

Ambiente Virtual para el Aprendizaje de la Solución de Problemas de las Razones de Cambio Relacionadas Mediado por Andamiajes Conceptuales e implícitos

Sandra Milena Montoya Forero

Lina Marcela Díaz Fernández

Asesor:

Víctor Quintero Suárez

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL DE COLOMBIA

DEPARTAMENTO DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

MAESTRÍA EN TIAE

BOGOTÁ D.C.

2018

Derechos de autor

“Para todos los efectos, declaro que el presente trabajo es original y de mi total autoría; en aquellos casos en los cuales he requerido del trabajo de otros autores o investigadores, he dado los respectivos créditos”. (Artículo 42, parágrafo 2, del Acuerdo 031 del 4 de diciembre de 2007 del Consejo Superior de la Universidad Pedagógica Nacional)



Este trabajo de grado se encuentra bajo una Licencia Creative Commons de **Reconocimiento – No comercial – Compartir igual**, por lo que puede ser distribuido, copiado y exhibido por terceros si se muestra en los créditos. No se puede obtener ningún beneficio comercial y las obras derivadas tienen que estar bajo los mismos términos de licencia que el trabajo original.


Dedicatoria

La presente investigación está dedicada a todas aquellas personas sin las cuales el resultado que presentamos no hubiera sido posible.

Al profesor Víctor Quintero quien con su paciencia y dedicación nos compartió los conocimientos necesarios para culminar la investigación de manera exitosa. A todos los docentes de la Maestría quienes sentaron las bases para nuestra formación que concluye con este proyecto.

A los estudiantes que participaron de esta investigación y al profesor Gerley Cortés, por facilitar todos los espacios de requeridos y participar con tanto entusiasmo.

A nuestras familias por su apoyo incondicional, por ceder los espacios y tiempos que les correspondían para que pudiéramos culminar con éxito este proyecto.

	FORMATO	
	RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE	
Código: FOR020GIB	Versión: 01	
Fecha de Aprobación: 10-10-2012	Página v de 122	

1. Información General	
Tipo de documento	Tesis de grado de maestría de investigación
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento	Ambiente virtual para el aprendizaje de la solución de problemas de las razones de cambio relacionadas mediado por andamiajes conceptuales e implícitos.
Autor(es)	Díaz Fernández, Lina Marcela; Montoya Forero, Sandra Milena
Director	Quintero Suárez, Víctor
Publicación	Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional, 2018. 117 p.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional.
Palabras Claves	AMBIENTES VIRTUALES DE APRENDIZAJE; ANDAMIAJES CONCEPTUALES; ANDAMIAJES IMPLÍCITOS; ESTILOS COGNITIVOS; SIMULACIONES; APRENDIZAJE MATEMÁTICO; RAZONES DE CAMBIO; DERIVADAS

2. Descripción
<p>El presente trabajo de tesis tiene el propósito de examinar la relación que pueda existir entre representar y simular situaciones de contexto y el logro de aprendizaje, en estudiantes de educación superior que se estudian en el curso de Cálculo Diferencial de la Fundación</p>

Universitaria Empresarial de la Cámara de Comercio de Bogotá, a través de la interacción con un ambiente virtual de aprendizaje AVA que versa sobre la solución de problemas de derivadas que involucren razones de cambio relacionadas. Se propone realizar el proceso de investigación bajo el contraste de dos condiciones: 1) la presencia de un andamiaje conceptual alojado en el software y 2) el estilo cognitivo en la dimensión de dependencia e independencia de campo.

Se diseña un Ambiente Virtual de Aprendizaje (AVA) que incorpora andamiajes conceptuales e implícitos basados en la representación y simulación de situaciones de contexto como estrategia pedagógica para mejorar el logro de aprendizaje. La muestra esta conformada por 60 estudiantes de segundo semestre, del curso Cálculo Diferencial, de la Fundación Universitaria Empresarial de la Cámara de Comercio de Bogotá. Los instrumentos a desarrollar y aplicar en cada una de las etapas de esta investigación serán:

- Prueba EFT la cual se aplica a los dos grupos para determinar estilos cognitivos.
- Pre-test, que de determinará los preconceptos de los estudiantes sobre el tema abordado —la intervención, para los dos grupos será similar, en cuanto a la interacción con el AVA, aunque el Grupo experimental contará con andamiajes conceptuales e implícitos—.
- Post-test que se realizará en los dos grupos, mediante un cuestionario alojado en el AVA.

Se espera que los estudiantes del grupo experimental presenten mejoras significativas en la solución de problemas de razones de cambio relacionadas, respecto de los resultados del grupo control, por la presencia de los andamiajes en el primer grupo. Adicionalmente, se pretende evaluar cómo los estilos cognitivos juegan un papel importante en los resultados de los dos grupos a estudiar.

3. Fuentes

Azevedo, R., & Hadwin, A. F. (2005). Scaffolding self-regulated learning and metacognition - Implications for the design of computer-based scaffolds. *Instructional Science*, 33(5-6), 367-379. <https://doi.org/10.1007/s11251-005-1272-9>

Badillo, E. (2003). La Derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de la Matemática de Colombia, 126.

Castro, S., & Guzmán de Castro, B. (2005). Los estilos de aprendizaje en la enseñanza y el aprendizaje: Una propuesta para su implementación The styles of learning in the education and learning: A proposal for its implementation. *Revista de Investigación*, (58), 4. Retrieved from <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2051098>

Chen, C. H., Wu, I. C., & Jen, F. L. (2013). Designing online scaffolds for interactive computer simulation. *Interactive Learning Environments*, 21(3), 229-243. <https://doi.org/10.1080/10494820.2010.549831>

Del Moral, E., & Villalustre, L. (2005). Estilos Cognitivos De Los Estudiantes : Un factor de calidad en la docencia virtual. *Pixel-Bit. Revista de Medios y Educación*, 26, 16-25.

Ferro, C., Martínez, A. I., & Otero, C. (2009). Ventajas del uso de las TICs en el proceso de enseñanza- aprendizaje desde la óptica de los docentes universitarios españoles. *Revista Electrónica de Tecnología Educativa*, 29, 1–12. <https://doi.org/10.21556/EDUTE.2009.29.451>

García, J. (1989). *Los Estilos Cognitivos Y Su Medida: Estudios sobre la dimensión Dependencia-Independencia de campo.* (CENTRO DE PUBLICACIONES - Secretaría general técnica. Ministerio de Educación y ciencia, Ed.) (1st ed.). Madrid.

Goodenough, D. R. (1976). The role of individual differences in field dependence as a factor in learning and memory. *Psychological Bulletin*. US: American Psychological Association. <https://doi.org/10.1037/0033-2909.83.4.675>

Hadwin, A. F., & Winne, P. H. (2001). CoNoteS2: A Software Tool for Promoting Self-Regulation. *Educational Research and Evaluation*, 7(2–3), 313–334. <https://doi.org/10.1076/edre.7.2.313.3868>

Hannafin, M., Land, S., & Oliver, K. (1999). Open Learning Environments : Foundations , methods , and models. *Instructional-Design Theories And Models*, (January), 115–140.

Hederich-Martínez, C., López-Vargas, O., & Camargo-Urbe, A. (2016). Effects of the use of a flexible metacognitive scaffolding on self-regulated learning during virtual education. *Int. J. Technology Enhanced Learning J. Technology Enhanced Learning*, 844(3), 199–216. <https://doi.org/10.1504/IJTEL.2016.082321>

Kolb, A. Y., & Kolb, D. A. (1981). Learning Styles and Learning Spaces: Enhancing Experiential Learning in Higher Education. *Learning & Education*, 4(2). <https://doi.org/https://doi.org/10.5465/amle.2005.17268566>

Lepper, M. R., & Chabay, R. W. (1985). Intrinsic Motivation and instruction: conflicting Views on the Role of Motivational Processes in Computer-Based Education. *Educational Psychologist*, 20(4), 217–230. https://doi.org/10.1207/s15326985ep2004_6

Pea, R. D. (2004). The Social and Technological Dimensions of Scaffolding and Related Theoretical Concepts for Learning, Education, and Human Activity. *Journal of the Learning Sciences*, 13(3), 423–451. https://doi.org/10.1207/s15327809jls1303_6

Podolefsky, N. S., Moore, E. B., & Perkins, K. K. (2013). Implicit scaffolding in interactive simulations: Design strategies to support multiple educational goals. *Arxiv*, 1–30. Retrieved from <http://arxiv.org/abs/1306.6544>

Prabawanto, S. (2018). The enhancement of students' mathematical self-efficacy through teaching with metacognitive scaffolding approach. *Journal of Physics: Conference Series*, 1013(1). <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1013/1/012135>

Valencia, N., López, O., & Sanabria, L. (2018). Effect of a motivational scaffolding on e-learning environments: self-efficacy, learning achievement, and cognitive style. *Journal Educators On-Line*, 15(1), 1–14. <https://doi.org/10.9743/JEO2018.15.1.5>

Villa-Ochoa, J. A., González-Gómez, D., & Carmona-Mesa, J. A. (2018). Modelación y Tecnología en el Estudio de la Tasa de Variación Instantánea en Matemáticas. *Formación Universitaria*, 11(2), 25–34. <https://doi.org/10.4067/S0718-50062018000200025>

Witkin, H. A., Moore, C. A., Goodenough, D. R., & Cox, P. W. (1977). Field-Dependent and Field-Independent Cognitive Styles and Their Educational Implications. *Review of Educational*

Research, 47(1), 1–64. <https://doi.org/10.3102/00346543047001001>

Wood, D., Bruner, J. S., & Ross, G. (1976). the Role of Tutoring in Problem Solving. *Journal of Child Psychology and Psychiatry*, 17(2), 89–100. <https://doi.org/10.1111/j.1469-7610.1976.tb00381.x>

4. Contenidos

El documento se estructura en varios capítulos que corresponden al paso a paso en el desarrollo de la investigación. Un primer capítulo presenta la investigación, donde se encuentra la estructura general del documento y traza el camino que sigue la presente investigación, se incluyen preguntas y objetivos de investigación. En los dos siguientes capítulos se encuentra el Marco Conceptual donde se encuentra el Estado del Arte, que direcciona las necesidades de investigas, dónde se encuentran falencias y dónde es posible realizar una intervención más asertiva. Este Marco incluye también el Marco teórico que incluye las teorías que fundamentan la investigación y que se centra en las variables planteadas: Andamiajes, estilos cognitivos, pensamiento variacional, construcción de conceptos, etc.

Un tercer capítulo presenta la descripción del ambiente, el cual ha sido diseñado especialmente para responder a las preguntas de investigación. A partir de allí se plantea la metodología que incluye hipótesis, diseño de la investigación, población e instrumentos. Un siguiente capítulo muestra todo lo relacionada a la obtención de datos, para finalmente después de realizar una discusión presentar las conclusiones, mediante las cuales se da respuesta a las preguntas de investigación, se presenta una comparación entre los resultados obtenidos y la teoría presentada en el Marco Conceptual.

5. Metodología

La investigación se realiza con base en un diseño 2*3 y se emplea una metodología cuasi experimental, con modelo de grupo de control no equivalente, se toman de cada sujeto registros y medidas antes y después de la aplicación o experimentación. Las pruebas se aplican en dos grupos escogidos de manera natural (no aleatoria ni al azar), dichos grupos guardan similitud en número, características académicas y preconceptos de Cálculo.

Teniendo en cuenta la ausencia de aleatorización en la asignación de las unidades, se esperan diferencias en las puntuaciones antes y después (Stanley, 2013). En este modelo se trabaja con un grupo experimental — con andamiaje conceptual implícito— y otro de control —sin andamiaje conceptual implícito—. Los dos grupos realizan prueba de entrada —Pre-test— y prueba de salida —Pos-test— con características similares.

6. Conclusiones

Se evidencia la eficacia de las simulaciones en la comprensión de este tipo de problemas, ya que permite que los estudiantes interactúen con cada simulación y puedan registrar en tiempo real los cambios que se presentan. Por el contrario, el uso de representaciones estáticas que muestran ejercicios solucionados (como se utiliza tradicionalmente) limita la comprensión del concepto, al no permitir un análisis completo de la situación y limitarse a contemplar una solución previa.

Por otro lado, de acuerdo a los resultados obtenidos por los estudiantes en la prueba de salida, se resalta la importancia de abordar la noción de derivada desde el concepto de razones de cambio y razones de cambio relacionadas, sin limitarse a la perspectiva procedimental, ya que de esta manera se faculta al estudiante para que extrapole los conocimientos adquiridos a situaciones que pueden ser comunes, permitiendo la aplicación de conceptos matemáticos en la solución de problemas cotidianos y de esta manera facilitar la ubicuidad del aprendizaje.

En relación con los objetivos planteados en esta investigación, y específicamente con el andamiaje conceptual implícito, se puede afirmar que el andamiaje inmerso en el ambiente virtual de aprendizaje facilita la solución de problemas entorno a Razones de Cambio y Razones de Cambio Relacionadas, en estudiantes con diferentes estilos de aprendizaje en la dimensión DIC. Así mismo, se infiere (debido a las correlaciones obtenidas en los resultados) que el uso de un andamiaje conceptual implícito dentro de un AVA favorece el impacto del estilo cognitivo (estudiantes dependientes, intermedios e independientes de campo), en los resultados obtenidos en las pruebas finales.

Finalmente, es importante resaltar que los ambientes virtuales de aprendizaje, diseñados para la comprensión de conceptos matemáticos deben beneficiarse mediante el uso de andamiajes que incluyan simulaciones relacionadas con su aplicación en la vida real, pues estas herramientas favorecen la comprensión de conceptos y la fijación de los mismos a largo plazo.

Elaborado por:	Díaz Fernández, Lina Marcela; Montoya Forero, Sandra Milena		
Revisado por:	Quintero Suárez, Víctor		
Fecha de elaboración del Resumen:	04	12	2018

Contenido

Introducción	1
Planteamiento del Problema.....	4
Preguntas de Investigación.....	9
Objetivos	10
Objetivo General	10
Objetivos específicos.....	10
Estado del Arte.....	11
Logro de Aprendizaje: Las Derivadas y las Razones Cambio.	11
Simulaciones Interactivas y Andamiajes.....	17
Estilos Cognitivos y Aprendizaje Mediado por Andamiajes.	21
Marco Teórico.....	26
Conceptualización Matemática	26
Pensamiento Variacional.....	27
La Comprensión de la Derivada como Razón de Cambio	31
La Derivada, un Poco de Historia.....	31
La Razón De Cambio.....	32
Razones De Cambio Relacionadas.	34
Modelación	35
Simulaciones	36
Uso de Tecnologías en las Simulaciones.....	36
Andamiajes	39
Definición y Origen del Término Andamiaje.....	39
Andamiajes y Ambientes Virtuales de Aprendizaje.....	42

Clasificación de los Andamiajes.....	43
Andamiajes conceptuales.....	46
Andamiajes implícitos	47
Estilos Cognitivos.....	48
Una Aproximación al Concepto.	48
Clasificación de los Estilos Cognitivos.	49
Descripción del Desarrollo Tecnológico.....	52
Metodología	61
Tipo de Investigación	61
Diseño de la Investigación	62
Muestra.....	63
Fases de la Investigación.....	64
Aplicación Prueba EFT.....	64
Pre-test (anexo 1).....	64
Intervención	64
Pos-test (anexo 2).	65
Etapas de la investigación	65
Hipótesis.....	67
H ₁ :	67
H ₂ :	67
Resultados	68
Pregunta 1	69
Pre-test y Pos-test para grupo control.....	69
Pre-test y Pos-test para grupo Experimental.....	70
Cumplimiento de Supuestos.....	71

Grupo Control	71
Grupo Experimental.....	72
Análisis del diseño factorial.....	73
Análisis de los Efectos de las variables Independientes	76
Pregunta 2.....	78
Relación Grupo-Estilo Cognitivo	78
Resultados Prueba EFT.....	78
Análisis de medias por grupo y estilo Cognitivo.....	79
Discusión.....	83
Conclusiones	88
Referencias	91

Índice de Tablas

Tabla 1. Actividades cognitivas Duval (1998).....	27
Tabla 2. Acciones mentales para la covariación (Carlson et al., 2003)	29
Tabla 3. Niveles de razonamiento covariacional (Carlson et al., 2003)	31
Tabla 4. Dimensiones de las simulaciones interactivas. (Hodson, 1990)	37
Tabla 5. Características y ventajas de las simulaciones interactivas	38
Tabla 6. Tipos, agentes y dominios de los andamiajes (Holton & Clarke, 2006).....	44
Tabla 7. Andamiajes (Hannafin et al., 1999)	45
Tabla 8. Fases del aprendizaje en el AVA (Gagné, 1975).....	52
Tabla 9. Esquema básico del diseño del ambiente	53
Tabla 10. Características generales del andamiaje.....	54
Tabla 11. Diseño de la Investigación	63
Tabla 12. Grupos que conforman la muestra	64
Tabla 13. Comparación intervención grupo control y grupo experimental	65
Tabla 14. Etapas de la investigación	65
Tabla 15. Estadísticos.....	68
Tabla 16. Estadísticos grupo Control	69
Tabla 17. Estadísticos grupo Experimental	70
Tabla 18. Prueba de Kolmogorov-Smirnov para una muestra.....	72
Tabla 19. Prueba de Kolmogorov-Smirnov para una muestra.....	73
Tabla 20. Prueba de muestras independientes.....	73
Tabla 21. Factores inter-sujetos	74
Tabla 22. Estadísticos descriptivos	75
Tabla 23. Prueba de igualdad de Levene de varianzas de error	75
Tabla 24. Resultados del Ancova en los dos grupos de trabajo	76
Tabla 25. Tamaño de los grupos y estilo cognitivo	78
Tabla 26. Estadísticos descriptivos	79

Tabla 27. Factores inter-sujetos	80
Tabla 28. Prueba de igualdad de Levene de varianzas de error	80
Tabla 29. Pruebas de efectos inter-sujetos	81
Tabla 30. Correlaciones	82

Índice de Figuras

Figura 1. Modelo conceptual de los andamiajes (Van de Pol, Volman, & Beishuizen, 2010).....	41
Figura 2. Etapa1 – Fase de Motivación	55
Figura 3. Etapa 2 – Fases comprensión, adquisición, retención, recuerdo y generalización	57
Figura 4. Acceso al andamiaje	58
Figura 5. Exploración de las simulaciones	58
Figura 6. Preguntas cognitivas y metacognitivas.....	59
Figura 7. Etapa 3 – Andamiaje y simulaciones.....	59
Figura 8. Etapa 4 – Pos-test	60
Figura 9. Filtrado de datos en SPSS.....	68
Figura 10. Histograma pre-test por pregunta. Grupo Control.....	70
Figura 11. Histograma Pos-test por pregunta Grupo Control	70
Figura 12. Histograma pre-test por pregunta. Grupo Experimental	71
Figura 13. Histograma pos-test por pregunta. Grupo Experimental.....	71
Figura 14. Medias marginales estimadas del logro de aprendizaje por estilo cognitivo y trabajo con el módulo.....	77
Figura 15. Gráfico de medias marginales	79

Introducción

Teniendo en cuenta el aumento en el acceso a internet y con ello el incremento de las posibilidades para acceder a plataformas, software y herramientas de apoyo para procesos de aprendizaje, y en general a las diferentes tecnologías educativas con que cuenta actualmente la población Colombiana (MINTIC, 2015), se hace necesario el desarrollo de proyectos que faciliten la apropiación estas herramientas para repensarlas, mejorarlas y usarlas en beneficio de los procesos formativos. Bajo esta mirada, aparecen los Ambientes Virtuales de Aprendizaje (AVA) los cuales —correctamente diseñados— facilitan el acceso al conocimiento mediante el uso de diferentes tecnologías.

Particularmente en el campo de las Matemáticas existe diversidad de herramientas tecnológicas que se enfocan en solventar las dificultades que se presentan en el entendimiento de conceptos matemáticos especialmente cuando el proceso de enseñanza se enfoca únicamente en lo procedimental de las operaciones sin tener en cuenta la relación de estos conceptos con la vida real. Por otro lado, no existe acuerdo definitivo sobre cuáles son los objetivos finales en el proceso de enseñanza de las matemáticas, si tiene mejores resultados, la instrucción directa y con contenidos lineales (Kirschner, Sweller y Clark, 2006) o el aprendizaje centrado en el estudiante (Hmelo-Silver, Duncan y Chinn, 2007), por citar solamente dos ejemplos.

Tradicionalmente las tareas matemáticas han requerido de una orientación estrictamente explícita como por ejemplo, indicaciones o preguntas direccionadoras para asegurarse de que los estudiantes alcancen los objetivos de aprendizaje. Sin embargo, aunque estas actividades son exitosas en el aprendizaje de contenidos, suelen limitar la participación de los estudiantes en el proceso de aprendizaje y en la aplicación de los conocimientos adquiridos en situaciones ordinarias.

En este sentido, la indagación y la exploración se han convertido en medios eficaces que apoyan diferentes miradas pedagógicas y se adaptan fácilmente a los diferentes tipos de aprendizaje de los estudiantes (Akaygun y Jones, 2013; Dewey, 1938; Reiser B. J., 2004). De esta manera surgen todas las tendencias relacionadas con el aprendizaje por descubrimiento, donde los estudiantes participan activamente del proceso. Una de las aplicaciones en tecnología

de este tipo de aprendizaje se refiere al uso de simulaciones, que permite a los estudiantes interactuar con situaciones que pueden ser reales a través de diferentes medios tecnológicos; sin embargo, también existen muchos cuestionamientos sobre la eficacia de estos modelos en el aprendizaje de los contenidos (Kirschner, Sweller y Clark, 2006).

Por otro lado, diferentes investigaciones presentan evidencia sobre herramientas de tipo pedagógico como los andamiajes, que al ser incluidas dentro los AVA ofrecen un apoyo eficaz en la comprensión de contenido matemático. De esta manera, los estudiantes que durante el proceso de aprendizaje obtienen el soporte de andamiajes, presentan mayor comprensión en los conceptos y mayor eficacia en la resolución de problemas, además de mejorar las interacciones al ofrecer oportunidades únicas de representación y múltiples medios de presentar y evaluar los conceptos, y de distribuir la carga cognitiva en herramientas informáticas para que los estudiantes se enfoquen en la consecución del logro de aprendizaje (Sharma & Hannafin, 2007).

Aunque el uso de andamiajes en educación está muy bien soportado por muchas investigaciones, se hace necesario abrir nuevos campos de investigación sobre su incidencia en temas específicos de las matemáticas y que permitan revisar su incidencia sobre los diferentes estilos cognitivos de los estudiantes; ya que no todos los estudiantes perciben ni clasifican la información de la misma manera (Kagan, Moss, & Sigel, 1963).

En este sentido, el trabajo que se presenta en este documento tiene como objetivo, examinar la relación que existe, entre representar y simular situaciones de contexto y el logro de aprendizaje, en estudiantes de educación superior, a través de la interacción con un andamiaje de tipo conceptual implícito inmerso en un ambiente virtual de aprendizaje (AVA) que versa sobre la solución de problemas de razones de cambio. La investigación se presenta bajo el contraste de dos condiciones: 1) La presencia de un andamiaje conceptual alojado en el AVA y 2) el estilo cognitivo en la dimensión de dependencia e independencia de campo.

En la realización de este estudio participan 60 estudiantes de segundo semestre la carrera Ingeniería de Software, cada grupo está compuesto por 30 estudiantes y cada uno corresponde a un grupo a intervenir: Experimental —que trabaja con andamiajes conceptuales e implícitos— y Control —quienes trabajan en el ambiente sin los andamiajes—.

El documento se estructura en varios capítulos que corresponden al paso a paso en el desarrollo de la investigación. Un primer capítulo presenta la investigación, donde se encuentra la estructura general del documento y traza el camino que sigue la presente investigación, se incluyen preguntas y objetivos de investigación. En los dos siguientes capítulos se encuentra el Marco Conceptual donde se encuentra el Estado del Arte, que direcciona las necesidades de investigas, dónde se encuentran falencias y dónde es posible realizar una intervención más asertiva. Este Marco incluye también el Marco teórico que contiene las teorías que fundamentan la investigación y que se centra en las variables planteadas: Andamiajes, estilos cognitivos, pensamiento variacional, construcción de conceptos, etc.

Un tercer capítulo presenta la descripción del ambiente, el cual ha sido diseñado especialmente para responder a las preguntas de investigación. A partir de allí se plantea la metodología que incluye hipótesis, diseño de la investigación, población e instrumentos. Un siguiente capítulo muestra todo lo relacionada a la obtención de datos, para finalmente después de realizar una discusión presentar las conclusiones, mediante las cuales se da respuesta a las preguntas de investigación, se presenta una comparación entre los resultados obtenidos y la teoría presentada en el Marco Conceptual.

Planteamiento del Problema

La manera en que se han venido articulando la educación y el uso de tecnologías de la información TIC ha dado lugar a un creciente interés por su influencia en los procesos de enseñanza-aprendizaje y sus efectos tanto en educación formal como no formal (Zalazar; Neri, 2013), en este sentido, existe una gran variedad de estudios que dan cuenta de las ventajas obtenidas por el uso de estas tecnologías y su incidencia en procesos de aprendizaje. Múltiples investigaciones muestran que son muchos los beneficios que ofrece el uso de TIC en educación, especialmente con la implementación de ambientes virtuales de aprendizaje AVA.

El uso de estos ambientes deriva en ventajas que van desde la flexibilización de los procesos formativos —uso en cualquier lugar, momento y tiempo— hasta la facilidad e inmediatez de acceso a la información —empleo de múltiples dispositivos—. Asimismo favorecen la experimentación y la manipulación en tiempo real; respetando los diferentes ritmos de aprendizaje y las diferencias individuales de cada estudiante. Por otro lado, benefician la socialización facilitando el trabajo en grupo y fomentan la curiosidad y el espíritu investigativo (Hannafin, Land, & Oliver, 1999). En este sentido, se estima que el uso de este tipo de ambientes en educación favorece la participación activa de los estudiantes en su propio proceso de aprendizaje lo que redundaría en la consecución de altos desempeños académicos con respecto al logro de aprendizaje (Johnson, 2015).

En contraposición a la afirmación anterior, y aunque son muchas las ventajas que se reportan con el uso de los AVA en educación, existen estudios que presentan evidencia clara de que no todos los estudiantes obtienen los logros deseados, ya que es usual que en el diseño de dichos ambientes no se tengan en cuenta las diferentes formas de pensar y de aprender. Y debido a que muchos estudiantes no poseen las capacidades para trabajar autónomamente, evidencian problemas en la gestión del propio aprendizaje lo que redundaría en una motivación más baja a la deseada y esto a su vez implica dificultades en la consecución del logro (Tsai, Chuang, Liang, & Tsai, 2011).

Estas discrepancias en los reportes de investigación se pueden explicar desde la perspectiva de algunos autores que plantean que la obtención del logro de aprendizaje mediado

por AVA puede estar asociado al estilo cognitivo de los estudiantes (Azevedo & Hadwin, 2005) y depender en cierta medida de los apoyos presentes en dichos ambientes (Ching-Huei, I-Chia, & Jen, 2011; Sharma & Hannafin, 2007).

En cuanto al estilo cognitivo, algunas investigaciones muestran que los estudiantes presentan comportamientos diferenciados a la hora de llevar a cabo procesos de aprendizaje en Ambientes Virtuales, lo que se relaciona con las diferencias individuales. Por ejemplo, en la dimensión Dependencia Independencia de Campo (DC-IC), existen variedad de estudios que dan cuenta de este tipo de resultados (Hederich-Martínez, López-Vargas, & Camargo-Uribe, 2016; Chen, Fan, & Macredie, 2016).

Uno de los aspectos más relevantes en referencia a los elementos cognitivos de la conducta, es el hecho de que DC e IC parecen diferir claramente en el uso de los llamados «procesos de mediación» en el aprendizaje, es decir, en los instrumentos o procesos cognitivos que les permitan estructurar u organizar el material que deben aprender (García, 1989, p. 128).

Es importante tener en cuenta que en diversos campos de aprendizaje, la mayoría de estudios señalan que los IC obtienen mejores resultados frente a los DC, ya que los primeros reflejan un mayor desarrollo en cuanto a adquisición de conceptos, aprendizaje y memoria. Así, los IC tienen la facilidad de aprender conceptos más rápidamente que los DC, especialmente cuando los aspectos sobresalientes son irrelevantes para la definición del concepto, esto quiere decir, que se puede favorecer el aprendizaje de conceptos en los estudiantes DC si se prefieren los atributos relevantes del concepto frente a los sobresalientes (Witkin, Moore, Goodenough, & Cox, 1977).

Asimismo, las investigaciones demuestran que cuando el contenido de aprendizaje presente en el AVA no está estructurado, los estudiantes DC recuerdan menos conceptos y palabras que los IC. Sin embargo, cuando se presenta el material de manera estructurada no se evidencian tales diferencias y se favorece el aprendizaje de todos los estudiantes (Goodenough, 1976). Parte de esta estructuración se refiere a la interface visual (Hederich-Martínez et al., 2016) y a la forma en que el estudiante interactúa con el ambiente, ya que un diseño deficiente puede hacer que la estrategia planteada no funcione de igual manera para todos los individuos. En consecuencia, algunos criterios como funcionalidad, flexibilidad, agilidad, interactividad,

usabilidad, accesibilidad, adaptabilidad y legibilidad (Del Moral Pérez & Villalustre Martínez, 2004) deben considerarse a la hora de diseñar los «entornos formativos» de manera que posibiliten una "adaptación pedagógica en función de las características individuales de los estudiantes" (Del Moral & Villalustre, 2005).

En este sentido algunos autores afirman que el estilo cognitivo en la dimensión DIC, se considera un factor muy importante en el desarrollo de procesos de aprendizaje y el desempeño en diversos contextos educativos por lo que es imperante atender esta variable a la hora de diseñar Ambientes Virtuales de Aprendizaje (Valencia, 2018).

Aunque existen varias alternativas que pueden dar solución a las desventajas que se presentan debido a los diferentes estilos cognitivos, algunos autores sugieren que la más apropiada es el uso de andamiajes, ya que permite desdibujar las diferencias entre estilos, beneficiando el proceso de todos los individuos. Algunos autores como Moos & Azevedo, 2008 y Zydney, 2010 (citado en Párraga Ramírez & Toro Cárdenas, 2016 p. 1) concuerdan en que con el apoyo de andamiajes los estudiantes desarrollan la capacidad de recurrir de manera constante a herramientas cognitivas y metacognitivas adquiridas durante el proceso de aprendizaje.

Desde esta perspectiva, la incorporación de andamiajes computacionales podría entonces mitigar de alguna manera las brechas existentes entre los diferentes estilos cognitivos, y en esta dirección permitir que los estudiantes alcancen un aprendizaje mucho más equitativo y flexible. La elección del tipo de andamiaje, estará determinada entonces, por el tipo de aprendizaje que se aborda en el Ambiente.

En el caso específico de la presente investigación, la temática seleccionada es el aprendizaje de la Derivada como Razón de Cambio; debido a que las investigadoras evidencian que los estudiantes universitarios (puntualmente los estudiantes de segundo semestre de Ingeniería de sistemas de la Fundación Universitaria Empresarial de la Cámara de Comercio de Bogotá) presentan dificultades para comprender la derivada como un concepto, y no como un algoritmo o conjunto de pasos secuenciales, por lo cual, no es posible evidenciar su aplicación en situaciones reales, es decir, los estudiantes no identifican la derivada en fenómenos de su vida diaria, y no conectan las razones de cambio relacionadas con fenómenos cotidianos.

Así, algunas investigaciones realizadas durante los últimos 20 años, dan cuenta de las dificultades que encuentran los estudiantes al crear e interpretar modelos de fenómenos cambiantes. Diversos estudios se han enfocado en documentar dichas dificultades examinando el papel que desempeñan los conceptos de función y razones de cambio en las habilidades para representar situaciones dinámicas (Carlson, Jacobs, Coe, Larsen, & Hsu, 2003) donde los estudiantes encuentran muchos inconvenientes para interpretar los modelos de dichos fenómenos.

En consecuencia existe la necesidad de diseñar herramientas computacionales, que inviten a los estudiantes a enfrentarse a experiencias de modelación con tecnología en la que los objetos matemáticos puedan tener diversidad de significados e interpretaciones, y que faciliten el uso de contextos y representaciones (Herbert y Pierce, 2012; Vrancken y Engler, 2014).

En este sentido, el uso de andamiajes en el aprendizaje de las matemáticas y en específico, la comprensión de la Derivada como Razón de Cambio, proporcionan una flexibilidad inherente que puede ayudar a los estudiantes a lo largo de procesos de aprendizaje variados e individualizados", teniendo en cuenta los diferentes estilos cognitivos y "satisfaciendo la necesidad de adaptabilidad de los andamiajes" (Podolefsky et al., 2013, p.3).

Ahora bien, ¿cómo determinar qué tipo de andamiaje es el más adecuado y cuáles son los elementos que deben tenerse en cuenta para el diseño de los mismos? Para responder a esta pregunta se parte de la temática planteada y las dificultades que se presentan en el entendimiento de la misma. De esta manera surge la necesidad de diseñar soportes que promuevan la aproximación a experiencias de modelación con tecnología en la que los objetos matemáticos puedan tener diversidad de significados e interpretaciones; el uso de simuladores, por ejemplo, podría contribuir a mejorar la comprensión del concepto de derivadas.

En consecuencia, una herramienta ideal para el desarrollo de simulaciones son los andamiajes implícitos, ya que proporcionan un apoyo para las necesidades individuales en el aprendizaje de contenidos, respaldan los diferentes objetivos de aprendizaje que en la mayoría de los casos no se abordan en entornos de aprendizaje más dirigidos (Podolefsky et al., 2013), y permiten el uso de simulaciones para facilitar la comprensión de los conceptos implicados.

Por otro lado, con el uso de andamiajes conceptuales se presta especial atención a los conocimientos previos del estudiante y se enfoca en el desarrollo de habilidades para alcanzar el logro de aprendizaje (Azevedo & Hadwin, 2005); se guía al estudiante por conceptos claves (Jumaat & Tasir, 2014) y facilita la creación de estructuras organizadas enfocadas en la solución de un problema (Hannafin, Land, & Oliver, 1999).

Es así, como en la presente investigación, mediante la implementación de andamiajes de tipo conceptual e implícito dentro de un Ambiente Virtual de Aprendizaje, se pretende minimizar los efectos de las diferencias individuales y lograr una mejor comprensión de los conceptos, así como la aplicación de los mismos en la resolución de problemas cotidianos. Con esta mirada se propone entonces un ambiente que incluya un andamiaje diseñado bajo el marco propuesto por Podolefsky et al. (2013), en el que el andamiaje no se presenta de manera verbal o escrita, y con el que se pretende facilitar la interacción del estudiante con el entorno utilizando la menor cantidad de guías posibles. Para esto, el ambiente debe permitir: (1) Facilidad de uso, (2) Compromiso —que el estudiante utilice el ambiente activamente— y (3) Aprendizaje —que el estudiante alcance el logro—. De la misma manera debe estar claramente definido el alcance, la secuencia y la interactividad por cada una de las simulaciones que componen el andamiaje.

Preguntas de Investigación

La investigación se enfoca en determinar la incidencia que tiene el uso de andamiajes conceptuales e implícitos implementados en ambiente virtuales de aprendizaje sobre el logro de aprendizaje —La derivada como razón de cambio— en estudiantes con diferentes estilos cognitivos que cursan segundo semestre de diferentes carreras de ingeniería. De la misma manera se espera determinar si el uso de dicho andamiaje tiene incidencia en el aprendizaje del logro planteado.

De esta manera la investigación está orientada a responder las siguientes preguntas:

*¿Cuál es el efecto de un **andamiaje conceptual implícito** integrado en un AVA, sobre el logro de aprendizaje relacionado con la solución de problemas, que involucren razones de cambio relacionadas?*

*¿Existen diferencias significativas sobre el logro de aprendizaje entre estudiantes con diferente **estilo cognitivo** en la dimensión DIC, cuando interactúan en un ambiente virtual de aprendizaje que integra en su estructura un andamiaje conceptual e implícito?*

Objetivos

Objetivo General

- Evaluar el impacto de representar y simular en un ambiente virtual, situaciones de contexto, en el logro de aprendizaje de la resolución de problemas, de razones de cambio relacionadas, empleando andamiajes conceptuales e implícitos en estudiantes con diferentes estilos cognitivos.

Objetivos específicos

- Identificar los niveles de aprendizaje que alcanzan los estudiantes en torno a la resolución de problemas del concepto derivada vista como razones de cambio relacionadas.
- Determinar cómo un ambiente virtual de aprendizaje facilita la solución de problemas entorno a las razones de cambio relacionadas en estudiantes con estilos cognitivos en la dimensión DIC.

Estado del Arte

Se presenta a continuación una revisión de investigaciones realizadas durante los últimos 8 años, relacionadas con los estudios sobre los efectos del uso de andamiajes en ambientes virtuales y su influencia en el logro de aprendizaje en estudiantes con diferentes estilos cognitivos. Se incluyen investigaciones enfocadas al uso de simulaciones en el aprendizaje de las matemáticas, específicamente en razones de cambio y razones de cambio relacionadas.

Las investigaciones se reúnen en tres grupos conceptuales de acuerdo a las variables vinculadas en la investigación. En un primer grupo, se presentan los artículos relacionados con el logro de aprendizaje: Las derivadas y las razones de cambio. Un segundo grupo, aborda las investigaciones que se enfocan en el efecto de las simulaciones en el aprendizaje de conceptos y procesos matemáticos. Y un tercer grupo aborda el concepto de andamiajes y algunos factores asociados como su incidencia en el logro del aprendizaje y su efectividad frente a los diferentes estilos cognitivos en la dimensión de dependencia e independencia de campo.

Logro de Aprendizaje: Las Derivadas y las Razones Cambio.

Los trabajos de investigación dirigidos a la enseñanza del concepto de derivada se han abordado desde diferentes perspectivas, algunos investigadores centran sus estudios en las representaciones gráficas de la rapidez asociada con su magnitud (Dolores, Chi, Canul, Cantú, & Pastor, 2009, p. 53); otros, estudian la relación entre las representaciones y la comprensión de la derivada. Así mismo, hay quienes estudian la conexión entre lo gráfico, lo analítico y lo algebraico (Sánchez-Matamoros, García, & Llinares, 2008).

De otro lado, trabajos como los de Badillo (2003) llaman la atención sobre algunas inconsistencias que existen entre los significados de la derivada a nivel local y global. Autores como Villa-Ochoa et al. (2018) evidencian las ventajas que las tecnologías digitales ofrecen a la comprensión de la tasa de variación como una forma de iniciar en el entendimiento de las derivadas; mientras que otros por su parte, analizan el papel que los docentes y estudiantes le asignan a la visualización en el sistema didáctico para aprender el concepto (Ordoñez, Ramírez, & Bedoya, 2015). Estas, y otras perspectivas, se ampliarán en el transcurso de este apartado.

En la investigación *De las descripciones verbales a las representaciones gráficas. El caso de la rapidez de la variación en la enseñanza de la matemática*, Dolores et al. (2009) exploran la enseñanza del concepto de derivada desde la perspectiva de las representaciones gráficas sobre la rapidez de la variación; el propósito de la investigación es determinar qué tipo de representaciones gráficas hacen los estudiantes acerca de enunciados verbales sobre situaciones cotidianas de la variación física, y propiciar así un acercamiento entre dichas situaciones y las representaciones gráficas.

La investigación se realiza con una muestra de 388 estudiantes —157 del nivel medio básico (grado 9°) y 231 del nivel medio superior (grado 12°)—, de escuelas ubicadas en una región del sur de México. El instrumento utilizado es un cuestionario que plantea diferentes situaciones problema donde los estudiantes deben elaborar las gráficas de dichas situaciones. Adicionalmente se realiza un análisis didáctico de los programas y libros de texto más utilizados en el nivel medio, con el propósito de revisar la manera en que se presenta y se estructura el concepto de rapidez en las diferentes instituciones educativas.

Los investigadores encontraron que las representaciones gráficas que los estudiantes hacen de situaciones cotidianas que involucran la rapidez suelen ser diferentes de las aceptables, ya que la mayoría realiza dichas representaciones, asociándolas con su magnitud y no con la pendiente o cociente de magnitudes de los cambios como se prevé en el currículum matemático escolar. Estos resultados contradicen las concepciones de la enseñanza de la razón de cambio, dado que tanto en física como en matemáticas se asume que los estudiantes después de haber estudiado el tema, estarán en condiciones de poder traducir este concepto a la noción de pendientes.

Como resultado de estos hallazgos, los autores insisten en la importancia de conocer previamente cómo representan los estudiantes a la rapidez de la variación, con el fin de diseñar estrategias de enseñanza y contribuir al desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional, y de esta manera, favorecer los cambios conceptuales y mejorar el aprendizaje de la matemática de las variables.

Vrancken & Engler (2014) en su trabajo *Una Introducción a la Derivada desde la Variación y el Cambio*, buscan determinar cómo y qué enseñar para lograr que el estudiante

comprenda y dé sentido a los conceptos y procedimientos relacionados con el estudio de la derivada, de manera que contribuyan al desarrollo de su pensamiento y a la construcción de conocimiento matemático. Para este propósito el estudio se concentra en el análisis de diversos escenarios de cambio, en la caracterización de la relación entre las magnitudes a través del cálculo de razones de cambio, y en la correspondencia entre la pendiente de una curva y la razón de cambio.

Los autores afirman que en el sistema educativo actual se privilegian los aspectos lógico-formales (procesos de construcción y validación), así como los aspectos algorítmicos, dejando de lado la formación de ideas variacionales, con el propósito de que los estudiantes logren derivar, integrar o calcular límites elementales. Sin embargo, estos estudiantes no son capaces de asignar un sentido más amplio a las nociones involucradas, lo que ocasiona dificultades en el aprendizaje del concepto. Esta afirmación se ratifica al analizar los resultados de un cuestionario inicial, que revela las deficiencias que presentan los estudiantes con respecto a las nociones variacionales básicas necesarias para la comprensión y utilización de conceptos fundamentales como el de derivada.

Los problemas detectados para el tratamiento y conversión entre registros, especialmente para interpretar información presentada gráficamente, dificultan la posibilidad de que los estudiantes visualicen los conceptos o determinados aspectos de los mismos. Para dar solución a esta problemática, los investigadores plantean un acercamiento visual e intuitivo a los conceptos del cálculo diferencial partiendo del estudio de la variación, y atendiendo tres de sus aspectos básicos: el cambio, la razón media de cambio y la razón instantánea de cambio —ya que en estas nociones se encuentra el origen de la derivada—. En consecuencia los resultados destacan el papel de la visualización como parte del diseño de las situaciones propuestas, ya que buscan que los estudiantes obtengan información relevante y expliquen sus conjeturas a través de las gráficas presentadas en las diferentes actividades.

Por otro lado, Ruiz & Carreto (2012) desarrollan el trabajo *Uso de la Tecnología Como Apoyo en el Aprendizaje de Cálculo*, que da cuenta del diseño e implementación de un software que utiliza diferentes estrategias didácticas en torno a la resolución de problemas de razones de cambio. La investigación se desarrolló con una muestra de 30 estudiantes que cursaban la

materia de Cálculo diferencial e integral en ingeniería en la Escuela Superior de Cómputo en México. Los datos fueron recolectados a partir de protocolos verbales, producto de las reflexiones de los estudiantes y de los docentes.

Como resultado de la intervención, los autores encontraron que con el empleo de diversas estrategias, como visualizaciones, simulaciones y registros de representación semiótica, se posibilita el paso de procesos reflexivos a procesos sistemáticos, permitiendo que los estudiantes adquieran elementos cognitivos y comunicativos que facilitan el aprendizaje.

Sánchez-Matamoros et al. (2008) ofrecen un estudio titulado *La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática*. El objetivo de este trabajo es revisar y organizar las aportaciones de las investigaciones hechas en Matemática Educativa para identificar el conocimiento generado y las áreas donde es necesario contribuir con información referente a la didáctica en la enseñanza de la Derivada. Los autores estructuran esta revisión considerando: (1) lo que se conoce sobre la comprensión de la derivada de una función en un punto, (2) el papel que desempeñan los sistemas de representación y (3) las características del desarrollo del esquema de derivada.

Durante el desarrollo del estudio, se introduce el estudio del lenguaje variacional, y se identifican tres líneas de investigación necesarias para aumentar la comprensión de cómo los estudiantes dotan de significado y usan el concepto de derivada: (1) la relación entre los conceptos básicos de razón de cambio y cociente incremental —derivada en un punto—, (2) los sistemas de representación —gráfica, verbal e icónica— y (3) la relación entre la derivada de una función en un punto y la función derivada.

Esta investigación, demuestra la influencia que tienen los contextos en el aprendizaje de la razón de cambio, y subraya en que únicamente se alcanzará una comprensión completa de la derivada cuando se reconozcan y reconstruyan los significados de razón, límite y función en diferentes entornos. Como resultado, los autores sugieren diseñar nuevos estudios que aporten en la comprensión de cómo los estudiantes entienden y significan el concepto de derivada.

En la misma línea de investigación, Rojas Celis & Guacaneme Suárez (2013) desarrollaron el estudio *¿Qué nos dicen las investigaciones en didáctica de las matemáticas*

sobre la enseñanza de la derivada? Este trabajo describe y clasifica algunas investigaciones — 45 artículos de tesis de maestría y de Doctorado— sobre la enseñanza de la derivada y la formación de docentes de Matemáticas mediante el empleo de los enfoques descritos por Font (2002) y por Guacaneme & Mora (2013) (citados en Sánchez-Matamoros et al., 2008, p. 201) respectivamente con el propósito de determinar cuál de estos enfoques se utiliza con mayor frecuencia.

Los hallazgos señalan, una mayor tendencia hacia el uso los enfoques sistémicos y semióticos y una tendencia menor hacia los enfoques socioculturales. Los investigadores sugieren realizar trabajos de investigación que permitan determinar el tipo de conocimiento que debe dominar y transmitir un formador de profesores de Matemáticas responsable de impartir cursos sobre la enseñanza del Cálculo Diferencial. Ya que es probable que el reconocimiento de variación y cambio de las derivadas dentro de contextos profesionales y laborales dependa de que los profesores en formación logren apropiarse de los hallazgos fundamentales en didácticas sobre la derivada.

El trabajo *Modelación y Tecnología en el Estudio de la Tasa de Variación Instantánea en Matemáticas* (Villa-Ochoa et al., 2018), tiene como propósito presentar las contribuciones que las tecnologías digitales ofrecen a la comprensión de la tasa de variación instantánea. Esta investigación se basa en un estudio de caso, realizado con cuatro estudiantes de un curso de pre-cálculo (de un programa de ingeniería de una universidad pública en Medellín). La recolección de la información se hizo mediante el uso de protocolos verbales, y el proceso se realizó utilizando software de modelado (como Geogebra y Modellus). Los estudiantes recibían elementos gráficos (como rectángulos y segmentos) que representaban la variación a lo largo de una función (casi siempre una parábola), de manera que ellos debían evidenciar y determinar la tasa incremental.

La investigación demuestra la incidencia que tienen las tecnologías digitales, la modelación y su aplicación en contextos y experiencias propias de los sujetos (que pueden tener diversidad de significados e interpretaciones) para pasar de la tasa de variación media a la comprensión de la tasa de variación instantánea. En las tareas presentadas a la muestra, la modelación involucra el reconocimiento del fenómeno de variación, las cantidades variables y

constantes implicadas y las relaciones que permiten construir modelos que representan la covariación (variación de más de una variable, en función de otras).

Los investigadores encontraron que para poder acercar al estudiante al concepto de la tasa de variación instantánea, es importante enlazar el contexto propio de la experiencia de los estudiantes y la posibilidad de experimentar, representar y confrontar contextos a través de la tecnología. La participación de la modelación y las tecnologías constituyó un sistema de experiencias, significados y representaciones en donde la tasa de variación instantánea cobró sentido para los estudiantes.

Los autores expresan la necesidad de diseñar ambientes que permitan que los estudiantes se enfrenten a experiencias de modelación con tecnología, en la que los objetos matemáticos puedan tener diversidad de significados e interpretaciones; y hacen énfasis en que el estudio de la tasa de variación, representa un aspecto crítico, toda vez que requiere de los usos de los contextos y las representaciones (citando a Herbert y Pierce, 2012; Vrancken y Engler, 2014).

Se concluye este primer grupo con la investigación *La visualización didáctica en la formación inicial de profesores de matemáticas: el caso de la derivada en el curso de Cálculo I* (Ordoñez et al., 2015), en la cual se analiza el papel que los docentes y estudiantes le asignan a la visualización en el proceso de enseñanza aprendizaje del concepto de derivada. La muestra correspondió a un curso de Cálculo I, ofrecido a estudiantes de los programas de Matemáticas, Física y Licenciatura en Educación Básica con énfasis en Matemáticas, de la Universidad del Valle. El estudio se basó en un análisis centrado en el tetraedro didáctico de Bedoya (2002), y se emplearon tres instrumentos para la recolección y procesamiento de la información: (1) entrevistas al docente y estudiantes del curso (2), observación de clase y (3) documentación.

Los autores destacan el hecho de que el proceso de enseñanza de la derivada en muchos casos, se aborda como la pendiente de la recta tangente a una curva (acepción geométrica y poco variacional), desde esta perspectiva se excluyen otras representaciones que proporcionan una información mucho más amplia de la derivada, por esto los autores resaltan la necesidad de representar de formas diferentes el concepto de derivada, puesto que el uso de una única representación, conlleva a una serie de limitaciones que podrían inducir al estudiante a desconocer atributos del objeto matemático.

Simulaciones Interactivas y Andamiajes.

En general, las investigaciones que estudian la influencia del uso de andamiajes en herramientas tecnológicas, se centran en cómo cambian los procesos cognitivos de los estudiantes, cuando se le proporcionan dichos andamios. Al ser ambientes virtuales con interactividad, los andamios van de la mano de simulaciones de situaciones reales (Chen, Wu, & Jen, 2013), que le ayudan al estudiante a dar contexto a elementos que solo trabajaban de forma algorítmica. Lo anterior da cuenta de la estrecha relación que puede establecerse entre andamiajes y simulaciones.

La primera investigación que se abordará es: *Implicit scaffolding in interactive simulations: Design strategies to support multiple educational goals* (Podolefsky, Moore, & Perkins, 2013) —Andamiajes implícitos en simulaciones interactivas: Diseño de estrategias para apoyar múltiples objetivos educativos—. Esta investigación provee un marco de referencia para el diseño de andamiajes implícitos para el aprendizaje mediado por herramientas tecnológicas en ambientes virtuales de aprendizaje (AVA), específicamente para el diseño de simulaciones interactivas. Para esta investigación se desarrollaron 125 simuladores en diversos temas, y para diversos niveles educativos, durante un proceso en el que se aplicaron más de 600 entrevistas y protocolos verbales individuales a estudiantes y que incluyó numerosos estudios en el aula.

A través de este estudio se evidencia que los estudiantes perciben a los simuladores como espacios de exploración atractivos y abiertos, mientras que el andamiaje implícito proporciona indicaciones y orientación, por lo que los estudiantes se inclinan a interactuar con el simulador de manera productiva. La investigación pone de manifiesto, el propósito que se tiene al emplear los andamiajes implícitos: apoyar una gama de objetivos educativos, incluidos el afecto, el proceso y el contenido. En particular, el uso de andamiajes implícitos crea entornos que son productivos para el aprendizaje de conceptos y son capaces de respaldar simultáneamente los objetivos del aprendizaje del estudiante (objetivos que pueden ser ignorados en entornos de aprendizaje más dirigidos).

Los resultados proporcionan un ejemplo del proceso mediante el cual los andamiajes implícitos pueden apoyar la exploración productiva de los estudiantes (sin que estos sepan que están siendo guiados) con una simulación por computadora. Los investigadores concluyen que el

uso de andamiajes implícitos y simulaciones motiva a los estudiantes a participar de los procesos de investigación, favorece el desarrollo de la comprensión conceptual, permite hacer conexiones con la vida cotidiana y los ayuda a tomar posesión de la propia experiencia de aprendizaje.

En la investigación A software Tool for Promoting Self-Regulation. Educational Research and Evaluation (Hadwin & Winne, 2001), cuyo objetivo es es ilustrar cómo la teoría contemporánea del aprendizaje se puede utilizar para impulsar la innovación educativa y la mejora tecnológica en el salón de clases, los investigadores emplean andamiajes implícitos y explícitos en la implementación de un cuaderno electrónico al que llamaron CoNoteS2.

Los andamiajes son usados para monitorear y controlar, metacognitivamente, el compromiso del estudiante en cuatro fases del estudio, mediante el aprendizaje autorregulado. Los andamiaje implícitos usados por los investigadores eran herramientas que estaban destinadas a indicar a los estudiantes que debían atender aspectos particulares del libro electrónico, pero sin dirigirlos explícitamente o instruir a que estudiaran determinadas actividades.

Estos andamiajes consistían, por ejemplo, en que el estudiante entendiera cuál era el objetivo de la tarea propuesta en el libro electrónico, y pensara en los elementos mínimos que su profesor esperaba para la entrega de la tarea. Adicionalmente, se esperaba que usara el CoNoteS2 para llevar registro de las notas de consulta necesarias para llevar a cabo la tarea propuesta. En cambio, los andamiaje explícitos consistían en ventanas de notas que ofrecían esquemas para representar la información que consideraban relevante. Lo anterior les permitía jerarquizar y ordenar, entre otros procesos.

Los investigadores consideran importante investigar cómo los estudiantes navegan y usan herramientas de hipermedia para mejorar el aprendizaje (MacGregor, 1999). Específicamente, ¿qué pruebas tenemos de que estas herramientas de instrucción sean compatibles? ¿Qué tipo de procesos complejos y dinámicos exige la reforma educativa? ¿Estas tecnologías informáticas promueven tácticas y estrategias indicadas de aprendizaje autorregulado (SRL)? Adicionalmente, dan cuenta del hecho que los andamiajes, tanto implícitos como explícitos cumplen un papel a tener en cuenta para futuras investigaciones, toda vez que permiten que el estudiante use herramientas tácticas que se verán reflejadas en un aprendizaje óptimo.

Posteriormente, (López, Hederich & Christian, 2010), en su investigación: Efecto de un andamiaje para facilitar el aprendizaje autorregulado en ambientes hipermedia, que presenta como uno de sus objetivos, aportar información empírica sobre el incremento en los niveles de autorregulación logrados por los aprendices que trabajan en parejas, en comparación con estudiantes que trabajan de forma individual, cuando interactúan con el ambiente hipermedia sobre transformaciones geométricas en el plano.

La investigación propuesta es un diseño factorial 2x2, donde las variables independientes, son: (1) dimensión social del aprendizaje, con dos valores: trabajo individual y trabajo acompañado con otro par —co-regulación— y, (2) trabajo con ambiente hipermedia, con dos valores: presencia y ausencia de andamiaje de regulación. La variable dependiente de la investigación es el desarrollo de la capacidad autorreguladora por parte de los estudiantes.

El ambiente hipermedia, cuenta con un andamiaje mixto y está compuesto por seis unidades, cada una con dos módulos para su estudio: 1. Módulo teórico, el cual comprende básicamente la definición, características, variables y ejemplos de transformaciones geométricas y, 2. Módulo práctico, constituido por una herramienta de simulación y tercer lugar, el ambiente hipermedia el cual contiene un andamiaje autorregulador mixto que apoya al estudiante para que sea capaz de utilizar eficazmente el entorno computacional y logre las metas de aprendizajes propuestas, ya sea de forma individual o colaborativa.

Los resultados obtenidos por los investigadores, sugieren que el aprendizaje de las matemáticas a través de un sistema hipermedia, que incluya en su estructura un andamiaje autorregulador y usado entre parejas de estudiantes de secundaria, puede facilitar significativamente el desarrollo de la competencia autorreguladora del aprendizaje. Además, consideran que entender los procesos que intervienen en la regulación del aprendizaje permitirá tener una mejor comprensión de los factores que pueden influir en el aprendizaje y desempeño de nuestros estudiantes cuando interactúan con escenarios computacionales.

El siguiente artículo se enmarca en la línea de aprendizaje de las matemáticas y su relación con el uso de andamiajes, *The enhancement of students' mathematical self-efficacy through teaching with metacognitive scaffolding approach* (Prabawanto, 2018) —La mejora de la autoeficacia matemática en los estudiantes a través de enseñanza con enfoque de andamios metacognitivos— y su objetivo es indagar en la mejora de la autoeficacia matemática con la intervención de andamiajes metacognitivos. La muestra tomada para este estudio fue de 118 estudiantes (60 como grupo experimental y 58 como grupo de control) del programa de educación de maestros de escuela primaria que recibieron curso de educación matemática, en una universidad de Bandung. El grupo experimental trabajó con andamiajes metacognitivos, mientras que el grupo de control trabajó bajo un enfoque directo.

Los resultados demuestran que aunque no se evidencia una relación directa entre la capacidad matemática previa y la mejora de la autoeficacia matemática mediante el uso del andamiaje, sí hubo una diferencia significativa en la mejora de la autoeficacia matemática entre los estudiantes que tomaron el curso apoyado en el andamiaje y los estudiantes que tuvieron un enfoque directo. Los autores reconocen las limitaciones en el tratamiento del tema y recomiendan ampliar la investigación a otros temas y aspectos relacionados.

Continuando con las investigaciones que incluyen andamiajes y simulaciones interactivas se encuentra la investigación *Designing online scaffolds for interactive computer simulation* (Chen et al., 2013) —Diseñando de andamiajes en línea para simulaciones interactivas— cuyo propósito es examinar la efectividad de los andamiajes que incluyen simulaciones en línea para facilitar el aprendizaje de conceptos científicos complejos.

La muestra tomada para esta investigación fue de 75 estudiantes de la escuela secundaria de Taiwán (con una edad promedio de 16 años). La metodología es mixta, es decir, cualitativa y cuantitativa, toda vez que los estudiantes, por un lado presentaron una prueba de conocimientos previos –pretest- luego de esto interactuaron con la herramienta diseñada por los autores, dicha herramienta podía ser usada por el estudiante sin límite de tiempo y respetando los estilos de aprendizaje. Luego de esto, los estudiantes reciben un cuestionario de auto-informe, en el que ellos evalúan la utilidad de los andamiajes online. Finalmente, algunos estudiantes son entrevistados empleando protocolos verbales para recopilar la información.

Esta investigación ofrece datos importantes sobre cómo deberían diseñarse los andamiajes en línea (online) y cómo aumentar la investigación científica y la comprensión con el aprendizaje basado en la simulación. Los mecanismos de andamiaje son importantes para evaluar los aprendizajes y proporcionar soportes de retroalimentación inmediata, que ayudan a los estudiantes a avanzar en su aprendizaje. Los resultados demuestran que la interacción de los estudiantes con los andamiajes es favorable ya que les ayuda a comprender conceptos científicos, apoya su proceso de investigación y regula su aprendizaje en la simulación.

Un hallazgo importante es que el sistema debe realizar un seguimiento de las acciones de los estudiantes y repetir estas acciones a petición, esto puede ayudar a que los estudiantes establezcan metas para sus necesidades de aprendizaje. Finalmente los investigadores refieren que los procesos y las herramientas específicas para estructurar la colaboración y el intercambio de modelos entre los estudiantes necesitan un mayor desarrollo y estudio ya que la introducción de indicaciones adaptativas para diferentes grupos de estudiantes podría mejorar el acceso durante la simulación, también el sistema podría ofrecer rutas de aprendizaje personalizadas permitiendo el acceso no secuencial, aumentando la motivación y el interés de los estudiantes en su propio aprendizaje, además de proporcionar una evaluación dinámica y un mayor apoyo para el progreso del estudiante.

Estilos Cognitivos y Aprendizaje Mediado por Andamiajes.

A continuación se muestran algunas investigaciones que estudian los estilos cognitivos y cómo estos intervienen en ambientes mediados por andamiajes. En general, dichas investigaciones están divididas entre aquellas que evidencian efectos de la dimensión DIC sobre el aprendizaje de conceptos matemáticos, y aquellas en las que el ambiente virtual de aprendizaje es tan robusto, que neutraliza el efecto en los diferentes estilos de aprendizaje (Valencia, López, & Sanabria, 2018).

La primera investigación de este grupo es *Logro en matemáticas, autorregulación del aprendizaje y estilo cognitivo* (Vargas, Hederich-Martínez, & Uribe, 2012), en este trabajo los investigadores indagan acerca de la relación entre estrategias de aprendizaje autorregulado y el estilo cognitivo en la dimensión DIC. En este estudio participaron 128 estudiantes (62 hombres y 66 mujeres), pertenecientes a cuatro cursos del grado décimo de un colegio oficial de la ciudad

de Bogotá. Los instrumentos empleados fueron: el Cuestionario de Estrategias de Aprendizaje y Motivación —MSLQ— (R Pintrich, A. F. Smith, Duncan, & McKeachie, 1991), la Prueba de Figuras Enmascaradas —EFT—(Sawa, 1966), y como indicador de logro académico las calificaciones obtenidas en Matemáticas en los dos periodos anteriores.

Los resultados muestran una mayor correlación entre el comportamiento autorregulado y el logro de aprendizaje que la que existe entre la independencia de campo y el logro; sin embargo, existe una relación directa entre la autorregulación y la independencia de campo. Los investigadores encontraron que de todas las escalas que contiene el MSLQ solamente la autoeficacia y la autorregulación están relacionadas con el estilo, aunque esto puede deberse a la diferencia en la naturaleza de los dos instrumentos de medición.

Finalmente, los investigadores ponen a consideración, el hecho de que de todas las escalas que contiene el MSLQ, solo dos: la autoeficacia y la autorregulación metacognitiva, están relacionadas con el estilo cognitivo. Lo anterior es justificado por los autores teniendo en cuenta la naturaleza de los dos instrumentos; ya que mientras que el instrumento para medir el estilo cognitivo (EFT) requiere de la realización de una tarea específica, que no es subjetiva, el cuestionario MSLQ es un test donde el estudiante da cuenta de su propia percepción, pero que puede generar un sesgo en los resultados, toda vez que la subjetividad de lo que el estudiante considera “socialmente aceptable” puede viciar los resultados.

El siguiente artículo presenta la investigación *Efecto de un activador computacional de autoeficacia sobre el logro de aprendizaje en estudiantes de diferente estilo cognitivo* (López & Triana, 2013), en esta investigación se contrasta el efecto de un módulo de autoeficacia sobre el logro de aprendizaje en la resolución de problemas con números fraccionarios, examinando la interacción entre logro de aprendizaje, eficacia personal y estilo cognitivo en la dimensión DIC.

En el estudio participaron 50 estudiantes (33 hombres y 17 mujeres), correspondientes a dos cursos del grado quinto de primaria de un colegio público del municipio de Soacha, departamento de Cundinamarca. El grupo experimental trabajó con módulo de autoeficacia, mientras que el grupo de control no obtuvo este apoyo. Al igual que en el caso anterior, los instrumentos empleados fueron: el Cuestionario de Estrategias de Aprendizaje y Motivación —MSLQ— (R Pintrich et al., 1991), la Prueba de Figuras Enmascaradas —EFT—(Sawa, 1966) y

como indicador de logro académico el promedio de las evaluaciones presentadas al final de cada una de las cuatro unidades de aprendizaje del software (llamado FractioXtream).

Se concluye que existe una relación significativa entre estilo cognitivo y la percepción de autoeficacia, y se sugiere que la variable de tipo motivacional tiene una incidencia positiva en los resultados obtenidos. Los autores exaltan la importancia de que la autoeficacia sea tenida en cuenta no solo en el diseño de ambientes computacionales, sino en escenarios de aprendizaje tradicional. Adicionalmente, los investigadores recomiendan que el ambiente debe ser flexible, lo cual le permite al estudiante aprender a su ritmo de aprendizaje, evitando que caiga en escenarios demasiado fáciles o demasiado difíciles, lo que generaría desmotivación en el estudiante.

En la misma línea de andamiajes y estilo cognitivo se encuentra la investigación *Effect of motivational scaffolding on e-learning environments: self-efficacy, learning achievement, and cognitive style* (Valencia et al., 2018) —Efecto de un andamiaje motivacional en un AVA: autoeficacia, logro de aprendizaje y estilo cognitivo— Aquí los investigadores estudiaron los efectos de los andamiajes motivacionales que favorecen la autoeficacia y mejoran logros de aprendizaje en estudiantes con diferentes estilos cognitivos en la dimensión DIC cuando interactúan en un entorno e-learning en matemáticas.

La metodología es experimental con diseño factorial 2x3. Los factores a tener en cuenta, son: (1) presencia o ausencia del andamiaje motivacional en el entorno de e-learning y (2) estilo cognitivo, con tres valores: dependientes de campo, intermedios, e independientes. Las variables dependientes fueron Autoeficacia académica y logros de aprendizaje. La muestra fue de Sesenta y cinco (65) estudiantes (10 mujeres y 55 hombres) matriculados en la licenciatura en Diseño Tecnológico por la Universidad Pedagógica Nacional en Bogotá, Colombia.

Este estudio demostró que la interacción con el entorno computacional neutraliza los efectos del estilo cognitivo ya que al establecer metas se difuminan las brechas existentes entre los diferentes estilos. Asimismo, se evidenciaron diferencias significativas en el logro de aprendizaje y la autoeficacia académica, atribuibles al efecto del andamiaje; sin embargo, con el instrumento utilizado para medir la autoeficacia, los estudiantes tienden a proporcionar respuestas socialmente aceptadas, lo que proporciona un componente altamente subjetivo, por lo que se recomienda utilizar otros indicadores que muestren la autoeficacia de los alumnos de

forma más objetiva. Adicionalmente, aunque los resultados encontrados son importantes, un mayor número de participantes (la muestra fue de 65 estudiantes) habría permitido generalizar los hallazgos del estudio.

En la investigación *Estilos cognitivos, motivación y rendimiento académico en la universidad*, de Curione, Míguez, Crisci, & Maiche (2010), se presenta como objetivo estudiar la relación entre estilos cognitivos y rendimiento académico en estudiantes de Ingeniería, así como la relación entre estilos cognitivos y las variables: procedencia geográfica, sexo e instituto de enseñanza media —público o privado—. Para esto toman una muestra de 222 estudiantes, de los cuales el 65% pertenece a instituciones públicas y el porcentaje restante a instituciones privadas. En cuanto a instrumentos empleados, se aplicó el EFT (Test de Figuras Enmascaradas) y la motivación fue evaluada a partir de un cuestionario de autoaplicación que consta de 69 preguntas (Míguez, 2008), que corresponden a una adaptación del cuestionario español Motivación de Aprendizaje y Ejecución (MAPE).

En los resultados de esta investigación, se encontró que existe una correlación significativa entre el puntaje obtenido por los estudiantes en Matemática, Física y Química y el puntaje en EFT. Por otro lado, las variables procedencia geográfica e instituto de enseñanza media de origen, no muestran correlación con el puntaje EFT; y pese a lo visto en otras investigaciones, la variable sexo no condiciona los puntajes obtenidos.

Effects of the use of a flexible metacognitive scaffolding on self-regulated learning during virtual education (Hederich-Martínez, López-Vargas, & Camargo-Uribe, 2016) —Efectos del uso de un andamiaje metacognitivo y adaptativo sobre el aprendizaje y la autorregulación en cursos de educación virtual— es una investigación donde se explora la relación entre el uso de un andamiaje adaptativo flexible (que hace parte de un curso en línea de contenido declarativo y procedimental) y los estudiantes con diferentes estilos cognitivos en la dimensión DIC, de sus logros y sus capacidades de aprendizaje autorregulado.

La muestra que participó del estudio fueron 52 estudiantes (28 hombres y 24 mujeres) del máster o doctorado en Educación la Universidad Pedagógica Nacional. En el grupo experimental participaron 26 estudiantes que trabajaron con un andamiaje denominado Amadis. El grupo control, también con 26 integrantes, trabajó sin el uso de andamiajes. Se emplearon 3

instrumentos para la recolección de la información: Pruebas de logro de aprendizaje, que arrojaron un dato numérico a partir de 4 talleres aplicados a lo largo del semestre, el Cuestionario de Estrategias de Aprendizaje y Motivación —MSLQ— (R Pintrich et al., 1991) y la Prueba de Figuras Enmascaradas —EFT—(Sawa, 1966).

Los resultados muestran que los estudiantes que trabajaron con el andamiaje obtuvieron un mayor rendimiento que quienes no contaron con este apoyo, no obstante se evidenciaron resultados inferiores para los estudiantes dependientes de campo (especialmente del curso procedimental). En cuanto a la autorregulación, aunque se encontró de acuerdo a los resultados del autoinforme, que el uso del andamiaje no afectó ninguna de las dimensiones de aprendizaje autorregulado; existe una distancia entre esta medición y las conductas autorreguladoras reales (Prabawanto, 2018), pues los resultados muestran una asociación importante entre el uso del andamiaje y el número de entradas al curso (claro indicador de dedicación y por ello de aprendizaje autorregulado).

Un aporte importante para la presente investigación, es que el uso del andamiaje favoreció a los participantes del curso de tipo procedimental sobre los de contenido declarativo, evidenciando que este tipo de apoyo favorece las actividades prácticas y formativas. En cuanto al estilo cognitivo, este estudio evidencia —podría decirse que reafirma lo encontrado en otros estudios a nivel mundial— la relación orientada hacia los logros más bajos para los estudiantes dependientes del campo, especialmente en el curso de trabajo procedimental, así mismo una mayor demora en las presentaciones de tareas, y un mayor número de entradas o logins al curso. Estos resultados parecen indicar, una mayor dificultad para completar el curso procedimental para los estudiantes dependientes de campo. Finalmente, los investigadores enfatizan en la necesidad de rediseñar la interfaz gráfica de la plataforma, ya que debido a las limitaciones en este aspecto, los estudiantes ignoraron la estrategia metacognitiva que era clave para el desarrollo de la investigación.

Marco Teórico

Conceptualización Matemática

Una parte importante de las investigaciones que pretenden explicar los fenómenos relacionados con el aprendizaje matemático dan cuenta de la complejidad inherente a la adquisición de conocimientos (Hitt, 2003), de esta manera, los sistemas de representación cobran especial importancia partiendo de lo que Duval (1998) llama la Paradoja Cognitiva, "por un lado, la aprehensión de los objetos matemáticos no puede ser otra cosa que una aprehensión conceptual y, por otro lado, solamente por medio de las representaciones semióticas es posible una actividad sobre los objetos matemáticos" (Duval 1998, p. 175). Así se establece la necesidad de considerar como necesaria la interacción que existe entre diferentes representaciones del objeto matemático, pues cada representación es parcial respecto al objeto representado.

Desde este marco referencial la visualización en el aprendizaje de las matemáticas juega un papel fundamental, pues se relaciona con la comprensión de conceptos mediante diversas representaciones (ya sean visuales o no) que motivan a los estudiantes a realizar acciones encaminadas a la resolución de los problemas matemáticos (Hitt, 2003). Sobre este aspecto Skemp (1971) hace énfasis en que la sistematización de las actividades en la construcción de un pensamiento matemático más evolucionado constituye una de las fases finales y no la única actividad dentro del proceso, como suele presentarse en los procesos de enseñanza aprendizaje tradicionales, donde los profesores se inclinan por el sistema algebraico para el desarrollo de su práctica docente.

Para Duval (1998) el sistema de representación debe permitir tres actividades cognitivas: (1) La presencia de una representación, (2) el tratamiento de una representación y (3) la conversión de una representación (Tabla 1). De esta manera, para obtener la aprehensión de un concepto determinado, es necesario que se establezca una relación entre los diferentes registros de representación, en este punto, es necesario aclarar que dicha relación no se establece de manera espontánea y "la coordinación de los diferentes registros de representaciones aparece como una condición fundamental para el aprendizaje en aquellas disciplinas donde los datos son representaciones semióticas" en este sentido dice Duval (1998):

En los sujetos, una representación puede funcionar verdaderamente como representación, es decir, darle acceso al objeto representado, sólo cuando se cumplen dos condiciones: que dispongan de al menos dos sistemas semióticos diferentes para producir la representación de un objeto, de una representación, de un proceso... y que puedan convertir “espontáneamente” de un sistema semiótico a otro las representaciones producidas, sin siquiera notarlo. (Duval, 1998, p. 152).

De esta manera, al trabajar en la construcción de conceptos matemáticos, es muy importante realizar tareas de conversión de una representación a otra y no trabajar dentro de un sistema de representación único, pues es en este diálogo donde se favorece la construcción de conceptos matemáticos. Es así como se hace insuficiente en el aula de clase la simple exposición teórica, ya que es necesario para el estudiante emplear diversos registros de representación para adquirir y fijar el conocimiento

Tabla 1

Actividades cognitivas Duval (1998)

Presencia de una representación	Identificable como una representación de un registro dado
Tratamiento de una representación	La transformación de la representación dentro del mismo registro donde ha sido formada.
Conversión de una representación	Transformación de la representación en otra de otro registro, en la que se conserva la totalidad o parte del significado de la representación inicial. Tal actividad cognitiva es diferente e independiente a la del tratamiento.

Pensamiento Variacional

En el proceso de enseñanza aprendizaje se diferencian cinco tipos de pensamiento: numérico, espacial, métrico, estocástico y variacional; este último se refiere a una manera dinámica de pensamiento enfocado la producción mental de sistemas que asemejen o repliquen sistemas de covariación que suceden en la realidad (Vasco, 2002). El pensamiento variacional se ha definido como un estilo propio de razonamiento relacionado con conceptos matemáticos dinámicos (Carlson, Jacobs, Coe, Larsen, & Hsu, 2003) como por ejemplo: función (el deseo de

cuantificar las cosas), derivada (la manera en la cual las cosas se cambian), integral (la manera en la cual las cosas se acumulan) y ecuaciones diferenciales (relación entre las cosas) (Vahos, 2016).

“El objeto del pensamiento variacional es la covariación entre cantidades de magnitud, principalmente las variaciones en el tiempo, y su propósito rector es tratar de modelar los patrones que se repiten en la covariación entre cantidades de magnitud en subprocesos de la realidad” (Vasco, 2002).

Pongamos un ejemplo. El profesor sostiene una pelota de caucho en cada mano, y las lanza al aire alternativamente, sin hacer malabares. El estudiante trata de percibir la variación de cada una en el tiempo, y luego la covariación de una con otra. Nota que la una se mueve mientras la otra está quieta. Puede reproducir mentalmente el movimiento que hace el profesor, lanzar las pelotas al mismo ritmo, a la misma altura que él y hasta se animaría a hacerlo con dos pelotas reales. Algo tiene que estar pensando para poderlo hacer. Algún modelo imaginativo tiene que tener en la cabeza para poder imitarlo. Trata de precisarlo verbalmente. Trata de pintar unos ejes de coordenadas y de escribir unas ecuaciones. Ahí viene el problema. La representación pictórica es estática. Las fórmulas son difíciles. Los ensayos fracasan. El pensamiento variacional se queda atascado y viene el desánimo y el abandono de la tarea (Vasco, 2002, p. 63).

Existen diferentes momentos claramente diferenciables que caracterizan a este tipo de pensamiento: En un primer momento se perciben los elementos que son sujetos al cambio y los elementos que permanecen constantes frente a diversos patrones que se pueden repetir en determinados procesos como cambios de temperatura, movimientos de caída libre o tiro parabólico; un segundo momento da paso a la creación de diferentes modelos mentales en los que se reproducen las covariaciones encontradas; un tercer momento permitirá activar los modelos planteados para confrontarlos con los resultados producidos y compararlos con el proceso que se está modelado; para finalmente, depurar el modelo o descartarlo e iniciar de nuevo.

Puede crearse un momento intermedio de formulación simbólica con la intermediación de palabras o dibujos. Este simbolismo puede ser de tipo verbal, gestual, pictórico, simbólico—

formal, representativo o simulatorio, y apoya la creación de modelos mentales (Vasco, 2002). Por otro lado, Carlson et al. (2003) sugieren la existencia de acciones mentales vinculadas específicamente al razonamiento covariacional, estas acciones mentales proporcionan un medio para clasificar los comportamientos que se evidencian cuando los estudiantes desarrollan tareas de covariación (Tabla 2).

Tabla 2

Acciones mentales del marco conceptual para la covariación (Carlson et al., 2003)

Acción mental	Descripción de la acción	Comportamientos
AM1	Coordinación del valor de una variable con los cambios en la otra.	Designación de los ejes con indicaciones verbales de coordinación de las dos variables.
AM2	Coordinación de la dirección del cambio de una variable con los cambios en la otra variable.	Construcción de una línea recta creciente. Verbalización de la consciencia de la dirección del cambio del valor de salida mientras se consideran los cambios en el valor de entrada.
AM3	Coordinación de la cantidad de cambio de una variable con los cambios en la otra variable.	Localización de puntos/construcción de rectas secantes. Verbalización de la consciencia de la cantidad de cambio del valor de salida mientras se consideran los cambios en el valor de entrada.
AM4	Coordinación de la razón de cambio promedio de la función con los incrementos uniformes del cambio en la variable de entrada	Construcción de rectas secantes contiguas para el dominio. Verbalización de la consciencia de la razón de cambio del valor de salida (con respecto al valor de entrada) mientras se consideran incrementos uniformes del valor de entrada
AM5	Coordinación de la razón de cambio instantánea de la función con los cambios continuos en la variable independiente para todo el dominio de la función.	Construcción de una curva suave con indicaciones claras de los cambios de concavidad. Verbalización de la consciencia de los cambios instantáneos en la razón de cambio para todo el dominio de la función (los puntos de inflexión y la dirección de las concavidades son correctos).

El propósito principal del pensamiento variacional es la modelación, independientemente de la resolución de problemas. De esta manera, Vasco (2002) plantea varias fases para llevar a buen término la modelación:

- Captación de patrones de variación: qué cambia y qué permanece.
- Creación de un modelo mental.
- Poner en marcha el modelo.
- Comparar los resultados con el proceso modelado.
- Revisión del modelo.

Con el apoyo tecnológico adecuado pueden agregarse fases adicionales:

- Formulación simbólica.
- Calcular a partir de la formulación.
- Comparar los resultados con el proceso modelado.
- Reformular el modelo.

En correspondencia, Carlson et al. (2003) plantean 5 niveles referidos de imágenes de la covariación: (1) Coordinación, (2) Dirección, (3) Coordinación cuantitativa, (4) Razón promedio y (5) Razón instantánea (tabla 3).

Tomando como referencia estos niveles, y debido a que el alcance de la investigación, es lograr la comprensión conceptual, se espera que los estudiantes alcancen el nivel 3 de coordinación cuantitativa, es decir, que sea capaz de sustentar las acciones mentales que le permita coordinar la dirección de cambio de una variable, con respecto a la otra; y de esta manera realizar las tareas que corresponden a esta etapa de desarrollo del pensamiento (AM3).

Tabla 3*Niveles de razonamiento covariacional (Carlson et al., 2003)*

N1	Coordinación	En el nivel de coordinación, las imágenes de la covariación pueden sustentar a la acción mental de coordinar el cambio de una variable con cambios en la otra variable (AM1)
N2	Dirección	En el nivel de dirección, las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la dirección del cambio de una de las variables con cambios en la otra. Las acciones mentales identificadas como AM1 y AM2 ambas son sustentadas por imágenes de N2
N3	Coordinación cuantitativa	En el nivel de la coordinación cuantitativa, las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la cantidad de cambio en una variable con cambios en la otra. Las acciones mentales identificadas como AM1, AM2 y AM3 son sustentadas por las imágenes de N3.
N4	Razón promedio	En el nivel de la razón promedio, las imágenes de covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la razón de cambio promedio de una función con cambios uniformes en los valores de entrada de la variable. La razón de cambio promedio se puede descomponer para coordinar la cantidad de cambio de la variable resultante con los cambios en la variable de entrada. Las acciones mentales identificadas como AM1 hasta AM4 son sustentadas por imágenes de N4.
N5	Razón instantánea	En el nivel de la razón instantánea, las imágenes de covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la razón de cambio instantánea de una función con cambios continuos en la variable de entrada. Este nivel incluye una consciencia de que la razón de cambio instantánea resulta de refinamientos más y más pequeños en la razón de cambio promedio. También incluye la consciencia de que el punto de inflexión es aquel en el que la razón de cambio pasa de ser creciente a decreciente o al contrario. Las acciones mentales identificadas como AM1 a AM5 son sustentadas por imágenes de N5

La Comprensión de la Derivada como Razón de Cambio

La Derivada, un Poco de Historia.

El concepto de Derivada, igual que el de límites se remonta a la época de los griegos, ellos se plantean cuatro problemas fundamentales: La velocidad, la recta tangente, el área bajo una curva y máximos y mínimos (estos problemas se resolvieron más adelante entre los siglos XVI y XVII). Fue el estudio de estos problemas y sus soluciones las que sentaron las bases a la función derivada. Entre los primeros estudios en la cultura griega, respecto a los procesos de variación se encuentran los de Zenón de Elea (450 a.C.), para quien el movimiento era

materialmente imposible y consideraba que el espacio y el tiempo se podían dividir de forma infinita.

Más adelante, aparece la escuela de los atomistas, precursores como Leucipo, Demócrito y Jenofonte, hacia los siglos V Y IV a.C., direccionaban sus teorías a rebatir los postulados de la escuela Eleática, centrándose en el materialismo, en lo tangible. Para esta escuela el movimiento se daba por la interacción de los átomos y consistía en una relación del espacio y el tiempo. En adelante la derivada y los límites comparten parte de su historia.

Arquímedes, Newton y Gauss trabajaron en el método de «exhaustión», logrando avances significativos en el estudio del movimiento y en áreas bajo la curva. Por otro lado, los matemáticos Johannes Kepler y Bonaventura Cavalieri fueron los primeros en trabajar con el concepto de infinitos, sentando las bases al actual cálculo infinitesimal. Durante el siglo XVII, el concepto de infinito fue cada vez más usado para resolver problemas de cálculos de tangentes, áreas y volúmenes; los cuales originaron el actual cálculo diferencial e integral, respectivamente.

A finales del siglo XVII Newton y Leibniz lograron reunir en dos procesos lo que hoy se conoce como derivadas e integrales. Desarrollaron reglas para calcular las derivadas y demostraron que dichos conceptos guardaban una relación inversa (teorema fundamental del cálculo).

En 1675 Leibniz abordó el cálculo diferencial. En su investigación conservó un estudio inclinado hacia la geometría, entendiendo la derivada como un cociente incremental (y no como una velocidad). A él se debe la denominación de cálculo diferencial y cálculo integral, así como los símbolos $\frac{dy}{dx}$ y el símbolo de la integral \int .

La Razón De Cambio.

La razón de cambio permite medir la variación de una cantidad con respecto a otra.

Por ejemplo, si se aumenta la temperatura de un gas contenido en un recipiente la presión del gas sobre las paredes del recipiente también aumenta; si se aumenta el precio de un artículo muy probablemente la demanda de éste cambiará; si se aumenta el

consumo diario de azúcar en una persona posiblemente el nivel de insulina cambie (Pineda, 2013 p. 6).

En cálculo, se define como un «cociente incremental o de diferencias», donde el cociente es el cambio o diferencia en el eje Y dividido por el respectivo cambio en el eje X , entendiendo que el cambio resulta de la diferencia entre una magnitud final y una inicial. En notación se representa de la siguiente manera:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Este resultado corresponde a la pendiente de la recta (tangente en un punto), de tal manera que al obtener la razón de cambio promedio se calcula la pendiente de la recta secante para la pareja de puntos considerados (Larson & Hostetler, 2006). La razón de cambio puede estar provista de un determinado significado contextual, ya que sugiere relaciones significativas entre las magnitudes; por ejemplo, si se desea estudiar el comportamiento de un objeto en movimiento —a través de la razón de cambio— es necesario conocer la velocidad media del mismo.

Tradicionalmente, los pasos utilizados para dar respuesta a los ejercicios que involucran razones de cambio son

- Trazar un diagrama que ilustre la situación descrita.
- Elaborar una lista de datos y las cantidades por determinar que varían con el tiempo, empleando notación matemática.
- Analizar el enunciado del problema y diferenciar entre, cuáles razones de cambio se conocen y cuál es la razón de cambio que se desconoce.
- Sustituir en la ecuación.

Como se observó anteriormente, las razones de cambio no son ajenas a nuestra cotidianidad; mientras se quiera conocer cómo y cuándo aumenta una variable en un intervalo de tiempo requerido, las razones de cambio cobran significado en campos como la economía, las ciencias sociales y la arquitectura. Así mismo, se emplean para hallar valores extremos (máximos y mínimos) de una situación modelable mediante una función.

Algunos ejemplos de aplicación en situaciones cotidianas pueden ser:

- La velocidad de enfriamiento —o calentamiento— de un cuerpo o un líquido es la razón de cambio de la temperatura con respecto al tiempo.
- El índice de precios es la razón de cambio de los precios con respecto al tiempo.
- El índice de natalidad es la razón de cambio de una población con respecto al tiempo.
- La pendiente de una recta es la razón de cambio de una variable dependiente con respecto a una variable independiente.
- La velocidad es la razón de cambio del desplazamiento de un objeto con respecto al tiempo (Pineda, 2013).

Razones De Cambio Relacionadas.

Cuando existe una tercera variable, y se quiere obtener la razón de cambio de una de ellas con respecto a otra, se habla específicamente de razones de cambio relacionadas. Por ejemplo, un tanque cilíndrico recibe agua desde un grifo, y a medida que el tiempo transcurre, varía el volumen del cilindro que está ocupado por agua, al tiempo que varía la altura o nivel del agua. Cada vez que transcurre una fracción de tiempo, estas variables presentan cambios por lo que se deduce que hay una razón de cambio entre las magnitudes.

Para dar respuesta a los ejercicios que involucran razones de cambio relacionadas, se plantea el siguiente esquema:

- Trazar un diagrama que ilustre la situación descrita.
- Elaborar una lista de datos y las cantidades por determinar que varían con el tiempo, empleando notación matemática.
- Analizar el enunciado del problema y diferenciar entre, cuáles razones de cambio se conocen y cuál es la razón de cambio que se desconoce.
- Plantear una ecuación que relacione las variables cuyas razones de cambio están dadas o han de determinarse.
- Usando la regla de la cadena, derivar implícitamente ambos miembros de la ecuación obtenida, con respecto al tiempo t , con el fin de obtener la ecuación de razones relacionadas.

El concepto de razón de cambio, se puede abordar desde lo conceptual, lo gráfico y lo matemático. La presente investigación indaga sobre la influencia de los simuladores en la construcción conceptual del de la noción de razones de cambio y su significación como derivada.

En contraposición, algunos autores abandonan estas definiciones y procesos estrictamente metodológicos y defienden la idea, de que hasta que no se vea la noción de derivada como una organización de las variaciones sucesivas, no será comprendida en su totalidad (Cantoral, Lezama, Farfán, & Martínez Sierra, 2006). Esto supone tener un acercamiento a la derivada basado en “la práctica social de la predicción mediante la matematización de fenómenos de cambio” (Montiel, 2005b, p. 671 citado en Sánchez-Matamoros et al., 2008, p. 271).

Modelación

Aunque en la literatura revisada no se encuentra una única definición de modelación matemática, un número importante de autores coinciden con lo formulado por Villa-Ochoa et al. (2018) quienes definen la modelación como un ejercicio de articulación entre dos elementos; el modelo —el mundo real— que actúa sobre lo modelado —las matemáticas—. Esta relación puede darse desde la evaluación, el diagnóstico o la predicción del elemento modelado.

Respondiendo específicamente al tema predictivo se han desarrollado mecanismos matemáticos que anticipan el comportamiento de sistemas complejos; así la predicción se concibe como una herramienta que apoya el desarrollo de resultados matemáticos y la construcción de conceptos, creados a partir de experiencias reales (Cantoral et al., 2006). La modelación, entonces, se basa en el diseño de actividades que motiven a los estudiantes a desarrollar procesos matemáticos que den sentido a situaciones significativas, estas actividades han de dirigirlos a desarrollar, comprender, modificar y utilizar los modelos para que tengan valor en un contexto en particular (Lesh & Doerr, 2003 citado en Ärlebäck, Doerr, & O’Neil, 2013). Así, Thompson (1994) sugiere la importancia del concepto de razón para la modelación del pensamiento variacional. Un concepto desarrollado, involucra la construcción de una imagen de cambio en alguna cantidad, y la formación de una imagen de covariación simultánea de dos cantidades.

De igual manera, a través de su investigación Ärlebäck et al. (2013) evidencian la utilidad de visibilizar mediante la modelación —específicamente en el proceso de aprendizaje de razones

de cambio— el razonamiento expresado de manera verbal, que incluye las dificultades del lenguaje relacionadas al describir cambios en diferentes direcciones (positivas y negativas). Así en un enfoque de modelado, el concepto y el uso del lenguaje, desempeñan un papel importante al respaldar el desarrollo del razonamiento de los estudiantes sobre los fenómenos cambiantes. De esta manera, la modelación puede llegar a ejercer como una potente herramienta que fortalezca el desarrollo del pensamiento variacional, permitiendo al estudiante adelantar procesos de razonamiento mucho más dinámicos.

Simulaciones

La simulación en el estudio del cambio, se origina en el desarrollo de procesos de visualización y graficación de funciones reales de variable real. Existen en esencia dos formas clásicas de entender la graficación de las funciones. La que tiene mayor acogida en el medio educativo, define la graficación como un conjunto de técnicas que posibilitan el diseño de una gráfica de una función en específico; la segunda y menos utilizada, sin embargo la que más interesa a esta investigación, es la que piensa en la graficación como una forma de descifrar el significado y las propiedades de las funciones desde un punto de vista cognitivo (Cantoral Uriza, 2013).

Tomando como punto de partida precisamente la necesidad de apoyar el entendimiento de cambio desde lo cognitivo, teniendo en cuenta que “los significados y la comprensión de objetos matemáticos se relacionan de manera directa con las acciones, prácticas, razonamientos y demás actividades que se involucran en la resolución de problemas” (Villa-Ochoa et al., 2018), y considerando el incremento exponencial del uso de las tecnologías digitales en la producción de modelos y la validación y análisis de los mismos, además de evidenciar la importancia de los aspectos dinámicos de la matemática y el papel del software en la reproducción de efectos visuales del cálculo; aparecen las simulaciones como respuesta a la necesidad de representación de situaciones en contextos reales, sin requerir laboratorios o insumos físicos.

Uso de Tecnologías en las Simulaciones

Las simulaciones interactivas, entendidas entonces como visualizaciones basadas en tecnologías digitales, en las que los estudiantes pueden ingresar variables y observar los efectos, muestran alto potencial como apoyo en el diseño de andamiajes (Geelan & Fan, 2014).

Hodson (1990) (citado en Geelan & Fan, 2014, p.250) cataloga cuatro dimensiones que abarcan el uso de simulaciones en la enseñanza de las ciencias, pero, como se desarrolla más adelante, estas dimensiones son completamente aplicables al campo matemático. Dichas dimensiones se muestran en la tabla 4.

Tabla 4

Dimensiones de las simulaciones interactivas. (Hodson, 1990)

D1	Gestión de motivación para el aprendizaje	Los estudiantes presentan mayor disposición hacia el aprendizaje, sienten mayor atracción por el proceso que con las herramientas utilizadas en educación tradicional.
D2	Desarrollo de la comprensión conceptual	La simulación interactiva puede llegar a reportar logros tan significativos como los alcanzados en prácticas de laboratorio tradicionales, y alcanza mayor efectividad cuando se ubica en una unidad de aprendizaje apoyada por el uso de andamiajes.
D3	Promueve habilidades del proceso científico y la comprensión situaciones cotidianas	Los estudiantes muestran una mejora considerable en las habilidades y comprensión de conceptos, mediante el desarrollo el proceso científico.
D4	Desarrollo de habilidades en la argumentación y el discurso científico	Aunque este marco no es exclusivo de las simulaciones interactivas, las simulaciones atienden los objetivos a los que se refiere el ítem

La gran ventaja de las simulaciones interactivas es la provisión de visualizaciones externas en lugar de las visualizaciones mentales (o como apoyo a las mismas). “Dichas visualizaciones pueden apoyarse en gráficos, diagramas, modelos y animaciones con las que los estudiantes pueden interactuar; por ejemplo por Ingresando datos, cambiando configuraciones y observando los resultados” (Geelan & Fan, 2014, p. 252).

Se han identificado múltiples beneficios del uso de simulaciones en la comprensión de conceptos matemáticos y científicos; por ejemplo, el grupo de investigación PhET de la Universidad de Colorado (Wieman, 2013), ha desarrollado una serie de simulaciones interactivas (resultado de 10 años de investigaciones en el marco del andamiaje implícito), y ha determinado una serie de ventajas notables en el trabajo con simulaciones en el aula; además Brunyé, Taylor,

& N. Rapp, (2004) identifican seis características propias de las simulaciones, que evidencian la utilidad práctica de las mismas. En la tabla 4, se observan dichas características y sus beneficios asociados.

Las ventajas mencionadas en la tabla 5 se convierten en objetivos a cumplir de manera simultánea en el diseño de simulaciones que permitan al estudiante el desarrollo del aprendizaje conceptual, pero que a la vez faciliten el disfrute de la experiencia y permitan la apropiación de la misma.

Tabla 5

Características y ventajas de las simulaciones interactivas.

Características	Ventajas del su implementación y aplicación en el aula
Interacción constante con los estudiantes.	Hacer conexiones con la vida cotidiana. Los estudiantes conectan las ideas científicas formales con sus experiencias de la vida diaria y reconocen la ciencia como una herramienta para comprender el mundo.
Posibilidad de probar hipótesis, mediante el cambio de parámetros.	Participar en la exploración científica. Los estudiantes plantean sus propias preguntas, diseñan experimentos, hacen predicciones y usan evidencia para apoyar sus ideas. Los estudiantes desarrollan sus conocimientos previos, supervisan y reflexionan sobre su comprensión a medida que exploran.
Permiten la construcción de explicaciones individuales.	Tomar posesión de la experiencia de aprendizaje. Los estudiantes perciben un sentido de agencia donde pueden dirigir su propia exploración científica.
Proporcionan retroalimentación visual. Esto facilita la discusión.	Ver la ciencia como accesible y agradable. Los estudiantes se involucran en prácticas científicas auténticas y desarrollan su identidad como una persona que usa el razonamiento científico. Los estudiantes demuestran un mayor interés en la ciencia.
Los estudiantes pueden desarrollar sus propios conceptos a partir de la observación y la interacción.	Desarrollar la comprensión conceptual. Los estudiantes desarrollan una comprensión de modelos expertos. Los estudiantes dibujan relaciones de causa-efecto y se coordinan a través de múltiples representaciones.
Son económicamente viables, permiten interactuar con fenómenos en tiempo real y que en ocasiones son difíciles de observar.	

Elaboración propia. Basado en Wieman (2013) y Brunyé et al. (2004)

Andamiajes

Existe una gran cantidad de referencias que dan cuenta de la eficacia del uso de andamiajes en la consecución del logro de aprendizaje en tareas bien estructuradas, además de apoyar el aprendizaje autorregulado y la metacognición. Este efecto se debe a su “capacidad para monitorear, adaptar y apoyar de forma dinámica y sistemática el aprendizaje autónomo del estudiante”, (como se cita en Azevedo & Hadwin, 2005, p. 367). En un primer momento, los andamiajes son ofrecidos por los maestros directamente en el aula de clase, sin embargo, su aplicación se ha extendido a la enseñanza virtual y se ha popularizado su uso en los ambientes virtuales de aprendizaje (AVA).

Se ofrece a continuación una clarificación del término, una caracterización del uso de los andamiajes y su efectividad en los ambientes virtuales de aprendizaje.

Definición y Origen del Término Andamiaje.

El andamiaje se define como un "proceso que permite al estudiante resolver un problema, realizar una tarea o lograr un objetivo que estaría más allá de sus esfuerzos no asistidos" (Wood, Bruner, & Ross, 1976, p.90). Proporciona una estructura o soporte temporal para ayudar en la consecución de un logro y puede reducirse gradualmente hasta finalmente, eliminarse por completo una vez que el estudiante puede realizar el desempeño por su cuenta (Pea, 2004).

La metáfora del término andamiaje surge al hacer una analogía de la construcción de conocimiento con la construcción arquitectónica, ya que para construir un edificio, los trabajadores requieren de una estructura que les permita llegar a lugares a los que de otro modo no tendrían acceso, de la misma manera, en la construcción del conocimiento, el andamiaje cognitivo permite a los estudiantes acceder y construir conocimientos que de otra manera serían inalcanzables (Holton & Clarke, 2006), además de apoyar el entendimiento de conceptos incompletos o erróneos y la recordación de conocimientos olvidados.

El concepto de andamiaje surge de lo que Vygotsky denominó la zona de desarrollo próximo (ZDP) donde los estudiantes pueden pasar de su nivel de desarrollo real a uno que alcance su potencial de aprendizaje (como se cita en Zydney, 2012, p. 2914) —es en esta zona donde el andamiaje adquiere efectividad— posteriormente el término andamiaje es acuñado por

Wood (1976) para quien “el andamiaje consiste esencialmente en que el adulto” controle “aquellos elementos de la tarea que inicialmente están más allá de la capacidad del estudiante, lo que le permite concentrarse y completar solo aquellos elementos que están dentro de su rango de competencia” (Wood et al., 1976).

Para Stone (1998) el proceso de andamiaje tiene cuatro propiedades:

- La naturaleza de los apoyos utilizados, que permiten que el estudiante se involucre en el proceso.
- El nivel de habilidad actual del estudiante y el conocimiento previo frente la tarea a desarrollar.
- El repertorio de soportes presentados y su pertinencia de acuerdo a la tarea y a las necesidades del estudiante.
- El supuesto sobre la temporalidad del andamiaje y su desvanecimiento gradual, para fomentar la transferencia de la responsabilidad hacia el estudiante.

Adicionalmente Warwick, Mercer, & Kershner (2013) establecen tres características particulares que definen la práctica de andamiajes en la actualidad:

- Contingencia: sugiere que los andamiajes se adaptan a las necesidades específicas y los niveles actuales de rendimiento de los estudiantes.
- Desvanecimiento: el soporte se retira gradualmente, dependiendo del desarrollo de la comprensión y la competencia del estudiante.
- Transferencia de responsabilidad: Da a entender una intención subyacente más amplia del andamiaje: el desarrollo de estudiantes que tienen la capacidad de autorregular su aprendizaje (p. 43). Ver figura 1.

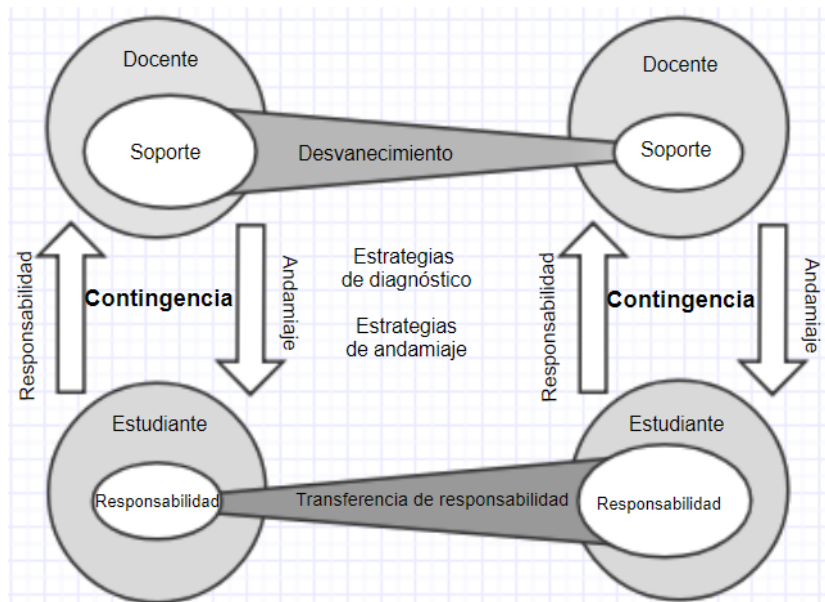


Figura 1. Modelo conceptual de los andamiajes (Van de Pol, Volman, & Beishuizen, 2010)

Bajo esta caracterización es importante evidenciar que aunque una particularidad clara de los andamiajes es la adaptabilidad, lo que los diferencia de otro tipo de apoyo es el retiro del soporte de manera gradual para entregar al estudiante la capacidad de dirigir su aprendizaje de manera independiente. El andamiaje, se convierte por tanto en “un acto de enseñanza que apoya la construcción de conocimiento inmediato por parte del estudiante y proporciona una base sólida para el aprendizaje autónomo en el futuro” (Holton & Clarke, 2006, p. 131).

Ahora bien, retomando la metáfora de la construcción, los andamios son una parte necesaria en el proceso de cualquier obra; en el dominio cognitivo los andamiajes serán valiosos para cualquier estudiante en cualquier área de estudio (Holton & Clarke, 2006), por lo tanto, es importante clarificar las funciones de los andamiajes para garantizar el éxito en su implementación.

Wood et al. (1976) sugieren seis funciones claves: (1) Reclutamiento, que implica involucrar al estudiante en una actividad interesante y significativa; (2) Reducción, donde el desarrollo de la actividad se realiza alrededor de componentes manejables; (3) Mantenimiento, aquí se debe asegurar que el estudiante esté enfocado en la tarea y buscando una solución para la misma; (4) Marcado, cuya finalidad es resaltar las partes principales de la actividad; (5) Función

en el control, enfocado a reducir el nivel de frustración al desarrollar la actividad; y (6) Demostración que proporciona un modelo del método de solución para el estudiante.

Andamiajes y Ambientes Virtuales de Aprendizaje.

A lo largo de los años y con el surgimiento de nuevas tecnologías —y su uso en la educación—, ha aumentado el empleo de ayudas tecnológicas para ambientes virtuales de aprendizaje (AVA), estos ambientes apoyados por sistemas de andamiajes han demostrado ser altamente eficaces en el aprendizaje de tareas bien estructuradas, gracias a su capacidad para monitorear, adaptar y apoyar de forma dinámica y sistemática el aprendizaje autónomo del estudiante, (como se cita en Azevedo & Hadwin, 2005, p. 367).

En este entorno, los andamiajes proveen un apoyo similar al que se proporciona en el entorno tradicional, con la ventaja de estar mediados por la tecnología. Esta mediación permite mejorar las interacciones al ofrecer oportunidades únicas de representación y múltiples medios de presentar y evaluar los conceptos, además de distribuir la carga cognitiva en herramientas informáticas para que los estudiantes se enfoquen en la consecución del logro de aprendizaje (Sharma & Hannafin, 2007). En este aspecto Puntambekar & Hubscher (2005) identifican cuatro funciones en los andamiajes:

- Modelación: muestra al estudiante cómo hacer una tarea.
- Diagnóstico continuo: monitorea las acciones del estudiante.
- Soporte calibrado: capta el interés del estudiante reduciendo los grados de libertad de la tarea, simplificándola, manteniendo la dirección, resaltando las funciones críticas, controlando la frustración y demostrando las rutas de solución ideales.
- Desaparición: transferencia gradual de la responsabilidad de aprender del maestro al estudiante.

Lo dicho hasta aquí supone que estos andamiajes proporcionan una orientación que más adelante será internalizada por el estudiante dejando una huella cognitiva que le permite de manera gradual completar tareas cada vez más complejas sin la necesidad del soporte ofrecido “Una vez que la orientación se ha internalizado, el estudiante está más capacitado para auto-regular sus propias cogniciones. Esto conduce a una capacidad mejorada para optimizar el uso de

la herramienta y, finalmente, una competencia desarrollada incluso cuando la herramienta ya no se usa” (Zydney, 2012).

Clasificación de los Andamiajes

Distintos autores han sugerido varias distinciones para estudiar los diferentes tipos de andamiajes. Granott (2005) por ejemplo, describe un sistema de andamiaje que incluye tanto la variabilidad vertical (donde el apoyo se ajusta continuamente para promover la independencia) como la variabilidad horizontal (donde las estrategias cambian si el andamiaje es ignorado o mal entendido).

Brush & Saye (2002) diferencian entre andamiajes blandos y andamiajes duros. Los andamiajes blandos son apoyos dinámicos y particulares para cada situación de aprendizaje, se pueden implementar en tiempo real y en línea (por ejemplo, retroalimentar a los estudiantes de forma remota). “Los andamios duros, en contraste, son soportes estáticos que pueden anticiparse y planearse de antemano en función de las necesidades esperadas de los estudiantes que trabajan con una tarea” (Brush & Saye, 2002, p. 3). Se integran perfectamente tanto en el aula como en software multimedia y ambientes virtuales de aprendizaje (AVA).

Para Holton & Clarke (2006) existen tres tipos de andamiajes: expertos, recíprocos y auto-andamiajes que operan en dos dominios generales, los andamiajes conceptuales y los andamiajes heurísticos, todos ellos apoyan procesos metacognitivos. Los andamiajes expertos implican responsabilidad específica para el aprendizaje de los demás; los andamiajes recíprocos tienen lugar donde dos o más personas participan de manera colaborativa para lograr una tarea en común; y los auto-andamiajes se presentan en situaciones en las que un individuo puede proporcionar andamiaje para sí mismo (Holton & Thomas, 2001). Existe una gradación que se evidencia en las diferentes situaciones en que se utilizan los andamiajes, donde el apoyo del andamiaje tiende a disminuir.

Tabla 6*Tipos, agentes y dominios de los andamiajes (Holton & Clarke, 2006)*

Tipo de andamiajes	Agente de andamiaje	Ubicación instruccional	Dominio del andamiaje	
			Conceptual	Heurístico
Experto	Experto	Externo	Zona 1	Zona 2
Recíproco	Observador	Mutuo	Zona 3	Zona 4
Auto-andamiaje	Auto-andamiaje	Interno	Zona 5	Zona 6

Estos autores se refieren a los dominios, identificando andamiajes conceptuales y heurísticos; los primeros apoyan procesos de comprensión y desarrollo conceptual, mientras que los segundos apoyan el desarrollo de «heurísticas» para la solución de problemas. Frente a un problema de tipo matemático, por ejemplo, «concepto» se refiere al contenido matemático, mientras que «heurístico» se refiere a los enfoques para solucionarlo.

Hadwin & Winne (2001) diferencian entre andamiajes implícitos y andamiajes explícitos (enfocados específicamente en el desarrollo de autorregulación).

Los andamiajes implícitos son herramientas integradas que sirven para atraer la atención de los estudiantes hacia sus conductas de aprendizaje sin darles instrucciones explícitas sobre cómo completar la tarea a través de cuatro fases: comprensión de tareas, establecimiento de metas, monitoreo metacognitivo y evaluación y adaptación metacognitivas. En contraste, los andamios explícitos brindan instrucción directa a los estudiantes sobre cómo mejorar su aprendizaje y las estrategias para trabajar con las herramientas proporcionadas y ofrecer oportunidades para solicitar apoyo adicional (Hadwin & Winne, 2001, p. 322).

Por otro lado, existen autores como Hannafin, Land, & Oliver (1999) quienes clasifican los andamiajes de acuerdo a la interacción y al propósito. Según el tipo de interacción se consideran los andamiajes estáticos y los andamiajes dinámicos. Los andamiajes estáticos, son incorporados durante la planeación curricular, para su diseño no se tienen en cuenta habilidades,

ni conocimientos previos; tampoco permiten el ajuste de acuerdo al avance. Los andamiajes dinámicos por el contrario, ofrecen apoyo individualizado donde se fijan las metas de aprendizaje y se realiza monitoreo del desempeño de manera que el andamiaje se adapte a las necesidades del estudiante (Azevedo & Hadwin, 2005). Por ser más flexibles este tipo de andamiajes favorecen considerablemente el aprendizaje.

Finalmente, según el propósito los andamiajes pueden ser de tipo conceptual, procedimental, estratégico y metacognitivo. Este tipo de andamiajes apoyan adecuadamente los procesos en línea y son los preferidos para trabajar en los ambientes virtuales de aprendizaje.

El andamiaje conceptual presta especial atención a los conocimientos previos del estudiante y se enfoca en el desarrollo de habilidades para alcanzar el logro de aprendizaje (Azevedo & Hadwin, 2005).

El andamiaje procedimental asiste en el uso de los recursos y las herramientas disponibles para completar la tarea y facilita su uso de manera efectiva. Mientras que el andamiaje estratégico sugiere formas alternativas para abordar los problemas de aprendizaje, proporciona diferentes técnicas o modelos que apoyan al estudiante en el análisis y planeación de las estrategias a utilizar durante el proceso de aprendizaje (Hannafin et al., 1999).

El andamiaje metacognitivo por su parte, brinda apoyo específico para una tarea en particular, guía a los estudiantes sobre qué pensar en lo relativo al aprendizaje, promueve el pensamiento de orden superior, mediante la autoevaluación ayuda a los estudiantes a reflexionar sobre lo aprendido y evalúa su progreso, de esta manera los estudiantes pueden planificar por adelantado (Jumaat & Tasir, 2014).

Tabla 7

Clasificación de los andamiajes (Hannafin et al., 1999)

Tipos	Funciones	Métodos y mecanismos relacionados
Conceptual	Orienta a los estudiantes sobre qué aspectos de la tarea debe considerar	Recomienda el uso de herramientas y estrategias particulares. Proporciona indicaciones para identificar los contenidos.
Metacognitivo	Orienta a desarrollar procesos de pensamiento durante el aprendizaje, a	Cuenta con el diseño de un plan de aprendizaje, modela estrategias cognitivas y procesos de

	considerar las estrategias y monitorear constantemente el desarrollo.	autorregulación. Propone herramientas de autorregulación, evalúa y retroalimenta el proceso.
Procedimental	Orienta el uso de recursos y herramientas.	Facilita herramientas (Mapas e información esquemática), Ofrece ventanas para explicar el funcionamiento de las herramientas.
Estratégico		Ofrece respuestas inteligentes durante el proceso, presenta preguntas direccionadoras, recibe el apoyo de expertos.

De acuerdo a las características de cada uno de los andamiajes y a los requerimientos de la presente investigación, se toma entonces como referencia para el diseño dos tipos de andamiajes: Andamiajes conceptuales y Andamiajes implícitos. A continuación se amplían los conceptos de cada uno de ellos.

Andamiajes conceptuales

Los andamiajes conceptuales son herramientas proporcionadas para ayudar al estudiante a enfocarse en lo que es importante y respaldarlo mientras razona a través de conceptos o problemas difíciles. Guían al estudiante por conceptos claves y lo facultan en la toma de decisiones sobre qué considerar en el proceso (Jumaat & Tasir, 2014). Suministran herramientas que los ayudan a crear una imagen mental que vincule el conocimiento previo con información nueva; de esta manera, facilitan la creación de estructuras organizadas enfocadas en la solución de un problema (Hannafin, Land, & Oliver, 1999) y alienta a los estudiantes a buscar y aplicar los principios fundamentales apropiados para la resolución de los mismos. Además en la capacitación repetida en la resolución de dichos problemas los ayuda a hacer relaciones en diferentes niveles en temas relacionados (Ding, Reay, Lee, & Bao, 2011).

De esta manera el uso de andamiajes conceptuales afianza el potencial para fomentar la confianza en el conocimiento conceptual aplicado en la resolución de problemas. Las investigaciones demuestran que los estudiantes que trabajan con este tipo de andamiajes presentan un rendimiento mayor en el uso de conexiones y son capaces de realizar aplicaciones significativas de las conceptos trabajados (Ding, Reay, Lee, & Bao, 2009).

Algunos elementos que caracterizan los andamiajes conceptuales son: (1) Preguntas de estudio o guías de estudio, (2) lista de definiciones o terminología, (3) representaciones visuales como diagramas y mapas conceptuales y (5) organizadores Avanzados.

Andamiajes implícitos

Es importante anotar que, el andamiaje implícito constituye un marco de referencia bastante útil para el uso de simulaciones interactivas en el aprendizaje de las matemáticas, especialmente en los temas que requieren de una explicación relacionada con procesos y sucesos que ocurren en la realidad. "Los andamiajes implícito emplean medidas, restricciones, pautas y comentarios para enmarcar y armar la exploración de los estudiantes sin una guía explícita, y es un marco de diseño particularmente útil para simulaciones interactivas en ciencias y matemáticas" (Podolefsky et al., 2013 p.3).

Los Andamiajes implícitos incluyen el uso de diferentes controles y de ciertas posibilidades de acción —affordances— para guiar a los estudiantes en interacciones pedagógicamente productivas sin que se sientan guiados; manteniendo de esta manera la atención y permitiéndoles interactuar de manera continua durante todo el proceso de aprendizaje. Así, los estudiantes son guiados —implícitamente— a lo largo de procesos de aprendizaje productivos y eficientes sin que el andamiaje sea directivo o inhiba la participación activa o el sentimiento de control por parte de los estudiantes (Podolefsky et al., 2013).

Las características fundamentales de los andamiajes implícitos son: (1) ofrecen una secuencia y facilitan diferentes interacciones, (2) las secuencias se presentan de manera estructurada, (3) los procesos deben tener un sentido claro para los estudiantes, y (4) permiten interacción continua (Moore, Smith, & Randall, 2016).

Al incorporar andamiajes implícitos en el ambiente de aprendizaje, la herramienta (el simulador por ejemplo) puede ayudar a los estudiantes a aprender y moverse a su ZPD con la mínima guía explícita de un maestro o una hoja de trabajo (Lin et al., 2012). Además, pueden proporcionar una flexibilidad inherente que ayuda a los estudiantes a lo largo de trayectorias de aprendizaje variadas e individualizadas, satisfaciendo así las necesidades de adaptabilidad. . En particular, el uso de andamios implícitos crea “entornos de aprendizaje que son productivos para

el aprendizaje de contenido y que son capaces de respaldar simultáneamente los objetivos del estudiante y la autonomía sobre el proceso de aprendizaje, objetivos que pueden no abordarse en entornos de aprendizaje más dirigidos” (Podolefsky et al., 2013).

Estilos Cognitivos

Una Aproximación al Concepto.

Existen diferentes enfoques conceptuales que tratan de dar una definición al constructo tan investigado de los estilos cognitivos. Sin embargo, en la literatura, se pueden definir dos tendencias claras que dan luz sobre su conceptualización; la primera tendencia, se enfoca especialmente en el carácter fronterizo del constructo, mientras que la segunda, se interesa especialmente por los aspectos cognitivos (estrategias utilizadas en la resolución de problemas).

“Los estilos cognitivos reflejan diferencias cualitativas y cuantitativas en la forma mental, fruto de la integración de los aspectos cognitivos y afectivo motivacionales del funcionamiento individual” (Quiroga y Rodríguez (2002) citado en Castro & Guzmán de Castro, 2005 p. 85), de este modo, determinan la forma en que el estudiante percibe, atiende, recuerda o piensa, cómo en general se hacen las cosas.

Witkin, Moore, Goodenough, & Cox (1977) definen el estilo cognitivo como un modo característico de funcionar que se hace evidente mediante las actividades perceptivas e intelectuales de una manera altamente estable y profunda. Del mismo modo, afirman que la cuestión de los estilos cognitivos debe plantearse como una serie de rasgos individuales, motivos y preferencias, por una parte; y criterios lógicos y estratégicos de competencias por la otra.

Así mismo, los estilos cognitivos pueden entenderse como una herramienta conceptual que facilita la comprensión de cómo un individuo afronta cualquier forma de estimulación sensorial, entendida ésta, como “variaciones individuales en los modos de percibir, recordar y pensar, o como diferentes modos de aprehender, almacenar , transformar y utilizar la información” (Kogan, 1973, p. 145).

De este modo, los estilos cognitivos van más allá de las diferencias individuales de nivel cognitivo, y se enfocan sobre todo, en las formas generales —propias de cada individuo— de

procesar la información que percibe del exterior y enfrentarse a los problemas y encontrar la manera de resolverlos (García, 1989).

Clasificación de los Estilos Cognitivos.

Así como se pueden encontrar diversas definiciones sobre el concepto, también se encuentran diferentes formas de clasificación de acuerdo al enfoque conceptual; sin embargo, para García (1989) es claro, que los estilos cognitivos más estudiados en la actualidad, son los definidos por Kagan, Moss y Sigel —Impulsividad, reflexividad— y Witkin —Dependencia – Independencia de campo—. Sin embargo, más recientemente ha tomado fuerza la clasificación elaborada por Kolb —Convergente, divergente, acomodador y asimilador— (Kolb & Kolb, 1981).

Kagan, Moss, & Sigel, (1963) definen estilo cognitivo, como el “término que hace referencia las preferencias estables en el modo de organizar la percepción y categorizar el ambiente externo” (p. 253). De esta manera, el estilo cognitivo Impulsividad – reflexividad, se refiere a la preferencia mostrada por los individuos para responder rápidamente o de forma pausada en tareas de resolución de problemas (Ramiro, Navarro, Menacho, & Aguilar, 2010).

Hay evidencia de que los estilos reflexivos e impulsivos, reaccionan de manera diferencial en tareas que requieran procesamiento, como clasificación de imágenes, resolución de tareas curriculares, rendimiento académico, tareas motoras gruesas, atención y memoria (Ramiro et al., 2010). De esta manera, los reflexivos evidencian tiempos de respuesta más largos pero con una baja tasa de errores, en cambio, los impulsivos, aunque responden más rápidamente, muestran una tasa mayor de equivocaciones.

A su vez, Kolb & Kolb (1981) señala que existen cuatro estilos de aprendizaje: Convergente, divergente, acomodador y asimilador. El individuo convergente, busca la aplicación práctica de las ideas, sus conocimientos están organizados y puede resolver problemas específicos mediante el razonamiento hipotético-deductivo; por su parte el divergente tiene alto potencial imaginativo y flexible, además de diferentes perspectivas para cualquier situación; el individuo asimilador posee habilidades en la creación de modelos técnicos, y se interesa más por los conceptos abstractos que por las personas; por último el acomodador, prefiere involucrarse en proyectos o experimentos y es el más arriesgado de los estilos.

Estilo Cognitivo Dependencia-Independencia de Campo. El Constructo DIC.

La clasificación que interesa a esta investigación, es la realizada por Witkin desde principios de los años 50 (Witkin et al., 1977), una de las más utilizadas en contextos educativos. Los polos de esta dimensión son Independencia y Dependencia del campo perceptivo (IC y DC respectivamente). "Esta dimensión establece una diferencia entre aquellos sujetos con tendencia a un procesamiento de tipo analítico, independiente de factores contextuales" (IC) "y aquellos con tendencia a un procesamiento de tipo global muy influenciado por el contexto" (DC) (López Vargas, Hederich-Martínez, & Camargo Uribe, 2012).

Los individuos Independientes de campo tienden a percibir la información de manera analítica y pueden descomponerla en partes y reestructurarla según sus necesidades, les es fácil construir hipótesis relacionadas con conocimientos ya adquiridos (Witkin et al., 1977) y no se permean por las influencias del contexto. Son individuos que buscan seguridad en referentes internos, manifiestan una orientación impersonal y pueden llegar a ser relativamente insensibles a las claves sociales; se interesan por ideas y principios abstractos y prefieren resolver problemas de manera individual (García, 1989). Estas características benefician el uso de diferentes herramientas de tipo analítico durante el proceso de aprendizaje, como por ejemplo construir y comprobar hipótesis.

Por su parte los Dependientes de campo refieren la información que ha sido estructurada previamente, por lo que tienden a percibir de manera global, buscan seguridad en referentes externos, evidencian una alta conducta interpersonal y atienden a claves sociales proporcionadas por otros, y prefieren en la mayoría de los casos el trabajo en equipos (García, 1989). Por esto, para los estudiantes DC es muy difícil la reestructuración de la información y construyen conceptos de manera acumulativa (Witkin et al., 1977).

En general, los individuos independientes de campo tienden a tener mejores resultados en la consecución del logro de aprendizaje frente a los estudiantes dependientes de campo, especialmente en áreas como matemáticas y ciencias naturales (López-Vargas, Hederich-Martínez, & Camargo-Urbe, 2011), esto cobra sentido si se entiende que "las actividades realizadas en estas áreas requieren fundamentalmente habilidades de reestructuración e integración paralela del material" (Amador, 1994).

Descripción del Desarrollo Tecnológico

Para el desarrollo de la investigación se proponen dos diseños diferentes, el primero corresponde al diseño del ambiente virtual de aprendizaje con el que interactúan tanto el grupo experimental, como el grupo de control; el segundo, corresponde al diseño del andamiaje que aunque se incluye dentro del ambiente, éste se habilita únicamente para el grupo experimental.

El diseño del ambiente se basa en el modelo cognitivista y la teoría de la instrucción planteada por Gagné y Merrill (Gagné & Merrill, 1990), en la que se proponen diferentes fases que facilitan el alcance de los resultados de aprendizaje. De esta manera, se toma como punto de partida las ocho fases de aprendizaje y de análisis de tareas planteadas por Gagné (Gagné, 1975). Tabla 8

Tabla 8

Fases del aprendizaje en el AVA (Gagné, 1975)

Fases y procesos internos	Hechos externos que pueden influir en los internos (aplicados al AVA)
Motivación	Se explican con claridad los objetivos a obtener durante el aprendizaje.
Comprensión	Cambio en las tipografías, subrayado de los conceptos más importantes, manejo de imágenes relacionadas con los items y los contenidos a trabajar, diseño cromático para atraer la atención sobre contenidos relevantes.
Adquisición	Implementación de guías de tipo esquemático, donde se plasma toda la información teórica, la asociación con situaciones reales y los pasos para la solución de problemas.
Retención	Se proporciona variedad de ejercicios prácticos y de diferente nivel de complejidad.
Recuerdo	Indicaciones verbales y visuales que provocan el recuerdo.
Generalización	Aplicación de la información a problemas reales.
Ejecución	Explicación de situaciones ejemplo donde el estudiante puede ver y revisar la respuesta deseada.
Realimentación	Los estudiantes pueden conocer el resultado de su proceso.

Adicionalmente, ya que tanto la teoría de Gagné como la de Merrill proporcionan pautas concretas sobre los pasos a seguir en el diseño de un AVA, se complementa el esquema anterior con la propuesta desarrollada por Gros (1997) en la que se unifica en un solo formato las dos

miradas. En la tabla 9 se presenta el esquema básico y las estrategias implementadas en el diseño del ambiente, basado en la teoría instruccional.

Tabla 9

Esquema básico del diseño del ambiente. Basado en Gros (1997)

	Información verbal	Habilidades intelectuales
Informar el objetivo a conseguir	Explicar a los estudiantes en qué consiste, cómo se aplican y cómo se solucionan los problemas de cálculos relacionados con las razones de cambio.	
Dirigir la atención	Mediante videos y animaciones se pretende centrar al estudiante en el aprendizaje.	
Estimular el recuerdo	Recordar en cada etapa los conceptos claves y los pasos necesarios para la resolución del problema.	Presentar de forma significativa mediante tutoriales en video los pasos necesarios para la resolución de los problemas planteados.
Presentar el estímulo	Explicar a los estudiantes los conceptos importantes que aparecen por primera vez.	Presentar ejercicios similares a los planteados en los tutoriales donde los estudiantes puedan aplicar los pasos presentados para permitir su apropiación.
Guiar el aprendizaje	Proporcionar las instrucciones necesarias para que el estudiante resuelva problemas que varíen en nivel de complejidad.	Pedir a los estudiantes completar los ejercicios a partir de las guías presentadas.
Producir la actuación	Los estudiantes deben realizar los ejercicios planteados.	
Valorar la actuación	Comprobar que los ejercicios sean realizados en su totalidad y de manera correcta.	
Proporcionar realimentación	Cuando se han completado los ejercicios con éxito, los estudiantes pueden seguir desarrollando ejercicios relacionados.	
Promover la retención y fomentarla transferencia	Promover diferentes tipos de ejercicios para favorecer la retención y la transferencia del nuevo aprendizaje.	

En cuanto al andamiaje, el diseño se basa en el marco propuesto por Podolefsky (Podolefsky et al., 2013), donde este permite formar un puente entre el apoyo instruccional y el autocontrol del estudiante en el proceso de aprendizaje. Se pretende facilitar la interacción del estudiante con el entorno utilizando la menor cantidad de guías posibles, es importante que el estudiante mantenga el control de su aprendizaje, de manera que dedique el tiempo que requiera en cada simulación y que tenga la posibilidad de consultarlas las veces que considere pertinente

—a través de los botones destinados para tal fin (Gros, 1997)—. Se espera que esta interacción inicial despierte la motivación intrínseca (Lepper & Chabay, 1985) para que el estudiante tenga la posibilidad de pasar de la observación a la interacción. Las simulaciones ofrecen retroalimentación continua e inmediata con la intención de mantener la comprensión conceptual (Norman, 2010). En la tabla 10 se expone la presentación —inquisitiva— del modelo. Las simulaciones están diseñadas de manera que capten la atención. Tabla 9.

Tabla 10

Características generales del andamiaje. Presentación inquisitiva. Basado en Gros (1997)

Modelo mental / Procedimiento	
Formas de representación	<ul style="list-style-type: none"> • Las simulaciones presentan situaciones diferentes a los ejercicios planteados en el ambiente. • Presentación alternativa de la inquisición a través de ejemplos. • Aumento de la dificultad en los ejercicios. • El apoyo se retira de manera gradual, hasta desvanecerlo por completo.
Interacción	<ul style="list-style-type: none"> • Los estudiantes manipulan libremente las simulaciones.
Guía	<ul style="list-style-type: none"> • El andamiaje permite retroalimentación continua. Con cada interacción con la simulación hay una respuesta inmediata. • La información importante es claramente identificable.
Control	<ul style="list-style-type: none"> • El control está en manos del estudiante, quien decide cuánto tiempo invertir, con qué simulaciones interactuar y cuándo retomar.

Siguiendo estos lineamientos, el ambiente de aprendizaje se presenta en cuatro grandes etapas: en la primera se encuentra la parte introductoria; una pantalla inicial diseñada para atraer la atención sobre el ambiente y muy simple de interpretar. En este apartado se ubica la prueba EFT —mediante la cual se determina el estilo cognitivo de cada uno de los participantes—, el Pre-test —que permite evidenciar los conocimientos previos con respecto a la temática planteada—, adicionalmente, se presenta una guía que facilita la navegación por el ambiente y evidencia las posibilidades de trabajo en el mismo. Figura 2.

Introducción

Video de bienvenida, donde se explica la intensidad del curso, los contenidos y se evidencian las posibilidades del ambiente



Presentación de los contenidos temáticos, tiempo de desarrollo y metodología

Guías del Curso

En este apartado encontrarás todo el material necesario para desarrollar el curso. Podrás consultar los tiempos, las características generales del tema de estudio, los resultados esperados y los criterios a evaluar.



Presentación prueba EFT y conocimientos previos

Elaboración del Perfil

Es importante conocer algunos aspectos que nos ayudarán a definir tu perfil y determinar cuáles son algunas características de la forma en que aprendes; y cómo te encuentras con respecto al tema que vamos a trabajar. Para esto desarrolla los test que se encuentran a continuación, siguiendo cuidadosamente las indicaciones dadas para cada uno.



Figura 2. Etapa 1 – Fase de Motivación

En la segunda etapa se desarrolla el contenido, esta etapa se divide en dos unidades donde se exponen cada uno de los temas —razones de cambio y razones de cambio relacionadas—, cada unidad presenta un video introductorio, donde se explica el tema de manera general, un documento que presenta la operacionalización matemática de los problemas planteados y ejercicios resueltos paso a paso mediante videos. Finalmente, se pretende que el estudiante resuelva diferentes ejercicios con distintos niveles de complejidad en los que aplique lo aprendido. En la medida en que el estudiante resuelva dichos ejercicios el ambiente lo irá retroalimentado para que pueda verificar sus aciertos y desaciertos. Figura 3.

Es importante notar que en estas dos unidades que componen el módulo se desarrollan la mayoría de las fases planteadas por Gagné (tabla 7).

Video de explicación del objetivo, cómo se aplican y cómo se solucionan los problemas de cálculos relacionados con las razones de cambio.

Derivada como Razón de Cambio

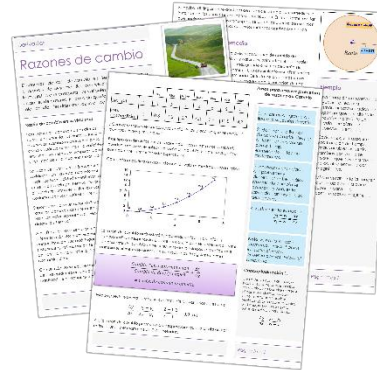


Presentación de contenidos temáticos y explicaciones paso a paso. Tutoriales en PDF.

Referentes conceptuales

En el siguiente documento encontrarás toda la información necesaria para comprender qué es una razón de cambio y cómo puedes resolver ejercicios planteados. Lee con atención y toma atenta nota.

Guía Razones de Cambio



Ejercicios de refuerzo

Actuación, los estudiantes resuelven algunos de los ejercicios planteados y se resuelven al tiempo con la explicación presentada en video.

A continuación encontrarás los ejercicios planteados en el documento, desarróllalos siguiendo los pasos explicados.

Ejercicio 1. Hallar la razón de cambio promedio de desperdicio que se arroja al mar entre lunes y miércoles.

Cambio Fin, toneladas	Cambio de días (tiempo)
0.3	2
0.9	3

Esto se puede expresar como un cociente de las variaciones:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0.9}{1} = 0.9 \text{ ton}$$

Así, la razón de cambio promedio de desperdicio que se arroja al mar entre el lunes y el martes es de 0.9 toneladas.

Promoción de la retención mediante la aplicación de ejercicios relacionados.

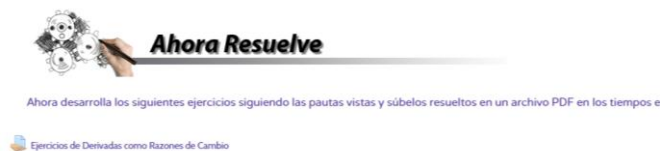


Figura 3. Etapa 2 – Fases comprensión, adquisición, retención, recuerdo y generalización

En la tercera etapa se encuentra el vínculo que llevará al estudiante al andamiaje, que por sus características es de tipo conceptual e implícito. Gracias a su flexibilidad inherente ayuda a los estudiantes a lo largo del proceso de aprendizaje (individualizado), teniendo en cuenta los diferentes estilos cognitivos y satisfaciendo la necesidad de adaptabilidad (Podolefsky et al., 2013).

Este andamiaje incluye las simulaciones correspondientes a las actividades seleccionadas para alcanzar el logro —aquí el estudiante puede desplazarse libremente por el espacio y seleccionar las actividades de acuerdo a sus intereses— (Es importante aclarar que este bloque se encuentra disponible únicamente para el grupo experimental).

En este punto, mientras el estudiante explora se van presentando de manera simultánea, una serie de preguntas de tipo cognitivo y metacognitivo; las primeras activan y dirigen el proceso cognitivo, mientras que las segundas, facilitan la toma de conciencia del proceso y contribuyen a regularlo (Montenegro, 2002). Estas preguntas se relacionan directamente con lo que sucede en la simulación, de manera que le permite al estudiante explorar a profundidad cada una de las posibilidades presentadas y facilita la conceptualización, además de orientar el monitoreo ya sea retrospectivo, recurrente o prospectivo.

Mediante esta pantalla —que se encuentra como una unidad en el ambiente— el estudiante tiene acceso al andamiaje.



Figura 4. Acceso al andamiaje

Una vez dentro del andamiaje el estudiante tiene la posibilidad de desplazarse libremente por las simulaciones y explorar el mismo. El estudiante realiza una interacción inicial que se percibe mediante el color, la ubicación e indicaciones implícitas. En la medida en que manipula la simulación recibe retroalimentación inmediata —los objetos cambian conforme se van manipulando—.



Figura 5. Exploración de las simulaciones

Mientras el estudiante explora la simulación andamiaje presenta al estudiante una serie de preguntas cognitivas y metacognitivas que lo invitan a pensar sobre el proceso con el que interactúa y . El sistema donde se encuentran presenta el progreso, el puntaje obtenido y le permite revisar aciertos y desaciertos. Fuera de la simulación, pero cercana en el espacio, se presenta al estudiante una serie de preguntas cognitivas y metacognitivas que lo invitan a pensar sobre la situación representada en el simulador.

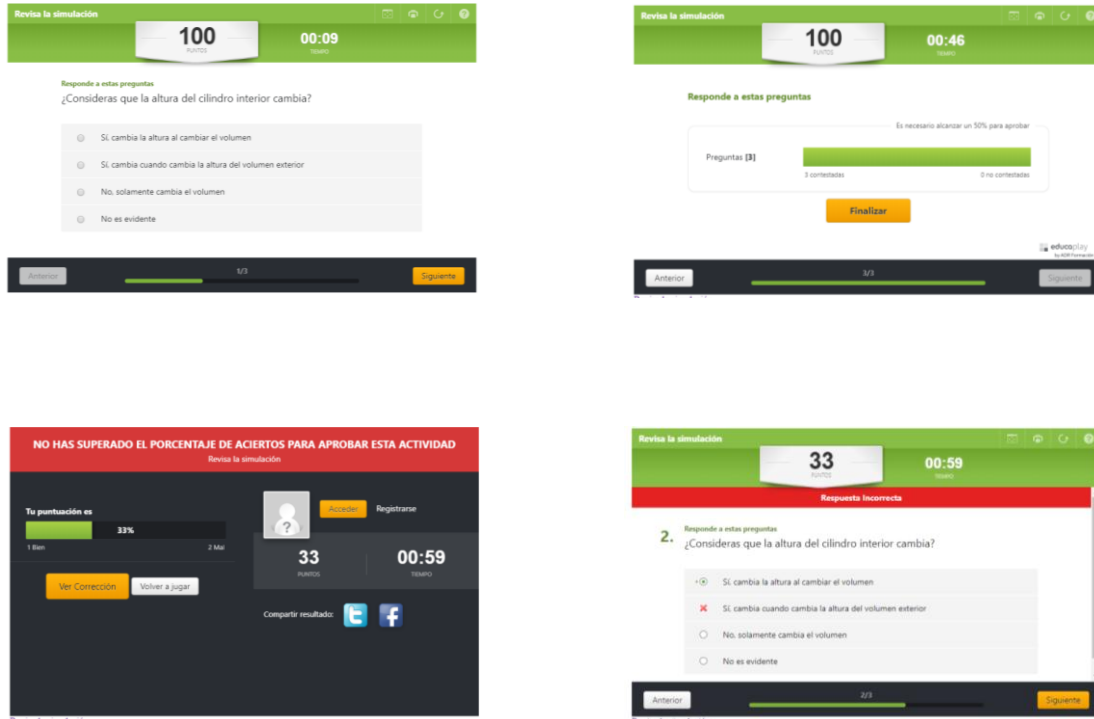


Figura 6. Preguntas cognitivas y metacognitivas.

Finalmente y como complemento, en algunos casos — Los de mayor complejidad— se presentan apoyos escritos donde se muestra el desarrollo procedimental del ejercicio que se muestra en la simulación.

¿Qué se pide en el problema? Se pide calcular la rapidez (velocidad) a la que está aumentando la altura de un cilindro circular de radio fijo, cuando su volumen aumenta a razón de 9 litros por segundo.

La expresión para hallar el volumen de un cilindro recto, es:

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

$$V = \pi \cdot 30^2 \cdot h$$

$$V = \pi \cdot 900 \cdot h$$

Como el volumen y la altura cambian, al derivarlas en función del tiempo, se tiene:

$$\frac{dV}{dt} = \pi \cdot 900 \cdot \frac{dh}{dt}$$

Como se tiene que $\frac{dV}{dt} = 2 \text{ l/s}$, se reemplaza y se tiene que:

$$\frac{dV}{dt} = \pi \cdot 900 \cdot 2$$

$$\frac{dV}{dt} = 1800\pi \frac{dm^3}{s}$$


Figura 7. Etapa 3 – Andamiaje y simulaciones

Finalmente, la última etapa del ambiente cierra las actividades con la presentación del Pos-test, donde los estudiantes tienen la posibilidad aplicar los conocimientos adquiridos durante la interacción con el ambiente, es aquí donde se obtienen los resultados que permiten evaluar comparativamente el desempeño de los grupos.

¿Qué Aprendimos?

Evaluación final

Su progreso



Cálculo Pos- Test Docente: Lina Marcela Díaz Fernández

Este test tiene como objetivo indagar por la comprensión que como estudiante pueda tener ante diversas situaciones que tienen relación con la matemática. Las preguntas son de opción múltiple con única respuesta.

obligatorio

Dirección de correo electrónico *

4. Al arrojar una piedra a un estanque de agua tranquila se forman ondas circulares concéntricas cuyos radios aumentan de longitud al paso del tiempo. Cuando la onda exterior tiene un radio de 3 m, éste aumenta a una rapidez (velocidad) de 50 cm-s. ¿A qué rapidez (velocidad) aumenta el área del círculo formado por dicha onda? Ver imagen No. 1. las respuestas estarán dadas en m²/s *




Imagen No. 2

- a) 9.4248 m²/s
- b) 6.7548 m²/s
- c) 106435 m²/s
- d) 8.4248 m²/s

Figura 8. Etapa 4 – Pos-test

Metodología

A continuación se describe el diseño metodológico empleado para la realización de la investigación, el cual está conformado por tipo de investigación, población y muestra, diseño de la investigación, fases del experimento e instrumentos.

Tipo de Investigación

La investigación se realiza con base en un diseño 2x3 y se emplea una metodología cuasi experimental, con modelo de grupo de control no equivalente. Se toman de cada sujeto registros y medidas antes y después de la aplicación o experimentación, las pruebas se aplican en dos grupos escogidos de manera natural (no aleatoria ni al azar), dichos grupos guardan similitud en número, características académicas y preconceptos de Cálculo.

Teniendo en cuenta la ausencia de aleatorización en la asignación de las unidades, se esperan diferencias en las puntuaciones antes y después (Stanley, 2013). En este modelo se trabaja con un grupo Experimental — con andamiaje conceptual implícito— y otro de Control — sin andamiaje conceptual implícito—. Los dos grupos realizan prueba de entrada —Pre-test— y prueba de salida —Pos-test— con características similares.

El experimento consiste en poner a interactuar a los estudiantes en un ambiente virtual de aprendizaje con contenidos de comprensión de la Derivada como Razón de Cambio. El ambiente virtual que se ha utilizado en la investigación contiene cuatro unidades de aprendizaje: (1) Introducción: En esta parte se ubican entre otras cosas, la prueba EFT, el Pre-test y una guía que facilita la navegación por el ambiente y evidencia las posibilidades de trabajo en el mismo, (2) Conceptualización: aquí se desarrolla el contenido, esta etapa se divide en dos unidades donde se exponen cada uno de los temas —Razones de Cambio y Razones de Cambio Relacionadas— (3) Simulaciones y Preguntas Meta cognitivas: se encuentra el vínculo que lleva al estudiante al andamiaje, que por sus características es de tipo conceptual e implícito, y (4) Pos-test: en este apartado el estudiante presenta la prueba de salida.

Los datos obtenidos son analizados de la siguiente manera: (1) se realiza un análisis de covarianza ANCOVA que da cuenta de lo que sucede por cada grupo y con cada Estilo Cognitivo y (2) se realiza un ANCOVA factorial, que da cuenta de lo que sucede en el con cada Estilo Cognitivo grupo experimental, (3) finalmente se estudian las correlaciones de Pearson —si las hay— entre los grupos (Control y Experimental), los resultados del Pre-test, las correlaciones entre dimensión DIC y resultados del Pos-test.

Para dar respuesta a estos interrogantes se siguen los siguientes pasos: (1) se realiza la verificación de cumplimiento de supuestos (Normalidad, homocedasticidad o igualdad de varianzas), (2) se presentan los datos de los resultados obtenidos por los grupos control y experimental en el Pre-test y Pos-test, (3) se realiza un análisis de covarianza ANCOVA para determinar si existen o no diferencias significativas entre los grupos, (4) se realiza un ANCOVA factorial, que da cuenta de lo que sucede en el con cada Estilo Cognitivo grupo experimental, (5) finalmente se estudian las correlaciones de Pearson —si las hay— entre los grupos (Control y Experimental), los resultados del Pre-test, las correlaciones entre dimensión DIC y resultados del Pos-test.

Diseño de la Investigación

Siguiendo los lineamientos de la metodología cuasi experimental, con modelo de grupo de control no equivalente se elige como grupo de control al grupo de Cálculo Diferencial de Ingeniería de Software 1, y como grupo experimental al grupo de Cálculo Diferencial de Ingeniería de Software 2. Es importante recordar que el grupo control recibe sus clases en un ambiente virtual, sin andamiaje, mientras que el grupo experimental explora el ambiente diseñado y puede interactuar con los andamiajes conceptuales e implícitos.

Tabla 11*Diseño de la Investigación*

VARIABLES INDEPENDIENTES				VARIABLE DEPENDIENTE		
Ambiente virtual de aprendizaje con dos valores: (1) AVA con andamiaje y (2) AVA sin andamiaje, y estilo cognitivo en la dimensión DIC.				Logro de aprendizaje de la resolución de problemas, de razones de cambio relacionadas.		
Ambiente Moodle, con Andamiajes	Grupo experimental	Dependiente	10	O₁	X	O₂
		Intermedio	11			
		Independiente	9			
Ambiente Moodle, sin andamiajes	Grupo control	Dependiente	8	O₃		O₃
		Intermedio	13			
		Independiente	9			

En términos generales, la investigación involucra dos variables independientes: (1) ambiente virtual de aprendizaje con dos valores: con andamiaje y sin andamiaje; y (2) el estilo cognitivo con tres valores: dependientes, intermedios e independientes de campo. También involucra una variable dependiente: logro de aprendizaje alcanzado en términos de la capacidad de resolver problemas de comprensión de la Derivada como Razón de Cambio.

Muestra

En esta investigación participan 60 estudiantes de segundo semestre de ingeniería de software de la Fundación Universitaria Empresarial de la Cámara de Comercio de Bogotá, quienes cursan la materia de cálculo diferencial. La población se distribuye en 18 mujeres y 42 hombres, que corresponden al 30% y al 70% respectivamente; con edades entre los 18 y los 36 años, donde la edad promedio es 20.65, de estrato socio económico 3 y 4. La muestra se distribuye en dos grupos que se presentan en la tabla 12

Tabla 12

Grupos que conforman la muestra

<i>Grupo Experimental</i>	<i>Grupo Control</i>
30 estudiantes, de los cuales 8 son mujeres 22 son hombres. Estudiantes de Ingeniería de Software.	30 estudiantes, de los cuales 10 son mujeres 20 son hombres. Estudiantes de Ingeniería Software.

Fases de la Investigación

Teniendo en cuenta los elementos que componen la metodología cuasi experimental con modelo de control, las fases que se desarrollan en esta investigación son:

Aplicación Prueba EFT

Antes iniciar a navegar en el ambiente (AVA) y durante la primera sesión, se aplica a los participantes de ambos grupos la prueba EFT de figuras enmascaradas de manera escrita, en la versión desarrollada por Sawa (1966) para determinar los estilos cognitivos.

Pre-test (anexo 1)

Se aplica una prueba Pre- test donde los estudiantes deben dar solución a 10 problemas de razones de cambio promedio, razones de cambio relacionadas y derivación; usando para los dos grupos el ambiente virtual de aprendizaje (AVA).

Para la aplicación de la Prueba EFT y Pre-test se requirió de una sesión para ambos grupos.

Intervención

Después de la primera sesión donde se aplica el Pre-test, se realiza la intervención en los dos grupos, esta intervención se divide en cuatro sesiones para cada uno de los grupos. Durante el desarrollo de estas sesiones los estudiantes de ambos grupos navegan en la plataforma en las secciones correspondientes a Razones de Cambio Promedio, y a Razones de Cambio Relacionadas. Durante estas sesiones los estudiantes tienen acceso a videos, tutoriales, y ejercicios aplicados. El grupo experimental adicionalmente tiene la posibilidad de explorar

libremente las simulaciones incluidas en el andamiaje, durante todo el proceso. En la tabla 13 se presentan las indicaciones que reciben los estudiantes de cada uno de los grupos.

Tabla 13

Comparación intervención grupo control y grupo experimental

Grupo control	Grupo experimental
Lee elementos teóricos de razón de cambio, razones de cambio relacionadas y razón de cambio instantánea.	Estudia el componente teórico mediante el ambiente virtual, tiene acceso a video ejemplos resueltos paso a paso, que puede reproducir según lo requiera.
Sigue la solución de ejercicios básicos propuestos paso a paso con representaciones gráficas rígidas.	Analiza ejercicios propuestos, mediante simulaciones de ejercicios de complejidad ascendente, una o más variables cambian.
Analiza algunos videos con ejercicios de mayor complejidad propuestos y resueltos, paso a paso, mediante video tutoriales.	Resuelve preguntas de tipo metacognitivas, referente al problema en general y a la simulación, obteniendo una retroalimentación. Esta es la segunda parte del andamiaje.

Pos-test (anexo 2).

En la sesión final, se aplica una prueba Pos- test, de estructura similar al Pre-test, y que al igual que este, incluye 10 ejercicios de razones de cambio promedio, razones de cambio relacionadas y derivación. De igual manera el Pos-test se soluciona en el AVA y se aplica en dos días diferentes para cada grupo.

Etapas de la investigación

Las etapas llevadas a cabo en este trabajo cambiaron conforme el desarrollo de la investigación, porque se dieron oportunidad a mejoras y ajustes. A continuación se presenta una tabla que modela las etapas desarrolladas.

Tabla 14

Etapas de la investigación

Etapas	Objetivo	Actividad	Insumos
1. Elección del problema de Investigación	Visualizar un problema en el aprendizaje de las Matemáticas que pudiera subsanarse con	Revisión de la experiencia propia de las docentes. Pertinencia del tema para trabajarlo con la población disponible. Consulta bibliográfica de	Fuentes bibliográficas.

	el uso de TIC's	antecedentes en el tema escogido. Consulta acerca de la creación de espacios dinámicos en Matemáticas.	
2. Elección de la herramienta tecnológica a diseñar.	Consultar las opciones existentes y verificar que éstas compatibles con los requerimientos del área y de la Universidad.	Sondeo con los estudiantes acerca de las formas en que ellos usualmente estudian en casa. Revisión de las herramientas tecnológicas sugeridas por la Universidad.	Encuesta de hábitos y preferencias TIC.
3. Diseño de un ambiente virtual de aprendizaje.	Diseñar un ambiente virtual de aprendizaje dinámico, amigable para abordar la temática de razones de cambio relacionadas.	Elección contenidos, colores, diagramación. Diseño de actividades a enlaces externos, ejercicios, imágenes, formularios, etc. Elaboración de videos, tutoriales y conceptualizaciones requeridas.	Moodle (Ambiente grupo control y parte del grupo experimental) Wix (albergar las simulaciones), Geogebra (simulaciones interactivas) Google Formulary (Pre-test y Pos-test), Educaplay (Preguntas metacognitivas), Powtoon (Diseño y edición de video), Free logo (diseño del logo)
4. Instrumentos de recolección de información	Determinar características de la población, que aporten al análisis posterior de los resultados. Diseñar pruebas (Pre-test y Pos-test) que recojan las temáticas requeridas.	Elaborar instrumentos pertinentes, completos y suficientes para determinar características de la población. Elaborar pruebas (Pre-test y Pos-test) que den cuenta del estado inicial y final del estudiante en el tema estudiado.	Fuentes bibliográficas que traten sobre razón de cambio.
5. Pre-test	Implementar una prueba de entrada o Pre-test, que dé cuenta del estado inicial del estudiante en el tema estudiado.	Organización de espacios con conexión e infraestructura adecuada para la presentación de la prueba (grupo experimental y control).	Sala de informática. Google Formulary.
6. Intervención	Desarrollar el análisis teórico y práctico del objeto Matemático: problemas de razones de cambio relacionadas.	Presentación del ambiente virtual, mostrar la ruta de navegación. Socialización de dudas generales y particulares. Socialización del mapa de navegación del aula virtual.	Ambiente virtual de aprendizaje.
7. Pos-test	Implementar una prueba de cierre o Pos-test, que den cuenta del estado final del estudiante en el tema estudiado.	Organización de espacios con conexión e infraestructura adecuada para la presentación de la prueba (grupo experimental y control).	Sala de informática. Google Formulary.

8. Análisis de resultados	Comparar los resultados obtenidos en el Pre- test y el Pos- test, a la luz de los objetivos planteados en este trabajo.	Estudio estadístico empleando comparación de medias, covarianzas, análisis de medidas repetidas. Se realiza análisis intra grupales (antes y después de la experimentación) y análisis intergrupales (comparando varianzas ente grupo experimental y control). Análisis de resultados a la luz del estilo cognitivo arrojado por la prueba EFT. Elaboración de tablas y gráficas que ilustren los resultados de forma clara.	Resultados prueba EFT. Software SPSS, reporte de resultados de las pruebas de Google formulary.
9. Elaboración del Informe final	Relatar los resultados de la investigación mediante un informe final.	Recolección de la información obtenida para estructurar un informe final. Desarrollar una presentación que dé cuenta de forma sintética de los alcances, fases y conclusiones del trabajo.	Etapas de la 1 a la 8
10. Presentación del AVA, resultados y alcances al jefe de áreas comunes de la Universidad.	Socializar los resultados de esta implementación tecnológica. Elaborar un proyecto de implementación tecnológica para la asignatura.	Socialización de los resultados obtenidos. Propuesta de implementación para todos los cursos de Cálculo diferencial.	Ambiente virtual de aprendizaje. Presentación de resultados.

Hipótesis

H₁:

Los estudiantes que trabajan en un ambiente virtual de aprendizaje mediado por andamiajes conceptuales e implícitos obtienen mejores resultados, en el aprendizaje y solución de problemas de razones de cambio relacionadas, que los estudiantes que abordan el tema en un ambiente virtual, sin el uso de dichos andamiajes.

H₂:

El uso de andamiajes conceptuales e implícitos como parte de un AVA disminuye las brechas de aprendizaje que suelen presentarse entre los estudiantes con distintos estilos cognitivos en la dimensión DIC

Resultados

Los resultados que se presentan a continuación permiten determinar las relaciones entre los datos recolectados durante la intervención con el AVA. Estos datos son analizados mediante análisis paramétricos en el software SPSS.

Tanto el grupo Control, como el grupo Experimental trabajan de dos a cuatro horas semanales con el AVA —dependiendo de la sección a trabajar— durante un total de cinco semanas. El primer paso es hacer un filtrado de información, al respecto no se evidencian datos perdidos, tal como se muestra en la tabla 15.

Tabla 15

Estadísticos

		EFT	Pretest	Pos-test
N	Válido	60	60	60
	Perdidos	0	0	0

Adicionalmente, no se encuentran datos atípicos en las variables estudiadas. La probabilidad obtenida empleando la distancia de Mahalanobit, no se muestra menor a 0.001, por tanto no hay datos atípicos a tener cuenta en el filtrado de datos.

	P16	P17	P18	P19	P20	Total	Pretest	Postest	MAH_1	datosat
1	0	0	1	0	0	6	4	2	2,73655	,25
2	0	0	1	1	1	7	4	3	2,73655	,25
3	0	0	0	0	1	6	3	3	2,73655	,25
4	0	0	0	0	0	10	7	3	2,73655	,25
5	0	0	0	0	1	7	4	3	2,73655	,25
6	0	0	1	1	1	6	2	4	2,73655	,25
7	1	0	1	0	0	9	5	4	2,73655	,25
8	1	1	1	0	.	12	7	5	2,73655	,25
9	0	0	1	1	1	6	1	5	2,73655	,25
10	1	0	1	0	1	12	6	6	2,73655	,25
11	0	0	1	1	1	10	4	6	2,73655	,25
12	0	0	1	1	1	15	9	6	2,73655	,25
13	1	1	1	0	1	14	8	6	2,73655	,25
14	1	1	1	0	1	14	8	6	2,73655	,25
15	1	1	1	1	0	10	3	7	2,73655	,25
16	1	1	1	1	0	12	5	7	2,73655	,25
17	1	1	1	1	1	13	6	7	2,73655	,25
18	1	0	0	0	0	7	4	3	2,51763	,28
19	1	0	1	0	1	5	2	3	2,51763	,28
20	1	0	1	0	1	5	2	3	2,51763	,28
21	0	0	1	0	1	11	7	4	2,51763	,28

Figura 9. Filtrado de datos en SPSS

Los resultados son analizados a la luz de cada una de las preguntas de investigación

Pregunta 1

¿Cuál es el efecto de un andamiaje conceptual implícito integrado en un AVA, sobre el logro de aprendizaje relacionado con la solución de problemas, que involucren razones de cambio relacionadas?

Para dar respuesta a estos interrogantes se siguen los siguientes pasos: (1) se realiza la verificación de cumplimiento de supuestos (Normalidad, homocedasticidad o igualdad de varianzas), (2) se presentan los datos de los resultados obtenidos por los grupos control y experimental en el Pre-test y Pos-test, (3) se realiza un análisis de covarianza ANCOVA para determinar si existen o no diferencias significativas entre los grupos, (4) se realiza un ANOVA factorial, que da cuenta de lo que sucede por cada grupo y con cada Estilo Cognitivo, (3) se realiza un análisis Post- hoc para evaluar diferencias significativas entre las medias de los estudiantes en cada estilo cognitivo, y (4) finalmente se estudian las correlaciones —si las hay— entre los grupos (Control y Experimental), los resultados del Pre-test, las correlaciones entre dimensión DIC y resultados del Pos-test.

Pre-test y Pos-test para grupo control

La media obtenida por los estudiantes del grupo control para el Pre-test es de 4.13, mientras que la media en el Pos-test es de 5.73, esto teniendo en cuenta que el puntaje máximo posible en estas pruebas es 10. Para las medidas de tendencia central, la mediana o punto medio de la distribución de los resultados, se encuentra en 4.0 para el Pre-test y 6.0 para el Pos-test. (Tabla 16).

Tabla 16

Estadísticos grupo Control^a

		Pre-test	Pos-test
N	Válido	30	30
	Perdidos	0	0
Media		4,13	5,73
Mediana		4,00	6,00
Moda		5	6

a. Grupo = Control

En los resultados del Pre-test, el 60 % de los participantes del grupo control se encuentra ubicado en puntuaciones iguales al valor de la media y debajo de la misma; y el 40% restante muestra puntuaciones mayores a la media (figura 10). En el Pos-test, el 50% presenta valores iguales o menores a la media y el 50% restante, por encima de la misma (figura 11).

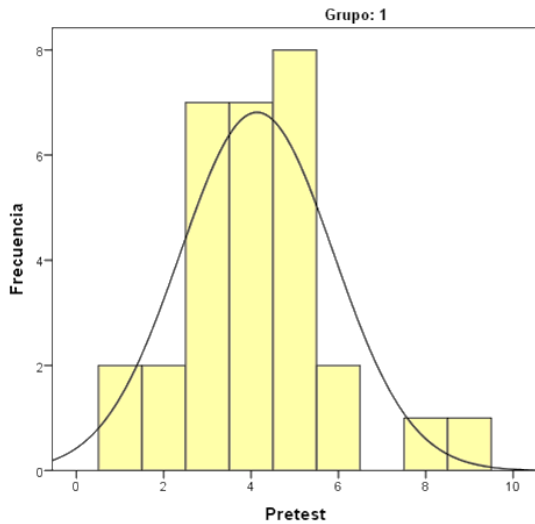


Figura 10. Histograma pre-test por pregunta. Grupo Control

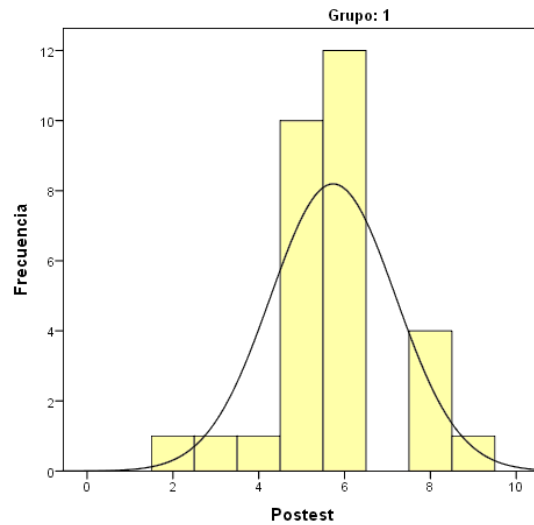


Figura 11. Histograma Pos-test por pregunta Grupo Control

Pre-test y Pos-test para grupo Experimental

Para los resultados obtenidos en el Pre-test la media del grupo experimental es 4.10, mientras que para el Pos-test es de 8.0, teniendo en cuenta que el puntaje máximo posible en esta prueba es 10. Para las medidas de tendencia central, la mediana o punto medio de la distribución de los resultados se encuentra en 4.0 para el Pre-test y 9.0 para el Pos-test.

Tabla 17

Estadísticos grupo Experimental^a

		Pre-test	Pos-test
N	Válido	30	30
	Perdidos	0	0
Media		4,10	8,00
Mediana		4,00	9,00
Moda		6	9

a. Grupo = Experimental

En los resultados del Pre-test, el 55% de los participantes se encuentra ubicado en puntuaciones sobre la media y debajo de la misma; mientras que el 45% restante presenta puntuaciones mayores a la media (figura 12). En el Pos-test el 50% presenta valores iguales o menores a la media y el 50% restante, por encima de la misma (figura 13).

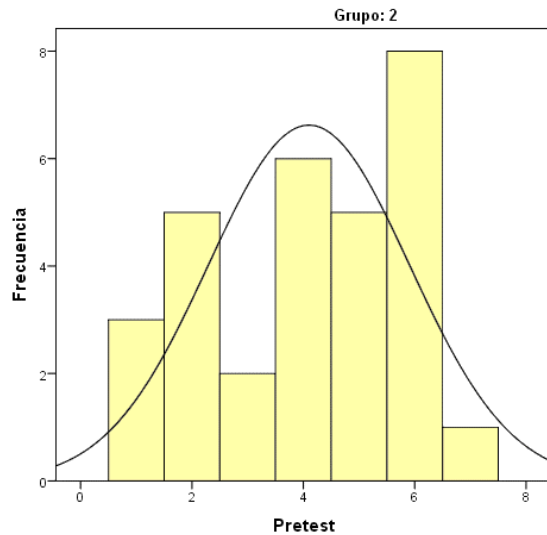


Figura 12. Histograma pre-test por pregunta. Grupo Experimental

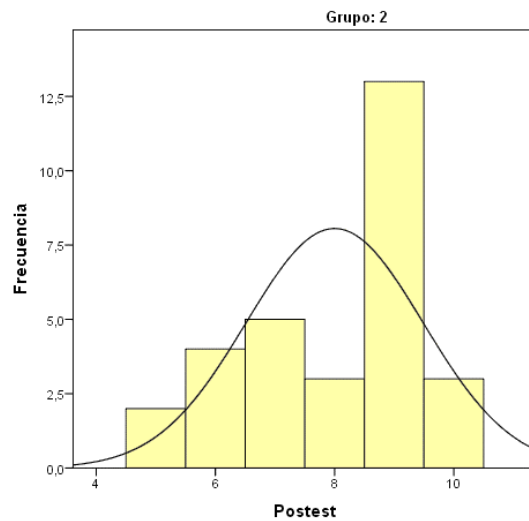


Figura 13. Histograma pos-test por pregunta. Grupo Experimental

Cumplimiento de Supuestos

En cuanto al supuesto de normalidad, se usa la prueba de Kolmogorov Smirnof, en tanto que la muestra es superior a 50 sujetos. Esta prueba se aplica tanto al grupo control como al grupo experimental en el test de figuras enmascaradas EFT, el Pre-test y el Pos-test.

Grupo Control

Como se observa en la tabla 18, el Pre-test y el Pos-test del grupo control presentan una significancia menor a 0.05 ($p=0.017$ y $p=0.000$, respectivamente), se rechaza la hipótesis nula y por tanto se determina que no existe normalidad en estas variables. Mientras tanto, el EFT del grupo experimental ($p=0.200$) presenta una significancia mayor a 0.05, por tanto, se acepta la hipótesis nula y se verifica la normalidad para esta variable.

Tabla 18*Prueba de Kolmogorov-Smirnov para una muestra^a*

		Pretest	EFT	Pos-test
N		30	30	30
Parámetros normales^{b,c}	Media	4,13	36,03	5,73
	Desviación estándar	1,756	7,636	1,461
Máximas diferencias extremas	Absoluta	,178	,119	,261
	Positivo	,178	,075	,261
	Negativo	-,126	-,119	-,208
Estadístico de prueba		,178	,119	,261
Sig. asintótica (bilateral)		,017^d	,200^{d,e}	,000^d

a. Grupo = 1

b. La distribución de prueba es normal.

c. Se calcula a partir de datos.

d. Corrección de significación de Lilliefors.

e. Esto es un límite inferior de la significación verdadera.

Grupo Experimental

Debido a que las variables EFT ($p=0.031$) y Pos-test (0.000) presentan una significancia menor a 0.05, se rechaza la hipótesis nula y se determina que no existe normalidad en estas variables. Entre tanto, el Pre-test tiene una significancia de ($p=0.056$) que es mayor a 0.05 por lo cual se acepta la hipótesis nula y se evidencia que hay normalidad en esta variable (tabla 19).

Ya que no se evidencia normalidad en todas las variables analizadas, se toma entonces la tabla de normalidad inicial como punto de referencia, evitando así que los procedimientos robustos se vean afectados por la falta de normalidad en dichas variables.

Para verificar el supuesto de homocedasticidad, es decir, que las varianzas del Pre-test en cada uno de los grupos sean estadísticamente iguales, se usó el test de Levene y se puede apreciar que la significancia es mayor que 0.05 ($p=0.441$), por tanto se acepta la hipótesis nula y se asumen varianzas iguales tanto en el grupo control como en el experimental (tabla 20).

Tabla 19*Prueba de Kolmogorov-Smirnov para una muestra^a*

		Pretest	EFT	Pos-test
N		30	30	30
Parámetros normales^{b,c}	Media	4,10	34,10	8,00
	Desviación estándar	1,807	8,442	1,486
Máximas diferencias extremas	Absoluta	,157	,168	,283
	Positivo	,144	,076	,150
	Negativo	-,157	-,168	-,283
Estadístico de prueba		,157	,168	,283
Sig. asintótica (bilateral)		,056 ^d	,031 ^d	,000 ^d

- a. Grupo = 2
- b. La distribución de prueba es normal.
- c. Se calcula a partir de datos
- d. Corrección de significación de Lilliefors.

Tabla 20*Prueba de muestras independientes*

		Prueba de Levene de igualdad de varianzas		Prueba T para la igualdad de medias						
		F	Sig.	t	gl	Sig. (bilateral)	Diferencia de medias	Diferencia de error estándar	95% de intervalo de confianza de la diferencia	
									Inferior	Superior
Pretest	Se asumen varianzas iguales	,601	,441	,072	58	,942	,033	,460	-,888	,954
	No se asumen varianzas iguales			,072	57,953	,942	,033	,460	-,888	,954

Análisis del diseño factorial

Tal como se describe en la metodología, para el análisis de los resultados se usa un ANCOVA factorial 2x3, tomando como covariable la prueba de conocimientos previos o Pre-test. Se presenta a continuación un estudio detallado centrado en el grupo experimental que evidencia el impacto que las dos variables independientes (AVA con andamiajes implícitos y estilo cognitivo), tienen sobre la variable dependiente —logro de aprendizaje—. En los análisis previos se muestra que este grupo tiene mejores resultados en comparación con el grupo control, pero sólo los análisis que siguen muestran la significancia o no de las diferencias frente al punto de partida.

Estudiantes por Estilos Cognitivos

Se parte de la muestra total: 60 estudiantes, 18 clasificados como dependientes, 25 como intermedios y 17 como Independientes de campo.

Tabla 21

Factores inter-sujetos

		N
DIC	Dependientes de campo (1)	18
	Intermedios de campo (2)	25
	Independientes de campo (3)	17
Grupo	Experimental	30
	Control	30

Un elemento muy diciente es el promedio obtenido en el Pos-test. Para el caso del grupo control, se evidencia que la media obtenida por los 10 estudiantes dependientes de campo, es de 5.00, mientras que la de los 13 estudiantes de tipo intermedio, es de 6.08 y finalmente, los 7 estudiantes Independientes de campo obtuvieron una media de 6.14. Lo anterior da cuenta que el desempeño de los intermedios e independientes es superior a los dependientes, aunque es realmente cercano entre ambos.

En el grupo Experimental se observa un comportamiento similar al del grupo Control, toda vez que la media de los grupos intermedio (8.33) e independiente (8.40), es superior a la media del grupo dependientes de campo. Se concluye entonces que los intermedios e

independientes aprovechan de mejor manera los ambientes virtuales, lo cual redundará en un mejor desempeño en el Pos-test. Lo anterior se puede corroborar en la figura 14 con el gráfico de regresión lineal que se presenta, en él se evidencia que la pendiente lograda por los resultados del grupo independiente, es mayor en su orden, a la de los intermedios y los dependientes de campo.

A este análisis se puede sumar el hecho de que la mayor desviación estándar entre los estudiantes de los tres estilos cognitivos, pertenece a los independientes, seguido por los intermedios del grupo experimental, esto demuestra que la dispersión en los dos primeros es superior para los estudiantes dependientes del grupo control, la desviación es mayor que el mismo estilo del grupo experimental. Y por tanto los resultados están dispersos de la media de los datos.

Tabla 22

Estadísticos descriptivos - Variable dependiente: Pos-test

DIC	Grupo	Media	Desviación estándar	N
1	1	5,00	1,700	10
	2	7,00	1,414	8
	Total	5,89	1,844	18
2	1	6,08	1,188	13
	2	8,33	1,231	12
	Total	7,16	1,650	25
3	1	6,14	1,345	7
	2	8,40	1,578	10
	Total	7,47	1,841	17
Total	1	5,73	1,461	30
	2	8,00	1,486	30
	Total	6,87	1,855	60

Luego de conocer las medias, se aplica la prueba de Levene para determinar igualdad de varianzas. Al respecto se obtiene una significancia $p=0.29$ —mayor que 0.05— por tanto se acepta la hipótesis nula y se asumen varianzas iguales en los grupos control y experimental.

Tabla 23

Prueba de igualdad de Levene de varianzas de error^a - Variable dependiente: Pos-test

F	df1	df2	Sig.
,426	5	54	,829

Prueba la hipótesis nula que la varianza de error de la variable dependiente es igual entre grupos.

*a. Diseño : Intersección + Pretest + DIC + Grupo + DIC * Grupo*

Análisis de los Efectos de las variables Independientes

El modelo explica el 42.3% de la varianza del logro de aprendizaje. Como se observa, las variables independientes muestran efectos significativos sobre el logro de aprendizaje. La covariable (resultados de la prueba de conocimientos previos) no muestra una asociación significativa con el logro de aprendizaje ($F=0.808$; $p=0.373$).

Cuando se analizan los efectos principales de las variables independientes, el efecto más significativo se da por la presencia del AVA con el uso del andamiaje conceptual implícito ($F=33.939$; $p=0.000$), este resultado muestra que los estudiantes que trabajan con el andamiaje, obtienen resultados considerablemente más altos que sus compañeros que trabajan sin el andamiaje. En segundo lugar, se debe destacar el efecto del estilo cognitivo ($F=4.915$; $p=0.011$) que implica que los estudiantes independientes de campo muestren mejores logros que los intermedios y estos a su vez, que los dependientes de campo (Tabla 24).

Al observar el desempeño para cada prueba aplicada, se observa una diferencia significativa entre los grupos control y experimental, diferencia que se marca de manera clara a favor del grupo experimental. Este resultado se ve reflejado en las tablas que muestran las estadísticas, en estas los promedios más altos en el Pos-test corresponden a los participantes del grupo Experimental quienes reciben el apoyo de los andamiajes conceptuales e implícitos. De igual manera se muestra que a los estudiantes de este grupo pertenecen en mayor frecuencia los puntajes más altos presentes en los resultados.

Tabla 24

Resultados del ANCOVA en los dos grupos de trabajo - Variable dependiente: Pos-test

Origen	Tipo III de suma de cuadrados	gl	Media cuadrática	F	Sig.	Eta parcial al cuadrado
Modelo corregido	97,691 ^a	6	16,282	8,199	,000	,481
Intersección	374,047	1	374,047	188,370	,000	,780
Pretest	1,604	1	1,604	,808	,373	,015
DIC	19,518	2	9,759	4,915	,011	,156
Grupo	67,393	1	67,393	33,939	,000	,390
DIC * Grupo	,098	2	,049	,025	,976	,001
Error	105,243	53	1,986			
Total	3032,000	60				
Total corregido	202,933	59				

a. R al cuadrado = ,481 (R al cuadrado ajustada = ,423)

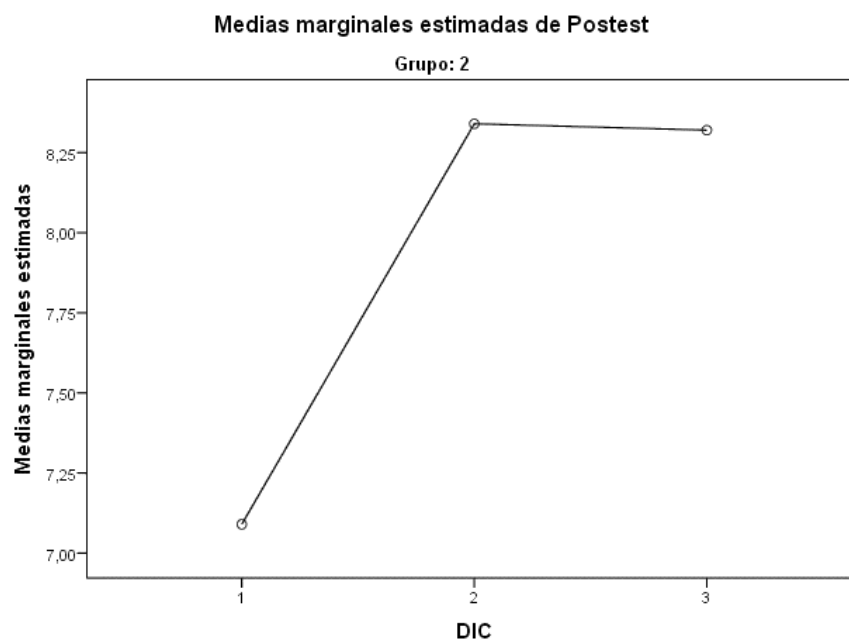


Figura 14. Medias marginales estimadas del logro de aprendizaje por estilo cognitivo y trabajo con el módulo.

Pregunta 2

¿Existen diferencias significativas sobre el logro de aprendizaje entre estudiantes con diferente estilo cognitivo en la dimensión DIC, cuando interactúan en un ambiente virtual de aprendizaje que integra en su estructura un andamiaje conceptual implícito?

Relación Grupo-Estilo Cognitivo

A continuación, se presenta el análisis en el que se tiene en cuenta cada uno de los grupos en los que se realizó la intervención —Experimental y Control— y el estilo cognitivo —dependiente, intermedio o independiente—. De los 60 estudiantes, 18 eran Dependientes de campo, 24 Intermedios y los 18 restantes Independientes de campo.

Resultados Prueba EFT

Antes iniciar a navegar en el ambiente (AVA), se aplica a los participantes de ambos grupos la prueba EFT de figuras enmascaradas para determinar los estilos cognitivos. El promedio de la prueba es 34.79, sobre un puntaje máximo posible de 50, el valor mínimo es 16 puntos y el máximo 49 puntos. Los resultados se discriminan por terciles para determinar qué estudiantes pertenecen al grupo independiente, dependiente o intermedio en la dimensión DIC. De acuerdo a estos resultados, los grupos quedan clasificados tal y como se evidencia en la tabla 25.

Tabla 25

Tamaño de los grupos y estilo cognitivo

		Estilo Cognitivo			Total
		Dependientes	Intermedios	Independientes	
AVA	Experimental	10	11	9	30
	Control	8	13	9	30
	Total	18	24	18	60

Análisis de medias por grupo y estilo Cognitivo

Un elemento muy diciente es el promedio obtenido por los estudiantes en el Pos-test. Para el caso del grupo control, se evidencia que la media obtenida por 10 estudiantes con dimensión DIC Dependiente de campo, es de 5.00, mientras que 13 estudiantes de tipo intermedio, es de 6.08 y finalmente, 7 estudiantes Independientes de campo obtuvieron una media de 6.14. Lo anterior da cuenta que el desempeño de los Intermedios e Independientes es superior a los Dependientes, aunque es realmente cercano entre ambos.

En el Grupo Experimental se observa un comportamiento similar al del grupo Control, toda vez que la media de los grupos Intermedio (8.20) e Independiente (8.50), es superior a la media del grupo dependientes de campo. Se concluye entonces que los Intermedios e Independientes aprovechan de mejor manera los ambientes virtuales, lo cual redundo en un mejor desempeño en el Pos-test. Lo anterior se puede corroborar en la figura 14 con el gráfico de regresión lineal que se presenta, en él se evidencia que la pendiente lograda por los resultados del grupo Independiente, es mayor en su orden, a la de los intermedios y los dependientes de campo.

Tabla 26

Estadísticos descriptivos

Variable dependiente: Pos-test

Grupo	DIC	Media	Desviación estándar	N
1	1	5,00	1,700	10
	2	6,08	1,188	13
	3	6,14	1,345	7
	Total	5,73	1,461	30
2	1	7,00	1,414	8
	2	8,20	1,317	10
	3	8,50	1,446	12
	Total	8,00	1,486	30
Total	1	5,89	1,844	18
	2	7,00	1,624	23
	3	7,63	1,802	19
	Total	6,87	1,855	60

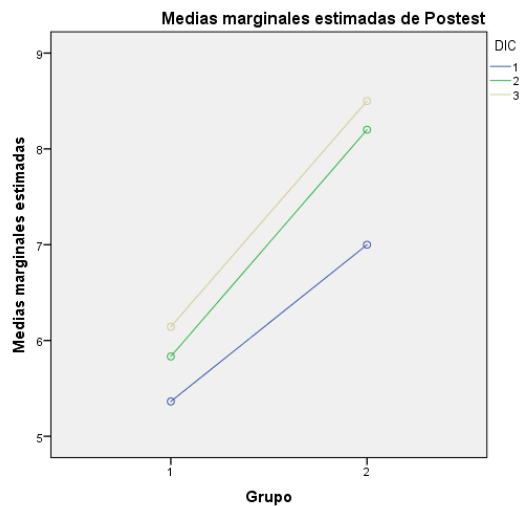


Figura 15. Gráfico de medias marginales

Con el propósito de determinar con mayor precisión la interacción entre el estilo cognitivo, el Ambiente con el andamiaje implícito y el logro de aprendizaje, se realiza un análisis adicional para conocer si existen diferencias significativas entre el logro de aprendizaje obtenido por los estudiantes con diferente estilo cognitivo en la dimensión DIC, considerando por separado el grupo experimental, que trabaja con el ambiente que incluye andamiajes. Se realiza el ANCOVA tomando como covariable las notas previamente obtenidas por los estudiantes en la prueba de conocimientos previos (pre-test).

Estudiantes Grupo experimental, por Estilos Cognitivos

Inicialmente se muestra cómo estaba conformada la muestra del grupo experimental, esto es: de los 30 estudiantes, 8 fueron clasificados como dependientes, 12 como intermedios y 10 como Independientes de campo.

Tabla 27

Factores inter-sujetos^a

DIC	1	8
	2	12
	3	10
Grupo	2	30

a. Grupo = 2

Se aplica la prueba de Levene para determinar igualdad de varianzas. Al respecto se obtiene una significancia $p=0.696$ —mayor que 0.05— por tanto se acepta la hipótesis nula y se asumen varianzas iguales en los estilos cognitivos que conforman el grupo Experimental.

Tabla 28

Prueba de igualdad de Levene de varianzas de error^{a,b}

F	df1	df2	Sig.
,368	2	27	,696

Prueba la hipótesis nula que la varianza de error de la variable dependiente es igual entre grupos.

a. Grupo = 2

b. Diseño : Intersección + Pretest + DIC + Grupo + DIC * Grupo

El modelo explica el 33.6% de la varianza del logro de aprendizaje. Como se observa, las variables independientes muestran efectos significativos sobre el logro de aprendizaje. La covariable (resultados de la prueba de conocimientos previos), analizada sólo para el grupo experimental tiene una asociación significativa con el logro de aprendizaje ($F=10.196$; $p=0.004$). Cuando se analizan los efectos principales de las variables independientes, se evidencia que el efecto del estilo cognitivo ($F=3.066$; $p=0.064$) no tuvo una asociación significativa con el logro de aprendizaje, lo cual implica que los estudiantes independientes de campo muestran mejores resultados que los intermedios y estos que los dependientes de campo.

Tabla 29

Pruebas de efectos inter-sujetos^a - Variable dependiente: Pos-test

Origen	Tipo III de suma de cuadrados	gl	Media cuadrática	F	Sig.	Eta parcial al cuadrado
Modelo corregido	25,884 ^b	3	8,628	5,885	,003	,404
Intersección	185,991	1	185,991	126,870	,000	,830
Pre-test	14,951	1	14,951	10,198	,004	,282
DIC	8,989	2	4,494	3,066	,064	,191
Error	38,116	26	1,466			
Total	1984,000	30				
Total corregido	64,000	29				

a. Grupo = 2

b. R al cuadrado = ,404 (R al cuadrado ajustada = ,336)

Finalmente, con el fin de verificar los hallazgos obtenidos en la investigación, se realiza un análisis de datos bivariados entre la variable Grupo (con o sin andamiaje), logro previo en matemáticas y estilo cognitivo. La tabla 30 presenta los coeficientes de correlación de Pearson. Iniciando por el estilo cognitivo. El software marca con * las correlaciones significativas y con ** las correlaciones altamente significativas. Para este caso la significancia de la correlación del Pre-test del grupo experimental es de 0.010, al ser este valor menor a 0.05 y de hecho igual a 0.01 implica la existencia de una correlación altamente significativa entre los resultados del Pos-test del grupo experimental y la dimensión DIC. Este resultado advierte que los andamios usados

no anulan el efecto de pertenecer a un determinado estilo cognitivo, sino que, por el contrario estas diferencias se ven intensificadas (las posibles causas se abordan en el capítulo de discusión). Se evidencia además que la prueba de entrada o pre-test no presenta una correlación con la dimensión DIC o con el logro de aprendizaje como se vio antes.

Tabla 30

Correlaciones

		DIC	Pretest	Postest
DIC	Correlación de Pearson	1	-,073	,331**
	Sig. (bilateral)		,578	,010
	N	60	60	60
Pretest	Correlación de Pearson	-,073	1	,067
	Sig. (bilateral)	,578		,612
	N	60	60	60
Postest	Correlación de Pearson	,331**	,067	1
	Sig. (bilateral)	,010	,612	
	N	60	60	60

** . La correlación es significativa en el nivel 0,01 (bilateral).

Luego del análisis presentado para la pregunta 2 es importante señalar que el uso de andamiajes conceptuales e implícitos determina diferencias significativas entre estudiantes de estilos cognitivos diferentes, ya que los mejores resultados son los obtenidos por los estudiantes independientes, seguido por poca diferencia de los intermedios y finalmente de los dependientes de campo. Adicionalmente, se muestra una correlación alta entre los resultados del Pos-test y el estilo cognitivo del estudiante.

Discusión

A partir de los resultados expuestos en el capítulo anterior, se presenta a continuación la discusión donde se confrontan los datos recolectados con la teoría que fundamenta esta investigación. El análisis se realiza teniendo como punto de partida las hipótesis que se plantearon para este estudio.

H1:

Los estudiantes que trabajan en un ambiente virtual de aprendizaje mediado por andamiajes conceptuales e implícitos obtienen mejores resultados en el aprendizaje y solución de problemas de razones de cambio relacionadas, que los estudiantes que abordan el tema en un ambiente virtual, sin el uso de dichos andamiajes.

Para determinar el grado de verdad de esta hipótesis, se tienen en cuenta los resultados obtenidos para la pregunta de investigación: *¿Cuál es el efecto de un andamiaje conceptual implícito integrado en un AVA, sobre el logro de aprendizaje relacionado con la solución de problemas, que involucren razones de cambio relacionadas?* Al respecto los resultados muestran que el grupo experimental obtuvo diferencias significativas en la solución de problemas luego de la interacción con los andamiajes propuestos, comparado con el desempeño mostrado en la prueba de entrada o pre-test. Es probable que estos resultados se vean beneficiados por el uso de andamiajes conceptuales e implícitos, toda vez que éstos favorecen el desarrollo de la comprensión conceptual, permitiendo hacer conexiones con situaciones de la vida cotidiana (Podolefsky et al., 2013).

En este sentido, las diferencias encontradas antes y después del uso de los andamiajes, se sustentan en el análisis de correlación de Pearson (ver resultados), el cual arroja una significancia positiva muy alta, que permite establecer una relación de proporcionalidad directa entre la cantidad de andamiajes y el puntaje obtenido en el pos-test. Es decir, si el número de andamiajes incrementa, también el número de situaciones problemáticas resueltas de forma adecuada (no necesariamente será una relación uno a uno).

Los elementos que estructuran los andamiajes conceptuales e implícitos propuestos, son las simulaciones, éstas le permiten a los estudiantes experimentar el cambio mediante la interacción directa, modificando en tiempo real los diferentes agentes que hacen parte de la simulación, al tiempo que observan cómo estas modificaciones tienen resultados directos en áreas, volúmenes y distancias. Para Chen, Wu, & Jen, (2013) este tipo de interacciones ayudan al estudiante a dar contexto a elementos que antes solo trabajaban de forma algorítmica en el salón de clase.

Adicionalmente, las situaciones propuestas en los simuladores respetan los ritmos de aprendizaje, de tal forma que un estudiante encuentra ayuda de forma verbal, gráfica y visual. Esto posibilita que un ejercicio sea comprendido por cualquier estudiante, independientemente de sus habilidades para comprender situaciones problema.

También se corrobora que los estudiantes perciben a los simuladores como espacios de exploración atractivos y abiertos, y cuando se implementan como un andamiajes conceptuales e implícitos proporcionan orientaciones claras sin que se encuentren supeditados a seguir lineamientos secuenciales. Esto concuerda con la teoría planteada por Podolefsky et al., (2013) según la cual este tipo de andamiajes "emplea medidas, restricciones, pautas y comentarios para enmarcar y armar la exploración de los estudiantes sin una guía explícita, y es un marco de diseño particularmente útil para simulaciones interactivas en ciencias y matemáticas" (Podolefsky et al., 2013).

Lo anterior se evidencia durante las sesiones trabajadas con el grupo experimental. La parte del ambiente en la que más motivados se muestran los estudiantes durante la navegación es la que corresponde a los andamiajes, parece que juegan, se muestran sorprendidos por los cambios que presentan las simulaciones y las posibilidades de manipulación, mostrando gran interés en las diseñadas en tres dimensiones. Esto va de la mano con lo descrito en diferentes investigaciones que hacen uso de simulaciones reales (Chen, Wu, & Jen, 2013; Podolefsky et al., 2013; Prabawanto, 2018, entre otros), en las cuales se destaca que el uso de múltiples andamiajes —en este caso específico, conceptuales e implícitos— en el proceso de aprendizaje, redundando en la culminación de la tarea propuesta, mejorando su comprensión de lo que están aprendiendo, es decir, se fortalecen los procesos metacognitivos.

En esta línea aparece el segundo elemento de los andamiajes, que corresponde a una serie de preguntas orientadoras de tipo cognitivo y metacognitivo, relacionadas con cada una de las simulaciones y que ofrecen respuestas de selección múltiple; estas preguntas entregan retroalimentación inmediata al estudiante una vez que completa la sección que corresponde a una simulación en particular. A los estudiantes se les formulan preguntas del siguiente tipo: ¿Consideras que el radio de la superficie cónica está cambiando? Este tipo de formulación induce al estudiante a cuestionar su percepción de la simulación, ya que es necesario que realice una interpretación sobre la situación presentada a la vez que interactúa con la misma, y considera las posibles respuestas. Para saber cuál es la solución acertada debe pensar ¿Qué es el cambio para él?, ¿Cómo saber si una variable cambia o no con el tiempo? ¿En qué unidades se mide la razón de cambio?, y de esta manera hará un balance de lo aprendido versus lo observado, mientras responde estos cuestionamientos.

Al verificar el uso de este recurso, se evidencia que los estudiantes en un alto porcentaje, lo usa para comprobar que las respuestas correspondan a las situaciones que perciben en una simulación. Como este recurso hace énfasis en identificar qué elementos de la situación descrita cambian y cuáles se mantienen constantes, los estudiantes reúnen los elementos necesarios que les permite interpretar una situación problema al dotarla de sentido y contexto. Esta versión se confirma al analizar los resultados obtenidos del grupo experimental, ya que las preguntas que muestran mejores resultados en el pos-test, son las relacionadas con la detección de la razón de cambio en una variable, mientras otra se mantiene constante (o cambia de manera simultánea) con el paso del tiempo.

H₂:

El uso de andamiajes conceptuales e implícitos como parte de un AVA disminuye las brechas de aprendizaje que suelen presentarse entre los estudiantes con distintos estilos cognitivos en la dimensión DIC.

La pregunta de investigación propuesta para determinar el cumplimiento de esta hipótesis es: *¿Existen diferencias significativas sobre el logro de aprendizaje entre estudiantes con estilo cognitivo en la dimensión DIC, cuando interactúan en un ambiente virtual de aprendizaje que integra en su estructura un andamiaje conceptual implícito?*

Para responder a esta pregunta, se tiene en cuenta esencialmente la prueba de correlaciones de Pearson realizada para los estilos cognitivos en el Pre-test y Pos-test, los resultados arrojan la existencia de una correlación significativa entre el estilo cognitivo de un estudiante y el puntaje obtenido en la prueba de salida. En este sentido, la hipótesis 2 no se cumple, pues en lugar de que la brecha documentada para los tres estilos cognitivos disminuya, ésta aumenta, haciendo que los estudiantes independientes de campo obtengan mejores resultados que los intermedios y estos dos a su vez, mejores resultados que los dependientes.

A continuación se mencionan algunos elementos atenuantes de esta situación, así como posibles explicaciones para que esto suceda, en contravía de lo que se esperaba: Es importante tener en cuenta que la desviación estándar existente entre los resultados obtenidos por los 30 estudiantes del grupo experimental en el Pos-test, es inferior a la del mismo grupo en el pre-test o prueba de entrada. Es viable pensar que la intervención hecha mediante los andamiajes propicia este cambio, lo cual está acorde con lo planteado por (López et al., 2012).

En este sentido, las simulaciones propuestas logran homogenizar los procedimientos de solución de situaciones problema, permitiendo así que los integrantes del grupo experimental, tengan resultados más cercanos a la media obtenida por el grupo, lo cual redundaría en que los andamiajes propuestos disminuyen el efecto de tener uno u otro estilo cognitivo. Este elemento resulta fundamental en el aula, toda vez que permite que los contenidos sean aprendidos de la misma forma y en proporciones similares. Ahora bien, es importante aclarar que la dispersión de los datos es diferente de cero, por tanto es probable que los estilos cognitivos aún tengan influencia en los resultados, pero no de la misma forma en que se puede observar en el pre-test. Este elemento atenúa el resultado anterior, puesto que, a pesar del resultado de las correlaciones, la dispersión disminuye.

Un componente que se puede destacar respecto a la situación descrita antes, es el hecho de que las simulaciones están diseñadas de menor a mayor orden de complejidad, por lo cual se espera que los estudiantes con menos habilidades en la temática y en general en la asignatura (dependientes de campo y algunos intermedios), comprendan los ejercicios más sencillos y sistemáticamente vayan aumentando el grado de complejidad de los ejercicios propuestos y las simulaciones que los representan.

Es así, como el estudiante inicia con una situación en la que sólo cambia una variable con el paso del tiempo, para pasar a una de mayor complejidad en la que se modifican dos y finalmente tres variables. Sin embargo, el ambiente no cuenta con un mecanismo para determinar el número de estudiantes del grupo experimental que interactúan con las simulaciones completas, pues aunque la intervención se da dentro del aula en un espacio controlado, los estudiantes son libres de navegar dentro del andamiaje y no existe ninguna simulación que sea pre-requisito para la otra. Lo anterior deja la puerta abierta para presumir que algunos estudiantes no interactúan con todos los simuladores propuestos.

Es importante recordar que cerca del 50% de la muestra es dependiente de campo, lo cual supone una variable que afecta la experimentación. Adicionalmente, se observa que en el Pre-test la dispersión de los grupos es bastante significativa, superior a la encontrada en el Pos-test, lo cual da cuenta de que los resultados están muy alejados del promedio y la brecha existente entre dependientes, intermedios e independientes es grande (al menos con relación a los resultados obtenidos en el Pos-test).

Finalmente, es conveniente enunciar que no se tiene en cuenta en esta investigación elementos como la autorregulación, que puede dar cuenta de situaciones como: ¿qué tanto puede el estudiante asignarse tareas u horarios para visitar el ambiente en casa?, ¿cuántas preguntas orientadoras necesita responder antes de estar listo para continuar con la prueba de salida? Quizás este elemento es crucial para comprender por qué la dimensión DIC tiene una correlación tan alta con los resultados del pos-test y en cambio no existe evidencia de la misma en los resultados del pre-test. El hecho de que el estudiante elija responder sólo algunos de los cuestionamientos propuestos como parte del andamiaje o que no espere la retroalimentación proporcionada por el AVA, pueden ser determinante para que las brechas entre los estilos cognitivos sean tan marcadas.

Conclusiones

Una vez realizada la experimentación con el Ambiente Virtual de aprendizaje y luego de analizar los resultados correspondientes, se puede concluir que el uso de andamiajes conceptuales e implícitos favorece el aprendizaje de los estudiantes; específicamente en temas que requieran demostraciones en tiempo real. Sin embargo, esto será válido, siempre y cuando, dichos andamiajes sean diseñados bajo las especificaciones de la tarea solicitada. En el caso particular de esta investigación, el eje temático es Razones de Cambio, y por tanto las simulaciones diseñadas deben evidenciar el cambio de las variables con respecto al tiempo, y así mismo los momentos en que la Razón de Cambio es igual a cero.

Validando la afirmación anterior y al contrastar los resultados obtenidos de la intervención del grupo experimental con los resultados del grupo control, se evidencia la eficacia de las simulaciones en la comprensión de este tipo de problemas, ya que permite que los estudiantes interactúen con cada simulación y puedan registrar en tiempo real los cambios que se presentan. Por el contrario, el uso de representaciones estáticas que muestran ejercicios solucionados (como se utiliza tradicionalmente) limita la comprensión del concepto, al no permitir un análisis completo de la situación y limitarse a contemplar una solución previa.

En este mismo sentido, se destaca la importancia de que los constructos matemáticos se presenten con diferentes representaciones, respondiendo de esta manera a las necesidades específicas de los estudiantes, de acuerdo a los diferentes estilos de aprendizaje. Es así como el ambiente ofrece diversas representaciones para cada situación, lo que permite a los estudiantes comprender los problemas planteados desde sus fortalezas, y al mismo tiempo, analizarlas, contrastarlas y relacionarlas con representaciones que pueden no ser tan conocidas para ellos. De acuerdo con Duval (1998) el que un estudiante pueda interpretar diferentes representaciones de un mismo ítem y logre hacer las relaciones y las traducciones entre ellas es evidencia clara de que el estudiante ha aprendido.

Por otro lado, de acuerdo a los resultados obtenidos por los estudiantes en la prueba de salida, se resalta la importancia de abordar la noción de derivada desde el concepto de razones de cambio y razones de cambio relacionadas, sin limitarse a la perspectiva procedimental, ya que

de esta manera se faculta al estudiante para que extrapole los conocimientos adquiridos a situaciones que pueden ser comunes, permitiendo la aplicación de conceptos matemáticos en la solución de problemas cotidianos y de esta manera facilitar la ubicuidad del aprendizaje.

Como es de conocimiento popular, las matemáticas que se quedan en el aula de clase, son matemáticas que el estudiante olvidará con el paso del tiempo; contrario a esto, cuando el estudiante tiene la posibilidad de manejar los tiempos, los espacios y los recursos, las posibilidades de fijar de manera definitiva los aprendizajes son mayores.

En relación con los objetivos planteados en esta investigación, y específicamente con el andamiaje conceptual implícito, se puede afirmar que el andamiaje inmerso en el ambiente virtual de aprendizaje facilita la solución de problemas entorno a Razones de Cambio y Razones de Cambio Relacionadas, en estudiantes con diferentes estilos de aprendizaje en la dimensión DIC. Así mismo, se infiere (debido a las correlaciones obtenidas en los resultados) que el uso de un andamiaje conceptual implícito dentro de un AVA favorece el impacto del estilo cognitivo (estudiantes dependientes, intermedios e independientes de campo), en los resultados obtenidos en las pruebas finales. Dichas pruebas evidencian que existe una correlación significativa entre el estilo cognitivo de un estudiante y el puntaje obtenido en la prueba de salida. Este elemento hace que la hipótesis 2 no se cumpla, por tanto que, en lugar de que la brecha documentada para los tres estilos cognitivos disminuyera, ésta se pronunció, haciendo que los independientes tuvieran mejores resultados que los intermedios y estos dos a su vez, mejores que los dependientes. Este resultado puede obedecer al papel que la autorregulación juega en la navegación de ambientes virtuales de aprendizaje.

Por otro lado, un aspecto importante en el uso de andamiajes educativos son las características de desvanecimiento y transferencia de la responsabilidad, aunque en el desarrollo de la investigación se incluyó el desvanecimiento de los andamiajes de manera progresiva (de acuerdo al grado de complejidad de los ejercicios planteados); tres o cuatro sesiones no son suficientes para observar los resultados de dicho desvanecimiento; de este modo, se abre un campo para trabajos posteriores, donde el tiempo de intervención sea mayor y se evidencie de manera clara dichos resultados.

Se sugiere además, para trabajos futuros, ampliar el tema de investigación a otros campos como puede ser la auto-regulación en el aprendizaje, ya que algunos datos que podrían ser relevantes en este aspecto, no fueron tenidos en cuenta en la presente investigación, puesto que no eran determinantes para dar respuesta a las preguntas planteadas. Algunos ejemplos de estos datos son: (1) el número de veces que los estudiantes acceden al AVA, (2) el número de veces que trabajan con las simulaciones, (3) el número de intentos que realizan para responder las preguntas propuestas en cada etapa y (4) la influencia sobre el resultado de aprendizaje de la realimentación dada por las simulaciones. Toda esta información se almacena a través del ambiente y está disponible para su análisis.

Finalmente, es importante resaltar que los ambientes virtuales de aprendizaje, diseñados para la comprensión de conceptos matemáticos deben beneficiarse mediante el uso de andamiajes que incluyan simulaciones relacionadas con su aplicación en la vida real, pues estas herramientas favorecen la comprensión de conceptos y la fijación de los mismos a largo plazo.

Referencias

- Amador, J. A. (1994). Dependencia-independencia de campo y eficacia en tareas cognitivas *, (60), 35–48.
- Ärleböck, J. B., Doerr, H. M., & O’Neil, A. H. (2013). A Modeling Perspective on Interpreting Rates of Change in Context. *Mathematical Thinking and Learning*, 15(4), 314–336.
<https://doi.org/10.1080/10986065.2013.834405>
- Azevedo, R., & Hadwin, A. F. (2005). Scaffolding self-regulated learning and metacognition - Implications for the design of computer-based scaffolds. *Instructional Science*, 33(5–6), 367–379. <https://doi.org/10.1007/s11251-005-1272-9>
- Badillo, E. (2003). La Derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de la Matemática de Colombia, 126.
- borrar Hannafin, M., Land, S., & Oliver, K. (1999). Borraron Open learning environments: Foundations, methods, and models. Instructional-design theories and models: A new paradigm of instructional theory. In C. M. Reigeluth (Ed.), *Instructional-design Theories and Models: A New Paradigm of instructional theory* (1st ed., Vol. 2, pp. 115–140). New York. Retrieved from https://books.google.es/books?hl=en&lr=&id=FW9BA3c_VRkC&oi=fnd&pg=PT128&ots=hr5zZuiDMT&sig=qbVEsAXJ_nkBRWKK0WbIKUD-ahU#v=onepage&q&f=false
- Brunyé, T., Taylor, H., & N. Rapp, D. (2004). Building Mental Models of Multimedia Procedures: Implications for Memory Structure and Content.
- Brush, T. A., & Saye, J. W. (2002). A Summary of Research Exploring Hard and Soft Scaffolding for Teachers and Students Using a Multimedia Supported Learning Environment. *The Journal of Interactive Online Learning*, 1(2), 1–12. Retrieved from <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download;jsessionid=5CE99D40B28EC28D6FA74395011AA7C7?doi=10.1.1.211.7691&rep=rep1&type=pdf>
- Cantoral, R., Lezama, J., Farfán, R. M., & Martínez Sierra, G. (2006). Socioepistemología y

representación: algunos ejemplos. *RELIME. Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa*, ISSN 1665-2436, Vol. 9, N°. Extra 1, 2006, Págs. 83-102, 9(1), 83–102. Retrieved from <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2161533>

Cantoral Uriza, R. (2013). *Desarrollo del Pensamiento y del Lenguaje Variacional*.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2003). Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: un marco conceptual y un estudio. *Revista EMA*, 8 (2)(2002), 121–156. <https://doi.org/10.1108/JPBM-03-2016-1122>

Castro, S., & Guzmán de Castro, B. (2005). Los estilos de aprendizaje en la enseñanza y el aprendizaje: Una propuesta para su implementación The styles of learning in the education and learning: A proposal for its implementation. *Revista de Investigación*, (58), 4. Retrieved from <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2051098>

Chen, C. H., Wu, I. C., & Jen, F. L. (2013). Designing online scaffolds for interactive computer simulation. *Interactive Learning Environments*, 21(3), 229–243. <https://doi.org/10.1080/10494820.2010.549831>

Curione, K., Míguez, M., Crisci, C., & Maiche, A. (2010). Estilos cognitivos, motivación y rendimiento académico en la universidad. *Revista Iberoamericana De Educación*, 54(3), 1–9.

Ding, L., Reay, N., Lee, A., & Bao, L. (2009). Using Conceptual Scaffolding to Foster Effective Problem Solving. *Physics Education Research*, 1179(1), 129–132.

Ding, L., Reay, N., Lee, A., & Bao, L. (2011). Exploring the role of conceptual scaffolding in solving synthesis problems, *020109*, 1–11. <https://doi.org/10.1103/PhysRevSTPER.7.020109>

Dolores, C., Chi, A., Canul, E., Cantú, A., & Pastor, G. (2009). De las descripciones verbales a las representaciones gráficas. El caso de la rapidez de la variación en la enseñanza de la matemática. *Número 18–Junio de ...*, 41–57. Retrieved from http://www.fisem.org/www/union/revistas/2009/18/Union_018_008.pdf

- Gagné, R. (1975). *Principios básicos del aprendizaje para la instrucción*. (Diana, Ed.). Mexico.
- Gagné, R., & Merrill, D. (1990). Robert M. Gagne and M. David Merrill: In Conversation. *Educational Technology*, 30(11), 35–39.
- García, J. (1989). *Los Estilos Cognitivos Y Su Medida: Estudios sobre la dimensión Dependencia-Independencia de campo*. (CENTRO DE PUBLICACIONES - Secretaría general técnica. Ministerio de Educación y ciencia, Ed.) (1st ed.). Madrid.
- Geelan, D. R., & Fan, X. (2014). Science Teachers' Use of Visual Representations, 8, 249–270. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-06526-7>
- Granott, N. (2005). Scaffolding dynamically toward change: Previous and new perspectives. *New Ideas in Psychology*, 23(3), 140–151. <https://doi.org/10.1016/J.NEWIDEAPSYCH.2006.07.002>
- Gros, B. (1997). *Diseños y programas educativos*. (Editorial Ariel, Ed.) (1st ed.). Barcelona.
- Hadwin, A. F., & Winne, P. H. (2001). CoNoteS2: A Software Tool for Promoting Self-Regulation. *Educational Research and Evaluation*, 7(2–3), 313–334. <https://doi.org/10.1076/edre.7.2.313.3868>
- Hannafin, M., Land, S., & Oliver, K. (1999). Open Learning Environments : Foundations , methods , and models. *Instructional-Design Theories And Models*, (January), 115–140.
- Hederich-Martínez, C., López-Vargas, O., & Camargo-Uribe, A. (2016). Effects of the use of a flexible metacognitive scaffolding on self-regulated learning during virtual education. *Int. J. Technology Enhanced Learning J. Technology Enhanced Learning*, 844(3), 199–216. <https://doi.org/10.1504/IJTEL.2016.082321>
- Holton, D., & Clarke, D. (2006). Scaffolding and metacognition. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 37(2), 127–143. <https://doi.org/10.1080/00207390500285818>
- Holton, D., & Thomas, G. (2001). Mathematical Interactions and Their Influence on Learning. In

- D. Clarke (Ed.), *Perspectives on Practice and Meaning in Mathematics and Science Classrooms* (pp. 75–104). Dordrecht: Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/0-306-47228-7_5
- Jumaat, N. F., & Tasir, Z. (2014). Instructional scaffolding in online learning environment: A meta-analysis. *Proceedings - 2014 International Conference on Teaching and Learning in Computing and Engineering, LATICE 2014*, 74–77. <https://doi.org/10.1109/LaTiCE.2014.22>
- Kagan, J., Moss, H. A., & Sigel, I. E. (1963). Psychological Significance of Styles of Conceptualization. *Monographs of the Society for Research in Child Development*, 28(2), 73–112. <https://doi.org/10.2307/1165673>
- Kogan, N. (1973). CHAPTER 7 - Creativity and Cognitive Style: A Life-Span Perspective. In P. B. BALTES & K. W. SCHAIE (Eds.), *Life-Span Developmental Psychology* (pp. 145–178). Amsterdam: Academic Press. [https://doi.org/https://doi.org/10.1016/B978-0-12-077150-9.50013-7](https://doi.org/10.1016/B978-0-12-077150-9.50013-7)
- Kolb, A. Y., & Kolb, D. A. (1981). Learning Styles and Learning Spaces: Enhancing Experiential Learning in Higher Education. *Learning & Education*, 4(2). <https://doi.org/https://doi.org/10.5465/amle.2005.17268566>
- Larson, R., & Hostetler, R. (2006). *Cálculo con geometría analítica*. (I. McGraw Hill, Ed.) (8th ed.). México. Retrieved from <https://hellsingge.files.wordpress.com/2013/04/calculo-larsson-8-edicion.pdf>
- Lin, T., Hsu, Y., Lin, S., Changlai, M., Yang, K., & Lai, T. (2012). A review of empirical evidence on scaffolding for science education, (October 2011), 437–455. <https://doi.org/10.1007/s10763-011-9322-z>
- López-Vargas, O., Hederich-Martínez, C., & Camargo-Uribe, Á. (2011). Estilo cognitivo y logro académico / Cognitive Style and Academic Achievement / Estilo cognitivo e rendimento escolar. *Educación y Educadores*, 14(1), 67. Retrieved from <http://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&db=edssci&AN=edssci.S0123.1294201>

1000100005&lang=es&site=eds-live

- López, O., & Triana, S. (2013). Efecto de un activador computacional de autoeficacia sobre el logro de aprendizaje en estudiantes de diferente estilo cognitivo. *Revista Colombiana de Educación*, 64(1), 225–244.
- López Vargas, O., Hederich-Martínez, C., & Camargo Uribe, Á. (2012). Logro En Matemáticas, Autorregulación Del Aprendizaje Y Estilo Cognitivo Mathematics Achievement, Self-Regulated Learning and Cognitive Style. *Suma Psicológica Diciembre Suma Psicológica*, 19(2), 39–50.
- Montenegro, I. (2002). PREGUNTAS COGNITIVAS Y METACOGNITIVAS EN EL PROCESO DE APRENDIZAJE. *Tecné Episteme Y Didaxis TED*, (11). Retrieved from <https://doi.org/10.17227/ted.num11-5602>
- Moore, E. B., Smith, T. L., & Randall, E. (2016). Exploring the Relationship Between Implicit Scaffolding and Inclusive Design in Interactive Science Simulations, 1, 112–123. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-40238-3>
- Ordoñez, J. S., Ramírez, G., & Bedoya, E. (2015). La visualización didáctica en la formación inicial de profesores de matemáticas : el caso de la derivada en el curso de Cálculo I. *Revista Colombiana de Matemática Educativa*, 1(1), 160–165. Retrieved from <http://ojs.asocolme.org/index.php/RECME/article/view/37>
- Pea, R. D. (2004). The Social and Technological Dimensions of Scaffolding and Related Theoretical Concepts for Learning, Education, and Human Activity. *Journal of the Learning Sciences*, 13(3), 423–451. https://doi.org/10.1207/s15327809jls1303_6
- Pineda, C. E. (2013). Una propuesta didáctica para la enseñanza del concepto de la derivada en el último grado de educación secundaria, 124. <https://doi.org/10.1256/004316502320517344>
- Podolefsky, N. S., Moore, E. B., & Perkins, K. K. (2013). Implicit scaffolding in interactive simulations: Design strategies to support multiple educational goals. *Arxiv*, 1–30. Retrieved from <http://arxiv.org/abs/1306.6544>

- Prabawanto, S. (2018). The enhancement of students' mathematical self-efficacy through teaching with metacognitive scaffolding approach. *Journal of Physics: Conference Series*, 1013(1). <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1013/1/012135>
- Puntambekar, S., & Hubscher, R. (2005). Tools for Scaffolding Students in a Complex Learning Environment: What Have We Gained and What Have We Missed? *Educational Psychologist*, 40(1), 1–12. https://doi.org/10.1207/s15326985ep4001_1
- R Pintrich, P., A. F. Smith, D., Duncan, T., & Mckeachie, W. (1991). A Manual for the Use of the Motivated Strategies for Learning Questionnaire (MSLQ). *Ann Arbor. Michigan*, 48109, 1259.
- Ramiro, P., Navarro, J. I., Menacho, I., & Aguilar, M. (2010). Estilo cognitivo reflexividad-impulsividad en escolares con alto nivel intelectual. *Revista Latinoamericana de Psicología*, 42(2), 193–202.
- Rojas Celis, C., & Guacaneme Suárez, E. A. (2013). ¿Qué nos dicen las investigaciones en didáctica de las matemáticas sobre la enseñanza de la derivada? *Revista Científica*, 2(Especial), 201. <https://doi.org/10.14483/23448350.6483>
- Ruiz, E. F., & Carreto, C. (2012). Uso de la Tecnología Como Apoyo en el Aprendizaje de Cálculo. *Revista Iberoamericana de Sistemas, Cibernética e Informática*, 63–66.
- Sánchez-Matamoros, G., García, M., & Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. the understanding of derivative as the object of investigation in mathematics education, 11(2008), 267–296.
- Stone, C. A. (1998). The Metaphor of Scaffolding: Its Utility for the Field of Learning Disabilities. *Journal of Learning Disabilities*, 31, 344–364. Retrieved from <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.825.9460&rep=rep1&type=pdf>
- Thompson, P. W. (1994). Images of rate and operational understanding of the fundamental theorem of calculus. *Educational Studies in Mathematics*, 26(2), 229–274. <https://doi.org/10.1007/BF01273664>

- Vahos, M. R. (2016). Pensamiento variacional : seres-humanos- con-GeoGebra en la visualización de nociones variacionales, (July), 514–528.
- Valencia, N., López, O., & Sanabria, L. (2018). Effect of a motivational scaffolding on e-learning environments: self-efficacy, learning achievement, and cognitive style. *Journal Educators On-Line*, 15(1), 1–14. <https://doi.org/10.9743/JEO2018.15.1.5>
- Van de Pol, J., Volman, M., & Beishuizen, J. (2010). Scaffolding in Teacher–Student Interaction: A Decade of Research. *Educational Psychology Review*, 22, 271–296. <https://doi.org/10.1007/s10648-010-9127-6>
- Vargas, O. L., Hederich-Martínez, C., & Uribe, Á. C. (2012). Logro En Matemáticas, Autorregulación Del Aprendizaje Y Estilo Cognitivo Mathematics Achievement, Self-Regulated Learning and Cognitive Style. *Suma Psicológica Diciembre Suma Psicológica*, 19(2), 39–50.
- Vasco, C. E. (2002). Congreso Internacional: Tecnologías Computacionales en el Currículo de Matemáticas El pensamiento variacional, la modelación y las nuevas tecnologías, 109. Retrieved from <http://funes.uniandes.edu.co/10178/1/Vasco2002El.pdf>
- Villa-Ochoa, J. A., González-Gómez, D., & Carmona-Mesa, J. A. (2018). Modelación y Tecnología en el Estudio de la Tasa de Variación Instantánea en Matemáticas. *Formación Universitaria*, 11(2), 25–34. <https://doi.org/10.4067/S0718-50062018000200025>
- Vrancken, S., & Engler, A. (2014). Una introducción a la derivada desde la variación y el cambio: resultados de una investigación con estudiantes de primer año de la universidad. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 28(48), 449–468. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a22>
- Warwick, P., Mercer, N., & Kershner, R. (2013). “Wait, let’s just think about this”: Using the interactive whiteboard and talk rules to scaffold learning for co-regulation in collaborative science activities. *Learning, Culture and Social Interaction*, 2(1), 42–51. <https://doi.org/10.1016/j.lcsi.2012.12.004>
- Wieman, C. (2013). PhET. Interactive simulations. Retrieved from <https://phet.colorado.edu/es/>

Witkin, H. A., Moore, C. A., Goodenough, D. R., & Cox, P. W. (1977). Field-Dependent and Field-Independent Cognitive Styles and Their Educational Implications. *Review of Educational Research*, 47(1), 1–64. <https://doi.org/10.3102/00346543047001001>

Wood, D., Bruner, J. S., & Ross, G. (1976). the Role of Tutoring in Problem Solving. *Journal of Child Psychology and Psychiatry*, 17(2), 89–100. <https://doi.org/10.1111/j.1469-7610.1976.tb00381.x>

Zydney, J. M. (2012). Scaffolding. In N. M. Seel (Ed.), *Encyclopedia of the Sciences of Learning* (pp. 2913–2916). Boston, MA: Springer US. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-1428-6_1103

ANEXO I



Cálculo Diferencial

Pre- Test

Docente: Lina Marcela Díaz Fernández

--	--	--

Fecha:

Estudiante: _____

Programa: _____ Grupo: _____

Este test tiene como objetivo indagar por la comprensión que como estudiante pueda tener ante diversas situaciones que tienen relación con la matemática. Las preguntas son de opción múltiple con única respuesta.

1. Para combatir el "smog" una compañía libera en la atmósfera toneladas de una sustancia química durante un período de 18 horas diarias. La sustancia química está determinada por la función:

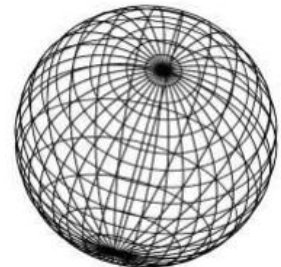
$$f(x) = 0.2x^2 + 2x$$

¿Cuántas toneladas de sustancias químicas libera la compañía durante dos horas?

- a) 2,4 Ton
- b) 3,1 Ton
- c) 1,5 Ton
- d) 0,5 Ton

Las preguntas 2 y 3 se resuelven teniendo en cuenta la situación descrita a continuación:

Suponga que el radio r y el volumen V el de una esfera son funciones diferenciables de t .



2. La ecuación que relaciona la razón de cambio del volumen y la razón de cambio del radio, es:

a) $\frac{dV}{dt} = \frac{4}{3} \pi r^2 \frac{dr}{dt}$

b) $\frac{dr}{dt} = 4r^2 \frac{dV}{dt}$

c) $\frac{dr}{dt} = \frac{4}{3} \pi r^2 \frac{dV}{dt}$

d) $\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$

3. La razón de cambio del volumen, cuando el radio mide 3 cm y está cambiando a una razón de 1.1 cm/s:

a) $17,6 \pi \frac{cm^3}{s}$

b) $39,6 \pi \frac{cm^3}{s}$

c) $24,7 \pi \frac{cm^3}{s}$

d) $13,4 \pi \frac{cm^3}{s}$

Las preguntas 4 y 5 se resuelven teniendo en cuenta la situación descrita a continuación:

La producción de maíz varía con el clima, la cantidad de lluvia y los cuidados que se le tengan en su siembra. La gráfica No. 2 muestra la producción de maíz en el departamento de Antioquia durante los años de 1982 a 1992. 3).

4. ¿De qué año a qué año, la producción promedio de maíz fue mayor?

a) 1991 – 1992

b) 1985 – 1986

c) 1988 – 1989

d) 1989 - 1990

Producción de maíz

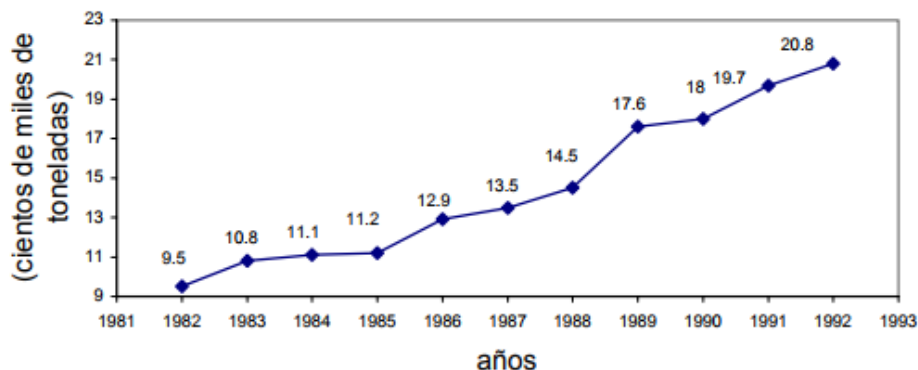
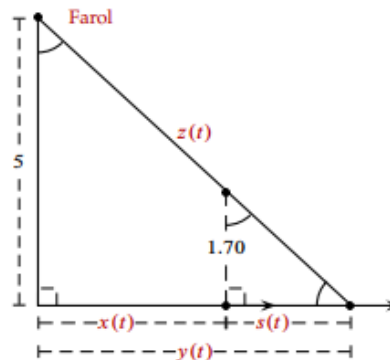


Imagen No. 1

5. El valor de mayor producción promedio es:
- 3 cientos de miles de toneladas
 - 4 cientos de miles de toneladas
 - 5 cientos de miles de toneladas
 - 2 cientos de miles de toneladas
6. Un poste de 5 m de altura tiene un farol en la parte superior; un hombre de 1.70 m de estatura se aleja del poste caminando a una velocidad de 1.2 m/s. Cuando la distancia de la base del poste a la punta (parte más alejada) de la sombra del hombre es de 6 m, ¿con qué velocidad crece su sombra?; ¿con qué velocidad se mueve la punta de la sombra con respecto al farol?

- $1.0\overline{23} \text{ m/s}$
- $0.5\overline{33} \text{ m/s}$
- $2.7\overline{08} \text{ m/s}$
- $0.6\overline{18} \text{ m/s}$



7. La ley adiabática (sin pérdida ni ganancia de calor) para la expansión de un gas es;

$$PV^{1.4} = C,$$

(donde P es la presión, V el volumen y C una constante). En cierto instante, el volumen es de 1 pie^3 , la presión es de 40 libras/pie^2 y ésta está creciendo a razón de 8 libras/pie^2 en cada segundo. Calcular la razón de variación del volumen en dicho instante.

e) $\frac{2 \text{ pie}^3}{5 \text{ s}}$

f) $-\frac{2 \text{ pie}^3}{5 \text{ s}}$

g) $-\frac{1 \text{ pie}^3}{7 \text{ s}}$

h) $\frac{1 \text{ pie}^3}{7 \text{ s}}$

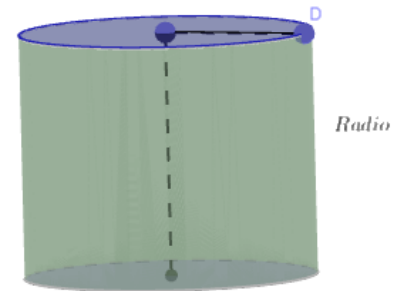
8. Un anuncio publicitario tiene forma de un cilindro circular recto. Determinar la variación de su volumen en el proceso de inflado, sabiendo que la altura permanece constante.

e) $2\pi r(t)h \frac{dr(t)}{dt}$

f) $\pi r(t)h \frac{dh(t)}{dt}$

g) $2\pi h \frac{dr(t)}{dt}$

h) $2rh \frac{dr}{dt}$



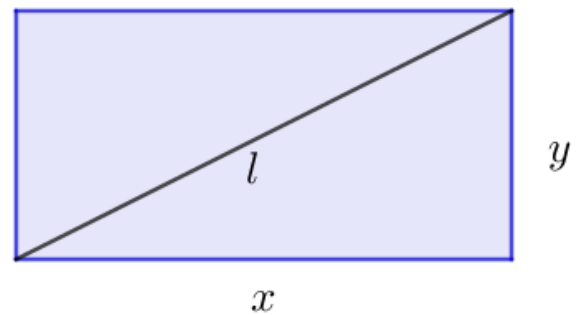
Las preguntas 9 y 10 se resuelven teniendo en cuenta la situación descrita a continuación:

Sea l la longitud de la diagonal de un rectángulo cuyos lados tienen longitudes x & y respectivamente. Si x aumenta con una rapidez de $\frac{1}{2} \text{ m/s}$ y y disminuye con una rapidez de

$\frac{1}{4} \text{ m/s}$:

9. ¿La razón a la que está cambiando la longitud de la diagonal cuando $x = 3 \text{ m}$ & $y = 4 \text{ m}$, es?

a) $\frac{3 \text{ m}}{7 \text{ s}}$



- b) $\frac{1\ m}{10\ s}$
- c) $-\frac{3\ m}{5\ s}$
- d) $\frac{1\ m}{7\ s}$

10. ¿La diagonal está aumentando o disminuyendo en ese instante?

- a) Crece en ese momento
- b) Decrece en ese momento
- c) Se mantiene igual
- d) Aumenta, duplicando su tamaño

Anexo II



Cálculo Diferencial

Pos-Test

Docente: Lina Marcela Díaz Fernández

--	--	--

Fecha:

Estudiante: _____

Programa: _____ Grupo: _____

Este test tiene como objetivo indagar por la comprensión que como estudiante pueda tener ante diversas situaciones que tienen relación con la matemática. Las preguntas son de opción múltiple con única respuesta.

Las preguntas 1 y 2 se resuelven teniendo en cuenta la situación descrita a continuación:

Para supervisar una mina de Urrao (Antioquia), se anotó la producción de cobre en toneladas P para intervalos de 3 días (t), los datos de la *tabla 1* muestran los valores obtenidos.

t	0	3	6	9	12	15	18	21	24
P	0	159.57	304.56	420.39	492.48	506.25	447.12	300.51	51.84

Tabla 31

1. ¿En qué intervalo se obtuvo el promedio máximo de producción?
 - a) De 21 a 24
 - b) De 9 a 12
 - c) De 0 a 3
 - d) De 15 a 18
2. La mayor producción promedio es de:
 - a) 48.33 Ton
 - b) 53.19 Ton

- c) 65.23 Ton
- e) 80.24 Ton

3. El aumento de energía $W(t)$ en kilowatt por hora que una compañía consume durante el tiempo que le permiten trabajar diariamente, está dado por la función: $W(t) = -100t^2 + 240t$

Donde t está dado en horas. Si dicha compañía inicia con el consumo de energía a partir de las 8:00 A.M. ¿A qué hora está consumiendo el máximo de energía y de cuántos kilowatts por hora es el consumo?

- a) 10:00 hrs. y 160 watts por hora
- b) 14:35 hrs. y 160 watts por hora
- c) 9:12 hrs. y 144 watts por hora
- d) 18:15 hrs. y 144 watts por hora

4. Al arrojar una piedra a un estanque de agua tranquila se forman ondas circulares concéntricas cuyos radios aumentan de longitud al paso del tiempo. Cuando la onda exterior tiene un radio de 3 m, éste aumenta a una rapidez (velocidad) de 50 cm=s. ¿A qué rapidez (velocidad) aumenta el área del círculo formado por dicha onda? Ver imagen No. 1

- a) $9.4248 \text{ m}^2/\text{s}$
- b) $6.7548 \text{ m}^2/\text{s}$
- c) $106435 \text{ m}^2/\text{s}$
- d) $8.4248 \text{ m}^2/\text{s}$

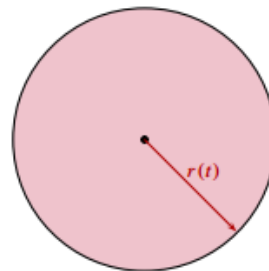


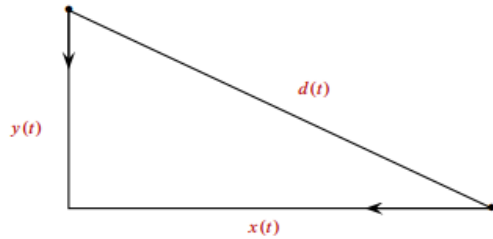
Imagen No. 1

5. Una epidemia de cierta enfermedad para la que no hay cura azota una ciudad y los médicos estiman que las personas enfermas en un tiempo x (medido en días desde el principio de la epidemia) está dado por la función: $f(x) = -x^3 + 60x^2$. ¿Cuál es la razón de propagación instantánea de la epidemia para $x = 30$ días?

- a) 600 personas por día.
- b) 900 personas por día.
- c) 1000 personas por día.
- d) 8000 personas por día.

6. Un avión vuela horizontalmente a una altitud de 1 *milla* a una velocidad de 500 *millas/h* y pasa sobre una estación de radar. Encuentre la razón a la que aumenta la distancia del avión a la estación cuando el avión está a 2 *millas* de la estación

- a) 433 *millas/h*
- b) 200 *millas/h*
- c) 155 *millas/h*
- d) 270 *millas/h*

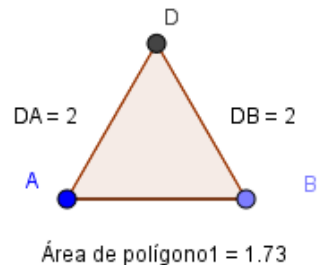


7. Dos trenes parten de una estación con 3 h de diferencia. El que parte primero se dirige hacia el norte con una rapidez de 100 km/h. El otro tren se dirige hacia el este con una rapidez de 60 km/h. ¿A qué razón está cambiando la distancia entre los trenes 2 h después que partió el segundo tren?

- a) 111.2411 *km/h*
- b) 105.7511 *km/h*
- c) 86.751 *km/h*
- d) 99.7511 *km/h*

8. Una placa en forma de triángulo equilátero se expande con el tiempo. Cada lado aumenta a razón constante de 2 *cm/h*. ¿Cuál es la razón de crecimiento del área en el instante en que el valor de ésta es $\sqrt{75} \text{ cm}^2$.

- a) $3\sqrt{10} \text{ cm/h}$
- b) $2\sqrt{15} \text{ cm/h}$
- c) $7\sqrt{11} \text{ cm/h}$
- d) $5\sqrt{3} \text{ cm/h}$



Las preguntas 9 y 10 se resuelven teniendo en cuenta la situación descrita a continuación:

9. El radio de una esfera se incrementa a razón de 2 *cm/s*. La razón de cambio del volumen cuando el radio mide $r = 5 \text{ cm}$, es:

- a) $200 \pi \frac{\text{cm}^3}{\text{s}}$

- b) $70 \pi \frac{cm^3}{s}$
- c) $150 \pi \frac{cm^3}{s}$
- d) $120 \pi \frac{cm^3}{s}$

10. La medida del radio cuando la razón de cambio del volumen es $512 \text{ cm}^3/\text{s}$, es:

- a) $\frac{8}{\sqrt{\pi}} \text{ cm}$
- b) $\frac{8}{\pi} \text{ cm}$
- c) $\frac{\sqrt{8}}{\pi} \text{ cm}$
- d) $\sqrt{\frac{8}{\pi}} \text{ cm}$