo *portavoz*, dado que hace modificaciones mínimas a la intervención de Miguel, es decir es original en sintaxis, pero no

en semántica. Los estudiantes mencionan que la justificación en todos los ejemplos es la misma, las dos condiciones para figuras semejantes.

### *Episodio 6*

Un integrante de cada grupo pasa al tablero a exponer los acuerdos a los que llegaron en cada una de las preguntas, con el objetivo de comprender más los términos que se están abordando. Pasa Juan José a presentar las respuestas que dio su grupo a las primeras cuatro preguntas. Para la primera pregunta menciona que para que dos figuras sean semejantes se debe cumplir dos condiciones: “los ángulos tienen que ser iguales y las razones de sus lados tienen que ser iguales”. En cuanto a la segunda pregunta, ¿qué se entienden por lados correspondientes entre polígonos? Juan José comenta que su grupo llegó al acuerdo de que: “son los lados iguales de una figura que se supone son semejantes”. Para la tercera pregunta, ¿qué es la razón entre longitudes de lados correspondientes? Juan José afirma que “es (...) la razón, es la división entre dos lados correspondientes”. Y para la respuesta a la última pregunta, ¿qué son escalas? El estudiante dice que: “la escala son las figuras en que (...) es la relación de las figuras con la realidad. Digamos una maqueta de un edificio, con el edificio de verdad.”. Para todas las respuestas, se considera que la participación de Juan José es de *transmisor*, pues está repitiendo las ideas planteadas por su grupo a las preguntas formuladas por el profesor. En ninguno de los casos se determina un esquema de argumentación, ya que solo plantea afirmaciones.

Posteriormente el profesor le solicita al estudiante dibujar en el tablero uno de los ejemplos presentados, el estudiante dibuja dos hexágonos, dos triángulos y dos cuadriláteros, el profesor le solicita que justifique por qué las figuras son semejantes a lo cual él responde:

Juan José: Son semejantes porque sus ángulos son iguales.

En la expresión de Juan José se identifica esquema de argumentación A-A dado afirma que las figuras son semejantes apoyado en la definición de estas. El profesor para profundizar más en su idea pregunta:

Profesor: ¿Cuáles ángulos? Cuéntenos a ver.

Juan José: Mira, este ángulo (mientras lo señala) es igual a este ángulo (Imagen 116); y por eso son semejantes. Y como tienen, entonces digamos que esto es seis y esto es tres. (Imagen 117).



Imagen 116. Ejemplo de Juan José de figuras semejantes

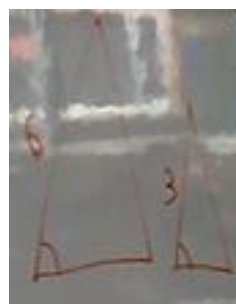


Imagen 117. Ejemplo de Juan José de figuras semejantes

La intervención del profesor se clásica como N2 en el nivel del discurso, dado que la pregunta es abierta y la respuesta dada por el estudiante es amplia y evoca información adicional. Por otro lado, se evidencia esquema de argumentación A-A dado que se basa en la definición de figuras semejantes para argumentar porque sus ejemplos son válidos.

Alejandro pasa a exponer las primeras cuatro preguntas socializadas en su grupo. Para la primera cometa que: “el primer aspecto es que deben tener razones iguales y el segundo aspecto es que debe tener los ángulos iguales también”. Para abordar la segunda pregunta, Alejandro dibuja en el tablero dos triángulos y establece los nombres de los vértices que determinan los lados que se establecen como correspondientes para explicar lo que significa este término. Para explicar lo que es una razón, expresa que “una razón es una relación entre medidas de figuras” y por último dibuja dos cuadriláteros y afirmar por qué son semejantes, como se muestra:

Alejandro: Mmm, estas figuras son semejantes (mientras dibuja en el tablero) Suponiendo que esto mide 4 y esto mide 2. Eh, tienen ángulos iguales, sus ángulos de noventa grados y tienen, y pues, hay una relación entre los lados. La, eh, dos por dos es cuatro. Entonces, esa es la relación que se establece entre las dos figuras.

La participación de Alejandro se clasifica como *transmisor* de las ideas abordadas en su grupo de trabajo. Por otra parte, se identifica esquema de argumentación A-A, dado que el estudiante se apoya en las condiciones que se establecieron en la definición de figuras semejantes.

Posteriormente pasa Juliana a exponer las ideas de su grupo, lee la respuesta a la primera pregunta que consistía en dar las condiciones para que dos figuras sean semejantes, ella menciona: “las razones entre las longitudes de los lados correspondientes son iguales y la otra los ángulos correspondientes tienen igual medida”. Con esta expresión se evidencia que Juliana es *transmisora* de las ideas planteadas con anterioridad por su grupo, ya que no es original en su sintaxis dado que lee de su cuaderno. Para dar respuesta a la segunda pregunta Juliana dibuja en el tablero dos triángulos y muestra en estas figuras cuáles son los lados correspondientes, pero se le dificulta explicar este concepto, por ello Katalina, una integrante del grupo interviene para explicar: “O sea que es el mismo lado, pero, solo que, o sea es la misma figura del mismo lado, que es correspondiente”. Daniel, otro integrante del grupo, afirma que la razón entre lados correspondientes es: “que los lados correspondientes se dividen y tienen

que dar cualquier número”, en seguida Juan Sebastián, otro integrante del grupo lee la respuesta a la pregunta cuatro, que hace alusión a lo que se entiende por escala, él menciona: “la relación matemática que existe entre las dimensiones reales y las dimensiones de un dibujo o de una maqueta”. Las expresiones de Katalina y Daniel y se clasifican como *portavoces*, puesto que, aunque tratan de explicar las respuestas a las que todo el grupo establecieron, utilizan sus propias palabras. Mientras que Juan Sebastián es *transmisor*, pues al igual que Juliana lee las ideas de su cuaderno. Luego Juan Sebastián dibuja en el tablero dos figuras (Imagen 118) y el profesor le solicita que justifique la validez de su ejemplo.



Imagen 118. Ejemplo de Juan Sebastián de figuras semejantes

Profesor: ¿Qué? Pero cuéntanos. ¿Por qué son?

Juan Sebastián: Ah, porque la relación de tamaño a la escala de relación, eh (Tiene dudas y pide a Kamila la hoja). Porque los ángulos son iguales, sus ángulos son iguales y porque las relaciones entre las longitudes de los lados correspondientes son iguales. (Leyendo de la hoja)

Observamos que la pregunta del profesor es abierta, tiene la intención de que el estudiante justifique la validez de su ejemplo, y la respuesta dada por el estudiante es amplia, por tanto, se clasifica como N2 en el nivel del discurso. La intervención del estudiante presenta esquema de argumentación A-A, dado que se sustenta en la definición de figuras semejantes. El profesor pregunta nuevamente:

Profesor: ¿Y cómo sabemos eso?

Juliana: (Ha pasado al tablero) Lo que se hace es dividir este lado de acá, con el de acá y el resultado que te dé. Bueno no sé cuánto da. Y luego toca hacerlo con este lado y este lado. Y si te da el mismo resultado que de este lado es semejante.

La respuesta del profesor es abierta pero la respuesta de Juliana es concreta, por tanto, se define la expresión del profesor como N1+ en el nivel del discurso. Después pasa Miguel a exponer los acuerdos establecidos en su grupo (este grupo fue al que se le hizo el seguimiento por parte de la investigadora), menciona que las dos características que se deben cumplir para que dos figuras sean semejantes son: “(...) la primera era que todos los ángulos tenían que ser iguales y que las razones entre los lados correspondientes serían (...) tienen que ser iguales.” Miguel dibuja en el tablero dos cuadrados con segmentos de longitud de 2 y 4 unidades respectivamente para explicar que son razones entre lados correspondientes. Menciona que la razón es la “comparación de los dos lados por su cociente”. También comenta que “tiene que dar el mismo resultado cuando hagamos las divisiones en todos los, en todos los lados”. Para abordar la segunda pregunta dibuja en el tablero dos triángulos que parecen isósceles y explica que “Los lados correspondientes son los lados que tienen la misma posición en las dos figuras. O sea, este lado (apuntando a un lado del primer triángulo) tiene la misma posición que este (apunta a un lado en el segundo triángulo.) pero no están en la misma figura”. Si comparamos lo dicho por Miguel al socializar las respuestas, con las conclusiones de cada

pregunta establecidas por el grupo, son diferentes, por tanto, su participación se clasifica como *autor*. El profesor le pregunta:

Profesor: Y, ¿si le das la vuelta al triángulo de allá?

Miguel: Pues este (apunta a un lado del primer triángulo) sería este también (señala un lado del triángulo girado.) porque también tendrías, para saberlo, también tendrías que voltear esta figura.

Observamos que la pregunta del profesor es directa y la respuesta dada por el estudiante es concreta, por tanto, se clasifica esta expresión como N1 en el nivel del discurso. Y profesor pregunta nuevamente:

Profesor: Pero ¿están en la misma posición?

Miguel: Bueno, pero un lado es que, como que. Pues sí porque como es el correspondiente (Suenan las campanas.)

Al igual que la pregunta anterior esta es abierta y la respuesta dada por el estudiante es concreta, en consecuencia, también se clasifica como N1 en el nivel del discurso. El profesor les aclara a los estudiantes que queda pendiente terminar, el grupo de Miguel y tres grupos más, y por ello en la próxima clase se seguirá realizando la socialización.